Deborah WÖRNER, Nürnberg

Faszination Unendlich – Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht

Der Begriff „Unendlich“ ist zwar in allen Schularten und -stufen Bestandteil des MU, wird aber kaum thematisiert, obwohl laut Weyl die „Mathematik [als] die Wissenschaft des Unendlichen“ gesehen werden kann.

1. Forschungsstand und Lehrmittelanalyse

Die Fachmathematik einigt sich derzeit auf zwei Sichtweisen des Begriffs: ein aktuales Verständnis von „unendlichen Mengen nach dem Vorbild der Mengenlehre Cantors und [ein potentielles Verständnis] in den Begriffen und Methoden der Analysis“ (Marx, 2013); Beide Ansätze greift die fachdidaktische Forschung auf. Neben konkreten Vorschlägen zur Umsetzung spezifischer Inhalte im Unterricht (Tsamir, 2001; Schimmöller, 2012) wird das Augenmerk vor allem auf die Vorstellungen von Schülern und Studenten zum Unendlichkeitsbegriff und die dahinter verborgenen kognitiven Strukturen gelegt (z.B. Fischbein et al., 1979; Tsamir, 1999; Marx, 2011). Allen Forschungsergebnissen ist gemein, dass Schüler kaum mehr als über ein rein intuitives Alltagsverständnis zu dem zentralen Begriff verfügen und häufig mit ihren eigens entwickelten individuellen Vorstellungen im Mathematikunterricht (MU) alleine gelassen werden. Insbesondere für den MU im deutschsprachigen Raum bestätigen Ergebnisse einer empirischen Studie eben diese Vermutungen: Schüler aller Schultypen kommen nicht über ein intuitiv Verständnis des Begriffs hinaus. Sogar fast alle Lehrer antworten auf die Frage „Was verstehst du unter Unendlich?“ mit intuitiven Vorstellungen, wie „Gott“, „die größte Zahl“ oder „etwas ohne Ende“ (Wörner, 2013). Ein mathematisches Verständnis im Sinne Cantors wird zwar von der Literatur gefordert, ist aber so gut wie nie nachzuweisen (z.B. Marx, 2013; Wörner, 2013; Tsamir, 1999). Auch eine Analyse der zugelassenen Lehrmittel zeigt, dass der MU den Unendlichkeitsbegriff zwar an zahlreichen Stellen benutzt, ihn aber nicht eigens thematisiert.

2. Vorschlag zur konzeptionellen Umsetzung

Ausgehend von diesen Ergebnissen, bietet der folgende Vorschlag einen Ansatzpunkt für den MU, die vorhandenen Defizite zu einem seiner zentralen Begriffe zu beheben. Dabei wird, anders als in bereits bekannten Vorschlägen, der Unendlichkeitsbegriff langfristig in den MU integriert und am Ende jeder Zahlbereichserweiterung verortet. Beginnend in der Grundschule wird zunächst an alltägliche Vorstellungen der Schüler angeknüpft

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1373–1374). Münster: WTM-Verlag

und der Fokus nach und nach auf den Kontext Mathematik gelegt. Neben den individuellen „concept images“ der Schüler rücken vor allem Aufgaben zum kritischen Vergleich von endlichen und unendlichen Mengen in den Mittelpunkt einer ersten Begriffsbegegnung (Tall & Vinner, 1981; Tsamir, 1999). In der Sek. I folgen Inhalte zu einem mathematischen (aktualen) Verständnis. Zum Ende der 5ten Jahrgangsstufe lernen Schüler die Mächtigkeit des Zahlbereichs der natürlichen Zahlen zu bestimmen, Bijektionen zu echten Teilmengen herzustellen und eine Definition für den Unendlichkeitsbegriff entsprechend zu formulieren. Dieses erste formalintegrierte Verständnis wird bei der Zahlbereichserweiterung der ganzen und rationalen Zahlen erneut aufgegriffen. Neben weiteren bijektiven Zuordnungen zur Menge der natürlichen Zahlen lernen Schüler den Begriff des abzählbar Unendlichen an Beispielen zu erklären und ihn von potentiellen Vorstellungen abzugrenzen. Speziell das 1. Diagonalverfahren Cantors ist Ausgangspunkt für erstaunliche Erkenntnisse zum Phänomen Unendlich. Schüler lernen entgegen jedes intuitiven Verständnisses („es gibt doch viel mehr Brüche als natürliche Zahlen“), dass genauso viele Brüche wie natürliche Zahlen existieren. Eine kritische Auseinandersetzung mit außermathematischen Inhalten (z.B. Kunst und Religion) gibt Anlass zur Diskussion und bietet Gelegenheit, geschichtliche Elemente in den Unterricht zu integrieren. Um das Bild des Unendlichkeitsbegriffs aus Sicht der Mathematik weiter auszudifferenzieren, folgen ergänzende Inhalte im Rahmen der reellen Zahlen. Neben dem 2. Diagonalverfahren Cantors, gehört die Erkenntnis „es existiert nicht nur eine Unendlichkeit“ genauso zum Lehrstoff, wie die Behandlung von Phänomenen in IR (z.B. Abbildung der Ebene auf ein Intervall). Alle weiteren Inhalte (z.B. Axiomatik) erfordern vertiefte mathematische Erkenntnisse und bieten sich deshalb ausschließlich für die gymnasiale Oberstufe oder eine universitäre Ausbildung an. Trotzdem zeigt der Lehrgang eine Möglichkeit auf, einen der zentralen Begriffe der Mathematik in den MU zu integrieren und so ein langfristiges Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs beginnend bei den „Kleinsten“ anzubahnen.

Literatur

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educ. Stud. Math.*, 10, 3–40.

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen. *JMD, 34 (*1), 73–98.

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. *Educ. Stud. Math.*, *38*, 209–234.

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ. Stud. Math.* 12, 151–169.

Wörner, D. (2013): Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht –eine empirische Studie. In: BzMU 2013. Münster: WTM Verlag.