Sebastian WARTHA, Christiane BENZ, Lukas FINKE, Karlsruhe

Rechenstrategien und Zahlvorstellungen von Fünftklässlern im Zahlenraum bis 1000

1. Stand der Forschung

Flexibles Rechnen wird in allen mathematikdidaktischen Forschungsrichtungen als bedeutende Kompetenz angesehen und hat mittlerweile auch in vielen bildungspolitischen Dokumenten Eingang gefunden. Trotz unterschiedlicher Nuancen bei der Definition von flexiblem Rechnen bzw. der adaptiven Wahl von Rechenstrategien (vgl. Rathgeb-Schnierer & Green 2013) ist allen Untersuchungen gemein, dass neben dem Wissen von Grundaufgaben (*basic facts*) und dem Wissen über Rechengesetze der Zahl- und der Operationsvorstellung ein große Bedeutung eingeräumt wird. Threlfall (2002) weist darauf hin, dass das intuitive Erkennen (*noticing*) als Zusammenspiel von gegebener Aufgabe (Rechenoperation, Zahlen, Zusammenhang zwischen Zahlen) und verfügbarem Wissen um Grundaufgaben, Rechengesetzen und weiteren Konzepten wie z.B. Stellenwertverständnis den Lösungsweg bestimmt. Heirdsfield (2003) identifiziert in einer empirischen Wiederholungsstudie mit 41 Drittklässlern und 33 Viertklässler eine revidierte Version eines konzeptuellen Wissensnetzes bei erfolgreichen flexiblen Rechnern. Sie beschreibt ein Netzwerk aus Wissen über Zahlen (Zerlegung in Stellenwerte, Nähe zu anderen Zahlen), Wissen über Auswirkung von Operationen auf Zahlen und aus Wissen von auswendig gewussten Grundaufgaben und Strategien aus dem Zahlenraum bis 20. Der jeweils genutzte Rechenweg ist demnach nicht nur abhängig vom eingesetzten Zahlenmaterial der Aufgabe, sondern vor allem auch von den Voraussetzungen, die die Kinder mitbringen: dem Nutzen von Zahlbeziehungen und Aktivieren von Operationsvorstellungen. Im Zahlenraum bis 100 existieren einige Untersuchungen mit Grundschulkindern, die den Zusammenhang von Voraussetzungen und genutzten Rechenweg untersuchen und beschreiben (z.B. Rathgeb-Schnierer & Green 2013). Weniger erforscht ist jedoch der Zusammenhang von Voraussetzungen und adaptiver Strategiewahl im Zahlenraum bis 1000 mit älteren Kindern. Eine bereits ältere Untersuchung von Selter (2000) befragt zu drei Messzeitpunkten (Mitte und Ende der dritten und Beginn der vierten Jahrgangsstufe) längsschnittlich rund 100 Kinder zu jeweils sechs Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000. Bei jeweils fünf der sechs Aufgaben ist das Zahlmaterial so gewählt, dass bei entsprechender Aktivierung von Zahl- und Operationsvorstellungen die Aufgaben im Kopf z.B. über Hilfsaufgaben gelöst werden können. Selter (2000) weist eindrucksvoll nach, dass Rechenme-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1275–1278). Münster: WTM-Verlag

thode (schriftlich, gestützt oder im Kopf) und die Rechenstrategie in der Regel *nicht* adaptiv gewählt wird. Beispielsweise ist 701 − 698die Aufgabe, die über alle drei Messzeitpunkte am seltensten gelöst wurde. Interessant ist, dass die Aufgabe nicht nur besonders fehleranfällig ist, sondern meist über den schriftlichen Algorithmus oder über Strategien des Wegnehmens (z.B. schrittweise oder Stellenwerte extra mit den typischen Fehlern) bearbeitet wurde. Eine aufgabenadaptive Strategiewahl über Aktivierung von (ordinalen) Zahlvorstellungen (die Zahlen liegen nahe beieinander) und der passenden Grundvorstellung zur Subtraktion (Minus bedeutet auch Unterschiedsbestimmung) findet häufig nicht statt.

2. Fragestellung

Anknüpfend an den dargestellten Forschungsstand stellt sich einerseits die Frage, ob sich an den zentralen Ergebnissen der Selter-Studie in den letzten 12 Jahren grundsätzliches geändert hat. Die Hoffnung ist berechtigt, da in curricularen Vorgaben und Schulbüchern die Diskussion um die Wahl einer aufgabenbezogenen Rechenstrategie thematisiert wird. Darüber hinaus sollen Ursachen diskutiert werden, warum häufig eine adaptive Wahl der Bearbeitungsstrategie nicht vorgenommen wird bzw. werden kann. Am Beispiel der in 601 – 598 leicht geänderten Rechenaufgabe sollen mögliche Gründe beleuchtet werden, warum die Aufgabe *nicht* „schnell" gelöst wird:

(1) Können keine Zahlvorstellungen aktiviert werden (wird die „Nähe" nicht erkannt)?

(2) Ist die Grundvorstellung zur Subtraktion eingeschränkt auf ihre Bedeutung des Wegnehmens?

(3) Stehen andere Lösungswege zwar zur Verfügung, werden aber nicht gewählt aufgrund von Erfahrungen oder (geheimen) Vereinbarungen („mehr Fehler, wenn Kopfrechnen", „häufiger begründen müssen")?

Diese Fragen sollen im Rahmen einer empirischen Studie untersucht werden, die im Großraum Karlsruhe im Rahmen von (derzeit 13) wissenschaftlichen Hausarbeiten durchgeführt wird. Hierzu werden Lernende der fünften Jahrgangsstufe an Werkrealschulen in halbstandardisierten Einzelinterviews zur Bearbeitung der Subtraktionsaufgaben 723 – 376 und 601 – 598, sowie weiterer Fragen zu Zahl- und Subtraktionsvorstellungen aufgefordert. Gegenstand der Auswertung ist die Analyse der gewählten Rechenstrategie und -methode sowie die Untersuchung der aktivierten Zahl- und Operationsvorstellungen. Hierzu gehören die Frage nach alternativen Lösungswegen, die Frage nach passenden Rechengeschichten und der Zahl- und Strategiedarstellungen an geeigneten Materialien (ordinal: Rechenstrich oder Zahlenstrahl bzw. kardinal: Mehrsystemblöcke). Bei der

Auswertung wird beispielsweise unterschieden, ob adäquate Zahl- und Operationsvorstellungen spontan, auf gezielte Nachfrage oder gar nicht aktiviert werden können. Derzeit können die Ergebnisse von N = 313 Kindern aus 23 Klassen und 15 Schulen ausgewertet werden. Die Studie wird weitergeführt.

3. Erste Ergebnisse und Diskussion

Die Aufgaben 723 – 376 und 601 – 598 unterscheiden sich in der Lösungshäufigkeit nicht signifikant: gut 60 % der befragten Lernenden lösen die Aufgabe richtig, jedoch über unterschiedliche Methoden. Die häufigste gewählte ist bei beiden Aufgaben ein schriftlicher Subtraktionsalgorithmus. Bei 723 – 376 ist die Wahl erwartungsgemäß und es wählen 72 % eine schriftliche Methode. Bei 601 – 598 läge eine Bearbeitung im Kopf bei Aktivierung entsprechender Vorstellungen nahe, die Aufgabe wird aber von 49 % der Lernenden schriftlich und nur von 44 % im Kopf bearbeitet. Gestütztes Kopfrechnen spielt bei beiden Aufgaben kaum eine Rolle (10 % bzw. 7 %).

Tabelle 1: Gewählte Rechenmethoden

		601 - 598				Gesamtsumme
		im Kopf	gestützt	Schriftlich	am Material	
723 - 376	im Kopf	43	2	7	0	52
	gestützt	17	12	2	0	31
	Schriftlich	73	8	142	0	223
	am Material	2	1	0	1	4
Gesamtsumme		135	23	151	1	310

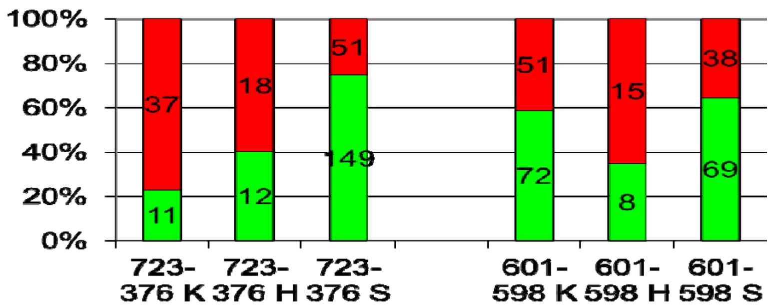
Die große Mehrzahl der Befragten wählt die Rechenmethode nicht in Abhängigkeit des verwendeten Zahlenmaterials: Die Hauptdiagonale in Tab. 1 listet alle Kinder auf, die bei beiden Aufgaben die gleiche Methode gewählt haben: Das sind 197 von 310 Kinder (64 %). Die nahe liegende adaptive Wahl bei entsprechenden Voraussetzungen (schriftliche Bearbeitung der Aufgabe 723 – 376 und 601 – 598 im Kopf) wird nur von 24 % der Befragten getroffen.

Tabelle 2: Rechenstrategien bei 601-598

Rechenstrategie 601 – 598 im Kopf und richtig gerechnet	**∑ 72**
Ergänzen	38
Ergänzen (Schriftliches Verfahren im Kopf)	8
Wegnehmen (Hilfsaufgabe)	5
Wegnehmen (Schrittweise, Misch, Stellenw./Ziffern extra)	21

Die Wahl einer adaptiven Strategie bei 601 – 598 gelingt gut der Hälfte der Kinder, die diese Aufgabe im Kopf und richtig löst: Nur 38 Kinder nutzen die Zahlennähe und die Grundvorstellung der Subtraktion als Differenz für eine Ergänzungsstrategie mit Zahlen. 5 Kinder der über 300 nutzen eine Hilfsaufgabe. Die anderen erfolgreichen Kopfrechner verwenden Wegnehmstrategien wie Stellenweise extra, Mischform und schrittweises Rechnen bzw. führen den schriftlichen Algorithmus vollständig im Kopf durch.

Diagramm 1: Erfolgsquoten der verschiedenen Rechenmethoden



Vordergründig kann die Dominanz des schriftlichen Algorithmus (auch bei der Ergänzungsaufgabe) über die Erfolgsquoten der Methoden begründet werden.

Bei beiden Aufgaben wird über den schriftlichen Algorithmus anteilig am häufigsten ein richtiges Ergebnis ermittelt. Als besonders fehleranfällig erweisen sich bei beiden Aufgaben halbschriftliche Methoden.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass nur einem Bruchteil der befragten Lernenden eine adaptive Wahl der Rechenmethode und –strategie gelingt (12 % wählen die Methode adaptiv und eine Ergänzungs- bzw. Hilfsaufgabenstrategie bei 601 – 598 und erhalten das richtige Ergebnis). In weiteren Auswertungen sollen die anderen oben genannten Fragestellungen systematisch untersucht werden.

Literatur

Heirdsfield, A. (2003). Mental computation: Refining the cognitive frameworks. In Bragg, L., Campbell, C., Herbert, H. & Mousely, J., Eds. *Proceedings Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity,* 421-428, Geelong, Victoria.

Rathgeb-Schnierer, E. & Green, M. (2013). *Flexibility in Mental Calculation in Elementary Students from Different Math Classes.* http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG2/WG2_Rathgeb_Schnierer.pdf

Selter, Ch. (2000). Vorgehensweise von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21(3/4)*, 227–258.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50(1)*, 29-47.