Christian SPREITZER, Baden

# Numerisches Lösen von Differentialgleichungen: Realistische Modelle aus der Physik im Schulunterricht

## 1. Differentialgleichungen – in der Schulmathematik gerne ignoriert

In der angewandten Mathematik sind Differentialgleichungen (DGL) von immenser Bedeutung. Die grundlegenden physikalischen Theorien, auf denen ein großer Teil des technischen Fortschritts im 19. und 20. Jahrhundert beruht, sind als (Systeme von partiellen) DGL formuliert, darunter die Maxwellgleichungen für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, die Schrödingergleichung in der Quantenmechanik oder die Einsteingleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. Berühmte und gesellschaftsrelevante Beispiele von DGL finden sich jedoch nicht nur in der Physik, sondern in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften, aber auch in der Medizin, der Soziologie oder den Wirtschaftswissenschaften. Im Schulunterricht sind DGL allerdings kaum oder gar nicht zu finden. Dies liegt wohl zum einen an der geringen Vielfalt exemplarischer DGL, die exakt lösbar und einfach genug für eine Untersuchung im Rahmen der Schulmathematik sind. Zum anderen stößt man bei der Behandlung authentischer Fragestellungen und realitätsnaher Modelle sehr schnell auf DGL, die sich analytischen Lösungsmethoden ganz entziehen.

Mit numerischen Verfahren lässt sich für ein gegebenes System aus DGL und Anfangs- bzw. Randbedingungen hingegen immer eine (zumindest approximative) Lösung finden, sofern es sich um ein gut gestelltes Problem nach der Definition J. Hadamards handelt. Ein solches liegt vor, wenn die Existenz einer eindeutigen Lösung gesichert ist und diese stetig von den Daten abhängt (mit anderen Worten: die Voraussetzungen eines geeigneten Existenz- und Eindeutigkeitssatzes müssen erfüllt sein). Die Numerik spielt daher insbesondere in der angewandten Mathematik seit jeher eine große Rolle und ihre Bedeutung hat durch die digitale Revolution der letzten Jahrzehnte noch deutlich zugenommen. Im Zeitalter der Supercomputer werden physikalische Experimente durch Computersimulationen ergänzt, vielfach machen sie komplexe physikalische Vorgänge einer Modellierung überhaupt erst zugänglich. Beispiele dafür sind die Galaxienentstehung im frühen Universum, das Verschmelzen zweier Neutronensterne, der Kollaps eines massereichen Sterns zu einem schwarzen Loch oder irdische Probleme wie die Veränderung des Klimas durch den Einfluss des Menschen und damit verbundene Prozesse in der Natur. DGL sind ein zentrales Element in der Beschreibung, Modellierung und Simulation all dieser Vorgänge mithilfe von Hochleistungsrechnern.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1151–1154). Münster: WTM-Verlag

Die Wichtigkeit von DGL und numerischen Methoden in vielen Bereichen kommerzieller und wissenschaftlicher Forschung spiegelt sich im Schulunterricht nicht wider. Indes wäre das numerische Lösen von DGL durch die mittlerweile überall verfügbare Technologieunterstützung weder schwierig noch aufwendig. Vor allem würde die Behandlung von DGL und numerischen Lösungsverfahren die Beschäftigung mit realitätsnahen Problemen der angewandten Mathematik ermöglichen, in denen auch kompliziertere Wechselwirkungen, zusätzliche Einflussgrößen oder dissipative Vorgänge wie Reibung berücksichtigt werden. In der das Problem beschreibenden DGL äußert sich das Miteinbeziehen solcher Effekte in Form zusätzlicher Terme oder Abhängigkeiten in der DGL. Dies führt zwar in der Regel dazu, dass die Lösung nicht mehr durch elementare Funktionen ausgedrückt oder überhaupt nicht mehr exakt berechnet werden kann, für eine rein numerische Untersuchung der DGL ist es aber meist völlig unerheblich, ob weitere Terme dazukommen oder kompliziertere Funktionen in den Koeffizienten der DGL auftreten. Das Verfahren bleibt dasselbe und der Aufwand wächst nur unmerklich; es muss lediglich der Computer mit einer anderen Gleichung gefüttert werden. Durch die Verwendung technologischer Hilfsmittel bleibt also viel Raum für die Modellierung und die Diskussion der Ergebnisse.

## 2. Numerische Verfahren für Differentialgleichungen - keine Hexerei!

Um eine DGL numerisch zu lösen, muss diese zunächst diskretisiert werden; die „kontinuierliche" Beschreibung des betrachteten Vorgangs vermöge einer DGL wird durch eine diskrete Beschreibung mittels algebraischer Gleichungen ersetzt. Betrachten wir als Beispiel das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

eine gewöhnliche DGL erster Ordnung für eine Größe $x(t) \in \mathbb{R}$ ($t \in I \subseteq \mathbb{R}$) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$. Ist die Funktion $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfüllt sie eine globale Lipschitzbedingung bezüglich der zweiten Variable, dann existiert eine eindeutige Lösung dieser DGL; dies besagt der Satz von Picard-Lindelöf, ein zentrales Theorem in der Theorie gewöhnlicher DGL. Die einfachste numerische Methode zur Lösung des Anfangswertproblems (1) ist das Eulerverfahren. Dabei wird die Zeitvariable $t$ durch eine Folge von Zeiten $t_n = t_0 + nh$ ($n \in \mathbb{N}_0$) mit Schrittweite $h$ ersetzt und die DGL (1) durch eine Folge von Differenzengleichungen

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n). \tag{2}$$

Dieses Rechenschema kann für eine gegebene Funktion $f$ in wenigen Minuten in jeder Tabellenkalkulation programmiert werden. Je kleiner die Schrittweite $h$, umso besser approximiert die Folge $(x_n)_n$ die Werte der exakten

Lösung $x(t_n)$. Solche (und in der Regel viel raffiniertere) numerische Verfahren sind in jeder gängigen Mathematik-Software implementiert.

## 3. Ein Beispiel mit Vertiefungspotential – Stratosphärensprünge

Als am 14. 10. 2012 ein bekannter Getränkehersteller einen Fallschirmspringer aus einer mit einem Heliumballon bis in 39 Kilometer Höhe aufgestiegenen Kapsel springen ließ, war das weltweite Medienecho groß. Obwohl dieses Projekt keine neuen wissenschaftlichen Erkenntnisse zu Tage förderte, führte es zumindest dazu, dass sich überall auf der Welt Menschen mit physikalischen Fragen zum freien Fall und zum Aufbau der Atmosphäre beschäftigten, selbst wenn sie bis dahin kein Interesse an Physik hatten. Bei der Lektüre des offiziellen Berichts zum Sprung (Thompson et al., 2013), der Daten zur Höhe und Geschwindigkeit des Springers enthält, drängt es sich mathematisch und physikalisch interessierten Leser*innen geradezu auf, ein mathematisches Modell für Sprünge aus der Stratosphäre zu entwickeln und mit den Messdaten vom Sprung zu vergleichen.

Ausgangspunkt für die mathematische Beschreibung eines Stratosphärensprungs ist die Grundgleichung der Mechanik, Newtons zweites Gesetz:

$$ma = F_G - F_L \tag{3}$$

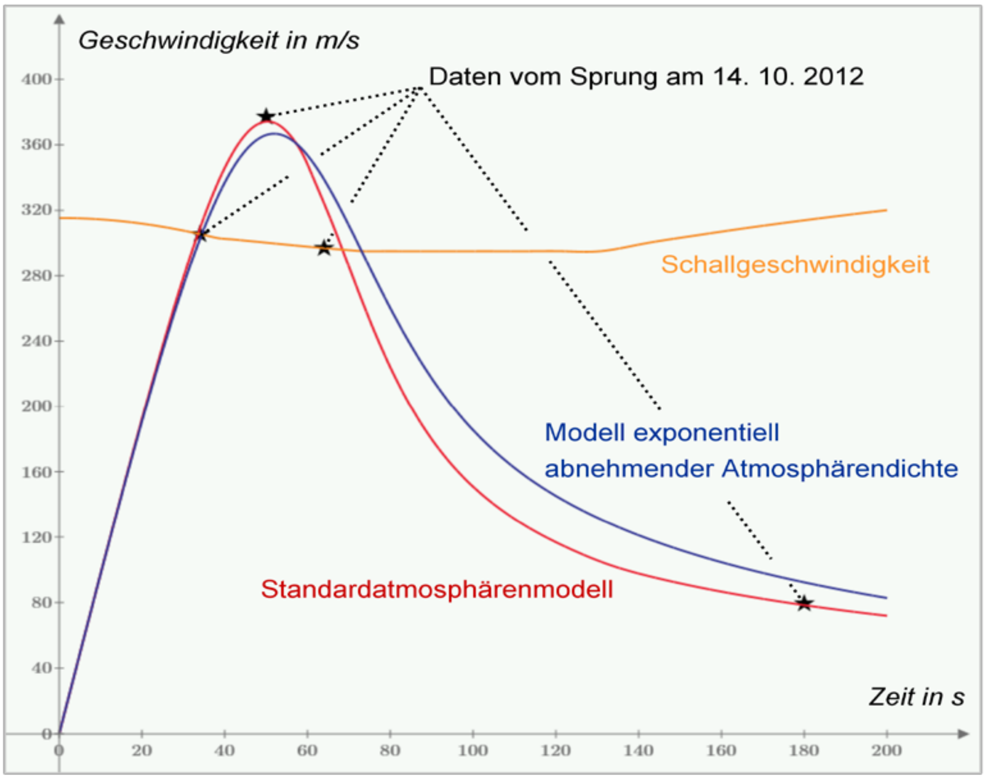
Hierin ist $m$ die Masse des fallenden Körpers, $a$ die Beschleunigung, $F_G$ die Schwerkraft und $F_L$ die Luftwiderstandskraft. Während $F_G = mg$ ($g \approx 9.81\mathrm{ms}^{-2}$) auch in der Stratosphäre in sehr guter Näherung gilt, gestaltet sich eine taugliche Beschreibung von $F_L$ ein wenig komplizierter. Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und zur Atmosphärendichte $\rho$, die mit zunehmender Höhe abnimmt. Die Weg-Zeit-Kurve des fallenden Körpers ist Lösung der aus (3) resultierenden DGL

$$x''(t) + g - c\rho\big(x(t)\big)x'(t)^2 = 0 \tag{4}$$

für die Höhe über Meeresniveau $x(t)$. In die Konstante $c$ gehen die Masse, die der Strömung ausgesetzte Querschnittsfläche des Körpers und das Strömungsprofil ein. Um von Gleichung (3) zur DGL (4) zu gelangen, wird neben dem mathematischen Zusammenhang zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung lediglich ein Modell für den Luftwiderstand benötigt. Dieses kann durchaus von Schüler*innen schrittweise erarbeitet werden (Spreitzer & Süss-Stepancik, 2014).

Charakteristisch für Sprünge aus der Stratosphäre ist ein ausgeprägtes Geschwindigkeitsmaximum aufgrund der in solchen Höhen bereits sehr geringen Atmosphärendichte. Diese beträgt in 39 Kilometern Höhe nur noch wenige Tausendstel ihres Wertes auf Meeresniveau. Ein einigermaßen realistisches Modell für die Atmosphärendichte zu verwenden ist daher essentiell.

In erster Näherung kann eine Exponentialfunktion $\rho(x) = \rho_0 e^{-x/x_0}$ benutzt werden, wie sie aus der Grundgleichung der Hydrostatik für eine Atmosphäre konstanter Temperatur folgt. Tatsächlich sind die Verhältnisse komplizierter, da die Temperatur stark mit der Höhe variiert. Für ein wirklich realitätsnahes Modell sollte $x \mapsto \rho(x)$ durch Interpolation tabellierter Werte der sogenannten US-Standardatmosphäre (NASA, 1976) konstruiert werden. Nach Wahl eines Modells für $\rho$ ist es ein Leichtes, die DGL (4) numerisch zu lösen und die Lösungskurven zu plotten.




Das Ergebnis kann nun mit den Daten verglichen und das Modell verfeinert werden (Modellierungskreislauf), etwa durch Berücksichtigung weiterer physikalisch relevanter Effekte. Gleichzeitig können Sprünge mit veränderten Parametern wie Ausgangshöhe, Masse, Strömungsprofil etc. simuliert werden, wodurch Schüler*innen ein tieferes Verständnis der physikalischen Hintergründe gewinnen.

## Literatur

National Aeronautics and Space Administration (1976). U.S. Standard Atmosphere, 1976. NOAA-S/T 76-1562.

Spreitzer, C. & Süss-Stepancik, E. (2014). Der freie Fall - Von der Stratosphäre bis zum Kuipergürtel. ISTRON-Schriftenreihe (erscheint im Juni 2014).

Thompson et al. (2013). Summary Report: Findings of the Red Bull Stratos Scientific Summit, http://www.redbullstratos.com (23. 3. 2014).