Rudolf VOM HOFE, Bielefeld

Primäre und sekundäre Grundvorstellungen

Es ist unbestritten, dass ein verständiges Umgehen mit mathematischen Begriffen und Verfahren die Ausbildung adäquater Grundvorstellungen erfordert. Sie sollen abstrakte Begriffe auf einer anschaulichen Ebene repräsentieren und so eine Verbindung zwischen reinem Zahlenrechnen und außer- und innermathematischen Anwendungszusammenhängen ermöglichen.

Die Tragweite von Grundvorstellungen ist jedoch nicht unbegrenzt. Wenn neue Felder der Mathematik betreten werden, können alte, vertraute und bislang erfolgreiche Vorstellungen an ihre Grenzen stoßen; die entsprechenden mathematischen Inhalte bedürfen dann neuer Interpretation und Sinngebung. Wird eine geordnete Erweiterung des Grundvorstellungsgefüges nicht erreicht, so können alte intuitive Annahmen zu unbewusst wirksamen Fehlvorstellungen werden und das Verständnis neuer mathematischer Inhalte beeinträchtigen. So kann etwa die Annahme, dass ein Produkt stets größer sei als beide Faktoren - eine Vorstellung, die aus dem Rechnen mit natürlichen Zahlen stammt - bei den Bruchzahlen zu erheblichen Konflikten führen (vgl. Wartha & vom Hofe, 2005).

Im Laufe der Schulzeit werden *primäre* Grundvorstellungen, d. h. solche, die ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen aus der Vorschulzeit haben, immer mehr durch *sekundäre* Grundvorstellungen ergänzt, die aus der Zeit mathematischer Unterweisung stammen. Während erstere den Charakter von konkreten Handlungsvorstellungen haben, handelt es sich bei letzteren um Vorstellungen, die zunehmend mit Hilfe von mathematischen Darstellungsmitteln wie der Zahlengeraden, dem Koordinatensystem oder symbolischen Darstellungen repräsentiert werden. Diese Entwicklung soll im Folgenden am Beispiel der negativen Zahlen konkretisiert werden.

Von den natürlichen zu den negativen Zahlen

Welche der alten und vertrauten Grundvorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen sind in den negativen Zahlen weiterhin tragfähig? Welche müssen revidiert bzw. erweitert werden? Und welche müssen neu hinzukommen?

Betrachten wir zunächst die Grundvorstellungen, die charakteristisch für das Rechnen mit natürlichen Zahlen sind.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1267–1270). Münster: WTM-Verlag

Die wichtigsten Vorstellungen von natürlichen Zahlen konkretisieren sich im kardinalen (Wie viel sind es?) und ordinalen (Der wievielte ist es?) Zahlaspekt. Für die Anwendung ist vor allem der kardinale Aspekt von Bedeutung. Die dominanten Vorstellungen der Grundrechenarten sind das Zusammen- oder Hinzufügen (Addition), das Wegnehmen oder Abtrennen (Subtraktion), das sukzessive oder simultane Vervielfachen (Multiplikation) und das Verteilen oder Aufteilen (Division).

All diese elementaren Deutungen von Zahlen und Operationen sind nicht nur anschaulich – z. B. durch Bilder oder Graphiken – repräsentierbar, sondern sogar gegenständlich realisierbar. Man kann in diesem Sinne von einer *Realisantenebene* unterhalb einer *Repräsentantenebene* sprechen. Zahlen sind dabei als konkrete Dingmengen realisierbar, Verknüpfungen als durchführbare Handlungen.

Zahlen
Repräsentanten
Realisanten

Die Entstehung dieser elementaren Vorstellungen wurzelt in einer Vielzahl unterschiedlicher Handlungserfahrungen, die das Kind spielerisch erworben hat, weit vor einer systematischen Beschäftigung mit Mathematik, es handelt sich daher um primäre Grundvorstellungen.

Nun hängt der Grad der Ausbildung von Grundvorstellung zum einen vom Umfang der zugrundeliegenden Handlungserfahrungen ab und zum anderen von der Häufigkeit ihrer Aktivierung. Beides ist bei elementaren primären Vorstellungen in hohem Maße gegeben, daher besitzen sie eine hohe Stabilität und sind von großer Robustheit gegenüber Änderungen von außen.

Wie sehen nun adäquate Grundvorstellungen für negative Zahlen aus und welche Darstellungen eignen sich als Vorstellungsgrundlage?

Während sich die Vorstellungen der natürlichen Zahlen über jahrelange vielfältige reale Handlungen entwickeln, fehlt für die negativen Zahlen eine ähnliche Handlungsgrundlage. Zwar gibt es Vorerfahrungen aus dem Alltag, wie negative Temperaturen oder Kontostände, das systematische Rechnen mit negativen Zahlen ist jedoch ein Produkt mathematischer Unterweisung. Typische Anwendungsfelder sind lineare Systeme, die nach beiden Seiten unbegrenzt sind. Die wichtigste Zahlvorstellung ist nicht mehr die kardinale, es geht nicht um das Abzählen von Dingmengen; viel-mehr geht es darum, Zustände oder Änderungen innerhalb eines Systems zu beschreiben.

Eine gegenständliche Repräsentation auf Realisantenebene ist bei den negativen Zahlen nicht möglich. Zwar lassen sich auch hier die Strukturen Zustand-Änderung-Zustand bzw. Änderung-Änderung-Änderung darstellen, Zahlen und Operationen beschreiben dabei jedoch nicht konkrete Dingmengen oder Gegenstände, sondern Zustände und Zustandsveränderungen innerhalb eines Systems. Während sich dabei etwa die Multiplikation einer negativen mit einer positiven Zahl noch darstellen lässt, gibt es für die Multiplikation zweier negativer Zahlen in diesen Kontexten keine sinnvolle Deutung. Zum Aufbau entsprechender Grundvorstellungen sind Kontexte dieser Art daher nur begrenzt geeignet.

Geometrische Objekte als neue Vorstellungsgrundlage

Eine Möglichkeit für eine umfassende und tragfähige Vorstellungsgrundlage finden wir hingegen auf der Zahlengeraden, kombiniert mit einem entsprechenden Pfeilmodell. Wenngleich dieses Modell abstrakter ist als gegenständliche Modelle, so knüpft es doch auch an anschauliche Erfahrungen an, da Zahlengerade und Pfeile bereits aus der Grundschule bekannt sind. Es handelt sich hier um sekundäre Vorstellungen, die bereits im Kern angelegt sind und an dieser Stelle weiter ausgebaut werden können. Sowohl die Zahlen als auch die Addition und die Multiplikation mit einem positiven Faktor können hierbei naheliegend und leicht dargestellt werden. Erklärt man die Multiplikation mit (–1) als Operation, die einen Zustand bzw. einen vom Nullpunkt ausgehenden Pfeil invertiert, d. h. am Nullpunkt spiegelt, so lässt sich die Multiplikation allgemein als Kombination aus Strecken bzw. Stauchen und Spiegeln umfassend geometrisch deuten. Diese Interpretation kann zum einen plausibel motiviert werden und ist zum anderen auch bei weiteren Inhalten der folgenden Jahrgangsstufen tragfähig (vgl. Griesel et al., 2012; Fast & vom Hofe, 2014).

Auch bei der Erklärung der Subtraktion und Division kann eine bereits seit der frühen Grundschulzeit angelegte Idee helfen, die hier eine neue Bedeutung gewinnt: Die Idee des Rückwärtsrechnens bzw. der Gegenoperation: Eine Subtraktion ist nichts anderes als die Addition der Gegenzahl, eine Division nichts anderes als die Multiplikation mit dem Kehrwert. Ohne dass dies bewusst thematisiert oder problematisiert werden muss, wird hier den bisherigen Operationen Subtraktion und Division ein neuer Stellenwert zugewiesen: Sie werden bei den rationalen Zahlen als eigenständige Operationen eigentlich nicht mehr benötigt, da nun das Operieren mit den inversen Elementen möglich ist (vgl. vom Hofe & Hattermann, 2014).

Insgesamt können wir damit zur Entwicklung von Grundvorstellungen für negative Zahlen Folgendes festhalten:

- Die Einführung der negativen Zahlen erfordert Erweiterungen bzw. Modifizierungen der bisherigen Grundvorstellungen.
- Diese Erweiterungen verlangen zunehmend die Integration von sekundären Grundvorstellungen.
- Charakteristisch hierfür sind nicht mehr reale, sondern vorgestellte Handlungen an mathematischen Darstellungsmitteln (z. B. Bewegungen auf der Zahlengeraden oder im Koordinatensystem).
- Für die Darstellung der negativen Zahlen bietet sich die Geometrie als angemessene Vorstellungsgrundlage an: Die Begriffe Zahlengerade, Pfeil und Spiegelung sind abstrakter als gegenständliche Modelle, dennoch werden diese bereits in der Grundschule angelegt.
- Über die ebenfalls bereits angelegte Idee des Rückwärtsrechnens bzw. der Gegenoperation wird das Pfeilmodell zu einer umfassenden Vorstellungsgrundlage.
- Dieses Modell verkörpert gleichzeitig tragfähige mathematische Strukturen (inverse Elemente, eindimensionaler Vektorraum) und bereitet somit weiteres mathematisches Lernen vor.

Dies alles sind Gründe, neben anschaulichen Spielen und alltagsnahen Modellen das Pfeilmodell als umfassende und allgemeine Vorstellungsgrundlage anzubieten und dadurch die Ausbildung von sekundären Grundvorstellungen zu flankieren.

Literatur

Fast, V. & vom Hofe, R. (2014). Das Pfeilmodell als Vorstellungsbasis für negative Zahlen. In: *mathematik lehren,* 183, S. 20 - 24

Griesel, H.; Postel, H. & vom Hofe, R. (2012). *Mathematik heute*. Braunschweig: Schroedel

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum

vom Hofe, R. & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. In: *mathematik lehren,* 183, S. 2 - 7

Wartha, S. & vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. In: *mathematik lehren,* 128, S. 10 – 17