

Christian VAN RANDENBORGH, Würzburg

Verborgene Ideen aufdecken – ein historisches Zeichengerät im heutigen Mathematikunterricht

In der Mathematik wurden immer wieder Werkzeuge erfunden und verwendet. Doch ist eine Beschäftigung mit historischen Zeichengeräten im heutigen Mathematikunterricht noch sinnvoll? Welche Bedeutung können historische Geräte für den heutigen Mathematikunterricht haben? Wie kann ein Zeichengerät eingesetzt werden? Was und wie lernen Schüler bei einem derartigen Einsatz? Eine wichtige, weiterführende und ganz grundsätzliche Perspektive ergibt sich, wenn ein Zeichengerät als *Ideenkonglomerat* unterschiedlicher Ideen verstanden wird.

Ideenkonglomerat als Grundverständnis

Diese Auffassung bedeutet, dass ein Zeichengerät sechs Arten von Ideen enthält. Zunächst hat ein derartiges historisches Gerät eine *Einsatzidee*. Es wird benutzt, um damit etwas zu zeichnen. Die *mechanische Idee* ist für die Bauweise des Geräts verantwortlich. Eine weitere – besonders auch für den Mathematikunterricht – wichtige Idee ist die *mathematische Idee*. Sie findet sich in der Funktionsweise des Geräts wieder. Wird ein Artefakt im Mathematikunterricht untersucht, dann wird es mit einem bestimmten Ziel, einer bestimmten Absicht eingesetzt. Das Gerät enthält somit eine *didaktische Idee*. Die Schüler erforschen das Zeichengerät und entwickeln so bestimmte *Erklärungsideen*. Ein derartiges Gerät bzw. speziell ein Zeichengerät ist zu einer bestimmten Zeit und in einer bestimmten Situation entstanden. Daher ist es immer Ausdruck eines bestimmten mathematischen Interesses und Blicks auf die Geometrie. Damit ist die *kulturell-historischen Idee* angesprochen.

Im Mathematikunterricht steht die Erforschung der mechanischen und mathematischen Idee und ihres Zusammenhangs im Zentrum. Ein wesentliches Ziel ist es, die im Zeichengerät implizite Mathematik explizit zu machen. Genaueres zu dem Ideenkonglomerat des Parabelzirkels von FRANS VAN SCHOOTEN und Hinweise und Erfahrungen zum Unterrichtseinsatz finden sich bei VAN RANDENBORGH (2012a).

Empirische Untersuchung

In unserer empirischen Studie wurde der Einsatz des Parabelzirkels von FRANS VAN SCHOOTEN (1615–1660) und des Pantographen von CHRISTOPH SCHEINER (1573–1650) im Mathematikunterricht untersucht. Dabei standen den Schülern zur Erforschung einerseits reale Nachbauten und andererseits

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1247–1250). Münster: WTM-Verlag

digitale Simulationen (mit GeoGebra) zur Verfügung. Die Ergebnisse wurden vor dem Hintergrund der theoretischen Modelle der Instrumentellen Genese und der Semiotischen Vermittlung analysiert und interpretiert. Hieraus wurde unser Modell der *Instrumentellen Wissensaneignung* entwickelt. (Zum Begriff siehe VAN RANDENBORGH (2012b))

Beim Unterrichtseinsatz von Zeichengeräten stehen die mechanische und die mathematische Idee im Zentrum der Erforschung durch die Schüler. Durch das Aufdecken der Ideen und ihres Zusammenhangs gelangen Schüler zur der im Zeichengerät inhärenten aber verborgenen Mathematik. In unserer Studie konnten verschiedene Beschäftigungsphasen der Schüler unterschieden werden. Bei der Instrumentwerdung eines Zeichengeräts vom Artefakt hin zum Instrument der Wissensvermittlung traten spezifische Zeichen auf, die sich vier verschiedenen Zeichenkategorien zuordnen ließen. Es konnte zwischen *Artefakt-, Schlüssel-, Instrument- und Mathematikzeichen* unterschieden werden (vgl. auch VAN RANDENBORGH (2012b), BARTOLINI BUSSI (2008)). Dabei traten im Laufe dieses Prozesses besondere Zeichen – *Trägerzeichen* – auf, die über die aktuelle Zeichenebene hinausgingen und für die Schülertätigkeiten in der nächsten Phase wichtig waren. Die Schüler gelangten also im Prozess der Instrumentellen Wissensaneignung durch die Trägerzeichen von der einen Zeichenebene zur nächsten. Dieser Weg von den Artefaktzeichen hin zu den Mathematikzeichen bildet die stattfindende Verständnisentwicklung ab. Solche Prozesse konnten bei verschiedenen Zeichengeräten und dem entsprechend auch bei realen und digitalen Zeichengeräten festgestellt werden. Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede beim Einsatz eines realen bzw. digitalen Parabelzirkels sind ausführlicher bei VAN RANDENBORGH (2012a) dargestellt. An dieser Stelle sollen einige *Beeinflussungsfaktoren* dargestellt werden. Diese wurden im Zusammenhang mit den in der Studie festgestellten *Instrumentalisationstypen* deutlich. Bei der Untersuchung der Zeichengeräte durch die Schüler spielte die Beschäftigung mit Grenzen und Zwängen oder mit Möglichkeiten und Veränderungsmöglichkeiten eine entscheidende Rolle. Es konnten sowohl beim Parabelzirkel als auch beim Pantographen – bei den digitalen und auch bei den realen Modellen – im Wesentlichen drei Instrumentalisationstypen festgestellt werden. So spielte bei einem Instrumentalisationstyp des realen Parabelzirkels das Betrachten, Aufdecken und Erklären von Grenzen und Zwängen des Geräts eine die Erforschung leitende Rolle. Beim zweiten Typ standen dabei die Möglichkeiten und Veränderungsmöglichkeiten des jeweiligen Geräts im Vordergrund. Dieses war hier die Leitperspektive für die Erforschung des Geräts. Beim dritten Typ ließ sich keine Dominanz des ersten oder zweiten Blickwinkels feststellen. Die Instrumentelle Wissensaneignung gelang je

nach Instrumentalisationstyp unterschiedlich. Ein Beeinflussungsfaktor für diesen Prozess ist sicherlich der Instrumentalisationstyp. Damit hingen auch die weiteren Faktoren zusammen. So waren die Wege der Instrumentellen Wissensaneignung bei einem realen Gerät anders als bei einem digitalen Nachbau. Die Ausbildung von Zeichen der jeweiligen Zeichenkategorien und insbesondere der Trägerzeichen war wichtig. Ein weiterer Punkt war, ob und welche Erklärungsideen von den Schülern gefunden wurden. In diesem Zusammenhang zeigte sich noch einmal ganz deutlich, dass es darauf ankam, ob die Zwänge, Grenzen und (Veränderungs-) Möglichkeiten des Geräts für die Schülertätigkeiten wichtig waren. Der entscheidende Faktor dafür, ob aus dem Artefakt ein Instrument der Wissensvermittlung werden konnte, war, ob die *zugrundeliegenden Zwänge erkannt, erforscht und mathematisch erklärt* wurden.

Fazit: Instrumentelle Genese und Semiotische Vermittlung

In unserer Studie ließ sich der wechselseitige Beeinflussungsprozess der *Instrumentellen Genese* beobachten. Dabei ließ sich feststellen, dass die Instrumentation die erste Richtung der Instrumentellen Genese ist. Die dem Zeichengerät (Artefakt) inhärenten Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten bestimmen die Tätigkeit des Schülers (Subjekt). Die Erforschung des Geräts wird auf der Seite des Subjekts von seinem Vorwissen, seinen Fähigkeiten und Fertigkeiten (Kompetenzen) bestimmt. Darüber hinaus konnte je nach Instrumentalisationstyp die Leitperspektive für die Untersuchung des Geräts einerseits die Erforschung von Zwängen und Grenzen oder andererseits ein Veränderungsdenken sein. In dem Prozess der Instrumentwerdung spielten insbesondere die Trägerzeichen eine wichtige und weiterführende Rolle. Aus diesen entwickelten sich Erklärungsideen. Diese machten es möglich, dass aus dem Artefakt ein Instrument der Wissensvermittlung wurde. Die besondere Bedeutung der Trägerzeichen ist auch für das Modell der *Semiotischen Vermittlung* aufschlussreich.

Schon PEIRCE schrieb den Zeichen eine Vermittlungsfunktion zwischen Subjekt und Objekt zu. Sie sind für ihn Mittel der Erkenntnis (vgl. auch HOFFMANN (2003)). Auf Grund unserer empirischen Untersuchung können wir hier noch genauer formulieren: Die Trägerzeichen vermitteln zwischen Objekt und Interpretant. Sie lenken die Verständnissentwicklung der Schüler (vgl. VAN RANDENBORGH (2012b)). Diese Ergebnisse sollen nun mit Blick auf das Lernen von Mathematik verdeutlicht werden.

Folgerungen für das Lernen von Mathematik

Geht man von den drei Repräsentationsmodi nach BRUNER (1974) aus und berücksichtigt, dass es letztlich darum geht, alle drei zu beherrschen, so

sind die Übergänge zwischen den einzelnen Ebenen besonders wichtig. Dabei lässt sich die beschreibende Ebene der Artefaktzeichen der enaktiven Ebene zuordnen. Die deutende Ebene der Schlüsselzeichen entspricht dann der ikonischen Ebene. Der symbolischen Ebene sind die Instrument- und Mathematikzeichen zuzurechnen. Genauer: Bei der begründenden Ebene der Instrumentzeichen sprechen wir von der symbolischen Ebene *mit* Bezug zum Zeichengerät. Bei der abstrakten Ebene der Mathematikzeichen sprechen wir von der symbolischen Ebene *ohne* Bezug zum Zeichengerät. Den Prozess von den Artefaktzeichen hin zu den Mathematikzeichen bezeichnen wir dementsprechend als **Abstraktion**. Der Übergang von der einen zur anderen Ebene wird durch die Trägerzeichen ermöglicht und gelenkt. Betrachten wir die Schülertätigkeiten beim Erforschen eines Zeichengeräts so gibt es hier Bezüge zum Modellieren. Interessant erscheint uns zunächst, dass das Zeichengerät selbst einerseits Bestandteil der realen Welt und auch der mathematischen Welt ist. Als Gegenstand (Artefakt, materielles Objekt) ist das Zeichengerät zunächst in der realen Welt sichtbar und bestimmte Elemente des Ideenkonglomerats sind bereits erkennbar. Aber erst im Laufe der Erforschung des Geräts durch die Schüler wird auch die zugrundeliegende Mathematik aufgedeckt. Durch dieses Mathematisieren werden die verborgenen Ideen sichtbar. Zu weiteren Aspekten, z.B. der Bedeutung der Zeichenkategorien im Modellierungsablauf, siehe VAN RANDENBORGH (2013). Abschließend wollen wir noch einmal betonen, dass der Aufforderungscharakter der Zeichengeräte nicht nur Neugier und Freude bei den Schülern weckt. Didaktisch bedeutsamer ist noch, dass die Erforschung des Geräts direkt zu mathematischen Tätigkeiten und Themen führt.

Literatur

- Bartolini Bussi, M.G. / Mariotti, M.A. (2008): Semiotic meditation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective; in: L. Englisch (Hrsg.): Handbook of international research in mathematics education, New York 2008, S. 746-783
- Bruner, J.S. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin 1974
- Hoffmann, M.H.G. (2003): Semiotik als Analyse-Instrument; in: M.H.G. Hoffmann (Hrsg.): Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven, Hildesheim/Berlin 2003, S. 34-77
- van Randenborgh, Chr. (2012a): Parabelzirkel real und digital. Wissensaneignung durch Modelle und Simulationen; in: Mathematik lehren 174, S. 11-14
- van Randenborgh, Chr. (2012b): Instrumentelle Wissensaneignung im Mathematikunterricht; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Bd. 2, S. 893-896
- van Randenborgh, Chr. (2013): Zeichengeräte erforschen – Modellieren erleben; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, Bd. 2, S. 1022-1025