Deborah WÖRNER, Nürnberg

Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – eine exemplarische Studie

Laut Vollrath ist ein „Spannungsverhältnis zwischen Formenkunde und Flächeninhaltslehre“ bereits seit der Grundschule eine Ursache für Probleme bei der Ausbildung des Flächeninhaltsbegriffs. Als Folge eines häufigen „formellastigen Kalkülrechnens“ im Unterricht ist ein Defizit beim Flächeninhaltsbegriff bis ins Gymnasium zu beobachten. (Vollrath, 1999, S. 194; vgl. hierzu auch Besuden, 1984, S. 34ff, Fricke, 1983, S.9). Von Lehrern wird immer wieder wahrgenommen, dass Schüler über keine geeignete Strategien zur Bestimmung des Flächeninhalts von unterrichtlich untypischen Figuren[1] verfügen und bei der Anwendung der Formeln zur Umfangs- und Flächeninhaltsberechnung eine große Unsicherheit zeigen. Es stellt sich also die Frage, in wie weit Schüler überhaupt über mathematisch sinnvolle Grundvorstellungen (GV) zum Flächeninhaltsbegriff verfügen und in wie weit die genannten Defizite durch die Ausbildung von sinnvollen GV behoben werden können. Der folgende Beitrag stellt einen Vorschlag zur Ausbildung von *Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff* zur Diskussion und beschreibt erste Ergebnisse einer Pilotstudie zur Wirkung von GV zum Flächeninhaltsbegriff auf die Lösungshäufigkeit von Kalkülaufgaben.

1. Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff

Der *Flächeninhalt einer ebenen Figur* ist eine Zahl, die durch eine Funktion *F* der Figur zugeordnet wird. Dabei muss die Funktion *F* folgende Eigenschaften besitzen: *Positivität, Invarianz, Additivität* und *Normiertheit* (vgl. Fricke, 1983). Hieraus ergeben sich folgende mathematische *Leitideen*[2], die die Basis für eine Formulierung sinnvoller GV bilden:

Mathematische Leitideen zum Flächeninhaltsbegriff

1. Der Flächeninhalt einer Figur ist eine positive Maßzahl.
2. Zwei deckungsgleiche Figuren sind immer auch inhaltsgleich.

[1] Unter mathematisch untypischen Figuren werden Figuren verstanden, die keinem im Lehrplan geforderten n-Eck entsprechen. Beispiele sind: Grundrisse von Wohnungen und Kontinenten, geschlossene Kurven oder zusammengesetzte Figuren, usw.

[2] Wir beschränken uns zunächst bewusst ausschließlich auf sinnvolle, von der Mathematik angestrebte Leitideen, um daran orientiert passende Grundvorstellungen auszuformulieren (vgl. vom Hofe, 1995).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1327–1330). Münster: WTM-Verlag

3. Haben zwei Figuren keinen gemeinsamen Schnittpunkt (ausgenommen dem Rand), so ist der Flächeninhalt der zusammengesetzten Figur, die Summe aus den Flächeninhalten der jeweiligen Einzelfiguren.
4. Dem Flächeninhalt eines Quadrats mit der Kantenlänge 1 cm wird (willkürlich) die Maßzahl 1 cm² zugeordnet.

Diese stark mathematisch orientierten Leitideen lassen sich durch weitere zentrale Erkenntnisse aus der Grundschule (zu kongruenten Figuren) ergänzen. Dabei werden zwei Figuren als flächeninhaltsgleich angesehen, wenn sie deckungsgleich, zerlegungsgleich oder auslegungsgleich sind (vgl. z.B. Franke, 2007). Anhand der unterschiedlichen Leitideen und Erkenntnisse lassen sich nun die folgenden vier GV gemäß vom Hofe (1995) zum Flächeninhaltsbegriff formulieren:

1. *Maßzahl-Aspekt:* Die Schüler erkennen den Flächeninhalt einer Figur als eine positive Maßzahl, die mit Hilfe von normierten Flächeninhaltmaßen bestimmt wird. (Strategie des Parkettierens und Messens)
2. *Vereinigungs-Aspekt:* Die Schüler erkennen, dass der Flächeninhalt einer Figur sich durch die Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren, aus denen die Figur sich zusammensetzen ergibt. (Strategie des Parkettierens und Messens)
3. *Kongruenz-Aspekt:* Schüler erkennen, dass kongruenten Figuren dieselbe Maßzahl zugeordnet wird. (Strategie des indirekten und direkten Vergleichs)
4. *Ergänzungs- und Zerlegungs-Aspekt:* Schüler erkennen, dass zwei Figuren flächeninhaltsgleich sind, wenn sie sich in dieselbe Anzahl von deckungsgleichen Teilfiguren zerlegen oder sich durch dieselbe Anzahl an Teilfiguren zu neuen deckungsgleichen Figuren ergänzen lassen. (Strategie des Zerlegens und Ergänzens)

Um die einzelnen Vorstellungen und die damit verbundenen Strategien des Parkettierens, Vergleichens und Zerlegens oder Ergänzens im MU auszubilden, dient das bereits 1983 entwickelte Modell Frickes (1983) als Grundlage. In aller Kürze dargestellt, nennt Fricke dabei folgende Schritte:

1. Unmittelbar qualitativer Vergleich von Figuren und deren Flächeninhalten;
2. Indirekte Vergleiche von Figuren und deren Flächeninhalten durch eine Hilfsgröße;
3. indirekter Vergleich mit einer konkreten Maßeinheit;

4. ausdifferenzierter „Gebrauch“ von Maßeinheiten.

Bis heute finden sich seine Ideen als Ausgangspunkt für zahlreiche Ansätze zum Lehren des Flächeninhaltsbegriffs (vgl. z.B. Greefrath, 2014; Neubert & Thies, 2012; Franke, 2007; Vollrath, 1998). Knüpft man nun an die eingangs genannten Defizite an und rückt die Ausbildung von GV in den Fokus eines Lehrgangs, stellt sich natürlich die Frage, in wie weit eine Ausbildung der genannten GV sinnvoll und notwendig für den Flächeninhaltsbegriff im MU und letztendlich die Lösungsfähigkeit von Aufgaben bei Schülern ist. Um die Auswirkungen einer fundierten Ausbildung von GV auf das „Formeldenken“ zur Flächeninhaltslehre aufzuzeigen, sollen die ersten Ergebnisse einer Interventionsstudie betrachtet werden und als Grundlage zur Generierung entsprechender Thesen dienen.

2. Konzeption und Durchführung der Studie

Im Rahmen des Förderprojekts Litcam – Fußball trifft Kultur (litcam.de) wurden Schüler unterschiedlichen Leistungsniveaus verschiedener Mittelschulen aus dem Raum Nürnberg gefördert und mit ihren Klassenkameraden bezüglich GV zum Flächeninhaltsbegriffs und ihrer Rechenfertigkeit verglichen. Die folgenden Ergebnisse stammen aus einer Befragung im Rahmen der Evaluation des Projekts:

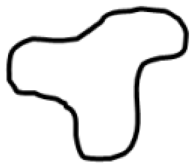

Abb. 1: Untypische Figur

Bei einer vorangestellten Erhebung des Leistungsstands der Schüler, zeigte sich das erstaunliche und durchaus auch erschreckende Bild, dass keiner der befragten Schüler mathematisch sinnvolle GV zum Flächeninhaltsbegriff nennen konnte und tatsächlich alle Befragten ausschließlich mit Formeln (meist falschen) den Flächeninhaltsbegriff beschrieben, ohne ihr Vorgehen begründen zu können. Außerdem waren ausnahmslos alle Befragten nicht in der Lage, eine Näherung für den Flächeninhalt von untypischen Figuren (Abb.1) anzugeben. Bei typischen Kalkülaufgaben zur Berechnung von Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks verwendeten die Schüler nur in 50% der Fälle die richtige Formel. Dies lässt die erste These zu, dass bei der Anwendung der Formel ohne passende GV meist geraten wird.

Mit zeitlichem Abstand wurde im Anschluss an eine mehrwöchige Intervention erneut die Lösungsfähigkeit von Schülern zu passenden „Kalkülaufgaben“ und ihren Grundvorstellungen erhoben. Die folgende Grafik zeigt beispielhaft Ergebnisse aus dieser Umfrage zum Thema Flächeninhalt auf, wobei die beiden Versuchsgruppen nach Vergleichsgruppe (VG: n=53) und Untersuchungsgruppe (Litcam: n=17) unterschieden werden.

In den Ergebnissen des Nachtests zeigt sich mehr als deutlich, dass zwischen den beiden Schülergruppen ein signifikanter Unterschied in den vorhandenen GV zum Flächeninhaltsbegriff gegeben ist. Auf Grund der speziellen Förderung von GV bei Litcam-Schülern ist die angetroffene Abweichung zwischen den Gruppen aber wenig überraschend. Betrachtet man jedoch Abb. 2, dann lassen sich durchaus erste Thesen in Bezug auf die Nachhaltigkeit und den Einfluss von Grundvorstellungen formulieren. Knapp 65% der Litcam-Schüler wenden die beiden Formeln zur Berechnung des Umfangs und Flächeninhalts sicher auf das vorgegebene Rechteck an, bei der Vergleichsgruppe gelang dies nur rund einem Zehntel. Fast 90% der Vergleichsgruppe schafft es nicht, die Formeln für Flächeninhalt und Umfang fehlerfrei zu berechnen bzw. die Begriffe sicher zu unterscheiden3. Außerdem verfügen fast 100% der Litcam-Schüler über geeignete Strategien, den Flächeninhalt näherungsweise zu bestimmen, während auch hier keiner der Regelschüler die Aufgabe erfolgreich löst. Es begründen sich somit folgende Thesen:

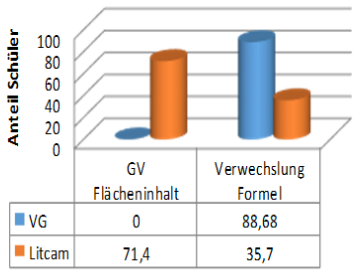

Abb. 2: Pilotstudie 2013

1. Schüler mit GV beherrschen Näherungsverfahren zur Flächeninhaltsbestimmung signifikant besser als Schüler ohne GV.
2. Schüler mit GV können die Begriffe Umfang und Flächeninhalt signifikant besser unterscheiden als Schüler ohne GV.
3. GV zum Flächeninhaltsbegriff, orientiert an den genannten mathematischen Leitideen, zeigen einen Einfluss auf die Lösungsfähigkeit von Schülern bei Kalkülaufgaben zum Flächeninhaltsbegriff.

Literatur

Barzel, B. & Hußmann, S. (2008). Rechtecke im Einheitsquadrat. Experimente auf verschiedenen Darstellungsebenen. *mathematik lehren*, 14–16.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. München: Spektrum.

Fricke, A. (1983). *Didaktik der Inhaltslehre*. Stuttgart: Ernst Klett.

Greefrath, G. & Laakmann, H. (2014): Mathematik eben – Flächen messen. *PM*, 55, 2–10.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellung mathematischer Inhalt*. Heidelberg: Spektrum.

Neubert, B. & Thies, S. (2012). Zur Entwicklung des Flächeninhaltsbegriffs. *mathematik lehren*, 172, 15–19.

Vollrath, H.-J. (1999). Ein Modell für das langfristige Lernen des Begriffs „Flächeninhalt. In Henning, H.: *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung*. Oldenburg: Büttmann und Gerriets, 191–198.