Maike VOLLSTEDT, Berlin, Rudolf STRÄSSER, Gießen

Zum Sinn der Geometrie: Spekulationen über einen vernachlässigten Forschungsgegenstand

Sinn und Lernen

Geht man von dem wohlbekannten „didaktischen Dreieck“ von Mathematik – Lehrer(in) – Lernende(r) aus (für eine kommentierende Erweiterung vgl. Rezat & Sträßer, 2012), so erweist sich Didaktik der Mathematik als eine Humanwissenschaft, in der die Frage nach Sinn und Bedeutung des Lehrens und Lernens höchst angemessen ist. Verschiedenste Stellen in der Literatur verweisen darauf, dass Lehr-Lernprozesse dann erfolgreich und nachhaltig sind, wenn sich das Gefühl von subjektivem Sinn einstellt (z. B. Gebhard, 2003). Die Konstruktion von Sinn wird damit, zumindest aus der Perspektive der Lernenden, zum wichtigsten Gütekriterium für die Unterrichtsgestaltung (Meyer, 2008).

Allerdings gibt es kein allgemein geteiltes Verständnis darüber, was unter Sinn zu verstehen ist. Kilpatrick, Hoyles und Skovsmose (2005, 14) stellen fest: “Even if students have constructed a certain meaning of a concept, that concept may still not yet be ‘meaningful’ for him or her in the sense of relevance to his/her life in general.” In der Literatur zeigt sich eine Mischung philosophischer und nicht-philosophischer Interpretationen, wobei in der Regel zwischen individuellem Sinn (der Frage nach individueller Relevanz) und objektivem Sinn (gesellschaftlich geteilte Bedeutung) unterschieden wird (vgl. z. B. Howson, 2005). Wir gehen im Folgenden von einem Sinnbegriff aus, der die persönliche Relevanz eines Objekts oder einer Handlung in den Mittelpunkt der Betrachtungen stellt (für dieses Verständnis vgl. Vollstedt, 2011) und nehmen damit vor allem die Perspektive der Schülerinnen und Schüler ein. Dabei nähern wir uns der Frage nach dem Sinn (hier der Geometrie) unter zwei Perspektiven, nämlich einmal durch theoretische Überlegungen, zum anderen aber auch unter Nutzung empirischer Ergebnisse (insbesondere aus Vollstedt, 2011). Dort ergaben sich in einer explorativen Interview-Studie mit qualitativen Methoden die folgenden sieben Sinnkonstruktionstypen: „Erfüllung gesellschaftlich geprägter Anforderungen“, „Aktive Auseinandersetzung mit Mathematik“, „Effiziente und unterstützende Gestaltung von Unterrichtsprozessen“, „Kognitive Selbstentwicklung“, „Anwendungsrelevanz“, „Wohlbefinden durch eigene Leistung“ und „Emotional geprägte Entfaltung“. Ein Blick zurück auf das didaktische Dreieck legt noch nahe, dass zwischen dem Sinn für Lernende und dem für Lehrende zu unterscheiden ist (vgl. auch Meyer, 2008).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1263–1266). Münster: WTM-Verlag

Fundamentale Ideen, Grundbegriffe und Grundvorstellungen

Nicht nur in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik werden Konzepte untersucht, die das Umfeld des Sinn-Begriffes markieren, sich aber von diesem durchaus abgrenzen lassen. Bruner (1960) führte den Begriff der *fundamentalen Ideen* in die pädagogisch-didaktische Diskussion, der dann von Schreiber wie folgt charakterisiert wurde: Fundamentale Ideen zeichnen sich durch „Weite (‚logische' Allgemeinheit)", „Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen)" und „Sinn (Verankerung im Alltagsdenken)" aus (Schreiber, 1983 zit. nach Bender, 1983; weitere Überlegungen in Schweiger, 2006 und Rezat, 2012). Zentral ist dabei, dass der Blick nicht primär auf einzelnen Fakten ruht, sondern die Struktur des Faches ersichtlich wird. Diese Orientierung einerseits sowie die Anwendungsmöglichkeit in der Welt kann Sinn sein und enthält eine individuell-subjektive Komponente (vgl. auch Birkmeyer et al., in Vorbereitung). Davon unterschieden sind *Grundbegriffe*, die zentralen Begriffe der einzelnen mathematischen Gebiete (für die Geometrie z. B. Punkt, Gerade, Körper). Sie haben eine gewisse Nähe zum Konzept der Bedeutung, bestimmen vor allem das Gerüst einer Wissenschaft und können, müssen aber nicht persönlich bedeutsam sein. Das in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik verbreitete Konzept der *Grundvorstellungen* sucht Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und individueller Begriffsbildung herzustellen. Hier geht es u. a. um „Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen" und die „Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit" (vom Hofe, 1995, 97). Mit Hilfe von Grundvorstellungen kann Sinn folglich durch Verknüpfung mit vertrauten Konzepten und durch deren Anwendungsmöglichkeit in der Welt entstehen. Auch für Grundvorstellungen gilt wiederum, dass sie mehr nach einer allgemeinen Bedeutsamkeit einer Vorstellung fragen und weniger die individuellen Sinnkonstruktion, also die persönliche Relevanz eines Objekts oder einer Handlung in den Mittelpunkt der Betrachtungen stellen.

Spekulationen über den Sinn der Geometrie

Wir wollen nun der Frage nach dem Sinn speziell der Geometrie nachgehen. Die Geometrie scheint uns für eine erste Bearbeitung der Sinn-Frage deshalb geeignet, weil sie in der von uns wahrgenommenen Welt allgegenwärtig ist und in der Schule eine Gelegenheit zum Argumentieren und Beweisen bietet. Weiterhin ermöglichen kreative Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (oder heutzutage Dynamischer Geometrie-Software) umfassende und bedeutsame Eigentätigkeiten der Lernenden und lassen die Schönheit der Mathematik erfahrbar werden.

In der Literatur finden sich nun einige Hinweise auf den Sinn der Geometrie (in der Bedeutung von persönlicher Relevanz von Objekten und/oder Handlungen). Insbesondere hat Bender (1983) mit einer Liste „Zentrale[r] Ideen der Geometrie für den Unterricht“ Vorarbeiten geleistet. Er führt dabei drei Dimensionen des Sinns von Geometrie weiter aus: die „praktische Nutzung von Geometrie“ (z. B. in Prozessen der Passens unter Nutzung von Symmetrie, bei der Optimierung sowie beim Messen, 11-12), die Rolle der Geometrie für die „Repräsentation und Visualisierung“ von Gegenständen und Beziehungen (13), vergisst aber auch nicht den „theoretische(n) Wesenszug“ der Geometrie (z. B. bei der Bearbeitung von Konzepten wie Kontinuität und Invarianz, 14-15). Hier finden sich bereits eine Fülle von Kandidaten für die persönliche Relevanz geometrischer Konzepte und Tätigkeiten.

Auf eine andere Zugangsweise zum Sinn der Geometrie sei nun durch die Theorie der *embodied cognition* verwiesen (vgl. z. B. Núñez, 2000, insbesondere S. 11ff). Mit den Vorstellungen von “image schemas“ und “conceptual metaphors“ eröffnet Núñez einen Zugang zum Sinn der Geometrie über allgemeinere, die Geometrie umfassende Vorstellungen, wobei sich geometrische, speziell topologische Beziehungen wie das “container schema” mit seinen drei Teilen Inneres (“interior”), Grenze (“boundary”) und Äußeres (“exterior“) als fundamental für die menschliche Erfahrung von Welt erweisen.

Ausblick: Empirische Studie zum Sinn der Geometrie

Für empirische Studien zum Sinn der Geometrie sei zunächst noch einmal daran erinnert, dass eine Unterscheidung zwischen dem Sinn der Geometrie für Lehrend und dem für Lernende zu unterscheiden ist (vgl. die unterschiedlichen „Landkarten“ in dem einschlägigen Text von Andelfinger, 1988, 170f). Dies muss in einem Forschungsansatz berücksichtigt werden.

Ansonsten bietet sich beim gegenwärtigen Forschungsstand ein rekonstruktives Vorgehen an. Möglicherweise nach Art eines Grounded-Theory-Ansatzes sollte das Betreiben von Geometrie beobachtet werden und dann – mit Hilfe von nachträglichem lauten Denken (*stimulated recall*) – der individuelle Sinn von Geometrie rekonstruiert werden. Ist es gelungen, durch theoretische Überlegungen einschlägige Situationen zu identifizieren, so kann man auch versuchen, den Sinn von Geometrie über fokussierte Interviews zu erfassen.

Alternativ zu einem rekonstruierenden Verfahren kann man natürlich auch ein theoriegeleitetes Vorgehen versuchen. Möglicherweise auf der Grundlage bestehender Überlegungen (wie z. B. in Vollstedt, 2011) könnte man eine geometriespezifische Ausdifferenzierung bestehender Theorie zur Sinnkonstruktion versuchen, um der persönlichen Relevanz geometrischer Begriffe und Verfahren auf die Spur zu kommen.

Literatur

Andelfinger, B. (1988). *Geometrie*. Soest: Soester Verlagskontor.

Bender, P. (1983). Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 1983*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker. 8-17.

Birkmeyer, J., Combe, A., Gebhard, U., Knauth, T. & Vollstedt, M. (in Vorbereitung). Lernen und Sinn: 10 Grundsätze zur Ermöglichung von Sinn in schulischen Bildungsprozessen. In: U. Gebhard (Hrsg.). *Sinn im Dialog*. Heidelberg: Springer VS.

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Gebhard, U. (2003). Die Sinndimension im schulischen Lernen: Die Lesbarkeit der Welt. In B. Moschner, H. Kiper, & U. Kattmann (Hrsg.), *PISA 2000 als Herausforderung. Perspektiven für Lehren und Lernen* (205-223). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Howson, A. G. (2005). “Meaning” and School Mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Hrsg.), *Meaning in Mathematics Education* (17-38). New York: Springer.

Kilpatrick, J., Hoyles, C., & Skovsmose, O. (2005). Meanings of ‘Meaning of Mathematics’. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Hrsg.), *Meaning in Mathematics Education* (9-16). New York: Springer.

Meyer, M. A. (2008). Unterrichtsplanung aus der Perspektive der Bildungsgangforschung. In M. A. Meyer, M. Prenzel, & S. Hellekamps (Hrsg.), *Sonderheft Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Perspektiven der Didaktik* (10. Jg, 117-137). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Núñez, R. E. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakahara, & M. Koyama (Hrsg.), *Proceedings of PME 24* (Bd. 1, 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

Rezat, S. (2012). Fundamental ideas: A means to provide focus and identity in didactics of mathematics as a scientific discipline? In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of PME 36* (Bd. 4, pp. 3-10). Taiwan: PME.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From triangle to tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 44*(5), 641-651.

Schweiger, F. (2006) Fundamental ideas. A bridge between mathematics and mathematics education. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), *New mathematics education research and practice* (63-73). Rotterdam: Sense.

Vollstedt, M. (2011). *Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong: Eine rekonstruktiv-empirische Studie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.