Larissa ZWETZSCHLER, Dortmund

a·b+a·h·1/2=a·(b+h/2)? „ist ja eigentlich die gleiche Formel“ – Lernprozesse zur Gleichwertigkeit von Termen

Welche Vorstellungen brauchen Lernende um zu verstehen, dass a·b+a·h·1/2=a·(b+h/2) gilt? In der Algebradidaktik wird immer wieder berichtet, dass Lernende Termumformungen oft unverstanden durchführen und keine Beziehungen zwischen zwei Termen herstellen können (Rosnick & Clement 1980; Demby 1997; Ball, Peirce & Stacey 2003; u.a.). Zudem ist der Umgang mit Termen, dem Gleichheitszeichen und den Variablen eine große Herausforderung für Lernende und scheint die Vorstellungsentwicklung zu limitieren (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens 2011; u.a. als Überblick s. Malle 1993; Kieran 2007; u.a.). Wenig ist hingegen über die Vorstellungsentwicklung zur Gleichwertigkeit von Termen bekannt. Zwar zeigen Studien, dass Vorstellungen angebahnt werden können (Kieran & Sfard; Pilet 2012; u.a.), eine systematische Beforschung von Lernprozessen steht allerdings noch aus. Dadurch ergab sich für das Dissertationsprojekt (Zwetzschler 2014) das folgende verschränkte Forschungs- und Entwicklungsinteresse:

Welche individuellen Vorstellungen zur Gleichwertigkeit haben die Lernenden und inwiefern können diese weiterentwickelt werden? Inwiefern kann ein Lehr-Lernarrangement entwickelt werden, das einen Vorstellungsentwicklungsprozess hin zur Gleichwertigkeit ermöglicht?

1. Methodischer Rahmen der Studie

Verfolgt wurde das Forschungs- und Entwicklungsinteresse der Studie zur Gleichwertigkeit von Termen im Forschungsprogramm der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Prediger et al. 2012). Dazu wurden im Rahmen des langfristigen Projekts KOSIMA fünf Zyklen der Entwicklung und Beforschung in Design-Experimenten durchlaufen. Ausgewählte Designelemente des Lehr-Lernarrangements wurden dabei in Labor- und Klassensettings erprobt und videographiert. Die qualitativen Daten wurden anschließend in Anlehnung an Vergnauds Konstrukte (1996) ausgewertet. Die Ziele der einzelnen Zyklen waren dabei: die Entwicklung erster Designelemente (Zyklus 1), die Beforschung zentraler Herausforderungen (Zyklus 2), die Analyse von Lernprozessen (Zyklus 3) und die Absicherung und Finalisierung des Lehr-Lernarrangements für den Einsatz im regulären Unterricht (Zyklus 4, 5). Die hier skizzierten empirischen Einblicke stammen aus Zyklus 3, in dem mit zwei 8. Klassen und sechs

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1335–1338). Münster: WTM-Verlag

Lernendenpaaren einer Realschule Design-Experimente in Klassen- und Laborsettings durchgeführt wurden.

2. Spezifikation des Lerngegenstandes: inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen

Sehen zwei Terme unterschiedlich aus, bedeuten aber das Gleiche, so sind sie gleichwertig: $a \cdot b+a \cdot h \cdot 1/2=a \cdot (b+h/2)$. Die Anwendung von Umformungsregeln, dem Kalkül, ermöglicht die Überprüfung zweier Terme hinsichtlich der Gleichwertigkeit.

Um aber inhaltlich zu begründen, warum zwei Terme gleichwertig sind, braucht man ein *Referenzobjekt*, an dem die Gleichwertigkeit der Terme gezeigt und verstanden werden kann (Kieran & Sfard 1999): Terme mit gleicher Bedeutung bei unterschiedlicher Herkunft werden auf ein Objekt (z.B. geometrische Figuren oder Werte als Ergebnisse) bezogen und die gleiche Bedeutung zwischen den einzelnen Termen und dem Objekt erkannt. Diese Beziehung zweier Terme auf ein Objekt wird anschließend auf die Beziehung zwischen den Termen - die Gleichwertigkeit der Terme - übertragen (Pilet 2012; in Anlehnung an Drouhard 1992; s. Abb. 1).

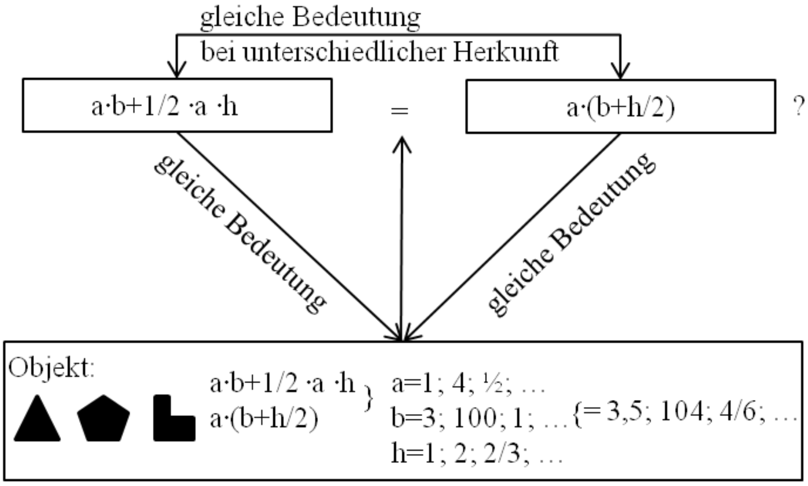


Abb. 1 Lerngegenstand: inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen

Der Bezug von Termen auf geometrische Figuren und Werte als Ergebnisse - der Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit (Prediger 2009; in Anlehnung an Malle 1993, Wellstein 1978) - ist hier die Grundlage.

3. Lernprozesse zur Beschreibungsgleichheit

In der Analyse von Lernprozessen zur Beschreibungsgleichheit - dem Vergleich zweier allgemeiner Objekte (Variablenterme) an einem dritten allgemeinen Objekt (Figur) - zeigten sich Zwischenstufen in der Vorstellungsentwicklung:

- Vergleich konkreter Objekte
- Vergleich an konkreten Objekten
- Vergleich von/ an Berechnungsstrategien[1] anstelle von Termen/ Figuren (s. Abb. 4)

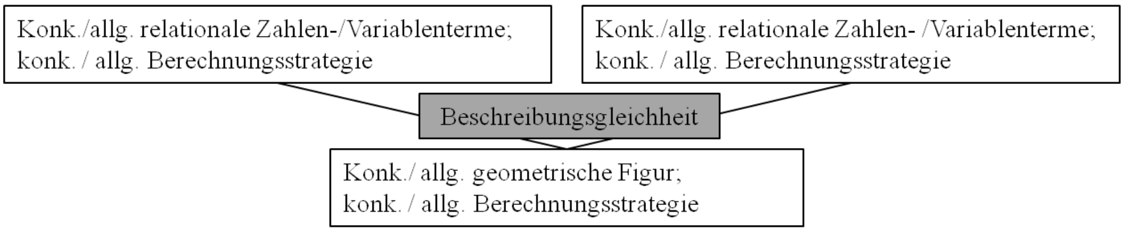


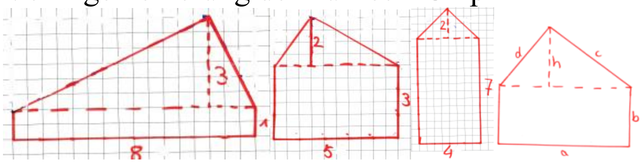
Abb. 4 Zwischenstufen in Vorstellungsentwicklung zur Beschreibungsgleichheit

4. Empirische Einblicke: Zwischenstufen in der Vorstellungsentwicklung zur Beschreibungsgleichheit

Wie solche Zwischenstufen in der Vorstellungsentwicklung zur Beschreibungsgleichheit aussehen können wird im Folgenden anhand einer Lernenden aus Zyklus 3, Meike, exemplarisch veranschaulicht.

Bevor im Lehr-Lernarrangement explizit Vorstellungen zur Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit erarbeitet wurden, wurde mit Hilfe der in Abb. 2 abgedruckten Aufgabe bereits Flächeninhalte zu einer Figur in unterschiedlichen Gestalten bestimmt. Im vorzustellenden Ausschnitt bearbeitet Meike die Aufgabe *Verallgemeinerung der Fünfeck-Graphik*:

Verallgemeinerung der Fünfeck-Graphik



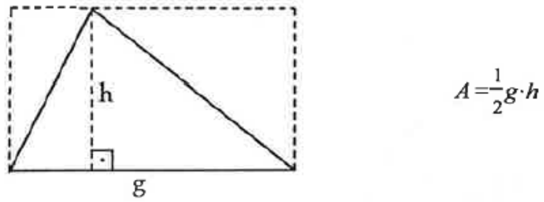
Berechne den Flächeninhalt der Figuren. Was ändert sich? Was bleibt gleich?
Welche Figuren kannst du mit deiner Formel berechnen?

Abb. 2 Vorbereitende Aufgabe zur Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen zur Gleichwertigkeit

Um Terme zu den dreieckigen Teilfiguren aufstellen zu können, nutzt die Schülerin Meike, die folgenden beiden Umformungen der Flächen als Berechnungsstrategien.

[1] Berechnungsstrategien sind alle verbalen und deiktischen Äußerungen zur Berechnung einer Graphik, die noch nicht hinreichend mit den Termen oder der gegebenen Graphik verbunden sind (Zwetzschler 2014).

||*Dreieckige Figur als ergänzbar zu einer rechteckigen Figur*||



(Hefendehl-Hebeker 2002)

||*Dreieckige Figur als umlegbar zu einer rechteckigen Figur*||

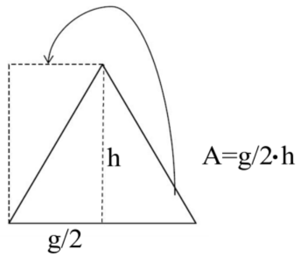
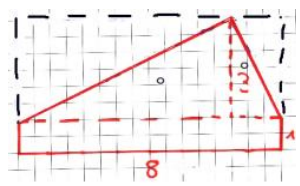


Abb. 3 Berechnungsstrategie für dreieckige Figuren

Als Meike anschließend nach einer allgemeinen Möglichkeit zur Berechnung von Fünfeck-Graphiken (s. Abb. 2) gefragt wird, setzt sie die beiden Berechnungsstrategien aus Abb. 3 miteinander in Beziehung: Sie vergleicht die Berechnungsstrategie durch den Bezug auf eine Figur miteinander und bewertet diese als gleichwertig (auch wenn diese Bewertung noch nicht hinreichend tragfähig ist, durch die Situationsspezifität der zweiten Strategie - für gleichschenklige Dreiecke).

Z229 Meike:
Dass man das erstmal aufteilt, dass man das zu einem Rechteck so aufteilt. Also entweder so abnehmen und dranhängen oder verdoppeln und dass man das dann – dass man das dann aufteilt, dass man ein Rechteck hat *[zeigt auf das untere Teilrechteck]* und die oberen Dreiecke *[zeigt auf die beiden °]* und dass man da das untere Rechteck einzeln berechnet *[zeigt auf die Zahlen 8 und 1]* mal, also Breite mal Höhe.



Meike entwickelt hier, ähnlich zu weiteren Lernenden der Studie, die Vorstellung der ||*Gleichwertigkeit von Berechnungsstrategien als Beschreibungsgleichheit*||, eine Zwischenstufe im Lernprozess zur Beschreibungsgleichheit. Solche Gleichwertigkeitsvorstellungen zeigten sich als trag- und anschlussfähige Zwischenstufen in der Entwicklung von Vorstellungen zur Beschreibungsgleichheit und wurden dadurch expliziter Bestandteil des Lerngegenstandes: inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen (Zwetzschler 2014).

5. Literatur

Die verwendete Literatur ist in der folgenden Quelle vollständig ausgewiesen:

Zwetzschler, L. (2014): Gleichwertigkeit von Termen - Entwicklung und Beforschung eines diagnosegeleiteten Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse. Dissertation, TU Dortmund (Erscheint später bei Springer Spektrum).