Tobias WIERNICKI-KRIPS, Aachen

Invertieren als fundamentale Idee in der Mathematik?

“Von jedem anderen Fach hat ein Schüler am Ende der Schulzeit wenigstens eine Idee – sogar von Jura oder Wirtschaftswissenschaften, die gar nicht im Lehrplan vorkommen. Nur bei Mathematik kommt der Schulunterricht nicht einmal in die Nähe dessen, was das Fach wirklich ist.“ (Beutelspacher, SPIEGEL 50/2004)

Schülerinnen und Schülern das Wesen der Mathematik nahezubringen ist eines der Ziele, das mit diversen Konzepten von fundamentalen Ideen erreicht werden soll. Im Zentrum dieses Beitrags stehen die These, dass Invertieren zu den fundamentalen Ideen zählt, und die Vorteile einer Berücksichtigung dieser Idee in der Unterrichtspraxis. Dazu wird zunächst kurz auf den Begriff der fundamentalen Idee eingegangen und werden auf dessen Hintergrund Forschungsfragen formuliert.

1. Fundamentale Ideen in der Mathematik

Fast jedes Konzept zu mathematischen Ideen setzt andere Zielrichtungen. In vielen werden fundamentale Ideen als übergeordnete Ideen, typische Denkweisen oder Grundpinzipien der Mathematik gesehen, denen eine gewisse Vagheit innewohnt (vgl. Schweiger 1992; Schwill 1993; Vohns 2007). Schwill fasst in einer „Definition“ zusammen:

„Eine fundamentale Idee (bezgl. einer Wissenschaft) ist ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das (1) in verschiedenen Bereichen (der Wissenschaft) vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (Horizontalkriterium), (2) auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (Vertikalkriterium), (3) in der historischen Entwicklung (der Wissenschaft) deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (Zeitkriterium), (4) einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (Sinnkriterium).“ (Schwill 1993, S. 23)

Diese Ideen werden bei Lernenden erst durch die Beschäftigung mit mehreren stellvertretenden Inhalten wirksam, denen eine gemeinsame Idee zugeordnet werden kann. In der Literatur genannte Ziele, die durch eine Orientierung an fundamentalen Ideen im Mathematikunterricht erreicht werden sollen, sind z.B.: Wesen der Mathematik transportieren, günstige Transferbedingungen schaffen, Stoff vertikal gliedern, Inhalte strukturieren, besseres Behalten von Inhalten fördern, inner- und außermathematischen Sinn erschließen helfen, herausfordern, Problemlösefähigkeiten verbessern, Me-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1311–1314). Münster: WTM-Verlag

tawissen bei Lehrkräften aufbauen, Reflexion des eigenen Unterrichts anregen (vgl. Schweiger 1992, S. 210-211).

2. Forschungsfragen

Mögliche Forschungsfragen im Bereich fundamentale bzw. grundlegende Ideen werden von Schweiger und Vohns genannt (vgl. Schweiger 1992, S. 211-212; Vohns 2007, S. 25, 171). Die Idee des Invertierens selbst wird nur an wenigen Stellen erwähnt (vgl. Mason 1988, S. 35; Schwill 1993, S. 23; Kuntze 2012, S. 3). Eine umfangreiche fachdidaktische Einordnung und Aufarbeitung fehlt. Es ergeben sich z.B. folgende Fragestellungen, auf die hier aus Platzgründen nur kurz eingegangen werden kann: Was versteht man unter der Idee des Invertierens? Welche Chancen eröffnet eine Berücksichtigung dieser Idee in der Unterrichtspraxis? Inwiefern ist Invertieren eine *fundamentale* Idee in der Mathematik? Wie sehen aus stoffdidaktischer Perspektive entsprechende Aufgaben für die Sekundarstufen aus?

3. Invertieren als fundamentale Idee

Die hier zugrundeliegende allgemeine Arbeitsdefinition des Invertierens lautet: *Eine Handlung x heißt invertierbar, wenn die durch x verursachte Zustandsänderung rückgängig gemacht werden kann*. Die Idee des Invertierens kann auf diesem Hintergrund unter drei zusammenhängenden und wechselwirkenden Perspektiven gesehen werden: *lernpsychologisch*, *fachdidaktisch* und *fachmathematisch.*

Die *lernpsychologische Perspektive* ist eng mit dem Begriff der Reversibilität nach Piaget verknüpft. Reversibilität beschreibt bei ihm die Fähigkeit, eine Handlung im Geiste rückwärts zu vollziehen, und ist ein Kennzeichen für Verständnis sowie bewegliches Denken. Krutetskii fasst diese als eine von mehreren mathematischen Fähigkeiten auf (vgl. Krutetskii, S. 88). Als Beispiele nennt Krutetskii zueinander inverse Operationen (im mathematischen Sinn) und den Übergang von einem mathematischen Satz zu seiner Umkehrung (vgl. Krutetskii, S. 188-189).

Unter die *fachdidaktische Perspektive* fallen das operative Prinzip und das Prinzip der inversen Denkoperationen (vgl. Wittmann 1985, Laußermayer 1980). Durch das operative Prinzip sind heute sog. Umkehraufgaben im Unterricht weit verbreitet. Eine Standardaufgabe kann durch eine Umkehrfragestellung geöffnet werden und leistet als selbstdifferenzierende oder selbst von den Lernenden zu stellende Aufgabe einen Beitrag zur Binnendifferenzierung (vgl. Ambrus & Schulz 2002). Darüber hinaus wird durch das Betrachten der Umkehrung ein Thema für Schülerinnen und Schüler oft zugänglicher (vgl. Mason 1988; www.abcmaths.net).

Wichtige inhaltsbezogene Beispiele aus *fachmathematischer Perspektive* sind das Gleichungslösen, Umkehrfunktionen und –operationen, inverse Elemente, Zahlbereichserweiterungen (vgl. Heitzer 2011; Greer 2012; Kuntze 2012). Invertieren als heuristische Strategie umfasst z.B. das Rückwärtsarbeiten als Problemlösestrategie (vgl. Ambrus & Schulz 2002, S. 72-73; Kuntze 2012, S. 3).

Somit sehe ich die Idee des Invertierens als eine fundamentale Idee: Das Horizontalkriterium ergibt sich aus der fachmathematischen Perspektive. Das Vertikal- und Sinnkriterium sind erfüllt, da das Rückgängigmachen in vielerlei Kontexten vom Vorschulalter bis in die Wissenschaften vorkommt (vgl. Schwill 1993, S. 22). Das Zeitkriterium ergibt sich aus einer historischen Betrachtung der fachmathematischen Perspektive: z.B. werden Gleichungen seit ca. 2000 v. Chr. gelöst und inverse Elemente sowie Umkehrabbildungen von geometrischen Abbildungen seit ca. 1850 betrachtet.

4. Beispielaufgaben für die Sekundarstufen

Nicht überschneidungsfreie mögliche Aufgabenbereiche zur Idee des Invertierens sind: a) Umkehraufgaben, b) Probe, Gleichungen, Rückwärtsarbeiten- / schließen, Satzumkehrungen, c) inverse Elemente, Umkehrabbildungen, Pseudoinverse von Abbbildungen, Umkehroperationen. Dabei korrespondieren der Bereich a) vor allem mit der lernpsychologischen und fachdidaktischen Perspektive und die Bereiche b) und c) eher mit der fachwissenschaftlichen.

Expanding brackets

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

	x	3
x	x²	3x
2	2x	6

$$(x+1)(x^2+2x-3)=x^3+3x^2-x-3$$

	x²	2x	-3
x	x³	2x²	-3x
1	x²	2x	-3

How can you reverse this process to divide

(i) x^2+x-12 by $x+4$? (ii) x^3+x^2-5x-2 by $x-2$?

Das erste Beispiel von Murphy (siehe obenstehende Abbildung, www.abcmaths.net) behandelt das Ausmultiplizieren von Polynomen sowie als Rückrichtung das Faktorisieren und ist den Bereichen a) und b) zuzuordnen. Ein Beispiel für den Bereich c) ist: „*Beim Würfeln mit drei Würfeln erhält man als Augensumme 8. Welche Augensummen sind möglich?*“. Hier ist in der Oberstufe ein Eingehen auf die mathematische Modellierung durch die Pseudoinverse einer Zufallsgröße möglich. Anschließend könnten Zusammenhänge zu Umkehrfunktionen herausgearbeitet werden. Durch diese und weitere Beispiele kann im Sek.-II-Unterricht ein roter Faden zum Rückgängigmachen von Abbildungen sichtbar werden. Weitere Beispiele zum Invertieren sind auf www.abcmaths.net und in Mason 1988 zu finden.

5. Fazit und Ausblick

Nach den Kriterien von Schwill sehe ich Invertieren als eine fundamentale Idee. Deren Berücksichtigung kann bei den Schülerinnen und Schülern das Metawissen über Mathematik stärken, Inhalte verknüpfen und ein Verständnis der zugehörigen Themen vertiefen. Für die Lehrkräfte bietet sich die Möglichkeit, ihren eigenen Unterricht im Hinblick auf die Idee des Invertierens zu reflektieren. Die Aufgaben deuten an, dass eine Implementierung dieser Idee im regulären Mathematikunterricht möglich ist.

Eine entscheidende weitergehende Frage ist: Wie kann die Idee des Invertierens konkret für den Unterricht fruchtbar gemacht werden? Denn wichtiger als die Eigenschaft der Fundamentalität einer Idee ist deren unterrichtspraktischer Nutzen, den eine Idee für die Schule erst legitimiert.

Literatur

Ambrus, A., Schulz, W. (2002). Aufgabenumkehrung - eine Fundgrube für offene Aufgaben. In: Peschek, W. (Hrsg.). *BzMU 2002*. Hildesheim: Franzbecker, S. 71-74.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics 79 (3)*, S. 429-438.

Heitzer, J. (2011). Operation und Umkehroperation. Eine Strategie zum Lösen vieler Gleichungen. *mathematik lehren 169*, S. 49-53.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago, London: University of Chicago.

Kuntze, S. (2012, Hrsg.). Vernetzungsideen. *mathematik lehren 173*. Velber: Friedrich.

Laußermayer, R. (1980). Das Prinzip der inversen Denkoperationen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik 22 (8)*, S. 238-245.

Mason, J. (1988). Doing and undoing. *Project mathematics update*. Walton Hall, Milton Keynes: Open University.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematikdidaktik, 13 (2)*, S. 199-214.

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 25 (1)*, S. 20-31.

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Entwicklung und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips*. Norderstedt: Books on Demand.

Wittmann, E. C. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren 11*, S. 7-11.