Sebastian WARTHA, Karlsruhe

Grundvorstellungen und schriftliche Rechenverfahren

Wird seitens der curricularen Vorgaben und des Anspruchs der Lehrperson gefordert, dass Inhalte nicht nur reproduziert, sondern auch *verstanden* werden, so bietet sich zur inhaltlichen Ausschärfung und Operationalisierung von „Verstehen" das Konzept mathematischer Grundvorstellungen an. Grundvorstellungen ermöglichen die Übersetzung von Zahlen, Rechenoperationen und Bearbeitungsstrategien zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen – z.B. mathematisch-symbolischen Sprech- oder Schreibweisen, Bildern, Handlungen oder Rechengeschichten (vgl. Wartha & Schulz 2012). Ein Verständnis kann dann unterstellt bzw. untersucht werden, wenn arithmetische Prozesse nicht nur auf einer (z.B. der symbolischen) Darstellungsebene durchgeführt werden, sondern diese auch über die Aktivierung einer Grundvorstellung in eine andere übersetzt werden können (z.B. der Angabe einer passenden Rechengeschichte oder einer Handlung).

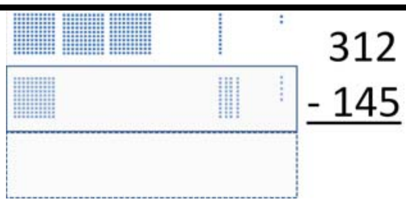
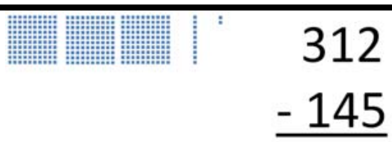
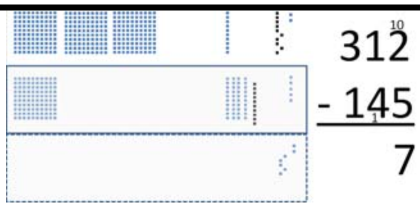
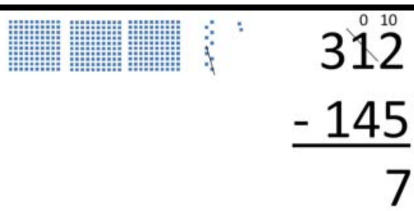
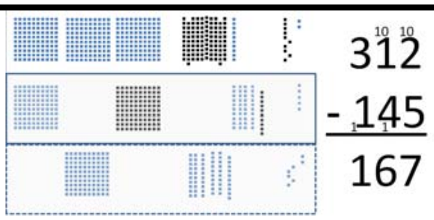
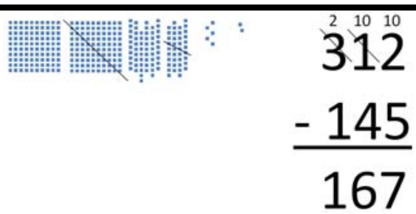
Gerade für Kinder, die Schwierigkeiten bei der Aktivierung adäquater Grundvorstellungen haben (z.B. Zahl als Position und Subtraktion als Unterschied bei der Aufgabe $601 - 598$), stellt die Einführung der schriftlichen Rechenverfahren eine (scheinbare, aber) deutliche Erleichterung dar, da sich *Rechen*prozesse auf den Zahlenraum bis 20 beschränken und durch Befolgen des Algorithmus Fehler minimieren lassen. Der Vorteil der Beschränkung auf das Ziffernrechnen ist gleichzeitig ein Nachteil, da bei der Berechnung von Aufgaben auch in größeren Zahlenräumen *keine Aktivierung* von Zahlvorstellungen und Zahlzusammenhängen mehr nötig ist. Zudem wird ein Verständnis des Verfahrens zwar curricular erwartet, häufig jedoch nicht erworben.

Etabliert haben sich fünf Verfahren der schriftlichen Subtraktion, die sich einerseits in der Rechenrichtung (Abziehen oder Ergänzen) und andererseits in Techniken der Behandlung von Übergängen zwischen den Stellenwerten unterscheiden. Ist die Ziffer des Minuenden kleiner als die des Subtrahenden, so kann

1) von der nächsthöheren verfügbaren Stelle entbündelt und die Ziffer um 10 erhöht („Entbündeln", auch missverständl. *Borgen* genannt).
2) der Subtrahend um 10 und der Minuend um 1 in der nächsthöheren Stelle gleichsinnig verändert werden („Erweitern").
3) der Subtrahend bis zur gewünschten Ziffer weitergezählt und damit die nächsthöhere Stelle des Subtrahendens um 1 vergrößert werden („Auffüllen").

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1279–1282). Münster: WTM-Verlag

Die Strategien des Übertrags (1) und (2) können mit beiden Rechenrichtungen verknüpft werden, bei Auffüllen (3) muss die Subtraktion zwingend ergänzend interpretiert werden. Sollen die Verfahren durch die Übersetzung einer Handlung an didaktischem Material abgeleitet (und somit eine Grundvorstellung zum Algorithmus aufgebaut) werden, so sind diese Handlungen durch sehr verschiedene Aufgabenstellungen motiviert und völlig verschieden in der Durchführung. Stellvertretend werden die handlungsauslösenden Rechengeschichten und die auf die symbolische Notation führende Handlung an den Verfahren *Abziehen mit Entbündeln* sowie *Ergänzen mit Erweitern aufgezeigt*. Zu vereinbarende Konvention beim Arbeiten mit Geld ist, dass nur Stückelungen in Zehnerpotenzen betrachtet werden (max. also Hunderter). Beim Verfahren Ergänzen und Erweitern wird der Unterschied (und damit das Ergebnis) durch ein ergänzendes Legen der Differenz bei der „ärmeren“ Person ermittelt.

<table>
<tr><th>Ergänzen und Erweitern</th><th>Abziehen und Entbündeln</th></tr>
<tr><td>Frederik hat 312 €, Klaus hat 145 €. Wie groß ist der Unterschied?</td><td>Hedwig hat 312 €. Sie gibt Volker 145 €. Wie viel hat sie noch?</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5 + ? = 2 geht nicht, also schenkt jemand Fred 10 E, Klaus 1 Z.</td><td>Sie kann ihm keine 5 E geben, also 1 Zehner in 10 Einer wechseln</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5Z + ? = 1 Z geht erst, wenn Fred 10 Z und K. 1 H erhalten.</td><td>Es können 4 Z erst dann weggenommen werden, wenn 1 H = 10 Z</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Unterschied: 1 H, 6 Z, 7 E.</td><td>10 Z – 4 Z = 6 Z, 2 H – 1 H = 1 H</td></tr>
</table>

Um den schriftlichen Algorithmus des Ergänzens und Erweiterns zu erhalten, muss der Unterschied durch gleichsinniges Verändern ermittelbar gemacht werden (auch wenn andere Handlungsweisen zur Differenzbildung näher gelegen hätten). Bei der Übersetzung in eine Rechengeschichte sind die Vermögen der betrachteten Personen hierdurch erfreulicherweise jeweils um 110 € angewachsen, die gesuchte Differenz hat sich natürlich nicht verändert. Aus diesem Grunde sind Kontexte des Ergänzens (Klaus besitzt 258 €, der Fernseher kostet 412 €) unbrauchbar, da während der Handlung das Vermögen und der Preis des Fernsehers stets gleichsinnig angehoben werden – sehr unrealistisch.

Werden zu den Verfahren Grundvorstellungen aufgebaut, so geht deren Nutzen über das Verfügbarmachens einer universellen Rechenmethode deutlich hinaus: Es können vertiefte Einsichten in das Stellenwertsystem erlangt werden. Insbesondere das Subtrahieren nach dem Verfahren Abziehen mit Entbündeln mit Aufgaben, bei denen viele Nullen im Minuenden stehen sind hierzu hervorragend geeignet: Bei der Aufgabe 2 002 – 738 muss bereits im ersten Schritt ein Tausender fortgesetzt entbündelt werden, um genügend Einer zur Verfügung zu haben und die 8 Einer des Subtrahendens wegnehmen zu können. Nicht nur auf anschaulicher Ebene ist das eine große Chance, fortgesetztes Entbündeln im Stellenwertsystem zu wiederholen (1 T = 9 H, 9 Z, 10 E).

Derzeit ist in den meisten Bundesländern die Wahl des Subtraktionsverfahrens curricular nicht vorgegeben. Die Freigabe des Verfahrens hat zur Folge, dass an Grundschulen verschiedene (fünf) Subtraktionsverfahren unterrichtet werden. Im Rahmen einer empirischen Studie wurden im Großraum Karlsruhe Lernende aus 23 fünften Klassen von Werkrealschulen befragt, mit welchem Verfahren sie subtrahieren und die Anzahl der *verschiedenen* Verfahren pro Klasse ermittelt.

Anzahl verschiedener Subtraktionsverfahren	1	2	3	4
Anzahl Klassen	4	7	10	2

In den meisten Klassen sieht sich die Lehrperson wenigstens zwei (7 von 23 Klassen), meistens sogar drei oder vier (12 von 23 Klassen) unterschiedlichen Verfahren konfrontiert. Wenn sie die Vorkenntnisse der Kinder (also das in der Grundschule gelernte Verfahren) berücksichtigt und nicht nur bei falschen Lösungen Grundvorstellungen (re)aktivieren möchte, so ist dies eine gewaltige Herausforderung. Da sich die Verfahren nicht nur in der Rechenrichtung, sondern vor allem in der Behandlung des Übertrags grundsätzlich unterschieden, ist eine Kommunikation im Klassenverband („Rechenkonferenz") nicht oder nur höchst eingeschränkt möglich.

In Bezug auf Strategien des (gestützten) Kopfrechnens ist ein hohes Maß an Flexibilität gewünscht und die aufgabenangepasste Wahl der Rechenstrategie kann als Indikator für besonders hohe arithmetische Kompetenzen gewertet werden. Werden kulturhistorische Aspekte außer Acht gelassen, so scheint es wenig sinnvoll, Kindern mehr als ein Verfahren für die schriftliche Subtraktion an die Hand zu geben. Die Verfahren werden unabhängig vom Zahlenmaterial durchgeführt und der Vorteil des Wissens um ein zweites Verfahren ist verschwindend gering. Wenn kraft curricularer Vorschriften kein Verfahren vorgegeben ist, so liegt es in der Hand der Lehrperson oder der Fachkonferenz, sich auf ein Verfahren zu einigen. Entscheidungsgrundlage können folgende Fragen sein:

- Besteht der Anspruch, dass die Lernenden das Verfahren verstehen sollen, d.h., dass der Algorithmus nicht nur symbolisch, sondern z.B. auch durch eine Handlung durchgeführt werden kann?
- Soll die dem Verfahren zu Grunde liegende Situation und Handlung intuitiv sein, d.h. soll sich ein (schwacher) Lerner bei Unsicherheiten, wie der Algorithmus durchgeführt wird, durch eigene nahe liegende Überlegungen diesen (wieder) überlegen können?
- Kann die Lehrperson selbst den Algorithmus befriedigend auf verschiedenen Darstellungsebenen (z.B. Handlung) erklären?

Die Diskussion um das geeignete Verfahren (bzw. deren Freigabe) ist nicht neu (Ross & Pratt Cotter 2000; Padberg & Wittmann 2001). In o.g. Studie konnte nachgewiesen werden, dass die Fehlerquoten der Aufgabe 723 – 376 unabhängig von der Technik des Übertrags ist ($N = 195$): Bei Entbündelungsstrategien beträgt die Fehlerquote 20 %, bei Erweiterungs- & Auffüllstrategien 24 % [Unterschied ist statistisch nicht relevant χ^2 (1, $N = 196$) = 0.205, p=.65]. Wichtiger als die Frage nach der höheren Lösungshäufigkeit sollte für die Wahl des Subtraktionsalgorithmus allerdings sein, bei welchem Verfahren der Anteil der Kinder am höchsten ist, die eine Vorstellung hierzu aufgebaut haben. Ein Indikator hierfür kann die Übersetzung in Kontext und/oder Handlung sein. Hierzu sind weitere Auswertungen der Studie in Arbeit.

Literatur

Padberg, F., & Wittmann, E.Ch. (2001). Freigabe des Verfahrens zur schriftlichen Subtraktion. *Die Grundschulzeitschrift.* 14 – 15.

Ross, S., & Pratt Cotter, M. (2000). Subtraction in the United States. *The Mathematics Educator, 10 (1),* 49 – 56.

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen.* Berlin: Cornelsen.