Alexandra THIEL-SCHNEIDER, Dortmund

# Exponentielles Wachstum verstehen – Unterschiedliche Deutungsmöglichkeiten des Wachstumsfaktors

Der Begriff des exponentiellen Wachstums bildet einen zentralen Aspekt für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. Ein tragfähiger Vorstellungsaufbau ist für die Weiterentwicklung des funktionalen Verständnisses exponentieller Funktionen in der Sekundarstufe II von großer Bedeutung. Erste Ergebnisse im Rahmen von Design-Experimenten zeigen, dass die Schüler die Zinseszinsformel $K_n=K_0(1+p/100)^n$ in Aufgaben mit gegebenen Startkapital und Zinssatz nennen und damit rechnen können, aber ihre einzelnen Elemente nicht erklären und sie nicht auf Situationen mit ganzzahligen Wachstumsfaktoren übertragen können.

Der vorliegende Beitrag konzentriert sich darauf, die Hürden im Lernprozess bei der Verbindung vom Konzept des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors zu beschreiben.

## 1. Spezifiziertes Forschungsinteresse und methodologischer Zugang

Unterschiedliche Studien zeigen, dass Lernende dazu neigen, exponentielle Wachstumsprozesse falsch zu deuten, wenn sie vorher lineare Prozesse betrachtet haben (vgl. Ebersbach, Van Dooren 2008). Als mögliche Ursache wird ein gut entwickeltes lineares Konzept genannt, das auf nicht lineare Zusammenhänge übergeneralisiert wird (vgl. Ebersbach, Van Dooren 2008). Confrey & Smith (1995) zeigen in einer Studie, dass Lernende das Konzept der exponentiellen Änderungsrate verwenden, auch wenn sie den Begriff noch nicht kennen gelernt haben. Die Lernenden sollten am Beispiel von Zellen, die sich pro Stunde verneunfachen, die Veränderung der Funktionswerte in einer Tabelle beschreiben und zeigten drei intuitive Vorstellungen von exponentiellen Änderungsraten: (a) multiplikativ, d.h. die Lernenden erkannten, dass pro Schritt mit dem selben Faktor multipliziert wird, (b) additiv, sie berechneten die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Funktionswerte und (c) proportional new to old, zu dem vorherigen Wert wird ein proportionaler Anteil davon, in dem Beispiel der Verneunfachung das 8-fache des vorherigen Werts, hinzuaddiert. Ihre Studie zeigt außerdem, dass die Verbindung der Vorstellungen vom ‚splitting' mit dem Kovariationsaspekt einen tragfähigen Ansatz zur Vorstellungsentwicklung bei exponentiellen Funktionen herstellen kann. Unter ‚splitting´ wird eine multiplikative Operation verstanden, indem z.B. gleichzeitig multiple Ver-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1215–1218). Münster: WTM-Verlag

sionen eines Originals erzeugt werden. Ein Bespiel hierfür ist das Wachstum von Bakterienkulturen, bei dem sich ein Bakterium in eine feste Anzahl an Bakterien teilt. Weitere differenziertere Ergebnisse über Entwicklungen in Lernprozessen in diesem Themenfeld gibt es bislang wenig. Deshalb setzt sich diese Studie im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung (vgl. Hußmann et al. 2013) u.a. mit der Erforschung von Lernprozessen zur Begriffsbildung von exponentiellen Funktionen auseinander, um zu analysieren, welche Gelingensbedingungen beim Vorstellungsaufbau unterstützen und welche Hürden sich zeigen.

## 2. Methodische Umsetzung

Die Erhebung der Daten fand in drei Zyklen von Designexperimenten (vgl. Hußmann et al. 2013) statt, größtenteils in Form von klinischen Interviews. Zur Analyse der Begriffsbildungsprozesse werden im Transkript die Festlegungen und Fokussierungen, die die Lernenden eingehen, analysiert. Festlegungen sind explizite Aussagen mit propositionalen Gehalt, die ein Individuum für wahr hält. Fokussierungen sind Kategorien in Form von individuellen Ideen bzw. Konzepten, mit denen Situationen individuell strukturiert werden. Unter einer Situation wird eine nach spezifischen begrifflichen Teilcharakteristika strukturierte Aufgabe verstanden. Auf normativer Ebene werden strukturgleiche Situationen identifiziert und bezogen auf den Wachstumsfaktor zu verschiedenen Situationsklassen zusammengefasst (vgl. Hußmann 2013). In den Design-Experimenten werden vor allem die Situationsklassen der ganzzahligen Wachstumsfaktoren (verdoppeln, verdreifachen, ...) und der nicht ganzzahligen (prozentual steigenden) Wachstumsfaktoren gegenübergestellt.

| Zyklus | Forschungsfokus | Entwicklungsfokus | Designexperiment; Stichprobe |
|---|---|---|---|
| 1 | Ausschärfung des Forschungsinteresses; Erkenntnisse über die Lernendenperspektive | Entwicklung der Kernidee und des sinnstiftenden Kontextes | 2 Partnerinterviews; Gym., Jgst. 9, n=4<br>Fragebogen; Ge., Jgst. 9, n=93; Gym., Jgst. 7, n=31 |
| 2 | Beforschung von Lernprozessen und individuellen Vorstellungen zu spezifischen Aspekten des exponentiellen Wachstums | Strukturierung des Lehr- Lernarrangements; Optimierung von Aufgabenformulierungen | Klassenerprobung; Gym., Jgst. 9, n=93<br>2 x Serie von 6 Partnerinterviews; Ge., Jgst. 9, n=4<br>2x7 Einzel- und Partnerinterviews; Gym., Jgst. 11, n=2; Ge., Jgst. 11, n=6 |
| 3 | Wie kann man die Entwicklung eines „Wachstumsfaktordualismus“ verhindern? | Entwicklung einer Fördereinheit | 2 x Serie von 4 Einzelinterviews; Gym., Jgst. 10, n=2 |

Auf der Entwicklungsebene wurde im Rahmen des Projektes KOSIMA (vgl. Hußmann, Leuders, Prediger & Barzel 2011) ein Lehr-Lernarrangement mit dem sinnstiftenden Kontext ‚Sparstrategien – Wie kann ich mein Geld gewinnbringend anlegen?' entwickelt. Im ersten Teil soll das Kapital bei gegebenem Zinssatz und Startkapital nach mehreren Jahren in einem Schritt bestimmt werden, im zweiten Teil erkunden die Lernenden u.a., welche Strategien vom proportionalen Denken auf exponentielles Wachstum übertragen werden können.

## 3. Wachstumsfaktordualismus

Im zweiten Design-Zyklus wurde beobachtet, dass das entwickelte Lehr-Lernarrangement die Lernenden u.a. bei der Generierung eines Terms und beim Einschätzen und Beschreiben des exponentiellen Wachstums unterstützt hat. Die bereits vorhandenen proportionalen Strategien wurden entsprechend modifiziert und eine Übergeneralisierung proportionaler auf exponentielle Strategien war nicht mehr vorhanden. Allerdings war bei einigen Lernenden, unabhängig davon, ob sie mit der Lernumgebung gearbeitet haben oder im Unterricht ein anderes Lehrwerk verwendet wurde, am Ende des Lernprozesses ein Wachstumsfaktordualismus zu beobachten, der an dem folgenden Ausschnitt eines Interviews verdeutlicht werden soll.

Veronika hat zu einem Sparangebot, bei dem mit 1 Cent gestartet wird und dieser Cent sich jeden Monat verdoppelt, eine richtige Wertetabelle erstellt und einen Graphen inklusive Steigungsdreiecke gezeichnet. Als sie gefragt wird, wie der Term lautet, mit dem man das Kapital nach mehren Monaten berechnet, notiert sie den Term $1 \cdot 2^x$. Als die nach dem Wachstumsfaktor gefragt wird, nennt sie die Zahl 1,02. Dies soll Veronika nun erklären:

| | |
|---|---|
| V | Also, ehm, das ist halt so, dass, ehm, Eins sind halt die 1 Cent und Zwei – also es wird ja verdoppelt. Mal Zwei und das hoch wäre dann je nach dem, wie viele Monate, also das ist immer – weil, ehm, lang aufgeschrieben wäre das ein mal Zwei mal Zwei mal Zwei mal Zwei, aber stattdessen kann man das dann auch hoch der Monatszahl nehmen. |

Hier fokussiert Veronika auf die Verdopplung und geht die inhaltlich richtige Festlegung ein: Der Verdopplungsterm ist $1 \cdot 2^x$, x steht für die Monate.

| | |
|---|---|
| V | Und der Wachstumsfaktor dazu ist als dieses 1,02, also 0,02 ist halt, was dazukommt und die eins, diese 1% sind halt das Ganze, was dann dazu direkt gerechnet wird. Weil mit 0,02 würde man halt nur ausrechnen, was dazukommt, aber nicht, was da raus kommt. |

Im zweiten Teil ihrer Aussage gerät diese Fokussierung in den Hintergrund und Veronika fokussiert nun auf die Bildungsweise und Funktion des (in ihren Augen prozentualen) Wachstumsfaktors und geht zum einen die Festlegung ein, 1,02 sei der Wachstumsfaktor der Verdopplung und ‚mit dem Wachstumsfaktor (1,02) multiplizieren heißt, dass man zu dem Ganzen (sie bezieht sich hier auf das Startkapital) das addiert, was hinzukommt (die Zinsen).

Sowohl bei Veronika als auch bei den Lernenden, die einen ‚Wachstumsfaktordualismus' ausgebildet haben, ist in der Situationsklasse des ganzzahligen Wachstumsfaktors die Vorstellung der proportional new to old-Änderungsrate nicht hinreichend vorhanden. Es fehlt die Vorstellung, dass bei einer Ver-n-fachung zu dem vorherigen Wert das (n-1)-fache des vorherigen Werts addiert wird und somit fehlt auch die vorstellungorientierte Verbindung zur Zinseszinsformel. Andersherum ist in der Situationsklasse des prozentualen Wachstumsfaktors die Vorstellung der multiplikativen Änderungsrate nicht hinreichend vorhanden. Die Fokussierung auf die Zinseszinsformel bewirkt, dass ein prozentualer Zuwachs nicht als Ver-n-fachung identifiziert wird. Es findet also keine entsprechende Vernetzung des Konzeptes des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors statt. Beide Situationsklassen werden von den Lernenden eher nebeneinanderstehend betrachtet.

## 4. Konsequenzen für das Design

Im dritten Design-Zyklus wird deshalb untersucht, ob und wie die oben genannte Vernetzung vom Konzept des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors mit Hilfe eines geeigneten Anschauungsmittels vorstellungsorientiert hergestellt werden kann.

## Literatur


Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26,* S. 135-164.

Ebersbach M., Van Dooren, W., Van Den Noortgate, W., Resing, W. (2008). Understanding linear and exponential growth: Searching for the roots in 6- to 9-years-olds. *Cognitive Development 23(2),* S. 237-257.

Hußmann, S. (2013). The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations, Preprint, TU Dortmund.

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. *Beiträge zum Mathematikunterricht,* S. 419-422.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Kormorek & S. Prediger (Hrsg.): *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S.25-42). Münster: Waxmann.