Esther BRUNNER, Kreuzlingen

Ein Prozessmodell des schulischen Beweisens

Beweisen als zentrale Kompetenz

Mathematisches Argumentieren gewinnt im Zusammenhang mit Kompetenzmodellen und Bildungsstandards (EDK, 2011; KMK, 2005) auch im deutschsprachigen Raum an Bedeutung und wird als dialogisch konzipierte, soziale Aktivität verstanden. Während in der Mathematik ein neuer Beweis von der Community validiert wird und damit die Fachgemeinschaft als zentrale Evaluationsinstanz gilt, kann im schulischen Beweisdiskurs nicht von gleich kompetenten Diskursteilnehmenden ausgegangen werden.

Nach wie vor ungeklärt ist, wie sich die in diesem Zusammenhang in der Literatur und den Bildungsstandards verwendeten Begriffe des Argumentierens, Begründen und Beweisen zueinander verhalten. Die Kontroverse bezieht sich dabei insbesondere auf die Beziehung zwischen Argumentieren und Beweisen. Für die einen (z.B. Pedemonte, 2007) sind diese beiden Tätigkeiten sehr eng miteinander verbunden und folgen mehr oder weniger ähnlichen Gesetzmässigkeiten, während sie sich in den Augen anderer (z.B. Balacheff, 1991) deutlich unterscheiden.

In Anlehnung an Duval (1991) wird „Begründen“ im Rahmen dieses Beitrags als Oberbegriff verwendet, der ein konzeptuelles Spektrum zwischen alltagsnahem Argumentieren einerseits und formal-deduktivem Beweisen andererseits umfasst. In diesem Begründungsspektrum lassen sich auch die drei von Wittmann und Müller (1988) beschriebenen Typen von Beweisen verorten. Die beiden Autoren unterscheiden den experimentellen, den operativen oder inhaltlich-anschaulichen und den formal-deduktiven Beweis.

Unterschiedliche Beweistypen

Beim experimentellen „Beweis“ werden Beispiele erzeugt oder Gegenbeispiele gesucht. Es geht dabei um das Falsifizieren oder Verifizieren einer Behauptung, über deren Gültigkeit man sich nicht im Klaren ist Allerdings kann man durch einen experimentellen „Beweis“ nie Gewissheit bezüglich der Allgemeingültigkeit der untersuchten Behauptung erlangen, sondern immer nur mit konkretem Bezug auf die unmittelbar geprüften Beispiele.

Ein operativer Beweis hingegen erzeugt eine subjektive Gewissheit hinsichtlich der Allgemeingültigkeit einer Aussage, denn in einem operativen Beweis werden die Struktur bzw. die mathematischen Zusammenhänge erkannt. Diese Beziehungen werden mittels einer Operation offengelegt und werden dadurch „ablesbar“ (vgl. Duncker, 1935). Auf diese Weise entsteht

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 269–272). Münster: WTM-Verlag.

Einsicht (Wertheimer, 1964) in die Struktur. Diese Einsicht ist aber eine vorerst subjektive, weil die Ablesbarkeit der offengelegten Beziehungen anderen durch entsprechende Elaboration zunächst zugänglich gemacht und kommuniziert werden muss.

Beim formal-deduktiven Beweis schliesslich wird der erkannte Zusammenhang nicht nur formal-symbolisch festgehalten, sondern es erfolgt auch formal-logisches Schliessen. Der dargestellte Zusammenhang klärt nicht nur die Allgemeingültigkeit einer Aussage, sondern wird darüber hinaus auch von allen, welche die formal-symbolische Sprache beherrschen, ohne weitere Elaboration verstanden.

Prozessmodell des schulischen Beweisens

Diese drei Beweistypen lassen sich in einem kognitionspsychologisch geprägten Modell des schulischen Beweisens fassen (Details vgl. Brunner, 2014). Dieses Modell (vgl. Abbildung 1) unterscheidet grundsätzlich zwei Ebenen: die soziale Ebene des Diskurses und die psychologische Ebene des denkenden Individuums. Der individuelle Denkprozess spielt sich dabei innerhalb eines sozialen Rahmens in einer diskursiven Situation ab. Ausgangspunkt des psychologischen Vorgangs ist ein spezifischer kognitiver Konflikt, nämlich eine Unsicherheit bezüglich der Gültigkeit einer Behauptung und damit fehlende Gewissheit, die im Idealfall ein Beweisbedürfnis erzeugt. Dieses Beweisbedürfnis kann mittels unterschiedlicher Denkprozesse auf unterschiedliche Weise befriedigt werden. So kann das Experimentieren mit Beispielen zu einem experimentellen „Beweis“ führen und eine empirische Gewissheit bezüglich der geprüften Beispiele erzeugen. Die Struktur kann aber auch vom Experimentieren ausgehend durch eine Operation grundlegend durchschaut werden, was zu inhaltlicher Einsicht und subjektiver Gewissheit führen kann. Dies ist dann der Fall, wenn ein mathematischer Zusammenhang durchdrungen wurde und mit einer Operation gezeigt werden konnte, dass etwas zwingenderweise immer so sein muss. Die Operation als kreatives Element und zündende Idee muss aber im sozialen Kontext elaboriert werden, weil sie nicht auf Anhieb für alle anderen nachvollziehbar ist. Möglich ist nun weiter, dass der verstandene Zusammenhang in formal-symbolische Sprache übertragen wird und so ein formal-deduktiver Beweis formuliert werden kann. In diesem Fall liegt objektive Gewissheit bezüglich der Allgemeingültigkeit des aufgedeckten Zusammenhangs vor, die auch von anderen sofort und direkt nachvollzogen werden kann, sofern sie die formal-symbolische Sprache beherrschen.

Vollständiges genetisches Beweisen beschreibt somit den Denkprozess ausgehend von einem experimentellen Zugang über eine operativ erzeugte

Einsicht bis hin zum formal-deduktiven Nachvollzug. Der fundamentale Schritt im Erkenntnisgewinn zeigt sich dabei beim operativen Beweis. Denn in diesem Stadium wird die mathematische Struktur inhaltlich in ihrem Beziehungsreichtum verstanden und erfasst.

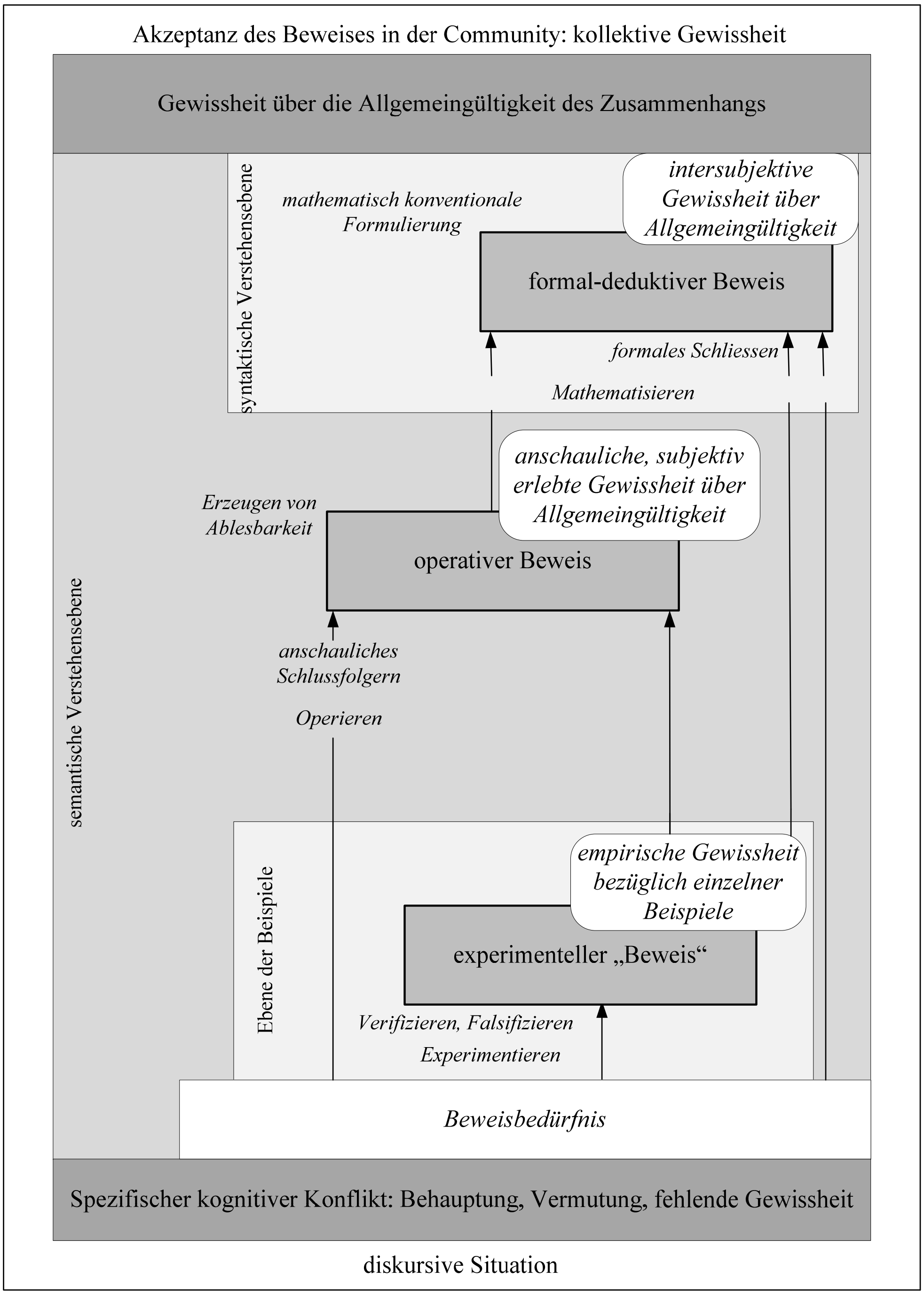

Abbildung 1: Prozessmodell des schulischen Beweisens (Brunner, 2014, S. 72; hier vereinfacht)

Implikationen für die Schule

Das in Abbildung 1 dargestellte Modell macht deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler beim schulischen Beweisen auf zwei unterschiedlichen

Ebenen unterstützt werden können: auf der psychologischen Ebene des Denkprozesses sowie auf der Ebene des Diskurses. Auf der ersten Ebene kann der Denkprozess durch das Modellieren einzelner Denk- und Arbeitsschritte, durch das Verfügbarmachen von unterschiedlichen Repräsentationsformen des Denkens (enaktiv, ikonisch, sprachlich-symbolisch und formal-symbolisch), durch das Anregen und Nutzen unterschiedlicher Beweistypen und ein genetisches Vorgehen unterstützt werden. Auf der Ebene des Diskurses erfolgt die Unterstützung in Abhängigkeit vom durchgeführten Beweistyp: Wird beispielsweise ein formal-deduktiver Zugang gewählt, was einen hohen Grad an Abstraktion und Formalisierung verlangt, so dürfte die Partizipation der Lernenden geringer ausfallen, als wenn experimentell an Beispielen gearbeitet wird.

Darüber hinaus kann das Modell auch gezielt genutzt werden, um Beweisen zu lehren und zu lernen (Details vgl. Brunner, 2014). Damit liegt ein Modell vor, das sowohl didaktisches Potenzial aufweist, als auch einen bislang erst im Zusammenhang mit Expertinnen und Experten beschriebenen Prozess, nämlich den fachlichen Diskurs in der Community (Boero, 1999), kognitionspsychologisch und sozial zu fassen versucht.

Literatur

Balacheff, N. (1991). Benefits and limits of social interaction: The case of teaching mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. Van Dormolen (Hrsg.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (S. 175–192). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7/8.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Heidelberg: Springer.

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin: Springer.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductive et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (3), 233–261.

KMK. (2005). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung.* München: Luchterhand.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66* (1), 23–41.

Wertheimer, M. (1964). *Produktives Denken* (2. Aufl.). Frankfurt a.M.: Kramer.

Wittmann, E.C. & Müller, N.G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.