Ines BRONNER, Dortmund

Von der Situation zum Graphen – Wie Studierende graphentheoretische Modelle identifizieren

Im vorliegenden Beitrag werden die Konzeption und erste Ergebnisse einer Studie mit Lehramtsstudierenden zu Identifikationsprozessen graphentheoretischer Modelle in neuen Situationen beschrieben. In der Studie sollen im Sinne fachdidaktischer Entwicklungsforschung (vgl. Hußmann et al. 2013) individuelle Begriffe von Studierenden zu den fünf Bearbeitungsmodellen der *kürzesten Wege, aufspannenden Bäume, Eulerwege, Matchings* und *Färbungen* analysiert und deren Charakterisierung und Differenzierung im Umgang mit neuen Situationen beforscht werden. Nach einer Spezifizierung/Restrukturierung des Lerngegenstandes und der Analyse auftretender Hürden im Identifizierungsprozess, wird das Lernarrangement der Studierenden (die Veranstaltung „Diskrete Mathematik“ an der TU Dortmund) im Sinne eines iterativen Prozesses umgestaltet.

1. Charakteristika des Lerngegenstandes

In der Graphentheorie sind Problemstellungen häufig Beweis- oder Konstruktionsprobleme (vgl. Thiess 2002, 46). Die Konstruktionsprobleme lassen sich dabei noch mal in die Modellklassen der Zuordnungs- oder Wegeprobleme unterteilen (vgl. Dobrowolski 2010, 24; Lutz-Westphal 2006). Zuordnungsprobleme stellen dabei Probleme dar, in denen Elemente einander zugeordnet werden bzw. Eigenschaften Elementen zugeordnet werden müssen. Situationen, die man mithilfe eines Matchings oder einer Färbung lösen kann, passen somit in diese Modellklasse. Bei Wegeproblemen ist der Begriff des Weges ein zentrales Charakteristikum der zur Situationsbearbeitung hilfreichen Modelle, so dass z.B. die Konstruktion eines speziellen Weges hilfreich sein kann. Situationen, die man mithilfe eines aufspannenden Baumes, eines kürzesten Weges oder eines Eulerweges lösen kann, lassen sich somit den Wegeproblemen zuordnen.

In der Bearbeitung konkreter Situationen lassen sich einige Merkmale graphentheoretischer Modellnutzung ausmachen, die einen Einfluss auf den Umgang mit der gegebenen Situation haben: In der Graphentheorie können spezifische Bearbeitungswege zur Konstruktion eines gewählten Modells nicht direkt aus der Situation heraus umgesetzt werden, sondern die gegebene Situation muss zunächst als Graph dargestellt werden. Dieses *Rahmenmodell*, das relevante Grundstrukturen der Situation wiedergibt, dient als Grundlage für die Konstruktion eines passenden Bearbeitungsmodells, dass dann die Antwort auf eine entsprechende Fragestellung liefert. Das

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 253–256). Münster: WTM-Verlag

Erkennen relevanter situativer Aspekte zur Modellierung des Rahmenmodells kann nur vor dem Hintergrund einer Zielorientierung erfolgen. Zur Identifizierung, welche Strukturen der Situation relevant sind und im Rahmenmodell dargestellt werden sollen, muss der Lernende eine Idee davon haben, welchen Bearbeitungsweg er zur Situationsbewältigung einschlagen möchte. Das Rahmenmodell muss somit einerseits Strukturen der Situation wiedergeben und anderseits auch tragfähig sein für die Konstruktion des identifizierten Bearbeitungsmodells. Viele Situationen lassen durchaus verschiedene Rahmenmodelle und mehrere Bearbeitungsverfahren zu. Gerade bei kleineren Problemstellungen der diskreten Mathematik gibt es häufig nicht die eine richtige Lösung (vgl. Green 1997, 62), sondern mehrere Rahmen- und Bearbeitungsmodelle können zielführend genutzt werden. Dieses stellt eine der zentralen Hürden dar, die in dieser Studie näher beforscht werden soll.

2. Designexperimente

Im Rahmen von Designexperimenten (vgl. Hußmann et al. 2013) wurden im Anschluss an die Veranstaltung „Diskrete Mathematik“, genauer vor der Modulklausur, klinische Interviews mit 9 Studierendenpaaren und 4 einzelnen Studierenden durchgeführt. Ziel war die systematische Analyse individueller Vorstellungen zu den fünf zentralen Bearbeitungsmodellen und die Nutzung dieser individuellen Begriffe zur Strukturierung neuer Situationen.

3. Analyse und Ergebnisse

Zur Analyse der Identifizierungsprozesse wurde ein sprachanalytischer Analyserahmen aus Fokussierungen und Festlegungen genutzt (vgl. Hußmann 2013). Festlegungen sind dabei explizite Aussagen mit propositionalem Gehalt, die ein Individuum für wahr hält. Sie sind ‚kleinste‘ Einheiten, mit denen Aussagen über (mathematische) Objekte und Zusammenhänge expliziert werden. Diese sind situationsspezifisch und abhängig vom jeweiligen sozialen Diskurs. Fokussierungen als Analyseinstrument sind Ideen bzw. Konzepte, mit denen eine gegebene Situation strukturiert wird und die somit weder wahr noch falsch sein können. Sie sind typische individuelle Brillen, die Welt wahrzunehmen und spezifische Aspekte von Situationen herauszugreifen. Ohne Fokussierung(en) ist eine Festlegung nicht formulierbar. Die Betrachtung individueller Festlegungen und Fokussierungen ermöglicht somit eine Analyse der Nutzung individueller Begriffe innerhalb verschiedener Identifizierungsprozesse.

Besonders auffällig zeigt sich der Einfluss individueller Fokussierungen auf den Umgang mit der gegebenen Situation. Dies soll im Folgenden exemplarisch gezeigt werden.

In einem Interview befinden sich die beiden Studentinnen Anni und Begüm in der Situation, die folgende Fragestellung zu beantworten: Direkt nach dem Lesen der Situation geht Anni die Festlegungen *„Hier kann man ein Matching konstruieren.“ (Konklusion)* und *„weil wir zwei Teilmengen, die Kinder und die gewünschten Kinder, haben*.“ ein und fokussiert dazu auf die *`zwei Teilmenge*n´, die sie in der Situation sieht. Begüm zeichnet daraufhin ein Rahmenmodell der Situation, in dem die Kinder als Knoten dargestellt sind und die Kanten anzeigen, ob ein Wunsch von einer Seite aus besteht. In ihrer Modellierung achtet sie darauf, dass der Graph in seiner bildlichen Darstellung auch optisch direkt zwei disjunkte Teilmengen erkennen lässt. Dazu fokussiert sie auf *`disjunkte Teilmengen´* und geht die Festlegung ein, dass *„um ein Matching zu konstruieren, muss man einen bipartiten Graphen haben*.“.

Für einen Ausflug wurde ein Kleinbus gemietet. Die mitfahrenden Kinder haben klare Vorstellungen davon, neben wem sie auf der Fahrt sitzen möchten. Der Bus hat immer 2 nebeneinander liegende Plätze. Ist es möglich die Kinder ihren Wünschen nach zu setzen?

Anna möchte neben Babsi oder Diana sitzen.
Babsi hat gesagt, sie würde am liebsten neben Anna oder Emilie sitzen.
Celine möchte nur neben Fabian sitzen.
Dianas Freundin ist nur Anna.
Emilie möchte gerne neben Babsi oder Celine fahren.
Fabian will, dass Celine neben ihm sitzt.

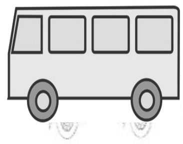

Abb.1 gegebene Situation

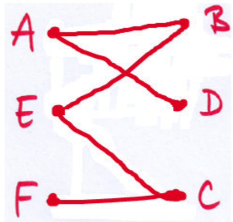

Abb.2 Rahmenmodell

Beide Studentinnen nutzen zur Identifikation eines passenden Bearbeitungsmodells die Fokussierung *`Teilmengen´*. Die Begründung, warum die Konstruktion eines optimalen Matchings hier hilfreich ist, ist jedoch fachlich nicht tragfähig, da man dieses auch in einem nicht bipartiten Graphen konstruieren kann. Die Fokussierung auf Teilmengen ist aus fachlicher Sicht somit nicht sinnvoll und führt dazu, dass in der Situation das Bearbeitungsmodell der Matchings durch nicht hinreichende bzw. falsche Eigenschaften als passend identifiziert wird. Festlegungen, die zur Identifikation einer Klasse graphentheoretischer Situationen genutzt werden, müssen daher tragfähig und vollständig in Bezug auf die Eigenschaften der Bearbeitungsmodelle sein. Die Fokussierungen, die der Modellierung des Rahmenmodells zugrunde liegen, sind handlungsleitend, da durch sie Festlegungen eingegangen werden können, die zur Situationsbearbeitung hilfreich oder, wie im Beispiel, nur bedingt hilfreich sein können.

Im weiteren Interviewverlauf werden die beiden Studentinnen gefragt, woran sie die beiden Teilmengen erkannt haben. Während Anni in ihren Festlegungen weiterhin auf *`Teilmengen´* fokussiert, überlegt Begüm, wie die Situation gelöst werden kann, wenn Anna und Emilie auch nebeneinander sitzen wollen würden. Für diese Idee fokussiert Begüm auf Beziehungen von Elementen innerhalb einer Teilmenge, so dass sich ihre individuelle Situation dahingehend ändert, dass nun Wünsche der Kinder auch innerhalb einer „Teilmenge“ vorkommen können. Auf die Nachfrage, was sich an der Situation dann ändern würde, legt sich Anni darauf fest, dass „*nun keine zwei Teilmengen mehr gebildet werden können“* und Begüm, dass „*wenn man keine zwei Teilmengen bilden kann, dann kann man färben*.“ und „*Man kann die Situation als Unverträglichkeitsgraph darstellen*.“ und zeichnet ein neues Rahmenmodell.

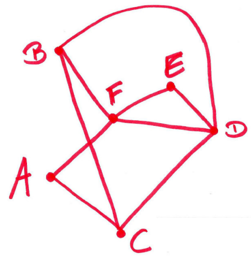

Abb.3 neues Rahmenmodell

Der Fokuswechsel vom Blick auf disjunkte Teilmengen hin zu Unverträglichkeiten bringt eine Veränderung der individuellen Situation mit sich. Ein bipartiter Graph ist nicht länger als Rahmenmodell passend. Die individuelle Situation passt nun, zumindest für Begüm, in eine andere Situationsklasse, nämlich die, in der Färbungen als Bearbeitungsmodell hilfreich sind. Fokuswechsel können somit gewinnbringend sein für eine alternative, tragfähige Situationsbewältigung, da sich individuelle Festlegungen dadurch zielführend ändern können und andere Bearbeitungsmodelle hilfreich erscheinen. Da Fokuswechsel jedoch auch hinderlich für eine Situationsbewältigung sein können, ist es wichtig, für Lernende eine Transparenz bzgl. tragfähiger Fokusse für verschiedene Bearbeitungsmodelle zu schaffen, die z.B. für den Bereich der Matchings einen Blick für die Disjunktheit zweier gematchter Kanten statt zweier Knotenmengen schaffen.

Literatur

Dobrowolski, M. (2010): *Mathematische Exkursionen. Gödel, Escher und andere Spiele*. Oldenburg: Wissenschaftsverlag GmbH.

Green, N. (1997): Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik. *Mathematik lehren “Anregungen aus England*”, 84, 60-64.

Hußmann, S. (2013). The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations, Preprint, TU Dortmund.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Kormorek & S. Prediger (Hrsg.): *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S.25-42). Münster: Waxmann.

Lutz-Westphal, B. (2006): *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht.* Online unter: http://page.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_final_online.pdf

Thies, S. (2002): *Zur Bedeutung diskreter Arbeitsweisen im Mathematikunterricht*. Online unter: http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2002/854/