Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme

Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Pädagogik (Dr. paed.)

der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund

Vorgelegt von
Karina Höveler

„Die unendliche Mannigfaltigkeit, welche sich sowohl in den Werken der Natur als auch in den Handlungen der Menschen zeigt, und welche die hervorragende Schönheit des Weltalls begründet, kann augenscheinlich ins nichts Anderem Ihren Grund haben, als in der verschiedenartigen Zusammensetzung, Vermischung und Gruppirung der einzelnen Theile.
Da aber die Menge der Dinge, welche zur Hervorbringung einer Erscheinung oder eines Ereignisses zusammenwirken, oft eine so grosse und so verschiedenartige ist, das die Erforschung aller Wege, auf welchen ihre Zusammensetzung oder Vermischung geschehen bez. nicht geschehen kann, den grössten Schwierigkeiten begegnet, so ist es nicht zu verwundern, dass selbst die klügsten und umsichtigsten Menschen in keinen Fehler öfter verfallen, als in denjenigen, welcher in der Logik die ungenügende Aufzählung der Theile genannt wird.

Deshalb ist die Combinatorik genannte Kunst mit vollem Recht als äusserst nützlich anzusehen, da sie geeignet ist diesem Mangel unserer sinnlichen Wahrnehmung abzuhelfen; sie lehrt alle möglichen Arten, nach welchen mehrere Dinge vermischt, gruppirt und miteinander zusammengesetzt werden können, so aufzuzählen dass wir sicher sind, keine von ihnen ausgelassen zu haben, welche unserem Vorhaben nützlich ist."

Jakob Bernoulli
Basel 1713 S. 76f.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Transkriptverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

CGSB	Comenius Grundschule Berne
GSSTB	Grundschule Stader Straße Bremen
KGSD	Kreuzgrundschule Dortmund
KGSW	Katholische Grundschule Wilhelmshaven
K. m. Wh.	Kombinationen mit Wiederholung
K. o. Wh.	Kombinationen ohne Wiederholung
V. o. Wh.	Variationen ohne Wiederholung

Einleitung

> *„Die Kombinatorik gehört zu den Inhalten des Mathematikunterrichts, die Schülern in der Oberstufe relativ viele Schwierigkeiten bereiten. Eine Ursache dafür ist sicher im mangelnden inhaltlichen Verständnis zu suchen. Eine Möglichkeit diesem entgegenzuwirken, ist in einer propädeutischen Behandlung der kombinatorischen Inhalte bereits ab der Grundschule im Sinne des Spiralprinzips zu sehen.“*
> *(Neubert 1998, S. 17)*

Kardinale Anzahlbestimmungen sind ein wesentlicher Bestandteil der Grundschulmathematik. So lernen Kinder im Verlauf der ersten Schuljahre Anzahlen von Objekten zu bestimmen, ohne sie einzeln abzählen zu müssen (vgl. Selter & Spiegel 2004a). Die Strategien zur Anzahlbestimmung werden dabei zunehmend komplexer: In den deutschen Bildungsstandards und Lehrplänen ist vorgesehen, dass sie ausgehend von elementaren Zählstrategien, wie dem Abzählen, dem Weiterzählen und dem Zählen in Schritten, Anzahlen in der ersten Klasse über die Addition und Subtraktion bestimmen. In der zweiten Klasse lernen die Kinder dann mit der Multiplikation und Division zwei komplexere mathematische Operationen kennen (vgl. KMK 2005).

Es gibt 4 Fußballmannschaften.
Jede Mannschaft spielt genau einmal gegen jede andere. Wie viele Fußballspiele gibt es insgesamt auf dem Turnier?

Abb. 1.1 Kombinatorische Problemstellung „Fußballturnier“

Der Anzahlbestimmung im Rahmen kombinatorischer Aufgabenstellungen, wie sie beispielsweise bei der Aufgabe „Fußballturnier“ erforderlich ist, wurde hingegen bislang in der Grundschule und weitestgehend auch in der Sekundarstufe eine eher stiefmütterliche Rolle zugewiesen (vgl. Perko 1980; Lockwood 2012).

Dies steht im Widerspruch zu ihrer alltagsbezogenen und innermathematischen Bedeutung. So spielen kombinatorische Fragestellungen und Methoden heute in vielen Anwendungsbereichen, wie beispielsweise der kombinatorischen Chemie, in der Informatik, im Rahmen von Optimierungen wie der Routenplanung oder aber auch als zentrales Hilfsmittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten eine bedeutsame Rolle. Zudem eignen sie sich zur Thematisierung und Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen (vgl. English 1991; Kütting 1994; Maher & Martino 1996; Martino & Maher 1999; Scheidt 1984; Sriraman & English 2004). Die geringe unterrichtliche Beachtung spiegelt sich in den

Kompetenzen der Lernenden wider. So zeigen Untersuchungen von Sekundarstufenschülern[1], dass diese erhebliche Schwierigkeiten bei der Lösung kombinatorischer Problemstellungen haben (vgl. Annin & Lai 2010; Cadwallader Olsker et al. 2012; Eizenberg & Zaslavsky 2003, 2004; English 1991, 1993a, 1993b; Godino et al. 1992; Hefendehl-Hebeker & Törner 1984; Janáčková & Janáček 2006; Lockwood 2010). Selbst Studierende zeigen oftmals große Schwierigkeiten (vgl. Hadar & Hadass 1981; Lockwood 2012). Angenommen wird, dass die Ursachen für viele der Schwierigkeiten in einem fehlenden Verständnis der kombinatorischen Konzepte und Operationen liegen (vgl. English 2007; Halani 2012; Hefendehl-Hebeker & Törner 1984; Neubert 2001).

Um ein gesichertes mathematisches Verständnis zu erwerben, wird im Sinne aktueller sozialkonstruktivistischer Lehr- und Lerntheorien angenommen, dass ein spiralförmiger Aufbau solcher Kompetenzen notwendig ist (vgl. Bruner 1973; Krauthausen & Scherer 2007; Wittmann 1981).

Die Thematisierung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme erweist sich insofern in der Grundschule insbesondere unter propädeutischen Gesichtspunkten als besonders bedeutsam. Das Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen in die Grundschulcurricula zu integrieren, wurde entsprechend seit Jahren von verschiedenen Mathematikdidaktikern und Institutionen gefordert (u.a. English 1993b; Kapur 1970; NCTM 2000; Scheidt 1984) und ist nun seit dem Beschluss der bundesweit gültigen Bildungsstandards im Fach Mathematik im Jahr 2004 als zu erwerbende Kompetenz explizit in den deutschen Lehrplänen der Grundschule verankert: Lernende sollen demnach *„einfache kombinatorische Aufgaben (z.B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen“* (KMK 2005, S. 9) können. Als Konsequenz werden in Zeitschriften und Büchern diverse Aufgabenvorschläge für den Unterricht z gemacht und Beispiele für die Lösungswege von Lernenden aufgezeigt (u. a. Bönig 2010; Fast 2008; Lack 2008; Möller & Wesseling 2008; Mogk 2008; Reitberger 2007; Roos 2010; Ruwisch & Schaffrath 2010; Schoy-Lutz 2011; Steinau 2010; Steinmetz 2010; Werner 2011).

Was bedeutet es, kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme, wie die Fußballaufgabe (vgl. Abb. 1.2) systematisch lösen zu können? Welche Konsequenzen können Lehrer konkret für den Unterricht ziehen, wenn Lernende diese ähnlich lösen, wie die Drittklässler Renas, Mia und Leon im Rahmen dieser Untersuchung (vgl. Abb. 1.2)?

1 Zur besseren Lesbarkeit werden Begriffe wie Lehrer und Schüler im Folgenden sowohl für die weibliche als auch für die männliche Form verwendet.

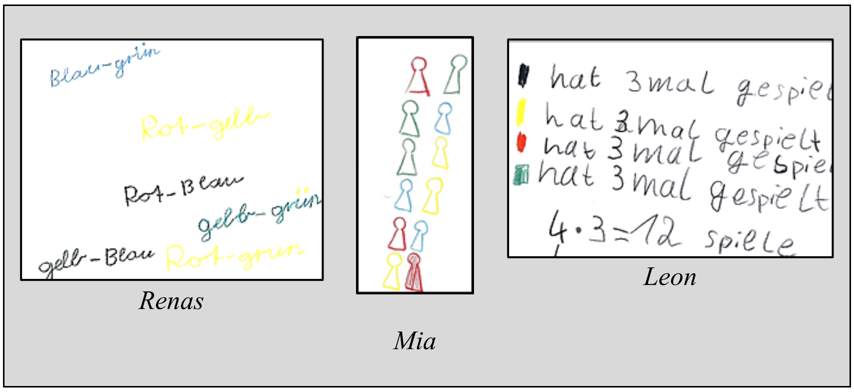


Abb. 1.2 Anzahlbestimmungen von Lernenden zur Fußballaufgabe

Wie sollte aufbauend auf ihren Kompetenzen im Sinne des Spiralprinzips der Lernprozess weiter gestaltet werden, damit sie schließlich ein gesichertes Verständnis kombinatorischer Konzepte und Operationen zur Anzahlbestimmung erwerben?

Die vorgenommene Integration der Thematik in die Grundschulcurricula stellt Lehrkräfte vor neue Herausforderungen: So ist es im Sinne der heute gängigen psychologisch-genetischen Auffassung vom Lehren und Lernen nicht die Aufgabe der Lehrenden, den Stoff an die Kinder, sondern zwischen dem Stoff und den Kindern zu vermitteln (vgl. Dewey 1974 im Original 1915; Hefendehl-Hebeker 2013; Vohns 2007, 2008; Wittmann 1995a, 1996, 2003). Dewey betont schon 1915:

> *„Abandon the notion of subject-matter as something fixed and ready-made in itself, outside the child´s experience; cease thinking of the child´s experience as also something hard and fast; see it as something fluent, embryonic, vital; and we realize that the child and the curriculum are two limits which define a single process. Just as two points define a straight line, so the present standpoint of the child and the facts and the truths of studies define instruction"(Dewey 1915, S. 109).*

Diese beiden Pole, so betonen Dewey (1915, S. 109) und auch Wittmann (1996), bestimmen zusammengenommen den Unterricht. Beide plädieren dafür, das Kind und die Fachinhalte als die bestimmenden Elemente der didaktischen Strukturierung des Unterrichts zu verstehen. In diesem Sinne ist der Lernprozess der Kinder als eine fortgesetzte Rekonstruktion zu verstehen, „die sich von der gegenwärtigen kindlichen Erfahrung aus zu dem strukturierten Wissensbestand eines Faches bewegt" (Wittmann 1996, S. 5). Einen Beleg dafür, dass ein solches Unterrichtskonzept zielführend für den Erwerb eines gesicherten Verständnisses kombinatorischer Strategien und Konzepte ist, liefert die Langzeituntersuchung von Maher et al. (vgl. Maher & Martino 1997; Maher & Speiser 1997; Maher & Martino 2000; Maher et al. 2011). Sie zeigen auf, wie einige Lernende ausgehend von eigenen Notationen und Ideen in der Grundschule über einen Zeitraum von zwölf Jahren zentrale kombinatorische Ideen entwickeln.

Um im Sinne einer solchen Auffassung unterrichten zu können, bedarf es seitens der Lehrenden einer Kenntnis über die Zusammenhänge zwischen den Denk- und Vorgehensweisen der Lernenden und den fachlichen Konzepten. So stellt sich bezogen auf die Lösungen der drei Lernenden die Frage, in welcher Beziehung ihre Vorgehens- und Denkweisen zu den mathematischen Strategien und Konzepten stehen.
Diese Frage lässt sich auf der Grundlage vorhandener Untersuchungsergebnisse bislang für kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme nicht zufriedenstellend beantworten. So liegen für den Primarbereich bereits einige Erkenntnisse vor (u.a. English 1991; Hoffmann 2003; Martino 1992). Diese beziehen sich jedoch in der Regel nicht auf Problemstellungen, in denen nach der Anzahl aller Lösungen gesucht wird (Wie viele?), sondern auf Probleme, in denen konkret die gesuchten Objekte bestimmt werden sollen (Welche?). Letztere lassen direkte Anzahlbestimmungen nicht zu, sondern verlangen die konkrete Benennung oder Notation der Objekte.

Ziele

Ziel dieser Arbeit ist es daher, einen Beitrag zur Beantwortung folgender Frage zu leisten:

> *Wie lösen Lernende der Primarstufe vor der Thematisierung im Unterricht kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme und in welcher Beziehung stehen die Vorgehensweisen und Denkwege der Lernenden zu den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten?*

Im Rahmen dieser Arbeit wurden dazu in einem iterativen Untersuchungsdesign die Vorgehensweisen und Denkwege von insgesamt 69 Drittklässlern[2] bei der Anzahlbestimmung im Kontext kombinatorischer Aufgabenstellungen in klini-

2 Es wurden dabei bewusst Lernende der dritten Klassen interviewt, da diese in der Regel bereits über Vorstellungen zu den zentralen Operationen zur Anzahlbestimmung verfügen, sie jedoch bislang in der Regel noch keinen systematischen „Lehrgang“ zur Kombinatorik durchlaufen haben.

schen Interviews erhoben und qualitativ ausgewertet. Erstmals wurden dabei gezielt die Vorgehensweisen und Vorstellungen von Lernenden beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen zu verschiedenen kombinatorischen Figuren (Kombinationen mit und ohne Wiederholung und Variationen ohne Wiederholung) vergleichend betrachtet sowie anschließend in Beziehung zu den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten gesetzt.

Aufbau der Arbeit

Die beiden Theoriekapitel beleuchten das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme aus zwei Blickwinkeln: Zunächst wird die kombinatorische Anzahlbestimmung in *Kapitel 1* im Spiegel des Faches betrachtet. Es wird geklärt, was aus fachlicher Sicht unter „kombinatorischer Anzahlbestimmung" zu verstehen ist, welche Vorgehensweisen, Konzepte und Modelle die Kombinatorik für das schulische Lernen zur Anzahlbestimmung bereitstellt und welche historischen Vorgehensweisen und Konzepte bekannt sind.
Bezugnehmend auf die zentralen fachlichen Vorgehensweisen und Konzepte wird in *Kapitel 2* der aktuelle mathematikdidaktische Forschungsstand bezüglich des Lösens kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme erläutert. Ausgehend von Forschungsergebnissen zu den Vorgehensweisen und Denkwegen von Lernenden vor der systematischen unterrichtlichen Thematisierung kombinatorischer Problemstellungen werden weitere Forschungsinteressen herausgearbeitet sowie Konsequenzen für die empirische Studie abgeleitet.
In *Kapitel 3* erfolgt die Ausschärfung der Forschungsfrage, bevor die Konzeption der vorliegenden Untersuchung dargelegt und die Methoden der Datenerhebung und Datenauswertung präzisiert werden.
Die Darstellung der Ergebnisse der empirischen Untersuchung in den *Kapiteln 5 bis 8* erfolgt analog zu der im Theorieteil vorgenommenen Strukturierung des aktuellen Forschungsstandes:

Aktueller Forschungsstand:	Ergebnisse der Untersuchung:
2.1 Einflussfaktoren	4. Einflussfaktoren
2.2 Die Rolle von Strukturierungen	5. Die Rolle von Strukturierungen
2.3 Die Beschreibung von Strukturierungsstrategien	6. Die Beschreibung von Strukturierungsstrategien
2.4 Strukturierungsstrategien	7. Strukturierungsstrategien
2.5 Zählstrategien	8. Zählstrategien

Abschließend erfolgt in *Kapitel 9* eine Zusammenfassung der Ergebnisse, bevor Schlussfolgerungen für die didaktische Strukturierung des Unterrichts und weiterer Forschungsinteressen gezogen werden.

1 Kombinatorische Anzahlbestimmung im Spiegel des Faches

Die Kombinatorik „lehrt alle möglichen Arten, nach welchen mehrere Dinge vermischt, gruppirt und miteinander zusammengesetzt werden können, so aufzuzählen dass wir sicher sind, keine von ihnen ausgelassen zu haben, welche unserem Vorhaben nützlich ist."

(Bernoulli 1713 nach deutscher Übersetzung Haussner 1899, S. 76f.)

Die Kombinatorik wird häufig als die Kunst des Zählens oder geschickten Zählens bezeichnet (vgl. Aigner 2007; Batanero et al. 1996; Engel 1987; English 2005; Glaymann & Varga 1975; Hart 1991; Ruwisch 2010a; Selter & Spiegel 2004b).

Der Begriff „Kombinatorik" ist abgeleitet vom lateinischen Wort „combinatio" und bedeutet ursprünglich so viel wie die Zusammenfassung von zwei Dingen (vgl. Knobloch 1973). Das Kombinieren oder Zusammenfassen von Elementen zu einem neuen Objekt oder, wie Bernoulli (1713 nach deutscher Übersetzung Haussner 1899, S. 76f.) es beschreibt, das Vermischen, Gruppieren und miteinander Zusammensetzen von Dingen, bildet den zentralen Inhalt der Kombinatorik.

Ziel kombinatorischer Fragestellungen ist es, alle zulässigen Kombinationsmöglichkeiten („Welche gibt es?") und deren Anzahl („Wie viele Möglichkeiten gibt es?") zu bestimmen (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 76; Neubert 2013, S. 688). Der Ausdruck „geschicktes Zählen" verdeutlicht, wie dabei vorgegangen werden soll: möglichst geschickt, also möglichst einfach. „Aufgabe der Kombinatorik", so Kütting (1994, S. 253), „ist die arbeitsökonomische Bestimmung von Kardinalzahlen." Verkürzt bezeichnet Törner (1987, S. 121) „die schulrelevante abzählende Kombinatorik als eine Art eines höheren 1·1[…], wofür „neue" Zahlen und „neue" Zählverfahren bereitgestellt werden." Dieser Teilbereich der Kombinatorik wird im Folgenden genauer betrachtet.

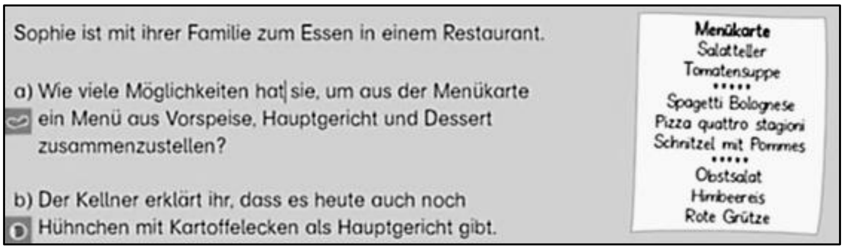
Die zentralen fachlichen Strategien und Konzepte zur Anzahlbestimmung sind zentraler Inhalt dieses Kapitels. Zunächst werden dazu kombinatorische Problemstellungen und die Besonderheiten bei der Anzahlermittlung betrachtet (1.1). Gegenstand des darauffolgenden Abschnitts (1.2) sind die Vorgehensweisen, die der Zweig der Kombinatorik zur Lösungsfindung bereitstellt sowie die damit verbundenen zentralen Konzepte, Hilfsmittel und Operationen. Daran anknüpfend (1.3) erfolgt ein Abriss über die geschichtliche Entwicklung der beschriebenen Konzepte und Operationen, da im Rahmen dieser Arbeit angenommen wird, dass es Analogien zwischen der ontogenetischen und der phylogenetischen Entwicklung von Strategien und Konzepten gibt. Abschließend wird eine Zusammenfassung der zentralen Aspekte vorgenommen (1.4).

1.1 Kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme

In der Kombinatorik wird je nach Problemstellung zwischen *Anzahlbestimmungs-, Aufzähl-, Existenz- und Optimierungsproblemen* (vgl. Aigner 2007; Batanero et al. 1996; Danckwerts et al. 1985) unterschieden.
In *Anzahlbestimmungsproblemen, auch Abzählproblemen* genannt (engl. counting problems), geht es darum, die Mächtigkeit von Mengen zu bestimmen.
In *Aufzählproblemen* (engl.: enumeration problems) ist herauszufinden, ob es ein Vorgehen gibt, welches es ermöglicht, alle Figuren systematisch aufzulisten. Bei *Existenzproblemen* (engl. existence problems) geht es darum, zu klären, ob ein gegebenes Problem überhaupt eine Lösung besitzt. Entsprechend muss die Existenz einer gesuchten Figur gezeigt bzw. widerlegt werden. *Optimierungsprobleme* (engl. optimization problems) fokussieren auf das Finden einer besten Lösung für ein gegebenes Problem. Zum Lösen eines Optimierungsproblems werden entsprechend zunächst alle möglichen Ergebnisse bestimmt, bevor die optimalen identifiziert werden können (vgl. Batanero et al. 1996).
Im Alltag sind insbesondere Optimierungsprobleme bedeutsam. Aufzähl- und Abzählfragen stellen sich häufig im Kontext der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. In diesem Zusammenhang findet die Kombinatorik auch ihren Einzug in den Unterricht. Vor der Thematisierung stochastischer Fragen werden in der Regel Abzählprobleme thematisiert, weil die Formeln zur Bestimmung der La Place´schen Wahrscheinlichkeitsräume benötigt werden (vgl. Hefendehl-Hebeker & Törner, 1984, S. 245). Im Mittelpunkt der folgenden Ausführungen stehen zentrale Merkmale von Auflistungs- und Anzahlbestimmungsproblemen sowie die fachlichen Zugänge und Konzepte zur Lösungsfindung von Anzahlbestimmungsproblemen.

1.1.1 Kombinatorische Figuren

Zentrales Charakteristikum kombinatorischer Fragestellungen ist das Kombinieren von Dingen bzw. Elementen zu neuen Objekten, „Figur" genannt (vgl. Jeger 1973). Kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme unterscheiden sich damit in einem wesentlichen Punkt von den bereits bekannten Anzahlbestimmungsproblemen: Anders als beim Letztgenannten ist hierbei zu berücksichtigen, dass nicht Einzelelemente, sondern Figuren gezählt werden und die zu zählenden Figuren nicht explizit vorliegen, wie die nachfolgenden Beispiele aus Schulbüchern der Primastufe und aus Artikeln exemplarisch zeigen:


Sophie ist mit ihrer Familie zum Essen in einem Restaurant.

a) Wie viele Möglichkeiten hat sie, um aus der Menükarte ein Menü aus Vorspeise, Hauptgericht und Dessert zusammenzustellen?

b) Der Kellner erklärt ihr, dass es heute auch noch Hühnchen mit Kartoffelecken als Hauptgericht gibt.

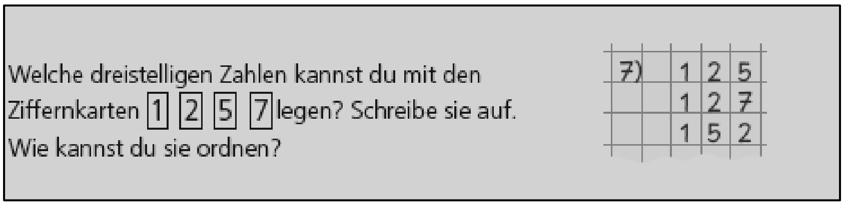
Menükarte
Salatteller
Tomatensuppe
*****
Spagetti Bolognese
Pizza quattro stagioni
Schnitzel mit Pommes
*****
Obstsalat
Himbeereis
Rote Grütze

Abb. 1.1 Anzahlbestimmungsproblem „Menüs zusammenstellen“ (Maier 2006, S. 97)

Anne, Benni, Claudia, Daniel, Eva und Florian treffen sich oft zum Tischtennisspielen. Sie kommen auf die Idee ein Tischtennisturnier zu veranstalten. Dabei soll jeder gegen jeden spielen.
Die Kinder überlegen, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit auch jedes Kind gegen jedes andere Kind Tischtennis spielt. Sie kommen aber zu keiner Lösung. Könnt ihr ihnen sagen, wie viele Spiele es sind?

Außerdem würden sie im Anschluss gerne eine Rückrunde machen. Wie viele Spiele sind es dann zusammen?

Abb. 1.2 Anzahlbestimmungsproblem „Tischtennisturnier" (Neubert 2003, S. 98)


Welche dreistelligen Zahlen kannst du mit den Ziffernkarten 1 2 5 7 legen? Schreibe sie auf. Wie kannst du sie ordnen?

7) 125
127
152

Abb. 1.3 Auflistungsproblem „Zahlen aus Ziffernkarten“ (Wittmann & Müller 2005, S. 33)

In den dargestellten Problemen geht es darum, zulässige Kombinationen der gegebenen Elemente, d.h. *kombinatorische Figuren*, zu erstellen. In der Mathematik wird unter einer kombinatorischen Figur „eine Anordnung von irgendwelchen Dingen aufgrund gegebener Vorschriften" verstanden (Jeger, 1973, S. 8). Dabei so Jeger „gehören zu jedem kombinatorischen Problem spezifische kombinatorische Figuren“ (ebd. S. 8). Dies bedeutet für die Menüaufgabe aus Vorspeise, Hauptspeise und Nachspeise Menüs zusammenzustellen, für das Tischtennisturnier aus jeweils zwei Spielern Spielpaarungen zu erstellen bzw. in

der dritten Aufgabe aus drei von vier Ziffernkarten eine dreistellige Zahl zu bilden.
In den Aufgaben wird nicht nach einer möglichen Kombination gefragt, sondern nach allen möglichen, die den vorgegebenen Bedingungen entsprechen. Gesucht ist entsprechend die gesamte *Figurenmenge*.

Kombinationen aus Elementen einer Menge oder aus Elementen mehrere Mengen

Die Aufgabenstellungen unterscheiden sich im Hinblick auf die zu kombinierenden Elemente: In der Menüaufgabe wird aus drei verschiedenen Mengen ausgewählt: Aus der Menge der Vorspeisen, der Hauptspeisen und der Nachspeisen. Es wird demnach eine Figurenmenge gesucht, die alle möglichen Kompositionen der Elemente der drei Mengen enthält. Gesucht ist das sogenannte Mengen- oder Kreuzprodukt, welches Kirsch (2004) für zwei Mengen wie folgt definiert: *„Unter dem Kreuzprodukt oder kartesischem Produkt $A \times B$ der Mengen A und B versteht man die Menge aller Paare deren erstes Glied zu A und deren zweites zu B gehört: $A \times B$ = die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$."* (Kirsch 2004, S. 23 f.). Diese Definition lässt sich analog auf das Kreuzprodukt von n verschiedenen Mengen übertragen.
In den beiden anderen Aufgabenstellungen werden hingegen Kompositionen aus Elementen einer Menge gesucht, der Menge der Kinder, die Tischtennis spielen bzw. der Menge der Ziffernkarten.

Kompositionsgesetze und Grundfiguren

Abhängig von der jeweiligen Problemstellung liegen der zu bildenden kombinatorischen Figur *verschiedene* Kompositionsgesetze zugrunde: Bei der Tischtennisaufgabe ist zu beachten, dass ein Kind nicht gegen sich selbst spielen kann. Ebenso ist es bei der Menüaufgabe innerhalb eines Menüs beispielsweise nicht möglich, zweimal eine Vorspeise zu wählen. Bei den Zahlen aus Ziffernkarten kann eine Ziffer innerhalb einer dreistelligen Zahl nur einmal vorkommen. Auch *bezüglich der gesuchten Figurenmenge* gibt es verschiedene in den Aufgaben enthaltene *Vorgaben*: In der Tischtennisaufgabe geht es darum, herauszufinden, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, zwei Personen aus der Menge aller Spieler auszuwählen. Dabei spielt die Anordnung bzw. die Reihenfolge der Auswahl der Personen keine Rolle.
Unter Berücksichtigung, dass innerhalb einer Figur ein Element einmal oder mehrmals genutzt werden darf, ergeben sich in Anlehnung an Kütting (vgl. 1994, S. 109) und Flachsmeyer (vgl. 1969, S. 41ff.) insgesamt sechs grundle-

gende kombinatorische Figuren[3]: Die Permutationen, Kombinationen und Variationen mit und ohne Wiederholung. Für diese sogenannten kombinatorischen Grundfiguren stehen Operationen zur Anzahlbestimmung zur Verfügung.
Die Begriffe Permutationen, die Kombinationen und Variationen mit und ohne Wiederholung dienen oftmals auch der Kategorisierung kombinatorischer Problemstellungen, da bei gleichen gesuchten Figuren auch die gleichen Lösungsstrategien verwendet werden können. In der Literatur wird entsprechend auch von Grundaufgaben der Kombinatorik gesprochen (vgl. Ruwisch 2010a). Eine genauere Erläuterung der einzelnen Grundfiguren wird in Abschnitt 2.2.3 vorgenommen.

1.1.2 Implizite Handlungsvorstellungen

Ähnlich, wie sich bezogen auf die Division Aufgaben hinsichtlich der zugrunde liegenden Handlungsvorstellung in Ver- und Aufteilprobleme klassifizieren lassen (vgl. Krauthausen & Scherer 2007; Padberg 2005; Radatz et al. 1998), wird auch eine Einteilung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme gemäß der implizierten Handlungsvorstellungen vorgenommen (vgl. Dubois 1984, S. 39). Dabei wird in Anlehnung an Dubois (1984) zwischen Aufgaben, bei denen die Vorstellung des Auswählens von Elementen aus einer Menge („selection"), Verteilens oder Zuordnens von Gegenständen („distribution") beziehungsweise Aufteilens einer Menge in Teilmengen („partition") suggeriert wird, unterschieden:

Aufgabentyp	**Beispiel**
Selektionsproblem	*Beim Eismann* In ihrem Ferienort entdeckt Doro einen Eisverkäufer, bei dem sie ihre vier Lieblingssorten bekommen kann. Banane, Erdbeere, Himbeere und Nuss. Sie hat vor, sich jeden Tag eine Portion mit zwei Kugeln zu kaufen. Wie viele verschiedene Eishörnchen kann Doro sich kaufen? (Selter & Spiegel 2004a, S. 89)

3 Über die Anzahl und Benennung der kombinatorischen Grundfiguren herrscht kein Konsens. Einige Autoren (u.a. Selter & Spiegel 2004b) benennen vier elementare Figuren. Bei den entsprechenden Autoren werden entweder die Permutationen oder die Variationen nicht mit aufgelistet. Die Permutationen ohne Wiederholung werden oftmals als Spezialfall der Variationen ohne Wiederholung beschrieben (beispielsweise bei Selter & Spiegel 2004b) oder die Variationen als Form der Permutationen ohne Wiederholung eingeordnet (vgl. bspw. Kütting & Sauer 2008, S. 138ff.).

Distributions-problem	*Geburtstagseinladungen* Silke möchte drei Geburtstagseinladungen verschicken. Sie hat einen roten, einen grünen, einen blauen und einen gelben Briefumschlag. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die drei Einladungen auf die Briefumschläge zu verteilen? (in Anlehnung an Batanero et al.1997b, S. 8)
Partitionsproblem	*Briefmarken* Lea und Lukas haben vier verschiedene Briefmarken. Sie entscheiden, dass jeder von ihnen zwei Briefmarken bekommen soll. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Briefmarken aufzuteilen?(in Anlehnung an Batanero et al.1997b, S. 9)

Tab. 1.1 Beispiele für Selektions-, Distributions- und Partitionsprobleme

Probleme mit zugrunde liegender Selektionsvorstellung
Selektionsprobleme – wie die Eismannaufgabe – legen die Vorstellung nahe, aus einer Menge mit n Elementen eine Menge von k Elementen auszuwählen: Schlüsselwörter in den Problemstellungen, die die Idee des Auswählens suggerieren, sind beispielsweise „wähle", „nimm", „suche aus", „stelle zusammen", etc.. Bei Selektionsproblemen wird somit unterschieden zwischen Aufgaben, bei denen die Reihenfolge, in der die Elemente ausgewählt werden, eine Rolle spielt oder nicht (Variationen oder Kombinationen) und, ob bei denen ein Element mehrfach ausgewählt werden darf oder nicht (mit und ohne Wiederholung) (vgl. Batanero et al. 1997b).

Probleme mit zugrunde liegender Distributionsvorstellung
Distributionsprobleme wie das Problem zu den „Geburtstagseinladungen" legen die Vorstellung nahe, eine Menge mit n Objekten auf m Zellen zu verteilen bzw. eine Zuordnung von n Objekten zu m Zellen vorzunehmen (vgl. Batanero et al. 1997a). Schlüsselwörter sind beispielsweise „platziere", „weise ein / weise zu", „lagere", „bewahre auf", „besetze". In Problemen dieses Typs können die Bedingungen so geändert werden, dass verschiedene Verteilsituationen entstehen (vgl. Batanero et al. 1997b):

- Situationen, in denen die zu verteilenden Gegenstände oder die Zellen (unterscheidbar) identisch sind oder nicht.
- Situationen, in denen die Platzierung der zu verteilenden Gegenstände in einer Zelle eine Rolle spielt oder nicht.
- Besondere Bedingungen, die der Verteilung zugrunde liegen, bspw. eine maximale Anzahl an Elementen in einer Zelle, die Möglichkeit leere Zellen zu haben usw.

Wesentlich ist, dass die Verteilung der Objekte auf die Zellen nicht, wie bei der Division, zwangsläufig „gleichmäßig“ erfolgen muss. Dubois (1984) unterscheidet zwischen sechs elementaren Typen im Distributionsmodell:

- Geordnete Distributionen unterschiedlicher Objekte in unterscheidbare Zellen
- Geordnete Distributionen unterschiedlicher Objekte in ununterscheidbare Zellen
- Ungeordnete Distributionen unterschiedlicher Objekte in unterscheidbare Zellen
- Ungeordnete Distributionen unterschiedlicher Objekte in ununterscheidbare Zellen
- Distributionen ununterscheidbarer Objekte in unterscheidbare Zellen (da die Objekte ununterscheidbar sind, ist die Anordnung nicht von Bedeutung)
- Distributionen ununterscheidbarer Objekte in ununterscheidbare Zellen (die Anordnung nicht von Bedeutung)

Batanero et al. (1997b, S. 183) stellen in Anlehnung an Dubois (1984) heraus, dass weitere Bedingungen, wie beispielsweise die maximale Anzahl an Objekten in einer Box oder die Möglichkeit leerer Boxen, die Lösungsfindung beeinflussen:

> “*In addition, other conditions, such as the maximum number of objects in each cell or the possibility of having empty cells are basic to finding the solution to the problem. There is not a different combinatorial operation for each different type of distribution mentioned, and, moreover, the same combinatorial operation may be obtained with two different distribution problems.”* (Batanero et al. 1997b, S. 183)

Zugleich weist Dubois (1984), ebenso wie Lockwood (2012), auf den Zusammenhang zwischen Distributions- und Selektionsproblemen hin und zeigt auch auf, dass es nicht möglich ist, jedes unterschiedliche Distributionsproblem in ein Samplingproblem zu übersetzen (vgl. Dubois 1984, S. 46).

Probleme mit zugrundeliegender Partitionsvorstellung

Bei Partitionsproblemen, wie dem Briefmarkenproblem, wird das Teilen einer Menge von m Objekten in n Teilmengen suggeriert. Auch Begriffe, wie „aufteilen, teilen, einteilen, spalten, zerlegen, abtrennen, abgrenzen“ legen diese Vorstellung der Problemlösung nahe. Anders als zwischen den Selektions- und Distributionsproblemen gibt es zwischen den Modellen der Partition und der

Distribution einen bijektiven Zusammenhang: So kann die Verteilung von n Objekten auf m Zellen auch als Partition einer Menge mit m Elementen in n Teilmengen dargestellt werden (vgl. Dubois 1984). Godino et al. (2005, S. 10) weisen darauf hin, dass dieser Zusammenhang für die Lernenden jedoch nicht zwangsläufig offensichtlich ist.
Um kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme lösen zu können, stellt die abzählende Kombinatorik heute eine Reihe von Konzepten, Strategien und Modellen zur Verfügung. Diese werden im folgenden Abschnitt genauer betrachtet.

1.2 Vorgehensweisen zur Anzahlbestimmung

Im Gegensatz zu anderen Bereichen der Mathematik, wie beispielsweise der Algebra, der Geometrie oder der Analysis, stellt die Kombinatorik keine strikt vorgeschriebenen Lösungsschemata oder Algorithmen zur Lösungsfindung zur Verfügung (vgl. Schrage 1996). Es geht vielmehr darum, aus einer Vielzahl verschiedener Lösungswege einen angemessenen Weg auszuwählen und eine passende Lösungsstrategie zu erkennen (vgl. Lockwood 2012; Hefendehl-Hebeker & Törner 1984; Schrage 1996, S. 175). Das Erkennen einer geeigneten Lösungsstrategie und das Finden einer geeigneten Strukturierung stellt nach Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) die zentrale Herausforderung dar:

> *„Die eigentliche Schwierigkeit beim Lösen elementarer kombinatorischer Aufgabenstellungen besteht im Erkennen der passenden Lösungsstrategie sowie in der Strukturierung der Aufgabendaten in Form eines der Strategie angepassten Schemas.“* (ebd., S. 245)

Grundsätzlich stehen zur Anzahlbestimmung verschiedene Zugänge zur Verfügung, welche sich hinsichtlich des Grads an Abstraktion unterscheiden. Die Anzahlbestimmung kann über *strukturierte Auflistungen* vorgenommen werden, mit Hilfe *fundamentaler Zählprinzipien* oder auch mit Hilfe *kombinatorischer Operationen*. Neben diesen Zugängen gibt es weitere ikonische und symbolische Darstellungen und Hilfsmittel, wie beispielsweise das Baumdiagramm, tabellarische Darstellungen und Codewörter, die zur Lösungsfindung beitragen können (vgl. Kütting & Sauer 2008).
Aus fachdidaktischer Sicht ist zu berücksichtigen, dass die drei Zugänge nicht losgelöst voneinander betrachtet werden können, da das Verwenden der kombinatorischen Grundfiguren ein Verständnis der hinter den Regeln stehenden fundamentalen Ideen und Zählstrategien der Kombinatorik voraussetzt. Diese wiederum beruhen auf geeigneten Strukturierungen (vgl. Hefendehl-Hebeker & Törner 1984).
Der elementarste Weg zur Lösungsbestimmung ist entsprechend der des strukturierten Auflistens. Er wird im Rahmen dieser Arbeit auch als indirekte Anzahl-

bestimmung bezeichnet, da im Gegensatz zu den beiden anderen Wegen keine unmittelbare Anzahlbestimmung erfolgt, sondern zunächst alle Objekte erstellt werden. Dieses Vorgehen ist jedoch insbesondere bei großen Anzahlen sehr aufwendig. Entsprechend geht es darum, geschicktere Zählstrategien und Darstellungen zu entwickeln (vgl. Wittmann & Müller 1984). Das *systematische Auflisten* ermöglicht die Ableitung sinnvoller *Zählstrategien und Zählprinzipien*, die das Abzählen erleichtern. Mittels der Zählprinzipien ist daran anknüpfend eine auf Verständnis beruhende Rekonstruktion der zu den kombinatorischen Grundfiguren gehörenden *Formeln* möglich (vgl. Hefendehl-Hebeker & Törner 1984).
Im Folgenden werden die drei Zugangsweisen, die zugehörigen Konzepte sowie die Verknüpfungen zwischen den verschiedenen Zugängen genauer betrachtet.

1.2.1 Anzahlbestimmung mit Hilfe strukturierter Auflistungen

Ein möglicher Weg zur Anzahlbestimmung besteht darin, zunächst alle einzelnen Figuren zu notieren und dann über einfaches Abzählen der Figuren die Mächtigkeit der Figurenmenge zu bestimmen (vgl. Kütting 1994; Kütting & Sauer 2008). Zentral bei einer solchen auflistenden Anzahlbestimmung ist es, ausschließen zu können, dass Objekte doppelt notiert oder vergessen wurden. Dazu bietet es sich an, direkt eine strukturierte Auflistung vorzunehmen oder die Objekte anschließend zu strukturieren. Diese Darstellungen können zugleich auch genutzt werden, um später daraus die Zählprinzipien abzuleiten. Grundsätzlich sind verschiedene Strukturierungen bzw. Schematisierungen zur Lösung einer Aufgabe denkbar (vgl. Hefendehl-Hebeker & Törner 1984, S. 249). So unterscheiden Wittmann und Müller (1984) zwischen *„räumlich Strukturieren und Zählen“* und *„Aufspalten und Zählen“*. Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) unterscheiden zwischen einer statischen und einer dynamischen Sicht. Unter der statischen Sicht werden die Ergebnisse eines Versuchsablaufs betrachtet, diese Ergebnisse entsprechen der gesuchten Figurenmenge und können, wie Wittmann und Müller es beschreiben, räumlich strukturiert werden. Die dynamische Sicht hingegen beschreibt den Versuchsablauf, also die Erstellung der Objekte, diese werden dabei in ihre einzelnen Bestandteile aufgespalten und sukzessive zusammengesetzt.
Die zwei möglichen Zugänge werden im Folgenden genauer betrachtet, dazu werden exemplarisch Strukturierungen für Wörter aus drei Buchstaben, bei denen die Wiederholung der Buchstaben erlaubt ist, vorgenommen.

1.2.1.1 *Räumlich Strukturieren und Zählen - statische Sicht*

Lockwood (2013) veranschaulicht zwei mögliche räumliche Strukturierungen für Wörter aus drei Buchstaben, bei denen die Wiederholung der Buchstaben erlaubt ist. In der linken Abbildung wurden die Wörter alphabetisch sortiert und in Abhängigkeit von den Anfangsbuchstaben in Gruppen eingeteilt (vgl. Abbildung 1.4 links). In der rechten Abbildung wurden ebenfalls Gruppen gebildet, allerdings in Abhängigkeit von der Anzahl verschiedener Buchstaben in den Wörtern (vgl. Abbildung 1.4 rechts).

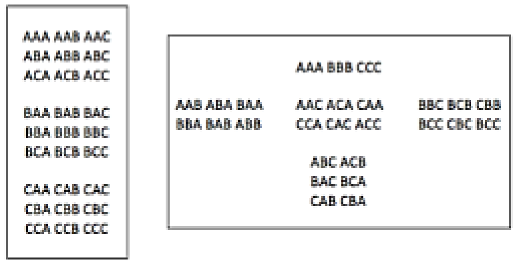


Figure 6: Two Ways to Structure the Set of Outcomes

Abb. 1.4 Verschiedene Strukturierungen von Wörtern aus drei Buchstaben (Lockwood 2013, S. 257)

Das „räumliche Strukturieren und Zählen" beruht aus fachlicher Sicht darauf eine Klasseneinteilung der Figurenmenge vorzunehmen:

> *„Die Mengen K_i $(i \in I)$ bilden eine Klasseneinteilung von M, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*
> *(i)* $\bigcup_{i \in I} K_i = M$
> *(ii)* $K_i \cap K_j = \emptyset, falls\ \ K_i \neq K_j$
> *(iii)* $K_i \neq \emptyset\ für\ alle\ i \in I$
> *Die Vereinigung aller Mengen K_i ist M, je zwei verschiedene dieser Mengen sind disjunkt, keine dieser Mengen ist leer." (Kirsch 2004, S. 136).*

Die zu bestimmende Figurenmenge wird entsprechend räumlich in Teilmengen zerlegt. Wenn eine solche Strukturierung vorgenommen wird, ist im Sinne der Klasseneinteilung zu berücksichtigen, dass die gesuchte Figurenmenge M in Teilmengen zerlegt wird, die disjunkt sind und deren Vereinigungsmenge aller Klassen der Figurenmenge M entspricht (vgl. Kirsch 2004, S. 136).
Eine genauere Betrachtung der vorgenommenen Strukturierungen zeigt, dass die zweite vorgenommene Strukturierung dabei auf einer Eigenschaft der zu erstellenden Figuren beruht. So ist eine Strukturierung in Abhängigkeit von der Anzahl verschiedener Elemente in einem Objekt (im Beispiel Buchstaben) dann möglich, wenn Wiederholungen zugelassen sind. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass es Strukturierungen gibt, die abhängig von den Eigenschaften der zu erstellenden Figuren sind.

1.2.1.2 *Aufspalten und Zählen- Dynamische Sicht*

Alternativ ist es auch möglich, die Strukturierung in Form eines Stufenablaufs zu organisieren. Diese Strukturierung lässt sich ikonisch mittels eines Baumdiagramms realisieren. Das Baumdiagramm visualisiert dabei sowohl den Lösungsprozess als auch das Ergebnis:

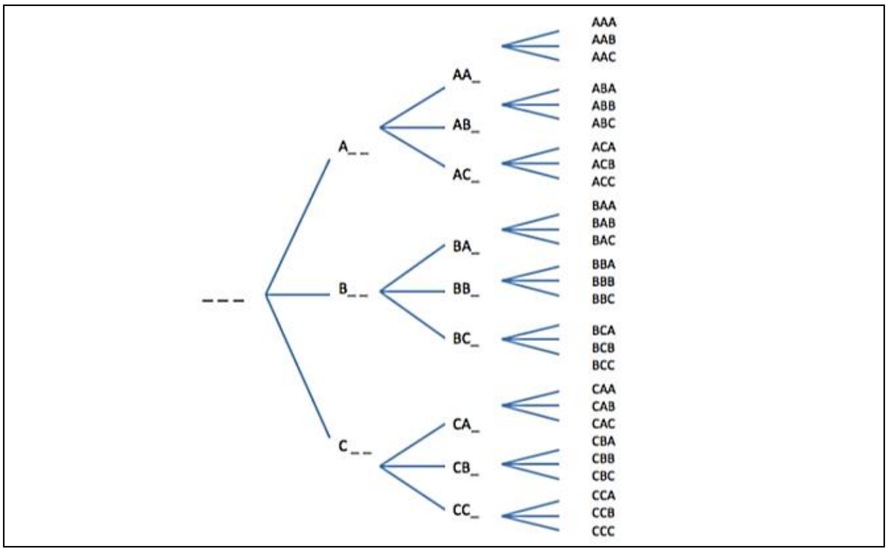


Abb. 1.5 3-Buchstabenwörter im Baumdiagramm (Lockwood 2013, S. 257)

Jedes Stockwerk im Baum entspricht einer Entscheidungsstufe. So können die Wörter in einem dreistufigen Prozess konstruiert werden: Auf der ersten Entscheidungsstufe wird der erste Buchstabe des Wortes gewählt, auf der zweiten Entscheidungsstufe der zweite und auf der dritten Entscheidungsstufe der dritte. Jede Astspitze stellt entsprechend eine Möglichkeit dar, den Entscheidungsprozess zu durchlaufen. Zu beachten ist die notwendige Unabhängigkeit der Entscheidungen auf jeder Stufe.

Bei der in Abschnitt 1.1.1 dargestellten Menüaufgabe ist diese Unabhängigkeit gegeben, da auf jeder Entscheidungsstufe aus einer anderen Grundmenge (Stufe 1: Menge aller Vorspeisen, Stufe 2: Menge aller Hauptspeisen, Stufe 3: Menge aller Nachspeisen) ausgewählt wird. Dies ist jedoch nicht bei allen Aufgaben direkt gegeben. So wird beispielsweise bei der Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten“ aus einer Grundmenge ausgewählt, in der insgesamt vier Ziffern zur Verfügung stehen. Wird aus den vier Ziffernkarten auf der ersten Entscheidungsstufe die Zehnerziffer ausgewählt und auf der zweiten Entscheidungsstufe die Einerziffer, so ist bei der Ziehung der Einerziffer zu berücksichtigen, welche Zeh-

nerziffer bereits gezogen wurde, da jede Ziffer nur ein einziges Mal gegeben ist. Demnach kann auf der zweiten Stufe jeweils nur noch aus drei Ziffern ausgewählt werden.
Durch die Beschriftung der Pfade des Baumdiagramms entstehen Codewörter. Diese liefern, ebenso wie das Baumdiagramm selbst, geordnete Strukturen. Werden die Codewörter losgelöst vom Baumdiagramm notiert, so sind die Ergebnisse direkt ablesbar, eine Rekonstruktion des Lösungsvorganges wäre rückwirkend ebenfalls möglich (vgl. Hefendehl-Hebeker & Törner 1984). Zentral ist, dass das Baumdiagramm einerseits eine dynamische Sicht auf den Lösungsprozess ermöglicht. Die entstandenen Codewörter am Ende der Pfade liefern zugleich eine Strukturierung der Figurenmenge und lassen sich als Strukturierung der Menge in Teilmengen auffassen. Zu beachten ist jedoch, dass es sich dabei, wie exemplarisch für die Wörter aus drei Buchstaben gezeigt, nur um *eine* mögliche Strukturierung der Figurenmenge handelt.

1.2.2 Anzahlbestimmung mit Hilfe fundamentaler Zählstrategien

Bei fundamentalen Zählstrategien bzw. Zählprinzipien handelt es sich um einfache; aber grundlegende Ideen der kombinatorischen Mathematik. Fundamental deshalb, weil fast jedes Zählproblem – zumindest auf dem Level der Schulmathematik – durch geschickte Anwendung dieser Prinzipien gelöst werden kann (vgl. Schrage 1996). *„Zählstrategien beruhen darauf“,* so Wittmann und Müller (1984, S. 219)*, „dass man eine vorhandene Struktur des zu zählenden Bereichs ausnützt oder eine geeignete Strukturierung vornimmt.“* Die Gültigkeit der Zählstrategien lässt sich auf grundlegende Gesetze der Mengenlehre zurückführen (vgl. Jeger 1973).
Die Liste fundamentaler Zählprinzipien ist in der Literatur nicht einheitlich, ebenso wie die Bezeichnung der verschiedenen Prinzipien bzw. Strategien (vgl. bspw. die Auflistungen und Begriffe bei Aigner 1993, 2007; Danckwerts et al. 1985; Kütting & Sauer 2008; Ruwisch 2010a oder Selter & Spiegel 2004b, S. 291). Eine besonders ausführliche Auflistung und Darstellung wird von Schrage (1996) vorgenommen. Er benennt sieben Prinzipien, die sich zur Lösung kombinatorischer Problemstellungen als zentral erweisen (vgl. ebd.; S. 198ff.). Darunter sind vier, die sich auf das Anwenden grundlegender mathematischer Rechenoperationen beziehen und *im Rahmen dieser Arbeit als operationale Strategien* bezeichnet werden.

Die drei weiteren Prinzipien, im Folgenden als *heuristische Strategien*[4] benannt, finden auch in anderen Bereichen der Mathematik Anwendung.

1.2.2.1 *Operationale Strategien*

Die meisten Autoren beschränken sich bei der Benennung zentraler kombinatorischer Zählstrategien auf operationale Strategien (vgl. Danckwerts et al. 1985; Engel 1973; Engel et al. 1974; Kütting & Sauer 2008 oder Ruwisch 2010b, S. 40). Trotz unterschiedlicher Akzentuierungen und verwendeter Begrifflichkeiten herrscht ein breiter Konsens über die herausragende Stellung des Additionsprinzips und des allgemeinen Zählprinzips.

Das Additionsprinzip

Hinter dem Additionsprinzip, auch als „Regel des getrennten Abzählens" (Hefendehl-Hebeker & Törner 1984, S. 252), „Additionsregel" oder „Summenregel" (Ruwisch 2010a; Selter & Spiegel 2004b, S. 301) bekannt, steckt die Idee, die Mächtigkeit einer Menge A zu bestimmen, indem diese zunächst systematisch in überschaubare Teilmengen zerlegt wird. Die Anzahl der Elemente der jeweiligen Teilmengen wird dabei bestimmt und anschließend addiert (vgl. Kütting 1994).

> Das Additionsprinzip
>
> *„Suppose that there are n disjoint sets with k_1 Elementen elementsin the first set, k_2 elements in the second etc. Then the number of elements in the union of the sets is k_1+$k_2 + \cdots + k_n$.*
>
> (Schrage 1996, S. 190).

Wesentlich ist bei diesem Prinzip, dass es sich um disjunkte Mengen $k_1, k_2, k_{3,} \dots, k_n$ handelt. So wäre es beispielsweise nicht möglich, die Tischtennisaufgabe (vgl. 2.1.1; 6 Spieler, jeder spielt genau einmal gegen jeden anderen) zu lösen, indem die Anzahl der Spiele, die die einzelnen Spieler bestreiten (jeweils 5), aufsummiert werden. Durch dieses Vorgehen würden Paarungen doppelt gezählt.

---

4 Klix definiert heuristische Strategien folgendermaßen: *„Unter heuristischen Strategien verstehen wir Regeln für die Transformation von Problemzuständen, die aus einer Menge von Problemsituationen abstrahiert sind und die folglich auf Klassen von Problemen angewandt werden können."*(Klix 1976, S. 724).

Das allgemeine Zählprinzip

Unter den fundamentalen Zählprinzipien nimmt das allgemeine Zählprinzip, auch bekannt als Produktregel, Multiplikationsregel (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 83) oder als grundlegendes Zählprinzips, eine herausragende Stellung ein (vgl. Selter & Spiegel 2004b, S. 291). Nach Kirsch (2004, S. 25) ist das Prinzip eng mit der Kreuzproduktregel verwandt, jedoch allgemeiner anwendbar.
Das auch als Mengenprodukt oder kartesisches Produkt benannte Kreuzprodukt ist eine grundlegende Konstruktion aus der Mengenlehre, um aus gegebenen Mengen eine neue Menge zu erzeugen:

(Kreuz-)Produktregel: card (A×B) = card A · card B

„Unter dem Kreuzprodukt oder kartesischem Produkt AxB der Mengen A und B versteht man die Menge aller Paare; deren erstes Glied zu A und deren zweites zu B gehört: AxB = die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit a Element A und b Element B. Die Kardinalzahl des Kreuzprodukts zweier Mengen ist das Produkt der Kardinalzahlen der beiden Mengen.“

(Kirsch 2004, S. 23 f.)

Der Definition ist zu entnehmen, dass es bei der Kreuzproduktregel darum geht, die Elemente verschiedener Mengen auf alle möglichen Wege miteinander zu verknüpfen. Mit Hilfe des allgemeinen Zählprinzips lassen sich auch Mengen abzählen, die sich nicht ohne Weiteres als Kreuzprodukt darstellen lassen. Die zentrale Idee des allgemeinen Zählprinzips besteht darin, die Aufgabendaten, wie beim Baumdiagramm (vgl. 2.2.1), in Form eines Stufenablaufes zu organisieren (vgl. Hefendehl-Hebeker & Törner 1984). Anstatt die Anzahl der Astspitzen im Baum mühsam aufzusummieren, macht man sich die Erkenntnis zunutze, dass die Addition gleicher Summanden auch als Multiplikation aufgefasst werden kann (vgl. Selter & Spiegel 2004b). Entsprechend gilt:

Das allgemeine Zählprinzip

„Besteht ein Experiment aus n einfachen Teilversuchen, die unabhängig voneinander auszuführen sind, und gibt es k_1 mögliche Ergebnisse für den 1. Teilversuch, k_2 mögliche Ergebnisse für den 2. Teilversuch und k_n mögliche Ergebnisse für den n-ten Teilversuch, dann hat das zusammengesetzte Experiment insgesamt $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ verschiedene mögliche Ergebnisse.“

(Kütting & Sauer 2008, S. 82)

Bei der Anwendung des allgemeinen Zählprinzips spielt die Reihenfolge der Besetzung der Stellen bzw. der Teilexperimente keine Rolle. Ebenso wie im Baumdiagramm können die Plätze in beliebiger Reihenfolge besetzt bzw. die Teilexperimente in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden. In der Menüaufgabe kann man beispielsweise auch erst die Nachspeise, dann die Vorspeise und anschließend erst das Hauptgericht auswählen, ohne dass die Reihenfolge der Auswahl etwas an der Anzahl der Menüzusammenstellungen ändert (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 83). Entscheidend ist, dass eine vorgenommene Stufung die Unabhängigkeit der Stufen garantiert.

Das Prinzip des Ein- & Ausschaltens

Das Prinzip des Ein- und Ausschaltens (engl.: principle of inclusion and exclusion) verallgemeinert das Additionsprinzip, entsprechend wird es auch „allgemeiner Additionssatz“ genannt (Kütting & Sauer 2008, S. 109). Es ermöglicht, die Anzahlbestimmung über die Addition auch auf Mengen zu übertragen, deren Teilmengen nicht disjunkt sind. So lässt sich z. B. die Tischtennisaufgabe unter Verwendung des Prinzips des Ein- & Ausschaltens lösen. Um die Anzahl aller Spiele auf dem Tischtennisturnier zu bestimmen, wird zunächst die Anzahl der Spiele jedes einzelnen Spielers ermittelt. Anschließend werden die Anzahlen aufsummiert (Einschalten). Da dabei jedoch Spiele doppelt gezählt werden, wird die Anzahl der doppelt gezählten Spiele abschließend subtrahiert (Ausschalten).
Wittmann und Müller (1984) sprechen daher auch von „erschwerter Addition und Subtraktion“.
Mathematisch macht man sich bei der Idee des Ein-& Ausschaltens die Tatsache zunutze, dass die Vereinigung zweier endlicher Mengen A und B genau der Differenz aus der Summe der beiden Mengen und der Schnittmenge von A und B entspricht.

Das Prinzip des Ein- & Ausschaltens

Die Vereinigung zweier endlicher Mengen A und B entspricht genau der Differenz der Summe der beiden Mengen und der Schnittmenge von A und B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(vgl. Kütting & Sauer 2008, S.109)

Die Formulierung des Prinzips wurde hier für zwei endliche Mengen vorgenommen, ist allerding ebenfalls auf die Vereinigung mehrerer Mengen übertragbar.

Die Quotientenregel

Dieses Prinzip, auch als Prinzip der Schäfer bekannt, beschreibt, ebenso wie das Prinzip des Ein- & Ausschaltens, einen Weg des indirekten Zählens (vgl. Kirsch 2004). Denn oft ist es nur schwer möglich, eine Anzahl in einem Zug zu bestimmen. Daher wird zunächst ein größerer Bestand gezählt und anschließend werden Klassen von Elementen gebildet, die unter einem bestimmten Aspekt als gleichwertig erachtet werden. Das unter dem Pseudonym „Nicolas Bourbaki" bekannte französische Autorenkollektiv aus Mathematikern verdeutlichte das Prinzip mittels einer Anekdote über einen Schäfer. Dieser solle die Anzahl seiner Schafe bestimmen, indem er die Beine der Tiere zählte und die erhaltene Anzahl durch 4 teilte, um von der Anzahl der Beine auf die Anzahl der Tiere schließen zu können (vgl. Schrage 1996).

Die Quotientenregel

„Seien B und S zwei Mengen mit (endlichen) Kardinalzahlen b und s, und sei f eine Surjektion von B auf S, so dass die Mengen $f^{-1}(y)$ für alle $y \in S$ die Mächtigkeit c haben. Dann gilt $b = s \cdot c$."

(Hefendehl-Hebeker & Törner 1984, S. 253)

Unter der Abbildung f wird die Menge B in s Äquivalenzklassen mit jeweils der Mächtigkeit c geteilt. Fächert man die Klassen wieder in ihre Elemente auf, so erhält man die Menge b. Es ist daher möglich, die Elemente von B auf zwei verschiedene Weisen zu zählen: direkt oder in zwei Stufen. Entweder wird zunächst die Anzahl s der Äquivalenzklassen bestimmt und anschließend die Anzahl c der Elemente pro Klasse ermittelt oder die Anzahl der s Klassen wird berechnet, wenn b und c bekannt sind. Das Prinzip der Schäfer lässt sich demnach zu einer Strategie modifizieren, die Hefendehl-Hebeker und Törner (1984, S. 254) die „Strategie der Auffächerung bzw. Klassenbildung" nennen. Diese konkretisiert sich in der Einführung und Rücknahme von künstlichen Anordnungen und Unterscheidungen (vgl. Hefendehl-Hebeker & Törner 1984, S. 253).

1.2.2.2 *Heuristische Strategien*

Schrage (1996) benennt drei weitere Prinzipien zur Anzahlbestimmung: das Fubiniprinzip, das Prinzip der Rekursion und das Prinzip des indirekten Zählens. Während bei den beiden zuletzt genannten Prinzipien das Erkennen und Nutzen von Strukturzusammenhängen zwischen Problemstellungen zentral ist, beschreibt das Fubiniprinzip hingegen, wann zwei Lösungswege als äquivalent angesehen werden können.

Das Fubiniprinzip

“When two formulas enumerate the same set, then they must be equal“
(Aigner 2007 S. 6)

Dem im Englischen auch als “Rule of Counting in two ways” (vgl. bspw. Aigner, 2007; Schrage 1996, S. 194) bekannte Fubiniprinzip oder Regel vom zweifachen Abzählen (Aigner 1993, S. 4) liegt die Idee zugrunde, dass zwei Formeln oder Rechenwege, die die gleiche Menge auszählen, gleich sein müssen.
Dahinter steckt die allgemeine Erkenntnis, dass es verschiedene Wege gibt, um zu einer Lösung zu gelangen. Mittels dieses Prinzips können kombinatorische Identitäten abgeleitet werden, indem zwei verschiedene Formeln für die gleiche Anzahl an Elementen entwickelt werden. Für die Kombinatorik spielt dieses Prinzip beispielsweise bei der Bestimmung des Binomialkoeffizienten eine wichtige Rolle. So kann man zur leichteren Bestimmung der Anzahlen von der expliziten in die rekursive Darstellung wechseln (vgl. dazu 1.2.3).

Das Fubiniprinzip

„Sei (S, T) ein Inzidenzsystem, und für a ϵ S bezeichne r(a) die Anzahl der zu a inzidenten Elemente aus T, und analog r (b) für b ϵ T die zu b inzidenten Elemente aus S. Dann gilt:

$\sum_{a \in S} r(a) = \sum_{b \in T} r(b)$" (Aigner 1993, S. 4).

Das Rekursionsprinzip

Der Begriff Rekursion ist vom lateinischen Wort recurrere abgeleitet, was mit „zurücklaufen“ gleichbedeutend ist. Im Begriff selbst steckt bereits der zentrale Gedanke des Prinzips: Die Grundidee besteht darin, soweit „zurückzulaufen“ bis man eine Anzahl kennt und ausgehend von dieser zu überlegen, wie viele weitere Möglichkeiten fehlen, um die gesuchte Figurenmenge bestimmen zu können5. Zur Lösung der kombinatorischen Anzahlbestimmungsprobleme lassen sich rekursive Folgen definieren.

5 Zu einer umfassenden Beschreibung des Rekursionsprinzips vgl. Winter 1992, S. 125f.

Das Rekursionsprinzip

Ganz allgemein versteht man unter einer rekursiven Folge, die „*Bezeichnung für eine Folge* $< a_n >$ *bei welcher das n-te Glied gemäß einer Rekursionsvorschrift (Rekursion) aus den vorangegangenen Gliedern berechnet werden kann. Bei einfach rekursiven Folgen berechnet man* a_n *aus* a_{n-1} *wobei ein Anfangswert* a_0 *vorgegeben ist.*“

(Rolles, Unger et al. 2000, S. 537)

Die Lösung der Tischtennisaufgabe mittels des Rekursionsprinzips würde entsprechend wie folgt aussehen: Die Anzahl der Spiele auf einem Turnier mit sechs Spielern wird bestimmt, indem auf die Anzahl aller Spiele auf einem Turnier mit fünf Spielern zurückgegriffen wird. Es muss lediglich die Anzahl der Spiele, die die sechste Person bestreiten muss, addiert werden. Ist die Anzahl der Spiele von fünf Spielern nicht bekannt, so geht man weiter zurück und überlegt, wie viele Spiele es bei vier, bei drei oder bei zwei Spielern gibt, schließt von dieser Lösung auf die Anzahl der Spielpaarungen bei fünf und von da aus schließlich auf die Anzahl der Spiele bei sechs Spielern.

Das Prinzip des indirekten Zählens

Hinter der „Gleichheitsregel“ (Aigner 1993, S. 4) oder dem Prinzip des indirekten Zählens steckt die grundsätzliche Idee, eine gesuchte Anzahl zu einem gegebenen Problem zu bestimmen, indem man dieses durch ein äquivalentes, aber einfacheres Problem ersetzt, dessen Anzahl man bestimmt oder ggf. bereits kennt und anschließend entsprechend auf das eigentliche Problem überträgt. Die gesuchte Anzahl wird somit indirekt ermittelt.

Prinzip des indirekten Zählens

„Existiert eine Bijektion zwischen zwei Mengen S und T, so gilt $|S|=|T|$*“*

(Aigner 1993, S. 4)

Existiert eine solche Bijektion zwischen zwei Mengen, so sind diese isomorph zueinander (vgl. Kirsch 2004). Eine solche Isomorphie zwischen zwei Mengen zu zeigen, ist entsprechend auf zwei Wegen möglich: *„Wenn nun zwischen zwei Mengen A und B von irgendwelchen Gegenständen eine eineindeutige Zuordnung hergestellt werden kann - was hat man davon? Man weiß ohne Abzählen, dass beide Mengen gleich viele Elemente, d.h. die gleiche Kardinalzahl besitzen. Das umgekehrte ist auch wahr: Wenn zwei Mengen die gleiche Kardinalzahl haben, kann man eine eineindeutige Zuordnung zwischen ihnen herstellen.“* (Kirsch 2004, S. 16 f.).

Das Nutzen der Isomorphie ist hingegen nur über einen Weg möglich: „*Um die unbekannte Kardinalzahl card A einer gegebenen Menge A zu bestimmen stellt man entsprechend eine solche eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge A und einer anderen Menge B her, deren Kardinalzahl card B schon bekannt oder aber leichter bestimmbar ist. Dann weiß man, dass card A = card B ist*“ (Kirsch 2004, S. 16 f.).
Mittels des Prinzips lässt sich beispielsweise die Anzahl aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ermitteln: Die Teilmengen lassen sich als die Anzahl der 0-1-Folgen einer Länge n deuten, für die die Anzahlbestimmung sehr einfach ist. Besonders zentral ist der hier beschriebene Weg des indirekten Zählens für das Nutzen kombinatorischer Operationen, welche im Folgenden genauer betrachtet werden.

1.2.3 Anzahlbestimmung mit Hilfe kombinatorischer Operationen

Ebenso, wie für klassische Anzahlbestimmungsprobleme die Grundoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zur Verfügung stehen, stellt die abzählende Kombinatorik komplexere Operationen für eine Reihe von Problemstellungen bereit.
So können die *Grundfiguren* direkt mittels dieser Operationen gelöst werden. Probleme, die diesen grundlegenden Problemstellungen nicht entsprechen, können gelöst werden, indem sie in kleinere Teilprobleme zerlegt und so auf die klassischen Grundfiguren zurückgeführt werden (vgl. Jeger 1973, S. 8). Insofern stellt das Lösen kombinatorischer Probleme mit Hilfe der kombinatorischen Operationen einen dritten Zugang dar.

1.2.3.1 *Kombinatorische Operationen und Konzepte*

Die zur Verfügung stehenden Operationen zu den Grundfiguren werden im Folgenden unter Rückbezug auf die beschriebenen Zählstrategien (vgl. 1.2.2) hergeleitet[6]. Ziel ist es, Beziehungen zwischen den Zählprinzipien und den kombinatorischen Operationen aufzuzeigen und zugleich auch Beziehungen zwischen den verschiedenen kombinatorischen Operationen herzustellen.

6 Zu berücksichtigen ist, dass es eine Reihe verschiedener Wege gibt, die Formeln herzuleiten und darzustellen. Bei den dargestellten Zugängen handelt sich demnach um mögliche ausgewählte Zugänge.

Permutationen ohne und mit Wiederholung

> *„Permutationen von Dingen nenne ich die Aenderungen, durch welche unter Beibehaltung derselben Anzahl von Dingen ihre Ordnung und Stellung verschiedentlich vertauscht wird. Wenn also darnach gefragt ist, wie oft einige Dinge unter einander umgestellt und vertauscht werden können, so sagt man, dass alle Permutationen jener Dinge gesucht werden"*
> *(Bernoulli 1713, S. 74, dt. Übersetzung Haussner1899, S. 78)*

Bei Figuren des Typs „Permutationen" (lat. permutare: vertauschen oder umstellen) ist eine n-elementige Menge gegeben und gesucht ist die Anzahl aller möglichen Anordnungen der n Elemente. Zu unterscheiden ist zwischen solchen Mengen, in denen alle n Elemente verschieden sind (Permutationen ohne Wiederholung) und Mengen, in denen einige Elemente mehrfach vorkommen, die also nicht unterscheidbar sind (Permutationen mit Wiederholung) (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 84ff).

Operationen zur Anzahlbestimmung von Permutationen

Um eine Formel zur Anzahlbestimmung der *Permutationen ohne Wiederholung* mittels des allgemeinen Zählprinzips herzuleiten, ist es notwendig, die Daten in Form eines Stufenablaufs zu organisieren. Da aus einer Grundmenge mit n Elementen ausgewählt wird, muss berücksichtigt werden, dass sich die Anzahl der Elemente, aus der ausgewählt werden kann, auf jeder Entscheidungsstufe um 1 verringert. Ausgehend von n Möglichkeiten auf der ersten Entscheidungsstufe, bleiben (n-1) Möglichkeiten für die zweite Entscheidungsstufe, bis auf der n-ten Stufe schließlich nur noch ein Element übrig ist. Die Anzahl der n-Permutationen ohne Wiederholungen aus n Elementen beträgt demnach:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(n-1))$ (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 84)

Bei Figuren des Typs *Permutationen mit Wiederholung* ist ebenfalls eine Menge mit n Elementen vorgegeben, Hierbei können jedoch einzelne Elemente mehrfach vorkommen. Die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen lässt sich ausgehend von der Bestimmung der Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung leicht ermitteln, indem das Prinzip des Schäfers genutzt wird: Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten aus n Elementen wird auf jeder Entscheidungsstufe um 1 kleiner. Wären alle Elemente unterschiedlich, so gäbe es entsprechend n! Möglichkeiten. Zu berücksichtigen ist nun zudem, dass es einige Lösungen gibt, die nicht zu unterscheiden sind, da sie in der n-elementigen Menge mehrfach vorkommen können. Die nicht unterscheidbaren Möglichkeiten werden dann zu einer Klasse zusammengefügt. Gezählt wird anschließend die Anzahl verschiedener Klassen:

$$\frac{n!}{s_1! \cdot s_2! \cdot \ldots \cdot s_n!} \text{ mit } s_1 + s_2 \ldots + s_n = k$$

Permutationen ohne Wiederholung	Permutationen mit Wiederholung
$n!$	$\frac{n!}{s_1! \cdot s_2! \cdot \ldots \cdot s_n!}$ $mit\ s_1 + s_2 \ldots + s_n = k$

Abb. 1.6 Kombinatorische Operationen zur Bestimmung von Permutationen ohne und mit Wiederholung

Variationen ohne und mit Wiederholung

Bei Figuren des Typs „Variationen" sind Mengen mit n Elementen vorgegeben. Gesucht ist die Anzahl aller Möglichkeiten eine k-elementige Auswahl aus dieser Menge zu treffen und diese auf alle möglichen Arten anzuordnen. Zu unterscheiden ist auch hier, ob in den Mengen alle n Elemente unterscheidbar sind (Variationen ohne Wiederholung) oder ob Elemente in den Mengen mehrfach vorkommen (Variationen mit Wiederholung) (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 87 ff). Kütting und Sauer (ebd.) sprechen anstelle von Variationen ohne Wiederholung auch von „k-Permutationen ohne Wiederholung aus n Elementen". Bernoulli (1713, S. 124 nach deutscher Übersetzung Haussner 1899, S. 121) nennt die gesuchten Figuren „Combinationen in Verbindung mit ihren Permutationen" (de combinationibus et permutationibus mixtim spectatis). Beide Begriffe zeigen den engen Zusammenhang zu den Permutationen und Kombinationen auf und deuten damit mögliche Wege zur Anzahlbestimmung an. Bei Variationen ohne Wiederholung dürfen sich die Elemente innerhalb einer Figur nicht wiederholen. Auch Batanero et al. (1996) weisen bezugnehmend auf Piaget darauf hin, dass die Variationen die Synthese aus den Kombinationen und den Variationen darstellen: *„Las variaciones son vistas por Piaget como la s´intesis de las operaciones de combinación y permutación"* (ebd., S. 69). Diesen Zusammenhang veranschaulichen sie an einem Beispiel *En las variaciones de dos objetos A y B tomados dos a dos, AA, AB, BA y BB, intervienen simultáneamente las combinaciones (AA, BB; AB) y las permutaicones (AB y BA)" (*ebd., S. 69). Sie zeigen auf, dass es insgesamt folgende vier Variationen mit Wiederholungen aus den zwei Elementen A und B gibt: AA, AB, BA & BB. Diese Menge entspricht zugleich der Vereinigungsmenge der Kombinationen (AA, BB & AB) und der Permutationen (AB & BA).

Operationen zur Anzahlbestimmung von Variationen

Zur Anzahlbestimmung von Variationen mit und ohne Wiederholung gibt es unter Rückgriff auf das Fundamentalprinzip des Zählens sowie auf die Anzahlbestimmung bei den Permutationen ohne Wiederholung zwei Möglichkeiten:
(1) Wie bei den Permutationen ohne Wiederholung wird bei den *Variationen ohne Wiederholung* aus einer Grundmenge ausgewählt. Entsprechend verringert sich die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten ausgehend von n Möglichkeiten auf der ersten Stufe sukzessive immer um 1, da die getroffene Auswahl auf der nächsten Stufe nicht mehr zur Verfügung steht. Der Unterschied zu den Permutationen ohne Wiederholung besteht lediglich in der Anzahl der Entscheidungsstufen. Bei den Variationen werden k-Auswahlen aus n Elementen getroffen, entsprechend gibt es k Stufen, während bei den Permutationen hingegen n Stufen existieren. Entsprechend stehen auf der ersten Entscheidungsstufe n Auswahlmöglichkeiten, auf der zweiten Stufe (n-1) Auswahlmöglichkeiten und auf der k-ten Stufe (n-(k-1)) Möglichkeiten zur Verfügung. Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen aus n Elementen lässt mittels folgender Formel berechnen:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)).$$

(2) Ausgehend von der bereits bekannten Anzahl an Möglichkeiten für Permutationen ohne Wiederholung kann alternativ mittels des Prinzips der Schäfer ein Weg zur Lösung gefunden werden: Dazu werden von den Permutationen ohne Wiederholung diejenigen Elemente zu einer Klasse zusammengefasst, die in den Anordnungen der letzten nk Elemente übereinstimmen. Es ergeben sich insgesamt $\frac{n!}{(n-k)!}$ verschiedene Klassen. Diese geben die Anzahl aller Variationen ohne Wiederholung an. Aus dem Fubiniprinzip ergibt sich die Gleichheit der beiden Formeln:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \quad n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$$

Im Gegensatz zu den Variationen ohne Wiederholung dürfen bei Figuren des Typs *Variationen mit Wiederholung* die Elemente innerhalb einer Figur wiederholt auftreten (vgl. Kütting 1994, S. 124f.). Entsprechend gibt es auf jeder der k Entscheidungsstufe n Auswahlmöglichkeiten. So ergeben sich gemäß des allgemeinen Zählprinzips insgesamt n^k verschiedene Variationen mit Wiederholung.

Variationen ohne Wiederholung	Variationen mit Wiederholung
$\frac{n!}{(n-k)!} = \quad n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \; (n-(k-1)$	n^k

Abb. 1.7 Kombinatorische Operationen zur Bestimmung von Variationen ohne und mit Wiederholung

Kombinationen ohne und mit Wiederholung

> *„Combinationen von Dingen sind Verbindungen solcher Art, dass aus einer gegebenen Anzahl von Dingen einige herausgenommen und miteinander verbunden werden, ohne dass ihre Ordnung und Stellung irgendwie berücksichtigt wird."*
> *(Bernoulli 1713, S. 82 nach dt. Übersetzung Haussner 1899, S. 82)*

Bei Figuren des Typs „Kombinationen" ist eine Menge mit n Elementen vorgegeben. Betrachtet wird die Auswahl von k Elementen. Zusammenstellungen, welche dieselben Elemente in verschiedener Anordnung enthalten, werden als gleich angesehen (vgl. Kütting 1994, S. 115). Es wird unterschieden zwischen Kombinationen ohne Wiederholung, in denen alle n Elemente verschieden sind und Kombinationen mit Wiederholung, bei denen auch nicht unterscheidbare Elemente in der Ausgangsmenge enthalten sein können (vgl. Kütting & Sauer 2008, S.143ff).

Operationen zur Anzahlbestimmung von Kombinationen

Die Anzahlbestimmung der *Kombinationen ohne Wiederholung* kann unter anderem mit Hilfe der Formel zur Berechnung der Variationen ohne Wiederholung und durch die Anwendung des Prinzips der Schäfer vorgenommen werden (vgl. Hefendehl-Hebeker & Törner 1984, S. 254) oder alternativ rekursiv unter Zuhilfenahme Hilfe des Pascal´schen Dreiecks.

(1) Ausgehend von der Anzahl der Variationen ohne Wiederholung: $\frac{n!}{(n-k)!}$ ist zu berücksichtigen, dass bei den Kombinationen alle Figuren, in denen die gleichen Elemente enthalten sind, als gleich angesehen werden. Entsprechend fasst man diese Figuren zu Klassen zusammen und zählt, um auf die Anzahl aller Kombinationen ohne Wiederholung schließen zu können, die Anzahl der Klassen. Um diese bestimmen zu können, bleibt zu überlegen, wie groß die Anzahl der Elemente innerhalb einer Klasse ist. Die Anzahl entspricht genau k!, da es für die Auswahl von k Elementen genau k! Permutationen gibt. Entsprechend entspricht die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(2) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist die symbolische Darstellung der Kombinationen ohne Wiederholung. Er gibt an, auf wie viele verschiedene Arten ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten ausgewählt werden können: Entsprechend gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Das Pascal´sche Dreieck stellt die Binomialkoeffizienten dar und liefert ein rekursives Berechnungsschema für die Kombinationen ohne Wiederholung. Die Binomialkoeffizienten sind im Dreieck derart angeordnet, dass jeder Eintrag die Summe der zwei darüber stehenden Einträge ist und sich demnach entsprechend auch rekursiv ermitteln lässt:

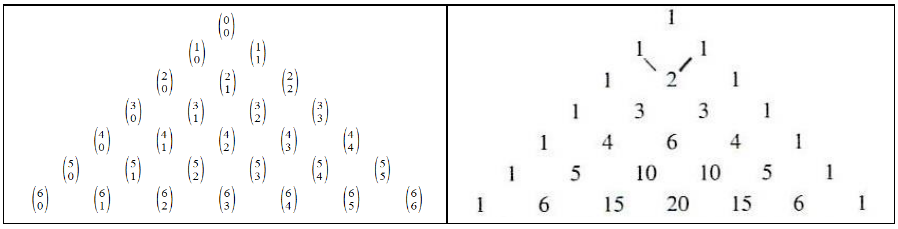


Abb. 1.8 links: Anordnung der Binomialkoeffizienten im Pascal'schen Dreieck; rechts: Anzahlen im Pascal Dreieck

Anders als bei einem Baumdiagramm beziehungsweise in einer Tabelle werden im Pascal´schen Dreieck nicht die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten dargestellt, sondern wird lediglich deren Anzahl bestimmt. Diese Darstellung ermöglicht es jedoch, eine Reihe kombinatorischer Probleme rekursiv zu lösen.
Bei *Kombinationen mit Wiederholung* ist die Anzahlbestimmung mit Hilfe des allgemeinen Zählprinzips nicht ohne Weiteres möglich. Dabei sind zwei Aspekte zu berücksichtigen: Innerhalb einer Figur dürfen gleiche Elemente wiederholt vorkommen und Figuren, die die gleichen Elemente in verschiedener Anordnung enthalten, werden als gleich angesehen. Ein möglicher Lösungsansatz besteht nach Kütting und Sauer (2008) diesbezüglich darin, die Anzahl über das Prinzip des indirekten Zählens zu ermitteln, also ein gleichwertiges, jedoch leichter zu lösendes Problem zu suchen und darüber die Anzahl zu bestimmen. Dies gelingt z. B. mit Hilfe von 0-1 Folgen: Die Kombinationen mit Wiederholung werden als Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Fächern gedeutet. Elemente in einem Fach sind gleich, Elemente verschiedener Fächer sind unterschiedlich. Die Auswahl eines Elements aus einem Fach wird mit 1 protokolliert. Um die Auswahl aus verschiedenen Fächern darzustellen, werden die $(n-1)$ Abtrennungen zwischen den Fächern mit 0 modelliert. Da jede Auswahl vom Umfang k das Zeichen „1“ k-mal liefert, entsteht eine Zeichen-

folge aus $k + n - 1$ Zeichen. Für diese gibt es entsprechend $(k + n - 1)!$ verschiedene Permutationen. Jede dieser Zeichenfolgen ist festgelegt durch die $(n - 1)$ Zeichen 0. Eine Vertauschung dieser Zeichen hat keine Konsequenzen, da diese nicht unterscheidbar sind. Daher müssen im Sinne des Prinzips der Schäfer die Vertauschungen zu einer Klasse zusammengefügt werden, wofür es genau $(n - 1)!$ Möglichkeiten gibt. Ebenso gilt für die k nicht unterscheidbaren Elemente, dass diese als eine Klasse gezählt werden müssen (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 99). Dafür gibt es $\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$ verschiedene Arten. Für die Kombinationen ohne und mit Wiederholung ergeben sich entsprechend folgende Operationen:

Kombinationen ohne Wiederholung	*Kombinationen mit Wiederholung*
$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Abb. 1.9 Kombinatorische Operationen zur Bestimmung von Kombinationen ohne und mit Wiederholung

Zusammenfassend ergeben sich auf der Grundlage der vorangegangenen Ausführungen folgende Grundfiguren und zugehörige kombinatorische Operationen:

	Variationen	**Permutationen k = n**	**Kombinationen**
Auswahl von k Dingen aus n Elementen	mit Berücksichtigung der Reihenfolge		ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$ mit k ≤ n	$n!$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ mit k ≤ n
mit Wiederholung	n^k	$\frac{n!}{s_1! \cdot s_2! \cdot \ldots \cdot s_n!}$ $mit\ k = s_1 + \cdots + s_n$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$

Tab. 1.2 Übersicht über die Mächtigkeit der Figurenmenge der einzelnen kombinatorischen Grundfiguren

Die Tabelle (Tab. 1.2) zeigt eine Übersicht über die verschiedenen kombinatorischen Grundfiguren und die dazugehörigen Operationen. Zentral ist, dass zur Anwendung dieser Operationen in den jeweiligen Problemstellungen zu identifizieren ist, welche kombinatorischen Figuren zu erstellen sind.

1.2.3.2 *Kombinatorische Modelle*

Das Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen mittels der dargestellten Operationen ist dabei keinesfalls trivial, wie Hefendehl-Hebeker und Törner aufzeigen:

„Didaktisch verkennt ein vorgefertigtes Lösungsschema die eigentlichen Anforderungen beim Lösen kombinatorischer Aufgaben. Bereits das Erkennen des Aufgabentyps erfordert beim Schüler die Fähigkeit zur Analyse der vorgelegten Aufgaben und deren Übersetzung in ein Modell, in dem die Grundfiguren formuliert sind. (Hefendehl-Hebeker & Törner 1984, S. 247).

Um kombinatorische Probleme mittels der zur Verfügung stehenden kombinatorischen Operationen lösen zu können, bedarf es demnach der Identifizierung der in den Aufgabenstellungen implizierten Grundfiguren bzw. einer Zerlegung des Problems in Teilprobleme, die den Grundfiguren entsprechen. Zur Lösungsfindung ist entsprechend das Erkennen des isomorphen Zusammenhangs zwischen den zu lösenden Aufgabenstellungen notwendig. Diese Identifizierung ist maßgeblich von den in den Aufgaben gegebenen Handlungsvorstellungen (vgl. 1.1.2) abhängig. Um die entsprechenden Anzahlen mit Hilfe der kombinatorischen Operationen bestimmen zu können, werden in der Kombinatorik verschiedene Modelle bzw. Sichtweisen zu den Grundfiguren angeboten, die den angegebenen Handlungsvorstellungen (Selektion, Distribution und Partition vgl 1.1.2) nahe kommen: (1) das *Urnenmodell,* (2) das *Verteilungsmodell* und (3) das *Wortmodell*. Jedes der genannten Modelle kann konsequent für alle in Betracht kommenden kombinatorischen Figuren durchgezogen werden (Kütting & Sauer 2008, S. 85). Die Formulierung der kombinatorischen Grundfiguren in den verschiedenen Modellen wird in der nachfolgenden Tabelle (Tab. 1.3) dargestellt.

Verteilungsmodell			Urnen-Modell	Wort-Modell
Verteilung von	auf n Fächer	auf n Plätze	Mit einer Urne mit n nummerierten Kugeln	Mit einem Alphabet mit n nummerierten Zeichen
k-nicht unterscheidbaren Kugeln	k-Kombination mit Wiederholungen oder k-Repetition $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$	k-Kombination ohne Wiederholungen oder k-Kombination $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ mit $1 \leq k \leq n$	Ohne Notieren der Reihenfolge	Geordnetes
k- unterscheidbaren Kugeln	k-Variation mit Wiederholungen oder k-Variation n^k	k-Variation ohne Wiederholungen oder k-Permutation $\frac{n!}{(n-k)!}$ Dabei ist $1 \leq k \leq n$)	Mit Notieren der Reihenfolge	Beliebiges
k-unterscheidbaren Kugeln so, dass das i-te Fach s_i Kugeln enthält (für $1 \leq i \leq n$)	s-Permutation mit Vielfachheiten $k_1, \dots, k_n$ $\frac{s!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ Dabei ist $s = k_1 + \cdots + k_n$	Permutation	Mit Notieren der Reihenfolge, wobei die i-te Kugel s_i mal vorkommt (für $1 \leq i \leq n$)	Beliebiges in dem das i-te Zeichen s_i mal vorkommt (für $1 \leq i \leq n$)
	Mit Rücklegen und	Ohne Rücklegen		
	Mit Wiederholungen	Ohne Wiederholungen	Wort der Länge s	

Tab. 1.3 Übersicht Kombinatorische Grundbegriffe in Anlehnung an Borges (1981, S. 150)

(1) Das Urnenmodell fokussiert in erster Linie auf Auswahlprozesse. Aus einer Urne mit n Kugeln werden nacheinander k Kugeln gezogen. Zu unterscheiden ist, ob die Kugel zurückgelegt wird oder nicht. Zudem ist zu beachten, ob die

Kugeln mit bzw. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen werden bzw. ob die Kugeln unterscheidbar sind oder nicht (vgl. Kütting & Sauer 2008).

(2) Im Verteilungsmodell – auch „Teilchen-Fächer-Modell“ (vgl. Selter & Spiegel 2004b) genannt – geht es um das Belegen von Fächern mit Gegenständen bzw. um das Verteilen von unterscheidbaren bzw. ununterscheidbaren Kugeln auf Zellen ohne bzw. mit Ausschlussprinzip. Anstelle der Unterscheidbarkeit der Kugeln ist der Frage nachzugehen, in welches Fach die Kugel soll und ob weitere Kugeln in einem Fach erlaubt sind. Diese Tätigkeit legt die Vorstellung des Verteilens bzw. Abbildens nahe (vgl. Kütting & Sauer 2008).

(3) *Im Wortmodell* wird eine Modellierung über die Anordnung von n Zeichen vorgenommen. Es werden k Zeichen ausgewählt. Zu unterscheiden ist zwischen Situationen, in denen die Anordnung der Zeichen von bzw. nicht von Bedeutung ist und zwischen Zeichenanordnungen, in denen Zeichen nur einmal oder mehrfach verwendet werden dürfen (vgl. Jeger 1973).

In der mathematikdidaktischen Literatur werden die kombinatorischen Operationen unterschiedlich dargestellt. Teilweise wird Bezug auf ein spezielles Modell genommen (vgl. Kirsch 1973; Jeger 1973). Insbesondere in der aktuelleren Literatur werden die Figuren aber auch in verschiedenen Modellvorstellungen dargestellt (vgl. Kütting 1994; Kütting & Sauer 2008). Neben den an Inhalten gekoppelten Modellen gibt es auch eine interpretationsunabhängige Benennung sowie das *Mengenmodell* (vgl. Borges 1979, 1981), beide werden in neuen Schulbüchern jedoch nicht verwendet.

1.3 Anzahlbestimmungen aus historischer Perspektive

Die heute zur Verfügung stehenden Strategien, Hilfsmittel und kombinatorischen Operationen zur Anzahlbestimmung kombinatorischer Figuren unterliegen einer langen geschichtlichen Entwicklung, wie die Ausführungen von Biggs (1974), Tropfke (1924, S. 64 ff) und weiteren Autoren (u.a. Flachsmeyer 1969; Scheid 1984; Schmidt 1992) aufzeigen. Hefendehl-Hebeker (1989) geht davon aus, dass sich die Betrachtung der Genese der heutigen Operationen und Strategien aus mathematikdidaktischer Sicht als bedeutsam erweist, da diese u.a. Hinweise auf mögliche Schwierigkeiten und Fehler von Lernenden geben kann:

> *„Nun muss man damit rechnen, dass geistige Hürden, die sich im Verständnis eines mathematischen Gegenstandes im Laufe seiner geschichtlichen Entwicklung entgegengestellt haben, auch die Lernprozesse unserer heutigen Schüler/innen blockieren können. Ihre Kenntnis kann also helfen im gegen-*

> *wärtigen Unterricht Lernschwierigkeiten zu verstehen, zu antizipieren und aufzufangen" (Hefendehl-Hebeker 1989, S. 7)*

Unter dieser Perspektive ist anzunehmen, dass Kenntnisse bezüglich der phylogenetischen Entwicklung dazu beitragen können, die Denkwege und Vorgehensweisen von Lernenden besser zu verstehen.

Ein Blick in die Geschichte der Mathematik zeigt, dass ab dem 12. Jahrhundert in verschiedenen Epochen und Kulturen bereits Formeln zur Anzahlermittlung von Kombinationen sowie den Permutationen bekannt sind. Dabei wurden die Formeln zur Berechnung von Permutationen und Kombinationen in der Regel über ein rekursives Vorgehen gewonnen:
Der Inder Bhaskara kennt bereits im 12. Jahrhundert die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse ohne Wiederholung sowie die Permutationen einer gegebenen Elementgruppe mit und ohne Wiederholung. Im Mittelalter werden in Europa von Pacioli, Buckley, Cardano, Stifel und Boetius einzelne Formeln zur Berechnung spezieller Permutations- und Kombinationsprobleme ermittelt. 1634 entwickelt der französische Mathematiker Hergione eine erste ganz allgemeine Aufstellung der Kombinationsformel, bevor Pascal um 1654 in seiner Abhandlung über das arithmetische Dreieck die Verbindung zwischen Kombinationszahlen, den figurierten Zahlen und den Binomialkoeffizienten herstellte. 1666 betrachtete Leibniz in seiner Ars combinatoria nicht nur Kombinationen, sondern auch Permutationen (vgl. Tropfke 1924, S. 64 ff).
Besonders auffällig ist, dass mit Ausnahme der Arbeiten Ben Gersons die *Variationen erst in den Arbeiten Bernoullis ab1713* Beachtung finden: Ben Gerson besitzt bereits Anfang des vierzehnten Jahrhunderts beträchtliche Erkenntnisse, die er in seiner hebräisch geschriebenen Schrift „Werke des Rechnens" von 1321 festhält. Er kennt bereits Permutationen, ferner Kombinationen und Variationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse mit und ohne Wiederholung und unterscheidet dabei scharf zwischen Kombinationen und Variationen:

> *„Eine Verschiedenheit in den Gruppen ist auf zwei Weisen möglich; entweder unterscheiden sie sich in ihren Elementen oder sie unterscheiden sich nur in der Reihenfolge".* (ebd., S. 64).

Bei Ben Gerson werden bereits Zusammenhänge zwischen den verschiedenen heute bekannten Grundfiguren hergestellt. Tropfke (1924, S.65) führt die von Ben Gerson erarbeiteten Hauptformeln unter Verwendung der modernen Schreibweise wie folgt aus:

> *„P_n die Anzahl von Permutationen von n Elementen, C_n^p die Kombinationszahl von n Elementen zu je p, V_n^p die entsprechende Variationszahl.*

V_n^2 *= n·(n-1). Für Variationen spricht Ben Gerson von „Gruppe zu zwei", die sich in ihren Elementen oder in der Reihenfolge unterscheiden.*

$$V_n^{p+1} = (n-p) \cdot V_n^p.$$
$$V_n^p = C_n^p \cdot P^p.$$
$$C_n^p = V_n^p : P^p.$$
$$C_n^{n-p} = C_n^p$$

Die Errungenschaften Ben Gersons gehen jedoch, so Tropfke, „verloren". Er verweist darauf, dass erst bei Bernoulli, die „bisher noch fehlenden Formeln für Variationen (ohne Wiederholung) auftauchen" (ebd., S. 69). Bernoulli (1713, S. 124 nach deutscher Übersetzung Haussner 1899, S. 121) beschreibt Variationen ohne und mit Wiederholung über ihre Beziehung zu den Kombinationen und Permutationen und berechnet die Anzahl aller Variationen über den Rückgriff auf die Bestimmung der Anzahl aller Kombinationen und aller Permutationen:

„Es bleibt uns also noch übrig, in diesem und in den folgenden Kapiteln die Lehre von den Combinationen in Verbindung mit ihren Permutationen (d.i. von den Variationen) zu entwickeln, indem wir zeigen, auf wie viele verschiedene Arten mehrere verschiedene oder theilweise einander gleiche Dinge zu einer oder zu mehreren Classen mit einander combinirt und dann n jeder Combination permutirt werden können, und zwar sowohl wenn keines der gegebenen Dinge mit sich selbst combinirt werdden darf, als auch wenn dies gestattet ist.

Es ist die Anzahl der Variationen mehrer von einander verschiedener Dinge, von denen kein Ding mit sich selbst combinirt werden darf zu einer bestimmten Classe zu finden. Die Lösung dieser Aufgabe ist nach dem Vorhergehenden leicht anzugeben. Wenn n verschiedene Dinge zu einer c^{ten} *Classe mit einander zu combiniren sind, so ist die Anzahl der Combinationen, wenn auf die Reihenfolge der Dinge keine Rücksicht genommen wird gleich* $\binom{n}{c}$ *[nach Kapilel IV]. Jede dieser Combinationen enthält c verschiedene Elemente, welche [nach Kapitel I]* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot c$ *a die Reihenfolge ändern können. Folglich ist die Anzahl der Combinationen, wenn die Reihenfolge der Dinge berücksichtigt wird, d.i. der Variationen, um ebenso viele Male größer als die obige Combinationszahl, also gleich*

$$\binom{n}{c} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot c = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-c+1)\text{“}$$

Besonders auffällig bei der Betrachtung der historischen Zugänge zur Lösung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme ist die starke Fokussierung auf Kombinations- und Permutationsprobleme sowie insbesondere auf den Ansatz, die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung über die Kombinationen und

Permutationen zu bestimmen. Im heutigen Unterricht findet in der Regel der umgekehrte Weg statt: Eine Betrachtung ausgewählter deutscher Schulbücher für die Sekundarstufe 1: Elemente der Mathematik (Griesel, Postul & Suhr 2009), Mathematik Neue Wege (Lergenmüller & Schmidt 2008), Fokus Mathematik (Lütticken & Uhl 2009) zeigt, dass diese die kombinatorischen Operationen hauptsächlich ausgehend von der allgemeinen Produktregel herleiten, indem diese auf besondere Situationen (vorrangig Auswahlsituationen) angewendet wird. In der Regel werden zunächst die Permutationen sowie die Variationen mit und ohne Wiederholung eingeführt. Die Formeln zur Bestimmung von Kombinationen werden über den Rückgriff auf die Variationen gewonnen, indem Objekte, die sich nur bezüglich ihrer Reihenfolge unterscheiden, als gleich angesehen und entsprechend zu einer Klasse zusammengefasst werden.

1.4 Zusammenfassung und Konsequenzen

In der Einleitung wurde aufgezeigt, dass es unter propädeutischen Gesichtspunkten genauerer Informationen darüber bedarf, wie Lernende in der Primarstufe kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme lösen und in welcher Beziehung diese zu den mathematischen Strategien und Konzepten stehen. In diesem Kapitel wurde dazu zunächst der Gegenstand der kombinatorischen Anzahlbestimmung aus einer vorrangig fachlichen Perspektive genauer in den Blick genommen. Es wurde geklärt, was unter „kombinatorischer Anzahlbestimmung" zu verstehen ist, welche besonderen Charakteristika kombinatorischen Anzahlbestimmungsprobleme im Vergleich zu anderen Problemstellungen aufweisen (1.1), welche fachlichen Zugänge und Konzepte zum Lösen dieser Problemstellungen vorliegen (1.2) sowie welche Zugänge zum Lösen von Problemstellungen in der geschichtlichen Entwicklung verwendet wurden und insofern ggf. in ähnlicher Form von den Lernenden verwendet werden (1.3). Nachfolgend werden jene Ergebnisse des vorliegenden Kapitels zusammenfassend dargestellt sowie diskutiert, die im Sinne des Spiralprinzips für den Grundschulunterricht von zentraler Bedeutung sind.

Für Thematisierung im Unterricht ist zentral, dass in kombinatorischen Anzahlbestimmungsproblemen Figurenmengen gezählt werden. Damit unterscheiden diese sich von den, den Lernenden bekannten Anzahlbestimmungsproblemen Die einzelnen Figuren der Menge bestehen aus mehreren Elementen und müssen zunächst unter der Berücksichtigung vorgegebener Kompositionsgesetze erstellt oder gedanklich so strukturiert werden, dass auf dieser Basis die Anzahl bestimmt werden kann. Klassifiziert werden können Anzahlbestimmungsprobleme hinsichtlich der Eigenschaften der zu erstellenden Figurenmenge (u.a. das Kreuzprodukt zweier Mengen, Kombinationen aus Elementen, Vertauschung der Anordnung von Elementen), als auch nach den impliziten Modell- bzw. Handlungsvorstellungen. Beide Größen haben aus fachlicher Sichte einen

zentralen Einfluss auf das Lösen der Problemstellungen, welche im Folgenden noch genauer dargestellt werden. In anderen kombinatorischen Problemstellungen steht das Erstellen einer Figurenmenge oder deren Anzahlbestimmung ebenfalls im Mittelpunkt. Von besonderer Bedeutung ist unter propädeutischen Gesichtspunkten die Beziehung zwischen Anzahl- und Auflistungsproblemen. So sind beide durch das vollständige Erstellen der Figurenmenge lösbar. Bei Auflistungsproblemen ist das Erstellen der Lösungen notwendig, bei Anzahlbestimmungsproblemen ein möglicher Weg unter verschiedenen (vgl. 1.1).
Zur Lösung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme gibt es *drei Zugangsweisen*, die sich bezüglich ihres Grads an Abstraktion unterscheiden (vgl. 1.2):

(1) Auf elementarem Niveau ist es, wie bereits benannt, möglich, Anzahlbestimmungsprobleme indirekt über das *strukturierte Auflisten* und das anschließende Abzählen zu lösen. Grundsätzlich sind so verschiedene Strukturierungen der gesuchten Figurenmenge möglich.
(2) Auf abstrakterem Niveau ist eine direkte Anzahlbestimmung unter Verwendung von *Zählstrategien* möglich. Dabei gibt es neben additiven und multiplikativen Strategien und der Anwendung von Kompensationsstrategien auch strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen Aufgabenstellungen, die zur Anzahlbestimmung genutzt werden können.
(3) Als dritter Zugang ist es möglich Anzahlbestimmungsprobleme mit Hilfe *kombinatorischer Operationen* zu lösen. Dazu bedarf es eines konzeptionellen Verständnisses der kombinatorischen Operationen sowie einer Übersetzung in die jeweiligen zur Verfügung stehenden Modelle, in denen die kombinatorischen Operationen formuliert sind.

Schrage (1996) zeigt auf, dass es grundsätzlich möglich ist, kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme vor der Thematisierung kombinatorischer Konzepte informell über das Erstellen aller Möglichkeiten oder durch die Anwendung von Zählstrategien zu lösen, wenn die elementaren Rechenoperationen bekannt sind.
Die drei beschriebenen Zugänge sind zudem insgesamt nicht losgelöst voneinander zu betrachten. Aus den vorgenommenen Strukturierungen lassen sich Zählstrategien ableiten, aus diesen wiederum die für die Grundfiguren zur Verfügung stehenden kombinatorischen Operationen. Insofern empfehlen Wittmann und Müller (1984, S. 221) auch im Sinne des Spiralprinzips die Thematisierung von Strukturierungen sowie elementaren Zählstrategien in der Grundschule. Sie konkretisieren dies und regen eine Einführung in *„räumlich Strukturieren und Zählen“, „Aufspalten und Zählen“* und *„Erschwerte Addition und Subtraktion*“ auf dem experimentellen und ikonischen Niveau an. *„Eine Ablösung der Strategien von den einzelnen Beispielen und eine Schematisierung der Formeln,* so

Wittmann und Müller (1984, S. 221), *„muss der zweiten Windung der Spirale in der Sekundarstufe 1 vorbehalten bleiben."*

Die Größen „kombinatorische Figur" und „implizite Handlungsvorstellung" sind dabei aus fachdidaktischer Sicht zu berücksichtigende Einflussfaktoren. Mögliche Strukturierungen können auf den Eigenschaften der Figurenmenge beruhen. Sie sind zugleich bei der Anwendung von Zählstrategien und kombinatorischen Operationen zu berücksichtigen. Um die Aufgabenstellungen mittels der Zählstrategien oder kombinatorischer Operationen lösen zu können, bedarf es einer mathematischen Modellierung. Diese wird maßgeblich durch die in den Aufgaben impliziten Handlungsvorstellungen beeinflusst.

Neben der Beziehung der drei Zugänge ist zudem bedeutsam, dass einige der kombinatorischen Grundfiguren gemeinsame Eigenschaften besitzen und insofern Beziehungen zwischen den kombinatorischen Operationen bestehen, welche auch zur Herleitung der Operationen verwendet werden können (vgl. 1.2.3). Hinsichtlich dieser Herleitung wurde zu Teilen konträre Herangehensweisen zwischen den historischen Zugängen und den heutigen Zugängen in der Schule herausgestellt (vgl. 1.3). Diese betreffen insbesondere die Erarbeitung der kombinatorischen Operationen, welche in der historischen Entwicklung zunächst für Kombinationen und Permutationen oftmals über ein rekursives Vorgehen ermittelt wurden, die Ableitung einer Operation zu den Variationen basiert auf der Vereinigung dieser Operationen. Heute werden die Operationen hingegen über die Produktregel gewonnen. Diese Unterschiede sind insofern von Interesse, als zu Teilen zwischen phylo- und ontogenetischen Entwicklungen von Konzepten Ähnlichkeiten festgestellt werden können. Übereinstimmungen in den Vorgehens- und Denkweisen der Lernenden und den historischen Wegen können insofern gegebenenfalls Schwierigkeiten von Lernenden im Unterricht erklären.

Für die Thematisierung von Anzahlbestimmungsproblemen im Sinne des Spiralprinzips ist aus der fachlichen Betrachtung abzuleiten, dass in der Grundschule das strukturierte Auflisten und das Ableiten von Zählstrategien im Fokus stehen sollten. Da, wie in der Einleitung dargestellt zudem angenommen wird, dass Unterricht im Sinne des genetischen Prinzips zu gestalten sei, bedarf es insbesondere der Kenntnisse über die Denk- und Vorgehensweisen von Lernenden hinsichtlich der benannten Schwerpunkte, da diese den Ausgangspunkt des Lernprozesses bilden. Konkret sind insbesondere Kenntnisse bezüglich der Rolle von Strukturierungen in den Lösungsprozessen von Lernenden und hinsichtlich des Verwendens von Strukturierungs- und Zählstrategien notwendig. Zudem ist zu klären welchen Einfluss verschiedene Größen auf die Strategien der Lernenden haben.

Es stellt sich die Frage, welche Informationen diesbezüglich in der mathematikdidaktischen Forschung bereits vorliegen. Dieser wird in Kapitel 2 nachgegangen.

2 Das Lösen kombinatorischer Probleme im Spiegel der mathematikdidaktischen Forschung

„Um ein besseres inhaltliches Verständnis für kombinatorische Aufgaben zu erreichen, ist es sinnvoll, mit einer propädeutischen Behandlung entsprechender Inhalte im Sinne des Spiralprinzips bereits in der Grundschule zu beginnen. Viele Grundschüler besitzen auch schon intuitive Vorkenntnisse zum Lösen kombinatorischer Aufgaben."
(Neubert 2001a, S. 52)

Neubert (2001a) weist darauf hin, dass Lernende bereits in der Grundschule intuitive Vorkenntnisse zum Lösen kombinatorischer Problemstellungen besitzen. Unter der heute vorherrschenden und dieser Arbeit zugrunde liegenden sozialkonstruktivistischen Sichtweise auf das Lernen spielen diese Vorkenntnisse eine zentrale Rolle (vgl. Gerstenmaier & Mandl 1995). Im Sinne dieses Lehr- und Lernverständnisses beruht der Erwerb von Wissen immer auf der individuellen aktiven Konstruktion mentaler Strukturen auf der Basis vorhandener Vorstellungen (vgl. Duit 1995, S. 905). Lernende werden insofern als aktiv handelnd bei dem Erwerb von Wissen wahrgenommen (vgl. von Glasersfeld 1997, S. 48). Zudem wird im Sinne von Conceptual Change Ansätzen (vgl. Carey 1985; Duit 1996; Posner, Strike, Hewson & Gertzog 1982) angenommen, dass dieses Wissen nicht einfach zu bereits existierenden „addiert" wird. Lernen wird vielmehr als das Vernetzen von neuem Wissen mit dem bereits vorhandenen Wissen verstanden. Vorstellungen und Konzepte von Lernenden, die von den fachlichen Konzepten abweichen werden unter dieser Sichtweise nicht als Defizite und zu vermeiden wahrgenommen, sondern vielmehr als sinnvolle und natürliche Bestandteile eines Lernprozesses, die produktiv genutzt werden können. Dazu bedarf es jedoch nicht nur der Kenntnis über die Denk- und Vorgehensweisen von Lernenden, sondern zugleich auch des Wissens über Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu den fachlichen Konzepten.
Dieses Kapitel richtet den Blick entsprechend unter Rückbezug auf die fachlichen Strategien und Konzepte vorrangig auf die Vorkenntnisse von Lernenden. Im Fokus stehen, aufgrund der in Abschnitt 1.3 gewonnenen Erkenntnisse, der mathematikdidaktische Kenntnisstand bezüglich der Strukturierungs- und Zählstrategien zur Anzahlbestimmung sowie der Einfluss verschiedener Größen auf die Strategien von Lernenden.
In Abschnitt 2.1 werden zunächst grundlegende Einflussfaktoren auf die Vorgehensweisen beim Lösen kombinatorischer Probleme in den Blick genommen. Daran knüpft eine Beschreibung der Kenntnisse über die Rolle von Strukturie-

rungen beim Lösen von Auflistungsproblemen und, soweit bekannt, bei Anzahlbestimmungsproblemen an (2.2), bevor verschiedene Konzepte zur Beschreibung der Strukturierungen und Strukturierungsstrategien dargestellt werden (2.3). In den Abschnitten 2.4 und 2.5 werden die Strukturierungsstrategien bei Auflistungs- und Anzahlbestimmungsproblemen sowie anschließend die Zählstrategien von Lernenden zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen in den Blick genommen. Abschließend erfolgt eine Zusammenfassung der zentralen Erkenntnisse bezüglich des Lösens von Anzahlbestimmungsproblemen und darauf basierend die Ableitung weiterer Forschungsinteressen sowie Konsequenzen für die Erhebung informeller Anzahlbestimmungsstrategien (2.5).

In diesem Kapitel werden dabei vorrangig Untersuchungen und Erkenntnisse zur kombinatorischen Anzahlbestimmung und zum Lösen kombinatorischer Aufzählprobleme *vor* der Thematisierung im Unterricht berücksichtigt. Die vorgenommene Ausweitung auf die Darstellung von Erkenntnissen zum Lösen kombinatorischer Aufzählprobleme erweist sich insofern als sinnvoll und notwendig, als zu Anzahlbestimmungsproblemen nur wenige Informationen vorliegen. Da in Abschnitt 1.2 aufgezeigt wurde, dass Anzahlbestimmungsprobleme auch indirekt über das Auflisten aller Lösungen bestimmt werden können, sind Parallelen zwischen den Lösungswegen anzunehmen, zugleich ist jedoch zu berücksichtigen, dass Anzahlbestimmungsprobleme anders als Auflistungsprobleme auch mittels Zählstrategien und kombinatorischer Operationen gelöst werden können. Teilweise wird zusätzlich auf weitere Untersuchungen aus anderen Schulstufen zurückgegriffen, wenn für die Grundschule geringe Erkenntnisse vorliegen bzw. anzunehmen ist, dass die Ergebnisse der Studien aus dem Sekundarbereich auch für die propädeutische Thematisierung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme in der Grundschule relevant sind. Dies gilt unter anderem für den nachfolgenden Abschnitt zum Einfluss verschiedener Größen auf die Anzahlbestimmung.

2.1 Einflussfaktoren

„In the assessment of the subjects combinatorial knowledge ask variables have to be considered to obtain a more valid and comprehensive account of its genesis and evolution."
(Batanero et al. 1997b, S. 196)

Untersuchungen zu kombinatorischen Auflistungs- und Anzahlbestimmungsproblemen geben erste Aufschlüsse darüber, welche Faktoren die Vorgehensweisen von Lernenden beeinflussen. Ganz allgemein lassen sich verschiedene Einflussfaktoren identifizieren, die sich drei Einflussbereichen zuordnen lassen: *den kombinatorischen Aufgabenstellungen*, *den Lernenden* und *dem Unterricht*. Die drei Einflussbereiche sind dabei nicht unabhängig voneinander zu betrachten, sondern bedingen einander wechselseitig. So zeigen Untersuchungen von Fischbein und Gazit (1988) sowie Batanero et al. (1997a, 1997b), dass es unter anderem altersabhängige Unterschiede in der Strategiewahl gibt, die Wahl der Strategie jedoch zugleich auch von Aufgabenvariablen, wie dem der Aufgabe impliziten Modell und der kombinatorischen Operation, abhängt. Offensichtlich ist, dass Lernende nur dann eine kombinatorische Operation zur Lösungsfindung nutzen können, wenn sie in der Lage sind, wesentliche zur Lösung notwendige Informationen aus der Aufgabe herauszulesen und diese anschließend in ein Modell, in dem die Grundfiguren formuliert sind, zu übersetzen. Die erfolgreiche Anwendung kombinatorischer Operationen geschieht in Abhängigkeit von den Aufgabendaten und den Vorkenntnissen des Lernenden. Die Betrachtung dieser Größen und insbesondere die Kenntnisse darüber, welche Einflüsse diese Faktoren auf Vorgehensweisen und Vorstellungen von Lernenden beim Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen haben, ist entsprechend von wesentlicher Bedeutung.

Der bisherige Kenntnisstand über den Einfluss verschiedener Aufgaben- und Personenvariablen wird im Folgenden genauer betrachtet. Da im Rahmen dieser Untersuchung die *vorunterrichtlichen* Vorgehens- und Denkwege von Lernenden im Mittelpunkt stehen, wird der Einflussfaktor „Unterricht“ nur insofern aufgegriffen als er Bestandteil der referierten Studien zu den Aufgaben- und Personenvariablen ist.

2.1.1 Aufgabenvariablen

Die Ergebnisse internationaler Studien (vgl. Batanero et al. 1997a, 1997b; Fischbein, Pampu & Minzat 1970; Fischbein & Gazit 1988; Fischbein & Grossman 1997; Hadar & Hadass 1981) liefern Informationen über den Einfluss verschiedener Aufgabenvariablen. Untersucht wurden unter Berücksichtigung des Alters der Lernenden und dem Einfluss von Instruktionen

- die der Aufgabe zugrunde liegende kombinatorische Figur,
- die zugrunde liegende Modellvorstellung,
- die Art und die Anzahl der zu kombinierenden Elemente

und deren Einwirkung auf die Erfolgsquoten, die Vorgehensweisen sowie typische Fehler und Schwierigkeiten. Bezüglich des Einflusses des gegebenen Kontextes und der sprachlich syntaktischen Struktur der jeweiligen Aufgabenstellungen liegen hingegen bislang kaum Informationen vor (vgl. Godino et al. 2005).

Erste umfassende empirische Erkenntnisse zu den Einflussfaktoren stammen insbesondere aus den Studien des Psychologen Fischbein und seiner Kollegen (u.a. Fischbein et al. 1970; Fischbein 1975; Fischbein & Gazit 1988; Fischbein

& Grossman 1997) sowie der spanischen Mathematikdidaktiker Batanero, Godino und Navarro-Pelayo (Batanero et al. 1997a, 1997b). Die Untersuchungen zeigen, dass die gegebenen Aufgabendaten, ebenso wie bei anderen mathematischen Aufgabenstellungen, bspw. bei der Lösung von Multiplikations- und Divisionsaufgaben die Vorgehensweisen der Lernenden in hohem Maß beeinflussen (zur Multiplikation vgl. bspw. Nesher 1988, zur Multiplikation und Division vgl. bspw. Bönig 1995; Mulligan & Mitchelmore 1997). Aus diesem Grund heben Batanero et al. (1997a) Aufgabenvariablen als einen wesentlichen zu berücksichtigenden Faktor bei der Erhebung der kombinatorischen Kenntnisse von Lernenden hervor.

2.1.1.1 *Kombinatorische Figuren*

Sowohl vor als auch nach der Thematisierung im Unterricht werden kombinatorische Aufgabenstellungen zu verschiedenen kombinatorischen Figuren von Lernenden unterschiedlich erfolgreich gelöst (vgl. Piaget & Inhelder 1975; Fischbein & Gazit 1988; Batanero et al. 1997a, 1997b).
So verglichen Piaget und Inhelder (1975 im Original von 1951) in Interviews die Vorgehensweisen von Lernenden im Alter von 4 bis 14 Jahren bei der Bearbeitung von Kombinations-, Variations- und Permutationsproblemen. Die gegebenen Aufgabenstellungen unterschieden sich dabei hinsichtlich der gesuchten Figuren. Die gegebenen Zahlenwerte sowie die der Aufgabe zugrunde liegende Vorstellung waren gleich. Sie stellten dabei fest, dass Aufgabenstellungen in denen Permutationen gesucht werden von den Lernenden im Vergleich zu den anderen kombinatorischen Operationen am seltensten erfolgreich gelöst wurden. Es folgen Variationsaufgaben mit und ohne Wiederholung. Die höchste Erfolgsquote erzielten die Lernenden, die noch keine unterrichtlichen Vorkenntnisse besaßen, bei Kombinationsproblemen.
Ähnliche Ergebnisse wurden auch in einer Untersuchung von Fischbein und Gazit (1988) mit 11- bis 12-jährigen und 13- bis 14-jährigen Lernenden festgestellt. Im Mittelpunkt der Untersuchung stand die Frage, welchen Einfluss Unterricht, in dem das Baumdiagramm als Lösungshilfe thematisiert wurde, auf den Lösungserfolg von Lernenden hat. Dazu erhielten die Lernenden einmal vor und zweimal nach der unterrichtlichen Thematisierung schriftliche Tests mit jeweils 13 Problemstellungen zu vier verschiedenen kombinatorischen Figuren.

	Klasse 6 (11 bis 12 Jahre, n= 43)				Klasse 8 (13 bis 14 Jahre, n=41)			
Figur	K. o. Wh..	Perm. o. Wh.	Vari. m. Wh.	Vari. o. Wh.	K. o. Wh.	Perm. o. Wh.	Vari. m. Wh.	V. o. Wh.
Pretest	35,62[7]	16,11	16,47	17,35	49,57	21,52	27,08	35,83
Posttest	30,48	58,17	43,92	48,52	39,19	76,38	59,40	75,46
Delay-ed Posttest	39,68	46,27	43,86	44,60	60,09	62,91	52,87	49,07

Tab. 2.1 Erfolgsquoten von Lernenden beim Lösen schriftlicher Anzahlbestimmungsprobleme (vgl. Fischbein & Gazit 1988, S. 196)

Den Ergebnissen der Untersuchung (vgl. Tab. 2.1) ist zu entnehmen, dass *vor der unterrichtlichen Thematisierung* Permutationsprobleme in beiden Altersklassen am seltensten erfolgreich gelöst wurden (16,11 % und 21,52 %), gefolgt von Variationen mit Wiederholung (16,47 % und 27,08 %) und Variationen ohne Wiederholung (17,35 % und 35,83 %). Kombinationsaufgaben wurden im Vergleich mit Abstand am häufigsten richtig gelöst (35,62% und 49,57%).
Besonders auffällig ist des Weiteren, dass *nach der Thematisierung des Baumdiagramms im Unterricht* die Kombinationsprobleme ohne Wiederholung sowohl von den Sechst- als auch von den Achtklässlern zunächst seltener erfolgreich gelöst werden als vorher (30,48 % statt 35,62 % und 39,19 % statt 49,57 %) und mit einigem Abstand zu der unterrichtlichen Thematisierung wieder erfolgreicher gelöst werden (39,68 % statt 30,48% und 60,09% statt 39,19%). Bei den anderen Figuren zeigen sich hingegen andere Tendenzen. Nachdem diese vor der Thematisierung im Unterricht nur in seltenen Fällen erfolgreich gelöst wurden liegt die Erfolgsquote nach der Thematisierung im Schnitt bei mehr als 50%, sie nimmt im nachgelagerten Posttest jedoch wieder ab.
Die Ergebnisse der Untersuchung werfen einige Fragen auf. So bleibt u.a. offen, warum Kombinationsprobleme von Lernenden vor der unterrichtlichen Thematisierung erfolgreicher gelöst werden, als Variations- oder Permutationsprobleme. Zugleich stellt sich die Frage, weshalb die Kombinationen ohne Wiederholung nach dem Unterricht zunächst seltener erfolgreich gelöst werden als vorher. Im Rahmen der beschriebenen Untersuchung bleibt auch offen, welche Vorgehensweisen Lernende bei den verschiedenen kombinatorischen Problemstellun-

7 Die Zahlen geben Prozentwerte an, die durch das Zusammenlegen der Daten der dreizehn Items der vier kombinatorischen Figuren ermittelt wurden (entnommen aus Fischbein & Gazit, 1988, S. 196).

gen überhaupt verwenden und worin die Schwierigkeiten der Lernenden bezüglich der Lösung der verschiedenen Aufgabenstellungen liegen.

Batanero et al. (1997a) stellten im Rahmen einer Fragebogenuntersuchung mit 720 Lernenden (davon 348 ohne unterrichtliche Vorkenntnisse und 372 mit Vorkenntnissen) im Alter von 14 und 15 Jahren hinsichtlich der relativen Aufgabenschwierigkeit Unterschiede bezüglich der Untersuchungsergebnisse Piagets und Inhelders (1975) sowie Fischbeins und Gazits (1988) fest. So lässt sich den Daten der Untersuchung entnehmen, dass Lernende vor der Thematisierung im Unterricht Permutationsprobleme ohne Wiederholung, gefolgt von Kombinationen ohne Wiederholung und Permutationen mit Wiederholung tendenziell besonders erfolgreich lösen. Variationsprobleme mit und ohne Wiederholung wurden von den Lernenden durchgängig am seltensten erfolgreich gelöst (vgl. Tab. 2.2). Der nachfolgenden Tabelle sind die Erfolgsquoten vor der Thematisierung im Unterricht in Abhängigkeit von den kombinatorischen Operationen und den Modellvorstellungen zu entnehmen. Auf eine Darstellung der Erfolgsquoten nach der Thematisierung im Unterricht wurde an dieser Stelle verzichtet, da diese für die vorliegende Studie nicht von Bedeutung sind.

Kombinatorische Operation	Kombinatorisches Modell	Zahlenwerte[8]	Prozent richtiger Lösungen, ohne unterrichtliche Vorkenntnisse n= 348
Kombination. o. Wh.	Selektion	$C_{5,3}$	22,5
	Partition	$C_{4,2}$	31,0
Permutation. o. Wh.	Selektion	P_3	77,2
	Distribution	P_4	23,9
Permutation. m. Wh.	Selektion	$PR_{4,1,1,2}$	16,3
	Distribution	$PR_{5,\ 1,1,3}$	10,6
	Partition	$PR_{4,2,2}$	32,3
Variation. o. Wh.	Selektion	$A_{4,3}$	9,5
	Distribution	$A_{5,3}$	3,8
Vari. m. Wh.	Selektion	$AR_{4,3}$	12,5
	Distribution	$AR_{2,4}$	13,0
	Partition	$AR_{3,4}$	3,0

Tab. 2.2 Erfolgsquoten beim Lösen kombinatorischer Problemstellungen zu verschiedenen impliziten Modellen (Batanero et al. 1997b, S. 188)

8 Die Abkürzungen in der Tabelle stehen für kombinatorische Figuren: P = Permutation, PR = Permutation mit Wiederholung, C = Kombination, A = Variation, AR = Variation mit Wiederholung. Der erste Zahlenwert steht für die Anzahl der Ausgangselemente, die weiteren Zahlenwerte für zu einer Figur zu kombinierenden Elemente.

Anders als die beiden vorangegangenen Studien berücksichtigten Batanero et al. (1997b) neben dem Alter der Lernenden und den kombinatorischen Operationen auch das zugrunde liegende kombinatorische Modell als möglichen Einflussfaktor. Die in der Untersuchung verwendeten Aufgabenstellungen zu einer kombinatorischen Figur variierten hinsichtlich der enthaltenen Modellvorstellung und der verwendeten Zahlenwerte. Die von den anderen Untersuchungen abweichenden Erfolgsquoten führten Batanero et al. auf die zusätzliche Berücksichtigung verschiedener impliziter Modellvorstellungen zurück. Neben dem Einfluss der kombinatorischen Figuren auf die Aufgabenschwierigkeit lässt sich daraus ein Einfluss der impliziten Modellvorstellungen folgern.

Es stellt sich damit die Frage nach der Rolle bzw. dem Einfluss der impliziten Vorstellungen und der Zahlenwerte auf den Lösungserfolg und die Vorgehensweisen der Lernenden.

2.1.1.2 *Implizite Modellvorstellungen*

Die Untersuchungen von Batanero et al. (1997b) geben Hinweise darauf, dass das in den Aufgabenstellungen implizite Modell einen großen Einfluss auf die Erfolgsquote sowie auftretende Schwierigkeiten und Fehler hat. Dubois stellte bereits 1984 erste theoretische Überlegungen zur Bedeutung dieser Variable an. Empirische Ergebnisse wurden in Hinblick auf den Einfluss dieser Variable jedoch erst im Rahmen der bereits beschriebenen Studie von Batanero et al. (1997b) erhoben.

Sie stellten bei Lernenden ohne unterrichtliche Vorkenntnisse einen eher geringen Unterschied bezüglich der Aufgabenschwierigkeit zwischen den drei Aufgabentypen (Distribution, Selektion und Partition) fest. Lediglich eine Permutationsaufgabe im Selektionsmodell stach dadurch heraus, dass diese von den Lernenden über Versuch und Irrtumsstrategien oder sogar ohne systematische Auflistungsstrategien gelöst wurde. Bezüglich der Lösungsfindung und der Lösungserfolge von Lernenden mit unterrichtlichen Vorkenntnissen weisen die Ergebnisse auf große Unterschiede hin.

Percentage of correct solutions in the two groups of pupils				
Item	Operation[9]	Model	Percent correct (Group with instruction)	Percent correct (Group with no instruction)
1.	P_4	Distribution	71,0	23,0
2.	$PR_{4,1,1,2}$	Selection	27,5	16,3
3.	$C_{4,3}$	Distribution	26,7	26,9
4.	$AR_{4,3}$	Partition	6,0	3,0
5.	P_3	Selection	80,7	77,2
6.	$AR_{2,4}$	Distribution	7,4	13,0
7.	$PR_{2,2}$	Partition	39,2	32,3
8.	$C_{5,3}$	Selection	46,0	22,5
9.	$A_{5,3}$	Distribution	41,8	3,8
10.	$C_{4,2}$	Partition	37,2	31,0
11.	$AR_{4,3}$	Selection	59,1	12,5
12.	$PR_{5,1,1,3}$	Distribution	29,5	10,6
13.	$A_{4,3}$	Selection	59,6	9,5

Tab. 2.3 Prozentsatz richtiger Lösungen mit und ohne Unterricht (aus Batanero et al. 1997b, S. 188)

Der Zahlenwerten in der Tabelle (vgl. Tab. 2.3) ist zu entnehmen, dass insbesondere Problemstellungen zu Variationen mit Wiederholung im Selektionsmodell von Lernenden mit unterrichtlichen Vorkenntnissen im Vergleich zu Variationsproblemen mit Wiederholungen in mit anderen zugrunde liegenden Modellvorstellungen besonders erfolgreich gelöst wurden (Selektionsmodell: 59,1 %; Partition: 6,0 % und Distribution 7,4 %). Batanero et al. (1997b, S. 190) folgerten aus den Ergebnissen ihrer Untersuchung, *„the order of relative difficulty for the different combinatorial operations might not be the same in the different combinatorial models.*“

Um den Einfluss des kombinatorischen Modells auf die Lösungen der Lernenden genauer zu betrachten, führten sie 17 klinische Interviews mit Lernenden, die typische Fehler bei Partitionsproblemen zeigten oder unsystematisch vorgingen. Als Ergebnis der Interviews stellten sie fest, dass die in den Aufgaben impliziten Modellvorstellungen einen Einfluss auf die Lösungsstrategien haben. So wurden Selektionsprobleme nach dem Unterricht oftmals über kombinatorische

9 Die Abkürzungen in der Tabelle stehen für folgende kombinatorische Figuren: P = Permutation, PR = Permutation mit Wiederholung, C = Kombination, A = Variation, AR = Variation mit Wiederholung: der erste Zahlenwert steht für n, die weiteren Zahlenwerte für k.

Operationen gelöst, Distributions- und Partitionsprobleme hingegen (weiterhin) über Auflistungs- und Abzählstrategien.

„Moreover pupils` strategies were influenced by the combinatorial model and though most pupils, after instruction preferred employing a formula to solve the selection problems, many of them used listing with partition or distribution problems." (Batanero et al 1997b, S. 189)

Bezüglich der Übersetzung kombinatorischer Problemstellungen in die Modelle bemerken Godino et al. (2005, S. 6) Folgendes:

„While other combinatorial models (distribution, partition) can appear in counting problems (Dubois, 1984), the selection model is the most familiar to most students, and solving problems using other models often involves "translating" the problem into a selection model (when possible) and applying one of the basic combinatorial operations"

Anzunehmen ist, dass die Sicherheit im Umgang mit dem Selektionsmodell und die Schwierigkeiten beim Lösen von Problemstellungen, denen andere Vorstellungen zugrunde liegen, auf die Unterrichtsinhalte zurückzuführen ist. So weisen Batanero et al. (1997b) darauf hin, dass in fast jedem Schulbuch in Spanien die kombinatorischen Figuren und dazugehörigen Operationen über das Selektionsmodell eingeführt werden. Cadwallader Olsker et al. (2012) zeigten auf, dass Gleiches auch für amerikanische Schulbücher gilt. Ein Blick in eine Auswahl deutscher Schulbücher der Sekundarstufe 1 (vgl. Griesel, Postul & Suhr 2009; Lergenmüller & Schmidt 2008; Lütticken & Uhl 2009) zeigt, dass auch dort primär das Selektionsmodell zur Veranschaulichung der Figuren und Einführung der kombinatorischen Operationen verwendet wird.
Der vorrangige Rückbezug auf das Selektionsmodell im Unterricht und durch die Lernenden ist insofern problematisch, als aufgezeigt wurde, dass nicht jedes Problem in ein Selektionsproblem und damit in das Selektionsmodell übersetzbar ist (vgl. 1.1.2 & 1.2.3) und zugleich Lernende, wie in der Untersuchung von Batanero et al. (1997b) aufgezeigt, nicht ohne Weiteres in der Lage sind, Problemstellungen mit anderer zugrunde liegender Modellvorstellung in ein Selektionsmodell zu übersetzen.

2.1.1.3 *Art und Anzahl der zu kombinierenden Elemente*

In Hinblick auf die Art und Anzahl der zu kombinierenden Elemente ergab die Untersuchung von Fischbein und Gazit (1988), dass die Erfolgsquoten von Lernenden im Alter von 11-12 Jahren sowie 13-14 Jahren bei Problemstellungen zu verschiedenen kombinatorischen Figuren höher sind, wenn in den Aufgabenstellungen Ziffern oder Zahlen kombiniert werden müssen als bei anderen Elementen, wie beispielsweise Ausschüsse von Personen oder gefärbten Flaggen. Als Ursache für die höheren Erfolgsquoten bei Aufgabenstellungen in denen Zahlen oder Ziffern kombiniert werden mussten nehmen sie an, dass Lernende eher daran gewöhnt sind mit Ziffern und Zahlen mental zu operieren als mit anderen Elementen (vgl. Fischbein & Gazit 1988). Bezüglich der Erfolgsquoten von 14- und 15-Jährigen stellten Batanero et al. (1997a) ähnliche Ergebnisse fest: Aufgaben in denen Buchstaben bzw. Zahlen oder Ziffern kombiniert werden mussten, wurden häufiger richtig gelöst, als Aufgabenstellungen, in denen Personen oder Objekte kombiniert werden sollten. Ob die Vorgehensweisen der Lernenden sich bezüglich der unterschiedlichen zu kombinierenden Elemente unterschieden, wurde in beiden Studien nicht dargestellt.

Neben der Art der zu kombinierenden Elemente wirkt sich auch die *Größe der Parameter m und n* auf die Erfolgsquoten und auf den Lösungsprozess aus:
So weisen Batanero et al. (1997a) im Rahmen der bereits referierten Untersuchung zum Einfluss der Modellvorstellungen auf das Lösen kombinatorischer Probleme darauf hin, dass vor der Thematisierung im Unterricht diejenigen Aufgaben mit der größten Figurenmenge mit der geringsten Erfolgsquote gelöst wurden.
Hoffmann (2003) stellte fest, dass die Anzahl der zu kombinierenden Elemente innerhalb einer Figur einen bedeutsamen Einfluss auf die Vorgehensweisen der Lernenden hat. Im Rahmen ihrer Untersuchung erhielten Primar- und Sekundarstufenschüler verschiedene kombinatorische Aufgabenstellungen in Selektionskontexten. Aufgabe der Lernenden war es, alle möglichen Kombinationen im Kontext von farbig zu gestaltenden Häusern bzw. Farbenschlössern zu ermitteln. Sie stellte fest, dass Aufgaben, in denen mehr als zwei Farben miteinander kombiniert werden mussten, eher mit einer übergeordneten Strategie gelöst wurden als Aufgaben, in denen genau zwei Farben miteinander kombiniert werden sollten (vgl. ebd., S. 276).

2.1.1.4 *Kontext*

In der von Hoffmann (2003) durchgeführten Untersuchung zum Vergleich der Problemlösestrategien von Primarstufen- und Sekundarstufenschülern beim Lösen kombinatorischer Auflistungsprobleme erhielten die Lernenden unter anderem auch zueinander isomorphe Problemstellungen. Die Aufgabenstellungen unterschieden sich hinsichtlich des Kontextes (Häuser und Farbenschlossaufgaben) und des zur Verfügung stehenden Materials. Sie stellte fest, dass die Wahl der Lösungsstrategie bei zueinander isomorphen Aufgabenstellungen variiert und schlussfolgert daraus: „Mathematische strukturgleiche Aufgaben sind demnach nicht unbedingt auch im Hinblick auf die Problemlöseprozesse strukturgleich“ (ebd., S. 263). Da einige Strategien im Rahmen ihrer Untersuchung besonders häufig bei der Problemstellung Farbenschloss verwendet wurden und im Vergleich dazu selten zur Lösung der Häuseraufgabe, nimmt sie eine Abhängigkeit der Strategien von der Aufgabenstruktur an. Sie folgert daraus, dass die verwendeten Strategien der Lernenden „alters- und materialunabhängig, dafür aber zu einem hohen Grad aufgabenstrukturabhängig genutzt werden" (ebd., S. 272).

Hefendehl-Hebeker und Törner (1984, S. 248f.) geben ebenfalls Hinweise auf den Einfluss der Kontexte bezüglich des Lösens von Anzahlbestimmungsproblemen. Sie zeigen auf, dass Lernende oftmals versuchen, eine Stufung im Sinne des Baumdiagramms vorzunehmen. Diese orientieren sich dabei häufig an der Dynamik der durch den Kontext nahegelegten natürlichen Handlungsabläufe. An Beispielen zeigen sie auf, dass diese Strukturierung bei einigen Aufgaben eine sinnvolle Orientierung ist, bei anderen Aufgaben hingegen keine zielgerechte Strukturierung entsteht. Dies gilt beispielsweise in dem nachfolgenden Kontext:

> *Beim Verteilen der Skatkarten bekommt ein Spieler drei der vier Buben, zwei der vier Asse und fünf der 24 sonstigen Karten. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für ein solches Blatt?*
> *(Althoff & Kosswig 1975, S. 721)*

Eine mögliche Lösung für solche Schwierigkeiten sehen Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) in der Verwendung von Codewörtern. Anstatt den Handlungsaspekt zu fokussieren, schlagen sie vor, den Kodierungsaspekt zu betonen. Die entscheidende Frage lautet dann nicht mehr, wie man sich die Situation als Vorgang vorstellen muss, um einen für die Anwendung der Produktregel brauchbaren Stufenprozess zu erhalten. Vielmehr geht es nun darum, wie sich alle möglichen Ergebnisse einer solchen Verteilung systematisch auflisten lassen, um sie anschließend abzählen zu können.

Die Ergebnisse der dargestellten Untersuchungen von Batanero et al. (1997b), Hoffmann (2003) sowie Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) zeigen auf, dass Lernende isomorphe Anzahlbestimmungsprobleme ebenso, wie Anzahlbestimmungsprobleme zu gleichen Grundfiguren jedoch mit unterschiedlichen naheliegenden Modellvorstellungen, auf verschiedene Wege lösen. Es stellt sich die Frage, welche Ursache die verschiedenen Strategien bei mathematisch strukturgleichen Aufgabenstellungen haben. Einen möglichen Erklärungsansatz liefert das Modell der subjektiven Erfahrungsbereiche von Bauersfeld (1983). Dieser geht davon aus, dass Erfahrungen des Individuums in nicht-hierarchischen, kumulativ und entsprechend der situativen Bindung deutlich getrennten „subjektiven Erfahrungsbereichen (SEBn)" gespeichert werden. Mathematisches Wissen wird entsprechend auf der Basis konkreter Erfahrungen bereichsspezifisch verarbeitet und organisiert. Aufgrund der angenommenen Bereichsgliederung aller Erfahrungen können nach Bauersfeld (1983) auch zwei Probleme, die zwar strukturgleich sind, aber evtl. zwei verschiedene SEBe ansprechen, ganz unterschiedlich gut gelöst werden (vgl. ebd).

2.1.2 Personenvariablen

Neben den genannten Aufgabenvariablen wurde oftmals insbesondere im Rahmen psychologischer Untersuchungen die kognitive Entwicklung der Lernenden als Einflussfaktor auf die Erfolgsquoten und die Vorgehensweisen betrachtet (vgl. Batanero et al. 1997a; English 1991, 1993a, 1993b; Fischbein & Gazit 1988; Hoffmann 2003; Piaget & Inhelder 1958, 1975). Der Schwerpunkt bei der Betrachtung der Personenvariablen lag in den Untersuchungen vorrangig auf der Bedeutung des Alters und der allgemeinen kognitiven Entwicklung für das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme.

2.1.2.1 *Die Bedeutung des Alters und der kognitiven Entwicklung*

Insgesamt zeigen eine Reihe von Untersuchungen auf, dass ältere Lernende kombinatorische Problemstellungen erfolgreicher lösen als jüngere (vgl. Batanero et al. 1997a, 1997b; English 1991, 1993a, 1993b; Fischbein & Gazit 1988; Hoffmann 2003; Piaget & Inhelder 1958, 1975). Diese Erkenntnis wird vorrangig auf die unterschiedliche kognitive Entwicklung der Lernenden zurückgeführt. Eine Betrachtung der Vorgehensweisen von Lernenden verschiedener Altersklassen gibt Hinweise auf die möglichen Ursachen für die höheren Erfolgsquoten älterer Lernender: So zeigen eine Reihe von Untersuchungen zum Lösen von Auflistungsproblemen, dass jüngere Lernende im Allgemeinen weniger strukturiert vorgehen als ältere (English 1991, 1993a; Hoffmann 2003; Piaget & Inhelder 1975). Hinsichtlich der Zunahme an Strukturiertheit der Lösungswege mit Zunahme des Alters stimmen die Ergebnisse der Untersuchungen überein.Es liegen jedoch widersprüchliche Ergebnisse dazu vor, ab welchem Alter Lernende ein vorrangig strukturiertes Vorgehen zeigen (vgl. u.a Piaget & Inhelder 1975; Vergnaud & Cohen 1968). Für eine genauere Betrachtung der Ergebnisse bezüglich vorgenommener Strukturierungen und der Abhängigkeit vom Alter sei an dieser Stelle auf Abschnitt 2.2. verwiesen. Dort wird die Rolle von Strukturierungen genauer in den Blick genommen.

2.1.2.2 *Vorwissen der Lernenden*

Aus den verschiedenen möglichen Zugangsweisen zum Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme geht hervor, dass es grundsätzlich möglich ist, diese auch ohne großes Vorwissen durch Auf- und Abzählen zu lösen, so folgert Kavousian (2008, S. 2): *„Without much prior knowledge of mathematics, one can solve many creative, interesting, and challenging combinatorial problems.“*.

Es stellt sich jedoch trotzdem die Frage, welchen Einfluss das bereichsspezifische Wissen auf die verschiedenen möglichen Zugänge und die Erfolgsquoten hat. Grundsätzlich wird heute angenommen, dass die Vorkenntnisse von Lernenden zu einem bestimmten Inhaltsbereich ein wesentlicher Faktor sind, der die Vorgehensweisen und Denkwege der Lernenden beeinflusst (vgl. Resnick 1987). Diesbezüglich liegen für die Kombinatorik jedoch konträre Aussagen vor. So hebt English (1992a) die Bedeutung des Vorwissens hervor. Hoffmann (2003) geht hingegen davon aus, dass bereichsspezifisches Wissen bei der Lösung kombinatorischer Aufgabenstellungen keine Rolle spiele: *„Kombinatorikaufgaben können als Puzzles bezeichnet werden, da bereichsspezifisches Wissen unerheblich ist“* (ebd., S. 25).
Bezogen auf das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme liegen bislang keine expliziten Untersuchungen vor, die den direkten Einfluss des Vorwissens auf die Erfolgsquoten oder die Wahl des Lösungsweges betrachten. Dennoch gibt es in einigen Untersuchungen implizite Hinweise darauf, dass die Vorgehensweisen von Lernenden nicht, vorrangig altersabhängig, sondern vielmehr vorkenntnisabhängig sind. So zeigen u.a. die bereits beschriebenen Untersuchungen von Fischbein und Gazit (1988) sowie Batanero et al. (1997a, 1997b), dass auch ältere Lernende die Lösung über das Auflisten- und Abzählen ermitteln, selbst wenn das Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen mittels der Verwendung kombinatorischer Operationen im Unterricht thematisiert wurde. Besonders auffällig ist dabei, dass auch ältere Lernende unsystematische Vorgehensweisen[10] verwenden (vgl. Batanero et al. 1997a, 1997b). Batanero et al. (1997b) identifizierten das unsystematische Auflisten als einen der Hauptgründe für eine fehlerhafte Anzahlermittlung. So griffen die Lernenden insbesondere dann auf Auflistungs- und Abzählstrategien zurück, wenn sie die Probleme nicht in ein entsprechendes Modell übersetzen konnten: Selektionsprobleme wurden nach dem Unterricht vorrangig über kombinatorische Operationen gelöst, Distributions- und Partitionsprobleme hingegen (weiterhin) über Auflistungs- und Abzählstrategien.
Grundsätzlich ist aufgrund dieser Erkenntnisse zu vermuten, dass die Vorkenntnisse von Lernenden zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen einen Einfluss auf deren Vorgehensweisen haben.

2.1.3 Zusammenfassung

Mit Blick auf die Lernenden lassen sich grundsätzlich drei Einflussbereiche auf das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme identifizieren: Auf-

10 Batanero et al. (1997b) spezifizieren nicht, wann sie das Vorgehen der Lernenden als unsystematisch einordnen.

gabenvariablen, Personenvariablen und der Einfluss von Unterricht (vgl. 2.1.1). Vor der unterrichtlichen Thematisierung sind entsprechend die von Aufgaben- und Personenvariablen von besonderer Bedeutung.
Studien zum *Einfluss verschiedener Aufgabenvariablen* zeigen, dass die gesuchte kombinatorische Figur, die implizite Modellvorstellung sowie die Art und die Anzahl der zu kombinierenden Objekte Auswirkungen auf den Lösungserfolg der Lernenden haben (vgl. Batanero et al. 1997a, 1997b; Fischbein et al. 1970; Fischbein & Gazit 1988; Fischbein & Grossman 1997; Hadar & Hadass 1981). Aufgabenstellungen zu Kombinationen werden vor der Thematisierung im Unterricht von Lernenden in den meisten Untersuchungen erfolgreicher gelöst als Variations- und Permutationsprobleme. Diesbezüglich liegen jedoch widersprüchliche Informationen vor, welche auf andere Zahlenwerte sowie auf unterschiedliche Modellvorstellungen zurückgeführt werden (vgl. Batanero et al. 1997a, 1997b). Problemstellungen, in denen eine kleine Figurenmenge zu bestimmen ist, werden vor der Thematisierung im Unterricht erfolgreicher gelöst als Problemstellungen mit einer großen Figurenmenge (vgl. u. a. Batanero et al. 1997a, 1997b; Hoffmann 2003). Zugleich werden Problemstellungen, in denen mehr als zwei Elemente in der Ausgangsmenge enthalten sind, häufiger mittels eines strukturierten Vorgehens gelöst, als jene, in denen in der Ausgangsmenge zwei Elemente enthalten sind (vgl. Hoffmann 2003). Es wurde festgestellt, dass zueinander isomorphe Problemstellungen mit verschiedenen Strategien gelöst wurden, gleiches gilt für Problemstellungen, denen unterschiedliche Modellvorstellungen unterliegen, in denen jedoch die gleichen kombinatorischen Figuren zu erstellen sind (vgl. Batanero et al. 1997b; Hefendehl-Hebeker & Törner 1984; Hoffmann 2003). Daraus ist zu folgern, dass die Strategien auch abhängig vom Kontext angewendet werden. Einen Erklärungsansatz bietet von Bauersfelds Modell der subjektiven Erfahrungsbereiche, demgemäß Erfahrungen des Individuums in nicht-hierarchischen, kumulativ und entsprechend der situativen Bindung deutlich getrennten „subjektiven Erfahrungsbereichen (SEBn)“ gespeichert werden (vgl. Bauersfeld 1983). Für das Lösen kombinatorischer Problemstellungen bedeutet dies, dass Lernende, wenn sie verschiedene Strategien verwenden, voraussichtlich auf unterschiedliche Erfahrungsbereiche zurückgreifen, um die Problemstellungen zu lösen.

Festzuhalten ist insofern, dass verschiedene Aufgabenvariablen einen Einfluss auf die Erfolgsquoten und Strategien haben. *Wie* die Aufgabenvariablen die Vorgehensweisen von Lernenden im Detail beeinflussen, wird aus den vorliegenden Studien im Sekundarbereich jedoch nicht ersichtlich. Ebenso liegen *keine Informationen* darüber vor*, welchen Einfluss der Problemkontext* auf die Lösungsstrategien der Lernenden hat.
Aufgrund des Einflusses verschiedener Aufgabenvariablen auf die Erfolgsquoten ist zudem abzuleiten, *dass Vorgehensweisen von Lernenden in Abhängigkeit*

von den zugrunde liegenden Aufgabendaten betrachtet werden müssen. Dies gilt sowohl für die Betrachtung bereits existierender Untersuchungsergebnisse als auch für weiterführende Untersuchungen.

Hinsichtlich des *Einflusses von Personenvariablen* liegen vorrangig Informationen bezüglich der *Alterseinflusses* und der *kognitiven Entwicklung* von Lernenden vor (vgl. 2.1.2). So ist bekannt, dass ältere Lernende kombinatorische Problemstellungen erfolgreicher lösen als jüngere (vgl. u.a. Piaget & Inhelder 1975; English 1991, 1993a, 1993b; Fischbein & Gazit 1988; Hoffmann 2003). Als Ursache dafür werden die höhere kognitive Kapazität älterer Lernender sowie das systematischere Vorgehen bei der Lösungsfindung benannt. Widersprüchliche Informationen liegen bezüglich des Alters von Lernenden vor, in dem sie systematische Lösungswege wählen (vgl. u.a. Piaget & Inhelder 1975; English 1991). Grundsätzlich wird angenommen, dass das Vorwissen von Lernenden einen bedeutenden Einfluss auf das Lösen mathematischer Probleme hat. Hinsichtlich der Bedeutung des Vorwissens liegen konkret für das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme keine Studienergebnisse vor. Innerhalb einiger Untersuchungen gibt es Hinweise darauf, dass Lernende trotz Kenntnis der kombinatorischen Operationen auf unsystematische Vorgehensweisen und Auflistungsstrategien zurückgreifen, wenn ihnen Aufgabenstellungen vorgelegt werden, die einer anderen als der bekannten Modellvorstellung entsprechen.

Aus den Ergebnissen bezüglich des Einflusses verschiedener Personenvariablen stellt sich die Frage, welche Rolle Strukturierungen in den Lösungsprozessen jüngerer Lernender spielen. Ebenso bedarf es genauerer Informationen über den Einfluss des Vorwissens auf die Vorgehensweisen.

2.2 Die Rolle von Strukturierungen

In Kapitel 1 wurde aufgezeigt, dass das Erstellen geeigneter Strukturierungen ein zentrales Element zur Anzahlbestimmung darstellt (vgl. 1.2). Zugleich weisen Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) jedoch auch darauf hin, dass das Generieren geeigneter Strukturierungen keinesfalls trivial ist, da Lernende oftmals eine Strukturierung anhand von Handlungsabläufen vornehmen, die nicht geeignet ist, um alle Lösungen zu erzeugen (vgl. 2.1.1). Es ist insofern nicht verwunderlich, dass im Rahmen einiger Untersuchungen mit Sekundarstufenschülern fehlende Strukturierungen und das Auswählen falscher Strukturierungen als Ursache für fehlerhafte Anzahlbestimmungen benannt werden (vgl. Batanero et al. 1997a; Fischbein & Gazit 1988; Kavousian 2008). Im Folgenden geht es darum, zu klären, welche Rolle Strukturierungen bei der Lösung kombinatorischer Problemstellungen von Lernenden spielen. Im Fokus steht dabei in Abschnitt 2.2.1 zunächst die Rolle von Strukturierungen in Abhängigkeit vom

Alter und der kognitiven Entwicklung der Lernenden sowie den zu lösenden Aufgabenstellungen. Anschließend wird in Abschnitt 2.2.2 die Rolle von Strukturierungen im Lösungsprozess von Lernenden im Grundschulalter betrachtet.

2.2.1 Strukturierungen der Lernenden in Abhängigkeit vom Alter und der kognitiven Entwicklung

Die Untersuchungen Piagets und Inhelders (1958, 1975, im Original 1951) liefern erste Erkenntnisse, welche Rolle Strukturierungen in den Vorgehensweisen von Lernenden in verschiedenen Altersklassen spielen. Aufbauend auf Piagets allgemeiner Theorie der Entwicklung des kindlichen Denkens beobachteten Piaget und Inhelder (1958) in zwei Versuchen Lernende bei der Bearbeitung kombinatorischer Aufgabenstellungen.

In der ersten Studie erhielten die Lernenden zunächst vier verschiedene farblose Substanzen. Diese sollten auf alle möglichen Weisen miteinander kombiniert werden. Zur Realisierung wurde den Lernenden zunächst ein Beispielglas, das die Flüssigkeiten 1 und 3 enthielt, gezeigt. Durch das Hinzufügen einer Indikatorflüssigkeit verfärbte sich das zunächst farblose Gemisch gelb. Die Lernenden wurden nun aufgefordert, die gelbe Substanz durch beliebiges Mischen der Flüssigkeiten 1,2,3,4 und der Indikatorflüssigkeit selbst herzustellen. In dem daran anschließenden Versuch wurden sie dann aufgefordert, drei Flüssigkeiten und eine Indikatorflüssigkeit zu kombinieren. Ziel war es in diesem Fall nicht, wie beim vorherigen Versuch, die Zusammensetzung der farbigen Flüssigkeitsmischung zu ermitteln, sondern alle möglichen Mischungen herzustellen. Dazu gab es entsprechend $4 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten.

In einer weiteren Untersuchungsreihe betrachteten Piaget und Inhelder (1975) die Entwicklung der Problemlösefähigkeit von Kindern im Alter von 4,5 bis 13,3 Jahren beim Lösen von Kombinations- und Permutationsproblemen sowie Variationsproblemen. Die Lernenden erhielten je nach Aufgabentyp den Auftrag, alle möglichen Kombinationen aus zwei, drei oder vier Spielmarken zu legen (Kombinationen mit und ohne Wiederholung), alle möglichen Anordnungen von Spielfiguren vorzunehmen (Permutationen) beziehungsweise alle möglichen Zahlen aus Ziffernkarten zu bilden (Variationen).[11]

Während die Kinder auf der Entwicklungsstufe 1, dem präoperativen Stadium, die gesuchten Objekte völlig wahllos und zufällig auswählten, stellten Piaget und Inhelder fest, dass Kinder im konkret-operativem Stadium der zweiten Ent-

11 Lernende, denen die Ziffern noch nicht bekannt waren, erhielten ebenfalls den Auftrag, alle möglichen Anordnungen zu bilden. Als Material wurden anstelle der Ziffernkarten jedoch Spielkarten mit verschiedenen Motiven gewählt (vgl. Piaget & Inhelder, 1975, S. 196f.).

wicklungsstufe bereits nach einem System suchten, ein vollständig systematisches Vorgehen jedoch noch fehlte. Bei Kindern, die sich in der dritten Entwicklungsstufe befanden, wurde dieses systematische Vorgehen zunehmend beobachtet. In diesem sogenannten formal operationalen Stadium bearbeiteten die Kinder die Aufgaben zunehmend systematischer, indem sie das System der Tachometerzählmethode vollständig anwendeten und die Aufgaben somit fehlerfrei lösten.

	Stufe	**Alter (in Jahren)**	**Vorgehensweise**
Stufe 1	Präoperatives / präoperationales Stadium	1,5 – 7	Wahllose und zufällige Auswahl der Kombinationen
Stufe 2	Konkret-operatives / operationales Stadium	7 – 12	Suche nach einem System, vollständige Systematik fehlt in der Regel
Stufe 3	Formal operationales Stadium	ab 12	Zunehmend systematisches Vorgehen

Tab. 2.4 Strukturierung des Vorgehens in Abhängigkeit vom Alter und der kognitiven Entwicklung (Piaget & Inhelder 1975)

Insgesamt stellten Piaget und Inhelder (1975) dabei Unterschiede bzgl. des Grads an Strukturierungen in Abhängigkeit von den zu erstellenden Figuren fest: So wurden Permutationen später als die anderen Operationen systematisch gelöst. Lernende im Alter zwischen 7 und 8 Jahren lösten die Aufgaben ohne System, im Alter von 8 bis 11 oder 12 Jahren befanden sie sich auf der Suche nach einem System, ab dem Alter von 12 Jahren war eine fortgeschrittene Suche nach einer Regel zu erkennen.

Entgegen der Resultate von Piaget und Inhelder (1958, 1975) kamen Vergnaud und Cohen (1969) zu dem Ergebnis, dass Lernende bereits im Alter von 8 Jahren in der Lage sind, alle gesuchten Permutationen ohne Wiederholung aus drei bzw. vier Elementen (verschiedene Farben) systematisch zu erstellen. Die 138 untersuchten Lernenden im Alter von 7,5 bis 9,5 Jahren sollten ebenfalls Permutationen aus drei bzw. vier Elementen ermitteln. Im Gegensatz zu den Untersuchungen Piagets erhielten sie die Aufgabenstellungen schriftlich und konnten die Lösungen notieren.

Ebenso wie Piaget untersuchte English (1991) die Entwicklung des kombinatorischen Denkens bei Kindern verschiedener Altersklassen. Anders als in den Studien von Piaget und seinen Kollegen wählte sie durchgängig Aufgaben zu einer kombinatorischen Operation, dem Kreuzprodukt. Die 50 Lernenden im Alter zwischen 4,5 und 9,1 Jahren erhielten in Einzelinterviews sieben kombinatorische Aufgaben, in denen es thematisch immer um das Ankleiden von Bären ging. Um die notwendigen Gedächtnisleistungen der Lernenden zu entlasten, wurde ihnen zur Lösungsfindung Material zur Verfügung gestellt. Anders als Piaget und Inhelder (1975) ging English (1991) im Rahmen ihrer Untersuchung von einer Existenz einer besten bzw. effektivsten Lösungsstrategie (sog. Expertenstrategie) aus: dem Tachometerzählprinzip. Sie beobachtete unter Berücksichtigung der Vorgehensweisen und der Überprüfungshandlungen der Lernenden bei bereits 25 % der 7-Jährigen, 34 % der 8-Jährigen und 51 % der 9-Jährigen ein systematisches Vorgehen im Sinne des Tachometerprinzips (English 1991). Insgesamt stellte sie jedoch ebenso wie Piaget und Inhelder fest, dass die Lernenden im Alter von 4 bis 6 Jahren vorrangig eher unsystematische Vorgehensweisen verwendeten, während die Lernenden im Alter von 7 bis 9 Jahren eher auf systematische Vorgehensweisen zurückgriffen.

In einer zweiten Untersuchung verglich English (1993b, 2007) die Vorgehensweisen von Lernenden bei der Bearbeitung zwei- und dreidimensionaler Aufgabenstellungen zum Kreuzprodukt. Sie stellte fest, dass der Leistungsunterschied zwischen 7- bis 9-Jährigen und 10- bis 12-Jährigen bei der Bearbeitung zweidimensionaler Aufgaben sehr gering war. Bei der Bearbeitung der dreidimensionalen Aufgaben zeigten die jüngeren Lernenden jedoch mehr Schwierigkeiten als die Älteren. So lösten 47 % der 7- bis 9-Jährigen, aber 64 % der 9- bis 12-Jährigen diese Aufgaben richtig.

Die Untersuchungen Englishs (1991, 1993b, 2007) zur Lösung von kombinatorischen Problemstellungen zum Kreuzprodukt zeigen, dass Lernende bereits früher in der Lage sind, alle Möglichkeiten systematisch zu finden, wenn sie ihre Suche nach allen Möglichkeiten durch Materialhandlungen unterstützen können:

> *"At this point, it is worth comparing the findings of this study with those of the Piagetian experiments on children's development of combinatoric operations (Piaget & Inhelder, 1975). Their experiments indicated that concrete-operational children attempt some systematic method in forming combinations. However, these children do not succeed in applying the combinatorial procedure in its entirety until they reach the formal operations period, around 11 years. The findings of this study suggest that, under appropriate learning conditions, concrete-operational children can independently acquire a systematic method for forming two- and three dimensional combinations. The use of concrete materials within a meaningful problem context appears conducive to children adopting efficient combinatorial procedures at an earlier age than indicated by the Piagetian experiments" (English 2007, S. 153).*

Im Rahmen der Untersuchung Hoffmanns (1999, 2003) erhielten die Lernenden ebenfalls Material, um alle Lösungen erstellen zu können. Sie stellte fest, dass im Gegensatz zu den Ergebnissen der Untersuchungen Piagets und Inhelders (1958, 1975) 8 % der Primarstufenschüler und 37 % der Sekundarstufenschüler ihrer Stichprobe zu einer Variationsaufgabe („Haus 2-12“) vollständig systematisch alle Lösungen mittels einer übergeordneten Strategie bestimmten. Unter Berücksichtigung von Überprüfungshandlungen der Lernenden ermittelten insgesamt 25 % der 8-Jährigen und 62 % der 11-Jährigen die Anzahl der Lösungen erfolgreich und systematisch. Die Ergebnisse der Untersuchung Hoffmanns (2003) zeigen zudem, dass Primarstufenschüler ähnliche Strategien wie die Sekundarstufenschüler verwenden, insgesamt jedoch ein geringerer Teil der Primarstufenschüler eine Strategie verwendet, mit der alle Lösungen gefunden werden.

Die Untersuchungen von Vergnaud und Cohen (1969), English (1991, 1993b, 2007) und Hoffmann (2003) zeigen auf, dass entgegen der Untersuchungsergebnisse Piagets und Inhelders (1975) eine Reihe von Lernenden bereits im Grundschulalter in der Lage ist, systematisch alle Lösungen zu Aufzählproblemen erstellen. Die Ursache für die von Piaget und Inhelder abweichenden Ergebnisse vermuten Vergnaud und Cohen (1969), English (1991) und Hoffmann (2003) in den unterschiedlichen Darbietungen der Aufgabenstellungen (u. a. Bereitstellung von Material), der kindgerechten Formulierungen und Kontexte sowie der ausgewählten Aufgaben implizierten Aufgabenvariablen (kombinatorische Figur, Anzahl an Elementen, Kontext).

2.2.2 Strukturierungen im Lösungsprozess

In den meisten Untersuchungen zu Auflistungsproblemen steht das Erstellen der Figurenmenge im Mittelpunkt. Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Untersuchungen geben dabei bereits Informationen zu der Rolle von Strukturierungen. So unterscheiden Piaget und Inhelder (1975) zwischen einer «Suche ohne System» , wenn in den Vorgehensweisen der Lernenden keine Strukturierung zu erkennen ist und einer «Suche nach einem System» , wenn sich in den Vorgehensweisen Handlungsmuster erkennen lassen. Eine «Suche mit System» liegt vor, wenn die Lernenden ein Vorgehen verwenden, mit dem die gesamte Figurenmenge erstellt wird.
Strukturierungen spielen demnach bereits beim Erstellen der Lösungen durch Lernende, die teilweise systematisch oder gänzlich systematisch vorgehen, eine Rolle. Da diese Untersuchungen jedoch ebenso, wie eine Reihe weiterer Studien(vgl. u.a. Vergnaud & Cohen 1969; Larivée & Normandeau 1985; Martino 1992) auch darauf hinweisen, dass Lernende in einigen Fällen unsystematisch

vorgehen, ist zu folgern, dass eine Strukturierung nicht in allen Fällen bei der Erstellung der Figurenmenge eine Rolle spielt.

Zunehmende Strukturierung im Lösungsprozess

Insgesamt wird zudem in einer Reihe von Untersuchungen zu Auflistungsproblemen darauf hingewiesen, dass der Grad an Strukturierung im Lösungsprozess oftmals zunimmt. So gehen einige Lernende zunächst unstrukturiert vor, entwickeln dann aber im Verlauf des Lösungsprozesses eine Strategie und verwenden diese anschließend zur Überprüfung der Vollständigkeit der Lösungen (vgl. English 1991, 1992a, 1993a, 1993b, 2007; Hoffmann 2003; Maher & Martino 1992b; Maher & Martino 1996).

Zu unterscheiden ist zwischen Lernenden, bei denen die Auflistung bereits nach dem Erstellen der Objekte abgeschlossen ist und Lernenden, die nach dem (ersten) Finden von Lösungen Strukturierungen oder Umstrukturierungen vornehmen (vgl. English 1992a; Hoffmann 2003). Dies geschieht entweder, um weitere Lösungen zu finden oder, um die Vollständigkeit der Lösungen zu überprüfen. English (1992b, S. 77) hebt dabei die Überprüfungshandlungen als besonders bedeutsam hervor: *„The quality of the students` monitoring was a crucial factor in their ability to solve the problems: Effective monitoring + adequate strategies = successful problem solving“*, da ihre Untersuchungen ergaben, dass die Kombinatorikaufgaben auch bei der Wahl ineffektiverer Strategien mit Hilfe sorgfältiger Überprüfungshandlungen erfolgreich gelöst werden.

Martino und Maher (1999) beschreiben ebenfalls, dass sich Strukturierungen oftmals erst im Lösungsprozess entwickeln: *„For many children there is a natural progression from use of random methods to the use of systematic „local“ organizing aids that serve to simplify the task of finding new combinations and keeping track of their solutions” (ebd., S. 60).* Ein solches Vorgehen wird im Folgenden als strukturentwickelnd eingestuft.

Strukturentwickelnde Vorgehensweisen werden ebenfalls in Untersuchungen mit älteren Lernenden bei der Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen beschrieben. So zeigt Lockwood (2011) auf, dass auch Studierende oftmals zunächst suchend vorgehen und im Lösungsprozess eine Modellierung bzw. Strukturierung entwickeln, welche die Anwendung von Zählprinzipien oder kombinatorischer Operationen zulässt. Die Verwendung von Formeln ist oftmals erst das Ergebnis vorgenommener Strukturierungen und beschreibt damit das Ende des Lösungsprozesses (vgl. ebd.).

Zunehmende Strukturierung bei der Bearbeitung mehrerer Aufgabenstellungen

Neben der fortschreitenden Schematisierung im Lösungsprozess einer Aufgabe zeigen einige Untersuchungen auf, dass Lernende bereits im Grundschulalter durch die Bearbeitung mehrerer Kombinatorikaufgaben zunehmend strukturierter vorgehen (vgl. English 1991, 1993a; Hoffmann 2003; Martino 1992). English (1993a) weist darauf hin, dass die Zunahme des Strukturierungsgrads dabei insbesondere für ältere Lernende gilt:

> *„With experience in problem solution, older children, in particular became more aware of the problems` underlying structure and how they could modify their inefficient strategies to produce more effective solution methods." (English 1993a, S. 3)*

Hoffmann (2003) zeigt ebenfalls auf, dass Lernende bei der Bearbeitung mehrerer Aufgabenstellungen zunehmend strukturiert vorgehen und bestätigt Englishs Ergebnisse bezüglich der höheren Zunahme an strukturierten Vorgehensweisen bei älteren Lernenden.

2.2.3 Zusammenfassung

Welche Rolle Strukturierungen in den Auflistungsprozessen von Lernenden spielen, ist unter anderem vom Alter der Lernenden abhängig. So zeigen Untersuchungsergebnisse, dass ältere Lernende häufiger vollständig strukturiert alle Lösungen ermitteln oder zumindest zu Teilen ein strukturiertes Vorgehen verwenden (vgl. u. a. Piaget & Inhelder 1975; English 1991; Hoffmann 2003).
Es zeigt sich auch, dass der Grad der Strukturierung nicht nur altersabhängig ist, sondern auch von der Darbietung der Aufgabenstellungen und den gegebenen Aufgabendaten abhängt (vgl. u.a. English 1991; Hoffmann 2003; Vergnaud & Cohen 1969). So verwenden jüngere Lernende bereits früher strukturierte Vorgehensweisen, wenn Materialhandlungen möglich sind. Ebenso nutzen Lernende eher strukturierte Vorgehensweisen, wenn zur Erstellung von Figuren mehr als zwei Elemente zur Verfügung stehen (vgl. Hoffmann 2003).
Eine genauere Betrachtung der Lösungsprozesse von Lernenden zeigt, dass Strukturierungen bei vielen Lernenden bereits beim Erstellen der Figurenmenge eine zentrale Rolle spielen. So erstellen sie diese bereits vollständig oder zu Teilen strukturiert. In Fällen, in denen den Lösungsprozessen keine Strukturierung zugrunde liegt, werden teilweise im Rahmen von Überprüfungshandlungen oder zum Finden weiterer Lösungen Strukturierungen oder Umstrukturierungen der bereits erstellten Objekte vorgenommen. Es sind insofern auch strukturentwickelnde Vorgehensweisen zu beobachten. Das Lösen mehrerer kombinatorischer Auflistungsprobleme führt bereits bei Grundschülern zu einer Zunahme an strukturierten Vorgehensweisen (vgl. u. a. English 1993b; Hoffmann 2003). Ein strukturentwickelndes Vorgehen ist dabei nicht nur für das Lösen von Auflistungsproblemen zu beobachten, sondern charakterisiert auch die Lösungsprozesse von Studierenden, wenn diese Anzahlbestimmungsprobleme lösen (vgl. Lockwood 2011).
Bezüglich der Rolle von Strukturierungen in Anzahlbestimmungsproblemen ist demnach lediglich bekannt, dass auch Studierende oftmals zunächst unsystema-

tisch vorgehen, im Lösungsprozess Strukturierungen entwickeln und daraus Rechnungen zur Anzahlbestimmung ableiten. Welche Rolle Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen von Lernenden in der Grundschule spielen, wurde noch nicht genauer betrachtet. Von besonderem Interesse ist dabei insbesondere bei der mittelbaren Anzahlbestimmung, ob das Erstellen der Lösungen bereits vollkommen strukturiert ist und inwiefern im Laufe des Lösungsprozesses Strukturierungen der Figurenmenge vorgenommen werden.

2.3 Beschreibung von Strukturierungsstrategien

In Kapitel 1 wurde die Bedeutung von Strukturierungen für das Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen hervorgehoben (vgl. 1.2). Die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts (2.2) zeigen weiterhin auf, dass Lernende beim Lösen von Aufzählproblemen auch in der Primarstufe bereits Strukturierungen vornehmen. Um die Strukturierungen von Lernenden im Kontext von Anzahlbestimmungsproblemen allerdings besser nachvollziehen und möglichst auch im Hinblick auf ihre Tragfähigkeit einschätzen zu können, bedarf es eines Beschreibungsmodells.

Lockwood entwickelte (2012; 2013) ein Modell zur Beschreibung der Anzahlbestimmungskonzepte von Lernenden. Dieses Modell impliziert keinen konkreten Ansatz zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien, es lassen sich allerdings erste Folgerungen diesbezüglich ableiten. Zudem gibt es einige Untersuchungen zu den Lösungsstrategien von Lernenden im Kontext kombinatorischer Aufzählprobleme (u.a. English 1993b; Hoffmann 2003; Larivée & Normandeau 1985; Martino 1992; Piaget & Inhelder 1975; Vergnaud & Cohen 1969), welche unter verschiedenen Fokussierungen Beschreibungen der verwendeten Lösungsstrategien vornehmen.

Im Folgenden wird zunächst Lockwoods Modell zur Beschreibung von Anzahlbestimmungskonzepten illustriert, zudem werden Konsequenzen für die Beschreibung von Strukturierungsstrategien abgeleitet (2.3.1). Daran anknüpfend werden die vorhandenen Ansätze zur Beschreibung von Lösungsstrategien bei Aufzählproblemen dargestellt (2.3.2) und abschließend in Hinblick auf ihre Eignung zur Beschreibung von Strukturierungen bei Anzahlbestimmungsproblemen betrachtet (2.3.3).

2.3.1 Strukturierungen bei Anzahlbestimmungsproblemen

Lockwood (2012, 2013) entwickelte im Rahmen ihrer Dissertation ein Modell, um das kombinatorische Denken von Lernenden beim Lösen komplexer Anzahlbestimmungsprobleme besser beschreiben zu können. Sie untersuchte dazu die Anzahlbestimmungsprozesse von 22 Studierenden und leitete aus den empirischen Erkenntnissen ein Beschreibungsmodell ab, in welchem sie die Beziehungen zwischen dem *Anzahlbestimmungsprozess (Counting Process)*, der zur

Anzahlbestimmung erstellten *Rechnung (Formula/Expressio*n) und der *Figurenmenge (Set of Outcomes)* herstellt (vgl. Abb. 2.1):

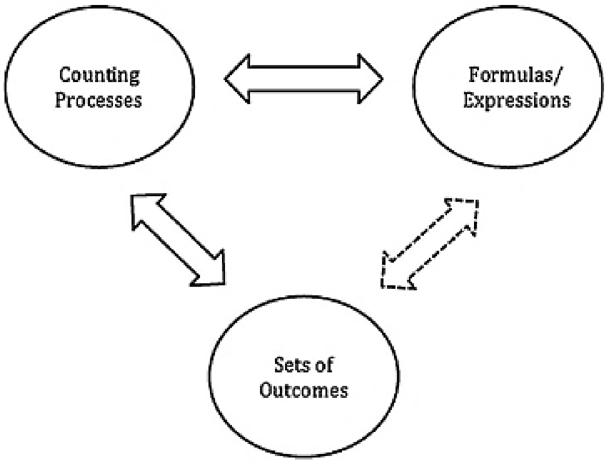


Abb. 2.1 Modell zur Beschreibung des kombinatorischen Denkens von Lernenden (Lockwood 2013, S. 253)

(1) Dem Modell ist zu entnehmen, dass zwischen dem Anzahlbestimmungsprozess (Counting process) und der Figurenmenge (Set of Outcomes) eine wechselseitige Beziehung herrscht. Diese ist von besonderem Interesse für die Betrachtung von Strukturierungsstrategien: So kann die Figurenmenge als Endprodukt des Anzahlbestimmungsprozesses betrachtet werden. Zugleich kann rückwirkend aus der Strukturierung der Figurenmenge auch ein Anzahlbestimmungsprozess abgeleitet werden. Lockwood (2013) zeigt dabei auf, dass die von den Lernenden ermittelte Figurenmenge nicht in jedem Fall der gesuchten Figurenmenge entspricht, sondern in einigen Fällen durch den Anzahlbestimmungsprozess auch eine andere Figurenmenge erstellt wird.

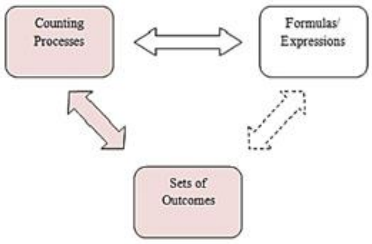


Abb. 2.2 Beziehung zwischen dem Anzahlbestimmungsprozess und der Figurenmenge (Lockwood 2013, S. 254)

(2) Neben der beschriebenen Beziehung wird auch die wechselseitige Beziehung zwischen der *Figurenmenge (Set of Outcomes)* und der *Formel oder Rechnung (Formula/Expression)* (vgl. Lockwood 2012, S.253ff.) dargestellt. So ist es denkbar, dass Lernende zu einer bestimmten Operation direkt eine Figurenmenge assoziieren. Für die Formel für Permutationen ohne Wiederholung n! würde dies beispielsweise bedeuten, dass Lernende damit direkt die Vertauschung einer gegebenen Anzahl von Elementen verknüpfen, ähnlich wie mit der Multiplikation beispielsweise eine räumlich-simultane Anordnung von Objekten in einen Rechteckmuster verknüpft werden kann. Diese Beziehung wurde von Lockwood theoretisch erarbeitet, sie konnte diese jedoch von im Rahmen ihrer Untersuchung aus den Handlungen und Äußerungen der Lernenden nicht rekonstruieren. Insofern fügt sie diese Beziehung als potentiell mögliche (symbolisiert durch gestrichelte Linien) in ihr Modell zur Beschreibung von Anzahlbestimmungskonzepten ein.

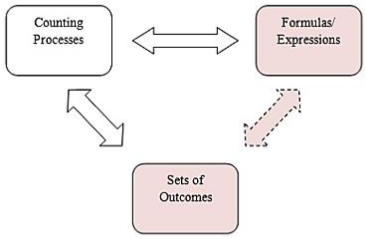


Abb. 2.3 Beziehung zwischen der Figurenmenge und der Formel (Lockwood 2013, S. 254)

(3) Mathematische *Rechnungen (Formulas / Expressions)* stehen zudem in einer wechselseitigen Beziehung zu dem *Anzahlbestimmungsprozesse (Counting process).* Die Rechnungen lassen sich aus der Strukturierung der Anzahlbestimmungsprozesse (Counting processes) ableiten. So beobachtete Lockwood (2013) eine Reihe von Lernenden, die zunächst systematisch Figuren erstellten und auf dieser Grundlage eine Rechnung generierten. Zugleich ist es auch möglich, eine Rechnung zu erstellen und auf der Grundlage dieser den dazugehörigen Anzahlbestimmungsprozess zu rekonstruieren.

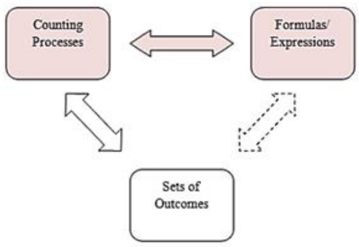


Abb. 2.4 Beziehung zwischen dem Anzahlbestimmungsprozess und der Rechnung (Lockwood 2013, S. 255)

Für die *Beschreibung von Strukturierungsstrategien* ist aus Lockwoods Modell abzuleiten, dass in den Blick genommen werden sollte, in welchem Maße Strukturierungsstrategien den gesamten Anzahlbestimmungsprozess darstellen. Ist dies der Fall können aufgrund der dargestellten Beziehung zwischen dem Anzahlbestimmungsprozess und der Figurenmenge konkrete Beziehungen zwi-

schen der Strukturierungsstrategie und der Figurenmenge hergestellt werden. Zu berücksichtigen ist, dass gegebenenfalls eine den Anzahlbestimmungsprozess vollständig beschreibende Strukturierungsstrategie eine Figurenmenge erzeugt, die nicht der gesuchten Figurenmenge entspricht. Daher sollte die Beschreibung der Strukturierungsstrategien erstens berücksichtigen, ob diese den Anzahlbestimmungsprozess zu Teilen oder vollständig beschreibt und zweitens möglichst auch Bezüge herstellen, ob diese die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt. Wenn, wie in dem Modell dargestellt, Beziehungen zwischen der zu erstellenden Figurenmenge und dem Anzahlbestimmungsprozess zu erkennen sind, bedarf es drittens einer Beschreibung der Strukturierungen, die auch die Eigenschaften der zu erstellenden Figurenmenge berücksichtigt.
Aus der Beziehung zwischen dem Anzahlbestimmungsprozess und der Rechnung sind zudem Konsequenzen abzuleiten, welche sich insbesondere auf die Beziehung zwischen Strukturierungs- und Zählstrategien beziehen. Wenn Zählstrategien sich aus vorgenommenen Strukturierungen genieren lassen, so ist es möglich und sinnvoll diese ebenfalls auf die verwendete Beschreibung von Strukturierungsstrategien zurückzuführen.

Ausgehend von diesen ersten Überlegungen zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien, werden im Folgenden die Beschreibungen von Lösungsstrategien zu Auflistungsproblemen genauer betrachtet.

2.3.2 Strukturierungen bei Auflistungsproblemen

Innerhalb einiger Untersuchungen wird insbesondere in den Blick genommen, ob Lernende Vorgehensweisen verwenden, die den gesamten *Lösungsprozess* oder Teile dieses Prozesses *strukturieren*. Demzufolge lassen sich die beschriebenen Strategien als Strategien zur Strukturierung des Lösungsprozesses deuten und deren Beschreibung kann als Ansatzpunkt zur Beschreibung der Strukturierungsstrategien in Kontext von Anzahlbestimmungsproblemen dienen. Im Folgenden werden diese verschiedenen Ansätze dargestellt.

Die Suche ohne System, nach einem System und mit einem System

In der bereits dargestellten Untersuchung von Piaget und Inhelder (1975) werden die Strategien von Lernenden in eine «Suche ohne System» , eine «Suche nach einem System» und eine «Suche mit einem System» klassifiziert. Die «Suche ohne System» beinhaltet dabei Vorgehensweisen von Lernenden, in denen keine klare Struktur erkennbar ist. Die «Suche nach einem System» beinhaltet Vorgehensweisen, in denen Handlungsmuster erkennbar sind, die das Vorgehen der Lernenden in Teilen strukturieren, bei denen jedoch abschließend Figuren ohne ein systematisches Vorgehen erzeugt werden (vgl. ebd. S. 170). Daraus lässt sich folgern, dass Teile der Figurenmenge strukturiert erstellt wer-

den. Die «Suche mit einem System» beschreibt Vorgehensweisen, mit denen die gesamte Figurenmenge produziert wird: *„Subjects discover a system that no pairing is skipped“* (ebd. S. 170). Die drei Klassen an Vorgehensweisen geben demnach eine Auskunft darüber, inwiefern die Figurenmenge ohne Strukturierung, mit einer teilweisen oder mit einer vollständigen Strukturierung erstellt wurde. In den Ausführungen Piagets und Inhelders sind zudem exemplarisch Strategien dargestellt. Ihre Ausführungen liefern jedoch keine Informationen darüber, welche Strukturierungen die Lernenden im Detail vorgenommen haben und worauf diese zurückzuführen sind. Setzt man die Beschreibungen in Beziehung zu den Ausführungen Lockwoods (2012), so ist besonders zentral, dass die «Suche mit einem System» sich bei Piaget und Inhelder (1975) darauf bezieht, dass die Figurenmenge vollzählig erstellt wird. Anzahlbestimmungsprozesse die vollständig strukturiert sind, jedoch nicht zur gesuchten Figurenmenge führen können demnach nicht als «Suche mit einem System» klassifiziert werden, obwohl sie eine konsequente Strukturierung aufweisen.
Vergnaud und Cohen (1969) griffen in ihrer Untersuchung zu Permutationsproblemen ebenfalls auf diese allgemeine Kategorisierung zurück. Gleiches gilt für die Beschreibungen von Larivée und Normandeau (1985). In beiden Studien werden zusätzlich konkrete Beschreibungen von Strategien vorgenommen, die den Kategorien «Suche ohne System» , «Suche nach einem System» und «Suche mit System» zugeordnet werden. Diesen Ansätzen lassen sich ebenfalls keine Ausführungen zu möglichen konsequenten Strukturierungsstrategien, die die Figurenmenge nicht vollzählig erstellen entnehmen.

Klassifizierung in Niveaustufen

English (1996, S. 94) beschreibt im Rahmen ihrer Untersuchungen mit 4- bis 9-Jährigen zur Lösung von Aufgabenstellungen zum Kreuzprodukt drei Niveaustufen: die «Nonplaning stage» , die «Transitional stage» und die «Odometer stage» . Innerhalb der Niveaustufen berücksichtigt sie, ob Überprüfungshandlungen vorgenommen wurden und inwiefern die Lernenden die jeweilige Strategie durchgängig angewendet haben. Auf der ersten Stufe wenden die Lernenden kein regelgeleitetes Vorgehen an, sondern ermitteln Lösungen über Versuch und Irrtum. Auf der zweiten Stufe entwickeln die Lernenden bereits Ansätze eines regelgeleiteten Vorgehens oder verwenden bereits Strategien, mit denen sie ausschöpfend alle Lösungen finden können. Auf der dritten Stufe greifen sie auf das sogenannte «Tachometerprinzip» zurück. Dieses wird von English als Expertenstrategie hervorgehoben. Es entspricht der Stufung im Baumdiagramm: Ein Element wird so lange an einer festen Position beibehalten, bis es mit allen anderen Elementen kombiniert wurde. Die vollständige Verwendung dieser Expertenstrategie wird von English (1996) als höchstens Fähigkeitsniveau eingestuft. Insofern bezieht sich die von der Autorin vorgenommene Beschreibung nicht nur auf den Grad der Strukturierung, sondern stellt auch einen Bezug zu den fachlichen Vorgehensweisen her. In ihren Ausführungen werden Lösungsstrategien, die zwar die Tachometerstrategie verwenden, die Figurenmenge jedoch nicht vollständig mittels dieser erzeugen als höhere Fähigkeit eingestuft, als andere Strategien, mittels derer die Lernenden die Figurenmenge vollzählig erstellen. Demnach werden bei dieser Kategorisierung nicht die Beziehungen zwischen den Strategien der Lernenden und deren Potential zur Erstellung der vollzähligen Figurenmenge in den Blick genommen, sondern vorrangig die Beziehung zu einem typischen fachlichen Vorgehen betrachtet.

Beschreibung von Handlungsmustern

Ziel der Langzeituntersuchung Martinos und ihrer Kollegen (1992) war die Beobachtung der Entwicklung mathematischer Konzepte von Lernenden beispielhaft an kombinatorischen Problemstellungen. In den Ausführungen von Martino (1992) werden verschiedene Handlungsmuster von Lernenden beschrieben. Die von ihr vorgenommenen Beschreibungen charakterisieren die einzelnen Handlungsmuster der Lernenden und zeigen auf, dass diese über die Bearbeitung verschiedener Problemstellungen über mehrere Jahre zunehmend strukturierter werden. Aufgrund der Zielsetzung ihrer Untersuchung stellte sie bei der Beschreibung der Handlungsmuster anders als Piaget und Inhelder (1975), Vergnaud und Cohen (1969) und Larivée und Normandeau (1985) keine konkreten Bezüge dazu her, ob die Figurenmenge durch das Vorgehen vollständig oder zu Teilen erzeugt wird. Ebenso ist ihren Darstellungen anders als denen von English (1991, 1996) nicht zu entnehmen, inwiefern die Strukturierungen in einer Beziehung zu fachlichen Strategien stehen.

Beziehung zwischen Mikro- und Makrostrategien

In der bereits dargestellten Untersuchung Hoffmanns (2003) zum Vergleich der Problemlösestrategien von Primarstufenschülern mit denen von Sekundarstufenschülern arbeitete diese elementare Bausteine des kombinatorischen Problemlösens heraus. Anders als die bereits beschriebenen Untersuchungen verbindet Hoffmann die Ebene der Beschreibung des gesamten Lösungsprozesses mit der der Betrachtung von Teilprozessen in Form von Strategien. Sie unterscheidet dabei zwischen Mikro- und Makrostrategien. Dabei versteht sie unter Mikrostrategien Handlungsmuster, *„die geeignet sind, um die folgende Kombination bzw. Kombinationen oder zumindest Teile von ihnen zu erstellen“* (ebd., S. 143). Makrostrategien, sind nach Hoffmann *„Regeln für das Erzeugen möglichst aller Kombinationen“* (ebd., S. 143). An anderer Stelle definiert sie Makrostrategien als eine Regel, *„die die Erstellung aller Kombinationen strukturiert“* (ebd., S. 73). Den Ausführungen ist allerdings nicht eindeutig zu entnehmen, ob sich die Erstellung aller Kombinationen auf die vollzählige Erstellung der gesuchten

Figurenmenge bezieht oder auf die vollständige Strukturierung der von den Lernenden erstellten Kombinationen.
Sie zeigt im Rahmen ihrer Untersuchung auf, dass sich die Makrostrategien der Lernenden in einigen Fällen als Kombination mehrerer Mikrostrategien beschreiben lassen. Sie geht dabei davon aus, dass Strategien im Sinne des Strategiekeims nach Stein (1995, 1996) kein bewusst geplantes Verhalten zugrunde liegen muss, obwohl es dennoch ein komplexes regelgeleitetes Handeln darstellt (vgl. Hoffmann 2003, S. 143). Die von Hoffmann vorgenommenen Beschreibungen der Strategien beruhen dabei in Anlehnung an die Vorarbeiten Steins (1995) auf gestalttheoretischen Aspekten. Ihre Beschreibung der Strategien beruht insofern auf gestalttheoretischen Mustern, die sich in den Vorgehensweisen der Lernenden erkennen lassen. Sie berücksichtigt also nicht, ob die Strategien der Lernenden in Beziehung zu den zu erstellenden Figuren stehen.

2.3.3 Zusammenfassung

Bislang liegt noch kein Modell zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien im Kontext von Anzahlbestimmungsproblemen vor.
Lockwoods (2012, 2013) Modell zur Beschreibung des kombinatorischen Denkens bei Anzahlbestimmungsproblemen zeigt Beziehungen zwischen den Strukturierungen und den Zählstrategien sowie der Verwendung kombinatorischer Operationen auf. Es eignet sich insofern, um Beziehungen zwischen den verschiedenen Zugängen zur Anzahlbestimmung zu beschreiben und zeigt zugleich auf welche Beziehungen potentiell zwischen den Strukturierungsstrategien, den Zählstrategien und der Figurenmenge bestehen. Das Modell gibt jedoch keine weiteren Aufschlüsse darüber, wie sich die Strukturierungen des Anzahlbestimmungsprozesses oder der Figurenmenge beschreiben lassen. Diesbezüglich liefern die Beschreibungen der Lösungsstrategien von Lernenden im Kontext von Auflistungsproblemen jedoch Ansatzpunkte. In der nachfolgenden Tabelle sind die in Studien verwendeten Beschreibungsansätze sowie deren Fokussierungen dargestellt:

Klassifizierung und Beschreibung der Strukturierung	**Fokus**	**Studie**
1. Suche ohne System, Suche nach einem System und Suche mit System	Grad der Strukturierung des Lösungsprozesses (in Abhängigkeit vom Alter)	Piaget & Inhelder (1975); Vergnaud & Cohen (1969); Larivée und Normandeau (1985)
2. Niveaustufen	Fähigkeitsstufung der Strukturierungen in Abhängigkeit von einer Expertenstrategie	English (1991, 1993a, 1996)

3. Handlungsmuster	Beziehungen zwischen einzelnen erstellten Figuren	Martino (1992) & Maher et al. (2011);
4. Mikro- und Makrostrategien unter gestalttheoretischen Gesichtspunkten	Beziehung zwischen der Erstellung einzelner Figuren und der Strukturierung des gesamten Lösungsprozesses	Hoffmann (2003)

Tab. 2.5 Beschreibung von Strukturierungsstrategien

Aus dem Modell Lockwoods (2012) zur Beschreibung der Anzahlbestimmungskonzepte von Lernenden ist abzuleiten, dass es zur Beschreibung von Strukturierungen und Strukturierungsstrategien zentral ist, Bezüge zwischen dem Vorgehen, der dadurch erstellten sowie der gesuchten Figurenmenge und deren Eigenschaften herzustellen.
Solche Bezüge werden in den Darstellungen von Piaget & Inhelder (1975) Vergnaud & Cohen (1969), Larivée und Normandeau (1985) und Hoffmann (2003) aufgrund anderer Zielsetzungen jedoch nicht bei Martino (1992) hergestellt. Die Unterscheidung in eine Suche nach oder mit System ebenso Auskunft darüber, inwiefern durch das Vorgehen Teile oder die gesamte Figurenmenge erstellt werden, wie durch die Charakterisierung mittels Mikro- und Makrostrategien. Letztere verbindet zudem die Ebene der Beschreibung des gesamten Lösungsprozesses mit der Beschreibung von Teilen des Lösungsprozesses. Zusätzlich ermöglicht eine solche Beschreibung auch das Herstellen von Beziehungen zwischen teilweise und vollständig strukturierten Lösungswegen verschiedener Lernender. So beschreibt Hoffmann (2003) einige Makrostrategien als Kombination mehrerer Mikrostrategien (eine genauere Betrachtung dieser erfolgt in Abschnitt 2.4.2). Die konkreten gestalttheoretischen Beschreibungen der Strategien berücksichtigen in diesem Ansatz jedoch nicht, in welcher Beziehung diese zu den Eigenschaften der gesuchten kombinatorischen Figuren stehen.
Der Ansatz Englishs (1996) betrachtet vorrangig die Beziehung zwischen einer Expertenstrategie und den Strategien der Lernenden. Diese Beziehung ist zentral, um Anknüpfungspunkte für die unterrichtliche Thematisierung zu finden. Allerdings ist von zentraler Bedeutung, in welchem Maße die Strategien sich eignen die Figurenmenge vollzählig zu erstellen. Da es grundsätzlich möglich ist, Anzahlbestimmungsprobleme über verschiedene Strukturierungen zu lösen, ist eine solche einseitige Betrachtung für die Beschreibung von Strukturierungsstrategien weniger geeignet, wenngleich es sinnvoll erscheint, neben der Beziehung zwischen der Figurenmenge und dem Anzahlbestimmungsprozess auch die Beziehungen zu den fachlichen Vorgehensweisen in den Blick zu nehmen.

Festzuhalten ist dementsprechend, dass es verschiedene Zugänge zur Beschreibung der Strategien von Lernenden gibt, aus denen sich erste Ansätze zur Beschreibung von Anzahlbestimmungsproblemen ableiten lassen. Diese eignen sich jedoch verschiedener fehlender Elemente nicht vollständig, um die Strukturierungsstrategien bei Anzahlbestimmungsproblemen unter Berücksichtigung der herausgearbeiteten Aspekte zu beschreiben. Aus dem Ansatz Lockwoods (2012) wird abgeleitet, dass es wesentlich ist, die Beziehung zwischen dem Anzahlbestimmungsprozess oder gegebenenfalls der Rechnung und der gesuchten Figurenmenge herzustellen. Sinnvoll erscheint es zudem Beziehungen zwischen verschiedenen Strategien beschreiben zu können, wie es in dem Ansatz der Mikro- und Makrostrategien von Hoffmann (2003) der Fall ist. Auf der Basis des Ansatzes von English (1991) ist zudem zu überlegen, wie es möglich ist Beziehungen zwischen den Strukturierungsstrategien der Lernenden und fachlichen Strategien herzustellen. Es stellt sich die Frage, wie sich auf der Grundlage dieser Aspekte die Anzahlbestimmungsstrategien von Lernenden beschreiben lassen.

2.4 Strukturierungsstrategien

Als Ergebnis des ersten Kapitels wurde unter anderem herausgestellt, dass das Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen über das strukturierte Erstellen der Figurenmenge unter propädeutischen Gesichtspunkten von besonderer Bedeutung ist (vgl. 1.4). Es stellt sich insofern die Frage, welche Kenntnisse bezüglich der Strukturierungsstrategien von Lernenden, insbesondere vor der Thematisierung im Unterricht vorliegen. Unter dem Begriff „Strukturierungsstrategie“ werden dabei im Rahmen dieser Untersuchung alle Vorgehensweisen von Lernenden zusammengefasst, die entweder die Strukturierung des Erstellens der Lösung, die räumliche Strukturierung der Figurenmenge oder die gedanklich vorgenommene Strukturierung der Figurenmenge beschreiben. Eine durch die Strukturierungsstrategie erzeugte Strukturierung kann die Figurenmenge teilweise oder vollständig darstellen.
Für das Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen gibt es im Bereich der Primarstufe diesbezüglich kaum Untersuchungsergebnisse. So wird in den meisten Studien nicht nach der Anzahl aller Figuren gefragt, sondern konkret danach, welche Möglichkeiten es gibt. Entsprechend werden neben den Ergebnissen zu Anzahlbestimmungsproblemen auch die Resultate zum Lösen von Aufzählproblemen mit einbezogen. Im Fokus der Studienstehen dabei Strategien zum Erstellen der Figurenmenge. Insofern beschreiben diese Strategien, inwiefern Teile oder der gesamte Lösungsprozess strukturiert werden. In einigen Fällen werden neben den Strategien zum Erstellen der einzelnen Figuren auch Umstrukturierungen sowie Überprüfungshandlungen berücksichtig, in denen die Strukturierung der bereits erstellten oder teilweise erstellten Figurenmenge vorgenommen wird.

Die Ergebnisse der Untersuchungen zu den Strukturierungsstrategien bei Auflistungsproblemen werden im Folgenden mit Blick auf die Erkenntnisse bezüglich des Einflusses verschiedener Aufgabenvariablen in Abschnitt 2.1 und – soweit wie möglich – in Abhängigkeit von den Eigenschaften der zur erstellenden Figurenmenge (Aufgabenvariablen „kombinatorische Figur“ und „Anzahl der zu kombinierenden Elemente“) dargestellt. Eine Strukturierung hinsichtlich der zugrunde liegenden Modellvorstellungen entfällt, da die Untersuchungen fast ausschließlich Problemstellungen betrachten, die vorrangig den Selektionsgedanken innehaben.

2.4.1 Strategien bei verschiedenen Grundfiguren

In diesem Abschnitt wird in den Blick genommen, welche Informationen bezüglich der Vorgehensweisen bei speziellen kombinatorischen Figuren vorliegen.

2.4.1.1 *Kombinationen ohne und mit Wiederholung*

Hinsichtlich der Strategien bei Kombinationsaufgaben liegen bislang nur wenige Erkenntnisse vor. Die folgenden Darstellungen basieren auf den bereits beschriebenen Untersuchungen Piagets und Inhelders (1975).
Die Lernenden erhielten im Rahmen von Einzelinterviews farbige Spielsteine und den Auftrag, alle möglichen verschiedenen Paare aus drei, vier oder fünf Spielsteinen zu bilden. In einigen Fällen war dabei die Auswahl gleichfarbiger Spielsteine erlaubt, in einigen anderen Fällen nicht.
Inhelder und Piaget beschreiben zur Lösung von Kombinationsproblemen ohne und mit Wiederholung einige Muster und Regelmäßigkeiten, die den Lösungsprozess vieler Lernender charakterisieren. Bei Lernenden, die auf der «Suche nach einem System» waren, registrierten die Autoren folgende Muster und Regelmäßigkeiten:

Strategie[12]	**Beschreibung**
«Juxtaposition of pairs»	Die Kinder nutzten bei den ersten beiden Paaren alle Farben: AB, CD
«Crossed juxapositions 1»	Die Kombinationen sind insofern verbunden, als dass eine Farbe in der neuen Kombination wieder genutzt wird, d.h. es werden Kreuzungen erstellt: AB, BC, CD, DE und EF.

[12] Piaget und Inhelder beschreiben die verschiedenen Handlungsmuster, verwenden dazu jedoch keine Namen. Um die Strategien im Folgenden besser mit den Strategien anderer Untersuchungen vergleichen zu können, wurden die von Piaget und Inhelder beschriebenen zentralen Charakteristika als Strategienamen verwendet.

«Crossed juxa-positions 2»	Die Kinder bilden zunächst Kombinationen gemäß des zweiten Systems, um dann bei den folgenden Kombinationen eine Farbe jeweils aus der darauf folgenden Kombination zu übernehmen: AB, BC, CD, DE, EF, AC, BD, CE, DF
«Symmetrical pairs»	Die Lernenden verwenden zur Lösungsfindung verschiedene Symmetrien AB, FE BC, ED, oder AB; AC; AD, AE; AF, FE, FD, FC usw.
«Odometerstra-tegy»	Die Lernenden halten ein Element konstant, wenden das Vorgehen jedoch nicht konsequent an. AB, AC, AD, AE, AF; BC, BD; BE, BF

Tab. 2.6 «Suche nach einem System» bei Kombinationen ohne Wiederholung (Piaget & Inhelder 1975, S. 166ff.)

Zur Darstellung der Lösungen nahmen sie eine altersabhängige Stufung der Vorgehensweisen der Lernenden vor und beschreiben erst bei Lernenden im Stadium der formalen Operationen für Kombinationen strukturierte Vorgehensweisen. Eine mögliche Ursache sehen sie in den besonderen Eigenschaften der kombinatorischen Figur:

> *„Why must we then wait for the formal level for such a system to be discovered? The answer is apparently that these correspondences are not independent of one another in the case of combinatoric operations, but that the do constitute a unique system of such a sort, that what is done first determines what follows. To construct seriation or correspondence it is enough to repeat the same operation a certain number of times and to invert it, taking into account all the terms. On the contrary, however to construct a system of all the combinations of pairs possible with n terms (Piaget & Inhelder 1975, S. 172).*

Bezogen auf die «Suche mit System» beschreiben sie dabei exemplarisch drei Beispiele für systematische Vorgehensweisen:

Strategie	**Beschreibung**
«Laus Strategie» (12,3 Jahre)	AB, CD, AC, BD, AD and BC Are you guessing? Not at all. I looked for four of each and saw that three were enough.
«Stos Strategie» (10,7 Jahre)	Sto begins with six colors pairs first AB; AC, AD, AE,AF, FE, FD; FC; FB, BC; BD; BE,ED, EC, EB (which he removes) and finishes empirically. I.: Do you want to start again to see if you can do better? S.: then puts together AB, AC; AD, AE, AF; BC; BD; BE, BF CD, CE, CF, DE, DF, EF

«Cads Strategie» (11,2 Jahre)	CAD immediately finds a system for associating A with all the rest, then B with the following colors and C in the same way. C.: Five reds, fives blues, five greens. Because there are five piles, no six, but we put each one with all the others.

Tab. 2.7 „Die Suche mit einem System" bei Kombinationen (Piaget & Inhelder 1975, S. 167ff.)

Ein Vergleich der beschriebenen Vorgehensweisen zeigt große Gemeinsamkeiten in den Strukturierungen. So lassen sich sowohl bei der «Suche nach einem System» als auch bei der «Suche mit einem System» Strukturierungen identifizieren, die Piaget und Inhelder als «Juxtaposition» bezeichnen. Zugleich zeigte sich auch, dass bei der «Suche nach einem System» und bei der «Suche mit System» Strukturierungen im Sinne der «Odometerstrategy» («Tachometerprinzip») vorgenommen wurden.

2.4.1.2 *Permutationen ohne und mit Wiederholung*

Piaget und Inhelder (1975) betrachteten im Rahmen ihrer Untersuchung auch, wie Lernende Permutationsprobleme ohne und mit Wiederholung lösen. Dabei beobachteten sie jedoch nicht, welche Lösungswege die Lernenden intuitiv vornehmen, sondern beeinflussten das Vorgehen der Lernenden vorab. Im Rahmen von Interviews erhielten die Lernenden zunächst zwei Spielfiguren. Ihnen wurde vorgeführt, dass es möglich ist, diese auf zwei Weisen nebeneinander anzuordnen. Die Lernenden erhielten den Auftrag, die gleiche Handlung mit zwei verschiedenfarbigen Spielsteinen durchzuführen. Anschließend erhielten sie eine dritte Figur und sollten zunächst alle möglichen Anordnungen der drei Figuren vornehmen, anschließend alle möglichen Anordnungen von vier. Hinsichtlich der Permutationen stellten Piaget und Inhelder (1975) fest, dass diese später als die anderen Operationen erfolgreich systematisch gelöst werden. Sie beschreiben eine Reihe von Vorgehensweisen der Lernenden exemplarisch, um die Zuordnung zu den Klassen nachvollziehen zu können. Sie nehmen jedoch bezüglich der Strategien der Lernenden keine Kategorisierungen vor. Im Rahmen anderer Untersuchungen wurden Problemstellungen zu Permutationen ohne Wiederholung in den Blick genommen, nicht jedoch zu Permutationen mit Wiederholung. Insofern liegen bezüglich der Strukturierungsstrategien bei Permutationen mit Wiederholung bisher keine Ergebnisse vor.

Vergnaud und Cohen (1969) stellten fest, dass Lernende bereits im Alter von 8 Jahren fähig sind, alle gesuchten Permutationen ohne Wiederholung systematisch zu erstellen. Die 138 Lernenden im Alter von 7,5 bis 9,5 Jahren sollten ebenfalls Permutationen aus drei bzw. vier farbigen Elementen ermitteln. Im Gegensatz zu den Untersuchungen Piagets erhielten sie die Aufgabenstellungen schriftlich. Für Permutationen aus drei Elementen beschreiben die Autoren drei systematische Vorgehensweisen, die anderen Vorgehensweisen ordnen sie der Klasse «procedure sans systeme» zu:

Strategie	**Beschreibung**	**Beispiel**
«Procedure de type alphabetique » (Alphabetische Strukturierungsstrategie)	Zwischen den drei Elementen wird eine Ordnung im Sinne des Alphabets hergestellt. Die Anordnung wird entsprechend der lexikographischen Darstellung im Wörterbuch vorgenommen.	BCT, BTC, CBT CTB, TBC, TCB;
«Symétrie » (Symmetriestrategie)	Ein Element wird konstant gehalten, während sich die anderen beiden Elemente symmetrisch verändern.	B**C**T, T**C**B; T**B**C, C**B**T; B**T**C, C**T**B;
«Procedure circulaire» (Rotationsstrategie)	Die drei Elemente rotieren jeweils nur um eine Position, wobei sich die Reihenfolge nicht verändert.	BTC, CBT, TCB;

Tab. 2.8 Strategien bei Permutationen ohne Wiederholung aus drei Elementen (vgl. Vergnaud & Cohen 1969)

Bei der Erweiterung der Aufgabenstellung auf vier Elemente identifizierten Vergnaud und Cohen (1969) zwei systematische Handlungsmuster, die anderen wurden, wie bei den Aufgaben zu drei Elementen, als «procedure sans systeme» klassifiziert:[13]

Strategie	**Beschreibung**	**Beispiel**
«1er constante» Konstanz des ersten Elements	Das erste Element wird konstant gehalten, während mit den anderen drei Elementen die sechs mögl. Permutationen erstellt werden.	**B**TCY, **BCTY**, **B**CYT, **B**YCT, **B**YTC, **B**TYC;
«Procedure trous» Lückenstrategie	Eine Permutation mit drei Elementen wird erstellt und das vierte Element durchläuft alle möglichen Positionen.	**B**CTY, C**B**TY, CT**B**Y, CTY**B;**

Tab. 2.9 Strategien bei Permutationen ohne Wiederholung aus vier Elementen (vgl. Vergnaud & Cohen 1969)

Ein Vergleich der Vorgehensweisen der Lernenden zur Lösung von Permutationsproblemen mit drei und vier Elementen zeigt Zusammenhänge zwischen den Strategien der Lernenden auf. So werden bei den beiden ersten Strategien bei den dreidimensionalen und der ersten Strategie der vierdimensionalen Permutationen immer ein Element sowie dessen Position festgehalten, bis alle Möglichkeiten mit dem Element an dieser Stelle gefunden wurden.

---

13 Vergnaud und Cohen (1969) legen nicht offen, wann sie ein Vorgehen als «procedure sans systeme» klassifizieren.

Hinsichtlich der Vorgehensweisen von 12- bis 14-jährigen Lernenden bei Permutationsaufgaben ohne Wiederholung beobachteten Larivée und Normandeau (1985) ähnliche Strategien. Die 90 Lernenden erhielten – in Anlehnung an das Versuchsdesign Piagets – in Einzelinterviews die Aufgabe, aus drei bzw. vier verschieden farbigen Spielsteinen alle möglichen Permutationen herzustellen. Neben dem unsystematischen Herantasten («Tatonnement non-systematique») einiger Lernender, identifizierten sie fünf Strategien zur Lösungsfindung (vgl. Tab. 2.10), die sie als «Tatonnement systematique» (Systematisches Herantasten) einstufen.

Strategie	Beschreibung	Beispiel
«Strategie de la constante sur colonne» (Positionsstrategie 1)	Ein Element wird an einer Position beibehalten, bis alle Figuren mit dem Element an der festen Position erstellt wurden.	**A**BC, **A**CB; **B**AC, **B**CA;
«Strategie de la constante sur deux colonnes» (Positionsstrategie 2)	Zwei Elemente werden an festen Positionen beibehalten, bis alle Figuren mit diesen Elementen an den festen Positionen erstellt wurden.	**AB**CD, **AB**DC; **AC**BD, **AC**DB;
«Zigzag» (Zick-Zackstrategie)	Eine Farbe durchläuft alle möglichen Positionen, während die anderen Farben ihre Reihenfolge beibehalten. Anschließend durchläuft die Farbe noch einmal alle Positionen, während die anderen beiden Farben in umgekehrter Reihenfolge angeordnet sind.	**A**BC, B**A**C, BC**A;** **A**CB, C**A**B, CB**A;**
«Strategie de la diagonale» (Diagonalstrategie)	Die erste Farbe durchläuft alle Positionen, wie bei der Zickzackstrategie. Anschließend werden auf allen Positionen die Farben geändert.	**A**BC, B**A**C, BC**A;** **B**CA, C**B**A, CA**B;**
«Changement de position» (Positionswechselstrategie)	Ein neues Element wird vor die Permutationen, die aus einem Element weniger als den gegebenen gebildet werden können, gesetzt und durchläuft anschließend jede mögliche Position bei den verschiedenen Permutationen.	BC, CB → **A**BC, **A**CB; B**A**C, C**A**B; BC**A**, CB**A;**

Tab. 2.10 Strategien bei Permutationen ohne Wiederholung zu drei und vier Elementen (Larivée & Normandeau 1985)

Die «Strategie circulaire» entspricht der von Vergnaud und Cohen (1969) beschriebenen «Procedure circulaire». Die «Strategie de la constante sur colonne» und die «Strategie de la constante sur deux colonnes» entsprechen in etwa der beschriebenen Strategie «1er constante». Es geht ebenfalls darum, dass ein festes Element an einer festen Position beibehalten wird. Bei Letzterer werden sogar zwei Elemente und deren Positionen beibehalten. Neben diesen Strategien identifizierten sie drei weitere. Davon weist die Strategie «Changement de position» große Ähnlichkeiten zur Strategie «Procedure trous» auf. Ein Vergleich mit den von Piaget und Inhelder beschriebenen Strategien zeigt, dass die von Vergnaud und Cohen (1969) sowie Larivée und Normandeau (1985) dargestellten Strategien «1er constante» und «Strategie de la constante sur une colonne ou sur deux colonnes» dem Tachometerprinzip entsprechen. In den bislang dargestellten Strategien zum Lösen von Permutationsproblemen werden dabei keine Bezüge hergestellt, ob mittels der Strategie die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt wurde.

Lack (2009) betrachtete die mathematische Begabung von Erst- und Zweitklässlern. Dazu verwendete sie unter anderem zwei kombinatorische Problemstellungen zu Permutationen ohne Wiederholung im Kontext des Bauens von Türmen sowie eine Problemstellung zu Variationen ohne Wiederholung. Anders als in den bereits dargestellten Studien erhielten die Lernenden im Rahmen dieser Untersuchung den Auftrag, die Anzahl aller Lösungen zu bestimmen. Die 23 Lernenden bekamen die Aufgabe, aus drei bzw. vier verschiedenfarbigen Bausteinen alle möglichen drei bzw. vierstöckigen Türme zu erstellen. In Anlehnung an das Konzept Steins und Hoffmanns (vgl. 2.3) klassifiziert sie die Strategien der Lernenden in drei Kategorien:

1. Kein erkennbares Nutzen aufgabenspezifischer Strategien
2. Anwenden eines Strategiekeims bzw. einer Mikrostrategie
3. Anwenden einer Makrostrategie

Hinsichtlich des Anwendens einer Mikrostrategie stellt sie Strategien von Lernenden dar, in denen Ansätze der «Gegenpaarbildung», des «Tachometerprinzips», der «Lösungssuche in Phasen» sowie der «Umwendung» und «Orientierung an Mustern» zu erkennen sind. Neben diesen Mikrostrategien beschreibt sie die Anwendung der drei Makrostrategien: «Gegenpaarbildung», «Tachometerprinzip» und «Lösungssuche in Phasen» (vgl. ebd. S. 188ff.). Die Mikrostrategie «Gegenpaarbildung» unterscheidet sich von der namensgleichen Makrostrategie in der konsequenten Anwendung des Vorgehens, diese ist bei der Mikrostrategie nicht gegeben. Lack weist bezüglich des Einsatzes von Makrostrategien darauf hin, dass diese im Rahmen der Untersuchung von den Lernenden häufig nicht durchgängig oder konsequent angewendet wurden, so dass in vielen Fällen die Figurenmenge nicht vollzählig mittels der Makrostrategien ermittelt wurde. Im Folgenden werden die Makrostrategien dargestellt. Auf eine Darstellung der Mikrostrategien wird an dieser Stelle verzichtet, da sich die ersten drei identifizierten Mikrostrategien auf die Makrostrategien beziehen und eine ausführliche Darstellung der von Hoffmann (2003) identifizierten Mikrostrategien an späterer Stelle erfolgt (vgl. 2.4.2).

<table>
<tr><th>Strategie</th><th>Beschreibung</th><th>Beispiel</th></tr>
<tr><td>«Gegenpaarbildung[14]»</td><td>Vorgehensweise, „die darauf ausgerichtet ist, jeden neuen Turm in der Weise zu gestalten, dass alle Farben eine andere Position haben als im vorherigen Turm.“ (Hoffmann 2003, S. 187)</td><td>Mias vollständige «Gegenpaarbildung»:
<table>
<tr><td>rot</td><td>blau</td><td>gelb</td><td>blau</td><td>gelb</td><td>rot</td></tr>
<tr><td>gelb</td><td>rot</td><td>blau</td><td>gelb</td><td>rot</td><td>blau</td></tr>
<tr><td>blau</td><td>gelb</td><td>rot</td><td>rot</td><td>blau</td><td>gelb</td></tr>
</table>
Hannahs[15] vollständige «Gegenpaarbildung»
<table>
<tr><td>gelb</td><td>blau</td><td>rot</td><td>gelb</td><td>rot</td><td>bla</td></tr>
<tr><td>blau</td><td>gelb</td><td>gelb</td><td>rot</td><td>blau</td><td>rot</td></tr>
<tr><td>rot</td><td>rot</td><td>blau</td><td>blau</td><td>gelb</td><td>gel</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>«Tachometerprinzip»</td><td>Die Farben von einer oder von zwei Ebenen werden so lange konstant gehalten, bis die Elemente auf der bzw. auf den verbleibenden Ebenen alle möglichen Farben durchlaufen haben.</td><td>Dinas vollständiges «Tachometerprinzip»
<table>
<tr><td>gelb</td><td>blau</td><td>rot</td><td>gelb</td><td>rot</td><td>bla</td></tr>
<tr><td>blau</td><td>gelb</td><td>gelb</td><td>rot</td><td>blau</td><td>rot</td></tr>
<tr><td>rot</td><td>rot</td><td>blau</td><td>blau</td><td>gelb</td><td>gel</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>«Lösungssuche in Phasen»</td><td>„Verweilen bei verschiedenen Strategien für längere Phasen des Lösungsprozesses“ (ebd., S. 188).</td><td>Ginas „rote Treppe“:
<table>
<tr><td>gelb</td><td>blau</td><td>rot</td><td>rot</td><td>gelb</td><td>blau</td></tr>
<tr><td>blau</td><td>rot</td><td>gelb</td><td>blau</td><td>rot</td><td>gelb</td></tr>
<tr><td>rot</td><td>gelb</td><td>blau</td><td>gelb</td><td>blau</td><td>rot</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Tab. 2.11 Strategien bei Permutationen ohne Wiederholung aus drei Bausteinen (Lack 2009, S. 191f.)

Den von Lack (2009) verwendeten Beispielen ist zu entnehmen, dass die vorgenommene Klassifizierung mittels der von Hoffmann benannten Strategien für das Lösen von Permutationsproblemen scheinbar nicht ganz unproblematisch

[14] Lack (2009, S. 187) zeigt auf, dass die vollständige «Gegenpaarbildung» in den Arbeiten Steins (1995) auf die Lösung zweifarbiger Problemstellungen ausgerichtet war und bei der Übertragung der Strategie auf Permutationsproblemen aus drei und vier Bausteinen Brüche auftreten müssen, da ansonsten nicht alle Lösungen mittels dieser Strategie gefunden werden können.

[15] Lack stellt jeweils die Schülerdokumente der Lernenden dar, zur besseren Vergleichbarkeit wird hier auf eine Abbildung der Schülerdokumente verzichtet.

ist. So wird nicht eindeutig ersichtlich, wie sich die Strategien voneinander unterscheiden lassen. Hannahs Darstellung der Lösungen lässt sich auch als «Tachometerprinzip» deuten, bei dem der untere Stein jeweils beibehalten wird, bis alle Möglichkeiten mit diesem gefunden wurden. Ebenso ist den Schülerdokumenten nicht zu entnehmen, weshalb Mias Vorgehen der «Gegenpaarbildung» jedoch nicht auch zusätzlich der «Lösungssuche in Phasen» entspricht. Ein Vergleich ihres Vorgehens mit Ginas Strategie „rote Treppe“ zeigt auf, dass ihre Vorgehensweisen sich lediglich bezüglich des Beginns der roten Treppe unterscheiden. Insofern wäre es naheliegend, dass beide Strategien als eine Kombination aus der «Gegenpaarbildung» und der «Lösungssuche in Phasen» eingestuft werden, dies geschieht jedoch nicht. Anzunehmen ist, dass die Einordnung der Strategien, insbesondere auch auf der Grundlage der Äußerungen der Lernenden erfolgte und diese in den Darstellungen nicht ersichtlich werden. Die nicht ganz eindeutige Zuordnung zeigt jedoch auch auf, dass die vorgenommene Klassifizierung für Permutationsprobleme weniger gut geeignet ist.
Ein Vergleich der Strukturierungen der Figurenmengen durch die Lernenden zeigt Gemeinsamkeiten zu den Ergebnissen der bereits dargestellten Untersuchungen auf. Ebenso wie in den vorangegangenen Studien beobachtete Lack (2009) Strukturierungen im Sinne des «Tachometerprinzips». Zudem weist Mias «Gegenpaarbildung» große Gemeinsamkeiten zu der «Lückenstrategie» von Vergnaud und Cohen (1969) sowie zu der «Zickzackstrategie» und der «Diagonalstrategie» von Larivée und Normandeau (1985) auf, in allen Fällen durchläuft ein Element alle Positionen.

Halani (2012) untersuchte in Interviews die Lösungsstrategien von vierzehn Studierenden bei der Lösung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Bezogen auf die Lösung von Permutationsproblemen beschreibt Halani zwei Varianten des klassischen «Tachometerprinzips», welches Piaget und Inhelder (1975) bereits bei der Lösung von Kombinationsproblemen beschreiben. Sie unterscheidet zwischen «Standard Odometer» und «Wacky Odometer»:

> *“In the Standard Odometer way of thinking, one would first hold an item constant in the first position and then systematically (and possibly recursively) vary the other items. Following this, the item in the first position is changed and the process repeats until all possible items for the first position are exhausted.*
> *In the Wacky Odometer way of thinking, an item is still being held constant. In contrast to the Standard way of thinking however, the item being held constant is not necessarily in the first position. Here, the student would hold one item, say *, constant in a given position and systematically vary items for the other positions. The position of * would then change and the process would repeat.” (ebd., S. 65)*

Sie veranschaulicht diese Variante des Tachometerprinzips an dem Vorgehen von Jack (Halani 2012, S. 63ff.):

> *„Jack engaged in the Wacky Odometer way of thinking when he was attempting to find the number of permutations of the items {A, B, C}: “So when A is up front, there’s two options [moves the cards to create these different permutations]. If A is in the middle [moves the A card to the second position], there’s two options.*
> *That’s two – four. If A is in back [places the A card in the third position], there’s two options. Six.”*
>
> *“Jack’s explanation indicates that he chose the item A to hold constant in the first position. He then cycled through the possibilities for the items in the other positions, physically doing so in this case. He then changed the position of A, and cycled through the possibilities for the other positions, and repeated a third time. He anticipated that there would be 2 ways to position the remaining items when A was in the second and the third positions. Jack had trouble engaging the same way of thinking for permutations of 4 distinct objects, and instead reverted to engaging in the Standard Odometer way of thinking.”*

Ein Vergleich der Vorgehensweisen bei Aufgaben zu Kombinationen mit und ohne Wiederholung und bei Aufgaben zu Permutationsproblemen zeigt, dass in beiden Fällen die Strategie des Tachometerprinzips verwendet wird, die Strategien sich ansonsten jedoch nicht überschneiden. Diese Erkenntnis ist insofern wenig verwunderlich, als schon Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) darauf hinweisen, dass Lernende in der Regel Strategien verwenden, die den durch die Aufgabenstellungen suggerierten Handlungsabläufen entsprechen. Die beschriebenen Aufgaben zu Kombinationen erfordern die Auswahl und Zusammenstellung von Objekten. Die Permutationsprobleme hingegen erfordern eine Veränderung der Anordnung der Reihenfolge der Objekte, wobei es nicht notwendig ist, Auswahlen zu treffen.

2.4.1.3 *Variationen ohne und mit Wiederholung*

In der zweiten Untersuchung Piaget und Inhelders (1975) zur Lösung von Variationsproblemen erhielten die Lernenden Spielkarten und den Auftrag aus drei, vier, fünf und mehr Spielkarten jeweils alle möglichen zweistelligen Zahlen zu legen. In einigen Fällen waren dabei Wiederholungen zugelassen, in anderen nicht. Ebenso wie bei den Permutationen und Kombinationen nehmen die Autoren eine altersabhängige Stufung der Vorgehensweisen der Lernenden vor. Bezogen auf die «Suche nach einem System» beschreiben sie dabei exemplarisch die Strategien von Lernenden als Beispiele für systematische Vorgehensweisen. Sie stellen heraus, dass die meisten Schüler zunächst mit Versuch- und Irrtumsstrategien beginnen, dann jedoch in vielen Fällen erkennen, dass sie die natürliche Ordnung der Ziffern nutzen können (vgl. Piaget & Inhelder 1975). Die nachfolgenden Transkriptausschnitte (vgl. Tab. 2.12) zeigen exemplarisch auf, welche Strategien Piaget und Inhelder als «Suche nach einem System» klassifizieren. Die Ausschnitte zeigen dabei Lösungsstrategien von Lernenden zu einem Variationsproblem mit Wiederholung, bei dem die Lernenden alle möglichen zweistelligen Zahlen aus drei verschiedenen Ziffern bilden sollten.

Strategie	**Beschreibung**	
Bons Strategie (6,10)	B.:	One after the other, makes 13,12,11,32,23,31,22, und 33
	I.:	Can you make anymore?
	B.:	Yes and he makes 21, then 31 which he removes because it was already there
Des Strategie (7,10)	D.:	11, 21, 23, 31, 32,…
	I.:	Do you know how many there will be in all?
	D.:	There will be maybe … (he adds 22…) eight like that.
	D.:	There 11, 12, 13. Oh and I forgot 21, 23 and 22 is missing. And 31, 32, 33. That makes 9.
	I.:	What if I let you use the digit 4?
	D.:	Then I could make 41,42,43,44.
	I.:	Those are the only ones?
	D.:	We could put the 4 in the different positions: 14,24,34,44
Mets Strategie (8,10)	M.:	Three, no more than that. Six I believe. He makes one after the other 12, 21, 33, 11, 22, 23, 32, 13 und 31 and keeps looking around to see, if he has made them all.
	I.:	If you think about it, can you know if you made all there are?
	M.:	No, oh, yes, I can look to see if there are 1, 2 and 3 (in equal number) and if we made all the pairs.

Tab. 2.12 «Suche nach einem System» bei Variationen (vgl. Piaget & Inhelder 1975, S. 201ff.)

Zu berücksichtigen ist dabei, dass sie nur Beispiele zu Variationen mit Wiederholung zeigen. Eine genauere Betrachtung der Strategien zeigt Handlungsmuster auf, welche teilweise Gemeinsamkeiten zu den bereits dargestellten Strategien aufweisen, jedoch zu großen Teilen noch nicht benannt wurden. So hält Bon zunächst im Sinne des «Tachometerprinzips» die Ziffer „1" konstant an der Einerstelle, anschließend verwendet er jedoch andere Strategien. Dem Vorgehen von De ist zu entnehmen, dass dieser immer ein Element aus der bereits erstellten Figur beibehält, um die nächste Figur zu erzeugen. In Mets Äußerung lassen sich eine Vertauschung der Anordnung der Elemente identifizieren sowie die Berücksichtigung der Anzahl der gleichen Elemente in den Objekten.

Bezogen auf die «Suche mit System» beschreiben Piaget und Inhelder (1975, S. 206ff.) ebenfalls Beispiele für systematische Vorgehensweisen:

Strategie	**Beschreibung**
Gers Strategie (10,8)	*We begin with only two elements 1 and 2. Ger finds immediately 12, 21, 11, 22.* I.: And can you say what we will get with three elements before we G.: try? I.: Six. G.: Why? I.: There are three different digits and we can invert them two times G.: Try it. There (He makes 13, 31; 12, 21, 32, 23, 11, 22, and 33) That I.: makes nine. G.: Can we put them in a different arrangement? Yes (he orders them differently based on series of inversions).
Alas Strategie (12,7)	*A. shows from the beginning the four possible pairs of two digits.* I.: And what will you get with 1, 2 and 3? A.: A. makes 11, 22, 33, 12, 13, 21, 23… I.: How many will it be in all? A.: Twelve I.: Why A.: A series like that with 1 and with 2 etc. and three times four is twelve. Oh no, eighteen, three piles of six, then that makes nine numbers. I.: Now try it with four digits A.: makes 11, 12, 13, 14, 22, 23, 21, 24, 33, 31, 32, 34, 44, 43, 42, 41 I.: Is that all? A.: Yes I started with all the numbers beginning with 1, then beginning with 2, etc.
Mats Strategie (12,11)	I.: What will it make with three digits? M.: It will give six numbers I.: Why six? M.: First we can make the numbers 11, 22, and 33, then 12, and 13, 21, 23, 31 and 32. That are 9 possibilities. I.: With four numbers? M.: There will be twelve I.: Why? M.: Because four times four makes twelve. Oh no, sixteen. I.: Why four times four? M.: With three counters there are nine possibilities, thus with four there are sixteen. I.: But why? M.: Each digit can go with each of the four digits. The 1 with the 1, with the 2 with the 3 and with the 4, etc.

Gras		*G. finds empirically the nine arrangements of three digits in*
Strategie	I.:	*pairs.*
(13,3)	G.:	What if I give you four digits?
	I.:	I would have sixteen
	G.:	Why?
		(he laughs) Since with one digit and these three others we can make four combinations and then the same thing with then second digit, etc. that will make sixteen in all.

Tab. 2.13 «Suche mit System» bei Variationen (Piaget & Inhelder 1975, S. 206ff.)

Die von Piaget und Inhelder dargestellten Lösungswege der Lernenden weisen verschiedene Systematiken auf. Eine konkretere Beschreibung bzw. Klassifizierung der Strategien und Strukturierungen der Lernenden wird jedoch nicht angegeben. Eine genauere Betrachtung zeigt aber, dass einige Lernende das «Tachometerprinzip» zur Lösung verwenden (beispielsweise Mat und Gra bei vier Ziffernkarten). Die vorgenommene Tachometerstrukturierung wird insbesondere in Mats Argumentation deutlich: „Each digit can go with each of the four digits. The 1 with the 1, with the 2 with the 3 and with the 4, etc.” Die meisten der strukturierten Vorgehensweisen wie beispielsweise die von Ger, die von Ala und die von Mat bei drei Ziffernkarten lassen sich zwar keiner der in anderen Untersuchungen beschriebenen Strategien eindeutig zuordnen, es zeigen sich jedoch große Gemeinsamkeiten: Alas und Mats Strategien bei drei Ziffernkarten lassen sich beispielsweise als eine «Lösungssuche in Phasen deuten». Sie bildet zunächst zweistellige Zahlen aus zwei gleichen Ziffernkarten und anschließend – unter Verwendung des «Tachometerprinzips» – alle Zahlen, in denen eine Ziffer genau einmal vorkommt.

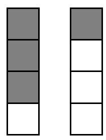
Aus einer Langzeituntersuchung Mahers, Martinos und ihrer Kollegen (vgl. u.a. Maher et al. 2011) zur Entwicklung mathematischer Konzepte am Beispiel der Kombinatorik liegen ebenfalls Informationen über die Strategien der Lernenden zur Lösung von Variationsproblemen mit Wiederholung vor. Im Rahmen ihrer Studie stellten sie einer Gruppe von Lernenden kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme. In den Klassenstufen 2 bis 4 erhielten die Probanden drei- bis fünfdimensionale Probleme in Kontexten, in denen Kombinationen aus Kleidungsstücken bzw. Geschirr zusammengestellt sowie Türme aus einer vorgegebenen Anzahl an farbigen Bausteinen gebaut werden sollten.

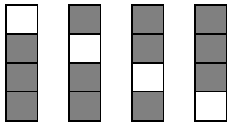
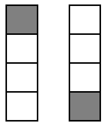
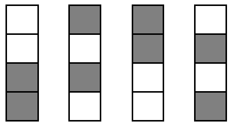
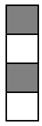
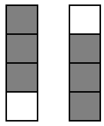
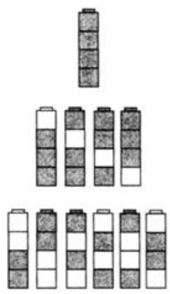
2. Klasse	(1) Bilden aller Kombinationsmöglichkeiten aus drei Hosen und zwei T-Shirts.
3. Klasse	Schüler erhalten erneut Problem (1). (2) Bilden vierstöckiger Türme aus zwei Farben. (3) Bilden von Kombinationen aus zwei Tassen, zwei Schalen und drei Tellern.
4. Klasse	(4) Bilden aller Kombinationsmöglichkeiten aus vier Hosen und vier T-Shirts. (5) Bilden fünf- und sechsstöckiger Türme aus zwei Farben.

Tab. 2.14 Verwendete Aufgaben im Rahmen der Langzeituntersuchung Martinos (1992, S. 7f.)

Die Problemstellungen (1), (3) und (4) lassen sich dem klassischen Kreuzprodukt zuordnen: Es müssen aus zueinander disjunkten Mengen (Hosen und T-Shirts bzw. Tassen, Schalen und Tellern) Kombinationen erstellt werden. Die Problemstellungen (2) und (5) sind mittels der allgemeinen Produktregel lösbar und lassen sich als Figuren des Typs Variationen mit Wiederholung identifizieren. Es müssen Auswahlen an farbigen Bausteinen getroffen werden, die zusammen einen Turm ergeben. Türme, die die gleiche Farbkombination enthalten, deren Anordnung sich jedoch unterscheidet, werden als verschieden betrachtet.
Die Lernenden erhielten die verschiedenen Aufgabenstellungen im Unterricht, bearbeiteten sie in Kleingruppen schriftlich und diskutierten sie anschließend im Klassenverband.

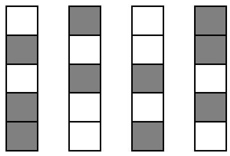
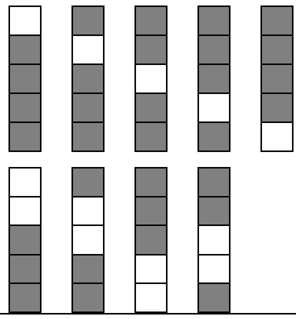
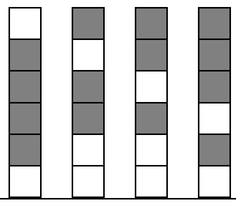
Lösung vierdimensionaler Probleme
Für das Lösen von vierstöckigen Türmen beschreibt Martino (1992) im Rahmen ihrer Dissertation folgende Strategien:

Strategie	Beschreibung	Beispiel
«Opposites» (Gegenpaarbildung)	Bei der Bildung von Gegenpaaren wird die eine Farbe jeweils durch die andere ersetzt. Die «Gegenpaarbildung» konnte Martino bei den Lösungswegen von allen Schülern beobachten. Teilweise lösten die Gruppen sogar die gesamte Aufgabe mit Hilfe von Gegenpaaren.	

«Stairs» (Treppenbildung)	Bei der Treppenbildung wird ein Element im Sinne einer Treppe auf verschiedenen Positionen eingefügt.	
«Cousins / Upside-down pairs» (Verwandte Paare oder Oben-Untenpaare)	Das Muster der Cousins bezeichnet in Anlehnung an die Äußerung eines Schülers die Bildung von Umwendungen. Ein neuer Turm wird entsprechend gebildet, indem ein alter Turm um 180° umgewendet wird.	
«Color distribution» Farbunterscheidung	Alle Kombinationen mit einer bestimmten Farbzahlaufteilung werden nacheinander gebildet.	
«Patchwork» (Patchworkstrategie)	Die Farben in einem Objekt wechseln sich jeweils ab.	
«Red in the top blue in the bottom» (Rot oben - blau unten)	Benennung nach der Position der blauen und roten Steine.	
«Cases» (Fallunterscheidung)	Zerlegung in Gruppen. Es werden alle Türme mit exakt vier schwarzen, dann alle Türme mit exakte drei schwarzen, zwei schwarzen, einem schwarzen und zuletzt keinem schwarzen Baustein erstellt.	 (Maher et al. 2011, S. 57)

Tab. 2.15 Strategien zur Lösung zweifarbiger Aufgabenstellungen zu Variationen mit Wiederholung (n=2, k=4) (vgl. Martino 1992)

Lösung fünf- und sechsdimensionaler Probleme
Bezüglich der Lösung fünf- und sechsdimensionaler Anzahlbestimmungsprobleme beobachtete Martino (1992) ebenfalls die Anwendung der Gegenpaar- und der Treppenbildung. Zudem identifizierte sie einige weitere Muster:

Strategie	**Beschreibung**	**Beispiel**
«Groupstrategy» (Gruppenbildung)	Ordnung der Kombinationen nicht in Paaren, sondern in Gruppen oder sogenannten Familien: a) Groups: Bilden einer Kombination, des Gegenpaares, der Umwendung des Gegenpaares und dessen Gegenpaar.	
	b) Families: Orientierung an der Anzahl der Farben; 4-1 Familie und 3-2 Familie.	
«Induction» (Induktion)	Eine Aufgabe wird gelöst, indem zunächst eine einfachere bearbeitet und die Lösung auf die komplexere übertragen wird:	Keine Veranschaulichung: Bildung der Möglichkeiten für (n-1) Elemente und farbliches Konstanthalten der verbleibenden Elemente
«constant item» (1-Konstantenprinzip)	Beim Bau sechsstöckiger Türme wird die Farbe an einer Position konstant gehalten, während die Farbverteilung in den anderen Positionen geändert wird.	

Tab. 2.16 Strategien zur Lösung zweifarbiger Aufgabenstellungen zu Variationen mit Wiederholung (n=5 & n=6, k=2) (vgl. Martino 1992)

Beim Vergleich der von Martino (1992) beschriebenen Strategien zu Variationsproblemen mit Wiederholung bei zweifarbigen Türmen mit Strategien bei anderen Aufgabenstellungen fällt insbesondere auf, dass die Strategie des Tachometerprinzips nicht verwendet wird.

2.4.2 Strategien zum Kreuzprodukt und zur Produktregel

Im Rahmen einiger Untersuchungen werden keine weiteren Unterscheidungen bzgl. der zugrunde liegenden kombinatorischen Figuren vorgenommen, sondern Aufgabenstellungen zur allgemeinen Produktregel in den Blick genommen. Diese werden im Folgenden genauer betrachtet.

2.4.2.1 *Strategien bei Problemstellungen zum Kreuzprodukt*

English (1991, 1993a, 1993b, 2007) untersuchte, wie Lernende zwei- und dreidimensionale kombinatorische Probleme zum Kreuzprodukt lösen. Dabei stellte sie zunächst in einer Interviewstudie mit 50 Lernenden fest, dass 4- bis 9-Jährige bereits in der Lage sind, Strategien zur Lösung zweidimensionaler kombinatorischer Problemstellungen zu finden (English 1991). Sie identifizierte für das Lösen zweidimensionaler Problemstellungen, die sich allesamt auf das Ankleiden von Bären bezogen, sechs Lösungsstrategien, die von zufälligen Herangehensweisen über Versuch und Irrtum bis zu einem systematischen Finden aller Möglichkeiten reichen (vgl. English 1991). English ordnet die identifizierten Strategen dabei drei altersunabhängigen Stufen zu:

Nonplanning stage	
1. „random selection of items with no rejection of inappropriate items"	Die Lösungsstrategie ist gekennzeichnet durch eine zufällige Auswahl der Kleidungsstücke. Ob Kleidungsstücke bereits miteinander kombiniert wurden wird nicht berücksichtigt.
2. "Trial and error procedure with random item selection and rejection of inappropriate items"	Die Lernenden wählen die Kleidungsstücke zufällig aus. Durch Überprüfungshandlungen stellen sie jedoch sicher, dass keine Kombinationen doppelt erstellt werden.
Transitional stage	
3. "Emerging pattern in item selection, with rejection of inappropriate items"	Die Lernenden zeigen bei der Auswahl der Kleidungsstücke – beispielsweise bei der Wahl der Hosenfarbe – ein zyklisches oder alternierendes Muster, welches jedoch nicht konsequent angewendet wird. Oftmals greifen die Lernenden anschließend auf eine Versuch- und Irrtumsstrategie zurück.
4. "Consistent and complete cyclical pattern in item selection with rejection of inappropriate items"	Die Lernenden verwenden ein vollständiges zyklisches Muster. Dieses kann sich auf die Farben der Hosen oder der Oberteile oder auf beides beziehen. Charakteristisch ist, dass mittels des zyklischen Musters alle möglichen Kombinationen erstellt werden.

Odometer stage	
5. "Emerge of an odometer pattern in item selection, with possible item rejection"	Beim Tachometerprinzip wird die farbliche Auswahl eines Kleidungsstückes so lange beibehalten, bis alle möglichen Kombinationen mit diesem Kleidungsstück ermittelt sind. Bei der fünften Strategie wird dieses Tachometerprinzip unvollständig angewendet: • Es entstehen noch doppelte Kombinationen. • Es werden nicht ausschöpfend alle Kombinationen mit einem gleichbleibenden Kleidungsstück gebildet. • Lernende erkennen nicht, dass alle Kombinationen gefunden wurden.
6. "Complete odometer pattern in item selection, with no rejection of items"	Das Tachometerprinzip wird vollständig angewendet. Die Lernenden erkennen oftmals selbstständig, dass es keine weiteren Lösungen geben kann und begründen dies auch.

Tab. 2.17 Strategien zur Lösung zweidimensionaler Aufgaben zum Kreuzprodukt (vgl. English 1991, S. 458ff.)

Im Rahmen einer weiteren Untersuchung interviewte English insgesamt 96 Lernende ohne kombinatorische Vorkenntnisse aus dem Unterricht zur Bearbeitung zwei- und dreidimensionaler Problemstellungen zum Kreuzprodukt. Ebenso wie in ihrer ersten Untersuchung erhielten die Lernenden zweidimensionale Aufgabenstellungen, in denen sie Bären verschiedene Kombinationen aus Kleidungstücken anziehen sollten. Zusätzlich erhielten die Lernenden auch dreidimensionale Aufgabenstellungen, in denen sie neben der Auswahl von Hosen und Oberteilen verschiedenfarbige Tennisschläger auswählen sollten (vgl. 1992a, 1992b, 1993b). Dabei identifizierte die Autorin insgesamt zehn verschiedene Strategien, von denen die ersten fünf den Strategien 2 bis 6 zur Lösung zweidimensionaler Aufgabenstellungen zum Kreuzprodukt entsprechen (vgl. Abb. 2.5). Die Vorgehensweisen veranschaulichte sie in Form von Baumdiagrammen. Strategie 5 zeigt dabei das von den Lernenden verwendete Tachometerprinzip, welches der fachlichen Strukturierung im Baumdiagramm entspricht.

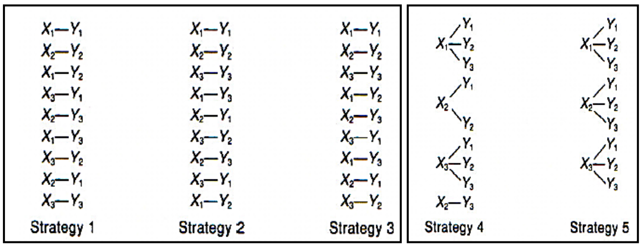


Abb. 2.5 Strategien zur Lösung zweidimensionaler kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme (English 2007, S. 145)

Zur Lösung dreidimensionaler Aufgabenstellungen identifizierte sie fünf weitere Strategien, die enge Bezüge zu den bereits beschriebenen Strategien beim Lösen zweidimensionaler Aufgabenstellungen aufweisen:

Strategie	**Beschreibung**
Strategy 6	Die Lernenden suchen die Kombinationen mit zusätzlichen Tennisschlägern durch Versuch und Irrtum.
Strategy 7	Die Lernenden halten zwei Elemente konstant, jedoch nicht durchgängig. Fehlende Elemente werden über „Versuch- und Irrtum“ ermittelt.
Strategy 8	Die Lernenden schöpfen alle Möglichkeiten für das zweite konstante Element (= Nebenkonstante) aus, übersehen aber, dass es eine weitere Möglichkeit g, die Nebenkonstante mit der Hauptkonstanten zu kombinieren.
Strategy 9	Die Lernenden verwenden das Tachometerprinzip, jedoch unvollständig.
Strategy 10	Die Lernenden verwenden das Tachometerprinzip vollständig und ermitteln ausschöpfend alle Kombinationen.

Tab. 2.18 Strategien zur Lösung dreidimensionaler Problemstellungen zum Kreuzprodukt (English 2007, S. 146)

Diese Strategien veranschaulicht sie ebenfalls in Baumdiagrammen:

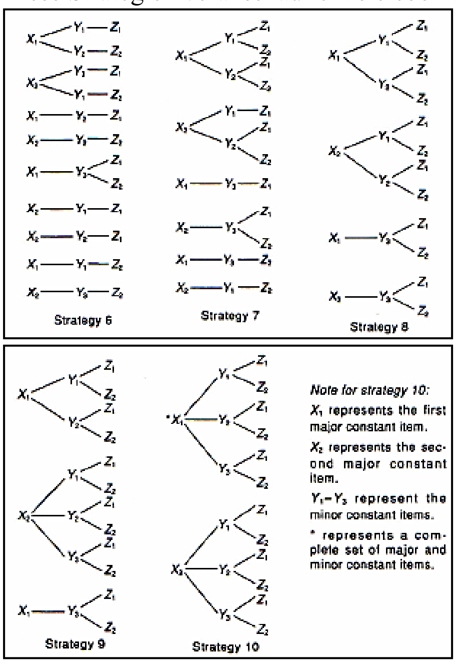
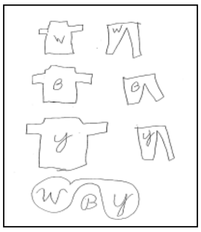
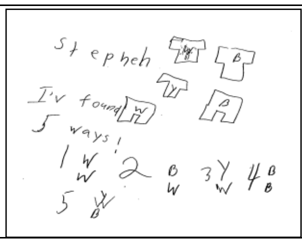
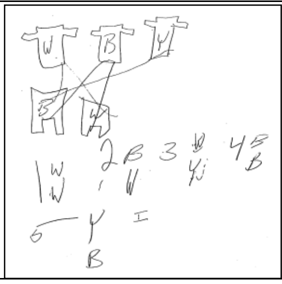


Abb. 2.6 Strategien zur Lösung dreidimensionaler kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme (English 2007, S. 147)

Die Ergebnisse der Untersuchungen Englishs (1992a, 1992b, 1993b, 2007) zeigen einerseits auf, dass Lernende früher als von Piaget und Inhelder (1975) angenommen in der Lage sind, kombinatorische Problemstellungen systematisch zu lösen. Gleichzeitig verdeutlichen sie in Bezug auf den Einsatz von Strategien, dass es Zusammenhänge zwischen den Strategien zur Lösung zwei- und dreidimensionaler Aufgabenstellungen gibt. Im Rahmen ihrer Untersuchung stellt English dabei Bezüge zwischen dem fachlichen Konzept des Baumdiagramms und der zugrunde liegenden Stufung der Lernenden her. Kritisch anzumerken ist, dass sie von einer besten Lösungsstrategie, dem Tachometerzählprinzip ausgeht und andere vollständig strukturierte Strategien stattdessen als Übergang zu einem algorithmischen Vorgehen beschreibt.

Die bereits beschriebene Langzeituntersuchung Martinos (1992) liefert weitere Informationen über die Handlungsmuster von Lernenden bei der Bearbeitung von Aufgabenstellungen zum Kreuzprodukt. Im Rahmen der Untersuchung wurden die Strategien der Lernenden zur Lösung der Aufgaben zum Kreuzprodukt dargestellt. Martino und ihre Kollegen (Martino 1992; Maher & Martino 1992a; 1996) stellten fest, dass die Lernenden die erste Problemstellung in der zweiten und dritten Klasse bildlich lösten. Dabei kam in der zweiten Klasse keiner der Lernenden zu einer korrekten Lösung.

One-to-one corresponce (Michael)		Michael nimmt zunächst an, es könnten zwei Outfits erstellt werden. Anschließend erstellt er eine Eins-zu-Eins-Zuordnung der Oberteile und Hosen, dazu malt er eine in der Aufgabenstellung nicht gegebene Hose.
Two letter coding strategy (Stephanie)		Stephanie kodiert jedes Kleidungsstück mit einem Buchstaben und notiert die Möglichkeiten sukzessive.

Line strategy (Dana)			Dana verbindet durch Linien eine Jeans mit allen Oberteilen. Die zweite Jeans verbindet sie mit zweien der drei Oberteile.

Tab. 2.19 Strategien der Lernenden in der zweiten Klasse (Martino 1992, S. 47).

Die Betrachtung der Lösungswege der Lernenden zeigt, dass Dana und Stephanie in der zweiten Klasse ein Vorgehen zeigen, das in weiten Teilen der Tachometerstrategie von English entspricht. Sie halten (jeweils) ein Objekt (eine Hose) solange konstant, bis sie alle möglichen Kombinationen mit diesem gefunden haben. Dana notierte lediglich eine Farbkombination nicht, mit dem Argument, die Kleidungsstücke würden farblich nicht zueinander passen. Der Schüler Michael erstellte alle einfarbigen Kombinationen.
In der dritten Klasse ermittelten alle erwähnten Lernenden die richtige Anzahl an Möglichkeiten. Während Michael dazu die von Stephanie in der zweiten Klasse verwendete Strategie der Kodierung der einzelnen Kleidungsstücke nutzte, verwendeten Stephanie und Dana die Tachometerstrategie. Die Strategien zur Lösung der Geschirraufgabe werden hingegen nicht im Detail beschrieben.

Für das Lösen von Problemstellungen zum Kreuzprodukt liegen konkretere Beschreibungen zu Fehlern und Schwierigkeiten von Lernenden im Primarbereich vor (Campo et al. 2011; English 1993b).
Campo et al. (2011) identifizierten die Schwierigkeiten und Fehler von 8- bis 11- jährigen Grundschülerinnen in brasilianischen Grundschulen. Die Lernenden lösten die Problemstellungen in drei verschiedenen Testsituationen:

a) als schriftlicher Test ohne weitere Instruktionen;
b) als schriftlicher Test in einer Interviewsituation mit Interventionen seitens des Interviewers;
c) in einer Interviewsituation mit Interventionen seitens des Interviewers.

Sie erkannten vier verschiedene Fehlertypen und unterschieden die Fehler bezüglich ihrer Qualität:

Fehler	Beschreibung
Fehler 1:	Die Lernenden verwenden weder eine mathematische Operation noch irgendeine Strategie, um die Aufgabe zu lösen. Sie geben als Antwort einen Teil des Problems wieder oder malen Blusen und Röcke, die der Anzahl der gegebenen Kleidungsstücke in der Aufgabenstellung entsprechen können, aber nicht müssen.
Fehler 2:	Die Lernenden verwenden eine unpassende Operation und verknüpfen mittels dieser die in der Aufgabenstellung gegebenen oder fremde Zahlenwerte. In vielen Fällen gehen die Lernenden additiv vor, wenn eine multiplikative Lösung erforderlich wäre oder sie gehen subtraktiv vor, wenn eine Division notwendig wäre.
Fehler 3: fixed combination	Die Lernenden nehmen an, dass feste Kombinationen entstehen müssen und erstellen eine Eins-zu-Eins-Zuordnung. Ein Oberteil kann nur mit genau einem Kleid kombiniert und nicht mehrmals verwendet werden. In einigen Fällen nutzen sie Pfeile, um Blusen und Kleider miteinander zu verbinden.
Fehler 4: flexible combination.	Die Lernenden bilden keine feste Eins-zu-Eins-Zuordnung mehr, sondern akzeptieren, dass in diesem Fall ein Kleidungsstück, bspw. eine Bluse, mit mehr als einem anderen Teil kombiniert werden kann. Jedoch zielen sie insgesamt darauf ab, dass jedes Element mindestens einmal verwendet wurde.

Tab. 2.20 Fehler von Grundschülern bei der Lösung von Aufgabenstellungen zum Kreuzprodukt (vgl. Campo et al. 2011)

Der in der Untersuchung beschriebene Fehler des Bildens fester Kombinationen (*one-to-one correspondence*) wird auch in anderen Untersuchungen aufgeführt (vgl. English 1993a, 1993b; Maher & Martino 1992a, 1992b; Martino & Maher 1999). English (1993a, S. 14) geht zum Beispiel davon aus, dass die Ursache dieses Fehlers in einer fehlerhaften Deutung der Lernenden liegt. Sie nimmt an, dass die Lernenden den Hinweis „Jedes Element nur ein einziges Mal auswählen" fehlinterpretieren im Sinne von „Verschieden in allen Wegen" und entsprechend das Ziel „Alle verschiedenen Outfits finden" als einen Indikator dafür verstehen, jedes neue Outfit komplett unterschiedlich von den vorangegangenen zu machen.

English (1991, 1993a) beschreibt in ihren Untersuchungen, dass die Lernenden zu wenige oder doppelte Kombinationen ermitteln oder, nachdem alle Kombinationen gefunden wurden, nicht feststellen, dass es keine Möglichkeiten mehr gibt. Diese beschriebenen sehr allgemeinen Rückbezüge auf das Vorgehen und die Anzahl der ermittelten Ergebnisse werden auch im Rahmen der Untersuchungen von Piaget und Inhelder (1975) zum Lösen von Kombinations-, Variations- und Permutationsproblemen benannt. Die Autoren gehen jedoch in beiden Fällen nicht auf eine genauere Analyse der Fehler, ihrer Ursachen und Hintergründe zur fehlerhaften Anzahlermittlung ein.

2.4.2.2 *Strategien bei Problemstellungen zur Produktregel*

Beim Vergleich der Vorgehensweisen von Primarstufenschülern mit denen von Sekundarstufenschülern mit dem Ziel, elementare Bausteine des kombinatorischen Problemlösens herauszuarbeiten, verwendete Hoffmann (2003) zueinander isomorphe zwei- und dreidimensionale Häuser- und Farbenschlossaufgaben. Die verwendeten Problemstellungen sind alle mittels der allgemeinen Produktregel lösbar, es werden jedoch unterschiedliche kombinatorische Figuren gesucht.

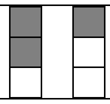
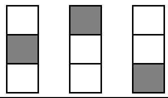
Häuseraufgaben	**Farbenschlossaufgaben**
„Haus (2)-12[16]“ Im Dach und Erdgeschoss dürfen jeweils vier verschiedene Farben genutzt werden, einfarbige Häuser sind nicht erlaubt. Es gibt $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten.	------------
„Haus (3)-8“ Im Dach, Erdgeschoss und Keller dürfen jeweils zwei Farben verwendet werden. Es gibt $2^3 = 8$ Möglichkeiten.	*„Farbenschloss (3)-8“* Auf drei Ebenen des Farbenschlosses sind jeweils zwei verschiedene Farben möglich. Es gibt $2^3 = 8$ Möglichkeiten
„Haus (3)-16“ Im Keller sind 4 Farben erlaubt, im Erdgeschoss und im Dach 2 verschiedene Farben. Es gibt $4 \cdot 2^2 = 16$ Möglichkeiten.	*„Farbenschloss (3)-16“* Auf der untersten Ebene sind 4 Farben möglich, auf den zwei weiteren Ebenen sind jeweils 2 Farben möglich. Es gibt $4 \cdot 2^2 = 16$ Möglichkeiten.
-----------	*„Farbenschloss (4)-16“* Jedes Farbenschloss besteht aus 4 Kugeln. Auf jeder Ebene kann zwischen 2 Farben gewählt werden. Es gibt $2^4 = 16$ Möglichkeiten.

Tab. 2.21 Aufgaben zur Produktregel (Hoffmann 2003, S. 93f.)

Die von Hoffmann (2003) identifizierten Strategien zur Lösung zweifarbiger Probleme („Haus (3)-8“, „Farbenschloss (3)-8“, „Farbenschloss (4)-16“) sind fast deckungsgleich mit den von Martino (1992) beschriebenen Strategien zu den Turmaufgaben. So beobachtete sie ebenfalls die Strategien «Gegenpaarbildung», «Treppenbildung», «Muster der Cousins», «Color distribution» und «Red in the top, blue in the bottom». Lediglich die «Patchworkmusterbildung» wird von Hoffmann nicht benannt, stattdessen zusätzlich die «Bildung von

16 Die Aufgaben sind nach der Anzahl der Stufen sowie der Anzahl der Lösungen benannt. Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl an Stufen an, die letzte Zahl die Anzahl möglicher Lösungen.

Winkelpaaren» sowie das «Positionsprinzip», welches eng mit der Strategie «Color distribution» verwandt ist.

Mikrostrategie	**Beschreibung**	**Beispiel**
«Bildung von Winkelpaaren»	Zwei Kombinationen sehen so aus, als würden zwei 90°-Winkel ineinandergreifen.	
«Positionsprinzip»	Es wird versucht alle möglichen Positionen für eine bestimmte Anzahl an roten oder grünen Elementen innerhalb der erstellten Kombinationen zu ermitteln.	

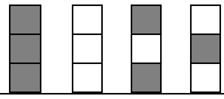
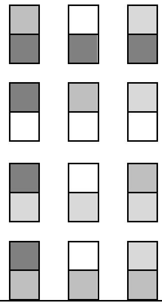
Tab. 2.22 Mikrostrategien bei zweifarbigen Problemen (Hoffmann 2003, S. 326f.)

Bezogen auf Aufgabenstellungen, in denen mehr als zwei Farben auf einer Ebene kombiniert werden mussten, stellte Hoffmann große Gemeinsamkeiten zu den vorangegangenen Untersuchungen von Piaget und Inhelder (1958, 1975), Vergnaud und Cohen (1969) sowie Larivée und Normandeau (1985) fest. Die im Folgenden beschriebenen, von ihr identifizierten Strategien traten auch in den bereits benannten Studien auf:

Mikrostrategie	**Beschreibung**
«1- bis 2-Konstantenprinzip und Tachometerzählprinzip»	Die Farbe von einem oder die Farben zweier Elemente werden konstant gehalten.
«Spaltenweises Abwechslungsprinzip»	In zwei benachbarten Kombinationen werden alle möglichen Farben genutzt.
«Farb-Ebenenwechsel»	Eine Farbe der zuletzt gelegten Kombination wird wiederholt, allerdings auf der verbleibenden Ebene.
«Einertreppenbildung»	Ein Element durchläuft alle Positionen, während die anderen Elemente die Reihenfolge nicht wechseln.
«Zwei-Ebenenfokussierung»	Auf zwei von drei Ebenen werden alle Möglichkeiten gebildet. Die Farbe der verbleibenden Ebene wird konstant gehalten.

Tab. 2.23 Mikrostrategien bei mehrfarbigen Problemen (Hoffmann 2003, S. 326f.)

Neben den Mikrostrategien, von denen einige bereits in anderen Untersuchungen beschrieben wurden, identifizierte Hoffmann insgesamt drei Makrostrategien mittels derer die Lernenden den gesamten Lösungsprozess strukturierten. Diese lassen sich entsprechend als «Suche mit System» auffassen, wie es von Piaget und Inhelder (1975) für verschiedene kombinatorische Figuren beschrieben wird. Im Gegensatz zu Piaget und Inhelder nimmt sie jedoch keine Altersabhängigkeit der Makrostrategien an.

Makrostrategie	Beschreibung	Beispiel
«Lösungssuche in Phasen»	Die Lösung der Aufgabe beruht auf zwei Phasen, denen unterschiedliche Handlungsmuster zugrunde liegen.	Die «Treppenbildung» wird mit der «Gegenpaarbildung» verbunden.
«Vollständige Gegenpaarbildung»	Alle Kombinationen werden mit Hilfe von Gegenpaaren ermittelt.	
«Tachometerprinzip»	Die Farben von einer oder von zwei Ebenen werden so lange konstant gehalten bis die Elemente auf der bzw. auf den verbleibenden Ebenen alle möglichen Farben durchlaufen haben.	

Tab. 2.24 Makrostrategien (Hoffmann 2003, S. 328)

Die beschriebene Strategie der «vollständigen Gegenpaarbildung» wird bereits im Kontext des Lösens von zweifarbigen Variationsproblemen dargestellt (vgl. Martino 1992). Das Tachometerprinzip wird von Lernenden sowohl bei Aufgaben zum Kreuzprodukt als auch bei Kombinations- und Permutationsproblemen zur Lösungsfindung verwendet (vgl. u.a. Scardamalia 1977; English 1991, 1993b; Piaget & Inhelder 1975; Vergnaud & Cohen 1969). Hoffmann (2003) schlussfolgert aus den ähnlichen Untersuchungsergebnissen zur Strategiewahl, dass es offensichtlich eine Anzahl an Bausteinen der kombinatorischen Problemlösefähigkeit gibt, die alters- und materialunabhängig, dafür aber zu einem hohen Grad aufgabenstrukturabhängig genutzt werden (ebd., S. 272). Sie stellte insgesamt fest, dass Aufgabenstellungen, in denen mehr als zwei Farben zur Auswahl stehen, offenbar eine andere Strategiewahl unterstützen als zweifarbige Aufgaben. „Die Beobachtung spricht für eine Existenz einer *begrenzten Anzahl* an verfügbaren bzw. naheliegenden Mustern zur Lösung von „zweifarbigen" Kombinatorikaufgaben" (ebd., S. 272).

Bezogen auf die Aufgabenstruktur scheint die Anzahl der auf den Ebenen zu nutzenden Farben besonders bedeutsam zu sein. So stellt Hoffmann (2003) insbesondere heraus, dass Aufgaben, bei denen wenigstens auf einer Ebene mehr als zwei Farben gewählt werden dürfen, offensichtlich eine Strukturierung der Erstellung aller Kombinationen mit Hilfe des Tachometerprinzips mehr unterstützen als Aufgaben, bei denen auf allen Ebenen lediglich zwei Farben zur Verfügung stehen. Eine solcher Ansatz bietet zugleich eine Erklärung dafür, weshalb die in vielen Untersuchungen aufgeführte Strategie ein Element konstant zu halten (vgl. u.a. English 1993b; Piaget & Inhelder 1975; Vergnaud & Cohen 1969) im Rahmen der von Martino untersuchten zweifarbigen Variationsprobleme keine Bedeutung spielt.

2.4.3 Zusammenfassung

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts erwähnt, liegen bezüglich der Strukturierungsstrategien beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen nur wenige Informationen vor. Es ist jedoch anzunehmen, dass es Parallelen zwischen der Verwendung von Lösungsstrategien bei Auflistungsproblemen und möglichen Strukturierungsstrategien beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen gibt. Diese Annahme ist jedoch empirisch zu überprüfen.
Zu den Auflistungsstrategien von Lernenden bei verschiedenen kombinatorischen Grundfiguren liegen einige Untersuchungsergebnisse vor. Ebenso wurden Lösungsstrategien zu Problemstellungen zum Kreuzprodukt und zur allgemeinen Produktregel in den Blick genommen.
Ein Vergleich der in den Untersuchungen beschriebenen Strategien zeigt, dass einige Strategien über verschiedene kombinatorische Problemstellungen hinweg beobachtet wurden. Die nachfolgend abgebildete Tabelle (2.25) gibt einen Überblick über Strategien, die bei mehr als einer kombinatorischen Figur identifiziert wurden. Die verwendeten Strategiebegriffe beziehen sich dabei vorrangig auf die von Hoffmann (2003) eingeführten Begrifflichkeiten, da ansonsten kaum deutschsprachige Untersuchungen vorliegen und diese sich in der Regel auf die Untersuchung Hoffmanns beziehen.

	«Konstant halten eines oder zweier Elemente (Tachometer)»	**«Bilden von Kombinationen aus allen Elementen (Juxtaposition)»**	**«Zyklisches Muster»**	**«Lösungssuche in Phasen»**	**«Element durchläuft alle Positionen»**	**«Variation der Reihenfolge der Elemente»**	**«Bildung von Gegenpaaren»**
K. o. Wh.	Piaget & Inhelder (1975)	Piaget & Inhelder (1975)	Piaget & Inhelder (1975)	Piaget & Inhelder (1975)	**x**	**x**	**x**
K. m. Wh.	KEINE VORLIEGENDE KONKRETISIERUNG DER STRATEGIEN durch Piaget & Inhelder (1975)						
V. o. Wh.	Lack (2009)	x	x	Lack (2009)	x	x	Lack (2009)

V. m. Wh.	Piaget & Inhelder (1975); Martino (1992)	x	Piaget & Inhelder (1975)	Piaget & Inhelder (1975); Martino (1992)	x	x	Martino (1992)
P. o. Wh.	Halani (2012) ; Lack (2009) ; Larivée & Normandeau (1985) ; Vergnaud & Cohen (1969)	x	Larivée & Normandeau (1985); Vergnaud & Cohen (1969)	Lack (2009)	Larivée & Normandeau (1985); Vergnaud & Cohen (1969)	x	Lack (2009)
P. m. Wh	KEINE VORLIEGENDE KATEGORISIERUNG (konkrete Studien fehlen)						
Kreuz-produkt	English (1988, 1993); Martino (1992)	English (1988, 1993)	English (1988, 1993)	Martino (1992)		Martino (1992)	Martino (1992)
Produkt-regel	Hoffmann (2003)	Hoffmann (2003)	Hoffmann (2003)	Hoffmann (2003)		Hoffmann (2003)	Hoffmann (2003)

Tab. 2.25 Strategien bei verschiedenen kombinatorischen Problemstellungen

Eine nähere Betrachtung der über verschiedene Studien hinweg identifizierten Strategien zeigt, dass das «Konstanthalten eines oder zweier Elemente» , also die Tachometerstrategie unabhängig von den Figuren und Problemstellungen verwendet wird. Die «Variation der Reihenfolge der Elemente» stellt hingegen nur eine Strategie bei Variations- und Permutationsproblemen dar. Dass letztere Strategie nicht bei allen Problemstellungen zu beobachten ist, erklärt sich dadurch, dass die Variation der Reihenfolge der Elemente bei Kombinationsproblemen nicht zugelassen ist. Die Beschreibung der Strategie «Variation der Reihenfolge der Elemente» legt die Annahme nahe, dass auch Lernende Strategien zur Lösungsfindung verwenden, die in Beziehung zu den Eigenschaften der gesuchten kombinatorischen Figur stehen. Zugleich zeigen die dargestellten Untersuchungsergebnisse auf, dass Strategien die zur Lösung zweidimensionaler Problemstellungen bei verschiedenen kombinatorischen Figuren verwendet wurden, nicht auch zwangsläufig bei der Lösung mehrdimensionaler Problemstellungen verwendet werden. Beide Aspekte bestätigen insofern, dass verschiedene Aufgabenfaktoren, hier ganz konkret die Eigenschaften der zu erstellenden kombinatorischen Figur sowie die Anzahl der zu kombinierenden Elemente, einen Einfluss auf Auflistungsstrategien von Lernenden haben können. Diesbezüglich bedarf es jedoch weiterer Informationen. So lässt sich den Untersuchungen beispielsweise nicht entnehmen, ob es besondere Strategien gibt, wenn Wiederholungen von Elementen erlaubt sind.

Eine globale Betrachtung der vorliegenden Untersuchungsergebnisse zu den kombinatorischen Figuren zeigt, dass insgesamt auch im Kontext von Auflistungsproblemen nicht für alle Figuren Informationen darüber vorliegen, welche Strategien Lernende verwenden. Für die Kombinationen ohne und mit Wiederholung werden von Piaget und Inhelder (1975) diejenigen Strategien, die bei Bearbeitungen zu beiden Figuren auftraten, beschrieben. Es liegen insofern keine Informationen vor, ob und gegebenenfalls welche spezifischen Strategien Lernende zur Lösung von Kombinationsproblemen ohne und mit Wiederholung gibt. Zudem liegen bislang keine separaten Informationen über die Strategien bei Permutationen mit Wiederholung vor.

Aufgrund der dargestellten Ergebnisse stellt sich die Frage, wie sich die Strategien auch unter Berücksichtigung des Einflusses der Eigenschaften der kombinatorischen Figur beschreiben lassen. Zugleich gilt es, insbesondere für diejenigen Figuren, zu denen noch keine Kenntnisse über mögliche Strategien vorliegen, diese zu erheben.

2.5 Zählstrategien

Im Folgenden wird in den Blick genommen, welche Informationen bezüglich des Anwendens verschiedener Zählstrategien vorliegen. Dazu werden zunächst operationale Strategien in den Blick genommen. Daran anknüpfend wird betrachtet, ob Lernende bereits rekursive Strategien verwenden oder die gesuchte Anzahl an Lösungen indirekt bestimmen.

2.5.1 Operationale Strategien

Grundsätzlich zeigt die Analyse vorliegender Untersuchungen zum Lösen kombinatorischer Problemstellungen, dass zum Einsatz operationaler Strategien bislang nur wenige Erkenntnisse bereitstehen.
Die Studien zu Vorgehensweisen von Lernenden im Primarbereich fokussieren, wie eingangs erwähnt, in der Regel auf das Lösen von Aufzählproblemen (vgl. English 1991, 1993a, 1993b, 2007; Martino 1992; Maher & Martino 1992a; Maher & Martino 1996; Vergnaud & Cohen 1969). Fragestellungen, wie „Welche gibt es? Finde alle!“ erfordern die Darstellung aller gesuchten Objekte, sodass das Anwenden operationaler Lösungsstrategien nicht möglich ist. Dennoch gibt es in einigen Untersuchungen (English 1996, 1998a, 1998b; English & Sharry 1996; Heinze 2005; Lack 2009; Piaget & Inhelder 1975; Shin & Steffe 2009) und unterrichtspraktischen Artikeln (Grassmann 2002; Heinze 2003;

Neubert 2003) Hinweise auf das Verwenden operationaler Strategien. Diese werden im Folgenden genauer betrachtet.

2.5.1.1 *Direkte und indirekte Anwendung operationaler Strategien*

Grassmann (2002) und Heinze (2003) berichten im Rahmen eines Förderprogramms für potentiell mathematisch begabte und interessierte Grundschulkinder von dem Einsatz operationaler Strategien zur Lösung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme.
Im Rahmen des Förderprogramms erhielten die Lernenden Anzahlbestimmungsprobleme zu Kombinationen und Permutationen ohne Wiederholung. Heinze (2003) zeigt auf, dass einige Lernende der zweiten und dritten Klasse die operationalen Strategien aus der Auflistung der gefundenen Ergebnisse ableiten, um die Vollständigkeit der Lösungen zu begründen. Sie veranschaulicht dies beispielhaft an der Begründung des 7-jährigen Schülers Tom, der, nachdem er zu einem Permutationsproblem ohne Wiederholung alle Möglichkeiten notiert hat, die Vollständigkeit der Lösungen multiplikativ begründet. Andere Lernende verwenden direkt einen operationalen Weg zur Anzahlbestimmung. So löst Drittklässler Martin eine Kombinationsaufgabe ohne Wiederholung, in der es um das Anstoßen von Gläsern geht, direkt additiv. Heinze folgert daraus: *„Für einige Kinder ist es somit nicht einmal notwendig alle möglichen Lösungen explizit aufzuschreiben. Die Einsicht in die mathematische Struktur der Aufgabe reicht ihnen, um die Anzahl aller möglichen Kombinationen rechnerisch ermitteln zu können."(ebd. S. 22).* Lack (2009, S. 200) zeigte in ihrer Studie zur Aufdeckung mathematischer Begabung bei Lernenden des ersten und zweiten Schuljahres ebenfalls auf, dass einige Lernende bereits die Anzahl aller Lösungen kognitiv ermitteln, ohne zunächst alle Figuren zu erstellen. Andere Lernende erstellten erst die Figurenmenge und leiteten daraus die gesuchte Anzahl ab.
Für Lernende der siebten Klassen liegen ebenfalls Informationen darüber vor, dass diese eigenständig additive und multiplikative sowie rekursive Strategien entwickeln. So zeigen Shin und Steffe (2009) im Rahmen einer Langzeitstudie auf, dass diese zur Lösung verschiedener Problemstellungen, in denen Permutationen und Variationen gesucht wurden, additive und multiplikative sowie rekursive Strategien verwendeten. Sie weisen dabei darauf hin, dass die Lernenden diese aus den vorgenommenen Strukturierungen der Figurenmenge ableiteten.

2.5.1.2 *Strategien bei Problemstellungen zum Kreuzprodukt*

English (1998) betrachtete in einer Untersuchung mit 10-Jährigen, inwiefern diese in der Lage sind, Analogien zwischen kombinatorischen Problemstellungen zum Kreuzprodukt zu erkennen und zu nutzen. In diesem Rahmen erhielten die Lernenden neben dem Auftrag, die Anzahl aller Lösungen zu ermitteln auch den Auftrag, eine „Rechnung" zu der jeweiligen Problemstellung aufzustellen.

English zeigt als Ergebnis den Prozentsatz der gewählten additiven und multiplikativen Lösungswege auf:

	Type of Symbolic Statement				
Problem	1-step addition	Multi-step addition	1-step multiplication	Multi-step multiplication	Answer only
1 (3 x 2)	22	16	37	3	6
2 (3 x 3)	3	12	59		9
3 (3 x 2)	10	3	50		9
4 (3 x 3)	3	25	59		6
5 (3 x 2 x 2)	6	22	53	6	9
6 (2 x 2 x 2)	25	12	37	9	6

Note. N=32 The remaining children did not respond.

Abb. 2.7 Erstellte Rechnungen zur Lösung kombinatorischer Problemstellungen zum Kreuzprodukt (English 1998, S. 190)

Den Ergebnissen der Untersuchung ist zu entnehmen, dass Lernende additive und multiplikative Rechnungen zu gegebenen Problemstellungen, in denen das Kreuzprodukt von Mengen gesucht ist, aufstellen, wenn sie dazu aufgefordert werden. Aus den Darstellungen der Studie wird jedoch nicht ersichtlich, ob ein Zusammenhang zwischen den Rechnungen der Lernenden und den Strukturierungen besteht.

So beschreibt English für das Lösen der Aufgabenstellungen 5 und 6: *„The majority of children who wrote a multiplication statement for Problems 5 and 6 used only one step, such as, 4 x 3=12, and 4 x 2=8"* (English 1999, S. 190). Es stellt sich die Frage, auf welchen gedanklichen oder vorgenommenen Strukturierungen die Rechnungen der Lernenden beruhen. Unklar bleibt, inwiefern die Lernenden zu der grafisch oder auflistend ermittelten Anzahl an Möglichkeiten ggf. eine Rechnung notierten, die das gleiche Ergebnis produziert oder, ob die Rechnungen der Lernenden auf den vorgenommenen Strukturierungen zur Lösungsfindung fußen.

2.5.1.3 *Strategien bei Problemstellungen zu den Grundfiguren*

Bezüglich des Einsatzes additiver und multiplikativer Strategien zum Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen zu den Grundfiguren, gibt es für die Primarstufe keine konkreten Untersuchungen. Dennoch sind Hinweise darauf zu finden, dass Lernende in der Grundschule und zu Beginn der Sekundarstufe 1 selbstständig rechnerische Strategien zur Anzahlbestimmung entwickeln, wenn sie nicht gebeten werden, alle Objekte zu notieren, sondern die Anzahl aller Möglichkeiten zu bestimmen.

Operationale Strategien bei Permutationen ohne Wiederholung

Lack (2009) zeigt in ihrer Untersuchung auf, dass einige potentiell mathematisch begabte Lernende der ersten und zweiten Klasse Permutationsprobleme im Kontext des Bauens von Türmen bereits mittels operationaler Strategien bestimmen. So stellen einige der 23 Lernenden schon direkt eine Vermutung über die gesuchte Anzahl an und begründen diese mittels einer operativen Rechnung. Besonders auffällig ist in den Darstellungen Lacks, dass Lernende die Anzahl aller vierstöckigen Türme ermitteln, indem sie überlegen, wie viele Türme sie mit einem festen ausgewählten Baustein bauen können. Um diese Anzahl zu bestimmen, ermitteln sie die Anzahl aller Vertauschungen für die verbleibenden drei Positionen (insgesamt sechs Möglichkeiten). Ausgehend davon übertragen sie die Anzahl aller Türme zu einem Baustein an einer festen Position darauf, dass es auch für alle weiteren Bausteine sechs mögliche Türme gibt, wenn diese an der ausgewählten Position festgehalten werden und ermitteln über die multiplikative Rechnung: $4 \cdot 6$ die Anzahl aller Lösungen.

Operationale Strategien bei Variationen ohne und mit Wiederholung

Im Rahmen der bereits dargestellten Untersuchung Piagets und Inhelders (1975) zu den Problemlösekompetenzen von Lernenden in Abhängigkeit vom Alter geben sie, wie in Abschnitt 2.4.1. aufgezeigt, exemplarische Beispiele für die Kategorisierung der Vorgehensweisen der Lernenden. Diesen sind für die «Suche mit System» teilweise operationale Vorgehensweisen der Lernenden im Alter zwischen zehn und dreizehn Jahren zu entnehmen. Die Lernenden wurden in den Interviews zunächst gebeten, die Anzahl aller Objekte zu einer vorgegebenen Aufgabenstellung zu bestimmen. Daran anknüpfend wurde die Ausgangsmenge zunächst um ein und dann um zwei und mehr Elemente erhöht. Bei den Erweiterungen der Aufgabenstellungen erhielten die Lernenden dabei nicht mehr den Auftrag, alle Lösungen zu erstellen, sondern wurden nach der Anzahl der Objekte gefragt.

Eine Analyse der Transkripte zeigt, dass einige der Lernenden, die systematisch alle Lösungen erstellen, zur Anzahlbestimmung auch bereits rechnerische Überlegungen anstellen. In den zur Verfügung stehenden Transkripten ermitteln allerdings nur Lernende aus dem Sekundarbereich die Lösung mittels einer Rechnung. Im Folgenden werden exemplarisch die operationalen Strategien von Ger und Ala betrachtet:

Transkr. 2.1 Gers operationale Anzahlbestimmung (Piaget & Inhelder 1975, S. 205)

	We begin only with two elements, 1 and 2. Ger finds immediately 12, 21, 11, 22
I.:	How many?
G.:	Four
I.:	How do you know that´s all?
G.:	There are two different digits which can be reversed (12 and 21).
I.:	And can you say what we will get with three elements before we try?
G.:	Six.
I.:	Why?
G.:	There are three different digits and we can invert them two times.
I.:	Try it.
G.:	There (He makes 13,31, 12 ,21, 32, 23, 11, 22 and 33)
G.:	That makes nine.
I.:	Can we put them in a different arrangement?
G.:	Yes (he orders them differently based on series of inversions)
I.:	Can you say ahead of time what we will get with four digits?
G.:	Yes, sixteen.
I.:	How did you figure it?
G.:	By multiplying four times four. We have four digits and we can arrange them in four different ways.
I.:	How did you get that idea (In reality it is by analogy with three times three equals nine
G.:	(He calculates) It will give twelve numbers (12,21,13,31,14,41,23,32,24,42,11,22,33,44)
I.:	Is that all?
G.:	Oh no, 43 and 34. That makes twelve plus the four (11, 22, 33, 44) and that makes sixteen.

Dem Ausschnitt ist zu entnehmen, dass Ger bei den Erweiterungen der Aufgabenstellungen die Anzahl aller Lösungen rechnerisch bestimmt. Besonders deutlich wird dies, als er 16 Möglichkeiten für das Bilden von zweistelligen Zahlen aus vier Ziffernkarten ermittelt und gebeten wird, zu aufzuzeigen, wie er diese Anzahl ermittelt hat: *„By multiplying four times four."*
Ala geht ebenfalls bei der Erweiterung der Aufgabenstellung rechnerisch vor. Seine Rechnung führt bei der Anzahlbestimmung für fünf Elemente zunächst zu einer fehlerhaften Anzahl, diese korrigiert er jedoch anschließend:

Transkr. 2.2 Alas operationale Anzahlbestimmung (Piaget & Inhelder 1975, S. 206)

Ala (12;7) makes 11,12,13,14,22,23,21,24,33,31,32,34,44,43,42,41	
I.:	Is that all?
A.:	Yes, I started with all the numbers beginning with 1, then beginning with 2,etc.
I.:	And with five numbers what will it be?
A.:	Twenty
I.:	Why?
A.:	Five numbers in each column, and four columns. Oh no, twenty five because the

	fifth column
I.:	And with six piles what?
A.:	Thirty-six
I..	Why?
A.:	It will again be a column and two 6´s in each column (he understands by that 15, 16, 25, 26, 35, 36, etc.) That makes six times six equals thirty-six

Den Transkriptausschnitten ist zu entnehmen, dass die Lernenden bereits rechnerisch die Anzahl aller Lösungen ermitteln. Zugleich zeigt sich jedoch auch, dass die verwendeten operationalen Strategien in einigen Fällen zu einer fehlerhaften Lösung führen. Die Ursache für diese fehlerhaften Rechnungen ist von besonderem Interesse. Dies bedarf einer Betrachtung der zugrunde liegenden Strukturierungen. Im Rahmen der Untersuchung Piagets und Inhelders (1975) wird die fehlerhafte Anzahlermittlung jedoch nicht genauer in den Blick genommen. Eine genauere Analyse ihrer Ausführungen zeigt auch auf, dass rechnerische Lösungen der Lernenden – wie in den obigen Beispielen – besonders häufig bei der Lösung zueinander analoger Problemstellungen auftreten. Es ist entsprechend zu vermuten, dass Lernende insbesondere dann rechnerische Strategien anwenden, wenn sie erste strukturelle Zusammenhänge aus der Bearbeitung der vorangegangenen Aufgabe ableiten können. Wissenschaftliche Belege, inwiefern diese Vermutung zutrifft, liegen bislang allerdings nicht vor.

Der Dissertation Lacks (2009) zu den Begabungsmerkmalen von Erst- und Zweitklässlern ist ebenfalls ein rechnerisches Vorgehen bei der Lösung zu dem gestellten Variationsproblem zu entnehmen. Der Schüler Willi ermittelt die Anzahl aller dreistöckigen Türme aus vier Bausteinen, indem er die Anzahl aller Türme für einen Baustein an einer festen Position ermittelt und von diesem auf die Anzahl aller Türme schließt. Er erstellt zunächst alle sechs Türme, in denen die Farbe blau die Spitze des Turmes bildet. Von dieser Anzahl ausgehend ermittelt er über die multiplikative Rechnung $4 \cdot 6$ die Anzahl aller Türme. Additive oder weitere multiplikative Strategien beschreibt sie hinsichtlich dieser Aufgabe jedoch nicht. Da der Fokus dieser Untersuchung allerdings auf dem Aufdecken mathematischer Begabung lag und nicht darauf, zu identifizieren, ob die Lernenden operationale Strategien zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen verwenden, ist nicht auszuschließen, dass die Lernenden weitere Strategien nutzten.

Insgesamt wurden insofern folgende operative Strategien im Kontext von Variationsproblemen identifiziert:

Operative Strategie	**Kontext**	**Rechnung**
Additive Strategie	-------------	-------------
Multiplikative Strategie	Zweistellige Zahlen aus vier Ziffernkarten	*„By multiplying four times four."*
Multiplikative Strategie (fehlerhafte Lösung)	Zweistellige Zahlen aus fünf Ziffernkarten	$6 \cdot 5$
	Dreistöckige Türme aus vier Bausteinen	$4 \cdot 6$

Tab. 2.26 Operationale Strategien bei Variationsproblemen

Operationale Strategien bei Kombinationen ohne Wiederholung

Grassmann (2002) stellt verschiedene kombinatorische Problemstellungen für mathematisch begabte Lernende vor und gibt exemplarisch Einblicke in die Lösungswege mathematischer interessierter und begabter Lernender. Zu einem Kombinationsproblem ohne Wiederholungen, in dem es um das Anstoßen mit Gläsern von 10 Personen geht, beschreibt sie zwei verschiedene additive Lösungsansätze:

„Lösungsüberlegungen, die wir beobachten konnten, gingen davon aus, dass jeder mit 9 anderen Personen anstößt, aber jedes Gläserklingen zweimal gezählt wurde, also nicht 90 sondern 45 das Ergebnis ist. Eine andere Strategie wird durch folgende Überlegungen charakterisiert: Der erste stößt mit 9 Personen an, der zweite noch mit 8 (mit einer Person hat er ja schon angestoßen), der dritte noch mit 7 usw. sodass das Ergebnis als 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 erhalten wird." (ebd., S. 20).

Ihre Erläuterungen zeigen insofern, dass mathematisch begabte Lernende bereits im Grundschulalter additive Lösungsstrategien zur Lösung von Kombinationsproblemen einsetzen.

Neubert (2003, S. 97f.) berichtet ebenfalls, dass Lernende in der Grundschule bereits rechnerisch die Anzahl aller Lösungen zu einer Kombinationsaufgabe ohne Wiederholung lösen. Lernende der vierten Klasse erhielten die in Abschnitt 1.1 beschriebene Tischtennisaufgabe, in der 6 Kinder ein Tischtennisturnier veranstalten wollen, auf dem jede Person genau einmal gegen jede andere spielt. Die gedankliche Strukturierung der Lernenden beschreibt Neubert (2003) wie folgt:

> *„Die Lernenden überlegten sich, dass jeder der sechs Teilnehmer gegen 5 andere spielt und rechneten $6 \cdot 5$. Dabei übersahen sie allerdings, dass jede Spielpaarung*

zweimal vorkommt und lösten eigentlich bereits die zweite Teilaufgabe“ (ebd., S. 98).

Anders als die beschriebenen Vorgehensweisen der mathematisch begabten Lernenden führt die Überlegung der Drittklässler in diesem Fall zu einer fehlerhaften Lösung. Das Beispiel zeigt jedoch auf, dass bereits Lernende in der Grundschule operative Überlegungen anstellen, wenn nach der Anzahl aller Lösungen gefragt wird und nicht nach einer Auflistung aller Lösungen.

Bezüglich des Lösens von Kombinationsproblemen wurden in verschiedenen Artikeln, die vorrangig die Vorgehensweisen von mathematisch begabten Lernenden in der Grundschule darstellen, insofern drei verschiedene operative Strategien benannt:

Operative Strategie	**Kontext**	**Rechnung**
Additive Strategie	Anstoßen von Gläsern bei 10 Personen	$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$
Multiplikative Strategie mit Kompensation	Anstoßen von Gläsern bei 10 Personen	*Jeder (der 10 Personen) stößt mit 9 anderen Personen an, aber jedes Gläserklingen zweimal gezählt wurde, also nicht 90 sondern 45 das Ergebnis ist*
Multiplikative Strategie (fehlerhafte Lösung)	Spiele auf einem Tischtennisturnier mit 6 Kindern	$6 \cdot 5$

Tab. 2.27 Operationale Strategien bei Kombinationen ohne Wiederholung

Da die dargestellten Strategien vorrangig von als begabt eingestuften Lernenden genutzt wurden, stellt sich die Frage, inwiefern Lernende grundsätzlich bereits operative Strategien verwenden, wenn nach der Anzahl aller Figuren gefragt wird. Zugleich stellt sich die Frage, welche Ursachen fehlerhafte operative Rechnungen haben.

2.5.2 Rekursive Strategien

Bislang liegen bezüglich rekursiver Strategien zu kombinatorischen Problemstellungen in der Literatur ebenso wie für den Einsatz operationaler Strategien nur wenige Informationen vor. Direkte Hinweise auf rekursive Vorgehensweisen sind allerdings in der Untersuchung von Piaget und Inhelder (1975) zu finden. Zudem weist Neubert (2003) im Kontext der Beschreibung des Einsatzes kombinatorischer Problemstellungen in der Grundschule auf die Verwendung rekursiver Strategien durch Lernende hin.

Piaget und Inhelder (1975) gehen im Rahmen ihrer Studien zwar nicht konkret auf die rekursiven Strategien von Lernenden ein, dennoch weisen die in ihren Ausführungen dargestellten Gesprächsausschnitte einige implizite Informationen zur Analogiebildung auf. Die verwendeten Gesprächsausschnitte zur Veranschaulichung der verschiedenen Entwicklungsstadien geben Anlass dazu, anzunehmen, dass Lernende bei festem k und einer Erhöhung der Ausgangsmenge durchaus auf die Ergebnisse der bereits gelösten Aufgabenstellungen zurückgreifen. Wenngleich rekursive Strategien in den Ausführungen Piagets und Inhelders (1975) nicht explizit aufgegriffen werden, lassen sich dennoch additive Rückbezüge zu den vorab gelösten Aufgabenstellungen lokalisieren, die darauf hinweisen, dass die Lernenden die Analogie zwischen den Aufgabenstellungen zur Anzahlbestimmung nutzten, indem sie diese rekursiv lösten (vgl. bspw. ebd. S. 204).

Diese Annahme wird ebenfalls durch die Ausführungen Neuberts (2003) bekräftigt. Er berichtet im Kontext der Erweiterung der Tischtennisaufgabe von der rekursiven Vorgehensweise einer Schülerin. So erhielten die Lernenden einer vierten Klasse im Abstand von mehreren Wochen zunächst den Auftrag, die Anzahl aller Spiele auf einem Tischtennisturnier mit 6 Teilnehmern zu bestimmen, später dann mit 7 Teilnehmern. Neben den zur Lösung der Grundaufgabe verwendeten Strategien griff eine Schülerin auf ein rekursives Vorgehen zurück, welches sie wie folgt erläuterte: *„Ich hab beim letzten Ergebnis 15 und dann plus 6, weil ja einer dazugekommen ist und der muss gegen die anderen 6 spielen.“* (ebd., S. 98).

2.5.3 Indirektes Zählen

Das Prinzip des indirekten Zählens beruht darauf, die Isomorphie zwischen zwei Aufgabenstellungen zu erkennen und zur Lösungsfindung zu nutzen (vgl. 1.2.2). Wenn Lernende Anzahlen indirekt bestimmen, so bedeutet dies, dass sie in der Lage sein müssen, isomorphe Strukturen zwischen gegebenen mathematischen Problemen zu erkennen. Da isomorphe Problemstellungen sich nach Kütting (1994) in der Repräsentation oder in dem Kontext, in den sie eingekleidet sind, unterscheiden, stellt sich bezogen auf Lernende die Frage, ob sie die mathematische Strukturgleichheit in kombinatorischen Problemstellungen erkennen und zur Lösungsfindung nutzen können, wenn diese sich bezüglich der Repräsentationsform oder bezüglich des Kontextes unterscheiden. Informationen liegen diesbezüglich aus einigen Studien für den Primarbereich (Hoffmann 2003; Neubert 2001a; Uptegrove & Maher 2004), sowie zu Studien aus dem Sekundarbereich vor (English 1993b; Hoffmann 2003), deren Resultate anschließend dargelegt werden.

2.5.3.1 *Isomorphe Strukturen bei verschiedenen Repräsentationsformen*

Hinsichtlich des Lösens zueinander isomorpher kombinatorischer Auflistungsprobleme liegen für die Primarstufe einige relevante Erkenntnisse vor. English (1993b) untersuchte, wie 8- bis 12-Jährige isomorphe kombinatorische Auflistungsprobleme zum Kreuzprodukt lösen, die sich hinsichtlich der Repräsentationsform unterscheiden. Die Lernenden erhielten einmal Material in Form von Bären und Kleidungsstücken zur Lösung der Problemstellungen und anschließend den Auftrag, die isomorphen Problemstellungen schriftlich zu lösen. Es zeigte sich, dass insbesondere lernschwächere Schüler bereits in der Lage sind, Problemstellungen informell zu lösen und davon profitieren, wenn sie die Lösungen zunächst handelnd ermitteln (English 1993b, S. 238). Die informell zu lösenden Problemstellungen wurden insgesamt erfolgreicher gelöst als die formellen Probleme. Da die zueinander strukturgleichen Aufgabenstellungen von den Lernenden mit unterschiedlichen Vorgehensweisen gelöst wurden, folgert English daraus, dass die isomorphen Zusammenhänge nicht erkannt wurden.
Nach der Bearbeitung der Aufgabenstellungen wurden die Lernenden aufgefordert, die Gemeinsamkeiten zwischen den Aufgabenstellungen zu betrachten. Diesbezüglich zeigt English auf, dass Lernende auch Schwierigkeiten beim Erkennen und Beschreiben der strukturellen Ähnlichkeit zwischen den Aufgabenstellungen hatten.

2.5.3.2 *Isomorphe Strukturen bei verschiedenen Kontexten*

In der von Hoffmann (2003) durchgeführten Untersuchung zum Vergleich zwischen den Lösungswegen von Primar- und Sekundarstufenschülern beim Lösen kombinatorischer Auflistungsprobleme, erhielten die Lernenden ebenfalls zueinander isomorphe Problemstellungen. Im Gegensatz zu den Studien Englishs unterschieden sich die Aufgabenstellungen im gegebenen Kontext (Häuser und Farbenschlossaufgaben) und im zur Verfügung stehenden Material. Hoffmann stellte ebenfalls fest, dass die Wahl der Lösungsstrategie bei zueinander isomorphen Aufgabenstellungen variiert und schlussfolgert daraus: *„Mathematisch strukturgleiche Aufgaben sind demnach nicht unbedingt auch im Hinblick auf die Problemlöseprozesse strukturgleich“* (ebd., S. 263). Die Ergebnisse Hoffmanns implizieren damit auch, dass in verschiedenen Kontexten verschiedene Lösungsstrategien verwendet werden.

Im Gegensatz zu den Darstellungen Englishs (1993b, 1996) und Hoffmanns (2003) hinsichtlich des Lösens von Auflistungsproblemen, berichtet Neubert (2001a) im Kontext des Lösens von Anzahlbestimmungsproblemen, dass viele Lernende einer vierten Klasse Zusammenhänge zwischen den Aufgabenstellungen erkannten, ohne kombinatorische Vorkenntnisse zu besitzen. Die Lernenden erhielten Permutationsprobleme mit drei unterscheidbaren Elementen. In der ersten Aufgabe sollten die Lernenden die Anzahl aller möglichen Türme aus drei farbigen Bausteinen ermitteln, in der zweiten Aufgabe sollten sie alle Möglichkeiten, drei Spiele nacheinander zu spielen, ermitteln. Er weist dabei darauf hin, dass die strukturellen Zusammenhänge von den Lernenden zu sehr unterschiedlichen Zeitpunkten und mit verschiedener Ausprägung erkannt wurden: *„Ein Schüler machte bereits nach dem Vorlesen der beiden Aufgabenstellungen die Bemerkung „Ist eigentlich genau dasselbe!“ Weitere Schüler schlugen ihren Partnern nach dem leisen Durchlesen der zweiten Aufgabe vor, genauso wie bei der ersten Aufgabe vorzugehen. Andere bemerkten beim Bearbeiten der zweiten Aufgabenstellung, dass die beiden Aufgaben die gleiche mathematische Struktur haben“ (Neubert 2003, S. 92).* Die Ausführungen Neuberts zeigen, dass das Erkennen isomorpher Zusammenhänge sowohl vor als auch beim Lösen von Problemstellungen erfolgen kann.

Im Rahmen der Langzeituntersuchung Mahers und ihrer Kollegen (2011) zur Entwicklung mathematischer Ideen, wurde aufbauend auf den Arbeiten Martinos (1992) auch erhoben, welchen Einfluss geeignete Fragestellungen seitens des Lehrers auf die Entwicklung mathematischer Konzepte haben (Uptegrove & Maher 2004). In diesem Rahmen zeigten sie auf, dass Lernende ausgehend von den Fragestellungen des Lehrers in der Lage sind, die Isomorphie zwischen Problemstellungen in unterschiedlichen Kontexten zu erkennen und zu verbalisieren. So beschreiben sie exemplarisch, wie Brandon die Isomorphie zwischen dem in Abschnitt dargestellten Turmproblem und der Lösung einer dazu isomorphen Problemstellung herstellt, nachdem die Lehrkraft ihn bittet, zu überlegen, ob die Lösung des Pizzaproblems ihn an eine bereits gelöste Aufgabenstellung erinnert. Zentral an Uptegroves und Mahers (2004) Ausführungen ist, dass Brandon den isomorphen Zusammenhang zwischen den Problemstellungen erkennt, seine Strukturierung der Figurenmenge zum Pizzaproblem auf die Strukturierung der Türme überträgt und den Zusammenhang zwischen den Problemstellungen durch eine Eins-zu-Eins-Zuordnung der ermittelten Figuren herstellt.

2.5.3.3 *Hürden beim Erkennen und Nutzen isomorpher Strukturen*

Die Ergebnisse der dargestellten Untersuchungen zeigen allesamt auf, dass Lernende isomorphe Auflistungsprobleme häufig mit unterschiedlichen Vorgehensweisen lösen, sie die strukturelle Gleichheit der Aufgabenstellungen demnach nicht nutzen. Doch wieso strukturgleiche Aufgabenstellungen mit unterschiedlichen Vorgehensweisen gelöst werden, bleibt unklar.

Das beschriebene Modell der subjektiven Erfahrungsbereiche von Bauersfeld (1983) liefert diesbezüglich einen Erklärungsansatz.

Er geht davon aus, dass wenn mathematisches Wissen im Sinne subjektiver Erfahrungsbereiche auf der Basis konkreter Erfahrungen bereichsspezifisch verarbeitet und organisiert wird, es möglich ist, dass zwei zueinander isomorphe Problemstellungen durch die Aktivierung verschiedener Erfahrungsbereiche gelöst werden. Um die strukturelle Gleichheit zu erkennen, bedarf es insofern eines zusätzlichen Transfers:

> *„So wird deutlich, dass bestimmte Vorstellungen von Generalisierung oder von Transfer das Problem vernachlässigen, wie denn zwischen zwei getrennten Erfahrungsbereichen -ohne einen vermittelnden dritten- eine tragfähige, auf strukturelle Identität gerichtete Verbindung gebildet werden soll, wenn dafür nur die Elemente der beiden SEB verfügbar sind, aber keine Erfahrung im Übertragen, im In-Beziehung-Setzen selbst" (Bauersfeld 1983, S. 8).*

Diese Ausführungen zeigen auf, dass strukturelle Vergleiche, die für das Lösen isomorpher Probleme notwendig sind, nur gelingen können, wenn ein SEB verfügbar ist oder spontan gegründet werden kann, der auf die Funktion des Vergleichens zielt. Dies ist insofern Voraussetzung, um kombinatorische Problemstellungen indirekt zu lösen.

2.5.4 Zusammenfassung

In Kapitel 1 wurde aufgezeigt, dass das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme unter Verwendung von Zählstrategien einen bedeutsamen Zugang zur Lösungsfindung darstellt. Dieser setzt nach Schrage (1996) keine unterrichtliche Thematisierung voraus, da die Zählstrategien auf den elementaren Grundoperationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation sowie der Division beruhen und insofern eine intuitive Anwendung möglich ist, wenn die verschiedenen Operationen im Unterricht thematisiert wurden.

Insgesamt liegen bislang keine Studien vor, die in den Blick nehmen, inwiefern Lernende in der Grundschule bereits in der Lage sind, kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme über Zählstrategien zu lösen. Vorliegende Untersuchungen zu anderen Schwerpunkten geben jedoch Hinweise darauf, dass Lernende sowohl im Sekundarbereich als auch in der Primarstufe bereits vor der Thematisierung im Unterricht Zählstrategien verwenden. Die Tabelle 2.28 gibt einen Überblick über die Benennung von Zählstrategien in Abhängigkeit von verschiedenen Figuren in verschiedenen Untersuchungen.

Strategie	Kombinatorische Problemstellung	Studie
Operationale Strategien	Kreuzprodukt	English (1998, 1999)
	Variationen ohne und mit Wiederholung	Piaget & Inhelder (1975); Lack (2009)
	Permutationen ohne Wiederholung	Lack (2009)

	Kombinationen ohne Wiederholung	Grassmann (2002); Heinze (2003)
Rekursive Strategien	Variationen ohne und mit Wiederholung	Piaget & Inhelder (1975)
	Permutationen ohne Wiederholung	Lack (2009)
	Kombinationen ohne Wiederholung	Neubert (2003)
Indirektes Zählen	Kreuzprodukt	Neubert (2001a)
	Produktregel	Uptegrove & Maher (2004)

Tab. 2.28 Hinweise auf den Einsatz von Zählstrategien im Rahmen verschiedener Untersuchungen

Den aufgelisteten Untersuchungen (English 1998, 1999; Lack 2009; Piaget & Inhelder 1975), Artikeln aus Grundschulzeitschriften und unterrichtspraktisch ausgerichteten Büchern (Grassmann 2002; Heinze 2003; Neubert 2003) ist zu entnehmen, dass Lernende aus der Sekundarstufe 1 ebenso wie begabte und mathematisch interessierte Grundschüler vor der Thematisierung im Unterricht bereits operationale sowie rekursive Strategien zur Anzahlbestimmung bei verschiedenen kombinatorischen Figuren verwenden.

Zudem lassen sich verschiedenen Studien und Artikeln Hinweise entnehmen, dass einige Lernende direkt eine operationale Strategie zur Anzahlbestimmung verwenden, andere diese hingegen aus der vorgenommenen Strukturierung der erstellten Figurenmenge ableiten. Sowohl bezüglich der Verwendung von Zählstrategien in der Grundschule als auch im Sekundarbereich zeigt sich dabei, dass diese oftmals zu einer fehlerhaften Anzahl an Lösungen führen. Ausgehend von den Darstellungen Lockwoods (2011) zu den Beziehungen zwischen den Rechnungen und dem Anzahlbestimmungsprozess (vgl. 2.3) erscheint es von besonderer Bedeutung zu sein, die zugrunde liegenden Konzepte und Strukturierungen der Lernenden genauer in den Blick zu nehmen sowie die operationalen Strategien der Schüler in Beziehung zu den fachlichen Strategien zu setzen, um ihre Schwierigkeiten besser verstehen zu können.

Es stellt sich entsprechend die Frage, ob Lernende kombinatorische Problemstellungen zu verschiedenen kombinatorischen Figuren bereits rechnerisch lösen, wenn sie den Auftrag erhalten, die Anzahl aller Objekte zu ermitteln und nicht alle aufzulisten. Zugleich ist auch von besonderem Interesse, welche Strukturierungen den Zählstrategien zugrunde liegen, da die vorliegenden Ergebnisse insbesondere aufzeigen, dass Zählstrategien oftmals auf der Grundlage vorgenommener Strukturierungen entstehen. Zudem stellt sich die Frage nach Beziehung zu den fachlichen Zählstrategien. Dies ist insbesondere deshalb von Belang, um Anknüpfungspunkte für den Unterricht herausarbeiten und zugleich mögliche Schwierigkeiten identifizieren zu können.

2.6 Zusammenfassung und Konsequenzen

Ausgehend von der in Kapitel 1 vorgenommenen fachlichen Betrachtung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme wurde herausgearbeitet, dass für den Primarbereich insbesondere Informationen über die Strukturierungsstrategien von Lernenden sowie mögliche Zählstrategien von Interesse sind, um an diese anknüpfen zu können (vgl. 1.4). In diesem zweiten Kapitel wurde entsprechend der mathematikdidaktische Kenntnisstand hinsichtlich der Strukturierungs- und Zählstrategien bei Anzahl- und Auflistungsproblemen dargestellt. Da aus dem Sekundarbereich und teilweise auch aus dem Primarbereich bekannt ist, dass verschiedene Faktoren einen Einfluss auf die Erfolgsquoten von Lernenden beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen haben, wurden diese ebenfalls in den Blick genommen. Ausgehend von einer detaillierten Betrachtung der vorliegenden Befunde zu den Einflussfaktoren (2.1), zur Rolle von Strukturierungen (2.2), zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien (2.3) sowie insbesondere zu den Strukturierungs- und Zählstrategien (2.4 & 2.5) wurden dabei abschließend jeweils die zentralen Erkenntnisse zusammengefasst sowie Forschungslücken, die insbesondere den Kenntnisstand hinsichtlich des Lösens von Anzahlbestimmungsproblemen in der Grundschule betreffen, dargestellt.
Folgend werden daher lediglich überblicksartig die zentralen Erkenntnisse zusammengefasst, um daran anknüpfend die unter propädeutischen Gesichtspunkten besonders zentralen Fragen und Forschungsinteressen abzuleiten. Auf der Grundlage dieser herausgearbeiteten Fragestellungen werden im nachfolgenden Kapitel die Forschungsfragen spezifiziert und das Design der Untersuchung dargestellt

(1) Einflussfaktoren

Aufgezeigt wurde, dass verschiedene Aufgabenvariablen einen Einfluss auf die Lösungserfolge und Strategien von Lernenden haben (vgl. 2.1). Zudem wurde auch in mehreren Studien darauf hingewiesen, dass zueinander isomorphe Problemstellungen mit verschiedenen Strategien gelöst werden (vgl. 2.5.3). Daraus ist zu folgern, dass neben den benannten Faktoren auch der Kontext die Lösungsstrategien von Lernenden beeinflusst. Wenn Aufgabenvariablen, wie die kombinatorische Figur, die impliziten Modellvorstellungen sowie die Art und Anzahl der zu kombinierenden Elemente, die Erfolgsquoten der Lernenden beeinflussen, so ist es zentral genauere Informationen darüber zu erhalten, warum diese Aufgaben unterschiedlich erfolgreich gelöst werden. Insofern bedarf es genauerer Erkenntnisse darüber, welchen Einfluss verschiedene Aufgabenvariablen auf die Anzahlbestimmungsstrategien von Lernenden haben. *Wie die Aufgabenvariablen die Vorgehensweisen von Lernenden im Detail beeinflussen, wurde in den vorliegenden Studien nicht erhoben und bedarf einer genaueren Betrachtung.*

Hinsichtlich der Einflussfaktoren sind unter propädeutischen Gesichtspunkten weiterführende Informationen zu folgenden Fragestellungen von besonderem Interesse:

- Welchen Einfluss haben die verschiedenen Modellvorstellungen, die kombinatorischen Figuren, die Art und Anzahl der zu kombinierenden Elemente sowie die gesuchten kombinatorischen Figuren, auf die informellen Lösungsstrategien der Lernenden?
- Inwiefern ergeben sich in Abhängigkeit von diesen Faktoren Unterschiede bezüglich der Strukturierung des Lösungsprozesses und Anzahlbestimmungsstrategien?
- Welche besonderen Herausforderungen lassen sich in Abhängigkeit von diesen Faktoren identifizieren?

Um Antworten hinsichtlich der Fragestellungen zu erhalten, ist zentral, dass möglichst viele Faktoren konstant gehalten werden, um den Einfluss einzelner Größen auf die Strategien von Lernenden ableiten zu können.

(2) Strukturierungen und Strukturierungsstrategien

Strukturierungen bilden den Ausgangspunkt für das systematische Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen (vgl. 1.2). So ist es ohne weitere Vorkenntnisse möglich, die gesuchte Anzahl über das Auflisten der Figurenmenge zu ermitteln. Um sicherzustellen, dass die Figurenmenge vollzählig ist, bedarf es einer Strukturierung der Menge oder des Prozesses der Erstellung der Figurenmenge.

Bekannt ist, dass einige Grundschüler Auflistungsprobleme bereits vollständig strukturiert lösen, dies gilt jedoch bei weitem nicht für alle Lernenden. Ebenso ist bekannt, dass strukturierte Vorgehensweisen sich oftmals im Verlauf des Lösungsprozesses entwickeln (2.2). Für das Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen ist grundsätzlich nicht zentral, ob das Vorgehen von vornherein strukturiert ist, sondern vielmehr, in welcher Beziehung die direkt eingesetzten oder entwickelten Strategien zu der erstellten Figurenmenge stehen. Verschiedene in Abschnitt 2.2 dargestellte Untersuchungen geben zudem Hinweise darauf, dass Lernende Problemstellungen zu Auflistungsproblemen eher strukturiert lösen, wenn vorbereitetes Material bereitgestellt wird. Insofern scheint die Materialbereitstellung von zentraler Bedeutung zu sein.
Nicht bekannt ist bislang, welche Rolle Strukturierungen beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme in der Grundschule spielen: Gehen Lernende eher strukturiert vor, wenn die Anzahlbestimmung im Fokus steht? Entwickeln sie ebenso wie bei Auflistungsproblemen Strukturierungsstrategien?
Aufgrund der besonderen Bedeutung von Strukturierungen für die Entwicklung kombinatorischer Anzahlbestimmungskonzepte *bedarf es hinsichtlich der Rolle von Strukturierungen beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen genauerer Informationen.*

Zu den Strukturierungsstrategien beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen fehlen konkrete Informationen. Der Fokus der mathematikdidaktischen Studien liegt bislang auf dem Lösen von Auflistungsproblemen, welche sich dadurch von Anzahlbestimmungsproblemen unterscheiden, dass eine direkte rechnerische Anzahlbestimmung nicht möglich und stattdessen in jedem Fall die vollständige Auflistung erforderlich ist. Insgesamt liegen zu verschiedenen kombinatorischen Figuren und Problemstellungen Strategien vor, jedoch nicht zu allen. Ein Vergleich der dargestellten Auflistungsstrategien bei verschiedenen Figuren und Problemstellungen zeigt, dass es einige Strategien gibt, die über verschiedene Problemstellungen hinweg zu beobachten sind, andere hingegen nur bei bestimmten kombinatorischen Figuren auftreten und wieder andere besonders häufig in bestimmten Kontexten verwendet werden. Von besonderem Interesse ist, welche Strukturierungsstrategien Lernende bei verschiedenen Anzahlbestimmungsproblemen verwenden. Aufgrund der Ergebnisse der Studien stellt sich dabei insbesondere die Frage, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Abhängigkeit von verschiedenen kombinatorischen Figuren und Kontexten sowie weiteren Variablen festgestellt werden könne.

Werden die Strukturierungsstrategien von Lernenden betrachtet, so bedarf es diesbezüglich eines Beschreibungsmodells. Aufgezeigt wurde, dass es bereits verschiedene Beschreibungsansätze gibt, die die Strategien von Lernenden bei Auflistungsproblemen mit verschiedenen Fokussierungen betrachten (2.3). Einen konkreten Ansatz, der die Strukturierungsstrategien von Lernenden bei Anzahlbestimmungsproblemen beschreibt, und dabei insbesondere die Beziehung zwischen der Figurenmenge und den Strukturierungsstrategien berücksichtigt, gibt es bislang noch nicht. Da der Vergleich der in verschiedenen Studien dargestellten Strukturierungsstrategien aufzeigt, dass einige Strategien über verschiedene Figuren hinweg verwendet werden, andere hingegen nur bei einer kombinatorischen Figur oder in einem bestimmten Kontext, stellt sich insbesondere die Frage, wie sich die Strukturierungsstrategien der Lernenden unter Berücksichtigung dieser Faktoren beschreiben lassen.

(3) Zählstrategien

Hinsichtlich des Einsatzes von Zählstrategien liegen für die Grundschule bislang noch keine konkreten Befunde vor (vgl. 2.5). Dies ist insbesondere darauf zurückzuführen, dass bislang vorrangig Untersuchungen zur Lösung von Auflistungsproblemen durchgeführt wurden (vgl. 2.5). Einige Untersuchungen und Beschreibungen liefern jedoch Hinweise, dass Lernende zu Beginn der Sekundarstufe Zählstrategien entwickeln, wenn sie nach der Anzahl aller Lösungen gefragt werden und nicht den konkreten Auftrag erhalten, alle Lösungen zu notieren. Ebenso liegen Informationen darüber vor, dass Lernende, die potentiell als mathematisch interessiert gelten, Zählstrategien verwendeten und auch Lernende im Unterricht eigenständig Anzahlbestimmungsstrategien entwickelten, wenn konkret nach der Anzahl aller Lösungen gefragt wurde. *Es ist insofern anzunehmen, dass Lernende durchaus bereits in der Grundschule Zählstrategien zur Anzahlbestimmung verwenden. Welche Zählstrategien Lernende entwickeln, bedarf einer genaueren Betrachtung.*

3 Forschungsfragen und Design der Untersuchung

In diesem Kapitel werden das Design der Untersuchung und die zugrunde liegenden methodologischen Überlegungen dargestellt. Im Folgenden werden zunächst in Abschnitt 3.1 die Zielsetzung der Untersuchung sowie die konkreten Forschungsfragen überblicksartig dargelegt. Daran knüpft in Abschnitt 3.2 die Darstellung des der Untersuchung zugrunde liegenden Forschungsrahmens an. Detaillierte Überlegungen und Entscheidungen zur Datenerhebung werden in Abschnitt 3.3 offengelegt. Diese betreffen den Einsatz klinischer Interviews, die Auswahl und das Design der Aufgaben sowie den Aufbau der Interviews.
In Abschnitt 3.4 folgt ein kurzer Abriss über die gesamte Durchführung der Untersuchung sowie die konkrete Beschreibung der einzelnen Teilstudien. Dies impliziert insbesondere die Modifikation einzelner Aufgaben und des Interviewdesigns, welche aufgrund neuer Erkenntnisse aus vorangegangenen Teilstudien vorgenommen wurde. Abschließend erfolgt in Abschnitt 3.5 die Darlegung und Begründung der Methoden zur Auswertung und Interpretation der Daten.

3.1 Zielsetzungen und Forschungsfragen

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beitrag zum besseren Verständnis der Vorgehens- und Denkweisen von Lernenden zur kombinatorischen Anzahlbestimmung zu leisten, um auf dieser Grundlage im Unterricht ein gesichertes Verständnis fördern und Schwierigkeiten entgegenwirken zu können.
Unter einer genetischen Sichtweise auf das Lernen bedarf es – wie in Kapitel 1 dargestellt – genauerer Kenntnisse über die Beziehungen zwischen den Vorgehensweisen und Denkwegen von Lernenden zur kombinatorischen Anzahlbestimmung sowie den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten dazu. Im Fokus der empirischen Untersuchung steht entsprechend folgende übergeordnete Forschungsfrage:

> *Wie lösen Lernende der Primarstufe vor der Thematisierung im Unterricht kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme und in welcher Beziehung stehen die Vorgehensweisen und Denkwege der Lernenden zu den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten?*

Ausgehend von dieser Frage und den vorliegenden Erkenntnissen aus internationalen Untersuchungen wurden in Abschnitt 2.5 spezifischere Forschungsinteressen bezüglich der Vorgehensweisen von Lernenden zur Anzahlbestimmung herausgearbeitet, die insbesondere aus der, der Arbeit zugrunde liegenden, genetischen Sichtweise auf Lernprozesse erwachsen. Die empirische Studie zielt ausgehend von den in Abschnitt 2.6 formulierten Forschungsinteressen auf die Beantwortung folgender Forschungsfragen:

Thema	Forschungsfragen
Einflussfaktoren	1. Wie beeinflussen die kombinatorische Figur und der Aufgabenkontext die Anzahlbestimmungsstrategien von Drittklässlern?
Strukturierungen im Lösungsprozess	2. Welche Rolle spielen Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen von Drittklässlern?
Beschreibung von Strukurierungsstrategien	3. Wie lassen sich die Strukturierungsstrategien unter Berücksichtigung des Einflusses der Aufgabenvariablen „kombinatorische Figur“ und „Kontext“ beschreiben?
Strukturierungsstrategien	4. Welche Strukturierungsstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen?
Zählstrategien	5. Welche Zählstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen?

Tab. 3.1 Themenbezogene Ableitung der Forschungsfragen

Im Rahmen der Untersuchung werden dabei die Vorgehensweisen und Vorstellungen von Lernenden der dritten Klassen betrachtet, da diese bereits Kenntnisse über mathematische Operationen (Addition, Subtraktion Multiplikation, Division) mitbringen und entsprechend die notwendigen Voraussetzungen besitzen, um die Anzahlbestimmungsprobleme auch mittels operationaler Strategien lösen zu können.

3.2 Forschungsrahmen

„Prinzipiell gibt es keine vorurteilsfreie Beobachtung der Wirklichkeit, man sieht Wirklichkeit gewissermaßen stets durch die zu Grunde gelegten Theorien und Methoden gefärbte Brille.“
(Vohns 2007, S. 70)

Vohns (ebd.) hebt hervor, dass Wirklichkeiten durch die Brille entstehen, durch die sie betrachtet werden. Entsprechend bedeutsam ist es, die der Untersuchung zugrunde liegenden Theorien und Methoden offenzulegen, um die Ergebnisse der Untersuchung nachvollziehen zu können.

Im Rahmen dieser Untersuchung wird Lernen im Sinne von Conceptual Change Ansätzen als die Veränderung bzw. Erweiterung vorhandener Vorstellungen aufgefasst (vgl. 2). Für den Unterricht bedeutet dies, dass fachliche Vorgehensweisen und Konzepte in Beziehung zu den vorhandenen Konzepten der Lernenden gesetzt werden müssen und entsprechende Informationen über die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen diesen notwendig sind, um diese für die Initiierung von Lernprozessen zu nutzen. Entsprechend dieser Annahme ist bei der Erhebung der Vorgehensweisen und Denkwege von Lernenden die Herstellung von Beziehungen zu den fachlichen Vorgehensweisen und Vorstellungen von zentraler Bedeutung. Diese theoretische Grundannahme spiegelt sich insbesondere in der zentralen Forschungsfrage wider:

> *Wie lösen Lernende der Primarstufe vor der Thematisierung im Unterricht kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme und in welcher Beziehung stehen die Vorgehensweisen und Denkwege der Lernenden zu den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten?*

Die der Fragestellung zugrunde liegende genetische Sichtweise auf Lernprozesse sowie die damit einhergehende Bedeutung der Fach- und Kindorientierung für mathematikdidaktische Untersuchungen wird nicht nur im Rahmen dieser Arbeit angenommen. So betont Vohns (2007, S. 78):

> *„Die mathematischen Konstruktionsleistungen der Schülerinnen und Schüler mögen als eigene von der Fachwissenschaft Mathematik zunächst unabhängige Kultur betrachtet werden, ihre Bewertung aus didaktischer Sicht ist aber ohne einen objektivierbaren fachlichen Kern unmöglich.“*

Die Bedeutung der Herstellung von Beziehungen zwischen fachlichen Überlegungen und den Denk-und Vorgehensweisen von Lernenden wird ebenfalls von einer Reihe weiterer Autoren hervorgehoben (u.a. Blum 1985; Hölzl 1994; Vohns 2008; vom Hofe 1992; Wittmann 2013).

Für die Untersuchung stellt sich ausgehend von dieser theoretischen Position die Frage nach der methodischen Umsetzung:

- Wie lassen sich die Vorgehensweisen und Denkwege der Lernenden methodisch in Beziehung zu den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten setzen?
- Und umfassender: Wie ist ein Forschungsprozess zu gestalten sowie welche Methoden der Datenerhebung und Auswertung sind zu wählen, um Beziehungen zwischen den Vorgehensweisen und Denkwegen der Lernenden beziehungsweise den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten herstellen zu können?

Antworten zur methodischen Umsetzung lassen sich in der Mathematikdidaktik unter anderem bei Hölzl (1994) und vom Hofe (1998) sowie in dem aus der

Naturwissenschaftsdidaktik stammenden und für die Mathematikdidaktik adaptierten Modell der didaktischen Rekonstruktion finden.
Hölzl (1994) geht davon aus, dass zunächst zur Explizierung des mathematischen Gegenstandes eine Sachanalyse durchzuführen ist. Danach wird anhand von Transkripten im zweiten Schritt das Geschehen aus der Perspektive des Handelnden nachgezeichnet. Ziel ist es, in diesem Schritt die subjektive Schlüssigkeit herauszuarbeiten und nicht das Verhalten und die Äußerungen des Handelnden unter dem Maßstab der Sachanalyse zu beurteilen. Der dritte Schritt besteht darin, den Problemlöseprozess unter Einbezug sachlogischer und stoffdidaktischer Aspekte zu analysieren, so dass als Ergebnis der Entwurf einer Gesamtdeutung entsteht, bei der die subjektive Rekonstruktion des Geschehens aus sachlogischer Sicht beurteilt wird.
Vom Hofe (1992, 1995a, 1995b, 1998) verknüpft in dem in seiner Dissertationsschrift verwendeten Grundvorstellungsansatz die aus fachlicher Sicht zu erwerbenden Grundvorstellungen zu einem mathematischen Inhalt mit den Vorstellungen der Lernenden:

„Eine umfassende Erklärung der Schülerstrategie und der Missverständnisse, die sich angesichts des vom Lehrer erwarteten bzw. vom Schüler eingeschlagenen Lösungsversuchs ergeben, bringt eine Analyse der normativ verwendeten Grundvorstellungen und der deskriptiv feststellbaren Individualvorstellungen, etwa unter den Leitfragen:

- *Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus Sicht des Lehrenden adäquat? (Normativer Aspekt)*
- *Welche individuellen Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des Schülers erkennen? (Deskriptiver Aspekt)*
- *Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen und wie lassen sich diese beheben? (Konstruktiver Aspekt)“* (vom Hofe 1995a, S. 116f.)

Als methodische Konsequenz nimmt er eine Datenanalyse auf zwei Ebenen vor: Zunächst werden die Schüleräußerungen auf Beschreibungsebene dargestellt, bevor ein Übergang zur Erklärungsebene erfolgt. Die Analysen bestehen entsprechend aus einem Wechselspiel deskriptiver und präskriptiver Betrachtungen:

„Nachzeichnen der subjektiven Schülerlogik:
Welche Vorstellungen und Ideen werden in den Lösungsversuchen der Schüler deutlich? Inwieweit lassen sich Denkmuster bzw. Lösungsstrategien nachzeichnen?

Vergleichende Einbeziehung präskriptiver Kategorien.
Inwieweit lassen sich Denkprozesse der Lernenden mit vorhandenen Begriffen und Modellen erfassen und erklären?" (vom Hofe 1999, S. 196)

In beiden Ansätzen werden entsprechend Überlegungen angestellt, wie sich methodisch Beziehungen zwischen Lernendenvorstellungen und fachlichen Vorstellungen herstellen lassen. Offen bleibt jedoch in beiden Ansätzen, wie die Gestaltung des Forschungsprozesses erfolgt.

Ein ähnlicher Grundgedanke und ein ähnliches methodisches Vorgehen liegen dem Modell der didaktischen Rekonstruktion zugrunde. Anders als die beiden beschriebenen Ansätze aus der Mathematikdidaktik bietet das Modell einen vollständigen konzeptuellen Rahmen zur Planung, Durchführung und Analyse von Forschungsvorhaben. Es bildet entsprechend den Rahmen dieser Untersuchung und wird im Folgenden genauer erläutert.

3.2.1 Das Modell der didaktischen Rekonstruktion

Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion ist als theoretischer und methodischer Rahmen für Forschungsarbeiten zu der Frage entwickelt worden, „wie bestimmte Inhaltsbereiche sinnvoll und fruchtbar unterrichtet werden können" (Kattmann & Gropengießer 1996, S. 182). In dem aus der Biologiedidaktik stammenden und mittlerweile für die Mathematikdidaktik adaptierten Forschungsmodell wird im Sinne des Conceptual Change Ansatzes angenommen, dass Schülervorstellungen einen Eigenwert besitzen. So werden sowohl den Anschauungen und inneren Tätigkeiten der Lernenden zentrale Bedeutung beigemessen als auch den im Fokus stehenden fachlichen Ideen und Modellen (vgl. Kattmann et al.1997). Es greift damit den Ansatz der Fach- & Kindorientierung als theoretischen Rahmen zur Planung, Durchführung und Evaluation fachdidaktischer Lehr- und Lernforschung auf.
Das besondere Interesse gilt im Rahmen des Modells dem Aufbau adäquater fachlicher Vorstellungen, wobei unter ‚Vorstellungen' alle kognitiven Konstrukte verstanden werden, „die Schüler zur Deutung ihrer Erfahrungen anwenden" (Kattmann & Gropengießer 1996, S. 182). Diese Konstrukte finden sich auf unterschiedlichen Komplexitätsebenen, dazu gehören sowohl ‚Begriffe', ‚Konzepte', ‚Denkfiguren' als auch Theorien (Gropengießer 2001, S. 30ff.). Die entscheidende Leistung des Modells besteht darin, systematisch Schülervorstellungen und fachlich geklärte Vorstellungen aufeinander zu beziehen und für die Konstruktion von Unterrichtsinhalten zu nutzen.
Für die mathematikdidaktische Forschung wurde das Modell insofern adaptiert, als dort nicht vorrangig zwischen Alltagsvorstellungen und den fachlichen Vorstellungen unterschieden wird, sondern zwischen „individuellen mathematischen Konzepten" und sogenannten „intendierten mathematischen Konzepten"

(vgl. Prediger 2008). Konzeptentwicklung und -aufbau von Lernenden kann dabei als Annäherung an diese intendierten mathematischen Konzepte aufgefasst werden (vgl. ebd.). Die individuellen Konzepte von Lernenden werden dabei solange als adäquat angesehen, bis durch eine Irritation in der Konfrontation mit einem neuen mathematischen Problem eine Denkhürde auftritt (vgl. Prediger 2007, S. 204).

Leitideen des Modells

Da Unterricht gemäß des genetischen Ansatzes von der Interdependenz der fachlichen und individuellen Vorgehensweisen und Vorstellungen geprägt ist, wird eine wechselseitige Verknüpfung zwischen *fachlicher Klärung*, der Erhebung der *Lernendenperspektiven* und der *didaktischen Strukturierung* notwendig (vgl. Kattmann et al. 1997; Kattmann 2007). Um einen Unterrichtsgegenstand didaktisch zu rekonstruieren, werden daher die drei benannten Bereiche eng aufeinander bezogen.

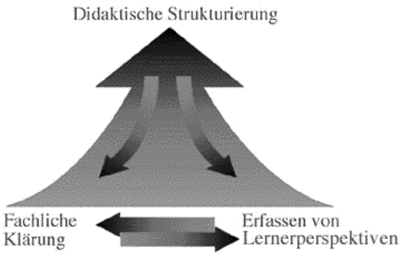


Abb. 3.1 Fachdidaktisches Triplett (aus Kattmann et al. 1997, S. 4)

Fachliche Klärung
Unter fachlicher Klärung wird das verstanden, was man in der Mathematikdidaktik auch als stoffdidaktische Analyse im weiteren Sinne bezeichnet: „Die didaktische Analyse und die stoffliche Konstruktion in ihren weit gefassten Bedeutungsbezügen“ (Prediger 2005, S. 27). Die fachliche Klärung umfasst im Sinne der didaktischen Rekonstruktion mehr als das, was Fachwissenschaftler aus dem jeweiligen Inhaltsbereich wahrnehmen: *„Da in vielen Fällen [...] fachliche Vorstellungen einfach wie selbstverständlich als bekannt vorausgesetzt [werden], ist eine kritische Analyse nötig, weil fachliche Darstellungen oft persönliche Sichtweisen enthalten, weil innerfachliche Bezüge zu kurz kommen oder weil historische Verständnisse meist unreflektiert oder sogar unerkannt hineinspielen“* (Kattmann 1992, S. 46f.).

Das Erfassen der Lernendenperspektiven

In der Annahme, dass die Vorstellungen der Lernenden einen Eigenwert haben, spielt das Erfassen der Lernendenperspektiven eine besondere Rolle (vgl. Kattmann et al. 1997). Sie dienen als Ausgangspunkte und Hilfsmittel des Lernens. Ziel des Forschungsansatzes ist daher die Rekonstruktion der Vorstellungen und Denkweisen der Lernenden.
Die Rekonstruktion der Vorstellungen wird mit Hilfe empirischer Untersuchungen zu individuellen Lernvoraussetzungen, die die Zuschreibung von mentalen

Werkzeugen bzw. gedanklichen Konstrukten erlauben, erreicht (vgl. Kattmann 2007; Gropengießer 2007).

Didaktische Strukturierung

Als didaktische Strukturierung wird der Planungsprozess bezeichnet, der zu grundsätzlichen und verallgemeinerbaren Ziel-, Inhalts- und Methodenentscheidungen für den Unterricht führt (vgl. Kattmann et al. 1997, S. 5). Um eine solche Strukturierung vornehmen zu können, bedarf es der „Verknüpfung der Ergebnisse der fachlichen Klärung mit denen der Erhebung von Schülervorstellungen […]. Zwischen den Konzepten, Denkfiguren und Theorien beider Seiten werden systematisch und strukturiert Beziehungen hergestellt. Dabei sollen zum einen die Charakteristika beider Seiten deutlich werden und zum anderen die lernförderlichen Korrespondenzen und voraussehbaren Lernschwierigkeiten" (ebd., S. 12). Für die didaktische Strukturierung sind daher unter anderem die folgenden Fragen zu klären (vgl. Kattmann 2007, S. 96f.):

- *„Welches sind die wichtigsten Elemente der Vorstellungen von Lernenden, die im Unterricht berücksichtigt werden müssen?*
- *Welche unterrichtlichen Möglichkeiten eröffnen sich, wenn die Vorstellungen der Lernenden im Unterricht berücksichtigt werden?*
- *Welche Vorstellungen der Lernenden korrespondieren mit wissenschaftlichen Konzepten und wie können diese für ein angemessenes und fruchtbares Lernen genutzt werden?"*

Die Betrachtung der drei Perspektiven ist in der Forschungspraxis der Fachdidaktiken nicht neu. Die entscheidende Leistung des Modells besteht jedoch in der wechselwirkenden Bezugnahme der fachlichen Klärung, der Lernendenperspektive und der didaktischen Strukturierung (vgl. Kattmann et al. 1997).

Die Gestaltung des Forschungsprozesses

In der Forschungspraxis sind im Rahmen der didaktischen Rekonstruktion die fachlichen Untersuchungen im analytischen Teil der Arbeit eng mit den Erhebungen der Lernendenvorstellungen im empirischen Teil sowie der Entwicklung von Elementen und Grundsätzen für die Vermittlung (konstruktiver Teil) verbunden. Entsprechend ergibt sich für den Forschungsprozess kein streng aufeinander folgender Ablauf von theoretischer Auseinandersetzung, Erhebung der Daten und Entwicklung der didaktischen Folgerungen und Konzepte, sondern ein iteratives Vorgehen.

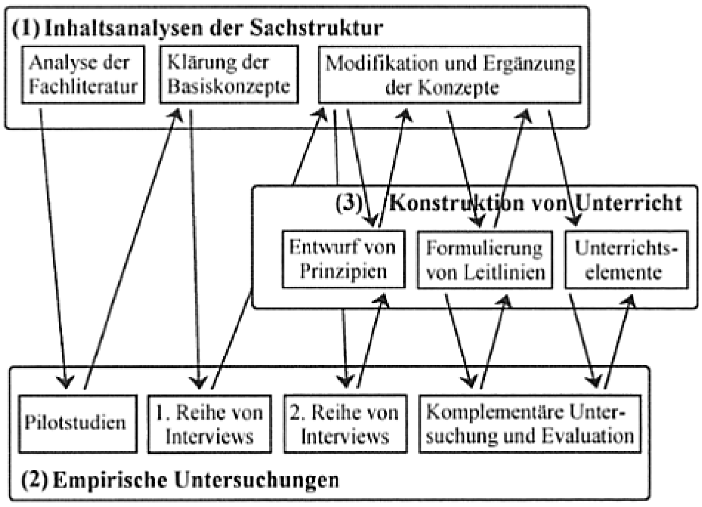


Abb. 3.2 Iteratives Untersuchungsdesign im Rahmen der didaktischen Rekonstruktion (aus Kattmann et al. 1997, S. 13)

Dieses Design trägt dazu bei, dass die erhobenen Schülervorstellungen und die geklärten fachlichen Anschauungen zuverlässig und zutreffend aufeinander bezogen werden können, da unzutreffende Schlussfolgerungen oder Zuordnungen durch das iterative Vorgehen selbst korrigiert werden. Die wechselseitige Verknüpfung zwischen fachlicher Klärung, der Erhebung von Lernendenperspektiven und der didaktischen Strukturierung, wird entsprechend in eine Abfolge übersetzt (vgl. Abb.3.2):

„Methodisch werden dazu die verallgemeinerten Vorstellungen der Wissenschaftler mit denen der Schüler verglichen. Zwischen den Konzepten, Denkfiguren und Theorien beider Seiten werden systematisch und strukturiert Beziehungen hergestellt. Dabei sollen zum einen die Charakteristika beider Perspektiven deutlich werden und zum anderen die lernförderlichen Korrespondenzen und voraussehbaren Lernschwierigkeiten. Auf diese Weise wird die mit dem iterativen Vorgehen implizierte wechselseitige Interpretation zu einem Abschluss gebracht.“ (Kattmann et al. 1997, S. 12)

Bei der didaktischen Rekonstruktion eines Gegenstandes kann sich dabei herausstellen, dass Teile der fachlichen Klärung fehlen oder neue Schwerpunkte gesetzt werden müssen. Ebenso können nach einer vertieften fachlichen Klärung weitere Erhebungen von Lernendenvorstellungen zu bestimmten Bereichen notwendig werden (vgl. Kattmann et al. 1997).

Die *Erhebung der Lernendenvorstellungen* erfolgt im Rahmen der didaktischen Rekonstruktion mittels Interviews. Dazu werden in der Regel leitfadengestützte

Interviews eingesetzt, durch die die Alltagsvorstellungen der Lernenden erhoben werden.

Die *Analyse der Daten* erfolgt idealtypisch in zwei Schritten. Bei der Auswertung der Daten geht es in einem ersten Schritt um die Identifizierung bereichsspezifischer Vorstellungen der Lernenden. Diese werden durch qualitative Inhaltsanalysen herausgearbeitet. Um der Interdependenz der fachlichen und individuellen Vorgehensweisen und Vorstellungen für die Konstruktion von Unterricht Rechnung zu tragen, ist für die didaktische Rekonstruktion ein weiterer methodischer Schritt notwendiger Bestandteil der Untersuchung (vgl. Kattmann 2007). Nach der Herausarbeitung der Vorstellungen der Lernenden erfolgt eine Gegenüberstellung der fachlichen Perspektive und der ermittelten Schülervorstellungen. Ziel ist die Ableitung erster Konsequenzen für die didaktische Strukturierung.

3.2.2 Adaption des Modells

Im Rahmen dieser Untersuchung wird der beschriebene Forschungsrahmen genutzt, um Informationen über die Vorgehensweisen und Denkwege von Lernenden beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme zu erhalten und diese in Beziehung zu den fachlichen Vorgehensweisen und Denkwegen zu setzen. Dabei gibt es jedoch in der Zielsetzung und der methodischen Umsetzung einige Unterschiede zu dem klassischen Ansatz der didaktischen Rekonstruktion.

Zielsetzung

Diese Arbeit zielt, anders als der klassische Ansatz der didaktischen Rekonstruktion, nicht nur auf die Rekonstruktion und das Verstehen von Vorstellungen, sondern insbesondere auch auf die Rekonstruktion der Vorgehensweisen der Lernenden und deren Verknüpfung mit den fachlichen Vorgehensweisen ab. Entsprechend werden im Rahmen der Interviews nicht nur Fragen zu den Vorstellungen der Lernenden gestellt. Sie erhalten stattdessen kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme, die sie lösen sollen.
Ebenso wie in der Arbeit Schinks (2013) zu den Vorstellungen von Lernenden bei Brüchen, liegt der Fokus dieser Arbeit vorrangig auf den Zusammenhängen zwischen den Denk- und Vorgehensweisen der Lernenden sowie den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten. Als Ergebnis dieser Gegenüberstellung werden Leitideen und Prinzipien für den Unterricht abgeleitet. Diese werden im Rahmen dieser Untersuchung jedoch nicht evaluiert, sondern bedürfen im Anschluss an diese Arbeit einer Überprüfung und genaueren Ausdifferenzierung.

Forschungsprozess

Die Durchführung der qualitativen Untersuchung gestaltet sich ebenso wie im klassischen Ansatz der didaktischen Rekonstruktion iterativ:

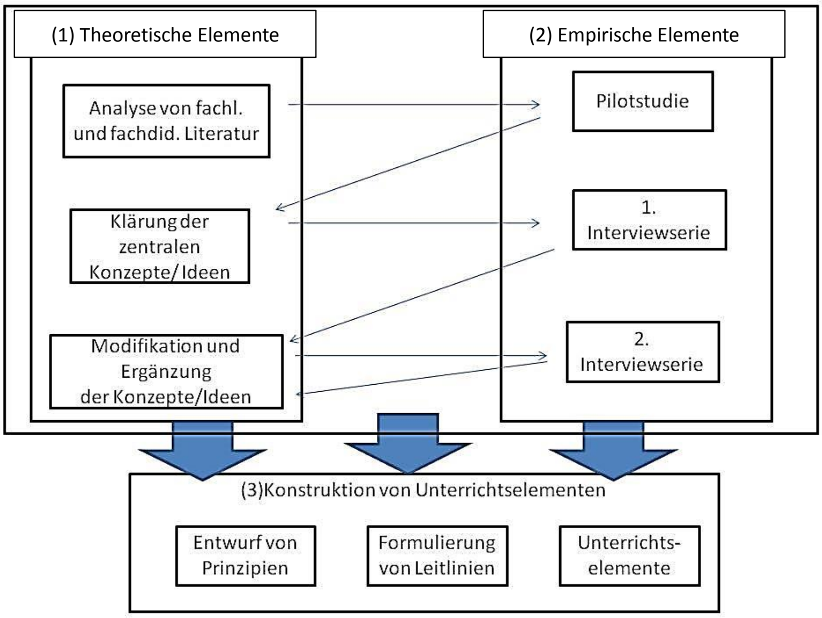


Abb. 3.3 Iteratives Vorgehen der Studie

Entsprechend sind auch im Rahmen der vorliegenden Untersuchung die Erhebung der Daten und ihre Analyse nicht getrennt voneinander zu betrachten, sondern stehen in einem engen Zusammenhang. Bereits nach der Sammlung der ersten Daten beginnt eine erste Analyse dieser. Dies ermöglicht die Formulierung erster Hypothesen, den Rückbezug auf die fachliche Perspektive und im weiteren Verlauf der Untersuchung die genauere Betrachtung und Ausformulierung oder gegebenenfalls die Umformulierung oder Verwerfung von Überlegungen (vgl. Bryman 2004, S. 399). Die Konstruktion von Unterrichtselementen wird aus den Ergebnissen der Untersuchung abgeleitet. Die Tragfähigkeit dieser Elemente wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr überprüft, sondern bedarf einer weiteren empirischen Untersuchung.

Damit trägt das Untersuchungsdesign auch der der Arbeit zugrunde liegenden epistemologischen Annahme Rechnung. Es wird davon ausgegangen, dass Theorien keine eindeutige Abbildung gegebener Fakten sind, sondern vielmehr eine vorläufige Version der Wirklichkeit darstellen (vgl. Flick 2002) und diese Version dementsprechend einer kontinuierlichen Revision, Überprüfung, Konstruktion und Rekonstruktion unterliegt. Es handelt sich um eine vorläufige Annahme, die durch die Weiterentwicklung der Version – beispielsweise durch die zusätzliche Interpretation weiterer Interviews – zunehmend begründeter wird. Im Sinne Webbs (1993) ist es dabei notwendig, möglichst vielschichtige Informationen zu sammeln, um möglichst exakte Rückschlüsse bzw. Schlussfolgerungen bezüglich der Denk- und Vorgehensweisen der Lernenden zu ziehen: *„The interpretation of student´s responses implies making inferences about what a student knows. The items in the assessment instruments from a sample of the possible tasks concerning a specific concept or procedure, so obtaining more accurate inferences requires as much varied information as possible." (Batanero et al. 1997a, S. 244)*

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wird entsprechend eine aus mehreren Teilstudien bestehende Untersuchung konzipiert. Das Design der Studie ist iterativ angelegt, um die wechselseitige Verknüpfung zwischen fachlicher Klärung, der Erhebung von Lernendenperspektiven und Leitideen zur didaktischen Strukturierung zu ermöglichen. Die Datenerhebung und -auswertung vollzieht sich somit in einem fortlaufenden Wechselspiel (vgl. 3.3).

Erhebung und Analyse der Daten

Das zentrale Werkzeug zur Erhebung der Daten stellt die klinische Interviewmethode dar, diese wird in Abschnitt 3.3.1 genauer beschrieben. Die mittels dieser Methode erhobenen Daten werden anschließend durch zentrale Techniken der Grounded Theory ausgewertet (vgl. Glaser & Strauss 1967). Zur Verfolgung der dieser Untersuchung zugrunde liegenden Fragestellungen werden entsprechend sowohl deskriptive als auch interpretative Analyseschritte vorgenommen. Bei der Auswertung der Daten geht es in einem ersten Schritt um die Identifizierung bereichsspezifischer Denk- und Vorgehensweisen zur Anzahlbestimmung. Die Verallgemeinerung der Vorstellungen und Handlungen erfolgt anschließend in Form einer Kategorienbildung. Die Kategorien werden dabei durch fachdidaktisch adaptierte Methoden der qualitativen Inhaltsanalyse in Kombination mit grundlegenden Techniken der Grounded Theory gewonnen (vgl. 3.5).
Um der Interdependenz der fachlichen und individuellen Vorgehensweisen und Vorstellungen für die Konstruktion von Unterricht Rechnung zu tragen, wird nach der Herausarbeitung der Vorstellungen der Lernenden im Bereich der Kombinatorik ein weiterer Analyseschritt vollzogen. Es erfolgt eine Gegenüberstellung der fachlichen Perspektive und der herausgearbeiteten Schülervorstellungen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede darstellen zu können (vgl. 3.5).

3.3 Erhebung der Daten

Die Erhebung der Daten erfolgt mittels Interviews, in denen den Lernenden verschiedene kombinatorische Aufgabenstellungen vorgelegt werden. Die Konzeption der Interviews und die Auswahl der Aufgaben beruhen auf den Zielsetzungen der Untersuchung (vgl. 3.1) und den herausgearbeiteten zentralen Vorgehensweisen und Konzepten (vgl. 3.2). Grundlage für die Erhebung kindlicher Denkprozesse mit Hilfe von Interviews bildet die aus der Psychoanalyse stammende „methode clinique". Diese halbstandardisierte Interviewmethode wird durch ihre konzeptionelle Offenheit in besonderem Maße der Unvorhersehbarkeit der kindlichen Denkwege und Vorgehensweisen und damit der vorliegenden Problemstellung gerecht.

3.3.1 Die klinische Methode

In ihrem Ursprung ist die „methode clinique" ein Verfahren zur Erforschung der Psychogenese, in dem der Therapeut durch behutsames Nachfragen versucht, den Klienten zur Offenlegung seiner Gedanken zu animieren (vgl. Ginsburg 1981, 1997; Ginsburg & Opper 1998; Wittmann 1982). Diese auch in der hermeneutisch-interpretativen, der experimentellen und der klinischen Psychologie verwendete spezielle Form des Einzelgesprächs wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts erstmals von Piaget zur Erforschung des Denkens von Kindern und Jugendlichen eingesetzt. Piagets Ziel bestand darin, Denkprozesse, die Handlungen und verbalen Äußerungen zugrunde liegen, zu verstehen. Die zu seiner Zeit genutzte sehr offene Methode der Beobachtung und die zielgerichteten, standardisierten Tests erschienen ihm ungeeignet, um Erkenntnisse über das Denken von Kindern zu erlangen. Dementsprechend nutzte er die klinische Methode, da diese die Zielgerichtetheit standardisierter Tests und die Offenheit der Beobachtungsmethode verbindet (vgl. Ginsburg 1981). Der Grundgedanke des klinischen Interviews besteht darin, eine Person mit einer Situation oder einem Problem zu konfrontieren. Der Forscher beobachtet, wie sie mit der Situation umgeht und versucht, sie durch behutsames Nachfragen zur Offenlegung ihrer Gedanken zu animieren, um die Denkprozesse, die sie anwendet, verstehen zu lernen. Da Kinder im Grundschulalter nicht in vollem Umfang zur Verbalisierung ihres Wissens und ihrer Denkprozesse fähig sind, revidierte Piaget die klinische Methode, indem er im Gegensatz zur klassischen Methode des klinischen Interviews nicht nur auf die Sprache, sondern auch auf die Handlungen mit bestimmten Materialien fokussierte.

Von besonderer Bedeutung ist bei dieser Methode das Verhalten des Interviewers. Dieses sollte durch ein hohes Maß an Sensibilität und bewusste Zurückhaltung geprägt sein, um den Lernenden genügend Raum zum Denken zu geben. Die bewusste Zurückhaltung bezieht sich zugleich auch auf das Stellen von Suggestivfragen und penetrante Nachfragen. Beides sollte unbedingt vermieden

werden, um dem Kind Zeit und Raum zu geben, die eigenen Gedanken offenzulegen (vgl. Selter & Spiegel 1997). Um in der jeweiligen Interviewsituation zielgerichtet und zugleich flexibel agieren zu können, ist es sinnvoll, einen Leitfaden mit vorformulierten Aufgaben, obligatorischen Fragen und möglichen Impulsen zu entwerfen, der das Thema des Interviews problemzentriert eingrenzt und zugleich den Interviewer darin unterstützt, auf spezifische Situationen sinnvoll reagieren zu können (vgl. ebd.).
Bei der Durchführung klinischer Interviews sind potentielle Probleme, wie beispielsweise der Einfluss sozialer Wirkungen, die Künstlichkeit der Untersuchungssituation, implizite Lernprozesse, sowie Auffassungs- & Verständigungsprobleme zu berücksichtigen und im Hinblick auf die Auswertung der Daten zu beachten (vgl. Beck & Maier 1993, S. 161f.).

3.3.2 Auswahl der Aufgaben

Für die Untersuchung wurden insgesamt sechs verschiedene kombinatorische Aufgaben ausgewählt, von denen jeweils zwei Aufgabenstellungen den „Variationen ohne Wiederholung", den „Kombinationen ohne Wiederholung" beziehungsweise den „Kombinationen mit Wiederholung" zuzuordnen sind.

		Variationen ohne Wiederholung	**Kombinationen ohne Wiederholung**	**Kombinationen mit Wiederholung**
		Türme	*Fußball*	*Eismann*
Isomorphe Aufgabenstellungen	*Farben*	Hier hast du vier Bausteine in verschiedenen Farben (rot, grün, gelb und blau). Wie viele verschiedene zweistöckige Türme kannst du insgesamt bauen?	Auf einem Fußballturnier spielen vier Mannschaften (rot, grün, blau und gelb). Jede Mannschaft soll genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielen. Wie viele Fußballspiele gibt es insgesamt auf dem Turnier?	Lena hat vier Lieblingseissorten: Erdbeere, Waldmeister, Zitrone und Schlumpfeis (rot, grün, gelb und blau). Sie hat zum Geburtstag einen Gutschein beim Eisverkäufer bekommen. Nun möchte sie sich jeden Tag ein Eishörnchen mit zwei Kugeln kaufen. Wie viele verschiedene Eishörnchen mit zwei Kugeln kann Lena sich kaufen?
		Zahlen aus Ziffernkarten	*Lotto*	*Dominosteine* [17]
	Zahlen	Hier hast du vier Karten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4. Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen kannst du mit den Ziffernkarten legen?	Ich lege vier Kugeln mit Zahlen in das Säckchen. . Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei Zahlen aus dem Säckchen zu ziehen?	Hier siehst du verschiedene Punktmuster: 1, 2, 3 und 4. Wie viele Dominosteine mit den Punktmustern 1, 2, 3 und 4 gibt es insgesamt?

Tab. 3.2 Übersicht über die in der Untersuchung verwendeten Aufgabenstellungen

[17] Punktmuster als Zahlrepräsentanten

Der Auswahl der Aufgaben lagen vier notwendige Bedingungen zugrunde:

1. Es sollen Vorgehensweisen und Vorstellungen zu Aufgaben der Typen *Variationen ohne Wiederholung*, *Kombinationen ohne Wiederholung* und *Kombinationen mit Wiederholung* miteinander verglichen werden.
2. Es soll jeweils zwei zueinander isomorphe Aufgabenstellungen geben.
3. Die Aufgabenstellungen sollen hinsichtlich der auszuwählenden Grundmengen erweiterbar sein.
4. Die isomorphen Aufgabenstellungen sollen sich nur durch den Kontext und die zu kombinierenden Elemente unterscheiden, die zugrunde liegenden Modellvorstellungen sollen gleich sein.

Die ersten drei Bedingungen beziehen sich auf die herausgearbeiteten zentralen kombinatorischen Konzepte und Vorgehensweisen und insbesondere auf den Einfluss verschiedener Aufgabenvariablen (vgl. 1.2 & 2.1). Zusätzliche Aspekte werden durch ergänzende Fragestellungen und Arbeitsaufträge im Interview angesprochen. Die vierte Bedingung ergibt sich aus dem in Abschnitt 2.1 dargestellten Einfluss der Modellvorstellungen auf die Strategie von Lernenden. Unter dieser Perspektive ist es notwendig, Problemstellungen der gleichen zugrunde liegenden Modellvorstellung auszuwählen, um die Strukturierungen vergleichen zu können. Als zusätzliche hinreichende Bedingungen wurden bei der Auswahl die fachliche Reichhaltigkeit der Aufgaben sowie möglichst sinnhafte Kontexte berücksichtigt. Auf diese zusätzlichen Bedingungen wird abschließend explizit eingegangen.

1. Zur Auswahl der kombinatorischen Grundfiguren
Die Fokussierung auf die drei genannten kombinatorischen Grundfiguren basiert vorwiegend auf den Erkenntnissen vorangegangener Studien (vgl. 2.4 & 2.5). Der Vergleich der Bearbeitung der drei verschiedenen Aufgabentypen ermöglicht die Herausarbeitung möglicher übergreifender Strukturierungen. Zugleich erlaubt der Vergleich das Feststellen aufgabenspezifischer Strukturierungen, mit dem Ziel, Präkonzepte zu den kombinatorischen Operationen herausarbeiten zu können.
Der Vergleich der drei ausgewählten kombinatorischen Figuren bietet sich dabei insbesondere an, da diese eng zusammenhängen. So differieren die Kombinationen mit und ohne Wiederholung nur darin, dass Elemente mehrfach vorkommen können. Die Kombinationen ohne Wiederholung und die Variationen ohne Wiederholung unterscheiden sich nur insofern, als bei den Variationen zusätzlich überlegt werden muss, wie viele Permutationen es zu den Kombinationen ohne Wiederholung gibt (vgl.1.3).

2. Zur Erweiterbarkeit der Grundmenge

Wesentliche Strategien zum Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen sind das Erkennen und Nutzen von Analogien sowie das rekursive Lösen von Aufgabenstellungen (vgl. 1.2). Um zu überprüfen, ob die Lernenden dazu in der Lage sind, erhalten sie nacheinander zwei Aufgabenstellungen, in denen sich lediglich die Anzahl der Elemente der Grundmenge um 1 erhöht. Es soll zudem herausgefunden werden, inwiefern sie rekursiv die Anzahl aller Lösungen ermitteln. Entsprechend müssen die Aufgabenstellungen die Erweiterung der Grundmenge ermöglichen.

	„Turmbau“ (Farben)	„Zahlen aus Ziffernkarten“ (Zahlen)
(a) Grundaufgabe	Hier hast du vier Bausteine in verschiedenen Farben (rot, grün, gelb und blau). Wie viele verschiedene zweistöckige Türme kannst du insgesamt bauen?	Hier hast du vier Karten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4. Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen kannst du mit den Ziffernkarten legen?
(b) Erweiterung	Wie viele verschiedene Türme kannst du mit fünf verschiedenfarbigen Bausteinen bauen?	Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen kannst du mit fünf Ziffernkarten legen?

Tab. 3.3 Erweiterung der Aufgabenstellungen zur Überprüfung der Analogiebildung

3. Zur Auswahl zueinander isomorpher Aufgabenstellungen

Das Erkennen und Nutzen von Isomorphien ist notwendig, um kombinatorische Problemstellungen über das indirekte Zählen lösen zu können. Wird die Isomorphie zwischen zwei Aufgaben erkannt, so kann die Lösung der einen Aufgabe genutzt werden, um die in der anderen Aufgabe gesuchte Anzahl indirekt zu ermitteln (vgl. 1.2.2). In den Interviews richtet sich der Blick somit darauf, inwiefern die Kinder schon in der dritten Klasse in der Lage sind, indirekt die gesuchte Anzahl zu ermitteln. Entsprechend gibt es insgesamt zu jeder kombinatorischen Figur zwei isomorphe Aufgabenstellungen.

„Turmbau“ (Farben)	„Zahlen aus Ziffernkarten“ (Zahlen)
Hier hast du vier Bausteine in verschiedenen Farben (rot, grün, gelb und blau). Wie viele verschiedene Türme aus zwei Bausteinen kannst du insgesamt bauen?	Hier hast du vier Karten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4. Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen kannst du mit den Ziffernkarten legen?

Tab. 3.4 Zueinander isomorphe Aufgabenstellungen zu den „Variationen ohne Wiederholung“

4. Zu den Aufgabenvariablen
Um eine Vergleichbarkeit der Aufgabenstellungen über die verschiedenen Figuren hinweg zu erzielen, ist eine Reduktion hinsichtlich der zu unterscheidenden Aufgabenvariablen notwendig (vgl. 2.1 & 2.6). Diese Reduktion wird insbesondere auf Grund der Ergebnisse der Studie von Batanero et al. (1997a) vorgenommen.
Allen Aufgaben liegt primär die Modellvorstellung des Auswählens zugrunde, wodurch ausgeschlossen werden kann, dass die unterschiedlichen Strukturierungen auf verschiedene den Aufgaben zugrunde liegenden Vorstellungen zurückzuführen sind.
Die Studie von Batanero et al. (1997a) (vgl. 2.1) zeigt ferner, dass der Grad der Aufgabenschwierigkeit auch von der Art der zu kombinierenden Elementen sowie der Anzahl der Elemente der Grundmenge und der zu kombinierenden Elemente abhängt. Daher wird für diese Studie zu jeder der drei kombinatorischen Figuren jeweils eine Aufgabenstellung ausgewählt, in der Zahlen bzw. Farben kombiniert werden müssen. Die Anzahl der Elemente der Grundmenge und der zu kombinierenden Elemente ist hingegen in allen verwendeten Aufgabenstellungen gleich.

5. Reichhaltigkeit der Aufgaben
Hinsichtlich der Reichhaltigkeit der Aufgabenstellungen standen folgende Fragen im Mittelpunkt: Welche Veränderungen sind möglich, um weitere Bausteine des kombinatorischen Denkens zu berücksichtigen? Eignen sich die Aufgabenstellungen zur Erstellung substanzieller Lernumgebungen?

Die ausgewählten Aufgabenstellungen sind so veränderbar, dass neben den beschriebenen notwendigen Kriterien auch

- die Anzahl der k auszuwählenden Objekte von $k = 2$ mindestens auf $k = 3$ erhöht werden kann, so dass es auch hier möglich ist, über Zusammenhänge und Verallgemeinerungen nachzudenken.
- die Aufgabenstellungen so veränderbar sind, dass auch andere kombinatorische Figuren im gleichen Kontext behandelt und so Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede zwischen den Aufgabenstellungen und damit zwischen den kombinatorischen Figuren entdeckt werden können.

Die folgende Tabelle[18] zeigt, inwiefern die zusätzlichen hinreichenden Kriterien auf die ausgewählten Aufgabenstellungen zutreffen.

	Variationen ohne Wiederholung		**Kombinationen ohne Wiederho-lung**		**Kombinationen mit Wiederholung**	
	Türme	*Zahlen aus Ziffernkarten*	*Fußball*	*Lotto*	*Eismann*	*Domi-no-steine*
Erhöhung der Grundmenge	*Ja*	*Ja*	*Ja*	*Ja*	*Ja*	*b*
Erhöhung der Anzahl der zu kombinieren-den Objekte	*Ja*	*Ja*	*b*	*Ja*	*Ja*	*b*
Andere kom-binatorische Figuren	*Ja*	*Ja*	*B*	*b*	*Ja*	*Ja*

Tab. 3.5 Aufgabenstellungen und erfüllte Auswahlwahlkriterien

3.3.3 Konzeption der Interviews

Insgesamt werden in der Studie die Vorgehensweisen von Drittklässlern bei der Bearbeitung von Aufgaben zu drei verschiedenen Grundfiguren miteinander verglichen. Dazu ist die Durchführung von drei gleich strukturierten Interviews A, B und C vorgesehen, in denen jeweils Aufgaben zu einer kombinatorischen Grundfigur gestellt werden.
In Interviewtyp A werden Aufgaben des Typs „Variationen ohne Wiederholung" gestellt, in Interviewtyp B Aufgaben des „Typs Kombinationen ohne Wiederholung" und in Interviewtyp C „Aufgaben des Typs Kombinationen mit Wiederholung". In jedem Interview erhalten die Lernenden zwei zueinander isomorphe Aufgabenstellungen zu einer kombinatorischen Grundfigur (vgl. 3.3.2).

18 „Ja" bedeutet, dass die Kriterien ohne Veränderungen der Aufgabe zutreffen. „b" steht für bedingt möglich; für eine sinnvolle Erweiterung der Aufgabe sind jedoch Veränderungen an der Aufgabenstellung notwendig. So ist es beispielsweise möglich, anstatt des normalen Fußballspiels davon auszugehen, dass immer drei Mannschaften in einem Turnier gegeneinander spielen. Dies ist für den Sportunterricht der Grundschule eine durchaus gängige Variation des Spiels.

	Interview A: Variationen ohne Wiederholung	Interview B: Kombinationen ohne Wiederholung	Interview C: Kombinationen mit Wiederholung
Farben	Türme	Fußball	Eismann
Zahlen	Zahlen aus Ziffernkarten	Lotto	Dominosteine

Tab. 3.6 Übersicht über die in der Untersuchung verwendeten Aufgabenstellungen

Da davon auszugehen ist, dass die Vorgehensweisen der Kinder von Lerneffekten in der Interviewsituation beeinflusst werden, alterniert die Abfolge der Bearbeitung der Farben- und der Zahlenaufgabe in den verschiedenen Interviews. Damit wird ausgeschlossen, dass aufgrund der Anordnung der Aufgabenstellungen im Interview falsche Schlussfolgerungen bzgl. der Kontextabhängigkeit von Lösungswegen und vorgenommenen Strukturierungen getroffen werden.
Die Interviews sind so konzipiert, dass sie in der Zeitdauer von etwa einer Unterrichtsstunde (45 min) durchgeführt werden können. Dieser Zeitrahmen ist für Kinder der dritten Jahrgangsstufe angemessen, da das Interview aus Phasen besteht, in denen das jeweilige Kind alleine Aufgabenstellungen bearbeitet, und aus Phasen, in denen ein Gespräch mit dem Interviewer über das eigene Vorgehen stattfindet. Um der Heterogenität der Kompetenzen der Lernenden Rechnung zu tragen, werden weiterführende Aufgabenstellungen und Abbruchkriterien entwickelt und bereitgestellt. Der Lösungsweg wird den Lernenden vollständig freigestellt. In allen Interviews wird ihnen Material in ausreichendem Maße zur Verfügung gestellt, um mögliche Lösungen entsprechend materialgestützt darstellen zu können. Grundsätzlich bleibt es jedoch den Kindern überlassen, ob sie das Material nutzen oder ob sie andere Darstellungen und Notationen zur Lösungsfindung verwenden.
Zum Interviewdesign wären einige Alternativen denkbar gewesen. So hätten beispielsweise alle drei Interviews sukzessive mit einem Kind geführt werden können. Dieses Design hätte den Vorteil gehabt, die Vorgehensweisen und Vorstellungen jeweils eines Kindes bei den verschiedenen kombinatorischen Figuren vergleichen zu können. Da jedoch auch hier zu unterstellen gewesen wäre, dass die Kinder in den vorausgehenden Interviews große Lerneffekte erzielten, wäre eine weitere Rotation der Aufgabenstellungen notwendig gewesen. Diese hätte zugleich eine größere notwendige Auswahl an Kindern impliziert.

Der Leitfaden

Der konzeptionelle Rahmen für die Durchführung der Interviews wird mit Hilfe von Interviewleitfäden aufgespannt. Diese enthalten zu Beginn eine kurze Darstellung des notwendigen Hintergrundwissens, der übergeordneten Fragestellungen und der Beobachtungsschwerpunkte. Daran knüpfen obligatorische Aufgabenstellungen und Fragen, eine Sammlung fakultativer Nach- bzw. Nebenfragen und weiterführende Aufgabenstellungen sowie Informationen über die aus der Literatur bekannten Vorgehensweisen und Schwierigkeiten der Lernenden an.

Der Leitfaden mit den Leitfragen dient dem Interviewer als Orientierung. Die für das klinische Interview charakteristischen, vorab festgelegten Kernaufgaben und Leitfragen stellen sicher, dass die Vorgehensweisen und Vorstellungen verschiedener Kinder beim Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen miteinander verglichen werden können, der Ablauf der Interviews aber dennoch durch das spezifische Vorgehen des jeweiligen Kindes gekennzeichnet ist (vgl. dazu Selter & Spiegel 1997; Wittmann 1982).

Da der Verlauf der Interviews im Sinne Piagets klinischer Methode am individuellen Vorgehen der Kinder ausgerichtet sein sollte, sind weder die Aufgabenstellungen noch die konkreten Formulierungen der Fragestellungen wörtlich festgelegt. Seitens des Interviewers erfordert diese prinzipielle Offenheit ein hohes Maß an Sensibilität für den Verlauf des Interviews. Einzelentscheidungen können nur in der Interviewsituation selbst getroffen werden und sind abhängig von den Antworten und Reaktionen des Kindes. Die aus der Literatur abgeleiteten Informationen zu möglichen Vorgehensweisen und Schwierigkeiten dienen dem Interviewer als Hilfe, um auf entsprechende Reaktionen vorbereitet zu sein und um möglichst viel über das Denken des Kindes zu erfahren.

Phasen des Interviewablaufs

Die Interviews gliedern sich in zwei aufeinanderfolgende Phasen, von denen die erste Phase dem Vertrautmachen mit der Situation und dem gegenseitigen Kennenlernen von Interviewer und Kind dient.

In der zweiten Phase erfolgt die Bearbeitung zweier zueinander isomorpher, kombinatorischer Aufgabenstellungen. Die Kinder erhalten eine Kontextaufgabe, in der sie mit Zahlen (2.1) und eine, in der sie mit Farben (2.2) alle möglichen gesuchten Kombinationen ermitteln sollen.

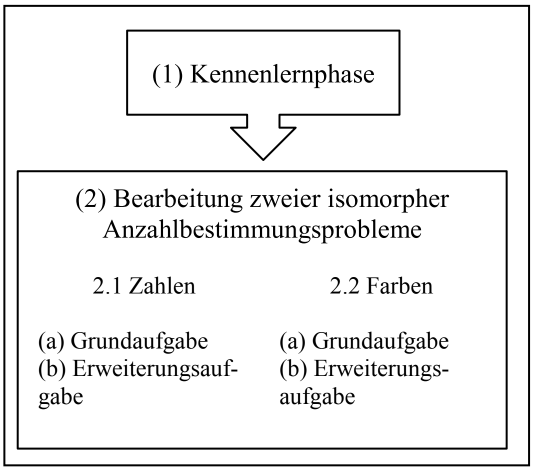


Abb. 3.4 Phasen des Interviewablaufs

Im Folgenden werden der konkrete Interviewablauf sowie die mit den einzelnen Aufgabenstellungen intendierten Zielsetzungen exemplarisch anhand der „Variationen ohne Wiederholung“ dargestellt.

(1) Kennenlernphase

Die Kennenlernphase ist von besonderer Bedeutung, um der Künstlichkeit der Situation entgegenzuwirken und dem Kind die mögliche Angst vor der ungewohnten Situation zu nehmen. Durch einen Einstieg mit Fragen zum Unterricht oder zum Alltag des Kindes wird die Gesprächsatmosphäre aufgelockert. Im Leitfaden werden dazu mögliche Gesprächsanlässe aufgeführt. Dem Kind wird anschließend erklärt, dass es nicht um die Richtigkeit der Lösungen geht, sondern vielmehr darum, seine Vorgehens- & Denkweisen zu verstehen.

(2) Bearbeitung der isomorphen Aufgabenstellungen

Die Farben- und die Zahlenaufgabe werden nacheinander bearbeitet. Sie bestehen jeweils aus mehreren analogen Teilaufgaben, von denen die Grundaufgabe (a) und die weiterführende Aufgabe (b) von allen Kindern bearbeitet werden sollen. Neben den festgelegten Aufgabenstellungen gibt es eine Reihe von Nach- und Nebenfragen, die auf zentrale kombinatorische Konzepte und Vorgehensweisen fokussieren und zum Einsatz kommen, wenn die genannten Aspekte nicht bereits innerhalb des Vorgehens des Kindes thematisiert werden.
Vor der Bearbeitung von Aufgabenteil (a) wird zunächst die Aufgabenstellung geklärt. Um sicherzustellen, dass diese richtig verstanden wurde, wird das Kind aufgefordert, einige Möglichkeiten zu legen. Sollten sich dabei Schwierigkeiten im Aufgabenverständnis zeigen, so werden diese angesprochen.

(a) Bearbeitung der Grundaufgabe

Das interviewte Kind erhält anschließend die Grundaufgabe (a), bei der es die Figurenmenge zu einer 4-elementigen Menge aus jeweils zwei Objekten ermitteln soll. Erst wenn das Kind davon ausgeht, dass es die Anzahl vollständig ermittelt hat, bittet der Interviewer das Kind, die Vollständigkeit seiner Lösungen zu begründen *(Mögliche Impulse: „Warum sind das alle? Warum kann es keine Weiteren geben? Warum kannst du dir sicher sein, dass du alle Lösungen gefunden hast und du keine vergessen oder doppelt gelegt hast?“).*
Findet das Kind keine ausreichende Begründung und auch keine Möglichkeit, die Vollständigkeit zu begründen, so wird es gebeten, die gefundenen Möglichkeiten zu strukturieren *(Mögliche Impulse: Versuche einmal deine Lösungen so zu ordnen, dass man sieht, dass das wirklich alle sind. Kannst du die Lösungen so ordnen, dass ein anderes Kind sofort sieht, dass es keine weiteren gibt?).*
Sowohl die Frage nach den Begründungen als auch der Impuls, die Lösungen zu ordnen, zielen darauf mehr über das Konzept des Strukturierens zu erfahren,

welches für das Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen von besonderer Bedeutung ist (vgl. 1.2.2 & 2.2). Anschließend wird das Kind noch einmal gebeten, die Vollständigkeit der Lösungen zu begründen, um zu überprüfen, ob es den Ordnungsgedanken nutzen kann („Kann dir die Ordnung dabei helfen, zu zeigen, dass das alle sind?“).

(b) Erweiterung der Aufgabe

> „Turmbau“
> (a) Grundaufgabe
> Hier hast du vier Bausteine in verschiedenen Farben (rot, grün, gelb und blau).
> Wie viele verschiedene zweistöckige Türme kannst du insgesamt bauen?
>
> (b) Erweiterung
> Wie viele verschiedene Türme kannst du mit fünf verschiedenfarbigen Bausteinen bauen?“

Nach der Lösung von Aufgabenstellung (a) und der anschließenden Begründung der Vollständigkeit, erhält das Kind eine darauf aufbauende Aufgabenstellung (b), bei der die Anzahl zu einer 5-elementigen Menge – aus der jeweils zwei Objekte kombiniert werden müssen – zu bestimmen ist.
Die Erweiterung der Aufgabenstellung ist so angelegt, dass sich ein Rückgriff auf die bereits bekannte Lösung aus (a) anbietet. Ziel ist es, herauszufinden, ob die Lernenden rekursiv die Anzahl aller Möglichkeiten bestimmen. Das Kind wird analog zu (a) darum gebeten, die Vollständigkeit seiner Lösungen zu begründen und gegebenenfalls dazu aufgefordert, seine Lösungen zu ordnen.

Auf eine falsche Lösung der Lernenden sind verschiedene Reaktionen des Interviewers denkbar; dazu gehören u.a. die Erzeugung eines kognitiven Konflikts: „Vorhin hast du vermutet, es seien XY Lösungen, nun sind es YZ Lösungen, was stimmt denn jetzt?“ oder „Ein anderes Kind hat gesagt, es sind insgesamt xy Lösungen, wer hat denn recht?“. Das Erzeugen solcher kognitiven Konflikte bietet die Möglichkeit, die Kinder zur Reflexion oder Überprüfung ihrer Annahmen zu bringen und somit zu erforschen, welche tiefer liegenden Denkstrukturen hinter den Annahmen und Aussagen der Kinder stehen (vgl. Hasemann 1986, S. 27).

3.4 Durchführung der Untersuchung

Die Erhebung der Daten erfolgte im Zeitraum zwischen November 2008 und September 2010. Insgesamt wurden in drei Interviewserien 69 Interviews mit Kindern der dritten Jahrgangsstufe geführt.
Die Interviews wurden zunächst in einer Vorstudie mit sechs Kindern im Laufe des Schuljahres 2008 / 09 auf Zielgerichtetheit, Verständlichkeit sowie zeitliche Angemessenheit getestet. Außerdem wurde die „Brauchbarkeit“ des Materials

überprüft. Daran knüpften zwei aufeinander aufbauende Teilstudien an. Im Rahmen der ersten Teilstudie wurden Interviews zu allen drei kombinatorischen Grundfiguren mit 18 Kindern einer dritten Klasse geführt. Alle Interviews fanden zu Beginn des 2. Schulhalbjahres in einer Dortmunder Grundschule mit einem gemischten Einzugsgebiet statt. Ziel der Teilstudie war es, erste Annahmen über die Vorgehensweisen der Kinder zu treffen und Bezüge zu den theoretisch erarbeiteten zentralen Bausteinen herzustellen. Nach der Auswertung der Ergebnisse der ersten Teilstudie wurde aufbauend auf diesen Erkenntnissen eine zweite Studie durchgeführt. Ziel dieser war es, offene Fragen zu klären und zu überprüfen, ob die auftauchenden Phänomene auch über das Design und die interviewten Kinder hinaus zu beobachten sind. Dazu wurden in der zweiten Interviewserie insgesamt 45 Kinder aus drei Schulen aus Bremen, Berne und Wilhelmshaven zu Beginn des dritten Schuljahres interviewt. Die Interviews wurden in der zweiten Erhebung bereits zu Beginn der dritten Klasse geführt, da in den Leistungsvergleichsarbeiten insbesondere auch der Bereich, Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten abgefragt wurde. Damit war anzunehmen, dass im dritten Schuljahr die Kombinatorik verstärkt unterrichtet wird und somit die Vorstellungen der Lernenden (sehr) vom Unterricht geprägt sind. Ebenso wie in der ersten Studie erhielten auch hier jeweils ein Drittel der Kinder Aufgaben des Typs Variationen ohne Wiederholung, Kombinationen ohne Wiederholung und Kombinationen mit Wiederholung. Die Auswahl verschiedener Schulen und Klassen wurde getroffen, um ausschließen zu können, dass die zu beobachtenden Phänomene konkret auf den Unterricht einer einzelnen Lehrperson zurückzuführen sind.

Im Folgenden werden einige konkretere Einblicke in die einzelnen Teilstudien gegeben und überblicksartig die zentralen Erkenntnisse der Teilstudien sowie die daraus resultierenden Veränderungen und Fokussierungen im Interviewdesign der nachfolgenden Untersuchungsteile beschrieben.

3.4.1 Die Pilotstudie

Um vorab sicherstellen zu können, dass die Aufgabenstellungen verständlich sind, das Material geeignet und die Länge der Interviews angemessen ist, wurden zunächst sechs Kinder interviewt. Jeweils zwei Kinder erhielten dabei die gleichen Aufgabenstellungen zu einer kombinatorischen Figur.

Die Aufgabenstellungen erwiesen sich im Allgemeinen als verständlich, es wurden lediglich kleine sprachliche Änderungen vorgenommen (bspw. anstelle von „Turnier“ „Fußballturnier“) und zusätzliche Impulse und Nebenfragen ergänzt (bspw. „Ein anderes Kind hat gesagt, es gibt insgesamt xy Lösungen“). Das Material erwies sich im Hinblick auf die Videographie und das Ziel, möglichst übersichtlich alle Lösungen darstellen zu können, als geeignet. Der Zeitrahmen wurde bei den Interviews zu den Kombinationen mit und ohne Wiederholung eingehalten. Bei den Interviews zu den Variationen ohne Wiederholung stellte sich jedoch heraus, dass diese mit einer Dauer von mehr als 55 Minuten sehr lang waren. Dies resultierte insbesondere aus der – im Verhältnis zu den Kombinationen mit und ohne Wiederholung – großen Figurenmenge. So wurden für Aufgabenteil a) 12 und für Aufgabenteil b) sogar 20 Lösungen gesucht.

3.4.2 Durchführung der ersten Teilstudie

An der ersten Interviewserie nahmen insgesamt zehn Mädchen und acht Jungen zum Ende des ersten bzw. zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres teil. Die Lernenden erhielten, wie in der Vorstudie, jeweils zwei zueinander isomorphe Aufgabenstellungen zu einer der drei ausgewählten kombinatorischen Grundfiguren.

Diejenigen Kinder, die Aufgaben des Typs Variationen ohne Wiederholung lösen sollten, erhielten zunächst den Auftrag in Teilaufgabe a) die Anzahl aller Möglichkeiten bei 3 gegebenen Elementen und in Teilaufgabe b) die Anzahl aller Möglichkeiten bei 4 gegebenen Elementen zu finden. Nachdem sich jedoch bei drei Kindern herausstellte, dass die Grundmenge damit so klein war, dass die Vorgehensweisen der Kinder nicht mehr sicher rekonstruiert werden konnten, wurde den drei anderen Kindern wieder die ursprüngliche Aufgabe gestellt.

Die Interviews waren wiederum zeitlich nicht begrenzt, ihre durchschnittliche Dauer betrug 43 min (von 18 min bis 52 min), so dass jedes Kind die von ihm benötigte Zeit auch nutzen konnte. Die recht lange Dauer der Interviews resultierte vor allem aus den Materialhandlungen und den Notationen der Kinder.

Die Interviews fanden jeweils am Vormittag parallel zum Unterricht in der den Kindern vertrauten Lernumgebung statt. Sie wurden in einem Arbeitsraum durchgeführt, da dieser im Gegensatz zum Klassenraum eine ungestörtere Arbeits- und Gesprächsatmosphäre bot. Die Interviews der ersten Teilstudie wurden alle von demselben Interviewteam geführt. Da die Kinder die Interviewerinnen vor der Studie nicht kannten, wurden diese im Vorfeld der gesamten Klasse vorgestellt. Die einzelnen Interviews wurden von verschiedenen Interviewerinnen geführt. Dies gewährleistete eine weniger hohe Belastung für die interviewende Person. Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wurden im Vorfeld gemeinsame Gespräche über die Interviewleitfäden und mögliche Reaktionen auf die Kinderäußerungen geführt. Außerdem waren alle Interviewerinnen bereits vorher durch die Arbeit im Projekt KIRA in der Durchführung klinischer Interviews erfahren.

3.4.3 Durchführung der zweiten Teilstudie

An der zweiten Interviewserie nahmen insgesamt 25 Mädchen und 20 Jungen aus Berne, Bremen und Wilhelmshaven zu Beginn des dritten Schuljahres teil. Die Lernenden erhielten, wie in der ersten Teilstudie, jeweils zwei zueinander isomorphe Aufgabenstellungen zu einer der drei ausgewählten kombinatorischen Grundfiguren. Im Vergleich zur Durchführung der ersten Teilstudie wurden, um genauere Informationen zu erhalten, einigen Modifikationen vorgenommen, die im Folgenden kurz benannt werden:

Modifikation der Klärung der Aufgabenstellung

In der ersten Teilstudie stellte sich heraus, dass die Vorgehensweisen der Lernenden durch die vorab besprochenen Beispiele beeinflusst wurden. So nannten die Lernenden oftmals zu Beginn willkürlich Lösungen. Bei der anschließenden Bearbeitung des Arbeitsauftrages notierten sie in einigen Fällen zunächst diese Lösungen und suchten anschließend nach einem systematischen Vorgehen. Für die zweite Teilstudie wurden entsprechend analoge Problemstellungen zur Klärung der Aufgabenstellung verwendet: Bei den Farbenaufgaben wurden andere Farben gewählt, bei den Zahlenaufgaben andere Ziffern.

Modifikation der Anzahl der zu findenden Lösungen

Bei der Bearbeitung der Variationen ohne Wiederholung stellte sich heraus, dass die zunächst gewählte Grundmenge von n = 3 zu klein ist, um klare Informationen über die Strategien der Lernenden zu enthalten. Entsprechend erfolgte eine Anpassung der Grundmenge auf n = 4.

Modifikation von Arbeitsaufträgen

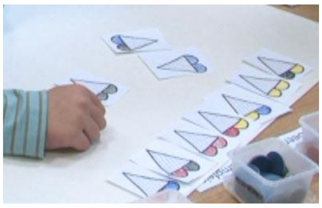


Abb. 3.5 Lösungen sortieren

Insgesamt wurde eine verbindliche Änderung vorgenommen: Der Arbeitsauftrag *„Ordne deine Lösungen"* wurde aus Verständnisgründen modifiziert. So interpretierten einige Lernende, wie beispielsweise Kathrin, den Auftrag im Sinne von „Ordnung schaffen" bzw. „anordnen" und legten alle gefundenen Objekte nebeneinander, ohne eine weitere Strukturierung vorzunehmen (vgl. Abb. 3.5). Um eine solche Interpretation zu umgehen, erhielten die Lernenden in der anschließenden Untersuchung den Auftrag *„Sortiere deine Lösungen (so dass man sieht, dass es alle sind)."*

Modifikation in der Materialbereitstellung

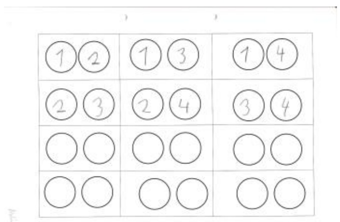


Abb. 3.6 Materialdarstellung aus der ersten Interviewserie

In der ersten Teilstudie waren bei der Dominosteinaufgabe keine Umstrukturierungen möglich, da die Lernenden ein Blatt mit mehreren Blankovorlagen erhielten (vgl. Abb. 3.6). Für Umstrukturierungen mussten sie also alle Lösungen erneut notieren. Um mehr Einblicke in die Strukturierungsprozesse der Lernenden zu bekommen, erhielten sie im Rahmen der zweiten Untersuchung einzelne Blankovorlagen.

3.5 Auswertung der Daten

Die Analyse der Daten erfolgte, aus den bereits genannten Gründen, parallel zur Datenerhebung. Dabei wurden zur Auswertung zentrale Elemente der Grounded Theory verwendet. Dieses Verfahren stellt nach Glaser und Strauss (1967) eine geeignete Methode zur Entdeckung neuer Zusammenhänge dar.
Um die zentralen Vorgehensweisen und Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu erheben und diese systematisch auf die im Theorieteil herausgearbeiteten fachlichen Konzepte beziehen zu können, wurde die Auswertung in zwei methodischen Schritten vollzogen:

Auswertungsschritt	Kurzbeschreibung
Schritt 1: Kategorienbildung	Die videographierten Interviews wurden zunächst transkribiert. Alle Interviews der ersten und zweiten Teilstudie wurden einer Überblicksanalyse mit einer teils kategoriengeleiteten, teils kategorienentwickelnden Interpretation unterzogen (Beck & Maier 1993).
Schritt 2: Gegenüberstellung von fachlichen und individuellen Perspektiven	Die Beantwortung der dritten Forschungsfrage erfolgt durch die systematische Gegenüberstellung fachlicher Perspektiven und der Lernendenperspektiven.

Tab. 3.7 Überblick über das zweiphasige Auswertungsverfahren

Die beiden Analyseschritte werden dabei, so wie die verschiedenen Analyseverfahren bei der Grounded Theory, nicht als klar voneinander zu trennen verstanden, sondern eher als verschiedene Umgangsweisen mit dem Datenmaterial, zwischen denen der Forscher flexibel wechselt oder die er kombiniert (vgl. Flick 2002). Bei der Analyse handelt es sich dementsprechend um ein zyklisches Vorgehen, welches keiner strengen Abfolge unterliegt.

Im Folgenden erfolgt eine Explizierung der Instrumente und des konkreten Vorgehens.

3.5.1 Kategorienbildung

Die Analyse der Vorgehensweisen und das Herausarbeiten der zentralen Konzepte erfolgt aus den genannten Gründen mittels grundlegender Techniken der Grounded Theory durch Kategorienbildung. Das Kodieren dient dabei nicht bloß der Klassifikation oder der Beschreibung der Phänomene. Es zielt vielmehr darauf ab, theoretische Konzepte zu bilden, die einen Erklärungswert für das untersuchte Phänomen haben (vgl. Strauss & Corbin 1996).

3.5.1.1 *Kategorienbildung in Phasen*

Die zentrale Vorgehensweise zur Bildung von Kategorien gestaltet sich im Rahmen der Grounded Theory als eine spezielle, dreiphasige Form des Kodierens (vgl. Strauss & Corbin 1996):
Die Daten werden im *ersten Schritt,* dem so genannten *„open coding“* oder *offenen Kodieren*, in Kategorien und Unterkategorien eingeteilt, die in direktem Zusammenhang zu den erhobenen Daten stehen. In der *zweiten Auswertungsphase,* dem *“axial coding”,* werden wechselseitige Verknüpfungen und Zusammenhänge zwischen den Unterkategorien und den Kategorien gesucht. Die Begriffe und Konstrukte aus der ersten Phase werden in diesem Schritt zu abstrakteren Kategorien zusammengefasst. Auf der Grundlage erarbeiteter Kategorien, Kode-Notizen und Memos werden durch selektives Kodieren in der *dritten Auswertungsphase Schlüsselkategorien* erstellt, die den „roten Faden“ bezüglich der Detailergebnisse darstellen (vgl. Blaikie 2000). Zur Erarbeitung der zentralen Schlüsselkategorien gibt es nach Kuckartz (1997) unterschiedliche Zugangsweisen. Es besteht die Möglichkeit, sie aus der Literatur zu entnehmen oder unmittelbar aus der Forschungsfrage abzuleiten. In beiden Fällen existieren sie bereits vor der eigentlichen Auswertung. Im dritten Fall werden die Kategorien induktiv erarbeitet. Diese drei Zugangsweisen sind nicht unabdingbar voneinander getrennt, sondern treten in den meisten Forschungsvorhaben als Mischformen auf (vgl. ebd.).

3.5.1.2 *Methode der Fallkontrastierung*

Die Untersuchung zielt auf das Verstehen des überindividuell Typischen des Einzelfalls und nicht auf das Beschreiben singulärer Ereignisse ab. Methodisch wird dies durch die Fallkontrastierung realisiert. Im Fokus stehen dabei folgende Fragen:

- *Welche Vorgehensweisen, Denkwege und Schwierigkeiten sind typisch für eine kombinatorische Figur?*

- *Welche zeigen sich übergreifend bei der Anzahlbestimmung im Kontext verschiedener Figuren?*

Nach Schütze (1983) ermöglicht eine minimale und maximale Kontrastierung das Loslösen von der Einzelfallanalyse. In der minimalen Kontrastierung werden Fälle gefasst, die große Ähnlichkeiten aufweisen, diejenigen mit großen Unterschieden in der maximalen

3.5.2 Gegenüberstellung individueller und fachlicher Perspektiven

Anders als bei dem klassischen Vorgehen der Grounded Theory, die die Erkenntnisse ausschließlich innerhalb der Daten und zunächst ohne Rückbezug auf die Theorie sucht, erfolgt im Sinne der didaktischen Rekonstruktion nach der Kategorienbildung eine Gegenüberstellung der fachlichen und individuellen Perspektiven mit dem Ziel, lernförderliche Anknüpfungspunkte und lernhinderliche Schwierigkeiten herauszufiltern. Dazu bedient sich die Studie im zweiten Analyseschritt dem wechselseitigen Vergleich zwischen den fachlichen und den individuellen Perspektiven. Der Vergleich ist insofern wechselseitig, als die Verknüpfungen zwischen fachlicher Perspektive und der Lernendenperspektive nicht nur einseitig normativ-vergleichend hergestellt werden. Vielmehr werden beide als gleichwertig betrachtet und sollen aus der jeweils anderen Perspektive charakterisiert und bewertet werden (vgl. Gropengießer 1997a). Dieser Vergleich stellt das Kernstück der inhaltlichen Auswertung der Interviews dar. Die Gegenüberstellung ermöglicht zum einen eine vertiefte Sicht auf die Denk- und Vorgehensweisen der Lernenden und kann zum anderen aber auch das Verständnis der Forschenden vom mathematischen Inhalt verändern und erweitern, also entsprechend eine vertiefte fachliche Klärung hervorrufen (vgl. Hahn & Prediger 2008). Vorangehende mathematikdidaktische Arbeiten zu Vorstellungsumbrüchen beispielsweise bei Brüchen (Prediger 2003) und negativen Zahlen (Hefendehl-Hebeker 1989) zeigen dabei auf, dass ein solcher wechselseitiger Vergleich fruchtbarsein kann. Mit diesem Schritt wird insbesondere der Forderung nach Fach- und Kindorientierung Rechnung getragen. Methodisch werden verallgemeinerte fachliche Vorstellungen mit denen der Schüler verglichen. Zwischen den Konzepten, Denkfiguren und Theorien beider Seiten werden dazu systematisch Beziehungen hergestellt. Ziel ist es, dass einerseits die Charakteristika beider Perspektiven deutlich werden und andererseits die lernförderlichen Korrespondenzen und voraussehbaren Lernschwierigkeiten (vgl. Kattmann et al. 1997):

> *„Ziel der Gegenüberstellung“, so Prediger (2005, S.43), „ist es insbesondere die Eigenheiten, Gemeinsamkeiten, Verschiedenheiten und Begrenztheiten der fachlichen und der individuellen Konzepte herauszuarbeiten. Dabei umfassen*

a. *Eigenheiten Konzepte, die entweder für die fachwissenschaftlichen oder für die Schülervorstellungen charakteristisch sind.*
b. *Gemeinsamkeiten, gleichgerichtete und kongruente (fachliche und Lernenden-)Vorstellungen zu bst. Inhaltsbereichen*
c. *Verschiedenheiten, diskrepante Vorstellungen zwischen fachwissenschaftlichen Theorien und den Vorstellungen der SuS. Die Verschiedenheiten können als Gegensätze bewertet werden und sind nur dann als Widersprüche zu bezeichnen, wenn sie ausdrücklich im Rahmen derselben Theorie stehen.*
d. *Begrenztheiten, die Eigenheiten der Sicht der SuS ermöglichen die Grenzen wissenschaftlichen Theorien zu erkennen und umgekehrt."*

Die Analyse der Vorgehensweisen der Lernenden erfolgt dabei kompetenzorientiert. Es wird aus lerntheoretischer Perspektive im Sinne des Conceptual Change Ansatzes angenommen, dass Kinder auf ihnen bekannte Lösungsstrategien zurückgreifen, die sie ggf. aus anderen Kontexten kennen und die ihnen geeignet erscheinen, die kombinatorischen Aufgabenstellungen zu lösen. Entsprechend werden die Vorgehensweisen der Lernenden und deren zugrunde liegenden Vorstellungen – auch wenn sie nicht den fachlichen Vorstellungen entsprechen – nicht als Fehlvorstellungen betrachtet, sondern vielmehr als Ausgangspunkte des Lernprozesses. Unter dieser Perspektive wird nach den Anknüpfungspunkten und Diskrepanzen zu den fachlichen Konzepten gefragt. In den einzelnen Teilkapiteln wird daher immer wieder die Frage nach den möglichen Vorkenntnissen der Lernenden sowie den Anknüpfungspunkten und Unterschieden zu den fachlichen Konzepten aufgeworfen.

4 Einflussfaktoren

„Weil ich hab ja Zwölf, Dreizehn und Vierzehn und dann gibt es keine mehr mit Zehn.“

Olivia (KGSW, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

Olivia sollte herausfinden, wie viele mögliche zweistellige Zahlen sie aus vier Ziffernkarten bilden kann. Ihrer Begründung für die Vollzähligkeit ihrer Lösungen ist zu entnehmen, dass sie diese auf den ihr bekannten Kontext der Zahlen von 10 bis 99 bezieht, entsprechend ihrer Erläuterung hat sie vorab auch die zweistelligen Zahlen erstellt. Es zeigt sich entsprechend, dass der Kontext zweistellige Zahlen die Grundlage für ihr strategisches Vorgehen bildet.

In Abschnitt 2.1 wurde aufgezeigt, dass verschiedene Aufgabenvariablen die Schwierigkeit der Aufgabe und die Lösungserfolge von Lernenden beeinflussen. Welchen Einfluss die Faktoren konkret auf die Vorgehensweisen von Lernenden beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme haben, wurde jedoch nur bedingt erhoben. So ist bekannt, dass Lernende abhängig von der zugrundeliegenden Modellvorstellung verschiedene Anzahlbestimmungsstrategien verwenden und die Art und Anzahl der zu kombinierenden Elemente einen Einfluss auf die Strukturierung ihres Vorgehens hat. Es liegen bislang jedoch noch keine Informationen darüber vor, wie die kombinatorische Figur und die gegebenen Kontexte, wie in Olivias Vorgehen, die Anzahlbestimmungsstrategien der Lernenden im Detail beeinflussen. Diese erweisen sich jedoch aus zwei verschiedenen Gründen als zentral:

Zum einen haben aus fachlicher Sicht insbesondere die Eigenschaften der kombinatorischen Figur bzw. der Figurenmenge einen Einfluss darauf, welche kombinatorische Operation zur Anzahlbestimmung verwendet werden kann. Sie sind zugleich bei der Anwendung von Zählprinzipien zu berücksichtigen und können zur Strukturierung der Figurenmenge genutzt werden (vgl. 1.2). Die Ergebnisse der Untersuchungen zur Lösung von Auflistungsproblemen geben ebenfalls Hinweise darauf, dass die Strategien zu Teilen abhängig von dieser Größe verwendet werden. Zum anderen ist bekannt, dass die Anzahlbestimmungsstrategien von Sekundarstufenschülern oftmals an die in den Aufgaben implizierten kontextbezogenen Handlungsvorstellungen gebunden sind und Lernende Strategien zum Lösen von Auflistungsproblemen vorrangig in bestimmten Kontexten verwenden. Insofern scheint auch der Kontext, welcher aus fachlicher Sicht keine Bedeutung hat, das Vorgehen der Lernenden zu beeinflussen.

Unter diesen Gesichtspunkten ist es von zentraler Bedeutung, genauere Informationen über den Einfluss dieser beiden Größen zu erhalten. Dieses Kapitel zielt daher auf die Beantwortung folgender Fragestellung:

Forschungsfrage 1
Wie beeinflussen die kombinatorische Figur und der Aufgabenkontext die Anzahlbestimmungsstrategien von Drittklässlern?

Zur Beantwortung der Frage wird zunächst in Abschnitt 4.1 in den Blick genommen, welchen Einfluss die kombinatorische Figur und daran anknüpfend in Abschnitt 4.2, welchen Einfluss der Kontext auf die Anzahlbestimmungsstrategien von Lernenden hat. Abschließend wird in Abschnitt 4.3 ein kurzes Fazit bezüglich der Forschungsfrage gezogen.

4.1 Einflussfaktor kombinatorische Figur

Im Rahmen dieser Untersuchung wurde erhoben, welchen Einfluss die kombinatorische Figur auf die Anzahlbestimmungsstrategien der Lernenden hat. Dabei wurde betrachtet, ob es Einfluss der Figur auf die direkte oder indirekte Anzahlbestimmung hat, ob es Unterschiede bezüglich der Ableitung von Zählstrategien gibt und welchen Einfluss die Figur auf die Strukturierungsstrategie der Lernenden hat.

4.1.1 Einfluss auf die Anzahlbestimmungsstrategie

Zur Überprüfung des Einflusses auf die Anzahlbestimmungsstrategien der Lernenden wurde verglichen, wie häufig die Anzahlen in Abhängigkeit von den Figuren, direkt oder indirekt mittels einer Zählstrategie oder indirekt abzählend ermittelt wurden. Die Tabelle stellt die ermittelten Anzahlen dar. Unterschieden wird dabei, inwiefern die verschiedenen Anzahlbestimmungsstrategien in Abhängigkeit von der kombinatorischen Figur sowie der Anzahl der Ausgangselemente verwendet wurden.

	K. o. Wh.[19]		K. m. Wh.		V. o. Wh.		Gesamt	
Direkte Anzahlbestimmung	3	10	1	7	2	7	3	20
Indirekte Anzahlbestimmung und Ableitung einer Zählstrategie	6	14	9	17	11	25	26	49
Indirekte Anzahlbestimmung und Abzählen der Figurenmenge	33	18	32	20	29	11	97	67
Gesamt	42	42	42	42	42	42	126	126

Tab. 4.1 Figurabhängige Darstellung der Anzahlbestimmungsstrategien

Eine Analyse der Anzahlbestimmungsstrategien der Lernenden hinsichtlich des Einflusses der kombinatorischen Figur zeigt, dass es bezogen auf die Anwendung direkter oder indirekter Anzahlbestimmungsstrategien bei den Grundaufgaben, in denen jeweils vier Ausgangselemente gegeben waren, keine offensichtlichen Unterschiede gibt. Für die Erweiterung der Problemstellungen auf fünf Elemente ist der Tabelle zu entnehmen, dass Kombinationen ohne Wiederholung häufiger als Variationen und Kombinationen mit Wiederholung über eine direkte Anzahlbestimmung gelöst werden.

Ausgehend von einer indirekten Anzahlbestimmung wurden insbesondere bei Variationsproblemen ohne Wiederholung jedoch auch bei Kombinationsproblemen mit Wiederholung Zählstrategien abgeleitet. Bei Kombinationen ohne Wiederholung wurden weitaus seltener indirekte Zählstrategien verwendet. Nicht eindeutig abzuleiten ist daraus, welche Ursache die häufigere Verwendung der Zählstrategien hat. So ist es einerseits möglich, dass diese auf die Figuren zurückzuführen ist, andererseits ist jedoch auch denkbar, dass die weitaus größeren Figurenmengen bei den Kombinationen mit Wiederholung und bei den Variationen ohne Wiederholung im Vergleich zu den Kombinationen ohne Wiederholung die Ursache sind. Entsprechend wäre für Kombinationen ohne Wiederholung zu prüfen, inwiefern diese eher über indirekte Zählstrategien gelöst werden, wenn eine größere Figurenmenge zu erstellen ist.

19 Der erste Wert gibt jeweils an, wie viele Lernende bei der ersten oder der zweiten Grundaufgabe den jeweiligen Weg der Anzahlbestimmung wählten. Der zweite Wert gibt an, wie viele Lernende die dargestellte Strategie bei der Erweiterung der Aufgabenstellung auf fünf Ausgangselemente verwendeten. Da jeder der 63 Lernenden jeweils zwei Grund- und Erweiterungsaufgaben zu einer der drei Figuren erhielt und bearbeitete, ergeben sich als Referenzmenge 42 mögliche Lösungen pro Figur und insgesamt.

Zusätzlich ist der Tabelle zu entnehmen, dass im Vergleich der Anzahlbestimmungsstrategien bei den Grundaufgaben und den Erweiterungsaufgaben insbesondere letztere mittels Zählstrategien gelöst wurden. Die verwendeten Zählstrategien implizierten dabei in den meisten Fällen einen Rückgriff auf die bereits gefundene Anzahl an Lösungen bei der Grundaufgabe. Insofern ist anzunehmen, dass die Verwendung der Zählstrategien insbesondere auf dem analogen Zusammenhang zwischen den Problemstellungen beruht.

4.1.2 Einfluss auf die Strukturierungs- und Zählstrategien

Eine Analyse des Einflusses der gegebenen kombinatorischen Figur, zeigt, dass es Unterschiede in den Strukturierungsstrategien von Lernenden in Abhängigkeit von den Eigenschaften der gesuchten kombinatorischen Figur gibt. So berücksichtigten einige Lernende bei der Strukturierung der Figuren im Prozess des Erstellens der Lösungen oder bei der räumlichen Anordnung der Figurenmenge die Eigenschaften der zur erstellenden Figuren beziehungsweise der zu erstellenden Figurenmenge. Insgesamt war bei den Kombinationen mit Wiederholung und bei den Variationen ohne Wiederholung ein eindeutiger Einbezug zu den Eigenschaften der zu erstellenden Figurenmenge zu erkennen. Dieser wird im Folgenden exemplarisch für die Variationen ohne Wiederholung aufgezeigt, eine genauere Betrachtung dieser Strategien erfolgt in Kapitel 7.

Transkr. 4.1Tims Lösungsstrategie (KGSD, V. o. Wh., Türme bauen)

Zur Situation: Tim hat den Auftrag erhalten herauszufinden, wie viele verschiedene zweistöckige Türme man aus vier verschiedenfarbigen Bausteinen erstellen kann. Er baut und notiert anschließend folgende Lösungen.

gr	b	g	gr	b	g
b	gr	gr	g	g	b

r	b	r	g	gr	r
b	r	g	r	r	gr

T.: Ja, weil ich erst mal auf die Steine geguckt habe und dann hab ich immer einen Stein genommen (...) und dann hab ich das sofort wieder anders herum gemacht.
[T. steckt dabei rot auf gelb und gelb auf rot]. Und dann nimmt ich noch wieder einen Stein [*T. steckt blau auf gelb]*. Und dann habe ich das wieder andersrum *gemacht [T. steckt gelb auf blau]*.

Tims Vorgehen zeigt, dass er jeweils einen Turm aus zwei verschiedenen Farben erstellt hat und direkt im Anschluss die Anordnung der Farben in dem Turm vertauscht. Dieses Vorgehen ist auch seinen anschließenden Erläuterungen zu entnehmen (u.a. „*wieder anders herum gemacht“)*. Er greift damit auf eine zentrale Eigenschaft der Variationen ohne Wiederholung zurück: Die Anordnung der Elemente in den Figuren ist von Bedeutung. Ebenso wie Tim greifen auch andere Lernende in ihrem Vorgehen auf die Eigenschaften der kombinatorischen Figur zurück. Teileweise verwenden sie nur diese in ihrem strategischen Vorgehen, teilweise verwenden sie weitere Strategien.

Die Eigenschaften der kombinatorischen Figur bzw. der zu erstellenden Figurenmenge beeinflussen nicht nur die Strukturierung der Figurenmenge, sondern in einigen Fällen zudem auch auf die *Zählstrategien* der Lernenden. So entwickeln einige Lernende ausgehend von der vorgenommenen Strukturierung eine additive Zählstrategie, welche auf den Eigenschaften der Figurenmenge beruht. Besonders offensichtlich wird diese Berücksichtigung in Lils Vorgehen zur Lösung eines Variationsproblems ohne Wiederholung:

Transkr. 4.2 Lils Vorgehen (CGSB, V. o. Wh., Türme bauen)

Zur Situation: Lil erhält den Auftrag, die Turmaufgabe zu lösen. Dazu baut und notiert sie zunächst 6 Lösungen [baut und notiert: s-r; r-g; gr-r; legt r zur Seite, baut und notiert gr-g, gr-s, legt gr zur Seite, baut g-s] und legt diese wie folgt auf den Tisch:

s	r	gr	gr	gr	g
r	g	r	g	s	s

Anschließend notiert sie zu jeder der bereits gefundenen Lösungen eine weitere Lösung, in der die Reihenfolge der Farben vertauscht ist, und ordnet die 12 Lösungen jeweils in Paaren auf dem Tisch an:

g	s
s	g

r	s
s	r

gr	s
s	gr

gr	g
g	gr

g	r
g	g

gr	r
r	gr

L.: Ich hab 6 und dann doppelt genommen. Also 12.

Lil bildet zunächst Türme, die alle sechs möglichen Kombinationen aus zwei Farben enthalten. Anschließend vertauscht sie zu allen Türmen die Anordnung der Farben. Ausgehend von diesem Vorgehen entwickelt sie eine Zählstrategie. Das „Doppelt nehmen“ beruht auf der vorgenommenen Vertauschung und damit auch auf den Eigenschaften der Variationen.

Insgesamt zeigt sich im Rahmen dieser Untersuchung, dass sich bei Variationen ohne Wiederholung die unterschiedliche Anordnung der Elemente in den Figuren auf die Zählstrategie auswirkt. Bei den Kombinationen mit Wiederholung wurden ebenso wie bei den Kombinationen ohne Wiederholung in dieser Studie keine Auswirkungen der kombinatorischen Figur auf die Zählstrategie rekonstruiert.

4.2 Einflussfaktor Kontext

Ebenso wie der Einfluss der kombinatorischen Figur auf die Anzahlbestimmungsstrategien der Lernenden im Allgemeinen sowie im Detail auf deren konkrete Strukturierungsstrategien überprüft wurden, erfolgte auch eine diesbezügliche Analyse bezüglich des Kontexteinflusses. Im Folgenden werden die ermittelten Ergebnisse dargestellt.

4.2.1 Einfluss auf die Anzahlbestimmungsstrategie

Hinsichtlich des Einsatzes direkter oder indirekter Anzahlbestimmungsstrategien wurde bei den verschiedenen Kontexten keine besondere Auffälligkeit zugunsten eines Vorgehens festgestellt. Dies gilt sowohl für die Bearbeitung der Grundaufgaben mit vier Elementen als auch für die Bearbeitung der Erweiterungsaufgaben mit einer Ausgangsmenge von fünf Elementen. Im Folgenden werden exemplarisch die Strategien bei der Grundaufgabe in Abhängigkeit vom Kontext dargestellt.

	K. o. Wh		K. m. Wh.		V. o. Wh.		Gesamt	
	Fußball	Lotto	Eismann	Domino	Türme	Ziffernk.	Farben	Zahlen
Direkte Anzahlbestimmung	2	1	0	1	1	1	3	3
Indirekte Ab. & Ableitung einer Zählstrategie	2	4	4	5	5	6	11	15
Indirekte Ab. & Abzählen der Figurenmenge	17	16	16	16	15	14	48	46
Gesamt	21	21	21	21	21	21	63	63

Tab. 4.2Kontextabhängige Darstellung der Anzahlbestimmungsstrategien

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass es bezüglich der direkten Anzahlbestimmung keinen Kontext gab, in dem diese besonders häufig verwendet wurde. Ebenso konnte nicht festgestellt werden, dass abhängig von einem Kontext besonders häufig eine Zählstrategie aus einer vorherigen indirekten Vorgehensweise abgeleitet wurde. So wird die Fußballaufgabe am seltensten mittels einer indirekten Zählstrategie gelöst, jedoch zeigte sich insgesamt, dass die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung abzählend bestimmt wurde. Dies ist vermutlich auf die geringe Anzahl an zu erstellenden Figuren zurückzuführen, bei der eine Zählstrategie nicht zwangsläufig schneller zur gesuchten Anzahl an Lösungen führt. Um eindeutigere Hinweise darauf zu erhalten, ob der Kontext Einfluss auf die Anzahlbestimmungsstrategien der Lernenden hat, bedarf es voraussichtlich einer größeren Stichprobenanzahl, damit konkrete Unterschiede festgestellt werden können.

4.2.2 Einfluss auf die Strukturierungs- und Zählstrategien

Im Rahmen der Untersuchung wurden Strategien beobachtet, die bei keiner anderen als der gegebenen Aufgabenstellung verwendet wurden. Diese Strukturierungen beziehen sich konkret auf den Kontext in dem die Anzahlbestimmungsprobleme formuliert sind. Ein solches Vorgehen konnte insgesamt bei zwei Lernenden beobachtet werden. Da in beiden Fällen weder eine direkte Anzahlbestimmung erfolgte noch aus der Strukturierung eine Zählstrategie abgeleitet wurde, lassen sich hinsichtlich der Zählstrategien keine Einflüsse des Kontextes ableiten. Die beiden Strategien der Lernenden werden nachfolgend dargestellt.

4.2.2.1 *Kontextspezifische Strategie zur Aufgabe „Dominosteine“*

Die von Raik vorgenommene Strukturierung der Figurenmenge bei der Lösung der Dominosteinaufgabe zeigt dieses kontextspezifische Vorgehen exemplarisch auf:

Transkr. 4.3 Raiks Vorgehen (CGSB, K. m. Wh., Dominosteine)

Zur Situation: Raik notiert der Reihe nach folgende Lösungen. Diese ordnet er jeweils direkt hintereinander an.

1	2	3	4	4	1	1	3	3	4	4	2	2	1

Raik legt die erstellten Dominosteine hintereinander. Dabei stimmen jeweils – abgesehen von der ersten Kombination- die beiden angrenzenden Punktmuster in zwei verschiedenen Dominosteinen überein (bspw. *3-4, 4-1)*. Raik nimmt demnach eine Strukturierung vor, die den Regeln des Dominospiels entspricht.

4.2.2.2 *Kontextspezifische Strategie zur Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten“*

Eine ebenfalls kontextspezifische Strukturierung ließ sich in dem Vorgehen von Olivia rekonstruieren. Sie erhielt den Auftrag, alle zweistelligen Zahlen aus vier Ziffernkarten zu bilden.

Transkr. 4.4 Olivias Vorgehen (KGSW, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

Zur Situation: Olivia findet insgesamt alle zwölf Zahlen aus Ziffernkarten. Sie wird gebeten, die Vollständigkeit der Lösungen zu begründen.	
O.:	Fertig.
I.:	Und warum bist du dir sicher, dass du jetzt alle gefunden hast?
O.:	Weil ich ha ja Zwölf, Dreizehn und Vierzehn und dann gibt es keine mehr mit Zehn. Und dann habe ich Einundzwanzig, Zweiundzwanzig geht ja nicht, weil ich keine zwei mehr habe. Dreiundzwanzig und Vierundzwanzig und Fünfundzwanzig würde ja nicht gehen, weil ich keine Fünf habe. Und dann noch die anderen, die ich gefunden habe und mehr kann man dann bis 100 mit den Zahlen nicht machen.

Olivia begründet die Vollständigkeit ihrer Lösungen darüber, dass sie sukzessive alle zweistelligen Zahlen der Reihe nach aufsagt und aufzeigt, dass es zwischen den von ihr gebildeten zweistelligen Zahlen keine weiteren gibt, die sie vergessen hat. Sie ermittelt demnach die Figurenmeng über ein indirektes Vorgehen, in dem sie aus den ihr bekannten Zahlen im Hunderterraum diejenigen auswählt, die man mittels der vorgegebenen Ziffernkarten erstellen kann.

4.3 Zusammenfassung

Ausgangspunkt der Ausführungen der vorangegangenen Abschnitte war folgende Forschungsfrage:

Forschungsfrage 1
Wie beeinflussen die kombinatorische Figur und der Aufgabenkontext die Anzahlbestimmungsstrategien von Drittklässlern?

Diese Frage lässt sich auf der Grundlage der Ergebnisse der durchgeführten Studie folgendermaßen beantworten:
Die kombinatorische Figur und der Kontext haben im Rahmen dieser Untersuchung wenig Einfluss auf die Anzahlbestimmungsstrategie der Lernenden. Ob diese die Anzahl über ein direktes oder indirektes Vorgehen abzählend oder rechnerisch ermitteln, scheint auf der Grundlage der Daten unabhängig von diesen genannten Größen zu sein. Die Ergebnisse der Untersuchung legen jedoch nahe, dass die kombinatorische Figur oder aber die Anzahl der zu erstel-

lenden Figuren einen Einfluss darauf zu hat, dass Lernende ausgehend vom Erstellen der Lösungen eine Zählstrategie ableiten.
Mit Blick auf die Verwendung von Strukturierungsstrategien zeigen sich deutliche Einflüsse der kombinatorischen Figur bei der Lösung von Variationsproblemen ohne Wiederholung und bei den Kombinationsproblemen mit Wiederholung. Dabei ist zu berücksichtigen, dass ein großer Teil der Lernenden die Eigenschaften der jeweiligen Figur in der Strukturierung berücksichtigt, dies jedoch nicht für alle Lernenden gilt (zur genaueren Darstellung der Strategien vgl. 7.2). Bezüglich der Kombinationen ohne Wiederholung wurde kein Einfluss der Eigenschaften der gesuchten Figuren auf die Lösungsstrategien festgestellt.

Der Aufgabenkontext hat ebenfalls bei einigen wenigen Lernenden einen zentralen Einfluss auf die vorgenommene Strukturierung. So zeigte sich, dass bei der Aufgabe „Dominosteine“ und bei der Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten“ Strategien beim Erstellen der Lösungen bzw. zur Begründung der Vollständigkeit der Lösungen verwendet wurden, die sich direkt auf den spezifischen Kontext beziehen. Eine solche Abhängigkeit der Strukturierung und Strategiewahl konnte bei den anderen Problemstellungen nicht identifiziert werden.

5 Die Rolle von Strukturierungen bei Anzahlbestimmungen

„Dann müsst ich eigentlich viermal vier rechnen und das sind sechzehn. Oder wart mal…weil, jede Mannschaft muss ja eigentlich dreimal spielen, aber es sind vier Mannschaften. Also muss es eigentlich dreimal vier sein…"

Rieka (GSSTB, K. o. Wh., Fußball)

Rieka ermittelt die Anzahl aller Spiele auf dem Fußballturnier direkt durch eine Rechnung. Diese basiert dabei auf einer gedanklich vorgenommenen Strukturierung möglicher Lösungen, die sie im Anschluss an ihre Rechnung verbalisiert (*„weil, jede Mannschaft muss ja eigentlich dreimal spielen, aber es sind vier Mannschaften")*. Aus fachlicher Sicht spielen solche Strukturierungen eine zentrale Rolle beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme, da sich aus den Strukturierungen Zählstrategien ableiten lassen und diese auch notwendig sind, um kombinatorische Operationen zur Anzahlbestimmung zu nutzen (vgl. 1.2). Welche Rolle Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen von Lernenden einnehmen, ist bislang nicht hinreichend geklärt, um Konsequenzen für die didaktische Strukturierung des Unterrichts ableiten zu können (vgl. 2.2). Entsprechend zielt dieses Kapitel auf die Beantwortung folgender Frage:

Forschungsfrage 2
Welche Rolle spielen Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen von Drittklässlern?

In Abschnitt 5.1 wird zunächst die Rolle von Strukturierungen bei indirekten Anzahlbestimmungen in den Blick genommen, anschließend bei direkten Anzahlbestimmungen. Im darauffolgenden Abschnitt 5.2 wird betrachtet, welche Rolle Strukturierungen spielen, wenn Lernende mehrere Anzahlbestimmungsprobleme nacheinander lösen, bevor abschließend in Abschnitt 5.3 eine Zusammenfassung der Ergebnisse hinsichtlich der Forschungsfrage erfolgt.

5.1 Rolle von Strukturierungen bei indirekten und direkten Anzahlbestimmungen

Grundsätzlich lässt sich im Rahmen dieser Untersuchung unterscheiden, ob Lernende die Anzahl direkt über eine Zählstrategie bestimmen oder ob sie diese indirekt ermitteln, indem sie zunächst die Figurenmenge erstellen. Strukturierungen spielen bei beiden Lösungsprozessen eine zentrale Rolle.

5.1.1 Strukturierungen bei indirekten Anzahlbestimmungen

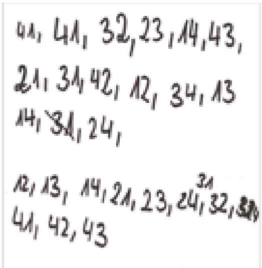
In den meisten Fällen wurden die Anzahlen im Rahmen der Untersuchung indirekt bestimmt. Im ersten Schritt wurden die Objekte erstellt und im zweiten Schritt erfolgte auf dieser Grundlage die Anzahlbestimmung entweder durch Abzählen der erstellten Objekte oder durch die Ableitung einer Zählstrategie.
Strukturierungen hatten dabei bei verschiedenen Lernenden im Prozess des Erstellens der Figurenmenge sowie der räumlichen Strukturierung der Figurenmenge einen sehr unterschiedlichen Stellenwert. Im Folgenden wird zunächst die Rolle von Strukturierungen im Prozess des Erstellens der Lösungen betrachtet, dann bei der räumlichen Strukturierung und abschließend über verschiedene Teile des Lösungsprozesses.

5.1.1.1 *Rolle von Strukturierungen im Kontext des Erstellens der Lösungen*

Bei Erstellen der Figurenmenge ist zwischen einem *unstrukturierten, teilweise strukturierten und durchgängig strukturierten* Vorgehen zu unterscheiden. Unter einem unstrukturierten Vorgehen sind Vorgehensweisen zu verstehen, in denen kein Handlungsmuster zu erkennen ist, welches mehrere Figuren generiert. Das *unstrukturierte* Vorgehen entspricht insofern Piagets und Inhelders (1975) «Suche ohne System» (vgl. 2.3). Ein *teilweise strukturiertes* Vorgehen generiert mehrere Lösungen, jedoch nicht die gesamten durch die Lernenden ermittelten Figuren Das Vorgehen entspricht insofern der «Suche nach einem System» und in Hoffmanns Ansatz der Anwendung von Mikrostrategien (vgl. 2.3 und Hoffmann 1999 & 2003). Als *durchgängig strukturiert* wurden im Rahmen dieser Untersuchung diejenigen Vorgehensweisen eingestuft, mittels derer alle von den Lernenden erstellten Figuren strukturiert werden.
Auch bei Lernenden, die zunächst unstrukturiert oder teilweise strukturiert die Figurenmenge erstellen, spielen Strukturierungen eine zentrale Rolle. So entwickeln einige Lernende im Verlauf des Erstellens der Figurenmenge eine Strukturierung. Ein solches strukturentwickelndes Vorgehen äußert sich in den Überprüfungshandlungen oder in den Verbalisierungen der Lernenden zum eigenen Vorgehen (vgl. 2.2).

–

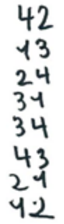
Struk-turie-rungs-grad	**Beschreibung**	**Beispiel**
ohne Struktu-rierung	Innerhalb des Vorgehens ist kein Handlungs-muster zu erken-nen.	Lena erstellt nacheinander folgende Kombinationen aus Punktmustern zur Dominosteinaufgabe 1-2; 2-3; 1-3; 2-4; 4-4; 3-3; 2-2; 1-4; 1-1 *Lena, CGSB, K. m. Wh, Dominosteine*
teilweise strukturiert	Einige Figuren werden durch die Verwendung einer oder mehrer Handlungsmuster ertsellt, abschlie-ßend werden Lösungen über Versuch und Irrtum erstellt. Rest über Versuch und Irrtum	Chiara baut und notiert jeweils die möglichen zweistöckigen Türme, dabei geht sie folgenderma-ßen vor: Ch. baut s-r vertauscht die Anordnung: r-s g-gr vertauscht die Anordnung: gr-g, r-g vertauscht die Anordnung: g-r, r-gr, s-g, vertauscht die Anordnung: g-s r-g; g-gr gr-s vertauscht die Anordnung s-gr, I.: Kann man zeigen, dass das alle sind? C.: Also: Ich hab erst mal mit rot-schwarz, ausei-nander und dann wieder zusammenzustecken und dann das gemacht und mit den Kärtchen, gelb rot, gelb grün, rot grün, grün schwarz und dann immer so weiter. *Chiara, GSSTB, V. o. Wh., Türme bauen*
durchgängig strukturiert	Das Vorgehen strukturiert den gesamten Lö-sungsprozess.	Lea erstellt s-s, r-r, gr-gr und g-g und ordnet diese jeweils untereinander an. Anschließend erstellt sie s-r, s-gr und s-g und ordnet diese rechts neben s-s an. Danach notiert sie r-gr und r-g und ordnet diese neben r-r an. Abschließend erstellt sie gr-g und ordnet es rechts neben gr-gr an.  *Lea, CGSB, K. m. Wh, Eismann*

Strukturentwickelnd	Ausgehend von einem zunächst unstrukturierten oder teilweise strukturierten Vorgehen wird ein Vorgehen entwickelt, welches den gesamten Lösungsprozess strukturiert.	Jasmina erstellt zunächst durch ein teilweise systematisches Vorgehen zweistellige Zahlen aus Zifferkarten. Ihren ersten Aufzeichnungen ist unter anderem zu entnehmen, dass sie aus allen Ziffernkartn zwei Paare bildet (41, 32) und anschließend die Anordnung vertauscht (23, 14). Im weiterenVerlauf findet sie die Lösungen teilweise durch Versuch und Irrtum. Im Verlauf des Lösungsprozesses entwickelt sie ein strategisches Vorgehen, dieses wendet sie anschließend an, um die Vollzähligkeit der Lösungen zu überprüfen.  *KGSD, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*

Tab. 5.1 Verschiedene Strukturierungsgrade beim Erstellen der Lösungen

Der Tabelle sind die verschiedenen Grade der Strukturierung des Lösungsprozesses zu entnehmen. Hinsichtlich der Lernenden, die ein durchgängig strukturiertes Vorgehen zeigen, ist zu berücksichtigen, dass von einem durchgängig strukturierten Vorgehen der Lernenden nicht direkt darauf geschlossen werden kann, dass diese die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt haben. Die beiden nachfolgenden Beispiele zeigen exemplarisch auf, weshalb diese Schlussfolgerung nicht möglich ist:

Transkr. 5.1 Strukturiertes Vorgehen: Tim und Pascal


42
13
24
31
34
43
21
42

T.: Und ja, ich hab alle….weil ich die gelegt habe und ich hab's so gemacht, dass zum Beispiel hier war ne 34 und hier ne 12 *[T. legt die Karten hin]*, dann hab ich die sofort gewechselt [T. *legt die 4 vor die 3]* sind 43 und dann *[T. legt die 2 vor die 1],* ne 21. Dann hab ich sie ausgetauscht *[T. tauscht 4 und 1]* und da war ne 13 und da ne 24 und dann hab ich die wieder umgedreht *[T. legt die 4 vor die 2]* und da stand ne 42 und da ne 13.

(Tim, KGSD, V. o. Wh. Türme bauen)

3-1	**2-1**
3-2	**2-2**
3-3	**2-3**
3-4	**2-4**
4-1	**1-1**
4-2	**1-2**
4-3	**1-3**
4-4	**1-4**

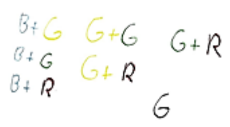
P.: Dann hab ich alle Truppen gemacht. Alle mit 3, mit 4, mit 2 und mit 1.

(Pascal, CGSB, K. m. Wh., Dominosteine)

Beide Lernende verwenden eine Strukturierung, die ihr Vorgehen vollständig beschreibt. Tim bildet aus den vier gegebenen Ziffernkarten jeweils zwei Paare und vertauscht die Anordnung der Elemente in den Figuren. Pascal bildet Figuren, in denen zwei gleiche Elemente enthalten sind, anschließend diejenigen, in denen die Elemente in einer Figur sich unterscheiden. In Tims Vorgehen ist festzustellen, dass dieser trotz dieser übergeordneten Strategie nicht alle Figuren erstellt, da er das Bilden von zwei Paaren nicht ausschöpfend anwendet. Pascal stellt mit seinem Vorgehen sicher, zwei Klassen von Lösungen gefunden zu haben, jedoch ist nicht sichergestellt, dass er auch alle Figuren, die aus der Zusammenstellung zwei verschiedener Elemente bestehen.
Ebenso wie Tim und Pascal verwenden auch einige andere Lernende eine Strukturierung, die ihr Vorgehen durchgängig beschreibt und dennoch nicht sicherstellt, dass sie die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellen. Entsprechend ist zu unterscheiden zwischen einer vollständigen Strukturierung und einer vollständigen Strukturierung, die die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt.

Rolle von Strukturierungen in Abhängigkeit von verschiedenen Darstellungen

Grundsätzlich verwendeten Lernende im Rahmen der Untersuchung bei der Erstellung aller Objekte verschiedene Darstellungen. Sie erzeugten die Lösungen durch Materialhandlungen, notierten die Lösungen ikonisch oder symbolisch oder sie erstellten die Lösungen durch Materialhandlungen und notierten diese zusätzlich. Unabhängig davon, wie die Lernenden die Objekte erstellten, lassen sich zunächst unstrukturierte, teilweise strukturierte und vollständig strukturierte Vorgehensweisen zu beobachten. Trotz der verschiedenen verwendeten *Darstellungsebenen* (enaktiv, ikonisch, symbolisch), stimmen Teile der vorgenommenen Strukturierungen doch zu einem großen Teil überein:

Enaktiv	Ikonisch	Symbolisch
		

Tab. 5.2 Unabhängigkeit der Verwendung von Strukturierungsstrategien von der Darstellungsebene

Die Tabelle (Tab. 5.2) zeigt exemplarisch für die Strukturierungsstrategie Elementfixierung (vgl. 6.1.2), wie diese bei verschiedenen Aufgabenstellungen und bei verschiedenen Darstellungsebenen Verwendung fand. So ist in jeder Strukturierung ersichtlich, dass Gruppen gebildet wurden, in denen jeweils ein ausgewähltes Element mit allen anderen verknüpft wird (Beispiel 2: der rote Bausteine in der obersten Zeile, Beispiel 3: die Mannschaft blau in der linken Spalte). Insgesamt war keine Abhängigkeit einer vorgenommenen Strukturierung von der jeweiligen Darstellungsebene zu erkennen.

5.1.1.2 *Räumliche Strukturierung der Figurenmenge*

Bei einigen Lernenden stimmte die Strukturierung der Erstellung der Figurenmenge mit der räumlichen Strukturierung der Figurenmenge überein. In vielen Fällen waren jedoch Diskrepanzen zwischen der Strukturierung der Erstellung der Figurenmenge und der räumlichen Strukturierung der Figurenmenge festzustellen. So gingen einige Lernende, wie beispielsweise Lil bei der Lösungsfindung vollständig strukturiert vor, legten die Objekte dann jedoch unstrukturiert auf den Tisch.

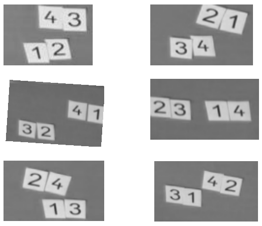
Protokoll des Legevorgangs:	Strukturierung der Lösungen am Ende des Lösungsprozesses (Ausschnitt)
	
	Leah, CGSB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten

Abb. 5.1 Strukturgeleitete Notation und unstrukturierte Darstellung der Lösungen

Eine Betrachtung der Notationsschritte in Leahs Vorgehen zeigt eine Struktur. Sie bildet jeweils aus den gegebenen vier Ziffernkärtchen zwei Paare und vertauscht im Anschluss daran die Reihenfolge der Ziffern in den Zahlen. Dieses Vorgehen wiederholt sie mehrmals. Der zweite Ausschnitt zur Anordnung der zweistelligen Zahlen zeigt, dass sich dieses strukturierte Vorgehen den erstellten Objekten auf dem Tisch nicht mehr entnehmen lässt.

Schwierigkeiten bei der räumlichen Strukturierung der Figurenmenge

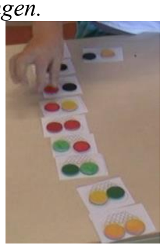
Wenn Lernende unstrukturiert vorgehen und auch keine Überprüfungen vornehmen, so werden spätestens bei der Aufforderung, die Vollständigkeit der Lösungen zu begründen, Argumentationen notwendig, die in der Regel auf der Strukturierung der Lösungen beruhen. Für den Fall, dass die Lernenden die Vollständigkeit darüber begründeten, keine weiteren Lösungen zu finden, wurden sie gebeten, eine Strukturierung der Lösungen vorzunehmen, um die Vollständigkeit zu zeigen. Diesbezüglich zeigten sich bei einigen Lernenden Schwierigkeiten, wenngleich sie alle Lösungen gefunden hatten. So fanden sie keine endgültige räumliche Strukturierung, mittels derer sie die Vollständigkeit der Lösungen zeigen konnten. Vielmehr strukturierten sie die Lösungen immer wieder um, wie das Beispiel von Pascal zeigt:

Transkr. 5.2 Pascals Vorgehen (CGSB, K. o. Wh. Eismann)

Zur Situation: Pascal hat alle 10 möglichen Eishörnchen in folgender Reihenfolge erstellt: gr-g,gr-r, gr-s, g-s, g-r, r-s, anschließend gr-gr, g-g,r-r, s-s. Der Reihenfolge ist eine Strukturierung zu entnehmen. Er hat zunächst alle Eishörnchen erstellt, in denen genau eine grüne Eiskugel vorkommt, anschließend abhängig von den gefundenen Lösungen alle, in denen eine gelbe und eine rote vorkommt. Abschließend hat er alle Eishörnchen erstellt, in denen zwei gleiche Eissorten vorkommen. Die Interviewerin bittet ihn die Lösungen so zu legen, dass man die Vollständigkeit der Lösungen direkt nachvollziehen kann. Pascal ordnet darauf hin über einen Zeitraum von mehr als fünf Minuten seine

Lösungen immer wieder neu an.
Die drei Abbildungen (Abb. 1-3) zeigen exemplarisch Anordnungen.





I.: Was ist gerade so schwierig? Kannst du mir das erklären?

P.: Dass das rote (Abb. 3, zeigt auf die Lösungen mit roten Eiskugeln) und so (zeigt auf die Eishörnchen, in denen eine gelbe Kugel vorkommt) zusammengehört
I.: Könnte man das denn so fertig machen, dass man bei einer Gruppe sieht, dass die zusammengehört?

P.: Diese Gruppe heißt schwarz.


(Abb. 4)

P.: Diese Gruppe heißt rot.


(Abb.5)

P.: Diese Gruppe heißt grün.


(Abb.6)

P.: und diese Gruppe heißt gelb.


(Abb.7)

Analyse der Situation

Eine genauere Betrachtung der Vorgehensweise und der Äußerungen von Pascal zeigt, dass die Schwierigkeit, die Lösungen zu strukturieren, darin besteht, dass die erstellten Figuren aus zwei Elementen bestehen. Die Anordnung seiner Lösung in Gruppen (Abbildungen 5 bis 7) zeigen, dass für ihn jeweils diejenigen Elemente, die ein festes Element enthalten, zu einer Gruppe beispielsweise „schwarz" gehören. Dass jedoch beispielsweise das Objekt schwarz-rot auch gleichzeitig zu der Gruppe „rot“ gehört, erzeugt bei ihm Schwierigkeiten. Es ist anzunehmen, dass sein Fokus darauf liegt, durch seine Strukturierung aufzuzeigen, dass zu jedem Element alle möglichen Objekte erstellt wurden. Dies ist jedoch deshalb nicht möglich, weil die von ihm angedachte Strukturierung in „Alle mit schwarz“, „alle mit rot“, „alle mit grün“ und „alle mit gelb“ Klassen beschreibt, die nicht disjunkt sind. Insofern ist diese Strukturierung nicht möglich und es wäre notwendig eine andere Klassifizierung vorzunehmen, um eine räumliche Strukturierung zu ermöglichen.

Die Umstrukturierung der Lösungen ist dabei kein kontextspezifisches Phänomen und auch nicht abhängig von den zugrundeliegenden Figuren, sondern war bei allen Aufgabenstellungen zu beobachten. Schwierigkeiten bei der Strukturierung der Lösungen werden auch im Kontext des Lösens von Auflistungsproblemen beschrieben. Hoffmann (2003, S. 245) zeigt auf, dass sowohl einige Primar- als auch Sekundarstufenschüler nicht in der Lage sind, die Lösungen so umzuordnen, dass eine vollständige Strukturierung ersichtlich ist. In einigen Fällen rücken sie die Objekte einfach zusammen, in anderen sind sie nicht in der Lage, eine übergeordnete Strukturierung zu erstellen. Ein Erklärungsansatz für die Schwierigkeiten der Lernenden ergibt sich aus der genaueren Betrachtung, in der deutlich wird, dass die Lernenden Klassen bilden wollen, die nicht disjunkt sind und so keine klare räumliche Strukturierung zulassen.

5.1.1.3 *Rolle von Strukturierungen über verschiedene Teile des Lösungsprozesses*

Insgesamt zeigt sich im Verlauf der Lösungsprozesse einzelner Lernender eine zunehmende Strukturierung. Hinsichtlich dieses Aspektes stimmen die Ergebnisse entsprechend mit den Untersuchungsergebnissen zur Lösung von Auflistungsproblemen überein (vgl. Abschnitt 2.2). Zentral ist dabei, dass Lernende oftmals Umstrukturierungen vornehmen, wenn sie die Vollständigkeit der gefundenen Lösungen überprüfen oder mittels Strukturierung die Vollständigkeit begründen wollen. Dies gilt auch in vielen Fällen für Lernende, deren Lösungsprozess vollständig strukturiert war.

Rolle verschiedener Strukturierungen

Ein Vergleich der Strukturierungen in verschiedenen Teilen des Anzahlbestimmungsprozesses zeigt, dass es insgesamt eine überschaubare Anzahl an Strukturierungsstrategien gibt. Strukturierungen, die zur Begründung der Vollständigkeit der zur Überprüfung der Vollständigkeit von den Lernenden verwendet werden, lassen sich auch bereits beim Erstellen der Figurenmenge beobachten.

Phase des Anzahlbestimmungsprozesses	**Verwendete Strukturierungen**
Erstellungsphase	«Disjunkte Paarbildung» oder «Zyklische Musterbildung» , oder «Elementfixierung» oder Kombinationen der genannten Strukturierungsstrategien mit weiteren figurspezifischen Strategien
Überprüfungsphase	Mischform aus «Disjunkter Paarbildung» und «Elementfixierung» oder «Elementfixierung» oder Kombinationen der «Elementfixierung» mit weiteren figurspezifischen Strategien
Begründungsphase	«Elementfixierung» oder Kombinationen der «Elementfixierung» mit weiteren figurspezifischen Strategien

Tab. 5.3 Verwendete Strukturierungen in verschiedenen Phasen des Lösungsprozesses

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass sich insgesamt innerhalb des Lösungsprozesses eine Verlagerung hin zu einer Strategie, der sogenannten «Elementfixierung», in verschiedenen Kombinationen mit weiteren Strategien zeigt (vgl. 5.3).

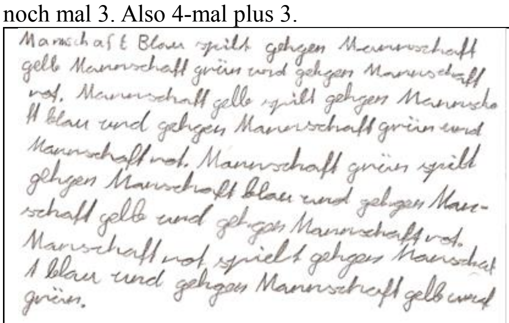
5.1.2 Strukturierungen bei direkten Anzahlbestimmungen

Im Rahmen der Untersuchung bestimmten bereits einige Lernende, ebenso wie Anne (vgl. Abb. 5.2), die Anzahl an Lösungen direkt mittels einer Rechnung. Um eine solche Rechnung verwenden zu können, bedarf es einer gedanklich vorgenommenen Strukturierung, aus der die Rechnung abgeleitet wird. Insofern lassen sich alle direkten Anzahlbestimmungen als strukturiert einordnen.

Transkr. 5.3 Annes direkte Anzahlbestimmung(KGSD, K. o. Wh., Fußballturnier)

Zur Situation: Anne erhält den Auftrag herauszufinden, wie viele Spiele es auf einem Fußballturnier mit vier Mannschaften gibt, wenn jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere spielen soll.

A.: Ich vermute 12. Hm. Weil jeder spielt ja einmal gegen jeden und dann hab ich einfach gerechnet: Wie viel (…) zum Beispiel jetzt hab ich einfach 3 plus noch mal 3 plus noch mal 3. Also 4-mal plus 3.


Manschaft Blau spilt gehgen Mannschaft gelb Mannschaft grün und gehgen Mannschaft rot. Mannschaft gelb spilt gehgen Mannscha ft blau und gehgen Mannschaft grün und Mannschaft rot. Mannschaft grün spielt gehgen Mannschaft blau und gehgen Mann-schaft gelb und gehgen Mannschaft rot. Mannschaft rot spielt gehgen Mannschaf t blau und gehgen Mannschaft gelb und grün.

Kurzbeschreibung ihrer Notation:

b-g; b-gr, b-r

g-gr, g-r, g-b-

gr-b, gr-g, gr-r

r-b, r-g, r-gr

Insgesamt zeigt sich, dass bei der Lösung der Grundaufgaben ein eher geringer Anteil der Lernenden eine direkte Anzahlbestimmung vornimmt. So ermittelten drei Lernende die Anzahl aller Lösungen bei der ersten Grundaufgabe direkt, bei der zweiten Grundaufgabe waren es fünf Lernende. Bei der Erweiterung der Aufgabenstellungen wurde hingegen ein größerer Anteil an Lösungen direkt ermittelt.

Als Ergebnis ist festzuhalten, dass die meisten direkt ermittelten Anzahlen bei den Grundaufgaben, ebenso, wie in Annes Fall, ein falsches Ergebnis lieferten. Insofern ist es von besonderer Bedeutung, die zugrundeliegenden Strukturierungen bei direkten Anzahlbestimmungen genauer in den Blick zu nehmen, um die Denkwege und Schwierigkeiten der Lernenden besser zu verstehen.

Die Analyse zeigt, dass Strukturierungen bei direkten Anzahlbestimmungen eine zentrale Rolle spielen. Alle Wege beruhen auf gedanklich vorgenommenen Strukturierungen, welche den Lernenden jedoch nicht zwangsläufig direkt bewusst sind.
Um detaillierte Informationen über die zugrundeliegenden Strukturierungen zu erhalten, wurden die Lernenden gebeten, die Richtigkeit der ermittelten Anzahl zu begründen. In einigen Fällen wurden sie zusätzlich zu der Begründung auch explizit aufgefordert, alle möglichen Lösungen zu erstellen. Die zugrundliegenden Strukturierungen wurden entsprechend aus den Begründungen und der Darstellung der Lösungen rekonstruiert.
Festzuhalten ist, dass direkten Anzahlbestimmungen immer eine vollständige gedankliche Strukturierung unterliegt, diese in vielen Fällen jedoch nicht zu der richtigen Anzahl an Lösungen führt und es insofern einer genaueren Betrachtung der unterschiedlichen Strukturierungen bei richtigen und falschen direkten Anzahlbestimmungen bedarf.

5.2 Rolle von Strukturierungen bei der Bearbeitung mehrerer Aufgabenstellungen

Im Rahmen der Untersuchung erhielten die Lernenden insgesamt vier kombinatorische Problemstellungen: Zwei zueinander isomorphe Grundaufgaben und jeweils zwei Erweiterungen der Aufgabenstellungen, in denen die Anzahl der zu kombinierenden Elemente jeweils um 1 erhöht wurde (vgl. 3.3).

Bei der Bearbeitung der Erweiterungsaufgaben ließ sich im Vergleich zur Bearbeitung der Grundaufgaben eine große Zunahme an durchgängig strukturierten Vorgehensweisen feststellen. Im Vergleich der Lösungen der zueinander isomorphen Problemstellungen war hingegen keine direkte Zunahme an strukturierten Vorgehensweisen bei der Bearbeitung der zweiten Aufgabenstellung zu erkennen.

Die Zunahme an Strukturierung zeigt sich bei den zueinander analogen Aufgabenstellungen insbesondere darin, dass ein weitaus geringerer Anteil an Lernenden die Anzahl aller Lösungen über das Erstellen der Figurenmenge bestimmt. Bei der Bearbeitung der zueinander analogen Aufgaben wählte etwa *ein Viertel* der Lernenden einen *direkten Weg zur Anzahlbestimmung*. Aus den Erläuterungen der Lernenden ging dabei hervor, dass diese in der Regel die Rechnung bzw. die ermittelte Anzahl aus der bereits gelösten Grundaufgabe ableiteten.

	Aufgabe 1[20]	Aufgabe 2
Grundaufgabe (n = 63)	3	5
Erweiterung der Aufgabe (n = 63)	18	15

Tab. 5.4 Anzahl direkter Anzahlbestimmungen von insgesamt 63 Lernenden in Abhängigkeit von der Aufgabe

Insgesamt zeigte sich bei der Bearbeitung der Erweiterungsaufgaben auch bei Lernenden, die die *Anzahl indirekt durch das Erstellen der Figurenmenge* ermittelten, eine Zunahme an strukturierten Vorgehensweisen. Nur zwei der interviewten Lernenden ermittelten die Anzahl vollständig neu ohne eine zugrundliegende Strukturierung (genauere Informationen zu den Strategien vgl. Kapitel 7 und 8).

Ebenso, wie bei der Bearbeitung der Grundaufgabe zeigte sich dabei zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen kein Unterschied. Strukturierte Anzahlbestimmungen lassen sich bei den indirekten Wegen sowohl bei Materialhandlungen als auch bei ikonischen und symbolischen Auflistungen beobachten. Zentral ist die Zunahme an Strukturierungen und eine Konzentration auf einige wenige Strukturierungsstrategien.

5.3 Zusammenfassung

Ausgehend von dem Wissen über die Bedeutung von Strukturierungen zur kombinatorischen Anzahlbestimmung aus fachlicher Sicht, wurde in diesem Kapitel folgender Forschungsfrage nachgegangen:

[20] Da die Reihenfolge der zuerst präsentierten Aufgabenstellung in den Interviews variiert, lässt sich dieser Darstellung nicht entnehmen, ob es Unterschiede bezüglich der Farben und Zahlenaufgaben gab oder ob bei spezifischen Kontexten eine besonders häufige direkte Anzahlbestimmung erfolgte.

Forschungsfrage 2

Welche Rolle spielen Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen von Drittklässlern?

Hinsichtlich der Rolle von Strukturierungen konnte festgestellt werden, dass Lernende, unabhängig davon, ob sie die Anzahlen indirekt oder direkt ermitteln, im Verlauf des Lösungsprozesses Strukturierungen vornehmen.

In Fällen, in denen Lernende indirekt die Anzahl aller Lösungen bestimmen, sind Strukturierungen sowohl im Prozess des Erstellens von Lösungen zu lokalisieren als auch in einer räumlichen Strukturierung der erstellten Figurenmenge. Strukturierungen werden bei indirekten Anzahlbestimmungen genutzt, um die Lösungen zu erstellen, um die Vollständigkeit der Lösungen zu überprüfen oder, um die Vollständigkeit zu begründen.

Die Erstellung der Lösungen lässt sich bei vielen Lernenden zunächst als unstrukturiert oder teilweise strukturiert bezeichnen. Sie entwickeln jedoch oftmals im Verlauf des Lösungsprozesses eine Strukturierung. Einige Lernende erstellen die gesuchte Figurenmenge auch bereits mit einem durchgängig strukturierten Vorgehen. Zentral ist dabei, dass der Strukturierungsgrad vollkommen unabhängig davon ist, ob Lernende die Figurenmenge über Materialhandlungen erstellen oder sie ikonisch oder symbolisch auflisten. Zudem zeigt sich, dass Lernende, die strukturiert vorgehen, diese Strukturierung in vielen Fällen nicht zusätzlich in einer dazu analogen räumlichen Strukturierung darstellen. Eine räumliche Strukturierung vorzunehmen erweist sich für einige Lernende als besondere Schwierigkeit, da die von ihnen festgelegten Kriterien zur Figurenbildung keine disjunkten Mengen erzeugen würden und sie insofern die gefundenen Lösungen immer wieder zu neuen Klassen zusammenfügen.

Die Erkenntnisse hinsichtlich der Rolle von Strukturierungen bei Anzahlbestimmungsproblemen stimmen damit zu weiten Teilen mit den in der Literatur beschriebenen Erkenntnissen zur Lösung von Aufzählproblemen überein (vgl. 2.2). Es sind jedoch zwei zentrale neue Erkenntnisse hervor zu heben: Erstens ist zwischen einer vollständigen Strukturierung und einer vollständigen Strukturierung, die die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt, zu unterscheiden. Dieses ist insofern zentral, als in dem ersten Fall die Rolle der Strukturierung darin besteht den Lösungsprozess durchgängig zu strukturieren im zweiten Fall strukturiert die Strukturierungsstrategie den Lösungsprozess durchgängig und stellt sicher, dass die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt wird. Zweites kann daraus, dass Lernende ein konsequent strukturiertes Vorgehen verwenden, nicht gefolgert werden, dass diese Figurenmengen auch räumlich strukturieren können. Insofern kann die Strukturierung des Lösungsprozesses nicht unbedingt mit deren Kompetenz, eine räumliche Strukturierung der Figurenmenge vorzunehmen gleichgesetzt werden. Es zeigt sich, dass bei diesen Lernenden die Strukturierung im Lösungsprozess eine zentrale Rolle einnimmt, nicht jedoch bei der Darstellung der Figurenmenge.

6 Die Beschreibung von Strukturierungsstrategien

„Und dann hab ich erst vier und drei gemacht und eins und zwei und dann habe ich das vertauscht. Und immer so weiter.“

Leah, CGSB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten

Leah greift zur Anzahlbestimmung aller zweistelligen Zahlen aus vier Ziffernkarten in ihrem Vorgehen auf die Eigenschaften der zu erstellenden Figurenmenge zurück: Sie bildet zunächst zwei zweistellige Zahlen und vertauscht im Anschluss daran die Reihenfolge der Ziffern und erhält so zwei weitere Figuren. Die Eigenschaften der zu erstellenden Figurenmenge spielen aus fachlicher Sicht eine zentrale Rolle bei der Anzahlbestimmung: So ist es aus fachlicher Sicht möglich, diese bei der Lösungsfindung über das strukturierte Auflisten miteinzubeziehen. Bei der Verwendung von Zählstrategien sind sie notwendigerweise zu berücksichtigen, ebenso, wie bei der Anwendung der kombinatorischen Operationen (vgl. 1.2). Vorliegende Untersuchungsergebnisse zu den Lösungsstrategien von Lernenden im Kontext kombinatorischer Auflistungsprobleme geben zusätzlich Hinweise darauf, dass einige Aufzählstrategien in Abhängigkeit von den gegebenen Aufgabenstellungen verwendet werden. Insofern ist zu vermuten, dass die Strategien ähnlich, wie in Leahs Vorgehen auch auf Eigenschaften der zu erstellenden Figurenmenge beruhen. Die in Kapitel 4 beschriebenen Ergebnisse bestätigen diese Annahmen und zeigen auf, dass insbesondere die gesuchte kombinatorische Figur sich in den Strukturierungsstrategien vieler Lernender widerspiegelt. Neben dem Einfluss der Eigenschaften der kombinatorischen Figur bzw. der der Figurenmenge wurde in Kapitel 4 aufgezeigt, dass aus der Lernendenperspektive auch der Kontext ausschlaggebend für das strategische Vorgehen ist. Insofern erscheint es notwendig, die Strukturierungsstrategien unter Berücksichtigung des Einflusses dieser Aufgabenvariablen zu beschreiben. Entsprechend zielt dieses Kapitel auf die Beantwortung der Frage:

Forschungsfrage 3
Wie lassen sich die Strukturierungsstrategien unter Berücksichtigung des Einflusses der Aufgabenvariablen „kombinatorische Figur“ und „Kontext“ beschreiben?

Als Ergebnis der empirischen Analyse der Strukturierungsstrategien der Lernenden wurde herausgearbeitet, dass diese sich unabhängig davon, ob sie die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellen oder nicht mittels verschiedener Strategiebausteine beschreiben lassen. Das auf dieser Basis entwickelte *Konzept* der Strategiebausteine wird in Abschnitt *6.1* zur besseren Nachvollziehbarkeit durch die vergleichende Gegenüberstellung der Strategien verschiedener Lernender *hergeleitet.* Daran anknüpfend erfolgt in Abschnitt *6.2* die *konkrete Darstellung des Konzepts*, bevor abschließend eine *Zusammenfassung* der Erkenntnisse in Hinblick auf die Forschungsfrage vorgenommen wird *(6.3).*

6.1 Zur Entwicklung des Konzepts

Zur Beschreibung der Strukturierungsstrategien unter Berücksichtigung der Eigenschaften der kombinatorischen Figuren und des Aufgabenkontextes wurde im Rahmen dieser Untersuchung das Konzept der Strategiebausteine entwickelt. Zentrale Idee ist die Zerlegung der Strukturierungsstrategien von Lernenden in einzelne Bausteine. Die Strukturierungsstrategie eines Lernenden setzt sich, wie in Abbildung 6.1 dargestellt aus einem oder aus mehreren dieser Bausteine zusammen. Die Abbildung stellt das Grundgerüst des Konzeptes dar:

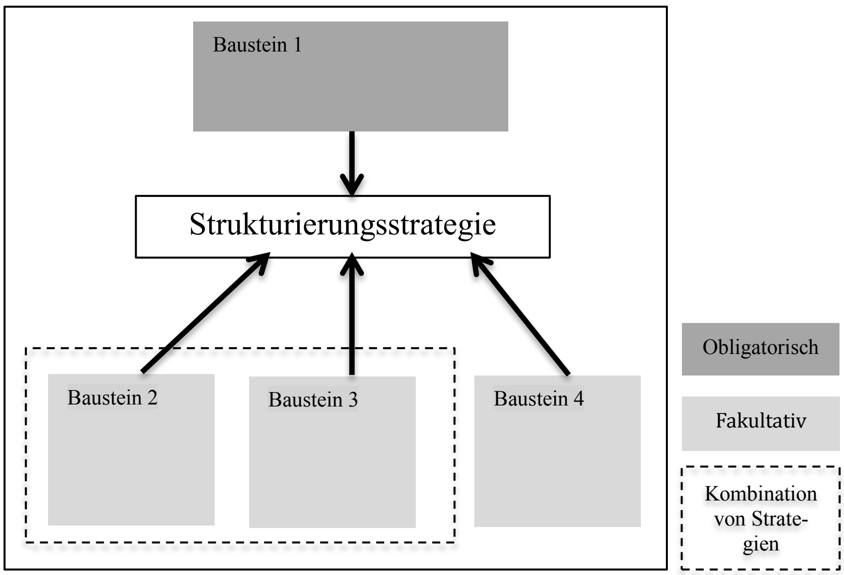


Abb. 6.1 Konzept der Strategiebausteine

Einer der Bausteine ist dabei Teil jeder Strukturierungsstrategie, bei den anderen ist es möglich, dass einer oder mehrere verwendet werden. Die Hintergründe zu diesem grundsätzlichen Ansatz werden im Folgenden veranschaulicht und ausdifferenziert, indem die Strukturierungsstrategie der Schülerin Meike analysiert und in Beziehung zu anderen Strukturierungsstrategien gesetzt wird.

6.1.1 Zusammensetzung von Strategien aus Bausteinen

Meike erhielt den Auftrag, die Anzahl aller zweistelligen Zahlen aus vier Ziffernkarten zu ermitteln. Ein Vergleich ihrer Strukturierung mit den Strukturierungen von Phil und Leah zur gleichen Problemstellung sowie Fines Strukturierung zur Fußballaufgabe zeigt verschiedene Gemeinsamkeiten und Unterschiede auf.

1. Meikes Strukturierung bei der Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten“

M.: Weil ich erst einmal alle mit Einsen gemacht habe. Dann mit Zweien *[zeigt auf die zweite Spalte]* und dann mit Dreien *[zeigt auf die dritte Spalte]* und dann mit Vieren.

Meike, GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten

2. Phils Strukturierung bei der Aufgabe „Türme bauen“

P.: Em, weil ich das so gemacht hab-mh - ich hab als aller erstes grün genomm [*nimmt sich den grünen Steckwürfel]* und dann hab ich die Farben immer da drunter gemacht [*baut den roten Steckwürfel unter den Grünen und legt die Steckwürfel wieder zurück*]. […].
[*nimmt den grünen Steckwürfel und baut darüber den Schwarzen*] Und dann hab ich das so gemacht, dass die Farbe da drüber ist, über dem Grünen. […].Und so hab ich das dann auch mit schw-schwarz [*legt die Steckwürfel wieder aus der Hand*], hm, bl (...).
Phil, CGSB, V. o. Wh., Türme bauen

3. Fines Strukturierung bei der „Fußballaufgabe“

F.: Also erst die rote gegen die gelbe, dann die rote gegen die schwarze, die rote gegen die grüne, und dann die gelbe gegen die schwarze, die gelbe gegen die grüne, die gelbe gegen die rote geht ja nicht, weil rot hat ja schon mal mit gelb gespielt. Und dann die schwarze gegen die grüne und die anderen haben ja schon gegen schwarz gespielt. Und die grüne hat ja schon mit den anderen gespielt.
Fine, CGSB, K.o.Wh., Fußball

4. Leahs Strukturierung bei der Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten“

1a 

1b 

2a 

2b 

3a 

3b 

L.:Und dann hab ich erst 4 und 3 gemacht und 1 und 2 und dann habe ich das vertauscht. Und immer so weiter.

Leah, CGSB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten

Tab. 6.1 Vergleich der Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Strukturierungen verschiedener Lernender

Der Vergleich der Vorgehensweisen von Meike, Phil und Fine zeigt, dass diese sukzessive Klassen von Lösungen bilden, in denen jeweils alle Objekte sind, die ein bestimmtes Element enthalten (*Meike: „Weil ich erst einmal alle mit Einsen gemacht habe. Dann mit Zweien [zeigt auf die zweite Spalte] und dann mit Dreien [zeigt auf die dritte Spalte] und dann mit Vieren“).* Phil erstellt alle Türme, in denen ein grüner Baustein enthalten ist, anschließend alle, in denen ein roter, dann ein schwarzer und ein blauer Baustein enthalten ist: Fine erstellt sukzessive alle Spiele, in denen Mannschaft rot mitspielt, dann alle Spiele, in denen Mannschaft gelb mitspielt, usw.).
Gemeinsam ist den drei Strukturierungen und den Beschreibungen der Lernenden, dass ein festes Element beibehalten wird, bis ausschöpfend alle Lösungen mit diesem Element gefunden wurden. Ein solches Vorgehen lässt sich auch bei den Kombinationen mit Wiederholung beobachten.
Dennoch gibt es auch *Unterschiede* zwischen den Vorgehensweisen: Fines Vorgehen lässt sich vollständig damit beschreiben, dass sie ein Element auswählt und es festhält. In Meikes Vorgehen ist hingegen ein zweites Handlungsmuster zu beobachten, durch das sich ihr Vorgehen von Fines unterscheidet: Betrachtet man Meikes Lösung zu „allen Einsen“, so fällt insbesondere auf, dass sie eine Kombination erstellt und anschließend jeweils die Anordnung der Elemente der Kombination vertauscht und so eine weitere Möglichkeit erhält. Insofern bedarf es hier einer weiteren Ausschärfung und Beschreibung des Vorgehens. Die Vertauschung der Anordnung der Elemente ist als Handlungsmuster auch in Leahs Vorgehen festzustellen. Sie erstellt jeweils zwei Paare und zu den zwei Paaren jeweils die Vertauschung. Den Vorgehensweisen von Meike und Leah kann entsprechend die Vertauschung der Anordnung der Elemente von einem bzw. von zwei Paaren als *gemeinsame Strategie* unterstellt werden. Ihr Vorgehen unterscheidet sich jedoch hinsichtlich der restlichen vorgenommenen Strukturierung. Leah bildet disjunkte Paare, im Gegensatz zu Meike, die ein Element festhält, bis sie dazu alle Lösungen gefunden hat. Der Vergleich zeigt auch, dass

Phil, anders als die drei anderen Lernenden durch sein Vorgehen Türme doppelt erzeugt, so gibt es beispielsweise den Turm grün oben-blau unten zweimal.

Aus den Vergleichen lassen sich Schlussfolgerungen bezüglich der Strukturierungsstrategien der Lernenden ziehen:

- *Meikes Strukturierung der Lösungen lässt sich durch eine Kombination aus zwei Strategien beschreiben:* Sie bildet alle möglichen Figuren zu einem ausgewählten Element. Innerhalb dieser Strategie verwendet sie zusätzlich die Vertauschung der Reihenfolge der Elemente, um ausschöpfend alle Möglichkeiten zu erhalten.
- *Phils Lösung lässt sich ebenfalls durch die Kombination der beiden von Meike verwendeten Strategien* beschreiben Er bildet alle möglichen Figuren zu einem ausgewählten Element. Innerhalb dieser Strategie verwendet er zusätzlich die Vertauschung der Reihenfolge der Elemente, um ausschöpfend alle Möglichkeiten zu erhalten.
- *Fine* bildet alle möglichen Figuren zu einem ausgewählten Element, anschließend bildet sie alle möglichen Figuren mit einem neuen ausgewählten Element usw., bis sie alle Figuren erstellt hat. Diese Strategie beschreibt die gesamte Strukturierung ihres Vorgehens.
- Leahs Strukturierung lässt sich ebenfalls *durch eine Kombination aus zwei Strategien beschreiben:* Sie bildet aus den vier gegebenen Elementen immer zwei Paare. Zusätzlich vertauscht sie die Reihenfolge der Elemente, um ausschöpfend alle Möglichkeiten zu erhalten.
- Phils Vorgehen unterscheidet sich von dem der anderen dadurch, dass er Elemente doppelt erzeugt, insofern bedarf es einer zusätzlichen Unterscheidung zwischen den Strategien.

Aus diesen Vergleichen lässt sich zunächst global ableiten, dass die Strukturierungsstrategien der Lernenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede aufweisen. Diese lassen sich beschreiben, indem die Strukturierungsstrategien als Konglomerat aus einem oder aus mehreren Strategien verstanden werden. Zusätzlich bedarf es einer Unterscheidung, ob Figuren einmal oder mehrfach erstellt werden.

Beschreibung von Strukturierungsstrategien
Strukturierungsstrategien von Lernenden können als Konglomerat aus einem oder aus mehreren Bausteinen verstanden werden. Die beobachtbaren oder beschriebenen Strategien der Lernenden, die basierend auf dem Figurenbildungskonzept alleine oder in Kombination mit anderen Strategien die Strukturierungsstrategie eines Lernenden vollständig beschreiben, werden im Folgenden als „Strategiebausteine“ bezeichnet.

6.1.2 Klassifizierung der Strategiebausteine

Die Strukturierungsstrategien der Lernenden lassen sich aus einem oder aus mehreren Strategiebausteinen zusammensetzen. Eine Analyse dieser Bausteine zeigte dabei, dass die Verwendung der Strategien von verschiedenen Größen abhängt und diese sich verschiedenen Klassen zuordnen lassen. Diese werden im Folgenden durch einen detaillierten Vergleich der Strukturierungsstrategien der Lernenden hergeleitet.

1. Figurenbildungskonzept
2. Allgemeine Strategie
3. Figurspezifische Strategie
4. Kontextspezifische Strategie

Abb. 6.2 Strategiebausteine

6.1.2.1 *Figurenbildungskonzept*

Im vorangegangenen Abschnitt wurde bereits aufgezeigt, dass Phil ein durchgängig strukturiertes Vorgehen verwendet, welches auf den ersten Blick dem von Meike und zu Teilen dem von Fine entspricht. Eine genauere Betrachtung seiner Lösung zeigt jedoch, dass er mit seinem Vorgehen alle Figuren doppelt erstellt hat.

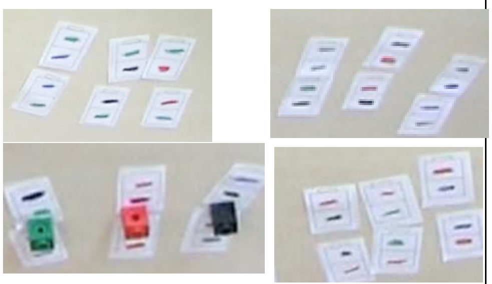
Meikes Strukturierung bei der Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten“	Phils Strukturierung bei der Aufgabe „Türme bauen“
	

Abb. 6.3 Strukturierungsstrategien von Lernenden mit verschiedenen Figurenbildungskonzepten

Phils Strukturierung der Figurenmenge zur Aufgabe „Türme bauen“ zeigt, dass sich seine Strukturierung scheinbar ebenfalls vollständig mit den beiden von Meike verwendeten Strategien beschreiben lässt: Er hat insgesamt vier Klassen mit Türmen gebildet. Eine Klasse mit allen Türmen, in denen ein roter Baustein vorkommt, sowie jeweils eine Klasse mit allen Türmen, in denen ein blauer, bzw. schwarzer bzw. grüner Baustein vorkommt. Eine Fokussierung auf die gebildeten Klassen zeigt dabei, dass er jeweils untereinander diejenigen Türme angeordnet hat, die sich nur in der Reihenfolge der Anordnung der farbigen Bausteine unterscheiden. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass Meike insgesamt die vollständige Figurenmenge, also 12 Zahlen aus Ziffernkarten bestimmt. Phil hingegen ermittelt mit seinem Vorgehen anstelle von 12 Türmen insgesamt 24 Türme. Meike erstellt die Lösungen zu einem Objekt in Abhängigkeit von den bereits gefundenen Lösungen. So enthält die Klasse mit Ziffernkarten, in denen die Ziffer 2 vorkommt nur noch vier Objekte. In Phils gebildeten Klassen sind hingegen jeweils 6 Türme enthalten. Meike hat die Objekte, in den Klassen in Abhängigkeit von den bereits erstellten Figuren gebildet; Phil hingegen erstellte und notierte diese unabhängig von den bereits gefundenen Objekten. Der Unterschied in den Vorgehensweisen der beiden Lernenden besteht in den zugrundeliegenden Figurenbildungskonzepten. Die Strukturierungen lassen sich demnach bezüglich des zugrundeliegenden Figurenbildungskonzeptes[21] von Lernenden unterscheiden: die *abhängige* und die *unabhängige Figurenbildung.*

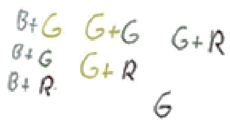
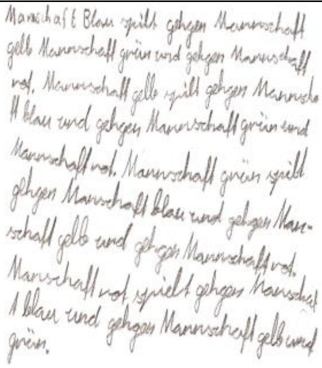
Figurenbildungskonzept

Unter dem Figurenbildungskonzept sind die Konzepte von Lernenden zur Erstellung von Figuren zu verstehen. Unterschieden wird zwischen einem abhängigen und einem unabhängigen Figurenbildungskonzept.
Im Sinne des *abhängigen Figurenbildungkonzeptes* bilden Lernende neue Figuren in Abhängigkeit von den bereits erstellten. Sie berücksichtigen in ihrem strategischen Vorgehen, welche Figuren bereits in der erstellten Figurenmenge vorhanden sind und bilden in Abhängigkeit von diesen neue Figuren.
Im Sinne des *unabhängigen Figurenbildungkonzeptes* bilden Lernende neue Figuren unabhängig von den bereits erstellten. Diese werden in ihrem strategischen Vorgehen nicht berücksichtigt.

Diese Unterschiede lassen sich auch in den Strukturierungen anderer Lernender, bei der Bearbeitung anderer Problemstellungen sowie bei anderen Strukturierungen beobachten. Die nachfolgende Tabelle belegt dies exemplarisch für die verschiedenen kombinatorischen Figuren.

---

21 Unter Klassenbildungsstrategien werden im Rahmen dieser Arbeit diejenigen Strategien zusammengefasst, die bestimmen, wann die Vollständigkeit der Objekte mit einem festen Element gegeben ist.

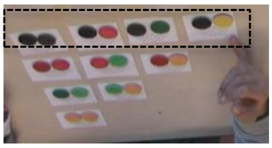
Grundfigur	Abhängige Figurenbildung	Unbhängige Figurenbildung
Kombinationen ohne Wiederholung (n=4, k=2; 6 Mögl.)	 *Malin, KGSD, K. o. Wh., Fußballturnier*	 *Anne, KGSD, K. o. Wh. Fußballturnier*
Kombinationen mit Wiederholung (n=4, k=2; 10 Mögl..)	Leah erstellt der Reihe nach folgende Lösungen: s-s, r-r, gr-gr, g-g s r, s gr, s g r gr, r g gr g *Leah, CGSB, K. o. Wh., Eismann*	 *Pascal, CGSB, K. m. Wh., Dominosteine*
Variationen ohne Wiederholung (n=4, k=2; 12 Mögl..)	 *Meike,GSSTB, V. o. Wh, Zahlen aus Ziffernkarten*	 *Phil, CGSB, V. o. Wh., Türme bauen*

Tab. 6.2 Abhängige und unabhängige Figurenbildungskonzepte bei verschiedenen Figuren

Grundsätzlich bildet das Figurenbildungskonzept einen Baustein, der bei der Beschreibung jeder Strukturierungsstrategie zu berücksichtigen ist. Den gebildeten Figuren der Lernenden ist zu entnehmen, wann diese abhängig oder unabhängig voneinander erstellt wurden. Ein unabhängiges Figurenbildungskonzept kann insofern eine Fehlerursache sein. So gehen eine Reihe von Lernenden, wie beispielsweise Phil vollständig strukturiert vor und ermitteln aufgrund eines unabhängiges Figurenbildungskonzeptes systematisch zu viele Lösungen.

6.1.2.2 *Allgemeine Strategiebausteine*

Neben dem Figurenbildungskonzept gibt es weitere Bausteine, bei diesen handelt es sich um Strategien, die abhängig von ihrem Vorkommen klassifiziert werden können. Diese Erkenntnis wird im Folgenden an Lauras Strukturierung und an den beiden bereits betrachteten Strukturierungsstrategien von Meike und Fine veranschaulicht.

Variationen ohne Wiederholung Meikes Strukturierung bei der Aufgabe Zahlen aus Ziffernkarten	**Kombinationen ohne Wiederholung** Fines Strukturierung bei der Fußballaufgabe	**Kombinationen mit Wiederholung** Lauras Strukturierung bei der Eismannaufgabe
 *Meike,GSSTB, V. o. Wh, Zahlen aus Ziffernkarten*	F.: „Also erst die rote gegen die gelbe, dann die rote gegen die schwarze, die rote gegen die grüne, und dann die gelbe gegen die schwarze, die gelbe gegen die grüne, die gelbe gegen die rote geht ja nicht, weil rot hat ja schon mal mit gelb gespielt. Und dann die schwarze gegen die grüne und die anderen haben ja schon gegen schwarz gespielt. und die grüne hat ja schon mit den anderen gespielt.“ *Fine, CGSB, K.o.Wh., Fußball*	 *Laura, CGSB, K. m. Wh., Eismann*

Ein Vergleich der durch die drei Lernenden zu lösenden Problemstellungen zeigt, dass sich diese hinsichtlich der Kontexte, der kombinatorischen Figur und

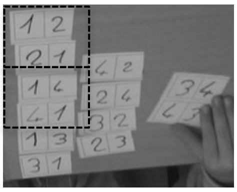
der zu kombinierenden Objekte unterscheiden. Hinsichtlich der Vorgehensweisen von Meike und Fine ist aus den vorherigen Ausführungen bekannt, dass Meike eine Kombination aus zwei Strategien verwendet: Sie bildet sukzessive alle Figuren zu einem bestimmten Element und vertauscht die Anordnung.
Fines Vorgehen lässt sich vollständig durch das Bilden aller Figuren zu einem festen Element aus der Ausgangsmenge beschreiben. Eine genauere Betrachtung der durch Laura vorgenommenen Strukturierung zeigt, dass diese ebenfalls sukzessive zu einem Element alle möglichen Figuren bildet und ebenso mit den anderen Elementen verfährt: Laura ermittelt zunächst alle möglichen Kombinationen aus zwei Eiskugeln, in denen eine Sorte Schokolade ist, anschließend alle Kombinationen, in denen Erdbeere, dann Waldmeister und schlussendlich Zitrone enthalten ist.
Es zeigt sich, dass die drei Lernenden, trotz unterschiedlicher gegebener Aufgabenstellungen und trotz unterschiedlicher zu erstellender Figuren, zur Strukturierung eine gemeinsame Strategie verwenden. Daraus ist zu folgern, dass diese unabhängig vom Kontext, der Figur und der Art der zu kombinierenden Objekten eingesetzt wird.
Neben der beschriebenen Strategie («Elementfixierung»), gibt es noch weitere Strukturierungen, die über alle kombinatorischen Problemstellungen hinweg zu beobachten sind. Diese Strukturierungen, die unabhängig von dem zugrundeliegenden Kontext und den Eigenschaften der kombinatorischen Figur zu beobachten waren, werden als „allgemeine Strukturierungsstrategien“ bezeichnet.

Allgemeine Strukturierungsstrategien

Allgemeine kombinatorische Strukturierungsstrategien zeichnen sich dadurch aus, dass sie unabhängig von den Eigenschaften gesuchter kombinatorischer Figuren oder des Kontextes verwendet werden.

6.1.2.3 *Figurspezifische Strategiebausteine*

Wie bereits beschrieben, verwendet Meike eine weitere Strategie: Sie vertauscht die Reihenfolge der Lösungen. Es stellt sich die Frage, ob dieses Vorgehen nur von ihr angewendet wird oder ob es auch bei anderen Lernenden und über verschiedene Problemstellungen zu beobachten ist. Die Analyse der Vorgehensweisen weiterer Lernender zeigt, dass die Vertauschung der Reihenfolge von Elementen bei vielen Lernenden eine Rolle spielt, jedoch nur bei Problemstellungen, in denen Variationen ohne Wiederholung gesucht werden.

Variationen ohne Wiederholung Meikes Strukturierung bei der Aufgabe Zahlen aus Ziffernkarten	**Variationen ohne Wiederholung** Leahs Strukturierung bei der Aufgabe Zahlen aus Ziffernkarten	**Variationen ohne Wiederholung** Maikes Strukturierung bei der Aufgabe Türme bauen
 *Meike, GSSTB, V. o. Wh, Zahlen aus Ziffernkarten*	1a  1b  2a  2b  3a  3b  *Leah, GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*	 *Maikes, GSSTB, V. o. Wh., Türme bauen*

Tab. 6.3 Vertauschung der Reihenfolge der Elemente als Teil der gesamten Strukturierungsstrategie

Die drei Strukturierungen der Lernenden zeigen, dass jeweils die Vertauschung der Reihenfolge der Elemente in den Objekten eine zentrale Rolle spielt, auch wenn die daraus abgeleiteten Strukturierungen nicht vollständig gleich sind (Meike vertauscht nach jedem Objekt die Reihenfolge, Leah und Maike hingegen erst später). Zugleich ist festzustellen, dass die Vertauschung nicht nur bei der Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten", sondern auch im Kontext farbiger Türme eine Rolle spielt, also scheinbar kontextunabhängig ist.
Diese Vertauschung ist charakteristisch für die Figuren „Variationen" und „Permutationen", bei Kombinationen hingegen nicht zulässig. Insofern hängen die Strategien zur Vertauschung der Reihenfolge direkt mit den Eigenschaften der zu bestimmenden Figuren zusammen und werden als figurspezifische Strategien bezeichnet, sie treten im Gegensatz zu den allgemeinen Strategien nur bei einer spezifischen kombinatorischen Figur, jedoch unabhängig vom Kontext auf.

Figurspezifische Strukturierungsstrategien

Unter figurspezifischen Strategien werden im Rahmen dieser Arbeit diejenigen Strategien zusammengefasst, die sich auf eine spezielle Eigenschaft der zu erstellenden kombinatorischen Figuren beziehen und entsprechend nur bei der Lösung von Problemstellungen auftreten, in denen Figuren mit den jeweiligen Eigenschaften gesucht sind.

6.1.2.4 *Kontextspezifische Strategien*

Neben den bereits vorgenommenen Vergleichen gibt es eine weitere Klasse von Strategiebausteinen. Um diese zu veranschaulichen, werden Meikes und Olivias Begründungen zur Vollständigkeit ihrer Lösung im Kontext von Zahlen aus Ziffernkarten miteinander verglichen.

Zahlen aus Ziffernkarten Meikes Begründung der Vollständigkeit	**Zahlen aus Ziffernkarten** Olivias Begründung der Vollständigkeit
M.: Weil ich erst einmal alle mit Einsen gemacht habe. Dann alle mit Zweien *[zeigt auf die zweite Spalte]* und dann mit Dreien *[zeigt auf die dritte Spalte]. […].* *Meike, GSSTB, V. o. Wh.., Zahlen aus Ziffernkarten*	O.: Weil ich ha ja Zwölf, Dreizehn und Vierzehn und dann gibt es keine mehr mit Zehn. Und dann habe ich Einundzwanzig, Zweiundzwanzig geht ja nicht, weil ich keine zwei mehr habe. Dreiundzwanzig und Vierundzwanzig und Fünfundzwanzig würde ja nicht gehen, weil ich keine Fünf habe. Und dann noch die anderen, die ich gefunden habe und mehr kann man dann bis 100 mit den Zahlen nicht machen. *Olivia, KGSW, V. o. Wh.., Zahlen aus Ziffernkarten*

Meike und Olivia nehmen grundsätzlich die gleiche Strukturierung vor, diese beruht jedoch auf zwei unterschiedlichen Überlegungen. Meike begründet ihre Strukturierung über das Bilden von Klassen zu den einzelnen Elementen. Olivia hingegen begründet die Vollständigkeit ihrer Lösungen über den Kontext zweistelliger Zahlen.

Wie bereits in Kapitel 4 aufgezeigt verwendeten zwei Lernende Begründungen und Strukturierungen, die sich konkret auf den Kontext beziehen. Diese bilden folglich den vierten und letzten Baustein, der im Rahmen der Untersuchung identifiziert wurde und notwendig ist, um die Strukturierungsstrategien der Lernenden vollständig zu beschreiben.

Kontextspezifische Strategien

Unter kontextspezifischen Strategien werden im Rahmen dieser Arbeit diejenigen Strategien zusammengefasst, die sich konkret auf den Kontext der Problemstellung beziehen und nur im Kontext der jeweiligen Problemstellung verwendet werden.

Grundsätzlich ist es von zentraler Bedeutung zu berücksichtigen, dass Lernende kontextspezifische Strategien verwenden. Die beiden Beispiele zeigen, dass beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme auch mit kontextspezifischen Strukturierungsstrategien zu rechnen ist. Da jedoch im Rahmen der Untersuchung nur bei den beiden in Kapitel 4 dargestellten Problemstellungen kontextspezifische Strategien rekonstruiert wurden und auch keine weiteren Lernenden in den jeweiligen Kontexten ähnliche Strategien verfolgten, wird im Rahmen der Darstellung der Ergebnisse keine weitere Betrachtung der kontextspezifischen Strategien vorgenommen.
Für das Konzept der Strategiebausteine ist aus der Existenz der beiden beschriebenen Strategien zu folgern, dass es Strukturierungsstrategien gibt, die von Lernenden in Abhängigkeit von dem gegebenen Kontext vorgenommen werden.

6.2 Das Konzept der Strategiebausteine

Die Gegenüberstellung der Strukturierungsstrategie Meikes zu den Strukturierungsstrategien anderer Lernender zeigt exemplarisch auf, wie im Rahmen der Untersuchung durch den kontrastierenden Vergleich der Vorgehensweisen der Lernenden das Konzept der Strategiebausteine abgeleitet wurde. Den vorangegangenen Abschnitten sind dabei zentrale Folgerungen zu entnehmen, die in das Konzept aufgenommen wurden. Ausgehend von der Herleitung der zentralen Gedanken des Konzepts der Strategiebausteine lässt sich dieses wie in der Abbildung dargestellt konkretisieren:

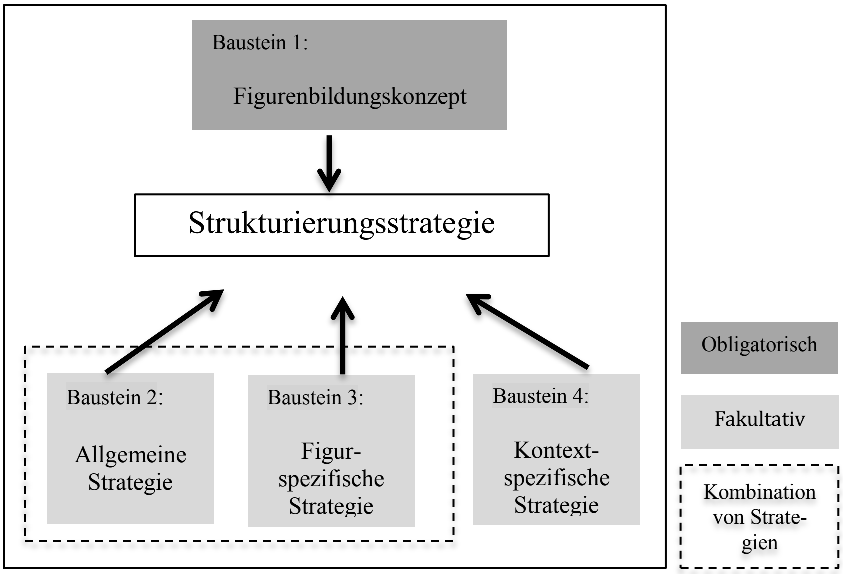


Abb. 6.4 Konzept der Strategiebausteine

Der Darstellung ist zu entnehmen, dass die Strukturierungsstrategie eines Lernenden sich aus verschiedenen Bausteinen zusammensetzt. Das Figurenbildungskonzept ist dabei Teil jeder Strukturierungsstrategie. Zu unterscheiden ist zwischen Lernenden mit einem abhängigen Figurenbildungskonzept und denen mit einem unabhängigen Figurenbildungskonzept. Dieses Konzept ist ausschlaggebend dafür, dass Figuren doppelt gebildet werden. Neben dem Figurenbildungskonzept gibt es drei weitere Bausteine: Die allgemeine Strategie, die figurspezifische Strategie und die kontextspezifische Strategie. Diese Bausteine sind als fakultativ anzusehen, da die Strukturierungsstrategie eines Lernenden nicht zwangsläufig auf allen drei Bausteinen beruht. So wurde in den vorangegangenen Abschnitten aufgezeigt, dass einige Lernende eine allgemeine Strategie anwenden, andere eine figurspezifische oder eine Kombination dieser Strategien. Zudem verwenden Lernende auch kontextspezifische Strategien. Diese wurden jedoch nicht in Kombination mit anderen Strategien beobachtet.

Das Konzept der Strategiebausteine ist keineswegs vollständig neu, sondern nimmt zentrale Gedanken des Modells der Mikro- und Makrostrategien von Hoffmann (2003) auf. Diese geht ebenfalls aufbauend auf den Vorarbeiten Steins (1995) davon aus, das sich die Lösungsstrategien von Lernenden beim Lösen von Auflistungsproblemen aus verschiedenen Bausteinen zusammensetzen lassen. Wie in Abschnitt 2.3 ausführlich dargestellt nimmt Hoffmann (2003) eine Unterscheidung in Mikro- und Makrostrategien vor und verbindet damit die Ebene der Beschreibung des gesamten Lösungsprozesses mit der Beschreibung von Teilen des Lösungsprozesses. Allerdings berücksichtigt Hoffmann in ihrer Darstellung der Mikro- und Makrostrategien nicht, inwiefern das Auftreten dieser Strategien in Beziehung zu den Eigenschaften der gesuchten kombinatorischen Figuren oder dem Aufgabenkontext steht, sondern geht anstelle dessen davon aus, dass die Strategien der Lernenden auf Gestaltaspekte zurückzuführen sind. Insofern unterscheidet sich das vorliegende Konzept zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien in zwei Punkten zentral von Hoffmanns Ansatz: Es berücksichtigt das zugrundeliegende Figurenbildungskonzept und klassifiziert die Strategien anders als Hoffmann. Hoffmanns betrachtet das Lösen der Auflistungsprobleme im Sinne eines Problemlöseprozesses und beschreibt die Strategien entsprechend aus einer gestalttheoretischen Sichtweise. Im Rahmen dieser Arbeit wird hingegen angenommen, dass die Strukturierungen in den Lösungsprozessen der Lernenden insbesondere auch auf die Eigenschaften der Figuren und den gegebenen Aufgabenkontext zurückzuführen sind. Die Beschreibung grenzt sich zudem von den Ansätzen Piagets und Inhelders (1975) dadurch ab, als sie differenzierter und zunächst darauf ausgerichtet ist, die Strukturierungsstrategien der Lernenden möglichst vollständig darzustellen. Damit grenzt sie sich zugleich auch von den Beschreibungen Martinos (1992) ab, die zunächst einzelne Handlungsmuster in den Vorgehensweisen beschreibt. Anders als English (1991, 1993a, 1996) zielt diese zudem nicht auf eine Fähigkeitsstufung ab.

6.2.1 Potential des Konzepts der Strategiebausteine

Die Entwicklung eines Modells zur Beschreibung von Vorgehensweisen, konkret in dieser Arbeit den Strukturierungsstrategien von Lernenden, impliziert indirekt auch die Frage nach dem Mehrwert im Vergleich zu den bereits bekannten Konzepten und Beschreibungen. Im Folgenden werden die zentralen Leistungen des Konzepts überblicksartig dargestellt, welche sich durch die Analyse der Strukturierungen der Lernenden mittels des Ansatzes zeigten. Es sei an dieser Stelle darauf verwiesen, dass es genauerer Kenntnisse über die verschiedenen Strategien bedarf, um das Potential nachvollziehen zu können. Daher wird im Folgenden auf verschiedene Kapitel verwiesen, die Belege für die Leistungen des Konzeptes erbringen.

Mittels des Ansatzes der Strategiebausteine ist es möglich:

- Gemeinsamkeiten in den Vorgehensweisen von Lernenden zu identifizieren (vgl. 7, insbesondere auch 7.3.),
- Beziehungen zwischen den Strukturierungen von Lernenden bei verschiedenen kombinatorischen Figuren herzustellen (vgl.7.1),
- die den operationalen Strategien zugrundeliegenden Strukturierungen zu identifizieren (vgl. 7.1),

- Brüche in den Vorgehensweisen von Lernenden genauer zu beschreiben (vgl. u. a. 6.1.2.2.),
- die Tragfähigkeit der einzelnen Strukturierungsstrategien hinsichtlich des Erstellens bzw. Strukturierens der gesamten Figurenmenge zu überprüfen (vgl. 7.2.4),
- Beziehungen zu den fachlichen Konzepten und Strategien herzustellen (vgl. in den jeweiligen Abschnitten „Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten“ insbesondere in 7.2.1 und 7.2.2),
- und systematisch zu viel ermittelte Lösungen bei verschiedenen kombinatorischen Figuren zu erklären (vgl. 6.1.2 Figurenbildungskonzepte).

6.3 Zusammenfassung

Gegenstand dieses Kapitels war die Beantwortung folgender Forschungsfrage:

Forschungsfrage 3
Wie lassen sich die Strukturierungsstrategien unter Berücksichtigung des Einflusses der Aufgabenvariablen „kombinatorische Figur“ und „Kontext“ beschreiben?

Ein wechselseitiger Vergleich der Strukturierungsstrategien von Lernenden zeigt, dass diese größtenteils keine Strukturierungen erstellen, die vollständig von der kombinatorischen Figur und dem Kontext abhängen. Es lassen sich vielmehr Teile der Strukturierung eines Lernenden auch in anderen Strukturierungen rekonstruieren. Dabei zeigt sich, dass einige Teile der Strukturierungen unabhängig von den Aufgabenstellungen auftraten, andere nur bei einer bestimmten kombinatorischen Figur, wieder andere nur in einem festen Kontext.

Auf dieser Grundlage wurde das Konzept der Strategiebausteine entwickelt, welches es erlaubt, die Strukturierungen der Lernenden unter Berücksichtigung des Einflusses der kombinatorischen Figur und des Kontextes zu beschreiben.

Die Strukturierungen der Lernenden setzen sich demnach aus verschiedenen Bausteinen, Strategiebausteinen genannt, zusammen. Neben dem Figurenbildungskonzept als ersten und obligatorischen Baustein handelt es sich bei den anderen Bausteinen um Strategien, die sich abhängig von ihrem Vorkommen in allgemeine, figurspezifische und kontextspezifische Strategien klassifizieren lassen. Die Strukturierung eines einzelnen Lernenden kann auf dieser Grundlage als ein Konglomerat aus verschiedenen Bausteinen verstanden werden. Sie setzt sich in der Regel aus dem Figurenbildungskonzept sowie einer allgemeinen oder einer figurspezifischen Strategie zusammen oder in vielen Fällen aus einer Kombination dieser Strategien. In einigen seltenen Fällen konnten die Struktu-

rierungsstrategien über das Figurenbildungskonzept und eine kontextspezifische Strategie beschrieben werden.
Dass das Konzept geeignet ist, um die Strukturierungen der Lernenden zu beschreiben und in Beziehung zu den fachlichen Strategien und Konzepten zu setzen, wird durch die Ergebnisse und Darstellungen der nachfolgenden Kapitel aufgezeigt.

–

7 Strukturierungsstrategien

„Ja, weil ich erst mal auf die Steine geguckt habe und dann hab ich immer einen Stein genommen (...) und dann hab ich das sofort wieder andersherum gemacht [T. steckt dabei rot auf gelb und gelb auf rot]. Und dann nimmt ich noch wieder einen Stein [T. steckt blau auf gelb] und dann habe ich das wieder andersrum gemacht [T. steckt gelb auf blau].“
Tim, Variationen ohne Wiederholung, Türme

Ziel der Kombinatorik ist es, ökonomische Zählstrategien zu entwickeln (vgl. Aigner 2007; Kütting 1994; Wittmann & Müller 1984, S. 219). Grundlage für die Entwicklung eines Verständnisses kombinatorischer Zählstrategien im Unterricht ist entsprechend die Thematisierung geeigneter Strukturierungen, aus denen die Zählstrategien generiert werden können (vgl. 1.2).
Um an die Denk- und Vorgehensweisen von Lernenden anknüpfen zu können, bedarf es im Sinne eines zeitgemäßen, genetischen Mathematikunterrichts entsprechend einer Kenntnis darüber, welche Strukturierungsstrategien Lernende, wie beispielsweise Tim, zum Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen verwenden. Diesbezüglich liegen, wie in Abschnitt 2.4 herausgearbeitet bislang keine ausreichenden Informationen vor. Daher zielt dieses Kapitel auf die Beantwortung folgender Fragestellung:

Forschungsfrage 4
Welche Strukturierungsstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen?

Grundsätzlich wurde in Kapitel 6 aufgezeigt, dass sich die Strukturierungsstrategien einzelner Lernender über alle Figuren hinweg aus einem oder aus der Kombination mehrerer Bausteine rekonstruieren lassen. Sie beruhen dabei alle auf dem zugrundeliegenden Figurenbildungskonzept (vgl. 6.1.2) sowie zusätzlich auf der Anwendung einer allgemeinen oder einer figurspezifischen Strategie oder einer Kombination dieser Strategien. In Ausnahmefällen wurden auch Kombinationen aus mehr als einer allgemeinen oder figurspezifischen Strategie verwendet. Neben der Anwendung dieser Strukturierungsstrategien verwendeten im Rahmen dieser Untersuchung zudem zwei Lernende eine kontextspezifische Strategie zur Strukturierung des Lösungsprozesses bzw. zur Strukturierung der Figurenmenge (vgl. 4.2).

Im Folgenden werden die Strukturierungsstrategien der Lernenden detailliert betrachtet. Dazu werden zunächst in Abschnitt 7.1 die *allgemeinen Strategien,* und anschließend in 7.2 die *figurspezifischen* Strategien dargestellt. Auf eine separate Betrachtung der Kombinationen von Strategien wird verzichtet, da zur Erläuterung der allgemeinen und figurspezifischen Strategien bereits Strukturierungsstrategien herangezogen werden, die aus diesen Kombinationen bestehen. Da im Rahmen dieser Untersuchung lediglich zwei eindeutig auf den Kontext bezogene Strategien identifiziert und diese bereits in Kapitel 4 analysiert wurden, werden diese nicht erneut betrachtet. Aufbauend auf den allgemeinen und figurspezifischen Strategien wird in Abschnitt 7.3 in den Blick genommen, welche *Strukturierungsstrategien bei den Problemstellungen zu den einzelnen Grundfiguren* von den Lernenden *hauptsächlich* verwendet wurden. Abschließend erfolgt in Abschnitt 7.4. die *Zusammenfassung der Ergebnisse* in Hinblick auf die Forschungsfrage.

Da das Ziel im Sinne des Spiralprinzips darin besteht, ausgehend von Strukturierungsstrategien geeignete Zählstrategien zu entwickeln, ist von besonderem Interesse, inwieweit die Strukturierungsstrategien von Lernenden geeignet sind, die Figurenmenge vollzählig zu erstellen bzw. zu strukturieren. Das Zusammenspiel zweier Aspekte ermöglicht eine solche Betrachtung: Lockwood zeigt in ihrem Modell zur Beschreibung von Anzahlbestimmungskonzepten auf, dass das strukturierte Erstellen der Figurenmenge als Endresultat eine Strukturierung der Figurenmenge erzeugt (vgl. 1.2.1 & 2.3). Diese Strukturierung lässt sich aus fachlicher Sicht zugleich als Klasseneinteilung der Figurenmenge deuten (vgl. 1.2.1). Dieser Zusammenhang ermöglicht es zu überprüfen, inwiefern die Strukturierungsstrategien der Lernenden geeignet sind, die Vollständigkeit der Figurenmenge zu gewährleisten, indem betrachtet wird, ob durch die Strategien der Lernenden die benannten Kriterien zur Klasseneinteilung einer Menge erfüllt sind. Entsprechend werden innerhalb der Teilkapitel jeweils zunächst die Strategien der Lernenden genauer betrachtet, daran anknüpfend werden Bezüge zur Strukturierung in Form von Klassen hergestellt. Neben einer Betrachtung der Tragfähigkeit der Strategien ist zudem von großem Interesse, ob die in der Studie identifizierten Strategien auch bei Aufgabenstellungen in anderen Kontexten oder bei anderen Figuren verwendet werden. Daher wird jeweils abschließend ein Rückbezug zu den in der Literatur beschriebenen Aufzählstrategien hergestellt.

7.1 Allgemeine Strategien

Insgesamt lassen sich im Rahmen dieser Untersuchung drei allgemeine kombinatorische Strategien unterscheiden, welche über alle Aufgabenstellungen hinweg verwendet wurden: die «Disjunkte Paarbildung», die «Zyklische Musterbildung» und die «Elementfixierung». Zu letzterer waren dabei zwei Varianten zu beobachten. Zusätzlich war neben der Verwendung einer allgemeinen Strategie zu beobachten, dass einige Lernende eine Kombination der Strategie «Disjunkte Paarbildung» und der «Elementfixierung» zur Erstellung der Lösungen nutzten. Die verschiedenen allgemeinen Strategien werden im Folgenden genauer analysiert.

1. «Disjunkte Paarbildung»
2. «Zyklische Musterbildung»
3. «Elementfixierung»
   a. mit fester Position
   b. ohne feste Position

Abb. 7.1 Allgemeine Strategien

7.1.1 Disjunkte Paarbildung

Rieka, GSSTB, K. o. Wh., Lotto

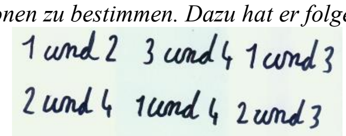
Zur Lösungsfindung legten einige der Lernenden, wie beispielsweise Rieka, aus allen vier gegebenen Elementen (Farben oder Zahlen) gleichzeitig zwei Paare (4-1; 2-3) und wiederholten dieses Vorgehen mehrfach. Die Strategie «Disjunkte Paarbildung» wurde von den Lernenden zum Erstellen der Figurenmenge verwendet. Zudem wurde sie zur Begründung der Vollständigkeit der Lösungen herangezogen, indem eine räumliche Strukturierung der erstellten Figuren im Sinne dieser Strategie vorgenommen wurde. Einige Lernende versuchten auch die Erweiterung der Aufgabenstellungen, in denen fünf Ausgangselemente zur Verfügung standen, mittels dieser Strategie zu lösen. Direkte Anzahlbestimmungen basierten hingegen im Rahmen dieser Untersuchung in keinem Fall auf dieser Strukturierung.

7.1.1.1 *Analyse der zugrundeliegenden Fokussierung*

Die der Strategie zugrundeliegenden Fokussierungen und Überlegungen lassen sich Rubens Vorgehen sowie seiner Begründung entnehmen.

Transkr. 7.1 Rubens Vorgehen (CGSB, K. o. Wh., Lotto)

Zur Situation: Ruben hat den Auftrag erhalten aus 4 Lottokugeln alle möglichen Zweierkombinationen zu bestimmen. Dazu hat er folgende Lösungen notiert:



Er wird anschließend gebeten aufzuzeigen, weshalb es keine weiteren geben kann.

R.: Weil ich hab von 1 immer angefangen (mhm) und dann hab ich so gemacht 1 und 2, 3 und 4, ich hab bei der 1 angefangen und mit 4 immer aufgehört, dann hab ich wieder und 1 und 3, weil 2 hatte ich ja jetzt schon (mhm) dann bei 2 und 4, bei 2 (…) 2 und 3 geht ja jetzt nicht, weil 1 und 3 ja schon ist, da hab ich 1 und 4 gemacht, dann 2 und 3 noch *[R. zeigt mit dem Stift auf die jeweilige Stelle in den Aufzeichnungen]*.

Ruben bildet die Kombinationen mit verschiedenen Elementen systematisch, indem er zunächst aus den vier gegebenen Elementen zwei Kombinationen erstellt, in denen alle vier Ziffern genau einmal vorkommen. In den darauffolgenden Schritten behält Ruben dieses Vorgehen unter Berücksichtigung der bereits erstellten Paare bei und findet so ausschöpfend alle Möglichkeiten. Seine Aussagen: *„ich hab bei der 1 angefangen und mit 4 immer aufgehört“* und *„hab ich wieder und 1 und 3, weil 2 hatte ich ja jetzt schon (mhm) dann bei 2 und 4, bei 2 (...) 2 und 3 geht ja jetzt nicht, weil 1 und 3 ja schon ist“* weisen darauf hin, dass er in jedem seiner Schritte alle Elemente genau einmal berücksichtigt. Es ist daraus zu schließen, dass er auf die gleichhäufige Verwendung der Ausgangselemente fokussiert.

7.1.1.2 *Verallgemeinerung der Strategie*

Die Strategie «Disjunkte Paarbildung» war ebenso zur Lösung von Problemstellungen zu den anderen Grundfiguren zu beobachten. Zu berücksichtigen ist in den nachfolgenden Beispielen, dass die allgemeine Strategie «Disjunkte Paarbildung» in Kombination mit dem Figurenbildungskonzept lediglich bei den Kombinationen ohne Wiederholung die verwendete Strukturierungsstrategie vollständig beschreibt, bei den Beispielen zu den anderen Figuren stellt diese nur einen Baustein dar, so dass die Strukturierungen und Strukturierungsstrategien nicht vollständig mittels dieser Strategie beschrieben werden.

Kombinationen **ohne Wiederholung** **(n=4, k=2; 6 Mögl.)**	**Kombinationen** **mit Wiederholung** **(n=4, k=2; 10 Mögl..)**	**Variationen ohne Wiederholung** **(n=4, k=2; 12 Mögl..)**
R. notiert 4-1; 2-3. *R. notiert 3-1; 2-4.* R.: Und dann noch 2. 2 und 1 *[notiert 2-1]* und 3 und 4 *[notiert 3-4, schließt den Stift].* 	*L. nimmt jeweils zeitgleich zwei farbige Plättchen:* *L. legt g-g, gr-gr, r-r, s-s,* *L. legt g-gr, r-s* *L. legt g-s, gr-r,* *L. legt g-r, gr-s.*	*Leah bildet aus den gegebenen vier Ziffernkarten jeweils zwei Paare aus Ziffernkarten (a), dann vertauscht sie jeweils die Anordnung der Ziffernkarten* (b) 1a.  1b.  2a.  2b.  3a.  3b. 
Rieka, GSSTB, K. o. Wh., Lotto	Lars, CGSB, K. m. Wh., Eismann	*Leah, CGSB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*

Tab. 7.1 Strategie «Disjunkte Paarbildung» bei verschiedenen Figuren

Der Tabelle 7.1 ist zu entnehmen, dass die Lernenden unabhängig vom Kontext und von der gesuchten kombinatorischen Figur aus den gegebenen vier Elementen zwei Paare notieren oder legen (Kombinationen ohne Wiederholung: „1 und 2, 3 und 4“; Kombinationen mit Wiederholung: „g-gr, r-s“, Variationen ohne Wiederholung (1a): „4-3, 1-2“). Im nächsten Schritt werden wiederum aus allen vier Elementen zwei Paare gebildet (Kombinationen ohne Wiederholung: „1 und 3, 2 und 4“; Kombinationen mit Wiederholung: „g-s, gr-r“, Variationen ohne Wiederholung (2a.): „3-2; 4-1“). Das Vorgehen bzw. die Strukturierung ist beendet, sobald mit einem festen Element keine neuen Objekte mehr erstellt werden können. Der Strategiebaustein «Disjunkte Paarbildung» lässt sich entsprechend für beliebige kombinatorische Figuren wie folgt verallgemeinern:

«Disjunkte Paarbildung»[22]

1. Bilde aus den gegebenen n Elementen jeweils gleichzeitig alle möglichen disjunkten Paare.
2. Bilde neue Kombinationen disjunkter Paare und halte dieses Vorgehen solange bei, bis es mit einem festen Element keine weiteren Kombinationen mehr gibt.

Abb. 7.2 Verallgemeinerung der Strategie «Disjunkte Paarbildung»

7.1.1.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Wie eingangs erwähnt ist von besonderem Interesse zu betrachten, ob die Strategien der Lernenden tragfähig sind, um die Figurenmenge vollzählig zu erstellen bzw. zu strukturieren. Aufgrund der möglichen Interpretation der räumlichen Strukturierung der Figurenmenge als Klasseneinteilung derselben, gilt es zu überprüfen, inwiefern die von Kirsch (2004) benannten Kriterien zur Klasseneinteilung einer Menge erfüllt sind, wenn die «Disjunkte Paarbildung» als alleinige Strategie konsequent gemäß der dargestellten Verallgemeinerung verwendet wird. Die Ergebnisse der Analyse sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen. Diese gibt einen Überblick, ob mittels der allgemeinen Strategie der «Disjunkten Paarbildung» *a) die Disjunktheit der Objekte in den Mengen b) die Vollständigkeit der Mengen* und *c) die Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Menge* für die einzelnen Figuren (Spalten 1 bis 3) gewährleistet sind, so dass diese in ihrer Gesamtheit eine mögliche Klasseneinteilung der gesuchten Figurenmenge bilden. Die vierte Spalte gibt bezugnehmend auf die vorgenommene Verallgemeinerung der Strategie eine konkrete Begründung, weshalb das jeweilige Kriterium erfüllt ist oder nicht.

22 Die Verallgemeinerung beschreibt die Strukturierung des Erstellens der Lösungen, also eine dynamische Sicht auf die Figurenmenge. Das Ergebnis des Prozesses lässt sich nach Lockwood (vgl. 2.3) als räumliche Strukturierung deuten. Auf eine zusätzliche Verallgemeinerung der Strategie, welche das Produkt direkt beschreibt wird insofern verzichtet. Die folgenden Strategien werden ebenfalls durchgängig in einer dynamischen Sicht formuliert. Zudem ist zu berücksichtigen, dass die Verallgemeinerung der Strategien jeweils deren vollständige Anwendung beschreibt, Lernende jedoch nicht in allen Fällen die Strategien konsequent anwendeten.

Kriterium zur Klasseneinteilung der Figurenmenge	**K. o. Wh.**	**K. m. Wh.**	**V. o. Wh.**	**Begründung ggf. mit besonderer Bedingung**
Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse	☑	☑	☑	Durch Schritt 1 entsteht jeweils eine Menge, in der zwei Paare mit Objekten enthalten sind, die zusammengenommen alle Elemente genau einmal enthalten.
Vollständigkeit der Anzahl der Klassen	☑	☑	☑	Schritt 2 stellt sicher, dass für ein festes Element ausschöpfend alle Möglichkeiten mit *anderen* Elementen gefunden werden. Damit entstehen insgesamt so viele Mengen, wie es mögliche Objekte mit diesem festen Element gibt. Da aus allen Elementen gleich viele Objekte erstellt werden müssen, stellt dies zugleich sicher, dass damit auch alle anderen Elemente ausschöpfend verwendet wurden.
Disjunktheit der Klassen	☑	☑	☑	Sichergestellt durch Schritt 2, der festlegt, dass *neue* Kombinationen gebildet werden.

Tab. 7.2 Beziehung zwischen der Strategie «Disjunkte Paarbildung» und der Einteilung einer Menge in Klassen

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass die Strategie die Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse bei allen drei Figuren sicherstellt. Die Vollständigkeit der Anzahl der Teilmengen ist bei den Kombinationen ohne Wiederholung und bei den Variationen ohne Wiederholung gegeben, nicht jedoch bei den Kombinationen mit Wiederholung. Mittels der Strategie werden keine Figuren gebildet in denen zwei gleiche Elemente vorkommen. Insofern gewährleistet die Strategie nicht, dass eine Menge aller Kombinationen mit Wiederholung erstellt wird. Die Kombinationen mit zwei gleichen Elementen werden durch diese Strategie nicht erstellt. Insofern ist nicht sicher, dass diese Klasse gebildet wird und ebenfalls nicht, ob diese vollständig ist, wenn sie gebildet wird. Bei den Variationen hingegen ist zu berücksichtigen, dass sich neben der Auswahl der Elemente auch die Anordnung der Elemente von den vorherigen unterscheidet.
Die «Disjunkte Paarbildung» ist nicht auf eine beliebige Ausgangmenge übertragbar. Ist die Ausgangsmenge beispielsweise ungerade, so ist es nicht möglich, Schritt 1 des Vorgehens zu erfüllen, da aus einer ungeraden Anzahl an Objekten keine zwei Paare gebildet werden können, die alle Elemente enthalten. Diese

Einschränkung des Vorgehens zeigt sich in den Strukturierungen der Lernenden bei der Erweiterung der Problemstellungen. Einige Lernende versuchen, die Strategie der «Disjunkten Paarbildung» zum Erstellen von Objekten aus fünf Elementen zu verwenden.

7.1.1.4 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

Ein Vergleich der Strategie «Disjunkte Paarbildung» und der ursächlichen Fokussierung der Lernenden auf die Gleichbehandlung der Elemente und Aufspaltung in zwei disjunkte Paare mit den in der Literatur beschriebenen Handlungsmustern zeigt Gemeinsamkeiten auf. Piaget und Inhelder (1975) beobachteten im Kontext von Kombinationen ohne Wiederholung bei Lernenden, wie beispielsweise Lau ein ähnliches Vorgehen: „Lau puts together AB, CD, AC, BD, AD and BC“ (ebd., S. 167). Hoffmann (2003, S. 159f.) beschreibt im Kontext des Lösens von Problemstellungen zur Produktregel ebenfalls eine Mikrostrategie, die diesem Vorgehen sehr ähnlich ist: In zwei benachbarten Kombinationen werden alle vier möglichen Farben benutzt. Dieses Vorgehen bezeichnet sie als „spaltenweises Abwechslungsprinzip“. Das Vorkommen der Strategie in vorangegangenen Untersuchungen lässt darauf schließen, dass diese Strategie auch über diese Untersuchung hinaus zu beobachten ist.

7.1.2 Zyklische Musterbildung

„Ich hab erst Schoko mit Schoko und dann mit den anderen genauso, Erdbeer mit Erdbeer, Zitrone mit Zitrone und Waldmeister mit Waldmeister, dann Schoko mit Erdbeer, Erdbeer mit Zitrone, Zitrone mit Waldmeister.“

Marc, GSSTB, K. m. Wh., Eismann

Die Strategie «Zyklische Musterbildung» wird von den Lernenden zum Erstellen der Figurenmenge verwendet, nicht jedoch, um die Vollständigkeit der Figurenmenge zu überprüfen oder zu begründen. Lernende, die diese Strategie verwendeten, greifen zur Begründung der Vollständigkeit auf eine räumliche Strukturierung der gefundenen Objekte im Sinne der «Elementfixierung» zurück. Lernende, die die Anzahl direkt ermittelten, begründeten ihre Rechnung ebenfalls über andere Strukturierungen.

Eine genauere Betrachtung der Strategie zeigt, dass dieser eine Fokussierung auf eine „gleichhäufige Verwendung“ der Elemente und einem gleichen schematischen Vorgehen bei allen Elementen zugrunde liegt. Diese Fokussierung spiegelt sich besonders gut in Marcs Vorgehen bei der Eismannaufgabe wider.

7.1.2.1 *Analyse der zugrundeliegenden Fokussierung*

Nach der Bearbeitung der Dominosteinaufgabe erhält Marc den Auftrag herauszufinden, wie viele verschiedene Eishörnchen mit zwei Eiskugeln man aus vier verschiedenen Eissorten erstellen kann, es ergibt sich die folgende Situation.

Transkr. 7.2 Marcs Vorgehen (GSSTB, K. m. Wh., Eismann)

Zur Situation:
Marc legt von rechts nach links s-s, r-r g-g, gr-gr, dabei nimmt er jeweils gleichzeitig zwei gleichfarbige Eiskugeln aus den jeweiligen Boxen-
M. legt von rechts nach links s-r, r-g, g-gr, s-gr.
M. legt von rechts nach links s-g, r-gr, schaut auf die Lösungen, legt s-gr.

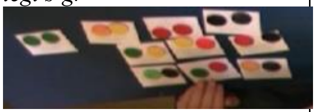
gr | gr	*g | g*	*r | r*	*s | s*
	gr | g	*g | r*	*r | s*
	gr | s	*gr | r*	*g | s*

M.: *[betrachtet seine Lösungen]* „Fertig."
I.: „Woher weißt du, dass das alle sind?"
M.: „Ich hab erst Schoko mit Schoko und dann mit den anderen genauso, Erdbeer mit Erdbeer, Zitrone mit Zitrone und Waldmeister mit Waldmeister *[zeigt jeweils doppelt auf die Becher mit den verschiedenfarbigen Plättchen],* dann Schoko mit Erdbeer, Erdbeer mit Zitrone, Zitrone mit Waldmeister *[zeigt dabei bei jeder Aussage auf den jeweiligen Becher]*, dann noch Schoko mit Waldmeister."

Dem Transkriptausschnitt lässt sich entnehmen, dass Marc zunächst alle Objekte, die zwei gleiche Farben enthalten, legt (*s-s, r-r g-g, gr-gr,)*. In der zweiten Reihe kombiniert er ausgehend von rechts nach links alle Elemente mit dem daneben liegenden Element. In Abhängigkeit von den bereits gefundenen Lösungen kombiniert er anschließend alle mit dem um 2 versetzten Element usw. Damit stellt er sicher, dass jedes Objekt mit seinem Nachfolger kombiniert wurde, anschließend mit dem um 2 versetzten Nachfolger. Dieses Vorgehen setzt er fort, bis er das erste ausgewählte Element (Schokolade) mit allen anderen kombiniert hat.

7.1.2.2 *Verallgemeinerung der Strategie*

Ebenso, wie für die Kombinationen mit Wiederholung lässt sich dieses Handlungsmuster auch bei den Kombinationen ohne Wiederholung und Variationen ohne Wiederholung beobachten. Eine genauere Betrachtung zeigt dabei, dass den Vorgehensweisen eine grundsätzlich gleiche Vorgehensweise unterliegt, sich jedoch bezüglich der Beendigung der einzelnen Schritte Unterschiede ergeben:

<table>
<tr>
<th>Kombinationen ohne Wiederholung
(n=4, k=2; 6 Mögl.)</th>
<th>Kombinationen mit Wiederholung
(n=4, k=2; 10 Mögl..)</th>
<th>Variationen ohne Wiederholung
(n=4, k=2; 12 Mögl.)</th>
</tr>
<tr>
<td>Auf dem Tisch liegen die Lottokugeln 1 und 2 nebeneinander, darunter die Lottokugeln 3 und 4. Mia notiert der Reihe nach folgende Kombinationen aus Lottokugeln:
<table>
<tr><td>1-2</td><td>2-3</td><td>3-4</td><td>4-1</td></tr>
<tr><td>1-3</td><td>2-4</td><td></td><td></td></tr>
</table>
Mia, KGSD, K. o. Wh., Lotto</td>
<td>Marc legt von <u>rechts nach links</u> s-r, r-g, g-gr, s-gr
Legt von <u>rechts nach links</u> s-g, r-gr, schaut auf die Lösungen, legt s-gr

<table>
<tr><td>gr-gr</td><td>g-g</td><td>r-r</td><td>s-s</td></tr>
<tr><td></td><td>gr-g</td><td>g-r</td><td>r-s</td></tr>
<tr><td></td><td>gr-s</td><td>gr-r</td><td>g-s</td></tr>
</table>
Marc, GSSB, K. m. Wh., Eismann</td>
<td>Ralf notiert der Reihe nach folgende Türme:
<table>
<tr><td>r</td><td>g</td><td>gr</td><td>s</td></tr>
<tr><td>g</td><td>gr</td><td>s</td><td>r</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>r</td><td>g</td><td>gr</td><td>s</td></tr>
<tr><td>gr</td><td>s</td><td>r</td><td>g</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>r</td><td>g</td><td>gr</td><td>s</td></tr>
<tr><td>s</td><td>r</td><td>g</td><td>gr</td></tr>
</table>
R.: Fertig. Jetzt hab ich rot mit allen gemacht, gelb mit allen gemacht, grün mit allen gemacht und schwarz mit allen gemacht.
Ralf, KGSW, V. o. Wh., Türme bauen</td>
</tr>
</table>

Tab. 7.3 Strategie «Zyklische Musterbildung» bei verschiedenen Figuren

Gemeinsam ist allen drei Vorgehensweisen der Lernenden, dass diese der Reihe nach ein Element auswählen und es nach der gleichen Vorschrift mit einem anderen Element verknüpfen. So werden die Elemente jeweils zunächst mit sich selbst oder dem Nachfolger, dann mit dem um 2 versetzten Nachfolger usw. kombiniert bis das erste ausgewählte Element mit allen anderen kombiniert wurde (Lottokugeln: alle Zahlen mit ihrem Nachbarn 1-2, 2-3, 3-4; 4-1; Eismann: jedes Plättchen mit einem Plättchen aus dem gleichen Becher, dann jedes farbige Plättchen mit einem farbigen Plättchen aus dem links daneben platzierten Becher; Türme bauen: jeder farbige Baustein mit dem nachfolgenden farbigen Baustein, jeder farbige Baustein mit dem um zwei versetzen Baustein). Der Nachfolger wird dabei bei einigen Lernenden durch die Anordnung der Elemente auf dem Tisch als solcher wahrgenommen (vgl. Vorgehen bei der Eismanaufgabe) oder aber bei Aufgaben, in denen Zahlen bzw. Ziffern kombiniert werden müssen, durch die ordinale natürliche Anordnung der Zahlen (vgl. Vorgehen bei der Lottoaufgabe).

Unterschiede zeigen sich hinsichtlich der Beendigung der einzelnen Schritte, beispielsweise in dem Vergleich der Vorgehensweisen von Mia und Marc. Mia verknüpft jede Lottokugel im ersten Schritt mit einer anderen. Marc hingegen verknüpft jedes farbige Plättchen mit einem Plättchen aus dem danebenstehenden linken Becher. Gibt es dort keinen Becher mehr, so ist der Schritt beendet.
Die Strategie «Zyklische Musterbildung» lässt sich auf der Grundlage der Vorgehensweisen der Lernenden, vollständig angewendet und unter Berücksichtigung zweier verschiedener Abbruchkriterien, wie folgt unabhängig von den kombinatorischen Figuren verallgemeinern:

«Zyklische Musterbildung»

1. Wähle ein Anfangselement a aus den n Elementen und kombiniere es mit seinem Nachfolger a+1 (bei Kombinationen mit Wiederholung mit sich selbst), verfahre genauso mit dem Elementen a+1, bis n.
2. Beginne wieder mit dem Anfangselement a und kombiniere es mit dem um 2 versetzten Nachfolger. a+2. Verfahre genauso mit dem Elementen a+1 bis n.
3. Beginne jeweils wieder mit dem ersten Element a, bis du alle anderen Elemente a bzw. a+1 bis n mit diesem verknüpft hast.

Abb. 7.3 Verallgemeinerung der Strategie «Zyklische Musterbildung»

7.1.2.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Zur Überprüfung, inwiefern die Kriterien zur Klasseneinteilung auch durch diese allgemeine Strategie erfüllt werden, erfolgte ebenfalls eine Betrachtung für die drei kombinatorischen Figuren. Die Tabelle (7.4) zeigt die Ergebnisse dieser Analyse auf.

Kriterium zur Klasseneinteilung der Figurenmenge	**K. o. Wh.**	**K. m. Wh.**	**V. o. Wh.**	**Begründung ggf. mit besonderer Bedingung**
Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse	☑	☑	☑	Im ersten Schritt entsteht eine Klasse, die alle Elemente mit dem definierten Nachfolger enthält. Insofern ist damit die Vollständigkeit der Objekte „alle mit dem Nachfolger“ gewährleistet
Vollständigkeit der Anzahl der	☑	☑	☑	Schritt 2 sorgt dafür, dass die Elemente sukzessive immer mit dem nächsten verbunden werden und keines

Klassen				ausgelassen wird. Der dritte Schritt stellt sicher, dass alle Klassen an Lösungen gefunden werden, da das erste und somit auch alle anderen Elemente mit ihren Nachfolgern verknüpft sind.
Disjunktheit der Klassen	☒	☒	☑	vgl. Erläuterung im Text

Tab. 7.4 Beziehung zwischen der Strategie «Zyklische Musterbildung» und der Einteilung einer Menge in Klassen

Anders als die Strategie «Disjunkte Paarbildung» stellt die Strategie «Zyklische Musterbildung» sicher, dass bei vollständiger Anwendung der Strategie bei allen kombinatorischen Figuren Klassen entstehen, die jeweils jedes Element mit sich selbst, dem Nachfolger, dem um 2 versetzten Nachfolger usw. erstellen. Insofern ist die Anzahl der erstellten Figuren innerhalb einer Klasse vollständig, deren Anzahl der Objekte vollständig ist. Zugleich werden alle Klassen erzeugt. Die Disjunktheit der Klassen von Objekten ist bei diesem Vorgehen unter den oben angegebenen Bedingungen nicht zwangsläufig für Kombinationen ohne und mit Wiederholung gegeben. Es entstehen also Objekte, in denen die Anordnung der Paare bedeutsam ist. Das Vorgehen erzeugt für Variationen ohne Wiederholung die vollzählige Figurenmenge. Für die Kombinationen mit und ohne Wiederholung wird eine zusätzliche Bedingung benötigt, die von vielen Lernenden verwendet wird. Die Lernenden müssen im Sinne des abhängigen Figurenbildungskonzeptes berücksichtigen, dass Figuren nicht doppelt erstellt werden (vgl. 6.2.2). Die Übertragung dieses Vorgehens auf ein beliebiges n ist unproblematisch, da sich nichts an dem Vorgehen ändert und entsprechend die Vollständigkeit der Klassen und der Elemente innerhalb der Klassen durch die beschriebenen Schritte gewährleistet ist.

7.1.2.4 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

Ein Vergleich der Strategie mit den in der Literatur beschriebenen Strategien offenbart einige Gemeinsamkeiten. In den Untersuchungen Piagets und Inhelders (1958, 1975) gibt es bereits Informationen zu diesem Strategiebaustein. Sie sprechen im Kontext des Lösens von Kombinationsproblemen von der „Idea of juxtaposition". Das Vorgehen, im Sinne dieser Idee beschreiben sie wie folgt: „AB, BC, CD, DE, continues by skipping each time one item (AC, BD, and CE)" (Inhelder & Piaget 1975, S. 168). Die von Hoffmann (2003, S. 161) identifizierte Mikrostrategie der „Ebenenparallele" impliziert, dass auf einer Ebene alle vier Farben nacheinander genutzt werden und sie auf der anderen Ebene um eine Position verschoben nacheinander genutzt werden. Die Ebenenparallele entspricht dem ersten Schritt der von Piaget und Inhelder beobachteten Strategie: „Idea of juxtaposition". In beiden Strategien wird ein Element mit dem jeweils darauffolgenden kombiniert. Auch English (1991, 2007) beschreibt im Rahmen ihrer Untersuchungen zu Aufgabenstellungen zum Kreuzprodukt ein solches Vorgehen, welches sie als „Cyclic pattern“ bezeichnet. Die nachfolgende Grafik zeigt die beiden von English als „Cyclic pattern“ beschriebenen Strategien:

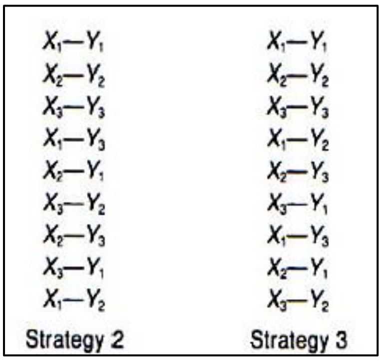


Abb. 7.4 Unvollständige und vollständige Anwendung der Strategie „Cyclic Pattern“ zur Lösung von Problemstellungen zum Kreuzprodukt (English 2007, S. 147)

Den in der Literatur beschriebenen Strategien «Idea of juxaposition», «Ebenenparallele» und «Cyclic pattern» scheint ebenfalls als gemeinsames System die Verbindung aller Elemente nach dem gleichen schematischen Muster zu Grunde zu liegen. Aufgrund der Existenz ähnlicher bzw. gleicher Strategien im Kontext anderer Untersuchungen ist auch für die Strategie «Zyklische Musterbildung» anzunehmen, dass die jeweiligen Handlungen eng mit Denkweisen verknüpft sind, die Lernende allgemein zum Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme mitbringen. Der Fokus in diesem Vorgehen scheint ebenso, wie bei der Strategie «Disjunkte Paarbildung» darauf zu liegen, dass alle Elemente gleich häufig verwendet werden und dadurch die Vollständigkeit der Lösungen gewährleistet ist.

7.1.3 Elementfixierung

„Man macht erst mal einen Stein mit allen Farben und dann einen anderen.“

Lena, GSSTB, V. o. Wh. Türme

Bei den Strukturierungen der Lernenden ist zu beobachten, dass ebenso wie bei Lena, ein Element solange beibehalten wird, bis alle möglichen Lösungen mit diesem Element gefunden wurden. Die «Elementfixierung» ist der am häufigsten verwendete allgemeine Strategiebaustein. Sie wird sowohl zum Erstellen der Figurenmenge verwendet als auch zur räumlichen Strukturierung. Sie findet Anwendung bei der Überprüfung der Lösungen und bei der Begründung der Vollständigkeit der Figurenmenge. Zudem liegt den operationalen Anzahlbestimmungen der Lernenden in der Regel eine Strukturierung im Sinne dieser Strategie oftmals in Kombination mit weiteren Bausteinen zugrunde. Besonders deutlich wird das Vorgehen bei Meike.

7.1.3.1*Analyse der zugrundeliegenden Fokussierung*

Meike hat den Auftrag erhalten, alle möglichen zweistelligen Zahlen aus vier Ziffernkarten zu finden. Zur Lösungsfindung hat sie die in der Grafik dargestellten Lösungen notiert und wird anschließend aufgefordert zu begründen, weshalb es keine weiteren Lösungen geben kann:

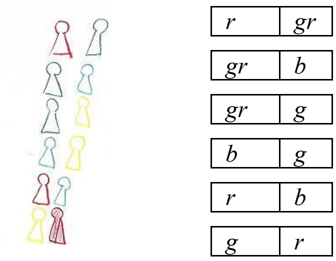
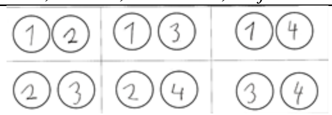
Transkr. 7.3 Meike Vorgehen (GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

M.: Weil ich erst einmal alle mit Einsen gemacht habe. Dann alle mit Zweien *[zeigt auf die zweite Spalte]* und dann mit Dreien *[zeigt auf die dritte Spalte]* […].

Dem Transkript lässt sich entnehmen, dass Meike zunächst alle Zahlen aus Ziffernkarten bildet, in denen die Ziffer 1 vorkommt: *„Weil ich erst einmal alle mit Einsen gemacht habe."* Anschließend bildet sie alle noch verbliebenen zweistelligen Zahlen, in denen die 2 vorkommt usw. *(„Dann mit Zweien zeigt auf die zweite Spalte] und dann mit Dreien" [zeigt auf die dritte Spalte]).* Aus den Aussagen „alle mit Einsen" und „alle mit Zweien" lässt sich schlussfolgern, dass sie auf die Vollständigkeit der Lösungen mit einem bestimmten Objekt fokussiert.

Varianten der «Elementfixierung»

Bezüglich der «Elementfixierung» lassen sich bei den Lernenden insgesamt zwei verschiedene Varianten beobachten. Die Varianten beziehen sich dabei auf die Anordnung der Elemente, wie an den Lösungswegen von Mia und Malin zur Lösung der Aufgaben zu Kombinationen ohne Wiederholung klar wird.

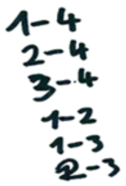
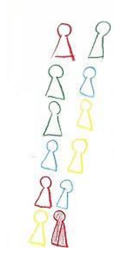
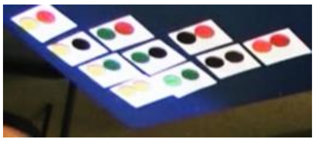
Strategie	**Erklärung**	**Beispiel**
a. «Elementfi-xierung ohne feste Position»	Mia erläutert zur ihrer Zeichnung, dass sie ein Element (Mannschaft grün, dann Mannschaft blau, anschließend Mannshaft gelb) solange konstant halt, bis alle möglichen Lösungen mit diesem Element gefunden wurden, die Reihenfolge berücksichtigt sie in der Notation jedoch nicht.	 *Mia, KGSD, K. o. Wh., Fußball*
b. «Elementfi-xierung mit fester Position»	Malin hält ein Element bei, bis alle möglichen Lösungen mit diesem Element an einer festen Position gefunden wurden.	 *Malin, KGSD, K. o. Wh., Lotto*

Tab. 7.5 Varianten der «Elementfixierung»

Den Vorgehensweisen der beiden Lernenden gemeinsam ist die Fokussierung auf ein ausgewähltes Element. Sie unterscheiden sich jedoch in Bezug auf die Position der konstanten Elemente. Zu unterscheiden ist entsprechend zwischen der *Fokussierung auf ein Element und dessen Position* und *Fokussierungen, bei denen die Position des Elements nicht weiter berücksichtigt* wird. Beide Varianten der Strategie werden zur Lösung aller verschiedenen Aufgabenstellungen verwendet und im Folgenden ausgehend von einer Darstellung der Strategien bei den verschiedenen Figuren verallgemeinert.

7.1.3.2 *Verallgemeinerung der Strategie «Elementfixierung»*

Ebenso wie für die Kombinationen mit Wiederholung lässt sich dieses Handlungsmuster auch bei den Kombinationen und Variationen ohne Wiederholung beobachten, wie die folgenden Lösungen exemplarisch zeigen:

	«Elementfixierung mit fester Position»	«Elementfixierung ohne feste Position»
Kombinationen ohne Wiederholung (k=4, n=2)	 *Renas, KGSD, K. o. Wh., Lotto*	 *r* | *gr* *gr* | *b* *gr* | *g* *b* | *g* *r* | *b* *g* | *r* *Mia, KGSD, K. o. Wh., Fußball*
Kombinationen mit Wiederholung (k=4, n=2)	 *Evi ,GSSTB, K. m. Wh., Eismann*	Leah erstellt der Reihe nach folgende Lösungen: s-s, r-r, gr-gr, g-g s- r, s- gr, s- g r- gr, g-r gr- g *Leah, CGSB, K. m. Wh., Eismann*
Variationen ohne Wiederholung (k=4, n=2)	 *Meike, GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*	 *Meike, GSSTB, V. o. Wh., Türme bauen*

Tab. 7.6 «Elementfixierung» bei verschiedenen Figuren

Bei allen dargestellten Figurenmengen zeigt sich, dass ein Element mit allen anderen kombiniert wurde, bevor im nächsten Schritt ein neues Element mit allen anderen kombiniert wird. Unterschiede zeigen sich jedoch hinsichtlich der Position der beibehaltenen Elemente sowie hinsichtlich einiger zusätzlicher figurspezifischer Strategien bei den Kombinationen mit Wiederholung und bei den Variationen ohne Wiederholung. Die Vorgehensweisen lassen sich auf dieser Grundlage algorithmisch wie folgt beschreiben:

«Elementfixierung mit fester Position»	*«Elementfixierung ohne feste Position»*
1. Wähle ein Element a aus und eine feste Position für dieses Element, finde ausschöpfend alle Lösungen mit dem Element a an der festen Position. 2. Verfahre mit allen n Elementen, wie in Schritt 1.	1. Wähle ein Element a aus, finde ausschöpfend alle Lösungen mit dem Element a. 2. Verfahre mit allen n Elementen, wie in Schritt 1.

Abb. 7.5 Verallgemeinerung der «Elementfixierung»

7.1.3.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Ebenso, wie für die beiden bereits dargestellten Strategien wird im Folgenden dargestellt, inwiefern die einzelnen Kriterien zur Klasseneinteilung einer Figurenmenge für die jeweiligen kombinatorischen Figuren erfüllt sind, wenn die «Elementfixierung» als alleinige Strategie verwendet wird (vgl. Tab.7.7).

Kriterium zur Klasseneinteilung der Figurenmenge	**K. o. Wh.**	**K. m. Wh.**	**V. o. Wh.**	**Begründung ggf. mit besonderer Bedingung**
Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse	☑	☑	☑	Bei beiden Varianten der «Elementfixierung» entsteht im ersten Schritt eine Klasse, die alle Objekte mit dem festen Element enthält. Die darauffolgenden Schritte sorgen dafür, dass alle anderen Klassen ebenfalls alle Elemente enthalten.
Vollständigkeit der Anzahl der Klassen	☑	☑	☑	Da der zweite Schritt bei beiden Varianten vorsieht, dass das Vorgehen auf alle anderen Objekte übertragen wird ist auch die Vollständigkeit der Anzahl der Klassen gewährleistet.
Disjunktheit der Klassen	☒	☒	☒	Die einzelnen Schritte stellen nicht sicher, dass die erstellten Mengen keine gleichen Figuren enthalten.

Tab. 7.7 Beziehung zwischen der Strategie «Elementfixierung» und der Einteilung einer Menge in Klassen

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass die Strategie «Elementfixierung» sicherstellt alle Figuren innerhalb einer Klasse zu erstellen und zugleich alle Klassen zu erstellen. Bei dieser Strategie ist jedoch die Disjunktheit der Figuren ebenso, wie bei der Strategie «Zyklische Musterbildung» nicht zwangsläufig gegeben. Ob Figuren genau einmal oder systematisch doppelt erstellt werden, ist von dem Figurenbildungskonzept abhängig.
Die Übertragung der «Elementfixierung» auf ein beliebiges n ist unproblematisch, da dieses nichts an dem Vorgehen ändert und entsprechend die Vollständigkeit der Klassen und der Elemente innerhalb der Klassen durch die beschriebenen Schritte gewährleistet ist.

7.1.3.4 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

Die «Elementfixierung» hängt eng mit dem in der Literatur als «Tachometerprinzip» beschriebenen algorithmischen Vorgehen zusammen. Allgemein werden beim «Tachometerprinzip» die Elemente einer Position oder Ebene *„so lange konstant gehalten, bis die Elemente auf der verbleibenden Position alle möglichen Farben durchlaufen haben“* (Hoffmann 2003, S. 328). Diese Strategie wird sowohl beim Lösen von Auflistungsproblemen zum Kreuzprodukt, zur Produktregel als auch zu den verschiedenen Grundfiguren als Lösungsstrategie beschrieben (vgl. English 1991, 2007; Halani 2012; Hoffmann 2003; Martino 1992a, 1992b; Piaget & Inhelder 1975; Vergnaud & Cohen 1969; Larivée & Normandeau 1985). English (2007) veranschaulicht das Vorgehen mittels des Baumdiagramms:

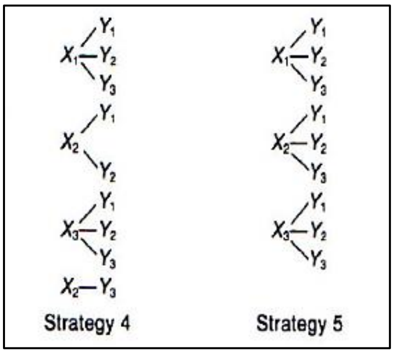


Abb. 7.6 Anwendung des «Tachometerprinzips» bei Aufgaben zum Kreuzprodukt; links unvollständige und rechts vollständige Anwendung (English 2007, S.145)

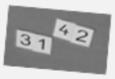
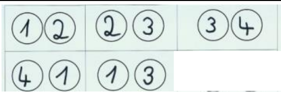
Die Darstellung zeigt, dass im Sinne des klassischen «Tachometerprinzips» die Reihenfolge der Elemente beibehalten wird. Die Handlungsmuster der Kinder im Rahmen der Untersuchung ähneln dem «Tachometerprinzip», entsprechen diesem jedoch nicht in seiner Reinform, sondern weisen in Abhängigkeit von weiteren vorgenommenen Fokussierungen verschiedene Variationen auf. Inso-

fern ist die hier beschriebene Strategie der «Elementfixierung» eine Verallgemeinerung des «Tachometerprinzips». Das «Tachometerprinzip» entspricht demnach der «Elementfixierung mit fester Position».
Wie in Abschnitt 2.4.1 dargestellt beschreibt Halani (2012) zur Lösung von Permutationsproblemen zwei Varianten des klassischen Tachometerprinzips. Sie unterscheidet zwischen «Standard Odometer» und «Wacky Odometer». Die erstgenannte Strategie entspricht der «Elementfixierung mit fester Position». Lernende, die die Strategie «Wacky Odometer» verwenden, fokussieren auf ein festes Element jedoch nicht auf die Position der Elemente innerhalb der generierten Objekte, ebenso wie es im Rahmen dieser Untersuchung bei der «Elementfixierung ohne feste Position» zu beobachten war.

7.1.4 Fazit

Insgesamt lassen sich drei allgemeine Strategien identifizieren, die auf verschiedenen Fokussierungen beruhen. Die Lernenden erstellen entweder sukzessive alle möglichen Objekte zu einem Element oder behandeln alle Elemente gleich. Lernende, die jeweils alle möglichen Objekte zu einem Element legen oder notieren, fokussieren entsprechend auf die Vollständigkeit der Lösungen mit einem bestimmten Objekt. Lernende, die alle Elemente gleich behandeln, fokussieren darauf, dass abschließend alle Elemente in den erstellten Objekten gleich häufig vorkommen.
Die in der Tabelle beschriebenen Strategien treten sowohl in der Lösungsfindung als auch bei Strukturierungen, Umstrukturierungen und Überprüfungshandlungen auf. Der Strategiebaustein «Zyklische Musterbildung» wird dabei überwiegend zur Erstellung der kombinatorischen Objekte eingesetzt und oftmals nicht konsequent verwendet. Die Strategien «Elementfixierung» und «Disjunkte Paarbildung» werden in den meisten Fällen durchgehend (ausschöpfend) angewendet und zudem ebenfalls zur Begründung der Vollständigkeit hinzugezogen. Besonders auffällig ist, dass die meisten Lernenden zur Begründung und bei anschließenden Strukturierungen auf den Strategiebaustein «Elementfixierung» zurückgreifen und diesen alleine oder in Kombination mit einem figurspezifischen Baustein verwenden. Die Gegenüberstellung der allgemeinen Strategien mit den Kriterien zur Klasseneinteilung einer Menge zeigt, dass die Strategien «Zyklische Musterbildung» und «Elementfixierung» grundsätzlich für eine beliebige Anzahl an Ausgangselementen geeignet sind, um die gesamte Figurenmenge zu erstellen. Die Strategie «Disjunkte Paarbildung» führt für die in der Untersuchung verwendeten Grundaufgaben ebenfalls systematisch zur Erstellung aller Lösungen (n=4, k=2). Sie ist jedoch in der dargestellten Form bei einer Ausgangsmenge von fünf und mehr Elementen nicht geeignet, die Figurenmenge vollzählig zu erstellen. Zusätzlich zur Anwendung der allgemeinen Strategien, muss die Disjunktheit der erstellten Figuren mittels des abhängigen Figurenbildungskonzeptes gewährleistet werden. Ansonsten ist es möglich,

dass Figuren mittels der Strategien doppelt erstellt werden und insofern nicht die gesuchte Figurenmenge ermittelt wird.

Strategie	Beschreibung	Beispiel
1. «Disjunkte Paarbildung»	Gleichzeitig oder nacheinander werden aus allen gegebenen Elementen (zwei bzw. alle möglichen) disjunkte Objekte erstellt.	Leah bildet aus den gegebenen vier Ziffernkarten jeweils zwei Paare aus Ziffernkarten (a), dann vertauscht sie jeweils die Anordnung der Ziffernkarten (b). Sie geht dabei wie folgt vor: 1a.  1b.  2a.  2b.  3a.  3b.  *Leah CGSB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*
2. «Zyklische Musterbildung»	Nacheinander werden alle Elemente nach dem gleichem Muster mit einem neuen Element kombiniert.	 *Mia, KGSD, K. o. Wh., Lotto*
3.a «Elementfixierung ohne feste Position»	Ein Element wird beibehalten, bis alle möglichen Lösungen mit diesem Element gefunden wurden.	 *r* | *gr* *gr* | *b* *gr* | *g* *b* | *g* *r* | *b* *g* | *r* *Mia, KGSD, K. o. Wh., Fußball*
3.b «Elementfixierung mit fester Position»	Ein Element wird an einer festen Position beibehalten, bis alle möglichen Lösungen mit diesem Element gefunden wurden.	1–4 2–4 3–4 1–2 1–3 2–3 *Renas, KGSD, K. o. Wh., Lotto*

Tab. 7.8 Allgemeine kombinatorische Strategien

Ein Vergleich der Strategien mit den in der Literatur dargestellten Strategien zu Auflistungs- und Anzahlbestimmungsproblemen zeigt, dass diese nicht nur im Rahmen dieser Untersuchung zu beobachten sind. Die nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht darüber, ob die im Rahmen dieser Untersuchung identifizieren allgemeinen Strategien auch in anderen Studien beschrieben werden. Die grau hervorgehobenen Felder kennzeichnen das Vorkommen der einzelnen Strategien im Rahmen dieser Untersuchung.

	«Disjunkte Paarbildung»	**«Zyklische Musterbildung»**	**«Elementfixierung»**	
			mit fester Position	**ohne feste Position**
K. o. Wh.	Piaget & Inhelder (1975)	Piaget & Inhelder 1975)	Piaget & Inhelder (1975)	Halani (2012)
K. m. Wh.	KEINE VORLIEGENDE KONKRETISIERUNG DER STRATEGIEN durch Piaget & Inhelder (1975)			
V. o. Wh.	x	x	Lack (2009)	x
V. m. Wh.	x	Piaget & Inhelder (1975)	Piaget & Inhelder (1975) Martino (1992)	x
P. o. Wh.	x	Larivée & Normandeau (1985) Vergnaud & Cohen (1969)	Halani (2012) Lack (2009) Larivée & Normandeau (1985) Vergnaud & Cohen (1969)	x
P. m. Wh	KEINE VORLIEGENDE KATEGORISIERUNG (konkrete Studien fehlen)			
Kreuzprodukt	English (1993)	English (1993)	English (1993) Martino (1992)	x
Produktregel	Hoffmann (2003)	Hoffmann (2003)	Hoffmann (2003)	x

Tab. 7.9 Ähnliche Strategien in vorangegangenen Studien

Der Gegenüberstellung ist zu entnehmen, dass die genannten Strategien sowohl bei der Bearbeitung von Problemstellungen zu den gleichen Figuren als auch abgesehen von der «Elementfixierung ohne fester Position» bei anderen Figuren. Daraus ist zu folgern, dass diese sich nicht konkret auf die gewählten Aufgaben beziehen, sondern es sich vielmehr um Strategien handelt, die Lernende im Allgemeinen zum Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen verwenden. Ob die allgemeinen Strategien sich auf eine bestimmte Ausgangsmenge oder eine bestimmte Anzahl zu kombinierender Elemente in einer Figur beschränken, kann dabei aufgrund der Daten dieser Untersuchung nicht spezifiziert werden. Zentral ist, dass die «Elementfixierung mit fester Position», welche dem «Tachometerprinzip» entspricht, von Lernenden über alle kombinatorischen Figuren hinweg verwendet wird und diese insofern als eindeutige allgemeine kombinatorische Strategie klassifiziert werden kann. Hinsichtlich der anderen beiden allgemeinen Strategien fällt insbesondere auf, dass diese im Kontext der Permutationen nicht beschrieben werden, jedoch bei den anderen Figuren. Demnach ist kritisch zu hinterfragen, ob die im Rahmen dieser Arbeit als allgemeine Strategien dargestellten Vorgehensweisen sich ggf. auf das Auswählen von Objekten beziehen. Aufgrund der im Rahmen dieser Untersuchung getroffenen Auswahl der kombinatorischen Figuren, in denen die Auswahl von Elementen immer eine Rolle spielt, ist eine diesbezügliche Ausdifferenzierung nicht möglich, es besteht weiterer Forschungsbedarf. Zu hinterfragen ist, weshalb die «Elementfixierung ohne feste Position» abgesehen von der Darstellung Halanis (2012) in anderen Studien nicht benannt wird. Möglich wäre beispielsweise, dass diese Strategie tatsächlich nicht verwendet wurde oder aber, dass diese aufgrund der fehlenden Berücksichtigung der Position nicht als Strategie identifiziert wurde.

7.2 Figurspezifische Strategien

Die Lösungsstrategien der Lernenden lassen sich, wie in Kapitel 5 erläutert, nicht alle vollständig durch die Betrachtung allgemeiner Strategien rekonstruieren, sondern bestehen oftmals aus Kombinationen von allgemeinen und figurspezifischen Strategien und dem zugrundeliegenden Konzept zur Figurenbildung. Als *figurspezifische Strategien* werden dabei diejenigen Strukturierungsstrategien klassifiziert, die sich auf den Einbezug der besonderen Eigenschaften der zu erstellenden Figuren beziehen (vgl. 6.1.2).

Wiederholungsstrategie:
1. «Anzahlfixierung»

Vertauschungsstrategien:
1. «Einzelvertauschung»
2. «Gruppenvertauschung»
3. «Gesamtvertauschung»

Abb. 7.7 Figurspezifische Strategien

Im Folgenden wird zunächst genauer in den Blick genommen, wie Lernende die Wiederholung von Elementen in einem Objekt in ihren Strukturierungen berücksichtigen, daran anknüpfend werden die Strategien, in denen die Vertauschung der Reihenfolge innerhalb der Objekte eine zentrale Rolle spielt, analysiert.

Um die Besonderheiten figurspezifischer Strategien zu veranschaulichen, wird zunächst zu der jeweiligen kombinatorischen Figur jeweils eine Strukturierungsstrategie mit und eine ohne Berücksichtigung einer figurspezifischen Strategie gegenübergestellt. Daran anknüpfend erfolgt ebenso, wie bei den allgemeinen Strategien jeweils die Analyse des Vorgehens eines Lernenden, um die Besonderheiten der speziellen Strategie herauszuarbeiten. Da es sich um figurspezifische Strategien handelt, erfolgt die Verallgemeinerung über den Vergleich der Strategien in den verschiedenen Kontexten. Ausgehend von der Verallgemeinerung der Strategie wird anschließend jeweils überprüft, inwiefern sich mittels der jeweiligen Strategie die Figurenmenge vollzählig erstellen bzw. strukturieren lässt. Zugleich wird betrachtet, welche Rolle die figurspezifischen Besonderheiten bei fachlichen Konzepten zur Anzahlbestimmung spielen. Abschließend erfolgt jeweils der Rückbezug zur Literatur.

7.2.1 Wiederholungsstrategien

„Hier erst mal nur die gleichen Farben zweimal."
[fährt mit dem Finger neben den einfarbigen Objekten auf und ab]

Lara, GSSTB, K. m. Wh., Eismann

Exemplarisch für die Kombinationen mit Wiederholung erhielten die Lernenden die Aufgabenstellungen „Dominosteine" und „Eismann", in denen eine Menge mit vier und anschließend sukzessiv fünf, sechs und mehr Elementen vorgegeben war. Aus fachlicher Sicht sind für die Kombinationen mit Wiederholung die Verschiedenheit der möglichen zu kombinierenden Elemente sowie die möglichen Wiederholungen von Elementen innerhalb der Objekte charakteristisch. Bezüglich der Lösung von Aufgaben des Typs Kombinationen mit Wiederholung ist zu unterscheiden, wie die Lernenden mit Objekten umgehen, die gleiche Elemente enthalten. Entweder ist die Anzahl an gleichen Elementen in einem Objekt bedeutsam für die Strukturierungsstrategie oder diese spielt keine Rolle (vgl. Tab. 7.10).

Strukturierungsstrategie	**Beschreibung**	**Beispiel**
«Elementfixierung mit fester Position» und keine figurspezifische Strategie	Bilden aller Lösungen unter Verwendung der «Elementfixierung» ohne besondere Berücksichtigung der Anzahl gleicher Elemente in den Objekten.	Dokumentation des Erstellens der Lösungen: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 2-2,2-3,2-4, 3-3,3-4, 4-4 *Evi, GSSTB, K. m. Wh., Dominosteine*

«Elementfixierung mit fester Position» und Wiederholungs-strategie	Bilden aller Lösungen mit Objekten, in denen zwei gleiche Elemente enthalten sind. Bilden aller Lösungen mit Objekten, in denen die Elemente verschie-den sind, durch Ver-wendung der «Element-fixierung».	Dokumentation des Erstellens der Lösungen: Leah erstellt der Reihe nach folgende Lösun-gen: s-s, r-r, gr-gr, g-g s- r, s- gr, s- g r- gr, g-r Gr- g *Leah, CGSB, K. m. Wh., Eismann*

Tab. 7.10 Strukturierungsstrategien mit und ohne Wiederholungsstrategie

Insgesamt zeigt sich, dass für einen großen Teil der Lernenden die Anzahl der gleichen Elemente in einem Objekt von besonderer Bedeutung ist. Dies gilt insbesondere für Lernende, die in Teilen systematisch jedoch nicht vollständig systematisch vorgehen. Es ist insbesondere zu beobachten, dass einige Lernende die Lösungen erstellen, indem sie zunächst alle Objekte erstellen, die jeweils aus zwei gleichen Elementen bestehen und im Anschluss daran alle Objekte, die aus verschiedenen Elementen bestehen. Letztere ermitteln sie dabei ohne eine zugrundeliegende Strukturierung.

Wiederholungsstrategien

Unter Wiederholungsstrategien werden im Rahmen dieser Untersuchung diejenigen figurspezifischen Strategien zusammengefasst, die die Anzahl der Elemente in den zu erstellenden Figuren in der Strukturierung berücksichtigen.

Die Wiederholungsstrategie wurde nicht nur im Kontext des Erstellens der Figurenmenge rekonstruiert, sondern wurde von vielen Lernenden auch bei der räumlichen Strukturierung der Figurenmenge genutzt und diente insbesondere der Begründung der Vollständigkeit aller Lösungen. Zugleich wurden auf der Grundlage dieser Strukturierung Rechnungen abgeleitet.

7.2.1.1 *Kontrastierender Vergleich der Vorgehens- und Denkweisen von Leah und Evi*

Um das zentrale Charakteristikum der verwendeten Wiederholungsstrategie zu verdeutlichen, werden exemplarisch die Lösungswege von Leah und Evi kontrastierend gegenübergestellt.
Leah erhält den Auftrag die Eismannaufgabe zu lösen, sie notiert alle möglichen Lösungen und wird anschließend gebeten, die Vollständigkeit zu begründen.

Transkr. 7.4 Leahs Vorgehen (GSSTB, K. m. Wh., Eismann)

s-s, r-r, gr-gr, g-g

s-r, s-gr, s-g
r-gr, r-g
gr -g

I.:	Warum sind das alle? Kannst du mir das erklären?
L.:	Hier erst mal nur die gleichen Farben zweimal *[fährt mit dem Finger neben den einfarbigen Lösungen auf und ab]*
L.:	Und von gelb hab ich ja schon von jedem Mal *[tippt die Lösungen mit gelben Plättchen nacheinander an]* und das kann ich dann hier *[zeigt auf den Platz in der unteren Reihe]* nicht noch mal machen, weil es dann doppelt wäre.
L.:	Bei grün genauso *[tippt auf die Lösungen mit grünen Plättchen]* und bei rot auch, nein, rot und grün ist schon zusammen. Das ist fast so wie 'ne Pyramide, wenn man es so hinlegt gerade.
I.:	Spitze! Wie viele hast du jetzt insgesamt gefunden?
L.:	10

Analyse des Vorgehens

Leah legt zunächst alle möglichen Eishörnchen mit zwei gleichen Eiskugeln, anschließend legt sie systematisch mit Hilfe der «Elementfixierung mit fester Position» alle anderen Eishörnchen mit zwei Kugeln. Ihrem Vorgehen und ihren Aussagen lässt sich entnehmen, dass bei ihrer Lösungsfindung die Anzahl gleicher Elemente in einem Objekt von zentraler Bedeutung ist: „*Hier erst mal nur die gleichen Farben zweimal [fährt mit dem Finger neben den einfarbigen Lösungen auf und ab].*"
Evi erhält den Auftrag die Dominosteinaufgabe zu lösen, sie nimmt dabei eine andere Strukturierung vor.

Transkr. 7.5 Evis Vorgehen (GSSB, K. m. Wh., Dominosteine)

Evi notiert 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 2-2,2-3,2-4, 3-3,3-4, 4-4 und legt die entstandenen Dominosteine dabei ungeordnet auf den Tisch.

E.:	So, das waren alle *[schließt den Stift]*.
I.:	Das ging ja fix. Wie viele hast du denn jetzt insgesamt gefunden?
E.:	*[zieht die gefundenen Lösungen einzeln an die Seite und zählt einzeln ab.]* 10.

I.:	Aha. Und warum sind diese 10 jetzt alle? Warum bist du dir da sicher? Das hast du ja ganz schön schnell gesagt.
E.:	Ich hab 1 und 1, 1und 2, 1 und 3, 1 und 4 *[nimmt jeweils den genannten Dominostein und legt die Steine in eine Reihe nebeneinander]*. Und das hab ich bei den Zweiern auch gemacht, bloß, dass ich da die 1 nicht genommen hab, weil die ja, sonst ja mit der *[zeigt auf 1-2]* umgekehrt wär.

Analyse des Vorgehens

Evi notiert zunächst alle Dominosteine, in denen das Punktmuster „1" vorkommt. Anschließend notiert sie alle Dominosteine, in denen das Punktmuster „2" vorkommt usw. Ihren Aussagen lässt sich entnehmen, welche Strategie sie dabei verfolgt hat: „Ich hab 1 und 1, 1und 2, 1 und 3, 1 und 4 *[nimmt jeweils den genannten Dominostein und legt die Steine in eine Reihe nebeneinander].* Und das hab ich bei den Zweiern auch gemacht, bloß, dass ich da die 1 nicht genommen hab, weil die ja, sonst ja mit der *[zeigt auf 1-2]* umgekehrt wär." Sie bildet der Reihe nach mit einem festen Element im Sinne der «Elementfixierung mit fester Position» alle möglichen Kombinationen. In ihren Aussagen gibt es keinen Hinweis darauf, dass es für sie bedeutsam ist, ob gleiche oder verschiedene Elemente zu einem Objekt kombiniert werden.

Vergleich der Vorgehensweisen von Leah und Evi

Leah und Evi verwenden beide zur Lösungsfindung die «Elementfixierung mit fester Position» (vgl. 5.2.1.1). Leah bildet jedoch zunächst eine Klasse an Lösungen, in der alle Objekte vorkommen, die aus zwei gleichen Elementen bestehen. Evi hingegen ordnet diese in jeweiligen Klassen ein. An der Vorgehensweise von Leah sowie ihrer anschließenden Beschreibung des Vorgehens, wird exemplarisch für eine Reihe weiterer Kinder deutlich, dass sie Figuren mit Wiederholungen von Elementen als gesonderte Klasse betrachten. Sie nehmen eine Fokussierung auf die Anzahl gleicher Elemente in einer Figur vor und Bilden Klassen von Figuren, die jeweils die gleiche Anzahl an ununterscheidbaren Elementen in einer Figur enthalten. Evi hingegen bettet die Objekte mit Wiederholungen ein, ihr Fokus liegt alleinig darauf, ausschöpfend alle Objekte mit einem bestimmten Element zu finden. Die beiden beschriebenen Vorgehensweisen in Bezug auf die Elemente mit Wiederholung lassen sich auch bei anderen Strategiebausteinen beobachten.

7.2.1.2 *Verallgemeinerung der Strategie*

Ebenso, wie bei der Eismannaufgabe, berücksichtigten Lernende auch bei der Dominosteinaufgabe die Anzahl gleicher Elemente in einem Objekt in ihrem strategischen Vorgehen.

«Anzahlfixierung» bei der Aufgabe Dominosteine	**«Anzahlfixierung» bei der Aufgabe Eismann**
Dokumentation des Erstellens der Lösungen: *Martin erstellt der Reihe nach folgende Lösungen und legt diese ohne weitere Strukturierung auf den Tisch;* 1-1; 2-2; 3-3; 4-4 1-2; 1-3; 1-4; 2-3; 2-4; 3-4; *Martin, KGSW, K. m. Wh., Dominosteine*	*Dokumentation des Erstellens der Lösungen:* *Leah erstellt der Reihe nach folgende Lösungen:* s-s, r-r, gr-gr, g-g s-r, s- gr, s- g r- gr, r- g gr- g *Leah, GSSTB, K. m. Wh., Eismann*

Tab. 7.11 Strategie «Anzahlfixierung» in verschiedenen Kontexten

Zudem ist diese Strategie auch in Kombination mit der allgemeinen Strategie «Disjunkte Paarbildung» zu beobachten oder wird ohne eine allgemeine Strategie verwendet. Auf der Grundlage der Strukturierungen der Lernenden ist die Wiederholungsstrategie folgendermaßen zu verallgemeinern:

«Anzahlfixierung»

1. Erstelle eine Menge, in der in jeder Figur die Anzahl der gleichen Elemente übereinstimmt.
2. Erstelle eine weitere Menge, in der ebenfalls in jeder Figur die Anzahl der gleichen Elemente übereinstimmt. Die erstellten Figuren dürfen in der Anzahl an gleichen Elementen nicht mit den in Schritt 1 erstellten Figuren übereinstimmen.
3. Erstelle wie in 2. alle weiteren Mengen, bis es keine Figuren mehr gibt, die sich in der Anzahl an gleichen Elementen in den Objekten von den bereits erstellten unterscheiden.

Abb. 7.8 Verallgemeinerung der Wiederholungsstrategie

7.2.1.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Einige Lernende ermittelten die Anzahl aller Kombinationen mit Wiederholung, mittels der Strategie der «Anzahlfixierung». Der Verallgemeinerung der Strategie ist zu entnehmen, zwei Mengen gebildet werden: Die Menge aller Kombinationen mit einer festen Anzahl an Wiederholungen (für die gegebenen Aufgabenstellungen genau zwei gleiche Elemente) und die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung in einem Objekt.
Es stellt sich ebenso, wie für die allgemeinen Strategien, die Frage, welche der bereits benannten Bedingungen für die Einteilung der Figurenmenge in Klassen durch diese Strukturierung berücksichtigt werden. Anders als bei den allgemeinen Strategien wird zur Überprüfung keine tabellarische Darstellung verwendet, da in diesem Fall nur die Figuren des Typs Kombinationen mit Wiederholung betrachtet werden.

Kriterium zur Klasseneinteilung der Figurenmenge	☑ **erfüllt** ☒ **nicht erfüllt**
Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse	☒
Vollständigkeit der Anzahl der Klassen	☑
Disjunktheit der Klassen	☑

Tab. 7.12 Beziehung zwischen der Strategie «Anzahlfixierung» und der Einteilung einer Menge in Klassen

a) Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse
Dieses Kriterium wird durch die «Anzahlfixierung» nicht erfüllt. Die Strategie bezieht sich zunächst auf das Bilden zweier Mengen. Die Vollständigkeit der Figuren innerhalb der Strategie, muss insbesondere für die Menge aller Objekte, die aus verschiedenen Elementen zusammengesetzt wurden, durch ein zusätzliches strategisches Vorgehen sichergestellt werden.

b) Vollständigkeit der Klassen
Aus fachlicher Sicht grenzen sich die Kombinationen mit Wiederholung von den Kombinationen ohne Wiederholung dadurch ab, dass auch Wiederholungen der einzelnen Elemente in den zu erstellenden Objekten erlaubt sind. Insofern lassen sich die Kombinationen ohne Wiederholung als Teilmenge der Kombinationen mit Wiederholung auffassen. Es ist entsprechend möglich, die Menge der

Kombinationen mit Wiederholung in zwei Teilmengen zu zerlegen: Die Menge der Kombinationen ohne Wiederholung und die Restmenge. Das bedeutet für die gegebenen Problemstellungen in die Menge der Kombinationen, in denen genau zwei gleiche Elemente enthalten sind und die Menge der Kombinationen, in denen alle Elemente verschieden sind. Bei letzterer handelt es sich entsprechend um die Kombinationen ohne Wiederholung. Ihre Vereinigung entspricht genau den Kombinationen mit Wiederholung für zwei Elemente.

c) Disjunktheit der Objekte in den Klassen
Es stellt sich die Frage, ob eine disjunkte Klasseneinteilung durch das Vorgehen der Lernenden gewährleistet ist. Die Lernenden bilden eine Menge, die alle Objekte enthält, in denen zwei gleiche Elemente vorkommen, zusätzlich bilden sie eine Klasse, in der Elemente enthalten sind, die zwei voneinander verschiedene Elemente enthalten. Die so gebildeten Klassen sind demnach disjunkt, da ein Objekt aus zwei Elementen nicht gleichzeitig zwei Elemente enthalten kann, die gleich sind und zugleich zwei, die voneinander zu unterscheidenden sind.

Das Vorgehen der Lernenden zerlegt insofern für Fragestellungen, in denen aus einer beliebig großen Menge von Elementen immer zwei Elemente miteinander kombiniert werden sollen, die gesuchte Menge in zwei zueinander disjunkte Teilmengen. Die Vollständigkeit der Klassen ist hingegen nicht gewährleistet. Zudem ist die Tragfähigkeit der «Anzahlfixierung» bei der Übertragung auf eine größere Menge an Ausgangselementen oder eine Zusammensetzung mehrerer Elemente zu einem Objekt tragfähig ist zu überprüfen.

7.2.1.4 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

Das Vorgehen der Lernenden kann im Sinne Hoffmanns (2003) als Lösungssuche in Phasen aufgefasst werden (vgl. 2.4). Die Phasen orientieren sich dabei an der Anzahl gleicher Elemente in einem Objekt. Da English (1988) Aufgabenstellungen zum Kreuzprodukt betrachtet, gibt es auch in ihren Untersuchungen keine Hinweise auf dieses Vorgehen. Die hier beschriebene Fokussierung auf die Anzahl gleicher Elemente in einem Objekt wurde in den Untersuchungen von Piaget und Inhelder (1958, 1975) ebenfalls nicht explizit beschrieben. Eine genauere Betrachtung der von Piaget und Inhelder als «Suche nach System» und «Suche mit System» klassifizierten Strategien bei Variationen mit Wiederholung zeigt jedoch sehr große Gemeinsamkeiten auf, so ermitteln sowohl Ger als auch Mat und Ala die Anzahl aller Variationen mit Wiederholung im Kontext zweistelliger Ziffernkarten, indem sie zunächst diejenigen zweistelligen Zahlen bilden, in denen zwei gleiche Ziffern vorkommen (vgl. 2.41 dort Tab. (2.13)) Exemplarisch sei an dieser Stelle Mats Strategie dargestellt:

Transkr. 7.6 Mats Strategie (Piaget & Inhelder 1975, S. 206)

M.:	Three, no more than that. Six I believe. He makes one after the other 12, 21, 33, 11, 22, 23, 32, 13 und 31 and keeps looking around to see, if he has made them all.
I.:	If you think about it, can you know if you made all there are?
M.:	No, oh, yes, I can look to see if there are 1, 2 and 3 (in equal number) and if we made all the pairs.

Weitere Hinweise auf ein ähnliches Vorgehen finden sich jedoch in den Ausführungen von Maher und Martino (1992a, 1992b) zur Lösung von Variationsproblemen mit Wiederholung, in denen Türme aus zwei verschiedenen Farben erstellt werden müssen. Sie beschreiben (ähnlich wie Hoffmanns «Lösungssuche in Phasen»), dass Lernende Gruppen, die sogenannten «Families» , mit bestimmten Eigenschaften bilden. Diese enthält alle Figuren, die die gleiche Anzahl an Elementen in einem Objekt beinhalten.
Aus diesem Zusammenhang ist insofern zu folgern, dass es sich bei der «Anzahlfixierung» um eine Strategie handelt, die nicht zwangsläufig nur bei Kombinationen mit Wiederholung eingesetzt wird, sondern auch bei Variationen mit Wiederholung. Aus den in Kapitel 2 referierten Studien gibt es jedoch keine Hinweise darauf, dass auch bei Permutationen mit Wiederholung eine ähnliche Strategie zu beobachten ist. Diesbezüglich ist jedoch zu berücksichtigen, dass bei Permutationen keine Auswahl aus einer Menge an Elementen getroffen werden muss.

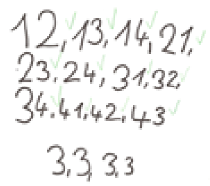
7.2.2 Vertauschungsstrategien

„Wenn man immer die Tauschaufgabe sozusagen rechnet
dann kommt man davon auf 6,
dann muss ja immer in einer Gruppe 6 sein,
und dann 6 und dann doppelt genommen.“

Meike, GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten

Exemplarisch für die Variationen ohne Wiederholung erhielten die Lernenden die Aufgabenstellungen „Zahlen aus Ziffernkarten“ und „Türme bauen“, in denen eine Menge mit vier und anschließend sukzessive fünf, sechs und mehr Elementen vorgegeben war. Aus fachlicher Sicht sind für die Variationen ohne Wiederholung die Auswahl von Objekten aus einer gegebenen Menge sowie erlaubte Vertauschung der Reihenfolge der Elemente innerhalb eines Objekts charakteristisch (vgl. 1.2.3).
Hinsichtlich der Lösung von Variationen ohne Wiederholung spielt die Vertauschung der Reihenfolge der Elemente in den Vorgehensweisen der Lernenden eine bedeutsame Rolle. Sie sprechen in diesem Kontext von Tauschpaaren oder

Tauschaufgaben. Insgesamt waren im Rahmen der Untersuchung drei Strategien zu beobachten, die die Vertauschung der Reihenfolge der Elemente betreffen. Zusätzlich wurde auch von einigen Lernenden eine Mischform aus zwei Strategien verwendet. Die Tabelle zeigt jeweils ein Beispiel, in dem ein Lernender die Vertauschung der Anordnung nicht in seinem strategischen Vorgehen berücksichtigt und eines, in dem diese berücksichtigt wird.

Strategie	**Beschreibung**	**Beispiel**
«Elementfixierung mit fester Position»	Alle Lösungen werden unter Verwendung der «Elementfixierung mit fester Position» erstellt. Die Vertauschung der Anordnung der Elemente in den Objekten wird bei der Strukturierung nicht weiter berücksichtigt.	 *Jasmin, KGSD, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*
«Elementfixierung ohne feste Position» & Vertauschungsstrategie	Es werden alle Türme erstellt, die den Baustein rot enthalten (erste Reihe), dann zu grün (zweite Reihe), dann zu rot (dritte Reihe). Sobald alle Kombinationen mit rot erstellt sind (rot-gelb; grün-rot, schwarz-rot), wird die Anordnung vertauscht (gelb-rot; rot-grün, rot-schwarz), gleiches gilt für grün und für rot.	 *Meike, GSSTB, V. o. Wh., Türme bauen*

Tab. 7.13 Strukturierungsstrategien mit und ohne Vertauschungssstrategie

Jasmins Vorgehen ist zu entnehmen, dass diese jeweils alle zweistelligen Zahlen zu einer ausgewählten Ziffer bildet und dabei die Position der Ziffer konstant hält. Meike notiert alle möglichen Türme, in der eine ausgewählte Farbe enthalten ist, sie vertauscht jedoch im Anschluss auch jeweils die Anordnung der Farben in den Türmen. Strategien, wie Meikes, die die Vertauschung der Anordnung der Elemente in den Figuren berücksichtigen, werden entsprechend als Vertauschungsstrategien bezeichnet.

Vertauschungsstrategien

Unter Vertauschungsstrategien werden im Rahmen dieser Untersuchung diejenigen figurspezifischen Strategien zusammengefasst, die die Anordnung der Elemente in den zu erstellenden Figuren in der Strukturierung berücksichtigen.

Lernende verwendeten die drei figurspezifischen Strategien sowie eine Mischform dieser figurspezifischen Strategien alleine oder in Kombination mit den allgemeinen Strategiebausteinen «Disjunkte Paarbildung» und «Elementfixierung mit und ohne feste Position». Sie traten dabei sowohl beim Erstellen der Figurenmenge als auch bei der räumlichen Strukturierung der Figurenmenge auf und dienten oftmals auch zur Begründung der Vollständigkeit aller Lösungen. Zugleich wurden auf der Grundlage dieser Strukturierungen entsprechende additive und multiplikative Rechnungen abgeleitet.

Um die Unterschiede zwischen den Vertauschungsstrategien zu verdeutlichen, werden exemplarisch die Lösungswege von Ivonne, Marie und Lil kontrastierend gegenübergestellt. Auf eine Gegenüberstellung zu Vorgehensweisen, bei denen die Vertauschung nicht berücksichtigt wird und die gesamte Strukturierungsstrategie aus einer allgemeinen Strategie besteht, wird verzichtet, da dies bereits exemplarisch bei den Kombinationen mit Wiederholung vorgenommen wurde. Ebenso wird auf eine genauere Betrachtung aller figurspezifischen Strukturierungsstrategien zur Vertauschung der Anordnung in den Objekten verzichtet, da diese sich analog zu den im Folgenden vorgenommenen Vergleichen ergibt.

7.2.2.1 *Kontrastierender Vergleich der Vorgehens- und Denkweisen von Ivonne, Marie und Lil*

Ivonne erhielt als erste Aufgabe den Auftrag herauszufinden, wie viele zweistellige Zahlen man aus vier verschiedenen Ziffernkarten bilden kann.

Transkr. 7.7 Ivonnes Vorgehen (KGSW, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

Iv.:	Ok. [*Notiert: 21, 12, 24, 42; 32, 23 und vertauscht dabei jeweils die Reihenfolge der Karten. Nimmt 43, notiert 43, vertauscht die Reihenfolge der beiden Ziffernkarten zu 34 und notiert 34.Nimmt die Ziffernkarten 31 und legt 3-1. Notiert 31. Vertauscht die Reihenfolge der Ziffernkarten und notiert 13. Betrachtet die bereits gefundenen Lösungen. Schaut abwechselnd auf die bereits gefundenen Lösungen und die vor ihr liegenden Ziffernkarten*.] Ich bin mir sicher, dass ich alle gefunden hab.
I.:	Aha. Du bist dir sicher, dass du schon alle hast?
Iv.:	Ja.
I.:	Kannst du mir denn erklären, wie du die Aufgabe gelöst hast?
Iv.:	Also ich hab erst alle mit der 2. Danach hab ich die 23 gemacht. Danach hab ich´s gewechselt *[nimmt 23]* und hab daraus die 32 gemacht. Und dann hab ich´s immer so weiter gemacht. Zum Beispiel hier ist jetzt die 43 da hab ich hier die 34 gemacht. Da ist die 31 und da ist die 13. Ich hab alles umgetauscht
I.:	Aha, und woher weißt du…Also ich hab gesehen, dass du alle getauscht hast,

	aber woher weißt du denn, dass das wirklich alle sind? Das steht hier noch mal. Warum sind das alle? Begründe!
Iv.:	Also ich bin mir so sicher, weil ich schon alles gemacht hab mit der 2, mit der 4, mit der 1und der 3.
I.:	Kannst du mir das noch mal zeigen?
Iv.:	Ja. Ich hab also erst mit der 1 zum Beispiel dann hab ich die 21 gemacht und dann die zwölf. Dann hab ich die 4 genommen, die 24 und die 42. Hab die weggelegt *[legt 4 zur Seite]*. Die 23 und die 32 *[vertauscht jeweils die Reihenfolge der Ziffern]*. Bin fertig mit der *2 [legt die 2 oben rechts an den Rand]*, dann mach ich jetzt mit der 4. *[Nimmt die 4 hinzu]* 34 *[vertauscht die Reihenfolge]* und *43 [legt die 3 zur Seite nimmt 1]*. 14 und 41*[Legt die 4 zur 2]*. Dann hab ich`s immer so weiter gemacht *[nimmt 3 und 1 und vertauscht die Reihenfolge]*. Deshalb bin ich mir sicher, dass ich fertig bin.
I.:	Ok. Super. Kannst du mir sagen, wie viele das sind, ohne dass du die jetzt einzeln zählen musst?
Iv.:	*[Tippt zunächst die Karten einzeln an]* 2,4,6,8,10.

Analyse des Vorgehens

Ivonnes Aussage: *„Also ich hab erst alle mit der 2."* zeigt auf, dass sie ebenfalls systematisch alle Lösungen zu einem festen Element sucht, bevor sie anschließend ein neues Element ausgewählt *(„Also ich hab… Ich bin fertig mit der 2, dann mach ich jetzt mit der 4. 34, 43, 14, 41. Dann hab ich immer so weiter gemacht und dann getauscht.")*. Sie verwendet demnach den Strategiebaustein «Elementfixierung mit fester Position»". Ihr Vorgehen und ihre Aussagen zeigen ein weiteres Handlungsmuster auf: Innerhalb der Klassen, die sie mit einem Element bildet, bildet sie jeweils direkt die Vertauschung der Reihenfolge der Elemente: *„Danach hab ich die 23 gemacht. Danach hab ich´s gewechselt [nimmt 23] und hab daraus die 32 gemacht. Und dann hab ich´s immer so weiter gemacht. Zum Beispiel hier ist jetzt die 43 da hab ich hier die 34 gemacht. Da ist die 31 und da ist die 13. Ich hab alles umgetauscht."*

Marie erhielt ebenfalls den Auftrag, die Anzahl aller zweistelligen Zahlen aus vier Ziffernkarten zu ermitteln. Sie greift in ihrem strategischen Vorgehen ebenfalls auf die Anordnung der Elemente in den Figuren zurück, nutzt diese Eigenschaft jedoch anders als Yvonne.

Transkr. 7.8 Maries Vorgehen (GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

Marie legt und notiert zunächst folgende Lösungen:
12;14;13
21; 41; 31
M.: Die hab ich alle. Dann brauch ich keine mehr mit 1 machen.
Marie legt und notiert:

24;23
32;42
M.: Jetzt brauch ich nur noch 43 *[vertauscht die Ziffernkarten, so dass sie eine 34 erhält]* 34 *[Notiert: 43, 34]*
M.: Fertig.

Analyse des Vorgehens

Marie bildet zunächst im Sinne der Strategie «Elementfixierung mit fester Position» alle möglichen Kombinationen, die mit der Ziffer 1 an erster Stelle möglich sind. Anschließend vertauscht sie zu jeder der notierten Zahlen die Reihenfolge der Anordnung der Ziffern und weist auf die Vollständigkeit der gefundenen Lösungen für die Ziffer 1 hin. Im nächsten Schritt erstellt sie in Abhängigkeit von den bereits gefundenen Lösungen wieder zunächst alle möglichen Kombinationen, in diesem Fall mit der Ziffer 2 an erster Stelle. Daran anknüpfend vertauscht sie wiederum die Reihenfolge der Anordnung der Ziffern. Ein analoges Vorgehen verwendet sie für die Ziffer 3.

Lil bearbeitete die Turmaufgabe und verwendete dabei ein Vorgehen, welches von Yvonnes und Maries zu unterscheiden ist.

Transkr. 7.9 Lils Vorgehen (CGSB, V. o. Wh., Türme bauen)

Zur Situation: Lil erhält den Auftrag die Turmaufgabe zu lösen. Dazu baut und notiert sie zunächst 6 Lösungen [baut und notiert: s-r; r-g; gr-r; legt r zur Seite, baut und notiert gr-g, gr-s, legt gr zur Seite, baut g-s] und legt diese wie folgt auf den Tisch:

s	*r*	*gr*	*gr*	*gr*	*g*
r	g	r	g	s	s

Anschließend notiert sie zu jeder der bereits gefundenen Lösungen eine weitere Lösung, in der die Reihenfolge der Farben vertauscht ist, und ordnet die 12 Lösungen jeweils in Paaren auf dem Tisch an:

g	s
s	g

r	s
s	r

gr	s
s	gr

gr	g
g	gr

g	r
g	g

gr	r
r	gr

L.: Ich hab 6 und dann doppelt genommen. Also 12.

Analyse des Vorgehens

Lil bildet zunächst alle möglichen Kombinationen, die aus den gegebenen Bausteinen möglich sind. Dabei geht sie strukturiert vor und verwendet zur Lösungsfindung die «Elementfixierung ohne feste Position» *(baut und notiert: s-r; r-g; gr-r; legt r zur Seite, baut und notiert gr-g, gr-s, legt gr zur Seite, baut g-s).* Die Vollständigkeit der Lösungen begründet sie ebenfalls über die «Elementfixierung» *(„Weil ich von jedem schwarz, also gelb mit schwarz, grün mit schwarz und rot mit schwarz und es geht ja nicht schwarz mit schwarz. Weil ich jetzt von allen Sorten hab. Ich hab auch alle Farben mit allen Farben“).* Im Anschluss vertauscht sie ausgehend von dem ersten gebildeten Turm systematisch die Anordnung der Bausteine in den Türmen: *„Ich hab 6 und dann doppelt genommen.“*

Kontrastierender Vergleich der Vorgehens- und Denkweisen von Ivonne, Marie und Lil

Der Vergleich der Vorgehensweisen der drei Lernenden zeit, dass Ivonne zunächst eine Kombination auswählt und jeweils direkt die dazugehörige Permutation bildet, bevor sie eine neue Kombination auswählt. Marie hingegen erstellt zunächst alle Figuren mit einem festen Element an einer festen Position und bildet daran anknüpfend zu den erstellten Kombinationen alle Permutationen. Lil bildet zunächst alle Kombinationen ohne Wiederholung systematisch mittels der «Elementfixierung» und anschließend die möglichen Permutationen zu den gegebenen Kombinationen ohne Wiederholung. Diese Vorgehensweisen sind bei der Lösung der Problemstellungen zur Variationen ohne Wiederholung bei vielen Lernenden beobachten.

7.2.2.2 *Verallgemeinerung der Strategien*

Die drei figurspezifischen Strategien zur Vertauschung der Reihenfolge der Elemente in den Figuren waren sowohl bei der Aufgabenstellung „Zahlen aus Ziffernkarten“ als auch bei der Aufgabenstellung „Türme bauen“ zu identifizieren, die Tabelle (Tab. 7.13) gibt einen Überblick.

<table>
<tr><th></th><th>Zahlen aus Ziffernkarten</th><th>Türme bauen</th></tr>
<tr><td>«Einzelvertauschung»</td><td>
Meike, GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten</td><td>
Tim, KGSD, V. o. Wh.,Türme bauen</td></tr>
<tr><td>«Gruppenvertauschung»</td><td>M. notiert:
12;14; 13
21; 41; 31
M.: Die hab ich alle. Dann brauch ich keine mehr mit 1 machen.
M notiert: 24; 23
32;42

M.: Jetzt brauch ich nur noch 43, [vertauscht die Ziffernkarten, so dass sie eine 34 erhält] 34.
M. notiert: 43
34
Marie, GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten</td><td>
Maike, GSSTB,V. o. Wh., Türme bauen</td></tr>
<tr><td>«Gesamtvertauschung»</td><td>M. notiert Lösungen und ordnet diese folgendermaßen auf dem Tisch an:
12 13 14
23 24
34

21 31 41
32 42
43
Marko, CGSB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten</td><td>Lil notiert:<table><tr><td>s</td><td>r</td><td>gr</td><td>gr</td><td>gr</td><td>g</td><td>s</td></tr><tr><td>r</td><td>g</td><td>r</td><td>s</td><td>g</td><td>s</td><td>g</td></tr></table>Anschließend bildet sie zu jeden Turm die Vertauschung und ordnet diese wie folgt an:

Lil, CGSB, V. o. Wh., Türme bauen</td></tr>
</table>

Tab.7.14 Strategien zur Vertauschung der Reihenfolge in verschiedenen Kontexten

Auf der Grundlage der Analyse der Strukturierungen der Lernenden in beiden Kontexten ergeben sich für die Strategien zur Vertauschung der Anordnung in den Objekten folgende in dynamischer Sicht formulierte Verallgemeinerungen:

«Einzelvertauschung» 1. Erstelle eine Kombination und vertausche anschließend die Reihenfolge der Anordnung der ausgewählten Elemente auf alle möglichen Weisen, um neue Kombinationen zu erstellen. 2. Bilde eine neue Kombination und dazu alle möglichen Vertauschungen der Anordnungen der Elemente. 3. Bilde zu jeder nachfolgenden neuen Kombination ebenfalls alle möglichen Vertauschungen der Anordnungen der Elemente.
«Gruppenvertauschung» 1. Bilde nach einer festen Regel eine Gruppe von Kombinationen und vertausche zu den gebildeten Kombinationen die Reihenfolge der Anordnung der Elemente. 2. Bilde nach einer weiteren festen Regel eine Gruppe von Kombinationen und vertausche zu den gebildeten Kombinationen die Reihenfolge der Anordnung der Elemente. 3. Bilde zu jeder weiteren Gruppe ebenfalls alle möglichen Figuren, in denen die Reihenfolge der Anordnung der Elemente vertauscht ist.
«Gesamtvertauschung» 1. Erstelle alle möglichen Kombinationen. 2. Vertausche zu den gebildeten Kombinationen die Reihenfolge der Anordnung der Elemente.

Abb. 7.9 Verallgemeinerung der Vertauschungsstrategien

7.2.2.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Ein Vergleich der Strategien mit den in der Literatur dargestellten Sichtweisen auf die Variationen ohne Wiederholung zeigt Gemeinsamkeiten auf. Kütting und Sauer (2008, S. 87) sprechen anstelle von Variationen ohne Wiederholung auch von „k-Permutationen ohne Wiederholung aus n Elementen“. Sie betonen demnach den engen Zusammenhang zwischen den Variationen und den Permutationen. Bernoulli hingegen nennt die gesuchten Figuren „Combinationen in Verbindung mit ihren Permutationen“ (1713, nach deutscher Übersetzung von Haussner 1899, S. 124). Er bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen den beiden Figuren. Entsprechend sind in Selektionsproblemen Auswahlen von einer bestimmten Anzahl an Elementen einer gegebenen Menge sowie alle Möglichkeiten, diese auf verschiedene Art und Weise anzuordnen, gesucht. Damit lässt sich die Anzahlbestimmung von Variationen ohne Wiederholung durch zwei Fragen im Selektionsmodell beantworten (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 87):

- Wie viele Auswahlen von n (hier zwei) Elementen sind möglich?
- Wie viele Vertauschungen der jeweils ausgewählten Elemente sind möglich?

Es geht entsprechend darum, alle möglichen Auswahlen von einer vorgegebenen Anzahl an Elementen zu treffen und alle möglichen Anordnungen zu den Auswahlen zu bilden. Die von den Lernenden verwendeten figurspezifischen Lösungsstrategien beziehen die beiden Fragestellungen in die Strukturierung der Lösungsfindung ein. Bei der Strategie «Einzelvertauschung» werden jeweils zu einem ausgewählten Element direkt alle Vertauschungen erstellt, in den einzelnen Schritten werden sukzessive die Kombinationen erstellt. Bei der Strategie «Gruppenvertauschung» werden jeweils zu einer erstellten Gruppe alle Vertauschungen hergestellt. Bei der Strategie «Gesamtvertauschung» werden zunächst alle möglichen Kombinationen erstellt, im Anschluss daran werden die Vertauschungen der jeweiligen Elemente gebildet. Diese gemeinsame Strukturierung zeigt insbesondere die enge Verknüpfung zwischen fachlichen Konzepten und den Konzepten der Lernenden. Unter dieser Perspektive ist es von besonderem Interesse auch genauer zu schauen, welche Schwierigkeiten sich in früheren Strategien zur Anzahlbestimmung zeigen. Zugleich weist die enge Verbindung auf die grundsätzlich sinnvolle Strukturierung hin. Ausgehend von diesen Bezügen stellt sich dennoch die Frage, welchen Beitrag die figurspezifischen Strukturierungen zur vollzähligen Strukturierung der Figurenmenge für die im Rahmen der Arbeit verwendeten Problemstellungen leisten.

<table>
<tr><th>Kriterium zur Klasseneinteilung der Figurenmenge</th><th>«Einzelvertauschung»</th><th>«Gruppenvertauschung»</th><th>«Gesamtvertauschung»</th><th></th></tr>
<tr><td>Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse</td><td>☑</td><td>☒</td><td>☒</td><td rowspan="3">Nicht eindeutig vgl. Ausführungen im Text</td></tr>
<tr><td>Vollständigkeit der Anzahl der Klassen</td><td>☒</td><td>☒</td><td>☑</td></tr>
<tr><td>Disjunktheit der Klassen</td><td>☒</td><td>☒</td><td>☒</td></tr>
</table>

Tab. 7.15 Beziehung zwischen den Vertauschungsstrategien und der Einteilung einer Menge in Klassen

Die Strategie «Einzelvertauschung» bildet direkt zu jeder erstellten Figur eine weitere Figur, in der die Anordnung der Elemente vertauscht ist. Die erstellte Figur lässt sich gemeinsam mit seinem Tauschpaar als Klasse aller Lösungen zu der Kombination von zwei Elementen auffassen. Die Strategie stellt für diese Klasse jeweils sicher, dass sie alle Figuren enthält. Insofern stellt die Strategie sicher, dass die Anzahl aller Objekte in den Teilmengen vollständig ist. Sie hat jedoch keinen Einfluss darauf, inwiefern die Anzahl aller Klassen vollständig ist, dazu ist eine weitere Strategie notwendig. Die Disjunktheit der Objekte ist auch nicht zwangsläufig gegeben, da es möglich ist, dass die Auswahl zweier Elemente mehrfach getroffen wird und entsprechend auch die Vertauschung erstellt wird.

Die Strategie «Gruppenvertauschung» bildet die Vertauschung von Figuren zu einer gebildeten Gruppe. Sie stellt insofern sicher, das zu jeder gebildeten Figur die Vertauschung gegeben ist, hat jedoch keinen Einfluss darauf, ob zunächst alle Figuren zu einer Gruppe gebildet wurden und ebenso wenig darauf, ob alle Klassen erstellt wurden.

Bei der Strategie «Gesamtvertauschung» werden zunächst Kombinationen bestimmt. Ist dieser Prozess abgeschlossen, so werden im nächsten Schritt alle Vertauschungen zu den erstellten Kombinationen erstellt. Insofern ist auch hier sichergestellt, dass die Anzahl alle Vertauschungen erstellt wurden, nicht jedoch zwangläufig auch alle Kombinationen. Die Strategie lässt sich auf zwei Weisen deuten: Entweder entstehen zwei Klassen von Lösungen: In der ersten sind alle erstellten Kombinationen enthalten und in der zweiten die dazugehörigen Variationen. In diesem Fall wäre die Anzahl der Klassen sichergestellt, nicht jedoch die Disjunktheit und die Anzahl der Objekte in den Klassen. Diese sind jeweils von der Vollständigkeit der erstellten Kombinationen abhängig. Oder das Erstellen der Variationen wird als weiteres Füllen der Klasse gedeutet. Die erstellten Variationen werden dann jeweils einer Kombination zugeordnet. Unter dieser Perspektive stellt die Strategie ebenso wie die Strategie «Einzelvertauschung» die Anzahl aller Objekte in den Klassen sicher, nicht jedoch die beiden anderen Kriterien, wie die beiden Strukturierungsstrategien von Tim zeigen:

Abb. 7.10 Tims Strategie zur Lösung der Aufgabe Zahlen aus Ziffernkarten

Dieser Strukturierung ist zu entnehmen, dass sie gewährleistet zu den erstellten Objekten alle Vertauschungen hergestellt zu haben, jedoch nicht auch alle möglichen Kombinationen aus zwei Bausteinen zu erstellen, also alle Klassen an Lösungen zu erstellen. Tims Strukturierung zu der Aufgabe Zahlen aus Ziffernkarten zeigt zudem, dass die Vertauschung der Reihenfolge auch von Lernenden berücksichtigt wird, die die Figurenmenge unvollständig erstellen.

Transkr. 7.10 Tims Strategie (KGSD, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

Zur Situation: Tim erhält den Auftrag, die Anzahl aller möglichen zweistelligen Zahlen aus vier Ziffernkarten zu bestimmen. Er erstellt und notiert der Reihe nach die nebenstehenden Lösungen:

42
13
24
31
34
43
21
12

T.:	Und ja, ich hab alle.
I.:	Woher weißt du, dass das alle sind?
T.:	Hmm (...) weil, weil ich die gelegt habe und ich hab's so gemacht dass zum Beispiel hier war ne 34 und hier ne 12 *[T. legt die Karten hin.],* dann hab ich die sofort gewechselt *[T. legt die 4 vor die 3]* sind 43 und dann *[T. legt die 2 vor die 1.],* ne 21. Dann hab ich sie ausgetauscht *[T. tauscht 4 und 1]* und da war ne 13 und da ne 24 und dann hab ich die wieder umgedreht *[T. legt die 4 vor die 2]* und da stand ne 42 und da ne 13.

Tims Vorgehen ist zu entnehmen, dass er insgesamt acht der zwölf gesuchten Lösungen ermittelt. Dabei ist seiner Begründung zu entnehmen, dass er in seinem Vorgehen darauf fokussiert, zu jeder gebildeten Figur die Vertauschung der Anordnung vorzunehmen und so eine weitere Figur zu erzeugen. Dazu erstellt er zunähst disjunkte Paare und im Anschluss daran im Sinne der «Gruppenvertauschung» die jeweiligen Permutationen zu den erstellten Figuren, anschließend verwendet er die «Einzelvertauschung» bildet jedoch auch hier weiter disjunkte Paare. Das unvollständige Erstellen der Figurenmenge konnte insgesamt im Rahmen dieser Arbeit besonders häufig bei Strukturierungen, die Mischformen enthalten, rekonstruiert werden und bei Strukturierungen, in denen eine Strategie nicht vollständig angewendet wurde.

7.2.2.4 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

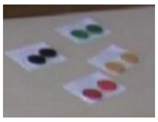
In der Literatur gibt es Hinweise darauf, dass Lernende auch im Bereich anderer Aufgabenstellungen ebenfalls zunächst zu einer bereits erstellten Figur oder einer Auswahl an Figuren alle möglichen Permutationen bilden
Hinsichtlich der Strategien «Gruppenvertauschung» und «Gesamtvertauschung» wurden keine Berührungspunkte zu den vorherigen Studien identifiziert. Die von Martino (1992) beschriebene Strategie «Families» weist jedoch große Ähnlichkeiten zum Strategiebaustein «Einzelvertauschung» auf. So beschreibt sie die «4-1 Family», in der ein roter und vier weiße Steine verwendet werden, bis alle möglichen Vertauschungen zu diesen Bausteinen gefunden sind. Um die

Vollständigkeit zu sichern, verwendeten die Lernenden dabei ein Treppenmuster. Mittels dieser Strategie wurden alle möglichen Permutationen zu einer festen Kombination an Elementen gebildet (vgl. Martino 1992, S. 255). Auch in dem von Hofmann beschriebenen «Positionsprinzip» werden alle Vertauschungen gebildet: *„Beim Erstellen der Kombinationen wird versucht, alle möglichen Positionen für eine bestimmte Anzahl an roten oder grünen Elementen innerhalb der erstellten Kombinationen zu ermitteln.“* (Hoffmann 2003, S. 326). Auch den Darstellungen von Piaget und Inhelder ist die Strategie «Einzelvertauschung» bei der Lösung von Variationsproblemen mit Wiederholung zu entnehmen. So bildet Ger beispielsweise jeweils direkt die Vertauschung der Anordnung zu zwei ausgewählten Ziffernkarten: *„He makes 13, 31; 12, 21, 32, 23, 11, 22, and 33*“ (vollständiger Transkriptausschnit vgl. Tab. 2.13). Ein Vergleich mit den Strategien zu Permutationen, in denen die Anordnung der Elemente in den Objekten ebenfalls relevant ist, zeigt ebenfalls Ähnlichkeiten auf. So durchläuft in der «Procedure circulaire» von Vergnaud & Cohen (1968) sowie in den Strategien «Zigzag» und «Strategie de la diagonale» von Larivée und Normandeau (1985) jeweils ein Element alle möglichen Positionen. Dieser Rückbezug ist jedoch insofern einschränkend zu betrachten, als es im Rahmen dieser Untersuchung lediglich notwendig war, die möglichen Anordnungen von jeweils zwei Elementen zu ermitteln, so dass insgesamt nur zwei Positionen zu Verfügung standen.

7.2.3 Fazit

Im Rahmen dieser Untersuchung waren bei der Anzahlbestimmung bei Kombinationen mit Wiederholung und bei Variationen ohne Wiederholung figurspezifische Strategien zu beobachten. Diese beziehen sich bei den Kombinationen mit Wiederholung auf die besondere Berücksichtigung der Wiederholung von gleichen Elementen in den Figuren sowie bei Variationen ohne Wiederholung auf die besondere Berücksichtigung der Vertauschung der Reihenfolge der Elemente in den Figuren.

Bei den Kombinationen mit Wiederholung wurde die «Anzahlfixierung» als einzige figurspezifische Strategie identifiziert. Bei dieser Strategie werden, wie in der Tabelle (Tab. 7.16) dargestellt, diejenigen Figuren, in denen die gleiche Anzahl an gleichen Elementen vorhanden ist, als gemeinsame Klasse erstellt. Die beiden durch dieses Vorgehen erzeugten Mengen sind disjunkt und können gemeinsam als Zerlegung der gesuchten Figurenmenge in zwei Klassen aufgefasst werden. Nicht sichergestellt ist durch dieses Vorgehen, dass die Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse gegeben ist.

Strategie	Beschreibung	Beispiel
«Anzahl-fixierung»	Alle erstellten Objekte, die in der Anzahl ihrer gleichen Elemente in den Objekten übereinstimmen, gehören zusammen: Alle mit zwei gleichen Elementen, alle mit verschiedenen Elementen.	  *Lasse, CGSB, K. m. Wh., Eismann*

Tab.7.16 Figurspezifische Strategien zur Wiederholung von Elementen in den Figuren

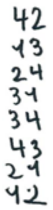
Der Rückbezug zu den in der Literatur benannten Strategien bei der Lösung von Auflistungsproblemen zeigt, dass dort ebenfalls Handlungsmuster beschrieben werden, die auf die Wiederholung von Elementen in den Objekten zurückzuführen sind (Piaget & Inhelder 1975; Martino 1992) oder die ebenfalls eine Zerlegung in Klassen vornehmen (Hoffmann 2003). Die Tabelle gibt diesbezüglich eine Übersicht, das Vorkommen der Strategie.

K. m. Wh.	vorliegende Untersuchung
V. m. Wh.	Piaget & Inhelder (1975); Martino (1992a, 1992b)
P. m. Wh.	keine explizit vorliegenden Ergebnisse
Produktregel	Hoffmann (2003)

Tab. 7.17 Benennung verwandter Strategien zur «Anzahlfixierung» in vorangegangenen Untersuchungen

Der Tabelle 7.17 ist zu entnehmen, dass die Strategie «Anzahlfixierung» im Rahmen vorheriger Untersuchungen auch bei den Variationen mit Wiederholung identifiziert wurde. In der Untersuchung Martinos (1992a, 1992b) wurden dabei auch bei Problemstellungen, in denen mehr als zwei Objekte miteinander kombiniert werden, berücksichtigt. Insofern ist zu folgern, dass diese Strategie sich konkret auf die Eigenschaft „Wiederholung von Elementen in den Figuren“ bezieht.

Bei den Variationen ohne Wiederholung beziehen sich die verschiedenen Strategien alle auf den Umgang mit der Vertauschung der Reihenfolge der Elemente in den Figuren. Insgesamt wurden drei Strategien und eine Mischform rekonstruiert.

Strategie	Beschreibung	Beispiel
«Einzelvertauschung»	Zu einem gebildeten Objekt (grün-blau) wird direkt die mögliche Permutation (blau-grün) gebildet. Anschließend wird ein Objekt aus einer neuen Kombination an Elementen erstellt (gelb-grün) sowie die Vertauschung der Anordnung vorgenommen (grün-gelb).	 *Tim, KGSD, V. o. Wh., Türme*
«Elementfixierung ohne feste Position» &«Gruppenvertauschung»	Es werden alle Türme erstellt, die den Baustein rot enthalten (erste Reihe), dann zu grün (zweite Reihe), zu gelb (dritte Reihe). Sobald alle Kombinationen mit rot erstellt sind, wird die Anordnung vertauscht (gelb-rot; rot-grün, rot-schwarz), ebenso für die anderen Klassen.	 *Maike, GSSTB, V. o. Wh., Türme*
«Elementfixierung ohne feste Position» &«Gesamtvertauschung»	Es werden zunächst alle möglichen Kombinationen erstellt mittels der «Elementfixierung ohne feste Position» erstellt, anschließend wird bei allen Objekten die Vertauschung der Reihenfolge vorgenommen.	*Lil baut und notiert 6 Lösungen: s-r; r-g; gr-r; legt r zur Seite, baut und notiert gr-g, gr-s, legt gr zur Seite, baut g-s. Zu jedem der Türme vertauscht sie anschließend die Reihenfolge:*  *Lil, CGSB, V. o. Wh., Türme*
«Disjunkte Paarbildung» in Kombination mit einer Mischform aus «Gruppenvertauschung» & «Einzelvertauschung»	Aus allen Ziffernkarten werden zwei Paare gebildet, anschließend wird die Vertauschung der Anordnung der Ziffern vorgenommen. Es werden wieder aus allen Ziffernkarten zwei Paare gebildet- die Vertauschung der Anordnung wird jedoch zwischenzeitlich notiert.	 *Tim, KGSD, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*

Tab.7.18 Figurspezifische Strategien zur Vertauschung der Anordnung von Elementen in den Figuren

Die Strukturierungen der Lernenden zu Variationen ohne Wiederholung lassen sich analog zu den historischen Zugängen als eine Zerlegung der gesuchten Figurenmenge in Kombinationen in Verbindung mit ihren Permutationen oder aber als Permutationen in Verbindung mit ihren Kombinationen auffassen. So wird bei der «Einzelvertauschung» direkt zu einer ausgewählten Kombination die jeweilige Permutation gebildet. Bei den Strategien «Gruppenvertauschung» und «Gesamtvertauschung» werden zunächst unter bestimmten Bedingungen oder die möglichen Kombinationen ohne Wiederholung gebildet, bevor die möglichen Permutationen gebildet werden. Damit zeigt sich ein bedeutender Zusammenhang zu den fachlichen Konzepten, die im Laufe der Geschichte der kombinatorischen Anzahlbestimmung entwickelt wurden (vgl. 1.3). Der Vergleich zu den Kriterien zur Einteilung von Mengen in Klassen zeigt auf, dass die Strategien abhängig von der Deutung entweder die Vollständigkeit der einzelnen Klassen oder aber die Vollständigkeit der Klassen sicherstellen. Die beiden anderen Kriterien sind dann jedoch jeweils nicht zwangsläufig erfüllt. Insofern stellt eine alleinige Strukturierung mittels der figurspezifischen Strategien die Vollständigkeit der Figurenmenge nicht vollständig sicher, dient jedoch dazu, entweder die Vollständigkeit der Klassen oder aber die Vollständigkeit der Objekte innerhalb einer Klasse sicherzustellen.
Der Vergleich der identifizierten Vertauschungsstrategien mit den in der Literatur benannten Strategien im Kontext von Problemstellungen, in denen in den Figuren die Vertauschung der Elemente zugelassen ist, zeigt, dass auch dort bereits Strategien identifiziert wurden, die einen konkreten Bezug zu der möglichen Vertauschung der Elemente aufweisen. Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick.

	«Einzelvertauschung»	**«Gruppenvertauschung»**	**«Gesamtvertauschung»**
V. o. Wh.	vorl. Untersuchung	vorl. Untersuchung	vorl. Untersuchung
V. m. Wh.	Piaget & Inhelder (1975); Martino (1992)	-----------	-----------
P. o. Wh.	Vergnaud & Cohen (1968), Larivée & Normandeau (1985)	-----------	-----------
P. m. Wh	KEINE VORLIEGENDE KATEGORISIERUNG (konkrete Studien fehlen)		
Produktregel	Hoffmann (2003)	Hoffmann (2003)	Hoffmann (2003)

Tab. 7.19 Benennung zu den Vertauschungsstrategien verwandter Strategien in vorangegangenen Untersuchungen

Besonders auffällig ist, dass lediglich eine der drei identifizierten Strategien, die «Einzelvertauschung», starke Gemeinsamkeiten zu den in der Literatur benannten Strategien aufweist. Bezüglich der weiteren Strategien stellt sich die Frage, ob Handlungsmuster, die diesen Strategien entsprechen bei den verschiedenen Figuren nicht vorkommen oder, ob diese nicht als Strategien identifiziert werden. Diese gilt es in anschließenden Untersuchungen zu klären.

7.3 Strukturierungsstrategien bei verschiedenen kombinatorischen Figuren

In Kapitel 6 wurde aufgezeigt, dass die Strukturierungsstrategien der Lernenden basierend auf unterschiedlichen Figurenbildungskonzepten im Rahmen dieser Untersuchung mittels einer oder mehrerer Bausteine beschrieben werden können. Die allgemeinen und figurspezifischen Strategien beschreiben in Kombination mit dem Figurenbildungskonzept die Strukturierungsstrategie einiger Lernender vollständig. Bei Anderen setzt die Strukturierungsstrategie sich hingegen aus dem Figurenbildungskonzept sowie der Kombination einer allgemeinen und einer figurspezifischen Strategie zusammen. Aufgezeigt wurde zudem, dass Letztere sich auf bestimmte Eigenschaften der zu erstellenden Figuren beziehen und insofern (wie der Name es bereits sagt) nicht bei allen Problemstellungen auftreten. Neben diesen hauptsächlich verwendeten Strategien wurden von zwei Lernenden auch kontextspezifische Strategien verwendet.

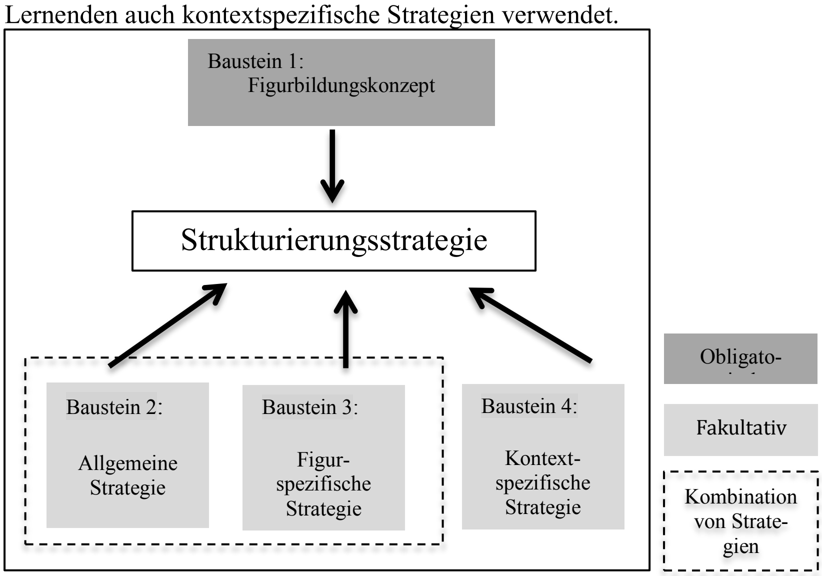


Abb. 7.11Strategiebausteine zur Rekonstruktion von Strukturierungsstrategien

Die allgemeinen und figurspezifischen Strategien der Lernenden wurden in den Abschnitten 7.1 und 7.2 dargestellt. Die beiden kontextspezifischen Strategien waren bereits Gegenstand des Abschnitts 4.2 und wurden daher in Kapitel 7 nicht erneut analysiert. Die nachfolgende Tabelle bildet auf dieser Grundlage ab, aus welchen Strategiebausteinen die Strukturierungsstrategien der Lernenden sich in Abhängigkeit von der kombinatorischen Figur und dem Kontext beschreiben lassen.

		K. o. Wh.		K. m. Wh.		V. o. Wh.	
		Fußball	Lotto	Eismann	Domino	Türme	Ziffernk
Figurenbildungskonzept	abhängig & unabhängig	☑	☑	☑	☑	☑	☑
Allgemeine Strategie	«Disjunkte Paarbildung», «Zyklische Musterbildung», «Elementfixierung»	☑	☑	☑	☑	☑	☑
Figurspezifische Strategie	«Anzahlfixierung»	☒	☒	☑	☑	☒	☒
	«Direktvertauschung», «Gruppenvertauschung», «Gesamtvertauschung»	☒	☒	☒	☒	☑	☑
Kontextspezifische Strategie	«Domino»	☒	☒	☒	☑	☒	☒
	«Zweistellige Zahlen»	☒	☒	☑	☑	☑	☑

Tab. 7.20 Strategiebausteine in Abhängigkeit von den kombinatorischen Figuren und den Kontexten

Die Tabelle 7.20 veranschaulicht, dass die Bausteine „Figurenbildungskonzept" und „Allgemeine Strategie" bei allen drei Figuren und über alle Kontexte hinweg übereinstimmen. Unterschiede bestehen hinsichtlich der figurspezifischen Strategien. So wurden bei den Kombinationen ohne Wiederholung keine identifiziert, bei den Kombinationen mit Wiederholung eine, die sich auf die Wiederholung der Elemente in den Objekten bezieht und bei den Variationen drei Strategien, die sich auf die Anordnung der Elemente in den Figuren beziehen. Zudem bestehen Unterschiede hinsichtlich der kontextspezifischen Strategien. Bei Kombinationen ohne Wiederholung wurde keine kontextspezifische Strategie identifiziert. Bei den Kombinationen mit Wiederholung spielte der Kontext bei der Dominosteinaufgabe eine Rolle, ebenso bei der Aufgabe Zahlen aus Ziffernkarten, in der Variationen ohne Wiederholung zu bestimmen waren.

Im Folgenden werden die Strukturierungsstrategien in Abhängigkeit von den kombinatorischen Figuren und dem Kontext genauer in den Blick genommen. Dazu wird zunächst aufgezeigt, wie viele verschiedene Strukturierungsstrategien es auf der Grundlage der rekonstruierten Bausteine gibt und welche dieser Strategien tatsächlich im Rahmen dieser Untersuchung verwendet wurden. Anschließend werden diejenigen Strukturierungsstrategien, die abhängig von den jeweiligen kombinatorischen Figuren am häufigsten zu beobachten waren, dargestellt und hinsichtlich möglicher Besonderheiten betrachtet.

7.3.1 Kombinationen ohne Wiederholung

Die Strukturierungsstrategien von Lernenden bei Kombinationen ohne Wiederholung lassen sich vollständig durch die Kombination aus einer allgemeinen Strategie mit einer Figurenbildungsstrategie rekonstruieren. Figurspezifische und kontextspezifische Bausteine wurden nicht lokalisiert.

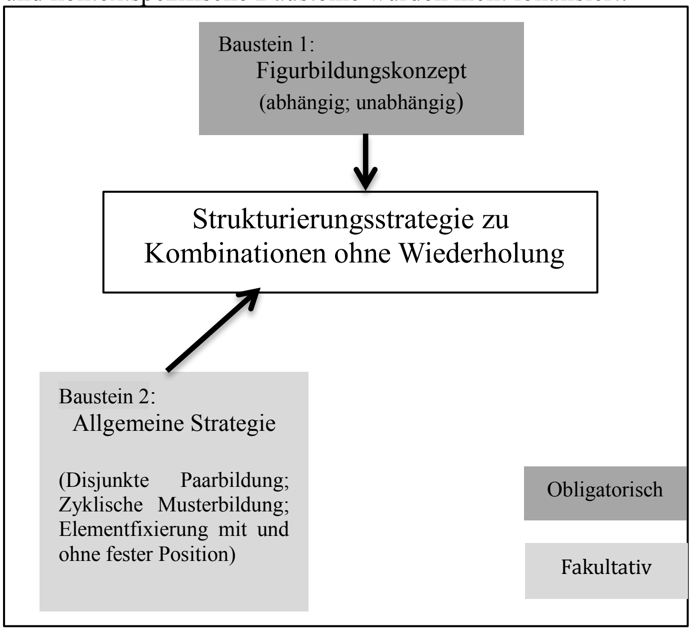
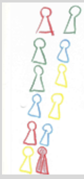
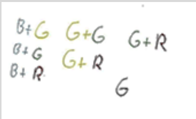
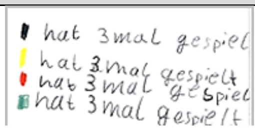


Abb. 7.12 Strategiebausteine zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien bei Kombinationen ohne Wiederholung

Insgesamt ergeben sich aus den möglichen Kombinationen der Strategiebausteine acht verschiedene Möglichkeiten, wenn auf eine allgemeine Strategie und das Figurenbildungskonzept zurückgegriffen wird, diese werden im Anhang (vgl. Anhang A & B) ausführlich dargestellt. Die sechs hauptsächlich verwendeten Strukturierungsstrategien sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen. Diese beinhaltet neben der Auflistung der Strategien auch einen Rückbezug, inwiefern die Kriterien zur Klassenbildung erfüllt sind und somit die jeweilige Strukturierungsstrategie bei konsequenter Anwendung sicherstellt, dass die Figurenmenge vollzählig erzeugt wird. Strukturierungsstrategien, die die Figurenmenge vollzählig erstellen, werden dabei grau hervorgehoben.

<table>
<tr><th>Strukturierungs-strategie</th><th>Beispiel</th><th>Erfüllung der Kriterien
1.Vollständigkeit der Klassen
2.Vollständigeit der Objekte in einer Klasse & 3. Disjunktheit</th></tr>
<tr><td>1. «Elementfixie-rung ohne feste Position»</td><td></td><td>1. & 2. «Elementfixierung»
3. «abhängige Figurenbil-dung»</td></tr>
<tr><td>2. «Elementfixie-rung mit fester Position»</td><td>
</td><td>1. & 2. «Elementfixierung»
3. «abhängige Figurenbil-dung»</td></tr>
<tr><td>3. «Disjunkte Paar-bildung»</td><td>
</td><td>1. 2. & 3. «Disjunkte Paarbil-dung»</td></tr>
<tr><td>4. «Elementfixie-rung mit fester Position»</td><td>
</td><td>1.& 2. «Elementfixierung»
3. nicht erfüllt aufgrund un-abhängiger Figurenbildung</td></tr>
<tr><td>5. «Zyklische Mus-terbildung»</td><td><table><tr><td>1-2</td><td>2-3</td><td>3-4</td></tr><tr><td>1-3</td><td>2-4</td><td></td></tr><tr><td>1-4</td><td></td><td></td></tr></table></td><td>1. & 2. «Zyklische Musterbil-dung»
3. «abhängige Figurenbil-dung»</td></tr>
<tr><td>6. «Zyklische Mus-terbildung»</td><td><table><tr><td>1-2</td><td>2-3</td><td>3-4</td><td>4-1</td></tr><tr><td>1-3</td><td>2-4</td><td>3-1</td><td>4-2</td></tr><tr><td>1-4</td><td>2-1</td><td>3-2</td><td>4-3</td></tr></table></td><td>1. & 2. «Zyklische Musterbil-dung»
3. nicht erfüllt aufgrund un-abhängiger Figurenbildung</td></tr>
</table>

Tab. 7.21 Hauptstrategien[23] bei Kombinationen ohne Wiederholung[24]

23 Unter Hauptstrategien zu einer kombinatorischen Figur werden dabei die sechs am häufigsten von den Lernenden verwendeten Strukturierungsstrategien verstanden. Berücksichtigt wurden dabei sämtliche Strukturierungen und Umstrukturierungen bei den Grundaufgaben.

24 Die erste in der Tabelle aufgeführte Strategie ist die im Rahmen der Untersuchung am häufigsten verwendete Strukturierungsstrategie, die letztgenannte, die von den dargestellten Strategien am seltensten verwendete.

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass bei Kombinationen ohne Wiederholung Strukturierungsstrategien, in denen die «Elementfixierung» verwendet wurde, insgesamt dominierten. Dabei ist zu berücksichtigen, dass bei der Analyse der Hauptstrategien auch die Umstrukturierungen berücksichtigt wurden. Diese wurden, wie in Abschnitt 5.1.1 aufgezeigt, in der Regel zugunsten der «Elementfixierung» vorgenommen. Die alleinige Berücksichtigung des Erstellungsprozesses der Lösung hätte voraussichtlich eine andere Reihenfolge der hauptsächlich verwendeten Strategien ergeben. So wurde beim Erstellen der Figurenmenge besonders häufig die «Disjunkte Paarbildung» verwendet. Der Tabelle ist ebenfalls zu entnehmen, dass vier der sechs Strukturierungsstrategien die Figurenmenge vollzählig erstellen bzw. strukturieren, wenn sie konsequent verwendet werden. Besonders auffällig ist auch, dass insgesamt zwei Hauptstrategien auf einer unabhängigen Figurenbildungsstrategie beruhen, und insofern durch die konsequente Anwendung der jeweiligen allgemeinen Strategie systematisch zu viele Figuren erzeugt werden (vgl. Tab. 7.21).

7.3.2 Kombinationen mit Wiederholung

Anders als bei den Kombinationen ohne Wiederholung verwenden einige Lernende bei den Kombinationen mit Wiederholung auch eine figurspezifische Strategie (vgl. 7.2). Diese Strategie bezieht sich auf den Umgang mit der Anzahl der Wiederholungen in den Objekten. Die rekonstruierten Strategien der Lernenden bei Kombinationen mit Wiederholung bestehen aus der alleinigen Anwendung von allgemeinen oder figurspezifischen Bausteinen oder aus der Kombination verschiedener Bausteine. Zudem wurde bei der Aufgabe Dominosteine eine kontextspezifische Strategie verwendet. Insofern lassen sich die Strukturierungsstrategien der Lernenden bei Kombinationen mit Wiederholung mittels folgender Bausteine beschreiben:

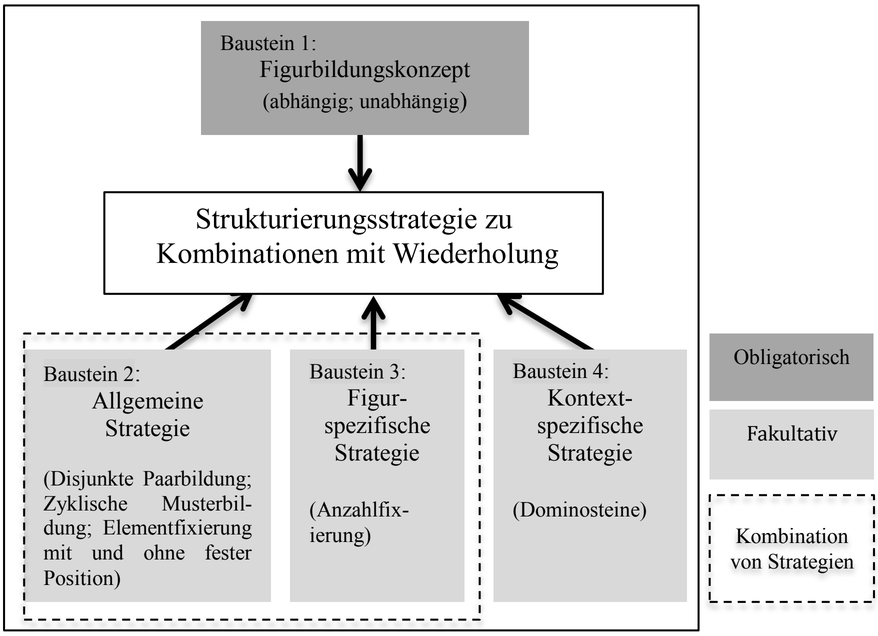
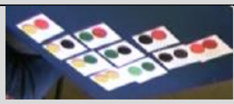


Abb. 7.13 Strategiebausteine zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien bei Kombinationen mit Wiederholung

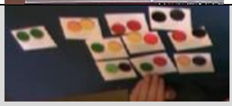
Da bei der Lösung der Kombinationen mehr Strategiebausteine rekonstruiert wurden, ergibt sich auch eine größere Anzahl verschiedener möglicher Strukturierungsstrategien. So entstehen auf der Grundlage zweier verschiedener Figurenbildungskonzepte und durch die alleinige Anwendung einer der allgemeinen Strategien bereits acht mögliche Strukturierungsstrategien. Für die alleinige Anwendung einer figurspezifischen Strategie ergeben sich zwei weitere Möglichkeiten, durch die Kombination der Strategien weitere acht Strukturierungsstrategien sowie zwei Strategien, die sich konkret auf den Kontext der Dominosteinaufgabe beziehen. Nicht eindeutig zu unterscheiden ist dabei zwischen der alleinigen Anwendung der «Zyklischen Musterbildung» und der Kombination aus «Zyklischer Musterbildung» und «Anzahlfixierung». Insgesamt ergeben sich somit für diese kombinatorische Figur 19 mögliche Kombinationen aus verschiedenen Strategiebausteinen zur Rekonstruktion der Strukturierungsstrategien der Lernenden, von denen zwei sich konkret auf den Kontext der Dominosteinaufgabe beziehen.

Von diesen genannten möglichen Strukturierungsstrategien wurden 16 rekonstruiert. Nicht verwendet wurden, basierend auf einem unabhängigen Figurenbildungskonzept, die Strategien «disjunkte Paarbildung», «Elementfixierung ohne feste Position» und die kontextspezifische Strategie «Dominosteine». Für eine Übersicht über alle möglichen sowie die verwendeten Strukturierungsstrategien sei an dieser Stelle, ebenso, wie bei den Kombinationen ohne Wiederholung auf den Anhang (vgl. Anhang A & B) verwiesen. Die sechs im Rahmen dieser Untersuchung am häufigsten verwendeten Strukturierungsstrategien sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen. Neben einer Auflistung der Strategien ist in der Tabelle auch aufgeführt, welche der Strategien die einzelnen Kriterien zur Klasseneinteilung erfüllen. Ebenso wie bei den Kombinationen ohne Wiederholung werden diejenigen Strukturierungsstrategien, die die Figurenmenge vollzählig erstellen, grau hervorgehoben.

Strukturierungs-strategie[25]	**Beispiel**	**Erfüllung der Kriterien** 1.Vollständigkeit der Klassen 2.Vollständigeit der Objekte in einer Klasse 3. Disjunktheit
«Elementfixierung mit fester Position» & «Anzahlfixie-rung»[26]		1 & 2 «Elementfixierung» & «Anzahlfixierung» 3. «abhängige Figurenbildung»
«Elementfixierung mit fester Position»		1. & 2: «Elementfixierung» 3. «abhängige Figurenbildung»
«Disjunkte Paarbil-dung» & «Anzahl-fixierung»	*r-s, gr-g,* *s-gr, r-g* *gr-r,* *s-s, g-g, r-r, gr-gr*	1. «Disjunkte Paarbildung» 2. «Anzahlfixierung» 3. «abhängige Figurenbildung»

[25] Zu berücksichtigen ist, dass zur Benennung der Strukturierungsstrategien darauf verzichtet wurde, die «abhängige Figurenbildung» als Baustein zu benennen, um eine bessere Übersichtlichkeit zu gewährleisten. Strategien, bei denen nicht explizit eine unabhängige Figurenbildung benannt wird, beruhen entsprechend alle auf einem abhängigen Figurenbildungskonzept.

[26] In der dritten Spalte wird dazu jeweils aufgelistet, durch welchen Strategiebaustein das jeweilige Kriterium erfüllt ist. Ist sichergestellt, dass alle Kriterien durch die jeweilige Strukturierungsstrategie erfüllt werden, so ist daraus zu folgern, dass bei konsequenter Anwendung der Strukturierungsstrategie die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt bzw. strukturiert wird. Diejenigen Strukturierungsstrategien, welche die Figurenmenge nicht zwangsläufig vollzählig erstellen oder zu viele Figuren erstellen, werden grau hervorgehoben.

«Anzahlfixierung»	g-b, s-b, r-g, g-s, r-s, r-b, b-b, r-r, s-s, g-g	1. «Anzahlfixierung» 2. --------- 3. «abhängige Figurenbildung»
«Elementfixierung mit fester Position» & «unabhängige Figurenbildung»		1.& 2. «Elementfixierung » 3. ---------
«Zyklische Musterbildung» &« Anzahlfixierung»		1 & 2.. «Zyklische Musterbildung» & «Anzahlfixierung» 3. «abhängige Figurenbildung»

Tab. 7.22 Hauptstrategien bei Kombinationen mit Wiederholung

Insgesamt ist festzuhalten, dass Lernende, wenn sie den Lösungsprozess konsequent strukturierten oder anschließend eine Strukturierung der Figurenmenge vornahmen, die «Elementfixierung» als häufigste Strukturierungsstrategie wählten. Dies gilt insbesondere für die räumliche Strukturierung der Lösungen. Zentral ist, dass in einigen Fällen eine unabhängige Figurenbildung erfolgte, so dass Objekte systematisch doppelt erstellt wurden. Die «disjunkte Paarbildung» wurde am zweithäufigsten verwendet, allerdings vorrangig zur Erstellung der Lösungen. Auffällig ist zudem, dass in der Hälfte der Hauptstrategien die figurspezifische Strategie der «Anzahlfixierung» verwendet wurde. Die alleinige Verwendung der Strategie stellte sogar die am dritthäufigsten verwendete Hauptstrategie bei den Kombinationen mit Wiederholung dar. Insofern zeigt sich, dass die Eigenschaften der zu erstellenden Figuren bei den Kombinationen mit Wiederholung eine zentrale Rolle spielen.
Vier der dargestellten sechs Hauptstrategien erzeugen die Figurenmenge vollzählig, wenn sie durchgängig verwendet werden. Die alleinige Anwendung der Strukturierungsstrategie der «Anzahlfixierung» stellt dies nicht sicher.

7.3.3 Variationen ohne Wiederholung

Abschließend erfolgt eine Betrachtung der Hauptstrategien zu den Variationen ohne Wiederholung. Die rekonstruierten Strategien der Lernenden beruhen ebenso wie bei den Kombinationen mit Wiederholung auf dem Figurenbildungskonzept der Lernenden sowie der alleinigen Anwendung von allgemeinen oder strukturspezifischen Bausteinen oder aus der Kombination verschiedener Bausteine. Dabei unterscheiden sich jedoch die figurspezifischen Strategien.

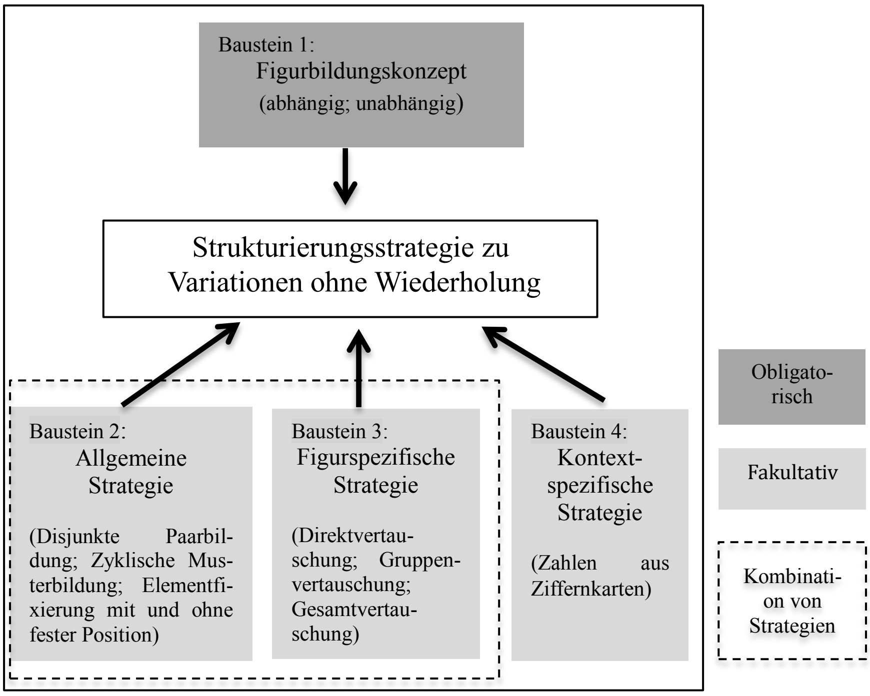
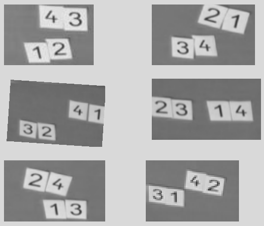


Abb. 7.14 Strategiebausteine zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien bei Variationen ohne Wiederholung

Basierend auf zwei verschiedenen Figurenbildungskonzepten und durch die alleinige Anwendung einer allgemeinen Strategie ergeben sich ebenso wie bei den anderen beiden Figuren acht mögliche Strukturierungsstrategien. Da bei den Variationen drei verschiedene figurspezifische Strategien identifiziert wurden, ergeben sich für deren alleinige Anwendung sechs, sowie durch die Kombination der Strategien weitere zwölf Strukturierungsstrategien. Durch den Einbezug des Kontextes bei der Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten" entstehen zwei weitere Möglichkeiten. Insgesamt sind somit für diese kombinatorische Figur 28 mögliche Strukturierungsstrategien vorhanden, von denen 20 identifiziert wurden. Ein unabhängiges Figurenbildungskonzept trat nicht in Kombination mit der «Disjunkten Paarbildung» und der «Zyklischen Musterbildung» sowie der «Gruppenvertauschung», der «Gesamtvertauschung» und der kontextspezifischen Strategie auf. Die «Zyklische Musterbildung» wurde mit keiner figurspezifischen Strategie kombiniert. Dem Anhang ist eine Übersicht über alle auf den Bausteinen basierenden möglichen sowie den tatsächlich verwendeten Strategien zu entnehmen (vgl. Anhang A & B). Insgesamt ergeben sich aus den Strategiebausteinen und beschriebenen Besonderheiten der Variationen ohne Wiederholung die in der Tabelle dargestellten Hauptstrategien. Die Tabelle beinhaltet neben der Auflistung der Strategien ebenso, wie bei den Kombinationen ohne und mit Wiederholung Informationen darüber, in welchem Maße die Kriterien zur Klasseneinteilung erfüllt sind. Diejenigen Strukturierungsstrategien, die die Figurenmenge vollzählig erstellen, sind grau hervorgehoben.

Strukturierungs-strategie	**Beispiel**	**Erfüllung der Kriterien** 1. Vollständigkeit der Klassen 2. Vollständigeit der Objekte in einer Klasse 3. Disjunktheit
«Elementfixierung mit fester Position» & «Einzelvertau-schung»		1. «Elementfixierung» 2. «Elementfixierung» & «Einzel-vertauschung» 3. «abhängige Figurenbildung»
«Elementfixierung ohne feste Position» & «Gruppenvertau-schung»		1. & 2. «Elementfixierung» & «Gruppenvertauschung» 3. «abhängige Figurenbildung»
«Einzelvertau-schung»		1.----- 2. «Einzelvertauschung» 3. «abhängige Figurenbildung»
«Elementfixierung mit fester Position» & «Gesamtvertau-schung»	12 13 14 23 24 34 21 31 41 32 42 43	1. «Elementfixierung» 2. «Gesamtvertauschung» 3. «abhängige Figurenbildung»

«Disjunkte Paarbildung» & «Gruppenvertauschung»		1. & 2. «Disjunkte Paarbildung» & «Gruppenvertauschung» 3. «abhängige Figurenbildung»
«Disjunkte Paarbildung» & «Einzelvertauschung» & «unabhängige Figurenbildung»		1. «Elementfixierung» 2. «Elementfixierung»& 3.«unabhängige Figurenbildung»

Tab. 7.23 Hauptstrategien bei Variationen mit Wiederholung

Eine übergreifende Betrachtung der am häufigsten verwendeten Strategien zeigt für die Variationen ohne Wiederholung besonders die klare Dominanz von Strukturierungsstrategien, die die «Elementfixierung» als Baustein beinhalten. Zudem zeigt sich die große Bedeutung der Vertauschung der Reihenfolge der Elemente im Objekt. So wird insgesamt von keinem Lernenden zur Lösungsfindung die «Elementfixierung» ohne eine weitere Strategie verwendet. Erst im Rahmen der Überprüfung der Lösungen oder zur Begründung der Vollständigkeit verwenden einige Lernende, wie beispielsweise Sarah, die «Elementfixierung mit fester Position». Auffällig ist, dass auch hier vier der sechs Strukturierungsstrategien eine vollständige Erstellung der Figurenmenge zulassen. Ebenso wie bei der Kombinationen mit Wiederholung führt auch bei dieser Figur eine alleinige Anwendung einer figurspezifischen Strategie in Kombination mit dem abhängigen Figurenbildungskonzept nicht zu einer vollständigen Strukturierung.

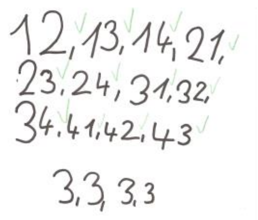


Abb. 7.15 Sarahs Strategie «Elementfixierung mit fester Position» bei Variationen ohne Wiederholung

7.3.4 Fazit

In diesem Abschnitt wurde aufgezeigt, welche Strukturierungsstrategien sich in Abhängigkeit von den jeweiligen Figuren und Kontexten aus den verwendeten Strategiebausteinen potentiell ergeben und welche von den Lernenden im Rahmen dieser Untersuchung tatsächlich angewendet wurden. Auffällig ist die geringe Anzahl verschiedener Strukturierungsstrategien bei Kombinationen ohne

Wiederholung im Vergleich zu den anderen Figuren. Diese Differenz beruht auf den für die anderen Figuren identifizierten zusätzlich verwendeten figurspezifischen Strategien sowie den Mischformen aus allgemeinen und figurspezifischen Strategien. Insgesamt zeigt sich, dass bei den Kombinationen ohne und mit Wiederholung fast alle potentiell möglichen Strukturierungsstrategien auch verwendet wurden. Bei den Variationen, bei denen es basierend auf den herausgearbeiteten Strategiebausteinen die größte Anzahl verschiedener möglicher Strategien gab, wurden zwei Drittel der möglichen Strategien verwendet.
Ausgehend von einer allgemeinen Betrachtung möglicher und verwendeter Strukturierungsstrategien wurden in Abhängigkeit von den drei kombinatorischen Figuren, die sechs jeweils hauptsächlich verwendeten Strukturierungsstrategien dargestellt und in Hinblick auf das Potential die gesuchte Figurenmenge vollzählig zu erstellen, überprüft. Besonders hervorzuheben ist, dass bei jeder der kombinatorischen Figuren vier der sechs Hauptstrategien, die Figurenmenge vollständig erzeugen, wenn die Strategie konsequent angewendet wird (vgl. graue Hervorhebung Tab. 7.24).

	Kombinationen ohne Wiederholung	Kombinationen mit Wiederholung	Variationen ohne Wiederholung
1.	*«Elementfixierung» (ohne feste Position)*	*«Elementfixierung» (mit fester Position)*&«Anzahlfixierung»	*«Elementfixierung» (mit fester Position)*&«Einzelvertauschung»
2.	*«Elementfixierung»* & «unabhängige Figurenbildung»	*«Elementfixierung» (mit fester Position)*	*«Elementfixierung»* (ohne feste Position) & «Gruppenvertauschung»
3.	*«Elementfixierung» (mit fester Position)*	«Disjunkte Paarbildung» &«Anzahlfixierung»	«Einzelvertauschung»
4.	*«Disjunkte Paarbildung»*	«Anzahlfixierung»	*«Elementfixierung» (mit fester Position)"* und «Gesamtvertauschung»
5.	*«Zyklische Musterbildung»*	*«Elementfixierung»* & «unabhängige Figurenbildung»	*«Disjunkte Paarbildung»* & «Gruppenvertauschung»
6.	*«Zyklische Musterbildung»* & «unabhängige Figurenbildung»	*«Zyklische Musterbildung»* & «Anzahlfixierung»	*«Elementfixierung» (mit fester Position)* & «Einzelvertauschung» & «unabhängige Figurenbildung»

Tab. 7.24 Hauptstrukturierungsstrategien in Abhängigkeit von den verschiedenen kombinatorischen Figuren

Die Tabelle gibt einen Überblick über die verschiedenen verwendeten Hauptstrategien zu den einzelnen Figuren. Deutlich wird die figurunabhängige Dominanz von Strategien, in denen die «Elementfixierung» als allgemeiner Strategiebaustein enthalten ist. Diese Strukturierungsstrategie trat insbesondere bei den Umstrukturierungen und Überprüfungshandlungen der Lernenden auf, war jedoch in vielen Fällen auch schon bei der Erstellung der Figurenmenge zu beobachten. Neben dieser Dominanz wurde zudem festgestellt, dass die Anwendung figurspezifischer Strategien bei den Kombinationen mit und den Variationen ohne Wiederholung von zentraler Bedeutung ist. In vier der sechs Hauptstrategien bei Kombinationen mit Wiederholung sowie in allen Hauptstrategien bei Variationen ohne Wiederholung sind figurspezifische Strategien enthalten. Diese starke Berücksichtigung ist insofern bedeutsam, als bei einer Strukturierung im Sinne des Baumdiagramms die Eigenschaften der Figuren keine Bedeutung spielen und diese sich insofern von den Vorgehensweisen der Lernenden abgrenzt. Diesbezüglich stimmen die Ergebnisse mit einigen vorliegenden Befunden überein. So benennen sowohl Hoffmann (2003) als auch Lack (2009) die häufige Verwendung des «Tachometerprinzips», welches der «Elementfixierung mit fester Position» entspricht. Zudem nennen sie die «Gegenpaarbildung», welche sich auf die Vertauschung der Anordnung von Elementen in den Objekten bezieht.

7.4 Zusammenfassung

Ausgangspunkt der Ausführungen dieses Kapitels war die folgende Fragestellung:

Forschungsfrage 4
Welche Strukturierungsstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen?

Diese lässt sich aufgrund der Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung wie folgt zusammenfassend beantworten: Lernende verwenden, basierend auf unterschiedlichen Figurenbildungskonzepten, zur Strukturierung des Lösungsprozesses oder zur Strukturierung der Figurenmenge verschiedene Strukturierungsstrategien, die sich aus allgemeinen und figurspezifischen Strategien rekonstruieren lassen. In seltenen Fällen verwenden Lernende auch kontextspezifische Strukturierungsstrategien.

Insgesamt wurden drei *allgemeine Strategien* rekonstruiert: die «Disjunkte Paarbildung», die «Zyklische Musterbildung» und die «Elementfixierung» in zwei Varianten. Die beschriebenen Strategien treten dabei keineswegs nur im Rahmen dieser Untersuchung auf, sondern wurden auch bereits, wie in den einzelnen Abschnitten dargestellt, bei der Lösung verschiedener Auflistungsprobleme beschrieben (vgl. u.a Piaget & Inhelder 1975; English 1993b; Hoffmann 2003). Bei der Strukturierung von Figuren zu Kombinationen mit Wiederholung und Variationen ohne Wiederholung wurden zudem *figurspezifische Strategien* eingesetzt. Diese beziehen sich bei den Kombinationen mit Wiederholung auf den Umgang mit Wiederholungen in den Objekten, bei den Variationen ohne Wiederholung auf den Umgang mit der Vertauschung der Reihenfolge. In den Befunden vorangegangener Studien lassen sich auch bezüglich der figurspezifischen Strategien Gemeinsamkeiten identifizieren, die nahelegen, dass diese auch über diese Studie hinaus eine zentrale Rolle spielen. Zusätzlich wurde für die Aufgaben Dominosteine und Zahlen aus Ziffernkarten jeweils eine *kontextspezifische Strategie* identifiziert (vgl. 4.2).

Die Strukturierungsstrategien der Lernenden bestehen aus der alleinigen Anwendung dieser Strategien oder aus verschiedenen Kombinationen. Insgesamt wurden für die Kombinationen mit Wiederholung acht, für die Kombinationen ohne Wiederholung 16 sowie für die Variationen ohne Wiederholung 20 verschiedene Strukturierungsstrategien herausgearbeitet (zur Übersicht vgl. Anhang). Die Betrachtung der hauptsächlich von den Lernenden verwendeten Strukturierungsstrategien zeigt über alle Figuren hinweg eine Dominanz von Strukturierungen, in denen ein Baustein die allgemeine Strategie «Elementfixierung» war. Zudem wird bei Kombinationen ohne Wiederholung und bei Variationen ohne Wiederholung in fast allen Fällen auch auf eine figurspezifische Strategie zurückgegriffen. Eine genauere Analyse, in welchem Maße die hauptsächlich verwendeten Strategien die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellen, zeigt zudem, dass die Vollzähligkeit bei einer konsequenten Anwendung für jeweils vier der sechs dargestellten Hauptstrategien zu den einzelnen Figuren gegeben ist. Bei den anderen Strategien ist entweder die Vollzähligkeit durch die alleinige Verwendung einer figurspezifischen Strategie nicht sichergestellt oder es werden aufgrund eines unabhängigen Figurenbildungskonzeptes systematisch zu viele Figuren erstellt. Die Gegenüberstellung zu fachlichen Konzepten offenbart, dass Lernende verschiedene sinnvolle Strukturierungen zur Anzahlbestimmung verwenden. Diese entsprechen jedoch in vielen Fällen nicht der klassischen Strukturierung in Form eines Stufenablaufs (der «Elementfixierung mit fester Position»). Die dargestellten Gemeinsamkeiten zu den Befunden vorheriger Studien sind Belege dafür, dass die genannten Strategien auch in anderen Kontexten und zu Teilen bei anderen Figuren verwendet werden.

–

8 Zählstrategien

Ich vermute 12. Hm. Weil jeder spielt ja einmal gegen jeden und dann hab ich einfach gerechnet: Wie viel (...) zum Beispiel jetzt hab ich einfach 3 plus noch mal 3 plus noch mal 3. Also 4-mal plus 3"

Anne (KGSD, K. o. Wh., Fußball)

Anne ermittelt die Anzahl aller Fußballspiele auf einem Fußballturnier mit vier Mannschaften rechnerisch. Ein solches Vorgehen ist unter propädeutischen Gesichtspunkten von zentraler Bedeutung. „Der Kern des kombinatorischen Zählens", so Wittmann und Müller (1984, S. 219), ist „die Anwendung ökonomischer Zählstrategien anstelle eines mühsamen und unübersichtlichen Stück-für-Stück Zählens." Im Rahmen der Untersuchung zeigte sich, dass einige Lernende – wie beispielsweise Anne – ebenfalls bereits Wege suchen, um die Anzahl aller Möglichkeiten nicht einzeln auflisten und abzählen zu müssen. Da es hinsichtlich der Verwendung von Zählstrategien zur Anzahlbestimmung bei kombinatorischen Problemstellungen bislang kaum Studien gibt und insbesondere für die Primarstufe wenig empirische Informationen vorliegen, es jedoch Hinweise auf deren Verwendung gibt (vgl. 2.5), zielt dieses Kapitel auf die Beantwortung folgender Fragestellung:

Forschungsfrage 4
Welche Zählstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Anzahlbestimmung?

Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass Lernende der dritten Klasse bereits operationale Strategien zur Anzahlbestimmung verwenden. Im Rahmen der Untersuchung nutzten die Lernenden additive und multiplikative Strategien sowie in einigen Fällen Kompensationsstrategien, wenn sie vorab systematisch zu viele Lösungen ermittelten. Neben den operationalen Strategien ermittelten die Lernenden die gesuchte Anzahl bei zueinander analogen Problemstellungen auch über rekursive Strategien. Ein geringer Teil der Lernenden ermittelte dabei, wie in Abschnitt 5.1 herausgearbeitet, direkt die Anzahl aller Möglichkeiten mittels einer Zählstrategie. Die meisten Lernenden leiteten diese aus der vorherigen Strukturierung der Figuren ab. Zudem wurde die Anzahl von einigen Lernenden indirekt ermittelt und über die Isormorphie zu der bereits gelösten Problemstellung begründet. Anzumerken ist, dass die große Anzahl verschiedener von den Lernenden verwendeter Zählstrategien bei der Konzeption der Studie nicht angenommen wurde. Aufgrund der Vielzahl der Strategien wird daher im Folgenden keine genauere Analyse der indirekten Zählstrategien der Lernenden vorgenommen.

Nachfolgend werden zunächst die operationalen Strategien der Lernenden in den Blick genommen (8.1 bis 8.3) und daran anknüpfend die rekursiven Strategien zur Lösung der Erweiterungen der Aufgabenstellungen (8.4). Abschließend erfolgt in Abschnitt 8.5 ausgehend von den dargestellten Erkenntnissen eine Zusammenfassung der Ergebnisse im Hinblick auf die Forschungsfrage.

Innerhalb der einzelnen Abschnitte werden dabei, analog dem Vorgehen im Kapitel zu den Strukturierungsstrategien der Lernenden, zunächst die Strategien der Lernenden analysiert. Daran anknüpfend werden Bezüge zwischen den Strategien der Lernenden und den fachlichen Strategien hergestellt und abschließend ein Rückbezug zu den bereits aus der Literatur vorliegenden Erkenntnissen hinsichtlich der dargestellten Strategien gezogen.
Zu berücksichtigen ist dabei, dass es bei indirekten Anzahlbestimmungen grundsätzlich möglich ist, die Figurenmenge zunächst zu erstellen und diese unabhängig von der vorherigen Strukturierung oder einer Strukturierung, welche die Vollzähligkeit belegt, so zu strukturieren, dass das Abzählen der gesamten Figurenmenge vereinfacht wird. Eine solche Anzahlbestimmung wurde im Rahmen dieser Untersuchung von einigen Lernenden vorgenommen. Diese zählten entweder die Figuren in Zweierschritten, oder nahmen eine flächenförmige rechteckige Anordnung der erstellten Figuren vor, so dass sie die Anzahl aller Lösungen über die wiederholte Addition oder eine Multiplikation ermittelten.

Transkr. 8.1 Marys additive Rechnung (GSSTB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

Zur Situation: Mary erhält den Auftrag, die Anzahl aller möglichen zweistelligen Zahlen aus den vier Ziffernkarten 1, 2, 3 und 4 zu ermitteln. Sie erstellt sukzessive Lösungen und ordnet diese wie folgt unter- und nebeneinander an:

12	21	24	23
14	41	42	43
13	31	32	34

M.: UND (...) [*schweigt, schaut sich ihre Lösungen an*] dann bin ich fertig.
I.: Mhm, wie viele hast du denn gefunden insgesamt?
M.:[*zählt mit dem Finger die Lösungen ab*]
I.: Stopp, muss man die einzeln zählen?
M.: Nein
I.: Oder geht das auch anders? Aha, sondern?
M.: Man kann auch DIE. drei und dann plus drei und dann plus drei und dann plus drei.
I.: Mhm, schreibs mal auf [*schiebt ihr das Aufgabenblatt etwas näher*] und dann sag mir mal das Ergebnis.
M.: Drei plus drei. DREI *[schreibt eine 3 auf den Aufgabenzettel]* plus drei *[schreibt +3]* plus drei *[schreibt +3]* plus drei *[schreibt +3]* gleich (...) *[schweigt und schaut auf den Aufgabenzettel, wobei ihr der Deckel vom Stift runterfällt]*.

$3+3+3+3=12$

Zählstrategien, die denen von Mary entsprechen, sind vollkommen unabhängig von den vorgenommenen Strukturierungen und eignen sich insofern auch nicht, um auf ihrer Basis allgemeine Zählstrategien abzuleiten. Eine Kenntnis darüber, dass Lernende von den Strukturierungen unabhängige Zählstrategien entwickeln, ist unter propädeutischen Gesichtspunkten zentral, eine genauere Betrachtung dieser Strategien jedoch nicht notwendig. Insofern werden sie in den folgenden Ausführungen nicht weiter berücksichtigt.

8.1 Additive Anzahlbestimmung

Hinsichtlich der additiven Anzahlbestimmung von Lernenden ist von zentraler Bedeutung, dass diese bei einer kombinatorischen Figur verschiedene und nicht etwa alle die gleiche additive Rechnung zur Anzahlbestimmung verwenden. Insofern ist zwischen verschiedenen additiven Strategien zu unterscheiden. Dies gilt sowohl für direkte als auch für indirekte Anzahlbestimmungsstrategien. Lockwood (2011, 2012) zeigt in ihrem Modell die enge Beziehung zwischen den rechnerischen Strategien von Lernenden, den möglichen Anzahlbestimmungsprozessen und der gesuchten Figurenmenge auf. Ausgehend von diesem Modell und anknüpfend an die in Kapitel 5 dargestellten Erkenntnisse zur Rolle von Strukturierungen, lassen sich die additiven Strategien der Lernenden durch den Rückgriff auf die Figurenbildungskonzepte und die in Kapitel 7 herausgearbeiteten Strategiebausteine beschreiben und klassifizieren.

Im Rahmen dieser Untersuchung werden zwei Klassen additiver Strategien unterschieden: die *allgemeinen* und die *figurspezifischen additiven Strategien*. Diese Unterscheidung beruht auf den Fokussierungen der Lernenden. Einige Lernende berücksichtigen insbesondere die verwendete allgemeine Strukturierung bei ihrer Zählstrategie, andere insbesondere Strukturierungen, die sich auf figurspezifische Eigenschaften beziehen. Grundsätzlich wäre es auch möglich, ebenso wie bei den Strukturierungsstrategien, zwischen allgemeinen, figurspezifischen und kontextspezifischen Strategien sowie Mischformen dieser Strategien zu unterscheiden. Da jedoch im Rahmen dieser Studie keine auf dem Kontext beruhenden additiven Strategien zu beobachten waren, wird diese Klasse nicht benannt. Ebenso wird keine zusätzliche Unterscheidung in Mischformen aus allgemeinen und figurspezifischen Strategien vorgenommen, da sich zeigt, dass die vorgenommenen additiven Zählstrategien in der Regel auf der Fokussierung eines der beiden Aspekte beruhen. Insofern erscheint eine zusätzliche Unterscheidung für diese Studie nicht angemessen, ist jedoch grundsätzlich denkbar. Die beiden additiven Strategieklassen lassen sich demnach folgendermaßen voneinander abgrenzen:

Allgemeine und figurspezifische additive Strategien

Unter *allgemeinen additiven Strategien* werden im Rahmen dieser Untersuchung diejenigen Strategien zusammengefasst, die aus einer Fokussierung auf eine allgemeine Strukturierung entstehen.
Die Klasse der *figurspezifischen additiven Strategien* impliziert diejenigen Strategien, welchen eine Fokussierung auf figurspezifische Besonderheiten unterliegt.

Im Folgenden werden zunächst die allgemeinen additiven Strategien der Lernenden in den Blick genommen. Dabei wird exemplarisch für die Kombinationen ohne Wiederholung aufgezeigt, inwieweit diese Strategien sich hinsichtlich der Figurenbildungskonzepte unterscheiden. Anschließend werden die figurspezifischen Strukturierungsstrategien betrachtet, bevor im Fazit ein Resümee zur Anwendung additiver Zählstrategien gezogen wird.

8.1.1 Allgemeine additive Strategien

Insgesamt lassen sich zwei allgemeine additive Strategien unterscheiden, die bei allen drei kombinatorischen Figuren verwendet wurden. Zudem wurde eine allgemeine additive Strategie rekonstruiert, die im Rahmen dieser Untersuchung nur bei den Variationen ohne Wiederholung identifiziert wurde, jedoch ebenfalls auf einer allgemeinen Strukturierungsstrategie basiert. Durch die Gegenüberstellung der Vorgehens- und Denkweisen von Malin und Anne werden zunächst die Ursachen für die Unterschiede in den additiven Rechnungen, die bei allen Figuren verwendet wurden, herausgearbeitet.

1. «Aufeinanderfolgende Zahlen addieren»
2. «Figuren mit einem festen Element addieren»
3. «Figuren mit einem festen Element an einer festen Position addieren»

Abb. 8.1 Allgemeine additive Strategien

8.1.1.1 *Kontrastierender Vergleich der Vorgehens- und Denkweisen von Malin und Anne*

Grundsätzlich setzen rechnerische Anzahlbestimmungen voraus, dass die Aufgabe gedanklich strukturiert und in ein Modell übersetzt wird, das eine rechnerische Lösung zulässt (vgl. Wittmann & Müller 1984, S. 219; Hefendehl-Hebeker & Törner 1984). Dies kann sowohl bewusst als auch unbewusst, also intuitiv geschehen (vgl. Fischbein 1975; Fischbein & Gazit 1988). Malin und Anne haben die gesuchte Anzahl direkt rechnend bestimmt, ihre Äußerungen und Notationen geben Hinweise auf ihre, den Rechnungen zugrunde liegenden Überlegungen bezüglich der Strukturierung:

Transkr. 8.2 Malins additives Vorgehen (KGSD, K. o. Wh., Fußball)

Zur Situation: Malin erhält den Auftrag herauszufinden, wie viele verschiedene Fußballspiele es auf einem Fußballturnier mit vier Mannschaften gibt, wenn jede genau einmal gegen jede andere spielen soll.

M.:	Ich kann aber nur im Kopf rechnen
I.:	Dann machst du es im Kopf, das ist in Ordnung. Aber es wäre schön, wenn du deine Lösung dann gleich auf das Blatt schreibst.
M.:	*Schaut auf die Spielfiguren und schweigt ca. 1 min]*. 6 Spiele.
I.:	Aha, wie hast du das gemacht?
M.:	Ich hab einfach bei [Mannschaft] blau angefangen und die zusammengerechnet. *[zeigt nacheinander auf die Spielfiguren grün, rot, gelb]*. Immer so. Dann wusste ich blau brauchen wir nicht mehr. Fangen wir bei gelb an: Erstes Spiel *[zeigt auf grün]* zweites Spiel *[zeigt auf rot]* und dann von grün geht ja nur noch rot *[zeigt auf rot]*. 3 plus 2 plus 1, sind 6.

Auf die Bitte der Interviewerin notiert M anschließend ihre Lösungen:

Analyse des Vorgehens

Malin begründet die von ihr ermittelte Anzahl sowie ihre Rechnung „3 plus 2 plus 1, sind 6“ durch eine strukturierte Darstellung der Lösungen. Ihrer Äußerung und ihrer Notation ist zu entnehmen, dass sie zunächst die Anzahl der Spiele, an denen Mannschaft blau beteiligt ist, ermittelt: *„Ich hab einfach bei [Mannschaft] blau angefangen und die zusammengerechnet…Immer so.“* Daraus lässt sich ableiten, dass sie eine Strukturierung mittels der «Elementfixierung mit fester Position» vorgenommen hat. Die Aussage *„Dann wusste ich blau brauchen wir nicht mehr. Fangen wir bei gelb an: Erstes Spiel [zeigt auf grün] zweites Spiel [zeigt auf rot] und dann von grün geht ja nur noch rot [zeigt auf rot]. 3 plus 2 plus 1, sind 6.“* lässt auf eine weitere Überlegung schließen: Es gibt keine weiteren Spiele, an denen Mannschaft blau beteiligt ist. Der erste Summand „drei“ entspricht demnach der Anzahl der Spiele von Mannschaft blau. Malin sucht anschließend die Spiele ohne Beteiligung der Mannschaft blau. Sie überlegt, an wie vielen Spielen bzw. welchen Spielen Mannschaft gelb in Abhängigkeit von dieser Bedingung (Spiele ohne Mannschaft blau) beteiligt ist und ermittelt unter dieser Bedingung zwei Spiele, diese entsprechen dem zweiten Summanden. Dieses Vorgehen setzt sie fort, bis keine weiteren Spielen mehr in Abhängigkeit von den bereits ermittelten gebildet werden können. Malins Strukturierungsstrategie lässt sich demzufolge als Kombination aus der «Elementfixierung mit fester Position» und der «abhängigen Figurenbildungsstrategie» beschreiben. Ihre additive Rechnung besteht aus der Aufsummierung der Spiele aller Mannschaften, bei der sie berücksichtigt, welche Spiele bereits gezählt wurden.

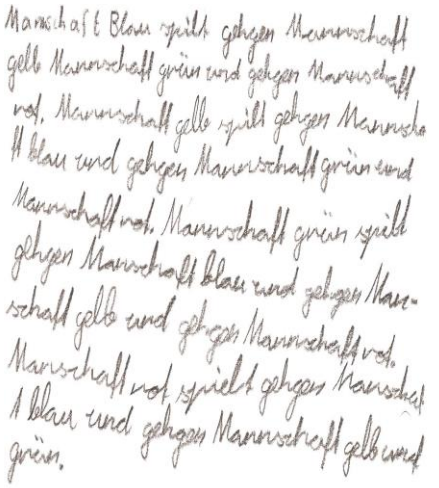
Anne stellt zu derselben Problemstellung eine andere Rechnung auf:

Transkr. 8.3 Annes additives Vorgehen (KGSD, K. o. Wh., Fußball)

Zur Situation: Anne erhält den Auftrag herauszufinden, wie viele verschiedene Fußballspiele es auf einem Fußballturnier mit vier Mannschaften gibt, wenn jede genau einmal gegen jede andere spielen soll.

A.: *[betrachtet die Figuren ca. 25 Sekunden]*. Hm. Ich vermute 12. Weil jeder spielt ja einmal gegen jeden und dann hab ich einfach gerechnet: Wie viel (…) zum Beispiel jetzt hab ich einfach 3 plus noch mal 3 plus noch mal 3 - Also viermal plus 3.

Auf die Bitte der Interviewerin notiert Anne alle Spielpaarungen:


Manschaft Blau spilt gehgen Mannschaft
gelb Mannschaft grün und gehgen Mannschaft
rot. Mannschaft gelb spilt gehgen Mannscha
ft blau und gehgen Mannschaft grün und
Mannschaft rot. Mannschaft grün spilt
gehgen Mannschaft blau und gehgen Mann-
schaft gelb und gehgen Mannschaft rot.
Manschaft rot spielt gehgen Mannschaf
t blau und gehgen Mannschaft gelb und
grün.

Analyse des Vorgehens

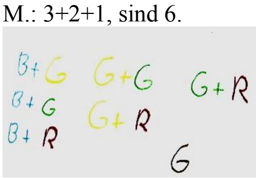
Anne erklärt die von ihr ermittelte Anzahl 12 über folgende Rechnung *„zum Beispiel jetzt hab ich einfach 3 plus noch mal 3 plus noch mal 3 - Also viermal plus 3".* Anschließend notiert sie, der Bitte der Interviewerin folgend, alle möglichen Spiele. Dabei geht sie systematisch vor, indem sie der Reihe nach die Spiele von Mannschaft blau, gelb, grün und rot notiert.

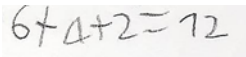
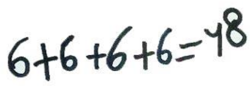
Die Spiele einer Mannschaft lassen sich entsprechend als Gruppe bzw. Klasse von Spielen auffassen. Jede der Gruppen enthält die gleiche Anzahl an Spielen, jeweils drei. Auf Grundlage ihrer Äußerungen und ihrer Notation ist anzunehmen, dass die einzelnen Summanden („*3 plus noch mal 3 plus noch mal 3 - Also viermal plus 3*") die Anzahl der Spiele der einzelnen Mannschaften darstellen sollen. Die der Rechnung zugrunde liegende Strukturierung entspricht ebenfalls der «Elementfixierung mit fester Position». Daraus wird gefolgert, dass sie die Anzahl aller Spiele auf dem Fußballturnier ermittelt, indem sie die (drei) Spiele aller (vier) Mannschaften zusammenfasst: „*Also viermal plus 3.*" Anders als Malin berücksichtigt Anne in ihrer Rechnung damit nicht, dass sie Spiele einer Mannschaft bereits gezählt hat. Ihrer anschließenden Notation lässt sich entnehmen, dass sie Klassen von Spielen gebildet hat, die nicht disjunkt sind. Annes Strukturierungsstrategie besteht insofern aus einer Kombination der «Elementfixierung mit fester Position» und der «unabhängigen Figurenbildung».

Vergleich der Vorgehensweisen
Beiden Strategien gemeinsam ist das Bilden von Klassen: Die Summanden entsprechen der Anzahl der Figuren innerhalb einer Klasse, die Anzahl der Summanden entspricht der Anzahl der Gruppen. Sie unterscheiden sich dabei jedoch in einem wesentlichen Schritt: Malin notiert die einzelnen Spielpaarungen in Abhängigkeit von den bereits gefundenen Spielen. Sie erhält als additive Rechnung entsprechend die Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, von denen die größte der Anzahl der Spiele entspricht, die eine feste Mannschaft zu absolvieren hat. Die Summanden verringern sich anschließend im Vergleich zum Vorherigen sukzessive um 1, um die Disjunktkeit zu gewährleisten.
Anne hingegen notiert jeweils die Spiele einer Mannschaft, ohne zu berücksichtigen, dass diese ggf. bereits notiert wurden. Ihre additive Rechnung besteht aus der wiederholten Addition gleicher Summanden, welche der Anzahl der Spiele einer festen Mannschaft entsprechen. Die beiden Strukturierungen der Lernenden stimmen insofern überein, sie unterscheiden sich jedoch hinsichtlich des Figurenbildungskonzeptes. Letztgenanntes ist demnach die Ursache für die verschiedenen additiven Rechnungen.

8.1.1.2 *Verallgemeinerung*

Ein Vergleich der additiven Vorgehensweisen über die verschiedenen kombinatorischen Figuren hinweg zeigt, dass bei allen drei Figuren die beiden dargestellten allgemeinen additiven Lösungswege sowie die zugrunde liegenden Strukturierungen «Elementfixierung» in Kombination mit «abhängiger» und «unabhängiger Figurenbildung» auftreten:

	«Aufeinanderfolgende Zahlen addieren»	**«Figuren mit einem festen Element addieren»**
Kombinationen ohne Wiederholung (n=4, k=2)	M.: 3+2+1, sind 6.  *Malin, KGSD, K. o. Wh., Fußball*	*3+3+3+3* =12 A.: Ich vermute 12. Hm. Weil jeder spielt ja einmal gegen jeden und dann hab ich einfach gerechnet: Wie viel (…) zum Beispiel jetzt hab ich einfach 3 plus noch mal 3 plus noch mal 3- Also 4 mal plus 3. *Anne, KGSD, K. o. Wh., Fußball*

Kombinationen mit Wiederholung (Evi: n=5, k=2 Marc: n=4, k=2)	 *Evis Anordnung der Figuren auf dem Tisch* *1-1 2-2 3-3 4-4 5-5* *1-2 2-3 3-4 4-5* *1-3 2-4 3-5* *1-4 2-5* *1-5* *Evi, GSSTB,K. m. Wh., Dominosteine*	*4+4+4+4* =16 M.: Es gibt vier Kärtchen und dann müssen da ähm vier, plus vier, plus vier - viermal vier sind dann sechzehn und es gibt vier Kärtchen *[schaut auf den Aufgabenzettel] […]* Und mh auch vier Zahlen. [*zeigt auf den Aufgabenzettel]* Und da und man muss - und dann muss man ja aus vier Truppen machen *[zeigt auf die bisherigen Lösungen]* *Marc, GSSTB, K. m. Wh., Dominosteine*
Variationen ohne Wiederholung (n=4, k=2)	 P.: Ich habe erst alle mit den blauen, dann alle mit den grünen, dann mit den roten und den gelben. Sechs und vier und zwei sind zusammen, 12. *Phil, CGSB, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*	 *Tim, KGSD, V. o. Wh, Zahlen aus Ziffernkarten.*

Tab. 8.1 Gegenüberstellung additiver Strategien bei verschiedenen Figuren

Die Vorgehensweisen der Lernenden stehen exemplarisch für weitere strukturgleiche Rechnungen bei den einzelnen Figuren. Sie lassen sich auf der Grundlage der Analysen zu Malin und Anne und der tabellarischen Übersicht als «Figuren mit einem festen Element addieren» und «Figuren mit einem festen Element an einer festen Position addieren» charakterisieren. Verallgemeinert lässt sich die Form dieser beiden Strategien wie folgt verstehen:

	«Figuren mit einem festen Element addieren»	«Figuren mit einem festen Element an einer festen Position addieren»
Kombinationen ohne Wiederholung (n=4, k=2)	$(n-1)+\ (n-2)+\ldots+(n-(n-1))$ mit n-1Summanden	$(n-1)+\ (n-1)+\cdots+\ (n-1)$ mit n Summanden
Kombinationen mit Wiederholung (n=4, k=2)	$n+\ (n-1)+\ldots+(n-(n-1))$ mit n Summanden	$n+\ n+\cdots+\ n$ mit n Summanden
Variationen ohne Wiederholung (n=4, k=2)	$2n+\ 2(n-1)+\ldots+2\ (n-(n-1))$ mit n-1Summanden	$2n+2\,n+\cdots+\ 2n$ mit n Summanden

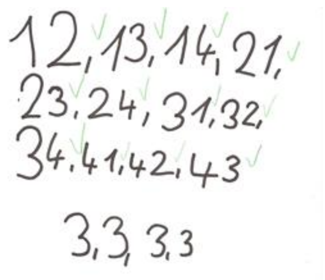
Tab. 8.2 Additive Gerüste zu allgemeinen additiven Strategien

Eine Verallgemeinerung des Aufbaus oder der Form der vorgenommenen allgemeinen additiven Strategien erweist sich als sinnvoll, da diese dazu beitragen kann, die aufgestellten Rechnungen und die gedanklich vorgenommenen Strukturierungen besser zu verstehen. Additive Rechnungen, die den oben beschriebenen Formen entsprechen, beruhen vermutlich auf den dargestellten Strukturierungen: Die Strategie «Figuren mit einem festen Element addieren» basiert voraussichtlich auf einer Strukturierung im Sinne der Elementfixierung und der abhängigen Figurenbildung, dies gilt ebenso für die Strategie «Figuren mit einem festen Element an einer festen Position addieren». Die Strategie «Figuren mit einem festen Element addieren» beruht auf der Elementfixierung und der abhängigen Figurenbildung. Ganz eindeutig kann eine solche Beziehung insofern nicht hergestellt werden, als aufgezeigt wurde, dass einige Lernende abschließend eine räumliche Strukturierung der Figurenmenge vornehmen, die in keiner Beziehung zu der vorherigen Strukturierung steht. Eine solche Rechnung kann auch zufällig den oben genannten Formen entsprechen. Um zu vermeiden, dass additive Rechnungen ohne Strukturbezug zur Lösungsfindung den genannten Strategien zugeordnet werden, erfolgte die Konkretisierung der verwendeten Summanden.

Zu der vorgenommenen Klassifizierung bedarf es einer weiteren Ausdifferenzierung. Bei den Kombinationen mit und ohne Wiederholung sind keine Unterschiede zwischen additiven Rechnungen, die auf der Elementfixierung mit oder ohne fester Position beruhen, zu identifizieren. Bei den Variationen ohne Wiederholung ist hingegen zu unterscheiden, welche der beiden möglichen Strategievarianten die Lernenden wählen. Dies wird exemplarisch an Jasminas Strukturierung und der abgeleiteten additiven Rechnung verdeutlicht:

Transkr. 8.4 Jasminas additives Vorgehen (KGSD, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

J.: Drei plus drei plus drei und noch mal plus drei, sind 12.



Jasminas additive Rechnung „Drei plus drei plus drei und noch mal plus drei, sind 12“ unterscheidet sich von den bereits dargestellten Rechnungen. Von der Form ist diese ebenfalls als Addition gleicher Summanden zu charakterisieren. Anders als die zuvor dargestellten Rechnungen dieser Form führt diese jedoch zum richtigen Ergebnis. In der vorgenommenen Addition entsprechen die Summanden nicht der Anzahl aller Figuren mit einem festen Element, sondern der Anzahl der Figuren mit einem festen Element an einer festen Position. Eine genauere Betrachtung der Strukturierung der Figurenmenge zeigt den Unterschied: Die Summanden in ihrer Rechnung stellen die Anzahl aller Figuren mit einem Element an einer festen Position dar. In den vorherigen Rechnungen entsprechen die Summanden der Anzahl aller Figuren mit einem Element. So ergibt sich, basierend auf der Elementfixierung mit fester Position und einem abhängigen Figurenbildungskonzept, eine dritte additive Strategie, die ebenfalls als Addition gleicher Summanden charakterisiert werden kann. Jedoch unterscheidet sie sich von den dargestellten Additionsstrategien dahingehend, dass sie zur richtigen Anzahl führt.

Auf dieser Basis können im Rahmen der Untersuchung folgende allgemeine additive Strategien unterschieden werden:

«Aufeinanderfolgende Zahlen addieren»	**«Figuren mit einem festen Element addieren»**	**«Figuren mit einem festen Element an einer festen Position addieren»**
Die additive Rechnung der Lernenden besteht aus einer Anzahl an Summanden, die der Anzahl aller Figuren mit einem festen	Die additive Rechnung der Lernenden besteht aus einer Anzahl an Summanden, die genau der Anzahl der Ausgangselemente	Die additive Rechnung der Lernenden besteht aus einer Anzahl an Summanden, die genau der Anzahl der Ausgangselemente

Element entspricht. Der erste Summand entspricht der Anzahl der Figuren mit einem festen Element in der Figurenmenge. Die nachfolgenden Summanden werden jeweils um einen festen Wert verringert. Dieser Wert entspricht der Anzahl aller Figuren mit zwei festen Elementen.	entspricht.	entspricht. Die einzelnen Summanden entsprechen der Anzahl der Figuren mit einen festen Element an einer festen Position.

Tab. 8.3 Verallgemeinerung der allgemeinen additiven Strategien

Neben den drei dargestellten Strategien wurden im Rahmen dieser Untersuchung keine weiteren festgestellt, die auf anderen allgemeinen Strukturierungen beruhen. Die einseitige Ableitung rechnerischer Strategien über die Strukturierung im Sinne der Elementfixierung kann unter anderem darauf zurückzuführen sein, dass einige Lernende im Rahmen der Interviews zunächst aufgefordert wurden die Vollständigkeit der erstellten Objekte zu begründen, bevor nach der ermittelten Anzahl gefragt wurde. Da, wie in Abschnitt 5.1 dargestellt, die Umstrukturierungen zugunsten der Elementfixierung erfolgten und zudem viele Lernende eigenständig eine Überprüfung mittels der Elementfixierung vornahmen, können diese Aspekte Gründe für die einseitige zugrundeliegende Strukturierung sein. Insofern bedarf es weiterer Untersuchungen, um zu überprüfen, welche weiteren additiven Strategien von Lernenden verwendet werden.

8.1.1.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Auf der Grundlage der vorangehenden Ausführungen stellt sich die Frage, in welcher Beziehung die additiven Strategien der Lernenden zu den fachlichen Zählstrategien stehen. Wie lassen sich Anzahlbestimmungsprobleme zu Kombinationen ohne und mit Wiederholung und zu Variationen ohne Wiederholung aus fachlicher Sicht additiv lösen? Welche Voraussetzungen müssen dafür erfüllt sein? Die additiven Strategien der Lernenden werden folgend in Beziehung zu dem Additionsprinzip und dem Prinzip des Ein- & Ausschaltens gesetzt.

Wie in Abschnitt 1.2.2 dargestellt, steckt hinter dem Additionsprinzip die grundsätzliche Idee, die Mächtigkeit einer Menge A zu bestimmen, indem diese zunächst *systematisch in überschaubare Klassen zerlegt* wird. Um alle möglichen Lösungen eines Problems zu ermitteln, können die *getrennten Anzahlen anschließend addiert* werden (vgl. Selter & Spiegel 2004b, S. 301). Wesentlich ist bei diesem Prinzip, dass es sich *um disjunkte* Mengen handelt. Ausgehend von den Erläuterungen Wittmanns und Müllers (1984) lassen sich die Anzahlbestimmungsprobleme entsprechend additiv lösen, indem zunächst eine Struktu-

rierung vorgenommen oder hineingedacht wird, die die gesuchte Menge in disjunkte Teilmengen zerlegt. Die disjunkten Teilmengen werden anschließend addiert.
Ein Vergleich der beiden auf verschiedenen Figurenbildungskonzepten beruhenden allgemeinen additiven Strategien zeigt Zusammenhänge und Unterschiede zur dargestellten Summenregel auf. Bei additiven Strategien denen - wie bei den Vorgehensweisen von Malin und Jasmina- ein abhängiges Figurenbildungskonzept unterliegt, wird eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen vorgenommen (für genauere Informationen zum Figurenbildungskonzept (vgl. 6.1). Diese additiven Strategien entsprechen demnach der allgemeinen Summenregel. Allgemeine, auf einem unabhängigen Figurenbildungskonzept basierende additive Strategien entsprechen nicht der allgemeinen Summenregel.
Aus mathematischer Sicht müssen die gegebenen Aufgaben jedoch nicht zwangsläufig gelöst werden, indem die Menge direkt in disjunkte Teilmengen zerlegt wird. Es ist alternativ ebenso möglich, die Aufgaben mittels des Prinzips des Ein- & Ausschaltens zu lösen. Es ermöglicht, wie in Abschnitt 1.2.2 dargestellt, die additive Anzahlbestimmung auch auf Mengen zu übertragen, deren Teilmengen nicht disjunkt sind. Zunächst werden die Anzahlen der (nicht disjunkten) Mengen addiert. Im Anschluss erfolgen die Betrachtung der Schnittmengen jeweils zweier Mengen und die Subtraktion der jeweiligen Anzahl. Insofern ergeben sich Gemeinsamkeiten zu den Vorgehensweisen der Lernenden. Im Sinne des Prinzips wäre es demnach möglich, die Anzahl der gesuchten Figurenmenge ausgehend von einem unabhängigen Figurenbildungskonzept, wie es beispielsweise Annes Vorgehen unterliegt, zu bestimmen. Dazu müssten lediglich die Schnittmengen der Spiele der einzelnen Mannschaften gebildet und subtrahiert werden. Unter dieser Perspektive ist die additive Strategie der Lernenden mit unabhängigem Klassenbildungskonzept als eine sinnvolle, jedoch unvollständige Strategie wahrzunehmen, die durch Kompensationshandlungen zur richtigen Anzahlbestimmung verwendet werden kann.

8.1.1.4 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

Grassmann (2002) zeigt auf, dass Lernende im Rahmen eines Projektes zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder bereits eine additive Strategie zur Lösung von Problemstellungen zu Kombinationen ohne Wiederholung verwendeten (vgl. 2.5.1). Diese entspricht der in dieser Untersuchung verwendeten «Addition aufeinanderfolgender Zahlen» (vgl. 8.1.1). Es finden sich in der Literatur bislang jedoch noch keine Hinweise auf die Anwendung additiver Strategien, in denen Lernende auf der Basis eines abhängigen oder unabhängigen Figurenbildungskonzeptes die Anzahl der Figurenmenge über die Strategien «Figuren mit einem festen Element addieren» oder «Figuren mit einem festen Element an einer festen Position addieren» lösen.

8.1.2 Figurspezifische additive Strategien

1. «Kombinationen addieren»
2. «Permutationen addieren»

Abb. 8.2 Figurspezifische additive Strategien

Neben den verschiedenen Figurenbildungskonzepten und den Fokussierungen auf allgemeine Strategien spiegeln sich in den additiven Rechnungen der Lernenden auch die vorgenommenen figurspezifischen Strukturierungen wider. Diese konnten im Rahmen der Untersuchung eindeutig für die Variationen ohne Wiederholung lokalisiert werden, nicht jedoch für die Kombinationen mit Wiederholung. Da bei den Kombinationen ohne Wiederholung keine figurspezifischen Strukturierungsstrategien verwendet wurden, sind diese von vorne herein ausgeschlossen. Bei den Kombinationen mit Wiederholung wäre eine Rechnung, die auf einer figurspezifischen Strukturierung basiert, hingegen grundsätzlich möglich.

8.1.2.1 *Kontrastierender Vergleich der Vorgehens- und Denkweisen von Lara und Ralf*

Im Folgenden werden zur Veranschaulichung der verschiedenen figurspezifischen Strukturierungsstrategien bei Variationen ohne Wiederholung exemplarisch jene von Lara und Ralf dargestellt.

Transkr. 8.5 Laras additives Vorgehen (GSSTB, V. o. Wh., Türme bauen)

Zur Situation: Lara erhält den Auftrag herauszufinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus vier verschiedenfarbigen Bausteinen (gr, g, r, s) zweistöckige Türme zu bilden. Sie erstellt sukzessive Lösungen und ordnet diese wie folgt unter- und nebeneinander an:

gr g	r s
r gr	s g
s gr	r g

Anschließend bildet sie zu jedem erstellten Turm einen zweiten Turm, in dem die Anordnung der Bausteine vertauscht ist und legt diese wie folgt zusammen:

gr g	g gr
r s	r s
r gr	gr r
s g	g s
s gr	gr s
r g	g r

I.: Mhm, wie viele hast du denn gefunden insgesamt?

M.: Dann hätte ich 12 Türme. Weil wenn die zusammen sind, sind das 6 und danach. Oh Warte jetzt weiß ich‘s 6 mal äh plus 6 und dann ist das 12. *[Notiert ihre Rechnung, auf Bitte der Interviewerin:]*

6+6=12

Analyse der Strukturierung

Lara leitet ihre Rechnung *„6 mal äh plus 6 und dann ist das 12"* ebenfalls aus ihrer vorgenommenen Strukturierung ab. Diese beinhaltet im Gegensatz zu Marys Vorgehen jedoch auch einen figurspezifischen Baustein: Nachdem sie mittels der allgemeinen Strategie «Disjunkte Paarbildung» alle sechs möglichen Kombinationen gefunden hat, bildet sie im Sinne der figurspezifischen Strategie «Gesamtvertauschung» alle Permutationen zu den gegebenen Kombinationen. Ihre abgeleitete Rechnung setzt sich wie folgt zusammen: Die Summanden (6 und 6) stehen jeweils für die Anzahl aller Kombinationen, die sie in zwei Klassen gebildet hat. Die Anzahl der Summanden (2) steht für die Anzahl aller möglichen Permutationen zu zwei ausgewählten Elementen. Ihre Strukturierung entspricht den Kombinationen in Verbindung mit ihren Permutationen.

Transkr. 8.6 Ralfs additives Vorgehen (KGSW, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten)

Zur Situation: Ralf hat den Auftrag erhalten herauszufinden, wie viele zweistellige Zahlen es aus vier verschiedenen Ziffernkarten gibt. Er legt und notiert der Reihe nach folgende zweistellige Zahlen aus Ziffernkarten:

31	13
43	34
23	32
42	24
21	12
41	14

R.: Mehr weiß ich nicht.
I.: Ehem (bejahend). Ok. Kann man das irgendwie überprüfen, ob du jetzt wirklich alle gefunden hast?
R.: (leise) Weiß ich nicht.
I.: Wie viele hast du denn überhaupt gefunden?
R.: *[R. tippt immer mit zwei Fingern gleichzeitig auf zwei gefundene Lösungen]* Zwei plus zwei, vier. Und zwei sind sechs, acht plus zwei sind 10. Also 12
I.: Magst du das erst mal aufschreiben? Nur 12, damit wir uns das merken können?
R.: *[R. notiert 12]*

Analyse der Strukturierung

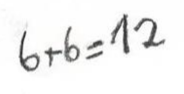
Ralf leitet seine Rechnung *„Zwei plus zwei, vier. Und zwei sind sechs, acht plus zwei sind 10. Also 12"* ebenfalls aus seiner vorgenommenen Strukturierung ab. Der Fokus liegt in seinem Vorgehen auf der «Direktvertauschung». Diese verwendet er auch, um die Anzahl rechnerisch zu bestimmen: Er addiert wiederholt zwei Figuren, bis er die Anzahl vollzählig ermittelt hat. Die Summanden entsprechen der Anzahl möglicher Permutationen zu einer festen Auswahl an Elementen.

Vergleich der Vorgehensweisen von Lara und Ralf

Die Analysen der Rechnungen und vorgenommenen Strukturierungen von Lara und Ralf zeigen exemplarisch, welchen Einfluss die Fokussierung figurspezifischer Strukturierungen auf die erstellten additiven Rechnungen hat. Sie ermitteln beide die vollzählige Figurenmenge, jedoch über zwei unterschiedliche additive Rechnungen.

8.1.2.2 *Verallgemeinerung*

Ebenso wie die Strukturierungen von Lara und Ralf kann die Bauart anderer additiver Rechnungen ebenfalls auf figurspezifische Eigenschaften zurückgeführt werden. Die Tabelle 8.4 gibt einen Gesamtüberblick über die verschiedenen erstellten Rechnungen und die dazugehörigen Strukturierungen:

	«Kombinationen addieren»	**«Permutationen addieren»**
Beispiel	L.: 6 mal äh plus 6 und dann ist das 12.  *Lara, CGSB, V. o. Wh.., Türme bauen*	K.: Zwei, vier, sechs, acht, zehn. Also immer zwei dazu.  *Kilian, KGSD, V. o. Wh., Türme bauen*
Erläuterung	Lara bildet zunächst alle möglichen Turmkombinationen aus zwei farbigen Bausteinen mittels der «Disjunkten Paarbildung». Anschließend vertauscht sie bei jeder der Kombinationen die Anordnung der Reihenfolge der farbigen Bausteine. Sie bestimmt die Anzahl aller Kombinationen und addiert dazu die Vertauschung dieser.	Kilian bildet gemäß der Strategie Direktvertauschung zu einer ausgewählten Farbkombination jeweils direkt die Vertauschung der Anordnung der Elemente. Zudem strukturiert er sein Vorgehen über die Elementfixierung, wendet diese jedoch nicht ausschöpfend an. Sein schrittweises Zählen und die Aussage „Also immer zwei dazu“ beziehen sich auf die Vertauschung der Anordnung, sein schrittweises Vorgehen lässt sich additiv deuten.

Verallgemeinerung	$\binom{n}{2} + \binom{n}{2}$ mit 2! Summanden Summanden entsprechen der Anzahl an Kombinationen ohne Wiederholung aus zwei Elementen	$2 + 2 + \cdots + 2$ mit $\binom{n}{2}$ Summanden Summanden entsprechen der Anzahl aller möglichen Vertauschungen aus zwei Elementen

Tab.8.4 Figurspezifische additive Strategien bei Variationen ohne Wiederholung

Die hier dargestellten Strukturierungen beruhen auf der allgemeinen Strategie der «Elementfixierung» oder der «Disjunkten Paarbildung» sowie zusätzlich auf einer figurspezifischen Strategie. Anders als in den in Abschnitt 8.1.1 dargestellten Rechnungen fokussieren die Lernenden hier auf die besonderen Eigenschaften der kombinatorischen Figur und binden diese in die Rechnung ein. Zentral ist, dass durch diese Fokussierung auf figurspezifische Besonderheiten unterschiedliche Rechnungen zu der gleichen Figurenmenge entstehen.

8.1.2.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

In Abschnitt 8.1.1 wurde bereits dargestellt, dass allgemeine additive Strategien, die auf einem abhängigen Figurenbildungskonzept beruhen, dem Additionsprinzip entsprechen. Die beschriebenen figurspezifischen additiven Strategien stimmen demnach ebenfalls mit diesem überein. Laras in Abschnitt 8.1.1 dargestellte allgemeine additive Strategie zu den Variationen ohne Wiederholung hängt zudem eng mit der Strukturierung im Baumdiagramm zusammen: Sie bildet jeweils alle Figuren mit einem Element an einer festen Position, bestimmt deren Anzahl und summiert diese anschließend auf.
Die in diesem Abschnitt dargestellten additiven Rechnungen passen hingegen nicht zu dieser Strukturierung. Sie stehen, wie bereits vorab erwähnt, in enger Beziehung zu den Eigenschaften der Variationen ohne Wiederholung. Die Summanden in Laras Rechnung entsprechen der Anzahl aller Kombinationen ohne Wiederholung, wenn aus vier Ausgangselementen jeweils zwei zu einer Figur zusammengefügt werden sollen. Die Anzahl der Summanden entspricht der Anzahl möglicher Permutationen aus zwei Elementen. Ihr Vorgehen gleicht demnach den historischen Zugängen zur Anzahlbestimmung von Variationen ohne Wiederholung. Diese enge Beziehung zu historischen Zugängen gilt ebenfalls für die zweite figurspezifische Strategie, auch in dieser wird die Beziehung zwischen den verschiedenen Figuren zur Anzahlbestimmung verwendet. So wird bei beiden Strategien darauf zurückgegriffen, dass die Variationen ohne Wiederholung dem Produkt aus den Kombinationen ohne Wiederholung und den Permutationen ohne Wiederholung entsprechen. Dieser Ansatz wird u.a. bereits von Bernoulli zur Lösungsfindung verwendet und unterscheidet sich

insofern zentral von einer Strukturierung der Daten, die die Anwendung der Produktregel ermöglicht.

8.1.2.4 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

Bislang liegen noch keine Befunde zu den konkreten additiven Strategien von Lernenden und deren Beziehung zu vorgenommenen Strukturierungen vor. Die im Rahmen dieser Studie gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich verschiedener additiver Strategien bei einer kombinatorischen Figur können jedoch einen Erklärungsansatz zu den von English (1996) und English & Sharry (1996) identifizierten unterschiedlichen rechnerischen Lösungen der Lernenden liefern. Sie zeigt auf, dass Lernende zur Lösung von Problemstellungen zum Kreuzprodukt andere als die erwarteten multiplikativen Rechnungen notieren (vgl. 2.5.1). Aufgrund der in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten Ergebnisse ist anzunehmen, dass die verschiedenen Rechnungen der Lernenden ebenfalls auf Strukturierungen beruhen, die nicht der «Elementfixierung» (dem klassischen Tachometerprinzip) entsprechen. Anzunehmen ist, dass Lernende unabhängig von einer verwendeten Strukturierung beim Erstellen der Figurenmenge, dieser nachträglich eine Struktur aufgeprägt haben, welche die Anzahlbestimmung vereinfacht (vgl. Einleitung in Kapitel 8). Oder aber sie haben ein strukturiertes Vorgehen beim Erstellen der Figurenmenge verwendet, welches sich von der stufenförmigen Strukturierung beim Baumdiagramm unterscheidet. Ob diese Vermutung zutrifft, bedarf jedoch einer empirischen Überprüfung.

8.1.3 Fazit

Über alle Figuren hinweg wurden gemeinsame additive Strategien identifiziert, welche sich ähnlich wie die Strukturierungsstrategien der Lernenden verschiedenen Strategieklassen zuordnen lassen. Unterschieden werden zum einen allgemeine additive Strategien, die dadurch charakterisiert sind, dass sie auf einer Fokussierung auf eine allgemeine Strukturierung beruhen. Zum anderen auch figurspezifische Strategien, in denen in den Rechnungen Beziehungen zu den Eigenschaften der Figuren rekonstruiert wurden. Bei allen kombinatorischen Figuren wurden allgemeine Strategien verwendet, die figurspezifischen wurden hingegen nur bei den Variationen ohne Wiederholung identifiziert, auch wenn sie grundsätzlich ebenfalls bei den Kombinationen mit Wiederholung möglich sind. Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick zu allen verwendeten additiven Strategien. Das dargestellte Gerüst der Rechnungen sowie die Beispiele beziehen sich zur Veranschaulichung der Unterschiede exemplarisch auf die Variationen ohne Wiederholung.

	Strategie	Form	Beispiel
Allgemeine additive Strategie	«Aufeinanderfolgende Zahlen addieren»	$2n + 2(n-1) + \ldots$ $+2\,(n-(n-1))$ mit n-1 Summanden Summanden entsprechen aufeinanderfolgenden Zahlen rückwärts addiert, der größte Summand entspricht der Anzahl an Figuren mit einem festen Element	6+4+2=12
	«Figuren mit einem festen Element addieren»	$2n + 2\,n + \cdots + 2n$ mit n Summanden Summanden entsprechen der Anzahl an Figuren mit einem festen Element	6+6+6+6=18
	«Figuren mit einem festen Element an einer festen Position addieren»	$(n-1) + (n-1) + \ldots + (n-1)$ mit n Summanden Summanden entsprechen der Anzahl an Figuren mit einem festen Element an einer festen Position	12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43 3, 3, 3, 3
Figurspezifische additive Strategie	«Kombinationen addieren»	$\binom{n}{2} + \binom{n}{2}$ mit 2! Summanden Summanden entsprechen der Anzahl an Kombinationen ohne Wiederholung aus zwei Elementen	6+6=12
	«Permutationen addieren»	$2 + 2 + \cdots + 2$ mit $\binom{n}{2}$ Summanden Summanden entsprechen der Anzahl aller möglichen Vertauschungen aus zwei Elementen	K.: Zwei, vier, sechs, acht, zehn. Also immer zwei dazu. 

Tab. 8.5 Allgemeine und figurspezifische additive Strategien

Die beiden erstgenannten allgemeinen additiven Strategien wurden über alle Figuren hinweg verwendet. Die dritte Strategie trat nur bei Variationen ohne Wiederholung auf, bezieht sich jedoch ebenfalls auf eine allgemeine Strukturierungsstrategie. Die Gegenüberstellung der allgemeinen additiven Strategien der Lernenden mit dem Additionsprinzip und dem Prinzip des Ein- und Ausschaltens zeigt, dass additive Strategien, denen ein abhängiges Figurenbildungskonzept unterliegt, dem Additionsprinzip entsprechen. Lernende, die auf diese Strategien zurückgreifen, zerlegen die gesuchte Menge in disjunkte Klassen und summieren die Anzahl der Figuren der einzelnen Klassen, um die Anzahl der Figurenmenge zu bestimmen. Additive Strategien der Lernenden, denen ein unabhängiges Figurenbildungskonzept unterliegt, sind entsprechend nicht mit dem Additionsprinzip gleichzusetzen, da das Kriterium, eine Zerlegung in disjunkte Mengen vorzunehmen, nicht erfüllt ist. Es zeigen sich aber Parallelen zu dem Prinzip des Ein- und Ausschaltens. Dieses beruht darauf, nicht disjunkte Mengen zu zählen, welche ebenso, wie bei den additiven Strategien der Lernenden aufsummiert werden. Bei dem Prinzip des Ein- und Ausschaltens wird jedoch im Anschluss eine Kompensation durchgeführt, indem die Anzahl der Objekte in den Schnittmengen der Mengen subtrahiert wird, diese fehlt bei den Strategien der Lernenden.

Zu Variationen ohne Wiederholung wurden zusätzlich zwei figurspezifische Strategien identifiziert, welche sich auf die Vertauschung der Anordnung in den Objekten beziehen. Diese finden sich in den additiven Rechnungen der Lernenden wie folgt wieder: Entweder entspricht die Anzahl der Summanden der Anzahl der möglichen Vertauschungen der Anordnung in den Objekten oder aber die Summanden selbst stimmen mit dieser Anzahl überein. Lernende greifen demnach in ihren Rechnungen eine Beziehung zwischen den verschiedenen Figuren auf, welche bereits Bernoulli zur Anzahlbestimmung verwendete, die heute in der Regel zur Anzahlbestimmung der Variationen ohne Wiederholung in der Schule nicht genutzt wird.

Die dargestellten Erkenntnisse bezüglich des Einsatzes additiver Strategien werden in den Befunden vorangehender Studien noch nicht benannt, es gibt jedoch Hinweise auf ein strategisches Vorgehen, welches der Strategie «Addition aufeinanderfolgender Zahlen» entspricht (vgl. Grassmann 2002). Die vorliegenden Ergebnisse liefern zudem einen möglichen Erklärungsansatz für die von English (1996) und English & Sharry (1996) dargestellten Ergebnisse zur Anwendung des Kreuzproduktes. Sie stellten im Rahmen einer Untersuchung mit Fünftklässlern fest, dass diese oftmals Rechnungen verwenden, die nicht mit dem Bilden eines Stufenablaufs zur Anwendung des Kreuzproduktes übereinstimmen. Aufgrund der Erkenntnis, dass Lernende verschiedene Rechnungen verwenden, die auf verschiedenen vorgenommenen Strukturierungen der Figurenmenge beruhen, ist anzunehmen, dass in Englishs Untersuchung ebenfalls vorrangig Strukturierungen verwendet wurden, die nicht dem klassischen Kreuzprodukt entsprechen. Zu klären ist, welche Strukturierungen die Lernenden konkret vorgenommen haben und ob sich diese auf Strukturierungen beziehen, welche in Beziehung zu den gebildeten Figuren stehen oder losgelöst verwendet wurden (vgl. Einleitung Kapitel 8).

8.2 Multiplikative Anzahlbestimmung

„Weil, jede Mannschaft muss ja eigentlich dreimal spielen, aber es sind vier Mannschaften. Also muss es eigentlich dreimal vier sein."
Rieka, Fußball, K. o. Wh.

1. «Ausgangselemente und Figur zu einem festen Element multiplizieren»

Ebenso wie Rieka lösen einige Lernende die Aufgabenstellungen direkt oder indirekt multiplikativ. Besonders auffällig ist diesbezüglich, dass bei allen drei Figuren multiplikative Lösungswege verwendet werden, die zu einer fehlerhaften Lösung führen.
Eine genauere Betrachtung der ermittelten Anzahlen zeigt, dass die Lernenden durch ihr strategiegeleitetes und vollständig systematisches Vorgehen ebenso wie bei additiven Strategien, denen ein unabhängiges Figurenbildungskonzept unterliegt, bei den Kombinationen ohne Wiederholung und den Variationen ohne Wiederholung genau zur doppelten Anzahl an Lösungen kommen. Bei den Kombinationen mit Wiederholung ermitteln sie die Summe aus der doppelten Anzahl an Objekten zu Kombinationen ohne Wiederholung und der Anzahl an Objekten mit Wiederholung. Eine Analyse der zugrunde liegenden Überlegungen und Strukturierungen zeigt, dass die drei multiplikativen Rechnungen auf derselben Überlegung basieren, diese jedoch nicht direkt auf den bislang dargestellten Strukturierungsstrategien beruht. Um diese Überlegung zu veranschaulichen, werden die multiplikativen Anzahlbestimmungen zweier Lernender vergleichend betrachtet.

8.2.1 Multiplikative Anzahlbestimmungsstrategien der Lernenden

8.2.1.1 *Kontrastierender Vergleich der Vorgehens- und Denkweisen von Rieka und Leon*

Die nachfolgend analysierten Transkriptausschnitte zeigen auf, dass Lernende, die die Anzahl der Figuren multiplikativ bestimmen und über dieses Vorgehen zu einer zu großen Anzahl an Lösungen gelangen, eine bestimmte Strategie verfolgen.

Transkr. 8.7 Riekas multiplikative Rechnung (GSSTB, K. o. Wh., Fußball)

Zur Situation: Rieka erhält den Auftrag, herauszufinden, wie viele verschiedene Fußballspiele es auf einem Fußballturnier mit vier Mannschaften gibt, wenn jede genau einmal gegen jede andere spielen soll.	
I.:	Wie viele Fußballspiele gibt es denn auf einem Turnier, wenn 4 Mannschaften mitspielen und jede genau einmal gegen jede andere spielen soll?
R.:	Da muss ich eigentlich nur viermal 4 rechnen und das sind 16.
I.:	Ehem., warum meinst du, dass das viermal 4 sind?

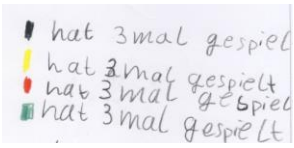
R.:	Weil jede Mannschaft muss ja eigentlich dreimal spielen und das sind vier Mannschaften, also muss das eigentlich dreimal 4 sein…oder viermal 4.
I.:	Dreimal vier oder viermal vier?
R.:	Eigentlich dreimal vier.

Analyse des Transkriptausschnitts

Aus Riekas Äußerung „Jede Mannschaft muss ja eigentlich dreimal spielen und das sind vier Mannschaften, also muss das eigentlich dreimal 4 sein“ lässt sich ableiten, dass sie von vier Mannschaften ausgeht, die jeweils dreimal spielen. Der erste Faktor „3“ stellt dementsprechend die Anzahl der Spiele einer Mannschaft dar, der zweite Faktor (4) die Anzahl der Mannschaften. Leon stellt zur Lösung der erwähnten Fußballaufgabe ähnliche Überlegungen an:

Transkr. 8.8 Leons multiplikative Rechnung (GSSTB, K.o.Wh., Fußball)

Zur Situation: Leon erhält den Auftrag, herauszufinden, wie viele verschiedene Fußballspiele es auf einem Fußballturnier mit vier Mannschaften gibt, wenn jede genau einmal gegen jede andere spielen soll.



L.:	6 *[schaut die I. an]*.
I.:	Wie hast du das denn so schnell gemacht? Das ging ja ganz fix.
L.:	3 *[zeigt auf die drei Wimpel, die rechts neben schwarz liegen]*, 2 *[zeigt auf die zwei Wimpel, die rechts neben gelb liegen]*, 1 *[zeigt auf die beiden ganz rechts liegenden Wimpel rot und grün]*.
I.:	Aha, magst du das mal aufschreiben, wie du das gerechnet hast und das Ergebnis?
L.:	Okay. Einfach nur das Ergebnis oder wie ich das gerechnet (...)
I.:	(unterbricht L.) Auch wie du das gerechnet hast, wenn das geht.
L.:	Okay *[notiert: „schwarz hat 3-mal gespielt“, „gelb hat 3-mal gespielt“, „rot*](...)]. Eigentlich wären es 9 *[schaut die I. an]*.
I.:	Mhm.
L.:	Weil jede Mannschaft 3-mal spielt.
I.:	Mhm, du hast aber jetzt gerade ganz - ganz fix 6 gesagt. Was stimmt denn eigentlich wohl? Du hast Recht, jede Mannschaft spielt 3-mal, aber wenn du jetzt da guckst *[schiebt die Lösung schwarz gelb zu L. die er in der Klärung der Aufgabenstellung gemalt hatte]*, was stimmt 6 oder 3? Wie hast du das denn so schnell gemacht? Das ging ja ganz fix.
L.:	Hab 4 mal 3.
I.:	Okay. 4 mal 3. Magst du das nochmal drunter schreiben: 4 mal 3 gleich 12 Spiele.
L.:	*[notiert „4·3= 12 Spiele“]*
I.:	Vorhin hast du gesagt, das sind 6, was stimmt denn jetzt?
L.:	12.

Analyse des Transkriptausschnitts

Leon ermittelt als erstes Ergebnis sechs Spiele. Aufgrund seiner Handbewegungen und seiner Aussage „drei“ ist anzunehmen, dass er die Anzahl der Lösungen ermittelt, indem er zunächst alle drei Spiele von Mannschaft schwarz bestimmt und dies durch die Geste verstärkt. Im Anschluss bestimmt er vermutlich die noch verbleibenden zwei Spiele von Mannschaft gelb; er benennt entsprechend die „2“. Abschließend zählt er das eine noch ausstehende Spiel von Mannschaft rot, dies erklärt die „1“. Nach der Aufforderung, seine Lösungen zu notieren, ändert er sein Vorgehen. Er geht davon aus, dass jede Mannschaft drei Spiele bestreiten müsse. Entsprechend notiert er *„schwarz hat 3-mal gespielt, gelb hat 3-mal gespielt, grün hat 3-mal gespielt“.* Während des Lösungsprozesses ändert er seine Meinung über die Anzahl aller Spiele und geht zunächst von neun, dann von zwölf Spielen aus. Anzunehmen ist, dass er sich bei der Antwort neun zunächst verzählt hat. Als Gesamtzahl der Spiele legt er sich – wie erwähnt – abschließend auf 12 Spiele fest und erklärt, wie diese Anzahl zustande kommt: „4-mal 3“. Es kann vermutet werden, dass er diese Schlussfolgerung aus seinen bisherigen Überlegungen trifft: Jede Mannschaft spielt 3-mal. Da es vier Mannschaften gibt, geht er davon aus, dass diese insgesamt 4 mal 3also insgesamt zwölf Spiele absolvieren müssen. Er schließt von der Anzahl der Spiele, die eine Mannschaft hat, also auf die Anzahl aller Spiele auf dem Turnier.

Vergleichende und kontrastierende Betrachtung: Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Vorgehensweisen von Rieka und Leon

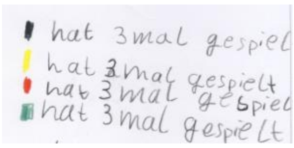
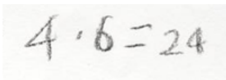
Rieka und Leon nehmen beide folgerichtig an, dass jede der Mannschaften insgesamt drei Spiele bestreiten muss. Ausgehend von dieser richtigen Annahme schlussfolgern sie, dass insgesamt zwölf Spiele stattfinden. Beide Lernende schließen demnach direkt von der Anzahl der Spiele einer Mannschaft auf die Anzahl der Spiele aller Mannschaften.

Die Lernenden überlegen zunächst, wie viele Figuren mit einem festen Element (Mannschaft x) in der Figurenmenge (alle Spiele) enthalten sind. Von der ermittelten Anzahl der Figuren (drei Spiele von Mannschaft x) schließen sie auf die Anzahl der Figuren mit einem festen anderen Element (jede Mannschaft spielt 3-mal) und bilden das Produkt aus der Anzahl der Elemente der Ausgangsmenge (vier Mannschaften) und der Anzahl der Figuren mit einem festen Element (jede Mannschaft spielt 3-mal). Weiter lässt sich ableiten, dass die Lernenden annehmen, das gebildete Produkt entspräche der Gesamtzahl der Figuren in der Figurenmenge („Wenn es vier Mannschaften gibt und jede 3-mal spielt, dann gibt es insgesamt zwölf Spiele auf dem Fußballturnier.“). Ihre multiplikative Rechnung beruht demnach auf einer Strategie, die sich als «Direkter Schluss von der Anzahl der Figuren mit einem festen Einzelelement auf die Anzahl aller Figuren in der Figurenmenge» oder verkürzt als «Direkter Schluss von der Anzahl der

Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren» bezeichnen lässt. Zentral ist, dass ihre grundlegende Überlegung: Jede Mannschaft spielt genau 3-mal“ richtig ist. Lediglich ihre Überlegungen zum Zusammenhang zwischen der Anzahl der Figuren mit einem Einzelelement und der Kardinalität der Figurenmenge sind nicht zutreffend

8.2.1.2 *Verallgemeinerung «Ausgangselemente und Figuren mit einem festen Element multiplizieren»*

Lernende ermitteln auch bei den anderen Figuren die Anzahl aller Figuren mittels einer multiplikativen Rechnung. Ebenso wie Rieka und Leon schließen sie dabei allesamt direkt von der Anzahl der Figuren mit einem festen Einzelelement auf die Kardinalität der Figurenmenge. Die Tabelle 8.6 gibt exemplarisch für jede Figur ein Beispiel und verallgemeinert zudem die von den Lernenden vorgenommenen Rechnungen auf eine beliebige Anzahl an Ausgangselementen.

Kombinatorische Figur	**Beispiel**	**Erläuterung**
Kombinationen ohne Wiederholung (n=4, k=2; 6 Mögl.)	„4·3= 12 Spiele“  *Leon, GSSTB, K. o. Wh., Fußball*	Der erste Faktor „4“ entspricht der Anzahl aller teilnehmenden Mannschaften. Der zweite Faktor „3“ entspricht der Anzahl aller Spiele einer ausgewählten Mannshaft“
Kombinationen mit Wiederholung (n=4, k=2; 10 Mögl.)	„Also das sind dann von jedem Dominostein 4, also sind es insgesamt 4 mal 4 … 16 Dominosteine“ *Lia, GSSTB, K. m. Wh., Dominosteine*	Der erste oder zweite Faktor „4“ entspricht der Anzahl aller zur Verfügung stehenden Punktmuster. Der erste oder zweite Faktor „4“ entspricht der Anzahl der Dominosteine mit einem festen Punktmuster
Variationen ohne Wiederholung (n=4, k=2; 12 Mögl.)	 „Mit jeder Farbe 6 Türme, dann sind das insgesamt 24 Türme.“ *Phil, CGSB, V. o. Wh., Türme bauen*	Der erste Faktor „4“ entspricht der Anzahl aller zur Verfügung stehenden farbigen Bausteine. Der zweite Faktor „6“ entspricht der Anzahl aller Türme mit Baustein einer ausgewählten farbigen Farbe.

Tab. 8.6 «Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren» bei verschiedenen kombinatorischen Figuren

Der Tabelle sind die zu Beginn des Abschnitts 8.2 benannten Beziehungen zwischen der Anzahl der Figuren in der gesuchten Figurenmenge und der Anzahl der tatsächlich ermittelten Figurenmenge zu entnehmen (Spalte 1 und Spalte 2). Anhand der Beschreibungen ist zudem zu erkennen, dass die Lernenden über alle Figuren hinweg das Produkt aus der Anzahl der Elemente in der Ausgangsmenge und der Anzahl der Figuren mit einem festen Einzelelement in der Figurenmenge bilden. Auf Grundlage der Äußerungen und Rechnungen der Lernenden lässt sich folgende Verallgemeinerung der Strategie ableiten, auf welcher die multiplikative Rechnung beruht.

Verallgemeinerung «Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren»

1. Ermittle, wie viele Figuren es mit einem festen Element in der Figurenmenge gibt.
2. Bilde das Produkt aus der Anzahl der Ausgangselemente und der in Schritt 1 ermittelten Anzahl. Das Produkt gibt die Anzahl aller Figuren in der Figurenmenge an.

Abb. 8.3 Verallgemeinerung «Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren»

Für die einzelnen Figuren ergibt sich daraus folgendes Gerüst[27] für die aufgestellten multiplikativen Rechnungen. Rechnungen, welche diesem Aufbau entsprechen, beruhen voraussichtlich auf der dargestellten Strategie.

Kombinatorische Figur	**1. Anzahl der Figuren mit einem festen Element in der Figurenmenge**	**2. Abgeleitetes Produkt[28]**
Kombinationen ohne Wiederholung (n=Anzahl der Ausgangselemente)	$n-1$ n ist kombinierbar mit $n-1$ anderen Elementen.	$n \cdot (n-1)$
Kombinationen mit Wiederholung (n=Anzahl der Ausgangselemente)	n n ist kombinierbar mit n $Elementen$; dadurch, dass n einmal mit sich selbst kombiniert wird, gibt es das Element n genau n mal in der Objektmenge.	$n \cdot n$
Variationen ohne Wiederholung (n=Anzahl der Ausgangselemente)	$k! \cdot (n-1)$ n ist kombinierbar mit $(n-1)$ Elementen, dazu gibt es $k!$ mögliche Vertauschungen.	$n \cdot (k! \cdot (n-1))$

Tab. 8.7 Multiplikative Gerüste zur Strategie «Ausgangselemente und Figuren mit einem festen Element multiplizieren»

Ausgehend von den vorherigen Ausführungen zeigt sich, dass Lernende, bei diesem Vorgehen das eigentliche Problem in Teilprobleme zerlegen. Grundsätzlich kann diese Strategie als ein sehr sinnvolles und für die kombinatorische Anzahlbestimmung typisches Vorgehen gelten (vgl. 1.2). Dennoch zeigt sich, dass die Vorgehensweisen der Lernenden nicht zu der gesuchten Anzahl der Figurenmenge führen. Es gilt zu klären, ob es möglich ist, von der Anzahl der Figuren mit einem festen Element auf die Anzahl aller Figuren in der Figurenmenge zu schließen und worin der Fehler der Lernenden besteht. Eine Betrach-

27 Da im Rahmen dieser Untersuchung die Begriffe „Strukturierung“ und „Struktur“ häufig verwendet werde, wird zur Beschreibung der Struktur der additiven und multiplikativen Rechnungen der Begriff „Gerüst“ verwendet. Dieser beschreibt die übergeordnete Struktur der Rechnungen.

28 Das gebildete Produkt setzt sich aus zwei Faktoren zusammen. Ein Faktor entspricht der Anzahl der Elemente in der Ausgangsmenge, der andere der Anzahl der Elemente mit einem festen Element in der Figurenmenge.

tung der durch die Lernenden erstellten Figurenmenge (welche nicht der gesuchten Figurenmenge entspricht!) gibt darüber einen ersten Aufschluss: Werden sukzessive jeweils alle Figuren zu einem ausgewählten Element gebildet, so entstehen so viele Mengen, wie es Ausgangselemente gibt. Diese enthalten jeweils alle Figuren mit einem Element, es entstehen demnach nicht disjunkte Mengen.

Aus dieser Erkenntnis lässt sich auch folgern, dass voraussichtlich eine Beziehung zwischen der unabhängigen Bildung von Figuren und der dargestellten Strategie besteht. Wie diese Beziehung jedoch genau zu charakterisieren ist, lässt sich auf Grundlage der vorliegenden Untersuchungsergebnisse nicht beantworten, sondern es bedarf dazu weiterer Studien.

8.2.1.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Ebenso wie für die Addition stellt sich auch für die multiplikative Anzahlbestimmung im Kontext kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme die Frage, wie bzw. inwiefern sich die gegebenen Probleme multiplikativ lösen lassen und in welchem Zusammenhang die fachlichen Wege mit den multiplikativen Anzahlbestimmungen der Lernenden stehen. Besonders auffällig bei den Letztgenannten ist, dass diese ausschließlich zu *einer fehlerhaften Anzahl* führen. Dies ist insofern besonders, als es grundsätzlich bei den Variationen ohne Wiederholung möglich ist, diese multiplikativ – ohne weitere Kompensation – zu lösen. Notwendig ist dazu jedoch das Finden einer geeigneten Strukturierung, die eine multiplikative Anzahlbestimmung erlaubt.
Kütting und Sauer (2008, S. 82) formulieren das allgemeine Zählprinzip bezugnehmend auf ein Experiment aus Teilversuchen, die unabhängig voneinander durchgeführt werden. Die Faktoren entsprechen dabei der Anzahl der möglichen Ergebnisse in den Teilversuchen (vgl. 1.2.2). Im vorangehenden Abschnitt wurde aufgezeigt, dass das von den Lernenden gebildete Produkt auf einer Zerlegung des Problems in Teilprobleme beruht und Mengen beschreibt, die alle die gleiche Kardinalität haben, jedoch nicht disjunkt sind. Insofern entspricht die Vorstellung der Zerlegung in Teilversuche nicht den Überlegungen der Lernenden. Es zeigen sich jedoch Gemeinsamkeiten zu der von Kirsch (2004) formulierten Auffassung des allgemeinen Zählprinzips. Dieser beschreibt das allgemeine Zählprinzip über folgende Modellierung: „*Das Produkt* $m \cdot n$ *ist die Kardinalzahl der Vereinigung von m paarweise disjunkten Mengen, die alle die gleiche Kardinalzahl n haben*“ (ebd., S. 23). Diese Darstellung entspricht der Vorstellung von der Multiplikation als wiederholter Addition gleicher Summanden. Es ist anzunehmen, dass die Lernenden auf dieses Konzept der Multiplikation zurückgreifen, ohne die notwendige Disjunktheit der Mengen zu berücksichtigen bzw. sich dieser bewusst zu sein. Über diese Vorstellung wird die Multiplikation im Unterricht eingeführt.

Es ist insofern zu berücksichtigen, dass die multiplikative Anzahlbestimmung der Lernenden aufgrund der fehlenden Disjunktheit der Mengen nicht der Anwendung des allgemeinen Zählprinzips entspricht. Multiplikative Rechnungen, die den dargestellten Gerüsten entsprechen, können dementsprechend keinesfalls mit diesem gleichgesetzt werden. Insofern ist auf Grundlage der vorliegenden Resultate auch nicht davon auszugehen, dass Lernende diese Regel auf eine falsche Situation anwenden, sondern dem von ihnen gebildeten Produkt vielmehr eine andere Vorstellung unterliegt.

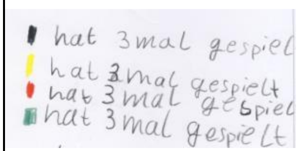
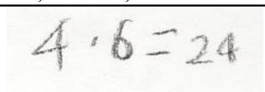
8.2.1.4 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

In der Literatur liegen bislang keine Befunde vor, die dem «Direkten Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren» entsprechen. Es gibt jedoch einige Hinweise auf multiplikative Rechnungen, die zu einer falschen Anzahl an Lösungen führen. Unter anderem beschreibt Neubert (2003), wie in Abschnitt 2.5 dargestellt, dass Lernende ebenfalls eine multiplikative Rechnung verwenden, die zu einer fehlerhaften Anzahl führt und nimmt an, dass diese übersehen, Figuren doppelt gezählt zu haben. Eine genauere Betrachtung der dort beschriebenen Rechnung zeigt, dass diese exakt auf die dargestellte Beschreibung der Strategie passt. Die Lernenden erhielten den Auftrag, die Anzahl aller möglichen Tischtennisspiele zu ermitteln, wenn am Turnier sechs Personen teilnehmen und jede genau einmal gegen jede andere spielen soll. Das Vorgehen der Lernenden beschreibt Neubert (ebd., S. 98) wie folgt: *„Die Lernenden überlegten sich, dass jeder der sechs Teilnehmer gegen 5 andere spielt und rechneten* 6 · *5."* Das von den Lernenden gebildete Produkt entspricht dem dargestellten Gerüst zur Strategie. Der erste Faktor gibt dabei die Anzahl der Elemente der Ausgangsmenge an, der zweite Faktor die Anzahl aller Figuren mit einem festen Element. Die Ergebnisse dieser Untersuchung zeigen auf, dass es sich bei diesem Vorgehen keinesfalls um ein Versehen handelt, sondern vermutlich um eine bewusst ausgewählte Strategie, bei der den Lernenden voraussichtlich nicht klar ist, dass diese die gesuchte Figurenmenge nicht erzeugt.
Auch Lack (2009) zeigt auf, wie Lernende die gesuchte Anzahl multiplikativ ermitteln (vgl. 2.5.1 zur genaueren Darstellung). Sie stellt dar, wie die Lernenden in Permutationsproblemen zunächst die Anzahl aller möglichen Türme mit einem Baustein an einer festen Position ermitteln und annehmen, dass es für alle weiteren Türme mit einem anderen farbigen Baustein an der gleichen Position ebenso viele Möglichkeiten gibt. Insofern ähnelt das strategische Vorgehen der begabten Lernenden dem Vorgehen der Schüler im Rahmen dieser Untersuchung. Die Strategien unterscheiden sich jedoch insofern, als bei Lack die Anzahl aller Objekte mit einem festen Element an einer festen Position und die gesuchte Anzahl der Figurenmenge bestimmt werden. im Rahmen dieser Studie und auch in der Darstellung Neuberts überlegen die Lernenden hingegen, wie viele Figuren es mit einem festen Element unabhängig von der Position gibt,

erstellen also gedanklich nicht disjunkte Mengen, so dass nicht die gesuchte Figurenmenge ermittelt wird. Aus den Gemeinsamkeiten und Unterschieden zu vorangegangenen Untersuchungen ist zu folgern, dass der «Direkte Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren» eine typische Strategie von Lernenden zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen ist.

8.2.2 Fazit

Bemerkenswerterweise verwenden Lernende über alle in der Untersuchung verwendeten Figuren hinweg bereits ein multiplikatives Vorgehen, um die Anzahl der Figurenmenge zu bestimmen. Es zeigt sich, dass die Lernenden bei der Anzahlbestimmung darauf fokussieren, wie viele Figuren es mit einem festen Element in der Figurenmenge gibt. Im Mittelpunkt steht jeweils die Frage *„Wie viele Möglichkeiten gibt es mit dem Element „a“?“* oder *„Auf wie vielen Wegen kann ich das Element „a“ mit anderen Elementen kombinieren?“* Die Lernenden zerlegen das Problem demnach in Teilprobleme. Von der Anzahl der Figuren mit einem festen Einzelelement schließen sie direkt auf die Anzahl aller Figuren in der Figurenmenge. Der Tabelle sind Beispiele für diese Strategie bei verschiedenen Figuren zu entnehmen. Gleichzeitig zeigt sie auf, dass die verwendete Strategie, trotz einer grundsätzlich sinnvollen Annahme, bei allen Figuren zu einer fehlerhaften Anzahl an Lösungen führt:

Kombinationen ohne Wiederholung (n=4, k=2; 6 Mögl.)	„4 · 3= 12 Spiele“  *Leon, GSSTB., Fußball*	Ermittelte/ gesuchte Anzahl 12/6
Kombinationen mit Wiederholung (n=4, k=2; 10 Mögl.)	„Also das sind dann von jedem Dominostein vier, also sind es insgesamt vier mal vier…sechszehn Dominosteine“ *Lia, GSSTB., Dominosteine*	16/10
Variationen ohne Wiederholung (n=4, k=2; 12 Mögl.)	 *Phil, GSB., Türme bauen*	24/12

Tab. 8.8 Multiplikative Strategie «Ausgangselemente und Figuren mit einem festen Element multiplizieren» bei verschiedenen Figuren

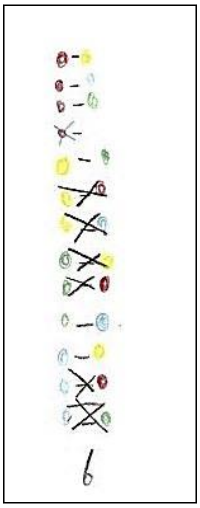
Die Beispiele zeigen, dass das gebildete Produkt jeweils einen Faktor enthält, der der Anzahl der Elemente in der Ausgangsmenge entspricht und einen Faktor, der der Anzahl der Figuren mit einem festen Element entspricht. Entsprechend wird diese multiplikative Strategie als «Direkter Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren» bezeichnet. Zentral ist, dass die grundsätzliche Überlegung, wie häufig das jeweilige Element in der Figurenmenge vorkommt, ebenso zutreffend ist, wie die Schlussfolgerung, dass alle anderen Elemente genauso häufig enthalten sein müssen. Die fehlerhafte Anzahlbestimmung entsteht vermutlich dadurch, dass die Lernenden auf dieser Grundlage ein Produkt bilden, obwohl die betrachteten Mengen nicht disjunkt sind.

Eine Betrachtung der in der Literatur dargestellten multiplikativen Rechnungen zeigt Gemeinsamkeiten mit den eigenen Beobachtungen auf (vgl. 2.5.1). So werden von Neubert (2003) und Lack (2009) im Kontext von Kombinations- und Permutationsproblemen ohne Wiederholung multiplikative Rechnungen dargestellt. Es liegen jedoch keine Befunde über die zugrunde liegenden Denkwege vor. Der herausgearbeitete Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren in der Figurenmenge stellt einen Erklärungsansatz für die dort beschriebenen multiplikativen Rechnungen dar. Er zeigt auf, auf welchen sinnvollen, wenn auch nicht in allen Fällen zielführenden, Gedankengängen die multiplikativen Rechnungen basieren.

Die fachliche Klärung zeigt, dass die multiplikativen Rechnungen der Lernenden nicht mit dem allgemeinen Zählprinzip gleichgesetzt werden können, da die Produktbildung der Lernenden auf einer anderen Vorstellung basiert. Sie bilden Mengen mit der gleichen Anzahl an Elementen. Basierend auf der Addition gleicher Summanden leiten sie die multiplikative Rechnung ab. Notwendig ist dazu jedoch, dass die gebildeten Mengen disjunkt sind, welches für die durch die von den Lernenden gebildeten Mengen nicht zutrifft. Ebenso, wie bei der Addition ist es jedoch möglich, die Aufgaben multiplikativ zu lösen und Kompensationshandlungen bzw. -operationen durchzuführen, um zu viel Gezähltes wieder auszugleichen. Im Rahmen der Studie zeigte sich, dass einige Lernende bereits sinnvolle Kompensationsstrategien verwenden. Auf diesen Aspekt wird im folgenden Abschnitt konkreter eingegangen.

8.3 Kompensationsstrategien

„Oh, dann, da habe ich welche doppelt gemacht, die müssen dann noch raus.“
Mina, KGSD, K. o. Wh., Fußball



Ähnlich wie Mina (vgl. Abb. rechts) gehen einige Lernende systematisch vor und ermitteln dennoch zu viele Lösungen. Das „Phänomen des systematischen Zuviel-Zählens“ lässt sich sowohl bei auflistenden als auch bei rechnerischen Strategien beobachten. Ursache für die systematisch zu viel ermittelten Lösungen ist dabei ein unabhängiges Figurenbildungskonzept (vgl. 6.1.2). Bei der selbständigen Überprüfung oder auf Nachfrage erkennen einige der Lernenden, wie beispielsweise Mina, dass sie zu viele Objekte notiert haben. Gegenstand dieses Abschnitts sind demzufolge die vorgenommenen Kompensationsstrategien, welche Lernende verwenden, um ausgehend von ihren ermittelten Lösungen die richtige Lösungsanzahl zu erhalten.

1. «Doppelte wegnehmen»
2. «Gruppen bilden»

Abb. 8.4 Kompensationsstrategien

Insgesamt wurden zwei verschiedene Kompensationsstrategien rekonstruiert, die Strategien «Doppelte wegnehmen» und «Gruppen bilden». Im Folgenden werden diese beiden Kompensationsstrategien genauer in den Blick genommen.

8.3.1 Kompensationsstrategie «Doppelte wegnehmen»

Die Kompensationsstrategie «Doppelte wegnehmen» wird an den Handlungen und Äußerungen von Phil besonders deutlich:

Transkr. 8.9 Phils Strategie «Doppelte wegnehmen» (GSSTB, V. o. Wh.; Türme bauen)

Zur Situation: Phil hat unter Verwendung der «Elementfixierung» und der «Einzelvertauschung» insgesamt 24 Möglichkeiten gefunden, da er bei der Notation die Disjunktheit der Klassen nicht berücksichtigt hat. Bei der Betrachtung der Lösungen entdeckt er, dass nicht alle Türme unterschiedlich sind. Die Interviewerin bittet ihn, zu überlegen, wie er nun die richtige Lösungsanzahl ermitteln kann.

I.: Das stimmt und wie kannst du die mal raussuchen, alle doppelten, also so, dass wir jeden nur noch einmal haben?

P.: *[unterbricht]* Eigentlich ist das jetzt ganz einfach, weil man - ich muss - ich muss nur die wegpacken [*legt die Lösungen blau-schwarz und schwarz-blau beiseite]*

I.: Mhm.

P.: Em. (...) die kommen weg *[legt die Lösungen blau-grün und grün-blau beiseite]*

I.: Mhm.

P.: Und hab ich die (...) *[vergleicht die Lösungen vom blauen Haufen blau-rot und rot-blau mit den gleichen Lösungen vom roten Haufen und legt die beiden Lösungen schließlich auch beiseite]* dann können die auch weg

P.: *[legt alle Steckwürfel zusammen*] Hm und dann können die weg *[legt die Lösungen rot-schwarz und schwarz-rot vom roten Haufen beiseite],* wegen den beiden *[zeigt auf die gleichen Lösungen, die im schwarzen Haufen liegen]*.

I.: Mhm.

P.: Mh, die können weg *[legt die Lösungen schwarz-grün und grün-schwarz vom schwarzen Haufen weg]* wegen den beiden *[zeigt auf die beiden gleichen Lösungen aus dem grünen Haufen]*.

I.: Mhm.

P.: Und eigentlich sieht jetzt alles so aus als - och ja und die könnten weg *[legt die Lösungen rot-grün und grün-rot vom roten Haufen beiseite]* wegen den beiden *[zeigt auf die gleichen Lösungen aus dem grünen Haufen]*. Aber jetzt sieht alles eigentlich normal aus.

I.: Wie viele hast du jetzt insgesamt? *[legt alle übrigen Lösungen zusammen]*

P.: Ähm, das sind jetzt nur noch sechs *[legt die Lösungen mit rot und mit schwarz zusammen]* mal ne - zwei mal sechs sind das nur noch also sechs plus sechs

Analyse des Vorgehens

Phil nimmt Ausgleichshandlungen vor, um die richtige Anzahl zu ermitteln. Dazu vergleicht er systematisch die gebildeten Klassen mit der ersten Klasse an Lösungen, dann mit der zweiten Klasse an Lösungen und anschließend mit allen weiteren Klassen. *(„Und hab ich die (...)" [vergleicht die Lösungen vom blauen Haufen blau-rot und rot-blau mit den gleichen Lösungen vom roten Haufen und legt die beiden Lösungen schließlich auch beiseite] dann können die auch weg).* In jedem Schritt entfernt er dabei diejenigen Lösungen aus der Vergleichsklasse, die bereits in der ersten Klasse vorkommen: *„Mh, die können weg [legt die Lösungen schwarz-grün und grün-schwarz vom schwarzen Haufen weg] wegen den beiden [zeigt auf die beiden gleichen Lösungen aus dem grünen Haufen].*

Seine Strategie kann insofern allgemein als das Entfernen doppelter Figuren aufgefasst werden.

8.3.1.1 *Verallgemeinerung der Kompensationsstrategie «Doppelte wegnehmen»*

Die Kompensationsstrategie «Doppelte wegnehmen» war auch bei der Lösung von Problemstellungen zu den anderen kombinatorischen Figuren zu beobachten. Die Kompensation wurde auch bei diesen Lernenden, wie beispielhaft an Phils Vorgehen aufgezeigt, durch Handlungen vollzogen. Eine Darstellung der Kompensationsstrategien für die anderen Figuren bedeutet insofern, dass in allen Fällen jeweils dargestellt würde, wie Lernende einzelne Objekte mittels eines vergleichenden Vorgehens entfernern. Aufgrund dieser Ähnlichkeit wird auf eine wiederholte Darstellung verzichtet. Auf Grundlage der dargestellten Vorgehensweise lässt sich die Strategie «Doppelte wegnehmen»“ wie folgt verallgemeinern:

Kompensationsstrategie «Doppelte wegnehmen»

1. Vergleiche die gebildeten Figuren und nimm diejenigen aus der Menge heraus, die doppelt sind.
2. Die Anzahl der übrig gebliebenen Figuren entspricht der gesuchten Figurenmenge.

8.3.1.2 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Ein Vergleich der beiden Kompensationsstrategien der Lernenden mit den fachlichen Strategien zeigt große Analogien auf. Lernende, die systematisch zu viele Figuren erstellt haben, nehmen im Sinne der Strategie „Doppelte wegnehmen“ einen Vergleich der gebildeten Mengen vor und entfernen die doppelten Objekte aus der Menge (vgl. «Doppelte wegnehmen» Schritt 2). Dieses Vorgehen weist große Parallelen zu dem Prinzip des Ein- und Ausschaltens auf, welches die Anzahlbestimmung über die Addition auf Mengen überträgt, deren Teilmengen nicht disjunkt sind. Zunächst wird die Anzahl der jeweiligen Mengen addiert. Anschließend werden die Schnittmengen von der ermittelten Anzahl subtrahiert, um die gesuchte Figurenmenge zu erhalten. Während der Vergleich als das Bilden der Schnittmenge der erstellten Mengen aufgefasst werden kann, stellt das Entfernen der doppelten Objekte die Subtraktion als Handlung dar. Die Strategie «Doppelte wegnehmen» lässt sich demnach als enaktive Anwendung des Ein- und Ausschaltprinzips auffassen.

8.3.1.3 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

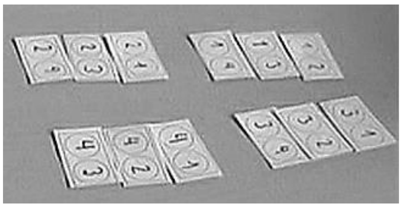
Bislang liegen insbesondere aus dem Sekundarbereich Informationen darüber vor, dass Lernende bei der Anzahlbestimmung zu den verschiedenen Problemstellungen eine zu große Anzahl an Lösungen ermitteln. So wird oftmals von dem Fehler „overcounting" gesprochen, welcher ganz allgemein aussagt, dass Lernende zu viele Lösungen ermitteln (Batanero et al. 1997b; Kavousian 2008; Lockwood 2011). Kompensationsstrategien, die der Strategie «Doppelte wegnehmen» entsprechen, werden jedoch nicht dargestellt. Hinsichtlich der Strategie liegen insofern keine Befunde aus vorangegangenen Untersuchungen vor.

8.3.2 Kompensationsstrategie «Gruppen bilden»

Die Kompensationsstrategie «Gruppen bilden» wurde bei zwei Lernenden identifiziert. Sie wird nachfolgend an Jasmins Handlungen und Erläuterungen veranschaulicht:

Transkr. 8.10 Jasmins Strategie «Gruppen bilden» (GSSTB, K. o. Wh., Lotto)

Zur Situation: Jasmin hat den Auftrag erhalten, das Lottoproblem zu lösen. Sie ermittelt insgesamt 12 (anstelle von 6) Lösungen über die «Elementfixierung» & die «unabhängige Figurenbildung» erstellt hat. Das Ergebnis ist eine Figurenmenge, die Figuren doppelt enthält (vgl. Abb. rechts):



I.: Was kann man denn jetzt machen, damit du die richtige Anzahl hast und die nicht doppelt sind?

J.: Ich lege einfach immer die Gleichen zusammen. *Sortiert ihre Lösungen, nach folgender Anordnung neu:*

I.: Und wie viele sind das jetzt insgesamt?

J.: Mal zählen, also 1,2,3,4,5, und 6 *[zeigt dabei jeweils auf die gebildeten Gruppen an Lösungen]*.

Analyse des Vorgehens

Jasmin ermittelt ebenfalls die doppelte Anzahl an Objekten und nimmt Ausgleichshandlungen vor. Sie wählt dazu jedoch ein anderes Vorgehen. Die jeweils unter den gegebenen Bedingungen nicht unterscheidbaren Objekte legt sie zu einer Klasse zusammen *(„Ich lege einfach immer die Gleichen zusammen.“)* und zählt anschließend die entstandenen Klassen („*Mal zählen, also 1,2,3,4,5, und 6.“).* Jasmins Vorgehen lässt sich entsprechend als das Bilden von Gruppen auffassen, deren Anzahl der gesuchten Anzahl an Figuren entspricht.

8.3.2.1 *Verallgemeinerung der Kompensationsstrategie «Gruppen bilden»*

Im Gegensatz zu den anderen Zählstrategien war die Kompensationsstrategie «Gruppen bilden» nur bei zwei Lernenden zu beobachten. Deshalb gilt es insbesondere für diese Strategie im Rahmen weiterer Studien zu überprüfen, ob diese auch von anderen Lernenden verwendet wird. Auf Grundlage der Vorgehensweise von Jasmin lässt sich die Strategie wie folgt beschreiben:

Kompensationsstrategie «Gruppen bilden»

1. Vergleiche die gebildeten Figuren und lege diejenigen Figuren, die unter den gegebenen Bedingungen gleich sind, zu einer Gruppe zusammen.
2. Die Anzahl der gebildeten Gruppen entspricht der gesuchten Figurenmenge.

8.3.2.2 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

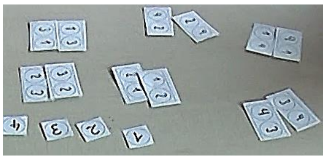
In Abschnitt 1.2.2 wurde aufgezeigt, dass die Quotientenregel, ebenso wie das Prinzip des Ein- & Ausschaltens, einen Weg des indirekten Zählens beschreibt (vgl. Kirsch 2004, S. 253f.). Die Grundidee ist, zunächst einen größeren Bestand zu zählen und anschließend Klassen von Objekten zu bilden, die unter einem bestimmten Aspekt als gleichwertig erachtet werden. Die Anzahl der Klassen entspricht dabei der Anzahl der gesuchten Objekte (vgl. 1.2.2). Mittels der Strategie «Gruppen bilden» werden ebenfalls Gruppen erstellt. Dazu werden zunächst diejenigen Figuren, die unter den gegebenen Kompositionsbedingungen nicht voneinander unterschieden werden, zusammengelegt. Anschließend wird die Anzahl der Klassen ermittelt. Diese stimmt mit der Anzahl der Figurenmenge überein (vgl. Verallgemeinerung der Kompensationsstrategie «Gruppen bilden» Schritt 1 & 2). Das Vorgehen der Lernenden entspricht insofern der fachlichen Strategie der Quotientenregel auf der Handlungsebene.

8.3.2.3 *Berührungspunkte mit den Ergebnissen vorheriger Studien*

Den vorliegenden Studien zum Lösen kombinatorischer Problemstellungen sind keine ähnlichen Kompensationsstrategien zu entnehmen. Jedoch berichtet Grassmann (2002) im Rahmen der Arbeit mit mathematisch interessierten Lernenden, dass einige dieser zur Lösung einer Kombinationsaufgabe ohne Wiederholung ein Vorgehen verwendeten, welches der hier beobachteten Strategie nahe kommt. Die Lernenden erhielten den Auftrag herauszufinden, wie häufig 10 Personen mit Gläsern anstoßen können. Dazu beschreibt Grassmann (2002, S. 20) unter anderem folgendes Vorgehen: *„Lösungsüberlegungen, die wir beobachten konnten, gingen davon aus, dass jeder mit 9 anderen Personen anstößt, aber jedes Gläserklingen zweimal gezählt wurde, also nicht 90 sondern 45 das Ergebnis ist.“*
Die Darstellung Grassmanns unterscheidet sich insofern von den Ergebnissen dieser Untersuchung, als die Lernenden bei Grassmann direkt eine Kompensationsstrategie verwendeten. Im Rahmen dieser Studie wurde hingegen beobachtet, dass die beiden Lernenden diese Strategie zur Kompensation entwickelten, nachdem sie realisiert hatten, zu viele Objekte erstellt zu haben.

8.3.3 Fazit

Wenn Lernende erkennen, dass sie zu viele Objekte ermittelt haben, verwenden sie verschiedene Kompensationsstrategien. Zu unterscheiden ist zwischen den Strategien «Doppelte wegnehmen» und «Gruppen bilden»:

Strategie	Beispiel	Beschreibung
«Doppelte wegnehmen»		Bei der Strategie «Doppelte wegnehmen» werden alle „doppelten“[29] Lösungen durch das Wegnehmen oder Streichen aussortiert.
«Gruppen bilden»		Die „doppelten“ Lösungen werden jeweils zusammengelegt. Anschließend wird zur Anzahlbestimmung die Anzahl der gebildeten Klassen gezählt.

Tab. 8.9 Kompensationsstrategien der Lernenden

29 Als „doppelt“ werden bei beiden Strategien diejenigen Lösungen eingestuft, die im Sinne der gesuchten kombinatorischen Figurenmenge als nicht unterscheidbar angesehen werden.

Bei der Strategie «Doppelte wegnehmen» sortieren die Lernenden alle Figuren, die unter den gegebenen Kompositionsgesetzen als nicht unterscheidbar gelten, aus. Dies geschieht durch das Wegnehmen oder Streichen der Figuren. Bei der Strategie «Gruppen bilden» werden nicht unterscheidbare Figuren zu einer Klasse zusammengelegt. Anschließend wird zur Anzahlbestimmung die Anzahl der gebildeten Klassen gezählt. Im Rahmen der Untersuchung waren bei insgesamt fünf Lernenden Ausgleichsstrategien zu beobachten. So wurde die Strategie «Doppelte wegnehmen» bei allen kombinatorischen Figuren verwendet. Die Strategie «Gruppen bilden» wurde hingegen insgesamt nur von zwei Lernenden eingesetzt. Insofern kann an dieser Stelle keine Einschätzung dahingehend vorgenommen werden, in wieweit es sich um ein kontextspezifisches Vorgehen handelt oder eine Abhängigkeit von der zugrunde liegenden Figur vorherrscht.
Auch in der Mathematik werden zur Lösung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme Kompensationsstrategien verwendet. So konnte aufgezeigt werden, dass die Strategie «Doppelte wegnehmen» dem Prinzip des Ein- & Ausschaltens auf der Handlungsebene entspricht. Die Strategie «Gruppen bilden» weist einen engen Bezug zur Quotientenregel auf. Diese wird von Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) als Strategie der Auffächerung bzw. Klassenbildung konkretisiert. In den Studien zur Lösung kombinatorischer Problemstellungen gibt es bislang noch keine Befunde zur Verwendung von Kompensationsstrategien. Es zeigt sich jedoch, dass einige Lernende im Rahmen eines Begabtenförderungsprojektes ein der Strategie «Gruppen bilden» ähnliches Vorgehen nutzten (vgl. Grassmann 2002 und für eine ausführlichere Darstellung 2.5.1). Die Lernenden ermittelten ebenfalls zunächst eine zu große Menge und nahmen einen Ausgleich, der sinngemäß der Quotientenregel entspricht, vor. Anders als in der vorliegenden Untersuchung war das Vorgehen jedoch direkt darauf ausgerichtet über eine zunächst zu große Anzahl an Lösungen die gesuchte Anzahl zu ermitteln.

8.4 Rekursive Anzahlbestimmung

„Der könnte sich 14 kaufen, weil wir hatten ja schon welche, und das waren zehn (L. zeigt auf die bereits gefundenen Lösungen der Grundaufgabe) und dann immer noch 4 dazu sind 14."

Larissa, CGSB.,
K. m. Wh. (n=5, k=2), Eismann,

Larissa nutzt zur Beantwortung der Frage, wie viele verschiedene Eishörnchen sich ein Kind kaufen kann, wenn es fünf verschiedene Lieblingseissorten hat, die Lösung des vorangestellten Problems. Ebenso, wie Larissa, greifen die meisten Lernenden auf das Ergebnis der vorherigen Problemlösung zurück und ermitteln rekursiv die Anzahl aller Lösungen. Zudem wurden neben rekursiven Strategien auch multiplikative Vorgehensweisen identifiziert, welche durchgängig auf dem «Schluss von der Anzahl der Einzelelemente auf die Anzahl aller Figuren» beruhen (vgl. 8.3). Bei rekursiven Anzahlbestimmungen ist, ebenso wie bei der Lösung der Grundaufgaben, zwischen Lernenden zu unterscheiden, die direkt die Anzahl aller Lösungen über eine Rechnung bestimmen und denen, die ein indirektes Vorgehen verwenden und zunächst alle neu hinzukommenden Figuren erstellen. Auf beiden Wegen ermitteln einige Lernende die vollzählige Figurenmenge, andere eine zu kleine Anzahl an Figuren. In keinem Fall wurde mittels rekursiver Strategien eine Figurenmenge ermittelt, die größer als die gesuchte Anzahl war. Den direkten Anzahlbestimmungsstrategien unterliegen dabei ebenso, wie bei der Grundaufgabe, gedanklich vorgenommene Strukturierungen.

Gegenstand dieses Abschnitts sind nachfolgend die rekursiven Strategiebausteine zur Beschreibung der Strategien der Lernenden. Die rechnerischen Strategien werden integriert, da sie sich jeweils konkret auf die Strukturierungen beziehen.

1. «Annahme von Proportionalität»
2. «Klassenneubildung»
3. «Klassenerweiterung»
4. Kombination aus «Klassenerweiterung» und «Klassenneubildung»

Abb. 8.5 Rekursive Strategiebausteine

Insgesamt wurden vier rekursive Strategiebausteine rekonstruiert. Mit der «Annahme von Proportionalität» wurde dabei ein Baustein identifiziert, bei dem es sich ebenso, wie bei dem Figurenbildungskonzept nicht um ein strategisches Vorgehen handelt, sondern eher um ein Konzept, welches den Strategien unterliegt. So zeigte sich, dass unabhängig von der (bewussten oder unbewussten) Strategiewahl ein großer Teil der Lernenden, jedoch nicht alle, sowohl bei direkten als auch indirekten Anzahlbestimmungen diese Annahme trafen. Auf der Strategieebene ist zwischen den rekursiven Strategien «Klassenneubildung» und der «Klassenerweiterung» sowie einer Kombination aus den beiden Strategien zu unterscheiden. Mittels der rekursiven Strategiebausteine kann abgebildet werden, wie die Lernenden die Anzahl der neu hinzukommenden Figuren ermitteln. Sie bilden gemeinsam mit den in Kapitel 7 dargestellten Strategien die Strukturierungsstrategien der Lernenden ab und lassen sich entsprechend als Strategiebausteine für das Lösen analoger Problemstellungen auffassen.

Nachfolgend wird zunächst die Annahme von Proportionalität in den Blick genommen (8.4.1). Daran schließt die Darstellung der rekursiven Strukturierungsstrategien (8.4.2 – 8.4.3) an, bevor ein abschließendes Fazit bezüglich des Einsatzes rekursiver Strategien gezogen wird (8.4.4). Ebenso wie bei den operativen Strategien werden jeweils exemplarisch die Vorgehensweisen von Lernenden bei einer Figur betrachtet, bevor eine Verallgemeinerung vorgenommen wird und Bezüge zu den fachlichen Konzepten hergestellt werden. Zur Überprüfung, in welchem Maße die Strategien der Lernenden geeignet sind die Vollzähligkeit zu gewährleisten, wird bei der Betrachtung der Annahme von Proportionalität eine ausführliche fachliche Analyse vorgenommen. Auf der geschaffenen Grundlage werden in den darauffolgenden Abschnitten die Bezüge zu den fachlichen Konzepten in die einzelnen Abschnitte integriert. Da insgesamt keine direkten Befunde zu rekursiven Strategien von Lernenden aus der Literatur vorliegen (vgl. 2.5.2), gibt es nur wenige dahingehende Bezugspunkte. Zu berücksichtigen ist dabei, dass bislang noch keine Klassifizierung rekursiver Strukturierungsstrategien vorgenommen wurde und die Bezüge insofern, soweit es diese gibt, in die einzelnen Abschnitte integriert und nicht in einem gesonderten Abschnitt dargestellt werden.

8.4.1 Annahme von Proportionalität

Ebenso wie Larissa in dem Einführungsbeispiel zu Beginn des vorangehenden Abschnittes ermittelt ein großer Teil der Lernenden zunächst eine Figurenmenge, die nicht der gesuchten entspricht. Die Ursache ist in den meisten Fällen eine Annahme von Proportionalität. Sowohl Lernende, die direkt die Anzahl der Figuren mittels einer Rechnung lösen, als auch Lernende, die zunächst alle Figuren erstellen, nehmen die Proportionalität der Anzahl der Figuren mit einem festen Element an. Diese Annahme wird nachfolgend an Leons Vorgehen und seinen Aussagen veranschaulicht.

8.4.1.1 *Analyse der zugrundeliegenden Fokussierung*

Transkr. 8.11 Leons Vorgehen (GSSTB, K. o. Wh., Fußball)

Zur Situation: Leon hat bereits die Anzahl aller Fußballspiele auf einem Turnier mit 4 Mannschaften gelöst. Nun soll er die Anzahl aller Spiele auf einem Fußballturnier mit 5 Mannschaften ermitteln:

I.:	Wie viele Spiele wären es dann insgesamt?
L.:	(...) (pfeift; nuschelt) Neun.
I.:	Aha, warum neun? (...) Wie hast du das raus gekriegt?
L.:	Da *[zeigt auf die Notizen von dem ersten Aufgabenzettel]* drei zugerechnet.
I.:	Mhm und warum drei?
L.:	(...) Weil jede Mannschaft dreimal spielt, so wie gerade *[tippt auf den blauen Wimpel]*.

Analyse des Vorgehens

Bei einem rekursiven Vorgehen, wie Leon es zeigt, wird entsprechend zur ermittelten Anzahl der vorangegangenen Aufgabe der Wert addiert, der der Anzahl der Figuren mit einem festen Element aus der vorangegangenen Aufgabe entspricht. Diese Strategie wird durch Leons Aussagen deutlich. Er weist darauf hin, dass er die hinzu addierte Anzahl für die neu hinzukommenden Figuren aus der vorherigen Aufgabe ableitet: „*Weil jede Mannschaft dreimal spielt, so wie gerade.“* Lernende, deren Vorgehen die «Annahme von Proportionalität» zugrunde liegt, fokussieren darauf, wie viele Figuren mit einem festen Element in der Figurenmenge vorkommen. Sie gehen davon aus, dass die Anzahl im Vergleich zur bereits gelösten Aufgabe konstant bleibt und übertragen diese auf das neue Element.

8.4.1.2 *Verallgemeinerung der Strategie*

Das beschriebene Vorgehen lässt sich bei der Erweiterung der Aufgabenstellungen über alle kombinatorischen Figuren hinweg und unabhängig davon, ob die Anzahl rechnerisch oder abzählend ermittelt wird, beobachten. Der Tabelle sind Beispiele für alle kombinatorischen Figuren zu entnehmen. Diese beziehen sich, um einen besseren Vergleich zu gewährleisten, ausschließlich auf rechnerische Anzahlbestimmungen. Neben den Beispielen werden zudem Verallgemeinerungen der Rechnungen abgeleitet.

Kombinatorische Figur	Beispiel	Rechnung und Verallgemeinerung
Kombinationen ohne Wiederholung	L.: (...) (pfeift; nuschelt) Neun. I.: Aha, warum neun? (...) Wie hast du das raus gekriegt? L.: Da *[zeigt auf die Notizen von dem ersten Aufgabenzettel*] drei zugerechnet. I.: Mhm und warum drei? L.: (...) Weil jede Mannschaft dreimal spielt *Leon, CGSB, K. o. Wh., Fußball*	6+3 a_n+(n-1)
Kombinationen mit Wiederholung	L.: Der könnte sich 14 kaufen, weil wir hatten ja schon welche, und das waren zehn *[L. zeigt auf die bereits gefundenen Lösungen der Grundaufgabe]* und dann immer noch 4 dazu sind 14. – Also vier, weil das ja immer vier Eishörnchen mit einer Sorte waren. *Larissa , CGSB, K. m. Wh., Eismann*	*10 + 4* a_n+ (n-1)

Variationen ohne Wiederholung	C: Zwölf plus noch sechs mit den Neuen, sind zusammen 18. *Chayenne, CGSB, V. o. Wh., Türme bauen*	*12 + 6* a_n+2(n-1)

Tab. 8.10 «Annahme von Proportionalität» bei verschiedenen kombinatorischen Figuren

Die Aussagen der Lernenden zeigen, dass sie alle auf die Lösungen der Grundaufgabe zurückgreifen und eine Rechnung aus zwei Summanden erstellen, von denen der eine Summand der Anzahl der bereits erstellten Lösungen entspricht und der zweite der Anzahl aller Figuren mit einem festen Element. Dass die Lernenden dabei bewusst auf die Anzahl der Figuren mit einem festen Element zurückgreifen wird beispielsweise an Larissas Aussage deutlich: *„Also vier, weil das ja immer vier Eishörnchen mit einer Sorte waren."* Sie verweist direkt auf die Anzahl der Figuren mit einem Element. Die «Annahme von Proportionalität» lässt sich auf der Grundlage der vorherigen Ausführungen wie folgt verallgemeinern:

> *«Annahme von Proportionalität»*
>
> Jedes neu hinzukommende Element kommt in der Figurenmenge genauso häufig vor, wie es Figuren mit einem festen Element in der vorherigen Figurenmenge gibt.

In früheren Untersuchungen zu kombinatorischen Anzahlbestimmungsproblemen gibt es keine expliziten Befunde, die eine Existenz der «Annahme von Proportionalität» darstellen. Eine genauere Betrachtung der von Piaget und Inhelder (1975) dargestellten Vorgehensweisen zeigt jedoch auf, dass Lernende auch bei Variationen mit Wiederholung die Proportionalität der Anzahl der Objekte mit einem festen Element annehmen und zur Anzahlbestimmung verwenden, wenn sie nacheinander mehrere Problemstellungen lösen sollen, die sich lediglich hinsichtlich der Anzahl der Elemente der Ausgangsmenge unterscheiden. Dies zeigt sich insbesondere in Alas Vorgehen. Für Variationen mit Wiederholung bildet er Gruppen und ermittelt auf diese Weise 16 Figuren. Für die Erweiterung auf fünf Elemente nimmt er an, dass es insgesamt 20 Objekte gibt: (vgl. 2.5.2).
Die «Annahme von Proportionalität» wird in der Literatur im Kontext der Musterstrukturierung und Anzahlbestimmung bei der Verallgemeinerung von Mustern und Folgen benannt. So beschreibt Akinwunmi (2012) bezugnehmend auf andere Untersuchungen (Bertalan 2007; Orton & Orton 1999; Stacey 1989), dass Musterfolgen neben rekursiven und expliziten Strukturierungen mittels einer weiteren Deutung gelöst werden. Die Lernenden nehmen ein proportionales Wachstum der Folge an.

8.4.1.3 *Berührungspunkte mit den fachlichen Strategien und Konzepten*

Im Sinne der «Annahme von Proportionalität» gehen Lernende davon aus, dass die Anzahl der Figuren, in denen ein festes Element aus der Grundaufgabe vorkommt, konstant bleibt und diese der Anzahl der Figuren mit dem hinzukommenden Element entspricht. Im Folgenden wird überprüft, in welcher Beziehung die durch diese Annahme ermittelte Anzahl an Figuren mit dem neu hinzukommenden Element zu der tatsächlichen Anzahl an Figuren mit diesem Element steht, indem diese verglichen werden.
Aus fachlicher Sicht lassen sich die Erweiterungen zu den gegebenen drei kombinatorischen Figuren als Folgen gedeutet (vgl. 1.2.2) rekursiv lösen. Das erste Glied der Folge a_n stellt die bereits gefundene Anzahl für n Ausgangselemente und k=2 zu einer Figur zu kombinierende Elemente dar. Es stellt sich die Frage, wie sich für die jeweiligen Figuren das nachfolgende Glied a_{n+1} bei einem veränderbaren n und festem k (=2) berechnen lässt. Dieser Frage wird exemplarisch für die Kombinationen ohne Wiederholung nachgegangen.

(1) Analyse zur rekursiven Anzahlbestimmung für die Kombinationen ohne Wiederholung

1. Aus Abschnitt 1.2.3 ist bekannt, dass sich die Anzahl aller Kombinationen ohne Wiederholung für eine Ausgangsmenge mit einer beliebigen Anzahl an Elementen sowie einer festen Anzahl an Elementen, die zu einer Figur kombiniert werden sollen, wie folgt berechnen lässt: $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ für beliebiges n und festes k = 2 gilt

2. Daraus ergibt sich für einen festes aber beliebiges n und dessen Nachfolger $(n+1)$ folgende Anzahl: Für n: $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$; für $n+1$: $\frac{(n+1)\cdot(n)}{2}$

3. Die Differenz zwischen den Anzahlen für ein beliebiges n und dessen Nachfolger $n+1$ gibt Auskunft darüber, wie viele Figuren neu hinzukommen, wenn die Anzahl für $n+1$ rekursiv ermittelt werden soll, weil die Anzahl für n bekannt ist: $\frac{(n+1)\cdot(n)}{2} - \frac{n\cdot(n-1)}{2} = n$

4. Die Anzahl aller Kombinationen ohne Wiederholung für $n+1$ Elemente entspricht insofern der Summe aus der Anzahl der Figuren mit n Ausgangselementen und den n neu hinzukommenden Figuren mit dem neuen Element. Sie lässt sich durch die folgende rekursive Folge beschreiben:

$$a_{n+1} = a_n + n$$

(2) Rekursive Anzahlbestimmungen zu den anderen Figuren

Eine solche Analyse wurde analog für die Kombinationen mit Wiederholung und Variationen ohne Wiederholung durchgeführt. Für die drei kombinatorischen Figuren ergeben sich daraus folgende Beziehungen:

	Kombinationen ohne Wiederholung	Kombinationen mit Wiederholung	Variationen ohne Wiederholung
Rekursive Anzahlbestimmung	$a_{n+1} = a_n + n$	$a_{n+1} = a_n + (n+1)$	$a_{n+1} = a_n + 2n$
Anzahl der neu hinzukommenden Figuren	n	$(n+1)$	$2n$

Tab. 8.11 Rekursive Anzahlbestimmung zu den drei kombinatorischen Figuren

Der Tabelle können sowohl die rekursiven Rechenvorschriften als auch die Anzahlen der neu hinzukommenden Figuren entnommen werden. Die jeweils angegebenen Anzahlen entsprechen insofern der Anzahl der Elemente, die mittels der Strategie Klassenneubildung erstellt werden, damit die erstellte Figurenmenge mit der gesuchten Figurenmenge übereinstimmt.

Im vorangegangenen Abschnitt wurde herausgearbeitet, welche Rechnungen die Lernenden auf der Grundlage der «Annahme von Proportionalität» entwickeln, diese sind in der nachfolgenden Tabelle (8.12) den gesuchten Anzahlen an Figuren gegenübergestellt.

	Kombinationen ohne Wiederholung	Kombinationen mit Wiederholung	Variationen ohne Wiederholung
Benötigte Anzahl:	n	$n+1$	$2(n)$
Ermittelte Anzahl durch die «Annahme von Proportionalität»	$n-1$	n	$2(n-1)$

Tab. 8.12 Gegenüberstellung der benötigten Anzahl neuer Objekte und der durch die Proportionalitätsannahme ermittelten Anzahl an neuen Objekten

Die Gegenüberstellung der ermittelten und der gesuchten Anzahlen zeigt, dass die «Annahme von Proportionalität» systematisch eine Anzahl an Figuren erzeugt, die nicht der Anzahl der gesuchten Figurenmenge entspricht. So lässt sich ableiten, dass bei Kombinationen ohne und mit Wiederholung jeweils eine Figurenmenge entsteht, die ein Element zu wenig enthält, bei Variationen ohne Wiederholung eine Menge, die jeweils zwei Figuren weniger als die gesuchte enthält (vgl. 8.4.1). Diese Erkenntnis ist insofern interessant, als bei Lernenden entstandene Fehler der beschriebenen Größe in einigen Fällen durch die «Annahme von Proportionalität» erklärbar sind. Diese Fehler entstehen insofern nicht zufällig, sondern basieren auf einem systematischen Vorgehen.

8.4.2 Klassenneubildung

Die Strategie Klassenneubildung wurde unabhängig von den vorangegangenen Strukturierungsstrategien verwendet, um die Anzahl aller Figuren mit dem neuen Element zu bestimmen. In den meisten Fällen wurde mittels dieser Strategie die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt.

8.4.2.1 *Analyse der zugrunde liegenden Fokussierung*

Exemplarisch für die Strategie «Klassenneubildung» werden Robins Strukturierungen und Aussagen bei der Lösung der Eismannaufgabe zu den Kombinationen mit Wiederholung genauer betrachtet:

Transkr. 8.12 Robins rekursives Vorgehen (GSSTB, K. m. Wh., Eismann)

Zur Situation: Robin hat bereits die Einführungsaufgabe zum Eismannproblem gelöst, nun erhält er den Auftrag, herauszufinden, wie viele Möglichkeiten es bei 5 Objekten gibt.

R.: Ähm, Moment jetzt, 10 *[notiert 10]*, 10 plus *[notiert +]*. Hier konnte man noch ein machen 1, 2, 3, 4 [*zeigt dabei jeweils auf die bereits gelegten Hörnchen mit Erdbeere]. Legt neben die Reihe mit Erdbeerhörnchen von unten nach oben b-b, s-b, gr-b, g-b, b-r* (*in dieser Reihenfolge stehen die 5 verschiedenen Kästchen mit Eissorten von links nach rechts auf dem Tisch). Fährt mit dem Finger über die neu gelegten Eishörnchen, vervollständigt die begonnene Rechnung „10+“ zu „10 + 5=15.“ Schaut noch einmal auf seine Lösungen, fährt mit dem Stift in der Luft über die gefundenen Lösungen mit Blaubeere, dann über die gefundenen Lösungen mit Schokolade*,

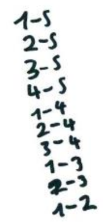
R.: ja 15. Notiert 15.

Analyse des Vorgehens

Robin löst die Eismannaufgabe, indem er zu der bereits ermittelten Anzahl an Objekten die neuen Objekte mit dem hinzugekommenen Element hinzufügt. Dazu notiert er zunächst die Anzahl der bereits gefundenen Eishörnchen (10+). Anschließend legt er in eine neue Reihe alle Lösungen mit dem neu hinzugekommenen Element (*Legt neben die Reihe mit Erdbeerhörnchen von unten nach oben b-b, s-b, gr-b, g-b, b-r*). Abschließend zählt er die gefundenen Lösungen mit dem neuen Objekt und addiert diese (*vervollständigt die begonnene Rechnung „10 +“ zu „10+5=15“),* so dass er insgesamt 15 Lösungen ermittelt. Robins Vorgehen und seiner Darstellung der Figurenmenge ist zu entnehmen, dass er eine *neue Klasse* bildet, in der sich alle Objekte befinden, in denen das neue Element enthalten ist.

8.4.2.2 *Verallgemeinerung der Strategie*

Diese Strategie wurde bei der Lösung von Aufgaben zu allen kombinatorischen Figuren und kontextunabhängig rekonstruiert, sie ist die mit Abstand am häufigsten verwendete rekursive Strategie.

Kombinationen ohne Wiederholung (n=5, k=2; 10 Mögl.)	 *Renas, KGSD, K. o. Wh., Fußball*
Kombinationen mit Wiederholung (n=5, k=2; 15 Mögl.)	L.: Ich brauche nur noch die 5 und die 4 *[notiert 54]* die 5 und die 1 *[notiert 51]* die 5 und die 2 *[notiert 52]* die 5 und die 3 *[notiert 53]* *Lea, KGSD, K. m. Wh., Dominosteine*
Variationen ohne Wiederholung (n=5, k=2; 20 Mögl.)	 *Sarah, KGSD, V. o. Wh., Türme bauen*

Tab. 8.13 «Klassenneubildung» bei verschiedenen Grundfiguren

Aus den Strukturierungen der Lernenden bei verschiedenen kombinatorischen Figuren lässt sich die Klassenneubildung folgendermaßen verallgemeinern:

«Klassenneubildung» 1. Bilde eine neue Klasse an Lösungen, diese enthält Figuren mit dem neuen Element.

Zu berücksichtigen ist, dass Lernende verschiedene Annahmen darüber mitbringen, wann die Klasse zu dem neuen Element vollzählig ist. Ein Vergleich der von den Lernenden auf dieser Basis erstellten Figurenmenge mit der gesuchten Figurenmenge zeigt in einigen Fällen Unterschiede auf. So wurde mittels des Bausteins bei Problemstellungen zu den Kombinationen ohne Wiederholung in jedem Fall die vollzählige Figurenmenge ermittelt, nicht jedoch bei den anderen beiden Figuren. Nachfolgend sind zwei Beispiele aufgeführt:

Kombinationen mit Wiederholung (n=5, k=2; 15 Mögl.)	P.: Weil ich weiß, dass das hier 4 waren, so welche Eishörnchen *[zeigt auf die Lösungen]* immer und immer sind 4 zusammen 1,2,3,4 zeigt auf alle Eishörnchen in denen rot vorkommt. Und dann hab ich einfach ich hab ja schon das hier gemacht *[zeigt auf die Lösung zur Grundaufgabe]* und damit hab ich erst mal ein bisschen nachgedacht und dann hab ich die Lösung gefunden, 2,4 und dann musste ich 10 + 4 gleich 14 rechnen *[Legt s-b, b-b, g-b, b-r]*. Fertig. *Peter, KGSB, K. m. Wh., Eismann*
Variationen ohne Wiederholung (n=5, k=2; 20 Mögl.)	J.: [*nimmt sich die alten Aufzeichnungen und schreibt die Lösungen noch einmal ab]*. Und kann ich (…) und mit den 5 da kann ich das fast (…) genauso machen – also man nimmt anstatt die 1 zum Beispiel tu ich da die 5 hin. 12,✓13,✓14,✓21,✓ 23✓,24✓,31,32,34, 41,42,43,51,52,~~54~~, 53 54 *Jasmina, KGSD, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*

Tab. 8.14 Verschiedene Annahmen zur Vollzähligkeit der neuen Klasse

Den beiden vorangehenden Beispielen ist zu entnehmen, dass bei der Kombinationsaufgabe mit Wiederholung eine Figurenmenge erstellt wurde, die genau eine Figur weniger enthält als die gesuchte. Eine genauere Betrachtung zeigt, dass Peter die Proportionalität der Anzahl der Figuren mit einem festen Element annimmt (vgl. 8.4.1). Bei den Variationen ohne Wiederholung werden alle möglichen Kombinationen ohne Wiederholung mit dem neuen Element erstellt. Die

Vertauschung der Reihenfolge der Elemente zur Vervollständigung wird hingegen nicht vorgenommen. Angenommen werden könnte aufgrund des Beispiels, dass die Vertauschung der Anordnung der Elemente in den Figuren aufgrund der vorgenommenen Strukturierungsstrategie bei der Grundaufgabe nicht berücksichtigt wurde. Die in dem Beispiel verwendete «Elementfixierung mit fester Position» fokussiert darauf, alle Elemente mit einem festen Element an einer festen Position zu ermitteln. Insofern ist es naheliegend, zu folgern, dass bei dem rekursiven Vorgehen die vorherige Strategie fortgesetzt wird und demnach die fehlende Berücksichtigung nur in Kombination mit dieser Strukturierungsstrategie auftritt. Die Analyse weiterer Vorgehensweisen zeigte jedoch, dass die fehlende Berücksichtigung der Anordnung der Elemente in den Objekten auch in Kombination mit anderen Strategiebausteinen auftrat.
Zu folgern ist demnach, dass es insgesamt verschiedene Annahmen darüber gibt, wann die Vollzähligkeit der Figuren in der neuen Klasse gegeben ist.

Aufgezeigt wurde auch, dass die Annahme über die Vollständigkeit der gebildeten Figuren sich unterscheidet. So gibt es Lernende, die die Vollständigkeit annehmen, wenn

a. das neue Element mit allen anderen Elementen auf alle möglichen Weisen kombiniert wurde.
b. die Anzahl der erstellten Figuren mit dem neuen Element mit der Anzahl der vorab erstellten Figuren zu einem festen Element übereinstimmt (Proportionalitätsannahme).
c. die Anzahl der erstellten Figuren mit dem neuen Element mit der Anzahl der vorab erstellten Figuren in einer festen Klasse übereinstimmt (Proportionalitätsannahme).

Es zeigt sich insofern, dass die Strategie Klassenneubildung nicht pauschal zu einer richtigen oder falschen Lösungsanzahl führt, sondern diese vielmehr davon abhängt, welche Annahme die Lernenden bezüglich der Vollständigkeit der Figurenmenge treffen.

8.4.3 Klassenerweiterung

Die Strategie «Klassenerweiterung» trat nur auf, wenn die Anzahl der Objekte bei der vorherigen Lösung mittels Strategien, in denen die allgemeine Strukturierungsstrategie «Elementfixierung» als Baustein enthalten war (vgl. Kap. 5.2.) ermittelt wurde oder eine nachträgliche Strukturierung im Sinne dieser Strategie erfolgte. Sie wird im Folgenden exemplarisch an Laras Vorgehen veranschaulicht.

8.4.3.1*Analyse der zugrunde liegenden Fokussierung*

Lara hat bereits die Einführungsaufgabe zum Eismannproblem gelöst und ihre gefundenen Figuren gemäß der «Elementfixierung mit fester Position» angeordnet. Sie soll anschließend herauszufinden, wie viele Möglichkeiten es bei fünf verschiedenen Eissorten unter den gleichen Bedingungen gibt.

Transkr. 8.13 Laras rekursives Vorgehen (CBSB, K. m. Wh., Eismann)

Lara legt s-b, r-b, gr-b, g-b jeweils an die bereits erstellten Klassen von Lösungen.

L.: Weil wir hatten ja schon welche *[deutet auf die Lösungen aus Aufgabenteil 1.1]* und die waren 10 und dann immer noch 4 dazu *[tippt auf die vier Lösungen mit einem blauen Plättchen]* wären 14.

I.: Kannst du mir erklären, warum 4 dazu kommen?

L.: Weil dann blau noch mal 4 dazu kommen *[zeigt wieder auf die vier Lösungen mit blauen Plättchen]* weil's ja vier verschiedene Farben sind. Gelb und blau *[tippt auf das entsprechende Eishörnchen]*, grün und blau *[tippt auf das entsprechende Eishörnchen],* rot und blau *[tippt auf das entsprechende Eishörnchen]* und schwarz und blau *[tippt auf das entsprechende Eishörnchen]*.

Analyse des Vorgehens

Lara löst das Eismannproblem, indem sie zu der bereits ermittelten Anzahl an Objekten die neuen Objekte mit dem hinzugekommenen Element (blau) hinzufügt. Wie ihre Handlungen und Aussagen belegen, erweitert sie dazu die bereits gebildeten Klassen jeweils um ein Objekt, in dem das neue Element enthalten ist. *(„Weil dann blau noch mal 4 dazu kommen [zeigt wieder auf die vier Lösungen mit blauen Plättchen] weil's ja vier verschiedene Farben sind")* So erhält sie insgesamt 14 Lösungen.

8.4.3.2 *Verallgemeinerung der Strategie*

Kombinatorische Figur	**Beispiel**
Kombinationen ohne Wiederholung (n=5, k=2; 10 Mögl.)	*1-2 2-3 3-4* *1-3 2-4 3-5* *1-4 2-5* *1-5* *Malin, KGSD, K. o. Wh., Lotto*
Kombinationen mit Wiederholung (n=5, k=2; 15 Mögl.)	 *Lara, CGSB, K. m. Wh., Eismann*
Variationen ohne Wiederholung (n=6, k=2; 30 Mögl.)	*1-2 2-1 3-1 4-1* *1-3 2-3 3-2 4-2* *1-4 2-4 3-4 4-3* *1-5 2-5 3-5 4.5* *Jasmina, KGSD, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*

Tab. 8.15 «Klassenerweiterung» bei verschiedenen Grundfiguren

Allen Lösungswegen der Lernenden ist zu entnehmen, dass sie die gebildeten Klassen jeweils um ein Objekt, in dem das hinzugekommene Element enthalten ist, erweitern. Für beliebige kombinatorische Figuren lässt sich daraus folgendes Vorgehen ableiten:

> *«Klassenerweiterung»*
> Erweitere jede der gebildeten Klassen um eine Figur mit dem neuen Element.

Vorab wurde bereits darauf hingewiesen, dass diese Strategie ausschließlich in Kombination mit der «Elementfixierung» von den Lernenden verwendet wurde. Mittels dieser Strategie werden bei Kombinationen ohne Wiederholung (für eine beliebige aber feste Anzahl von n Aufgangselementen und der Kombination von zwei Elementen zu einer Figur), unabhängig davon, ob, die Lernenden die «Elementfixierung» mit oder ohne feste Position verwenden, genau n-1 Klassen erstellt. Bei den Kombinationen mit Wiederholung genau n Klassen (vgl. 7.1.3).

Für die Variationen ohne Wiederholung entstehen bei der «Elementfixierung ohne feste Position» n Klassen und mit fester Position n-1-Klassen. Ein Vergleich der erstellten mit der gesuchten Figurenmenge zeigt, dass die Anzahlen mittels der Strategie unabhängig von der kombinatorischen Figur nicht übereinstimmen (vgl. Tab. 8.16).

	Kombinationen ohne Wiederholung	Kombinationen mit Wiederholung	Variationen ohne Wiederholung	
Benötigte Anzahl:	n	$n+1$	$2(n)$	
Ermittelte Anzahl durch die «Klassenerweiterung»:	$n-1$	n	$2(n-1)$ «Elementfixierung ohne feste Position»	n «Elementfixierung mit fester Positon»

Tab. 8.16 Vergleich der zu erstellenden Anzahl neu hinzukommender Figuren und der tatsächlich erstellten Anzahl mittels der Strategie «Klassenerweiterung»

Durch das beschriebene durchgängig strukturierte Erstellen der Lösungen entsteht demnach in keinem Fall die vollzählige Figurenmenge. Trotz der konsequenten Anwendung dieses systematischen Vorgehens ermitteln die Lernenden demnach nicht die gesuchte Figurenmenge. Dass dabei nicht zufällig eine Figur vergessen wurde, sondern das Fehlen dieser Figur auf dem systematischen Vorgehen beruht, wird insbesondere an Laras Vorgehen deutlich:

Transkr. 8.14 Laras systematische Anwendung der «Klassenerweiterung» (CBSB, K. m. Wh., Dominosteine)

Zur Situation: Lara hat bereits die Grundaufgabe zu den Dominosteinen gelöst und die Lösungen anschließend wie folgt auf dem Tisch angeordnet:

1-1			
1-2	2-2		4-2
1-3	2-3	3-3	4-3
1-4			4-4

Die Interviewerin fordert sie auf, herauszufinden, wie viele Dominosteine man aus 5 verschiedenen Punktmustern erstellen kann.

L.: Das wären eigentlich 4 mehr. Also 14.

I.: Bist du dir sicher, dass das 14 sind?

L.: Hm.

I.: Du kannst ja mal überlegen, ob das stimmt. Das war ja schon eine sehr gute Überlegung.

L.: Kann ich das noch mal malen? *[L. notiert und legt anknüpfend an die bereits* *gefundenen Objekte folgende Lösungen mit dem neuen Element]:*

1-1			
1-2	2-2		4-2
1-3	2-3	3-3	4-3
1-4			4-4
1-5	2-5	3-5	4-5

I.: sicher?
L.: Es gäbe ja auch noch 5 und 6, aber 6 kann man ja nicht machen…Ah! Ich weiß noch einen! *[notiert 5-5].*
15:00 L. wird anschließend von der Interviewerin gebeten alle Dominosteine aus 6 verschiedenen Punktmustern zu finden.
I.: Jetzt stell dir mal vor die 6 wäre auch noch erlaubt auf den Dominosteinen. Wie viele gäbe es denn dann insgesamt?
L.: 20 glaube ich. Ich glaub das wären 20.
L.: Weil von 6 macht man diesen von Einer und Sechser noch dazu, von Zweier, Dreier Vierer und Fünfer und dann macht man noch äh 21 sechs und sechs auch noch.
I.: Das war ja vorhin auch so, dass du den einen vergessen hast. Woran könnte das liegen?
L.: Weil ich erst immer bis zur 4 rechne und dann hatte ich das vergessen, weil ich hier hinten noch keine Reihe waren.

Analyse des Vorgehens
Laras Überlegungen ist zu entnehmen, dass sie systematisch die Klassen um jeweils ein Objekt mit dem neu hinzukommenden Element erweitert. Dabei ermittelt sie sowohl bei der Erweiterung von vier auf fünf Elemente als auch bei der Erweiterung auf sechs Elemente nicht die vollzählige Figurenmenge. In beiden Fällen wird mit dem neuen Element die Kombination mit Wiederholung nicht erstellt. Ihren Ausführungen lässt sich dabei auch direkt die Erklärung für diesen Fehler entnehmen: *„Weil ich erst immer bis zur 4 rechne und dann hatte ich das vergessen, weil ich hier hinten noch keine Reihe waren.“* Sie zeigt damit auf, dass sie alle Klassen erweitert hat und jeweils eine Figur nicht erstellt wurde, da es dazu noch keine „Reihe“ gab.

8.4.4 Kombination aus Klassenneubildung und Klassenerweiterung

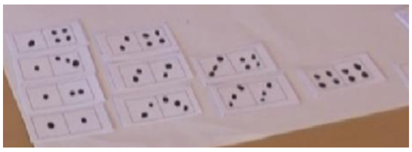
Die Kombination aus «Klassenneubildung» und «Klassenerweiterung» wurde unter anderem von Stefan zur Lösung der Dominosteine-Aufgabe verwendet. An seinen Aussagen und Vorgehensweisen wird die Strukturierungsstrategie daher erläutert.

8.4.4.1 *Analyse der zugrunde liegenden Fokussierung*

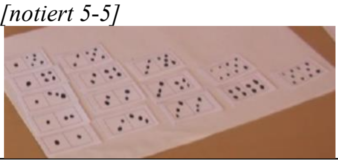
Die Kombination aus «Klassenneubildung» und «Klassenerweiterung» wurde über alle kombinatorischen Figuren hinweg verwendet, jedoch nur, wenn vorab zur Strukturierung die «Elementfixierung» genutzt wurde. Das Vorgehen wird an Stefans Äußerungen und Handlungen besonders deutlich:

Transkr. 8.15 Stefans rekursives Vorgehen (GSSTB, K. m. Wh, Dominosteine)

Zur Situation: Stefan hat bereits die Dominosteinaufgabe gelöst und seine gefundenen Lösungen anschließend in Gruppen sortiert und treppenförmig angeordnet. Nun erhält er den Auftrag, herauszufinden, wie viele Möglichkeiten es bei fünf Objekten gibt.



S.:	Dann brauche ich die gar nicht mehr aufzuschreiben.
I.:	Aha?
S.:	Dann brauche ich nur noch die Fünfer.
I.:	Weißt du auch so, wie viele Fünfer. es geben würde?
S.:	4. Oder so.
I.:	Aha, dann mach das mal.
S.:	Da ist bei jedem ein mehr *[zeigt auf die vier gebildeten Klassen],* weil dann hier einmal fünf *[zeigt auf die linke Reihe in der alle Objekte mit 1 liegen*). 1-5, ja. Weil wir hatten ja schon welche *[deutet auf die Lösungen aus Aufgabenteil 1.1]*.
I.:	Dann mach das mal. Kannst du mir erklären, warum 4 dazu kommen?
S.:	*[Notiert 1-5, 2-5, 3-5, 4-5 und legt die Dominosteine jeweils unten in die gebildeten Klassen]*. Ha, das war es eigentlich.
I.:	Bist du dir sicher… *[beendet den Satz nicht, L.: greift nach einer weiteren Vorlage]*
S.:	*[notiert 5-5]*

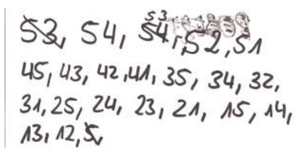


Analyse des Vorgehens

Stefan löst die Dominosteinaufgabe rekursiv, wie seine Aussagen: *„Dann brauche ich die gar nicht mehr aufzuschreiben"* und: *„Dann brauche ich nur noch die Fünfer"* belegen. Er erweitert dazu die vier gebildeten Klassen um jeweils ein Element *(„Da ist bei jedem ein mehr" (zeigt auf die vier gebildeten Klassen).* Abschließend stellt er fest, dass ihm ein weiteres Objekt fehlt und notiert 5-5. Stefan *ergänzt* damit ebenso wie Lara die bestehenden Klassen jeweils um ein Objekt, in dem das neue Element enthalten ist. Zusätzlich *erstellt er* anschließend eine *neue Klasse* mit dem noch fehlenden Objekt.

8.4.4.2 *Verallgemeinerung der Strategie*

Bei der Kombination aus «Klassenneubildung» und «Klassenerweiterung» wurde in keinem Fall eine Anzahl ermittelt, die nicht der gesuchten Anzahl entsprach. Die nachfolgende Tabelle (8.1.7) zeigt exemplarisch, die Anwendung der Strategie:

Kombinationen ohne Wiederholung (n=5, k=2; 10 Mögl.)	 *1-2 2-3 3-4 4-5* *1-3 2-4 3-5* *1-4 2-5* *1-5* *Lucas, CGSB, K. o. Wh., Lotto*
Kombinationen mit Wiederholung (n=5, k=2; 15 Mögl.)	 *Stefan, KGSW, K. m . Wh. Dominosteine*
Variationen ohne Wiederholung (n=5, k=2; 20 Mögl.)	 *Robin, KGSD, V. o. Wh., Zahlen aus Ziffernkarten*

Tab. 8.17 Kombination aus «Klassenneubildung» und «Klassenerweiterung» bei verschiedenen Grundfiguren[30]

30 Bei den Darstellungen der Strukturierungsstrategien der Lernenden ist zu berücksichtigen, dass diese in einigen Fällen zunächst die neu hinzukommenden Objekte erstellten sowie die Anzahl benannten und anschließend von der Interviewerin gebeten wurden, die Objekte noch einmal alle zu notieren. Entsprechend wurden die Objekte trotz Rückgriffs auf die vorherige Lösung alle neu notiert.

Sie ist auf der Grundlage der Strukturierungen der Lernenden wie folgt zu verallgemeinern:

Kombination aus «Klassenerweiterung» und «Klassenneubildung»

1. Erweitere jede der gebildeten Klassen um eine Kombination mit dem neuen Element.
2. Bilde eine neue Klasse, die alle noch fehlenden Objekte enthält.

8.4.5 Fazit

Lernende ermitteln die Anzahl aller Figuren zu der Erweiterung der Problemstellungen analog oder rekursiv. Dabei wurden im Rahmen dieser Untersuchung die rekursiven Strategien genauer betrachtet. Ein rekursives Vorgehen ist aus fachlicher Sicht ein zentraler Zugang zur Anzahlbestimmung (vgl. 1.2.2). Dazu verwenden die Lernenden verschiedene rekursive Strategien, bei denen sich ebenso, wie bei den Strukturierungsstrategien zur Lösung der Grundaufgaben, die Frage stellt, ob die einzelnen Strategien sicherstellen, dass die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellt wird.
Insgesamt wurden verschiedene rekursive Strategiebausteine identifiziert. In Kombination mit den Strukturierungsstrategien zur Grundaufgabe lassen sich mittels dieser Bausteine die rekursiven Strategien der Lernenden vollständig beschreiben. Dies gilt sowohl für Lernende, die die Anzahl indirekt ermittelten als auch für Schüler, die die Anzahl direkt über eine rekursive Rechnung ermittelten und eine gedankliche Strukturierung vornahmen.
Zur Beschreibung der Strategien der Lernenden wurden vier rekursive Strategiebausteine rekonstruiert. Der Baustein, die «Annahme von Proportionalität» davon stellt – ähnlich wie das Figurenbildungskonzept – keine Strategie dar, sondern eine Annahme über die Beziehung zwischen den bereits erstellten Figuren und der Anzahl der Figuren mit dem neuen Element. Neben diesem Baustein wurden unabhängig von der kombinatorischen Figur drei verschiedene Strukturierungsstrategien bei der Erweiterung der Aufgabenstellungen identifiziert. Zu unterscheiden ist zwischen der «Klassenneubildung», der «Klassenerweiterung» und einer Kombination aus «Klassenneubildung» und «Klassenerweiterung». Alle drei Strategiebausteine hängen eng mit der «Elementfixierung» zusammen, da notwendigerweise Figuren mit dem neu hinzukommenden Element gebildet werden. Die Strategie «Klassenneubildung» war in Kombination mit allen Strategiebausteinen zu beobachten. Die Strategie «Klassenerweiterung», trat, ebenso wie die Kombination aus «Klassenneubildung und -erweiterung» nur auf, wenn die Anzahl der Figuren bei der vorherigen Lösung durch die «Elementfixierung» (vgl. 7.1) ermittelt oder eine nachträgliche Strukturierung im Sinne dieser Strategie vorgenommen wurde.

Strategie	Vorgehen	Plakatives Beispiel
«Annahme von Proportionalität»	Lernende, deren Anzahlbestimmung eine Proportionalitätsannahme unterliegt, gehen davon aus, dass die Anzahl der Figuren mit dem neuen Element der Anzahl der Figuren mit einem festen Element in der Grundaufgabe entspricht.	„Der könnte sich 14 kaufen, weil wir hatten ja schon welche, und das waren zehn (L. zeigt auf die bereits gefundenen Lösungen der Grundaufgabe) und dann immer noch 4 dazu sind 14." – Also vier, weil das ja immer vier Eishörnchen mit einer Sorte waren. *Larissa CGSB, K. m. Wh. Eismann*
«Klassenneubildung»	Lernende, die die Strategie «Klassenneubildung» nutzen, bilden eine neue Klasse, die (alle) Objekte enthält, in denen das neue Element vorkommt. So bildet Robin eine Klasse in der alle Objekte mit dem blauen Plättchen enthalten sind.	 *Robin, CGSB, K. m. Wh. Eismann*
«Klassenerweiterung»	Lernende, die die Strategie „Klassenerweiterung" nutzen, erweitern die bereits gebildeten Klassen aus der vorangegangenen Aufgabe um jeweils die Kombination, die mit dem neuen Element entstehen kann. So fügt Lara jeder vorherigen Gruppe ein Objekt, welches ein blaues Plättchen enthält, hinzu.	 *Lara, GSTB, K. m. Wh. Eismann*
Kombination aus «Klassenneubildung» und «Klassenerweiterung»	Lernende, die eine Kombination aus «Klassenneubildung» und «Klassenerweiterung» nutzen, erweitern die bestehenden Klassen und bilden neue noch fehlende Klassen. So fügt Stefan jeder Klasse einen Dominostein mit dem Punktmuster „5" hinzu und bildet eine neue Klasse mit dem Punktmuster „5 und 5".	 *Stefan, KGSW, K. m. Wh. Dominosteine*

Tab. 8.18 Rekursive Strategiebausteine

In der Literatur gibt es bislang noch keine Befunde zu den rekursiven Strategien von Lernenden beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen und insofern auch keine Klassifizierung. Es sind jedoch insbesondere Befunde darüber zu finden, dass Lernende beim Lösen von Musterfolgen ein proportionales Wachstum der Folgen annehmen und diese Annahme zur Lösungsfindung nutzen (vgl. u. a. Akinwunmi 2012). Insofern gibt es Übereinstimmungen zwischen den Ansätzen zum Lösen zueinander analoger Anzahlbestimmungsprobleme und Problemstellungen, in denen Musterfolgen fortgesetzt werden sollen.
Eine Betrachtung, in welchem Maße sich mittels der Strategien die gesuchte Figurenmenge vollzählig erstellen lässt, zeigt, dass diese sowohl mittels der «Annahme von Proportionalität» als auch durch eine konsequente Anwendung der Strategie «Klassenerweiterung» nicht erstellt wird. Die anderen beiden Strategien sind hingegen potentiell geeignet, die vollständige Figurenmenge zu erstellen.

8.5 Zusammenfassung

Ausgangspunkt dieses Kapitels waren Hinweise vorangegangener Untersuchungen, die aufzeigen, dass einige Lernende bereits in der Primarstufe informelle Zählstrategien entwickeln, wenn nach der Anzahl aller Figuren und nicht nach der Auflistung der Figurenmenge gefragt wird (vgl. 2.5). Da es bislang noch keine konkreten Befunde dazu gibt, welche Zählstrategien Lernende in der Grundschule verwenden und in welcher Beziehung diese zu den fachlichen Strategien stehen, wurde im Rahmen der Studie folgender Fragestellung nachgegangen:

Forschungsfrage 4
Welche Zählstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Anzahlbestimmung?

Die Antwort lässt sich auf Basis der in den vorherigen Abschnitten dargestellten Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen: Die in der Untersuchung interviewten Lernenden wenden im Kontext kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme bereits verschiedene Zählstrategien an. Neben verschiedenen operationalen Strategien werden zur Lösung der zueinander analogen sowie der zueinander isomorphen Problemstellungen auch rekursive Strategien genutzt. Lernende, die operational die Anzahl aller Lösungen bei den Grundaufgaben bestimmen, gehen additiv oder multiplikativ vor. In einigen Fällen verwenden sie Kompensationsstrategien, wenn sie systematisch zu viele Objekte ermittelt haben. Der Tabelle sind alle identifizierten Strategien zu entnehmen.

Strategieklasse	Zählstrategie
Additive Strategien	Allgemeine additive Strategie «Aufeinanderfolgende Zahlen addieren»
	Allgemeine additive Strategie « Alle Figuren zu einem festen Element addieren»
	Allgemeine additive Strategien « Alle Figuren zu einem festen Element an einer festen Position addieren»
	Figurspezifische additive Strategie: «Kombinationen addieren»
	Figurspezifische additive Strategie: «Permutationen addieren»
Multiplikative Strategie	«Ausgangselemente und Figuren zu einem festen Element multiplizieren»
Kompensationsstrategien	«Doppelte wegnehmen»
	«Gruppen bilden»
Rekursive Strategien	«Annahme von Proportionalität»
	«Klassenneubildung»
	«Klassenerweiterung»
	Kombination aus «Klassenerweiterung» und «Klassenneubildung»

Tab. 8.19 Verwendete Zählstrategien

Hinsichtlich der additiven und multiplikativen Strategien ist von zentraler Bedeutung, dass die in der Tabelle dargestellten Strategien auf einem systematischen Erstellen der Figurenmenge beruhen oder auf einer vorgenommenen Anordnung, welche die Vollständigkeit der Figurenmenge aufzeigt. Einige Lernende erstellen jedoch auch eine Rechnung, die auf eine nachträgliche Umstrukturierung der Figurenmenge zurückzuführen ist und ausschließlich dazu dient, die Anzahlbestimmung zu vereinfachen. Diese Strategien sind insofern nicht geeignet kombinatorische Zählstrategien abzuleiten, die eine vollständige Auflistung der Figuren unnötig machen, sie sind jedoch zur Vereinfachung der Anzahlbestimmung sinnvoll.
Bei den genauer analysierten *additiven Strategien* ist zwischen *allgemeinen und figurspezifischen Strategien* zu unterscheiden. Bei Ersteren liegt der Fokus auf einer Strukturierung im Sinne einer allgemeinen Strategie, welcher sich in den additiven Rechnungen der drei identifizierten Strategien widerspiegelt. Figurspezifische additive Strategien beruhen hingegen auf figurspezifischen Eigenschaften, welche sich ebenfalls in den Rechnungen zeigen. Identifiziert wurden sie im Rahmen dieser Untersuchung nur für Variationen ohne Wiederholung.
Ein Vergleich der additiven Strategien der Lernenden mit den fachlichen Strategien zeigt, dass diejenigen Strategien, die auf einem abhängigen Figurenbildungskonzept beruhen, dem Additionsprinzip entsprechen. Auf einem unabhängigen Figurenbildungskonzept basierende Strategien sind entsprechend klar von

dem Prinzip zu unterscheiden, da die notwendige Disjunktheit der Mengen nicht gegeben ist. Parallelen zeigen sich zwischen letztgenannter Lernendenstrategie und dem Prinzip des Ein- und Ausschaltens, welches ebenfalls auf der Addition nicht disjunkter Mengen basiert. Im Gegensatz zu den identifizierten Strategien der Lernenden wird dabei jedoch eine Kompensation vorgenommen. In der Literatur (vgl. Grassmann 2002) gibt es ebenfalls Hinweise auf ähnliche additive Strategien. Diese lassen sich auf der Grundlage der Ergebnisse dieser Untersuchung klassifizieren und hinsichtlich der Beziehungen zu den fachlichen Vorgehensweisen einordnen. Die beiden rekonstruierten figurspezifischen Strategien ermitteln in beiden Fällen die Anzahl der Figurenmenge und weisen einen engen Zusammenhang zu den historischen Zugängen zum Lösen von Variationsproblemen auf. Damit grenzen sie sich gleichzeitig klar von der vorgenommenen Strukturierung im Baumdiagramm und der daraus abgeleiteten additiven Strategie ab. In den additiven Rechnungen spiegelt sich insbesondere die Beziehung der Variationen ohne Wiederholung zu den Kombinationen mit und ohne Wiederholung wider (vgl. 8.1).

Insgesamt konnte über alle Figuren hinweg *eine multiplikative Strategie* rekonstruiert werden, die auf dem direkten Schluss von der Anzahl der Figuren mit einem festen Element auf die Anzahl aller Figuren basiert. Die von den Lernenden gebildete multiplikative Rechnung besteht unabhängig von der kombinatorischen Figur und dem Kontext jeweils aus zwei Faktoren. Einer dieser Faktoren entspricht der Anzahl der Figuren mit einem festen Element, der andere der Anzahl der Ausgangselemente. Durch Rechnung ermitteln die Lernenden bei allen Figuren die Anzahl einer Figurenmenge, die nicht der gesuchten entspricht. Eine auf der Rechnung basierende Konstruktion der Figurenmenge zeigt, dass diese aus Mengen besteht, die nicht disjunkt sind und das multiplikative Vorgehen entsprechend nicht mit dem allgemeinen Zählprinzip gleichgesetzt werden kann. In der Literatur liegen bislang keine konkreten Analysen zu den multiplikativen Rechnungen von Lernenden bei Anzahlbestimmungsproblemen vor. Eine genauere Analyse einiger dargestellter multiplikativer Rechnungen zeigt jedoch, dass die gebildeten Produkte sich ebenfalls über den Schluss von der Anzahl der Figuren mit einem festen Einzelelement auf die Anzahl aller Figuren erklären lassen (vgl. 8.2).

Lernende, die zunächst mittels eines systematischen Vorgehens und aufgrund eines unabhängigen Figurenbildungskonzeptes zu viele Figuren erstellten, verwenden *Kompensationsstrategien*, um ausgehend von der erzeugten Figurenmenge die gesuchte zu erhalten. Zu unterscheiden ist zwischen den Strategien «Doppelte wegnehmen» und «Gruppen bilden». Beide Strategien werden bislang in den Befunden vorangegangener Untersuchungen nicht konkret benannt. Unter propädeutischen Gesichtspunkten ist die enge Beziehung zwischen den beiden Kompensationsstrategien und den fachlichen Zählstrategien allerdings zentral. So zeigt ein Vergleich die enge Verknüpfung der Strategie «Doppelte wegnehmen» mit dem Prinzip des Ein- & Ausschaltens. Ebenso weist die Strategie «Gruppen bilden» einen engen Bezug zur Quotientenregel auf (vgl. 8.3).

Lernende, die zueinander analoge Problemstellungen *mittels rekursiver Strategien* lösen, erstellen entweder alle neu hinzukommenden Lösungen oder ermitteln die Anzahl der neu hinzukommenden Objekte mittels einer Rechnung. Beide Wege beruhen auf drei rekursiven Strukturierungsstrategien und bzw. oder auf der «Annahme von Proportionalität», welche insbesondere auch beim Fortsetzen von Musterfolgen eine zentrale Rolle spielt, jedoch hinsichtlich des Lösens von Anzahlbestimmungsproblemen noch nicht identifiziert wurde. Unterschieden werden die «Klassenneubildung», die «Klassenerweiterung» und die Kombination aus den beiden genannten Strategien. Die erstgenannte Strategie wurde von den Lernenden unabhängig von der vorherigen Strukturierungsstrategie verwendet. Die beiden anderen traten nur in Kombination mit einer vorherigen Strukturierung im Sinne einer der beiden Varianten der «Elementfixierung» auf. Eine Analyse, inwiefern mittels einer konsequenten Anwendung der Strategien oder durch die «Annahme von Proportionalität» die jeweiligen gesuchten Figurenmengen erstellt werden können, zeigt, dass sowohl durch die «Klassenerweiterung» als auch durch die «Annahme von Proportionalität» systematisch nicht die gesuchte Anzahl ermittelt wird. Die anderen beiden Strategien eignen sich hingegen beide grundsätzlich zur vollzähligen Anzahlbestimmung, stellen diese jedoch nicht unbedingt sicher (vgl. 8.4).
Aus den Ergebnissen dieses Kapitels lässt sich schlussfolgern, dass Lernende bereits in der dritten Klasse eine Reihe sinnvoller und zielführender Zählstrategien verwenden, welche zu Teilen bereits auf den grundlegenden Ideen der fachlichen Zählstrategien basieren. Anderen Zählstrategien der Lernenden unterliegen hingegen Konzepte, die nicht mit den fachlichen übereinstimmen.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Diskrepanz zwischen der Bedeutung kombinatorischer Kompetenzen auf der einen und den Schwierigkeiten von Lernenden beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme auf der anderen Seite. Es wurde herausgestellt, dass unter propädeutischen Gesichtspunkten die Thematisierung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme bereits in der Grundschule von zentraler Bedeutung ist, eine solche jedoch unter der heute gängigen genetischen Auffassung vom Lernen einige Konsequenzen mit sich bringt. So bedarf es unter dieser Auffassung einerseits der Kenntnisse über die Vorgehens- und Denkweisen von Lernenden beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme und andererseits auch über die Beziehung zwischen den Vorgehens- und Denkweisen von Lernenden und den fachlichen Strategien und Konzepten. Beide Aspekte sind von besonderer Relevanz, um ausgehend von den Strategien und Konzepten der Lernenden Anlässe zu schaffen, die fachlichen Strategien und Konzepte zu entwickeln. Unter dieser Perspektive stand folgende übergeordnete Forschungsfrage im Mittelpunkt der Arbeit:

> *Wie lösen Lernende der Primarstufe vor der Thematisierung im Unterricht kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme und in welcher Beziehung stehen die Vorgehensweisen und Denkwege der Lernenden zu den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten?*

Um diese Beziehungen konkreter in den Blick nehmen zu können, wurde zunächst geklärt, welche Strategien und Konzepte die Mathematik bereitstellt, um elementare kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme zu lösen.

Es wurde gezeigt, dass unter propädeutischen Gesichtspunkten insbesondere das strukturierte Auflisten sowie die Anwendung von Zählstrategien eine zentrale Rolle spielen. Zudem wurde herausgestellt, dass die heutige Thematisierung von Anzahlbestimmungsproblemen von der historischen Entwicklung kombinatorischer Zählstrategien und Operationen abweicht. Diese Erkenntnis kann insofern bedeutsam sein, als oftmals Parallelen zwischen der ontogenetischen und der phylogenetischen Entwicklung identifiziert werden können (vgl. Kap. 1).
Die Analyse der vorliegenden Studien zum Lösen kombinatorischer Anzahl- und Auflistungsprobleme mit besonderem Blick auf die Strukturierungs- und Zählstrategien von Lernenden zeigt, dass die Vorgehensweisen einerseits insbesondere von verschiedenen Aufgabenvariablen, wie der kombinatorischen Figur, den zugrunde liegenden Modellvorstellungen sowie der Art und Anzahl zu kombi-

nierender Objekte abhängen. Andererseits sollen jedoch auch verschiedene Personenvariablen wie das Alter und die kognitive Entwicklung einen Einfluss haben. Informationen darüber, welchen Einfluss diese Faktoren konkret auf die Strategien von Lernenden beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen haben, sind den vorangehenden Untersuchungen nicht zu entnehmen. Bekannt ist aber, dass vor allem ältere Lernende zur Lösung von Auflistungs- und Anzahlbestimmungsproblemen oftmals eigenständig Strukturierungen vornehmen und die Bereitstellung von Material dazu führt, dass bereits Lernende im Grundschulalter nicht ausschließlich über Versuch und Irrtumsstrategien die Figuren erstellen. Lösungsstrategien von Lernenden werden insbesondere im Kontext von Auflistungsproblemen beschrieben und bezugnehmend auf verschiedene Aspekte dargestellt. In einigen Beschreibungen werden Strategien abhängig davon, ob sie die Figurenmenge vollzählig erstellen, als Suche mit System oder als Makrostrategie klassifiziert. Nicht berücksichtigt wird in diesen Ansätzen, ob Lernende Strategien verwenden, die die von ihnen erstellte Figurenmenge vollständig erzeugen, jedoch nicht der gesuchten Figurenmenge entsprechen.
Die Analyse der in den vorhandenen Studien benannten Strategien lässt erkennen, dass zu vielen, jedoch nicht zu allen kombinatorischen Figuren Informationen vorliegen. Vergleiche benannter Strategien in verschiedenen Studien zeigen große Gemeinsamkeiten zwischen Strategien, die nahelegen, dass diese zu Teilen unabhängig und zu Teilen abhängig von verschiedenen Aufgabenvariablen verwendet werden. Informationen zur Anwendung von Zählstrategien liegen spärlich vor, da der Studienfokus meist auf dem Lösen von Auflistungsproblemen liegt. Insbesondere unterrichtspraktische Artikel und Bücher liefern jedoch eine Reihe von Hinweisen darauf, dass Zählstrategien von Lernenden bereits intuitiv verwendet werden, wenn nach der Anzahl der Lösungen gefragt wird.
Abzuleiten ist, dass bezüglich des Lösens von Auflistungsproblemen bereits einige wesentliche Informationen vorliegen, die voraussichtlich auf das Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen übertragbar sind. Zugleich wurde jedoch auch ersichtlich, dass insbesondere Informationen darüber fehlen, welche Rolle Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen von Lernenden spielen, wie sich diese unter Berücksichtigung des Einflusses von Aufgabenvariablen beschreiben lassen und welche Strukturierungs- und Zählstrategien Lernende bereits vor der systematischen Thematisierung im Unterricht verwenden (vgl. Kap. 2).
Ausgehend von diesen theoretischen fachlichen und fachdidaktischen Erkenntnissen, wurde die Ausgangsfrage für die empirische Studie in fünf Forschungsfragen aufgefächert:

Forschungsfragen
1. Wie beeinflussen die kombinatorische Figur und der Aufgabenkontext die Anzahlbestimmungsstrategien von Drittklässlern?
2. Welche Rolle spielen Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen von Drittklässlern?
3. Wie lassen sich die Strukturierungsstrategien unter Berücksichtigung des Einflusses der Aufgabenvariablen „kombinatorische Figur“ und „Kontext“ beschreiben?
4. Welche Strukturierungsstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen?
5. Welche Zählstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen?

Nachfolgend werden die gewonnenen Erkenntnisse zunächst in Abschnitt 9.1 kurz zusammengefasst. Dabei werden neben den zentralen Ergebnissen der Untersuchung auch deren Grenzen hinsichtlich der Verallgemeinerbarkeit aufgezeigt, bevor im Ausblick (9.2) Folgerungen und Fragen aus den gewonnenen Erkenntnissen abgeleitet werden. Zunächst werden dort Konsequenzen für die didaktische Strukturierung des Unterrichts diskutiert, anschließend werden Folgerungen und weiterführende Fragestellungen für anknüpfende Forschungsinteressen formuliert.

9.1 Zusammenfassung

Im Folgenden werden die zentralen Ergebnisse der empirischen Untersuchung entlang der fünf Forschungsfragen zusammenfassend dargestellt, für eine genauere Darstellung sei auf die jeweiligen Zusammenfassungen am Ende der Ergebniskapitel 4 bis 8 verwiesen.

Forschungsfrage 1
Wie beeinflussen die kombinatorische Figur und der Aufgabenkontext die Anzahlbestimmungsstrategien von Drittklässlern?

Die kombinatorische Figur und der Kontext haben im Rahmen dieser Untersuchung wenig Einfluss darauf, ob Lernende die Anzahl über ein direktes oder indirektes Vorgehen abzählend oder rechnerisch ermitteln. Die Ergebnisse der Untersuchung legen jedoch nahe, dass die kombinatorische Figur oder aber die Anzahl der zu erstellenden Figuren einen Einfluss darauf haben, inwiefern Lernende ausgehend vom Erstellen der Lösungen eine Zählstrategie ableiten (vgl. 4.1).

Mit Blick auf die Verwendung von Strukturierungsstrategien zeigen sich deutliche *Einflüsse der kombinatorischen Figur* bei der Lösung von Variationsproblemen ohne Wiederholung und bei den Kombinationsproblemen mit Wiederholung. Dabei ist zu beachten, dass ein großer Teil der Lernenden die Eigenschaften der jeweiligen Figur in der Strukturierung berücksichtigt, dies jedoch nicht für alle Lernenden gilt (vgl. 4.2.1 und zur genaueren Darstellung der Strategien 7.2).
Der *Aufgabenkontext* hat ebenfalls bei einigen wenigen Lernenden einen zentralen Einfluss auf die Strukturierungsstrategie. So zeigte sich, dass bei den Aufgaben „Dominosteine" und „Zahlen aus Ziffernkarten" Strategien beim Erstellen der Lösungen bzw. zur Begründung der Vollständigkeit der Lösungen verwendet wurden, die sich direkt auf den spezifischen Kontext beziehen. Eine solche Abhängigkeit der Strukturierung und Strategiewahl konnte bei den anderen Problemstellungen nicht identifiziert werden (vgl. 4.2.2). Hervorzuheben ist, dass insbesondere die kontextspezifische Strategie zu der Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten" geeignet ist, die Vollzähligkeit der Lösungen sicherzustellen. Entsprechend sollten der Wert und die Sinnhaftigkeit dieser Strategien aus der Sicht der Lernenden berücksichtigt werden, wenngleich diese sich nicht eignen, daraus allgemeine Zählstrategien abzuleiten.

Aus den Ergebnissen ist zu folgern, dass im Rahmen von Studien beide Einflussgrößen bei der Erhebung und Beschreibung der Strategien von Lernenden zu berücksichtigen sind. Die Bedeutung figurspezifischer Eigenschaften für die Strategien von Lernenden wurde im Rahmen dieser Untersuchung für die Kombinationen mit Wiederholung und die Variationen ohne Wiederholung identifiziert. Welche Rolle spezielle Eigenschaften auch bei anderen Figuren bei der Anzahlermittlung spielen, lässt sich auf der Basis der Untersuchungsergebnisse nicht klären.

Forschungsfrage 2
Welche Rolle spielen Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen von Drittklässlern?

Die Ergebnisse der Studie zeigen auf, dass Strukturierungen in den Anzahlbestimmungsprozessen aller Lernenden, unabhängig davon, ob sie die gesuchte Anzahl indirekt oder direkt bestimmen, eine zentrale Rolle spielen.
Strukturierungen bei indirekten Anzahlbestimmungen lassen sich dabei abhängig von den Lernenden in der zeitlich sukzessiven Erstellung der Figurenmenge und der späteren räumlich simultanen Strukturierung lokalisieren. Die Strukturierungen verändern sich oftmals im Verlauf des Lösungsprozesses. Auch Lernende, die zunächst Figuren ohne eine zu erkennende Strukturierung des Lö-

sungsprozesses erstellen, entwickeln in vielen Fällen im Verlauf des Anzahlbestimmungsprozesses eine Strukturierungsstrategie zum Erstellen der Figurenmenge oder nehmen nachträglich eine räumliche Strukturierung der bereits erstellten Figurenmenge vor. Insgesamt zeigt sich, dass im Verlauf des Lösungsprozesses und insbesondere über die Bearbeitung mehrerer Aufgabenstellungen hinweg der Grad an Strukturierung zunimmt. Diese Ergebnisse stimmen insofern mit den bereits vorliegenden Erkenntnissen zu den Lösungsstrategien bei Auflistungsproblemen überein (vgl. 2.2). Zentral ist, dass Lernende, die die Figurenmenge vollständig strukturiert erstellt haben, diese keinesfalls selbstverständlich auch räumlich strukturieren können. Diese Schwierigkeit äußert sich in der fortlaufenden Umstrukturierung der Figurenmenge. Ursache sind von den Lernenden gewählte Strukturierungskriterien, welche die Figurenmenge in nicht disjunkte Teilmengen zerlegen. Einzelne Figuren gehören demnach zu verschiedenen Klassen und werden zur Vollzähligkeit fortwährend der jeweiligen Klasse zugeordnet. Im Vergleich der Anzahlbestimmungsprozesse verschiedener Lernender zeigt sich neben der Zunahme des Strukturierungsgrades insbesondere eine Verdichtung auf die Verwendung einiger weniger Strukturierungen. Diese Strukturierungen bilden bei einigen Lernenden zugleich den Ausgangspunkt für die Ableitung einer Zählstrategie.
Bei direkten Anzahlbestimmungen spielen in der Regel die gleichen vollständigen Strukturierungen wie bei den indirekten Anzahlbestimmungen eine Rolle. Diese werden jedoch gedanklich vorgenommen und auf Nachfrage verbalisiert oder mittels Material veranschaulicht. Zentral ist dabei, dass bei direkten Anzahlbestimmungen oftmals nicht die Anzahl der gesuchten Figurenmenge erzeugt wird, sondern fast ausschließlich eine zu große Anzahl an Figuren. Genauere Kenntnisse über die von den Lernenden gedanklich vorgenommenen Strukturierungen sind insofern von zentraler Bedeutung, um die aufgestellten Rechnungen und die Denkwege der Lernenden besser zu verstehen.

Forschungsfrage 3
Wie lassen sich die Strukturierungsstrategien unter Berücksichtigung des Einflusses der Aufgabenvariablen „kombinatorische Figur“ und „Kontext“ beschreiben?

Die Strukturierungsstrategie eines Lernenden lässt sich als ein Konglomerat aus einem oder mehreren Bausteinen beschreiben. Bei diesen Bausteinen handelt es sich um das Figurenbildungskonzept des Lernenden sowie um eine oder mehrere Strategien, welche zu Teilen unabhängig von den Aufgabenvariablen kombinatorische Figur und Kontext und zu Teilen abhängig von diesen Variablen verwendet wird bzw. werden.

Der herausgearbeitete Beschreibungsansatz fußt auf dem Vergleich der Strukturierungen des Lösungsprozesses und der räumlich vorgenommenen Strukturierungen der Figurenmenge bei verschiedenen Lernenden zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen zu verschiedenen kombinatorischen Figuren. Dieser zeigte auf, dass innerhalb der Strukturierungen über verschiedene Figuren Ähnlichkeiten zu erkennen sind. Zugleich konnte auch erkannt werden, dass Teile der vorgenommenen Strukturierungen nur bei Problemstellungen zu speziellen kombinatorischen Figuren oder in seltenen Fällen in Abhängigkeit vom Kontext auftreten. Demnach sind die vorgenommenen Strukturierungen der Figurenmenge in der Regel nicht vollständig von der kombinatorischen Figur oder dem Kontext abhängig, sondern in den meisten Fällen zu Teilen auf diese Größen bezogen, so dass es notwendig ist, die Strukturierungen einzelner Lernender als ein Konstrukt aus verschiedenen Strategiebausteinen zu beschreiben.

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Konzept zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien greift insofern den Ansatz der Mikro- und Makrostrategien von Stein (1995, 1996) und Hoffmann (2003) auf (vgl. 2.3). Anders als dieses Konzept beruht die Beschreibung der Strategien auf Mikro- und Makroebene jedoch nicht auf gestalttheoretischen Aspekten, sondern berücksichtigt, dass einige der Strategien auf Mikroebene sich auf die besonderen Eigenschaften der kombinatorischen Figuren oder auf den Kontext beziehen, andere hingegen unabhängig davon zu beobachten sind. Eine Analyse der Strukturierungsstrategien gibt Hinweise auf den zusätzlichen Mehrwert durch den Bezug auf diese Aufgabenvariablen. So ist es mittels dieses Konzepts der Strategiebausteine möglich, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Strukturierungsstrategien von Lernenden bei verschiedenen kombinatorischen Figuren herauszustellen, Brüche in den Vorgehensweisen von Lernenden genauer zu lokalisieren (vgl. u. a. 6.1.2.2.), die Tragfähigkeit der einzelnen Strukturierungsstrategien hinsichtlich des Erstellens bzw. Strukturierens der gesamten Figurenmenge zu überprüfen (vgl. 7.2.4), die den operationalen Strategien zugrunde liegenden Strukturierungen zu identifizieren (vgl. 7.1) sowie Beziehungen zwischen den Strukturierungs- und Zählstrategien der Lernenden und den fachlichen Konzepten und Strategien herzustellen. Einschränkend ist zu berücksichtigen, dass das Konzept der Strategiebausteine im Rahmen dieser Untersuchung bei kombinatorischen Anzahlbestimmungsproblemen in Selektionskontexten zu Kombinationen mit und ohne Wiederholung und zu Variationen ohne Wiederholung entwickelt wurde. Zudem waren jeweils Figuren aus genau zwei Elementen zu erstellen. Insofern ist als Ergebnis der Studie festzuhalten, dass sich die Strukturierungen im Kontext dieser Problemstellungen mittels des Konzepts der Strategiebausteine beschreiben lassen. Ob eine Übertragbarkeit des Konzeptes auf Strukturierungen im Kontext anderer Anzahlbestimmungsprobleme (welche sich beispielsweise im Hinblick auf die Modellvorstellungen, die Figuren, die Anzahl der Elemente der Ausgangsmenge oder die Anzahl der zu kombinierenden Elemente unterscheiden), möglich ist, wurde nicht erhoben.

Forschungsfrage 4
Welche Strukturierungsstrategien verwenden Lernende der dritten Klasse zur Lösung von Anzahlbestimmungsproblemen?

Insgesamt verwendeten die Lernenden im Rahmen dieser Untersuchung bei Kombinationen ohne Wiederholung, acht verschiedene Strukturierungsstrategien, sechzehn bei Kombinationen mit Wiederholung sowie siebzehn bei Variationen ohne Wiederholung. Zu differenzieren ist zwischen Lernenden, die ausschließlich eine allgemeine Strategie, eine figurspezifische oder eine kontextspezifische Strategie verwendeten sowie Lernenden, die bei Kombinationen mit und Variationen ohne Wiederholung Kombinationen auf allgemeine und figurspezifische Strategien zurückgriffen. Da die Strukturierungsstrategien sich auch bezüglich eines abhängigen oder unabhängigen Figurenbildungskonzeptes unterscheiden, ergibt sich die große Anzahl verschiedener identifizierter Strukturierungsstrategien, welche sich jedoch oftmals nur durch geringe Unterschiede in den Vorgehensweisen unterscheiden (vgl. 7.3 sowie den Anhang für eine vollständige Auflistung aller im Rahmen dieser Untersuchung verwendeten Strategien).
Insgesamt wurden drei allgemeine Strategien, die «Disjunkte Paarbildung», die «Zyklische Musterbildung» und die «Elementfixierung», die in zwei Varianten vorkam, über alle Problemstellungen hinweg verwendet (vgl. 7.1). Für die Kombinationen mit Wiederholung und die Variationen ohne Wiederholung wurden zusätzlich *figurspezifische* Strategien rekonstruiert. Diese beziehen sich bei erstgenannter Figur auf die Anzahl der Wiederholungen gleicher Elemente in den Figuren, bei letztgenannter auf den Umgang mit der Vertauschung der Anordnung der Elemente in den Figuren (vgl. 7.2). Zudem wurde bei der Aufgabe „Dominosteine“ und Aufgabe „Zahlen aus Ziffernkarten“ eine *kontextspezifische* Strategie verwendet (vgl. 4.2).
Hinsichtlich der identifizierten allgemeinen und figurspezifischen Strategien zeigen sich Parallelen zu den Strategien zum Lösen von Auflistungsproblemen. So werden unter anderem die drei allgemeinen Strategien auch in den Untersuchungen Piagets und Inhelders (1975) benannt. Die den figurspezifischen Strategien zugrunde liegenden Handlungsmuster werden größtenteils ebenfalls bereits in vorangegangenen Studien dargestellt (vgl. u. a. Hoffmann 2003; Martino 1992). Daraus ist zu folgern, dass diese sich nicht konkret auf die gegebenen Bedingungen in der Studie beziehen, sondern es sich vielmehr um Strategien handelt, die bei bestimmten kombinatorischen Problemstellungen typischerweise von Lernenden verwendet werden. Es zeigte sich zudem, dass alle allge-

meinen Strategien grundsätzlich geeignet sind, die Figurenmenge vollzählig zu erstellen. Zu berücksichtigen ist, dass diese nicht sicherstellen, dass Figuren nicht doppelt erzeugt werden. Dies hängt von dem Figurenbildungskonzept der Lernenden ab. Die alleinige Anwendung figurspezifischer Strategien eignet sich hingegen nicht, um die Vollzähligkeit zu garantieren.
Auf der Basis der benannten Strategien wurden für alle drei Figuren die sechs jeweils am häufigsten verwendeten Strukturierungsstrategien identifiziert und hinsichtlich ihres Potentials, die Figurenmenge vollzählig erstellen zu können, betrachtet. Besonders auffällig hinsichtlich dieser Hauptstrategien war für alle Figuren die Dominanz von Strategien, in denen eine der Varianten der «Elementfixierung» als Baustein enthalten war. Anzunehmen ist, dass diese Dominanz auch darauf zurückzuführen ist, dass Umstrukturierungen, welche in der Regel zugunsten der «Elementfixierung» vorgenommen wurden, bei der Analyse der Hauptstrategien miteinbezogen wurden. Bei den Kombinationen mit Wiederholung und den Variationen ohne Wiederholung nahmen zudem figurspezifische Strategien eine zentrale Position ein.
Eine genauere Analyse, zur Eignung der Strukturierungsstrategien zur vollzähligen Anzahlermittlung, zeigte, dass für die jeweiligen Figuren jeweils vier der sechs der hauptsächlich verwendeten Strukturierungsstrategien diese sicherstellen. Bei den jeweils verbleibenden Strukturierungsstrategien wurde durch die alleinige Anwendung einer figurspezifischen Strategie die Vollzähligkeit nicht gewährleistet oder es wurden durch ein unabhängiges Figurenbildungskonzept Figuren durch die Strategien systematisch doppelt erstellt.

Auf der Basis der Analysen sind drei Ergebnisse bezüglich der Strukturierungsstrategien als besonders zentral herauszustellen: Festzuhalten ist insbesondere, dass Lernende eine große Anzahl verschiedener Strukturierungsstrategien verwenden, welche jedoch bei genauerer Betrachtung große Parallelen auch über die Bearbeitung von Problemstellungen zu verschiedenen kombinatorischen Figuren hinaus aufweisen. Die hauptsächlich verwendeten Strategien der Lernenden eignen sich in den meisten Fällen, um die Figurenmenge vollzählig zu erstellen, obwohl sie in der Regel nicht genau der Stufung im Baumdiagramm entsprechen. Die Ursache dafür, dass durchgängig strukturierte Lösungsstrategien der Lernenden nicht die gesuchte Figurenmenge erstellen, liegt in einem unabhängigen Figurenbildungskonzept durch das mittels der Strategien systematisch zu viele Figuren erzeugt werden.

Forschungsfrage 5
Welche *Zählstrategien* verwenden Lernende der dritten Klasse?

Die Lernenden verwendeten additive und multiplikative Strategien, sowie Kompensationsstrategien zur Anzahlbestimmung. Zudem griffen sie bei der Bearbeitung zueinander analoger und isomorpher Aufgabenstellungen auf rekursive Strategien zurück oder ermittelten die Anzahl der Lösungen indirekt. Letztgenannte Strategie wurde dabei im Rahmen dieser Untersuchung nicht genauer analysiert. Die über additive und multiplikative Vorgehensweisen ermittelten Anzahlen stimmten dabei ebenso, wie die rekursiven Strategien, nicht alle mit der richtigen Lösungsanzahl überein (vgl. 7.2). Zudem ist insbesondere bei den additiven und multiplikativen Strategien zu berücksichtigen, dass neben den genauer beschriebenen, einige Rechnungen unabhängig von Strukturierungsstrategien vorgenommen wurden. Lernende ordneten zur leichteren Anzahlbestimmung die Figuren in Paaren oder in Form eines Rechtecks an und nutzten diese zur Ableitung einer Rechnung.

Insgesamt wurden drei allgemeine additive sowie zwei figurspezifische additive Strategien identifiziert, die auf vorgenommenen kombinatorischen Strukturierungsstrategien beruhen. Letztgenannte wurden ausschließlich bei den Variationen ohne Wiederholung rekonstruiert (vgl. 8.1). Bemerkenswert ist, dass Lernende auch multiplikative Rechnungen verwenden. Diese entsprechen alle einer Strategie, welche auf einem direkten Schluss von der Anzahl der Figuren zu einem festen Element auf die Anzahl aller Figuren beruht. Als Resultat wird bei allen multiplikativen Rechnungen der Lernenden jedoch eine zu große Anzahl ermittelt (vgl. 8.2). Die Ergebnisse dieser Studie zeigen auch, dass Lernende bereits in der Lage sind, eigenständig Kompensationsstrategien zu entwickeln. Zu unterscheiden ist zwischen zwei Strategien: «Doppelte wegnehmen» und «Gruppen bilden» (vgl. 8.3). Zur Lösung der Erweiterungen der Problemstellungen verwenden Lernende auch rekursive auflistende und rechnerische Strategien. Die auflistenden Strategien setzen sich dabei aus den vorab verwendeten Strukturierungsstrategien und zusätzlichen rekursiven Strategiebausteinen zusammen, mittels derer die Anzahl der neu hinzukommenden Figuren ermittelt wird. Identifiziert wurden zwei verschiedene Strategien und eine Mischform der beiden Strategien. Zudem beruhen einige Strategien der Lernenden auf der «Annahme von Proportionalität». Eine Analyse, in welchem Maße mittels der rekursiven Strategien die Vollzähligkeit der Figurenmenge gewährleistet wird, zeigte, dass zwei Strategien potentiell geeignet sind, diese zu erstellen, die dritte jedoch ebenso wie «Annahme von Proportionalität» systematisch nicht die gesuchte Anzahl erzeugt. Rechnerische Strategien der Lernenden basieren auf den herausgearbeiteten Strukturierungen sowie insbesondere der Annahme von Proportionalität (vgl. 8.4). Von den rekonstruierten Strategien werden einige im

Rahmen von unterrichtspraktischen Artikeln genannt, zudem gibt es in der Studie Lacks (2009) Hinweise auf ähnliche additive und multiplikative Strategien, welche darauf schließen lassen, dass die Strategien der Lernenden nicht nur in Abhängigkeit von den in der Untersuchung verwendeten Aufgabenstellungen auftreten.

Besonders zentral ist das Resultat der Gegenüberstellung der Zählstrategien der Lernenden zu den fachlichen Vorgehensweisen. Diese offenbart gemeinsame zugrunde liegende Konzepte. So zeigt sich etwa, dass diejenigen additiven Strategien, die auf einem abhängigen Figurenbildungskonzept beruhen, dem allgemeinen Additionsprinzip entsprechen. Ebenso wurde herausgearbeitet, dass die grundlegenden Ideen hinter den Kompensationsstrategien mit zwei fachlichen Zählstrategien übereinstimmen. Die Strategien der Lernenden entsprechen der Durchführung der Zählstrategien auf der Handlungsebene. Ebenso zentral ist, dass andere Strategien sich von den fachlichen hinsichtlich der zugrunde liegenden Konzepte wesentlich unterscheiden, dies gilt beispielsweise für die multiplikative Strategie der Lernenden und das allgemeine Zählprinzip. Diese sind keinesfalls gleichzusetzen, da der multiplikativen Strategie der Lernenden anders als dem allgemeinen Zählprinzip keine Einteilung in disjunkte Stufen unterliegt.
Einschränkend ist zu berücksichtigen, dass sich die Verwendung der Zählstrategien auf die im Rahmen der Untersuchung verwendeten Problemstellungen bezieht. Ob ähnliche Zählstrategien auch bei anderen Problemstellungen verwendet werden, ist zukünftig zu prüfen.

9.2 Ausblick

Die Ergebnisse der empirischen Studie verdeutlichen, welche nicht zu unterschätzenden Kompetenzen Lernende bereits in der Grundschule in Hinblick auf das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme mitbringen. Diese beziehen sich insbesondere auf verschiedene Strukturierungsstrategien, die geeignet sind, die Figurenmenge vollzählig zu erstellen und auf Zählstrategien, die enge Bezüge zu den fachlichen Zählstrategien aufweisen. Diese Kenntnis stellt einen wesentlichen Ausgangspunkt für die propädeutische Thematisierung von Anzahlbestimmungsproblemen in der Grundschule dar.
Ausgehend von den Erkenntnissen der Untersuchung stellt sich die Frage nach den Konsequenzen für die Unterrichtspraxis sowie für die weitere Erforschung des kombinatorischen Denkens von Lernenden. Beiden Aspekten wird im Folgenden nachgegangen. Zunächst werden in Abschnitt 9.2.1 Schlussfolgerungen für die Unterrichtspraxis dargestellt. Daran anknüpfend in Abschnitt 9.2.2 welche weiteren Forschungsinteressen sich aus den Erkenntnissen dieser Studie ergeben.

9.2.1 Folgerungen für die Unterrichtspraxis

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung tragen dazu bei, dass Lehrkräfte die Strategien und Schwierigkeiten von Lernenden besser verstehen und mögliche Fehler bei der Anzahlbestimmung identifizieren können. Zentrales Instrument für ein solches besseres Verständnis ist das entwickelte Beschreibungsmodell (vgl. 6). Zugleich geben die Ergebnisse Hinweise auf Gemeinsamkeiten und zentrale Unterschiede zwischen den informellen Vorgehensweisen von Lernenden und den fachlichen Strategien und Konzepten. Diese gestatten es, konkrete Konsequenzen für den Unterricht abzuleiten.
Zusätzlich wurde als Ziel dieser Arbeit in Kapitel 3 im Sinne der didaktischen Rekonstruktion die Ableitung von Leitlinien und –ideen für die Unterrichtspraxis auf der Grundlage der gewonnenen Erkenntnisse formuliert (vgl. 3.2). Die Erkenntnisse der Untersuchung bringen eine Reihe von Folgerungen für die Unterrichtspraxis mit sich. Im Folgenden werden Leitideen zur didaktischen Strukturierung des Unterrichts formuliert, die sich auf die *Entwicklung von Entwicklung von Strukturierungsstrategien* und darauf aufbauend auf die *Entwicklung von Zählstrategien* beziehen. Abschließend werden Überlegungen zur *Auswahl von Aufgabenstellungen* dargestellt.

1. Die Entwicklung von Strukturierungsstrategien

Zentral für den Unterricht ist, dass es darum geht Strukturierungsstrategien zu entwickeln, die geeignet sind die Vollzähligkeit der Figurenmenge sicherzustellen. Um bei den Lernenden ein Bewusstsein dafür zu schaffen, wann Strategien als tragfähig einzustufen sind, bedarf es (1) einer Transparenz für die Lernenden und (2) einer expliziten Thematisierung von Kriterien.

Beide Aspekte sind wesentlich, da sich in den Strukturierungen und in den Argumentationen der Lernenden teilweise Fokussierungen auf figurspezifische Aspekte, wie beispielsweise die Vertauschung der Anordnung der Elemente in den Figuren zeigen. Diese eignen sich für eine durchgängige Strukturierung des Lösungsprozesses, die aus Sicht der Lernenden vermutlich im Mittelpunkt steht. Sie gewährleisten eine vollzählige Erstellung der Figurenmenge nicht ohne weitere Strategien.

Entwicklung von Kriterien für tragfähige Strategien
Die vielfältigen Strukturierungsstrategien von Lernenden sollten den Ausgangspunkt des Lernprozesses darstellen. Basierend auf Vergleichen dieser Strategien können Kriterien herausgearbeitet werden, die notwendig sind, um die Vollzähligkeit der Figurenmenge sicher zu gewährleisten. Mögliche auf den Erkenntnissen dieser Untersuchung basierende Kriterien sind:

1. Vollständigkeit gebildeter Figuren in einer Gruppe bzw. über eine Phase
2. Vollständigkeit aller Klassen
3. Die Disjunktheit der Figuren innerhalb der verschiedenen Klassen
4. Übertragbarkeit der Strategie auf andere Probleme

Die ersten drei Kriterien stellen die Vollzähligkeit der Figurenmenge sicher. Das vierte Kriterium sollte auf der Grundlage der Bearbeitung mehrerer Problemstellungen herausgearbeitet werden, da das Ziel darin besteht, Strategien zu entwickeln, die auch unabhängig von festen Kontexten verwendet werden können. Zusätzlich sollte erarbeitet werden, dass eine konsequente Anwendung der Strategien notwendig ist.

Entwicklung verschiedener tragfähiger Strategien
Kriterien, wie die oben genannten können von den Lernenden durch Vergleiche der verwendeten Strategien und geeignete Anregungen seitens des Lehrers zum genauen Vergleich entwickelt werden. Strategien der Lernenden können auf diese Kriterien überprüft und modifiziert werden, so dass insgesamt einige wenige Strategien übrig bleiben, mittels derer die Figurenmengen vollzählig ermittelt werden. Da aus fachlicher Sicht zentral ist, dass verschiedene Strukturierungen und später auch Zählstrategien möglich sind, ist es von besonderer Bedeutung, dass kein Fokus auf eine einzige Strategie gelegt wird. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen vielmehr, dass verschiedene Strategien der Lernenden sich eignen.

Verallgemeinerung von tragfähigen Strategien
Die Lernenden sollten möglichst den Auftrag erhalten, ihre Strategien so zu beschreiben, dass diese auch von anderen anwendbar sind und zugleich auch in verschiedenen Kontexten angewendet werden können. Eine solche Darstellung ermöglicht es die Strukturierungsstrategien in ihrem Kern zu beschreiben und insbesondere später auch für die Ableitung von Zählstrategien zu verwenden.
Die Strukturierungen der Lernenden geben Hinweise auf algorithmische Vorgehensweisen, da es, bei der kombinatorischen Anzahlbestimmung insbesondere darum geht, Strategien für geschicktes Zählen zu entwickeln, ist es sinnvoll diese direkt zu thematisieren. Dies bedeutet konkret, dass Lernende ihre Strategie so darstellen sollen, so dass ein anderer sie ebenfalls verwenden kann. Bedeutsam ist es dazu, einen gemeinsamen Wortschatz oder andere Formen der Beschreibung zu erarbeiten. Im Rahmen der Untersuchung nutzten Lernende intuitiv Begriffe wie „Truppen“, „Tauschpaare“, „Die Doppelten“ und Aussagen, wie „Alle mit dem Ersten, alle mit dem zweiten…“, diese bieten gute Anknüpfungspunkte, um die Beschreibung der Vorgehensweisen bereits von dem konkreten Kontext zu lösen.

Umgang mit Strategien, die nicht disjunkte Mengen erzeugen
Anzunehmen ist auf der Grundlage der Ergebnisse dieser Untersuchung, dass Lernende oftmals auch Strategien entwickeln, bei denen die Disjunktheit der Figuren nicht gegeben ist. Diesbezüglich sind zwei Aspekte zentral. Erstens ist es notwendig ein Bewusstsein dafür zu schaffen, dass über verschiedene strategische Vorgehensweisen Figuren doppelt erstellt werden. Zweitens sollten die von den Lernenden entwickelten Strategien nicht als falsch eingestuft und verworfen werden, sondern vielmehr als Ausgangspunkt für die Thematisierung von Strategien eingesetzt werden.

Die Thematisierung der Disjunktheit ist von besonderem Interesse, da einigen Lernenden offensichtlich nicht klar ist, dass sie mittels ihrer Strategien Figuren doppelt erzeugen. Insbesondere der im Kontext der Multiplikation beschriebene „Direkte Schluss von der Anzahl der Figuren mit einem festen Element auf die Anzahl aller Figuren", zeigt, dass Lernende systematische Vorgehensweisen entwickeln, die auf richtigen Grundannahmen beruhen, jedoch systematisch Figuren doppelt erzeugen. Sinnvoll ist es, gemeinsam mit den Lernenden zu überlegen, wie diese Strategien – insbesondere durch Kompensationshandlungen so modifiziert werden können, dass die gesuchte Figurenmenge entsteht.

Die Ergebnisse der Untersuchung belegen, dass einige Lernende eigenständig Kompensationsstrategien entwickeln, wenn sie zu viele Objekte ermittelt haben. Zwei Wege, deren Fokussierung im Unterricht unter propädeutischen Gesichtspunkten zentral erscheint. Daraus ist auch zu schlussfolgern, dass das Bilden nichtdisjunkter Klassen auf keinen Fall als falsch angesehen werden sollte oder den Kindern unterstellt werden sollte, sie hätten etwas vergessen. Vielmehr ist es wichtig, die nicht disjunkten Mengen in den Fokus zu rücken, damit bei den Lernenden ein Bewusstsein dafür geschaffen werden kann, dass es verschiedene Wege gibt: Also erst zu jedem Element alles finden und dann überlegen, welche Ausgleichshandlungen klug sind. Im Sinne von: „Ich mache das so, wie machst du das?"

2. Die Entwicklung von Zählstrategien

Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen auch auf, dass Lernende bereits sinnvolle Zählstrategien zur Anzahlbestimmung verwenden, an diese gilt es im Unterricht anzuknüpfen. Insofern ist es von zentraler Bedeutung, frühzeitig anstelle von Auflistungsproblemen bereits Anzahlbestimmungsprobleme zu verwenden, in denen die Strategien thematisiert werden können.
Die Thematisierung von Kompensationsstrategien bietet bereits eine sinnvolle Situation, um mathematische Zählstrategien zu thematisieren. Sie ist zudem nicht an das Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen gebunden. Dabei ist es

bedeutsam auch darauf hinzuweisen, dass diese Strategien auch von Mathematikern verwendet werden.
Additive und multiplikative Strategien können basierend auf Strukturierungsstrategien entwickelt werden. Es ist anzunehmen, dass einige Lernende auch bereits direkt Zählstrategien verwenden. Im Fokus sollte die Beziehung zwischen den Rechnungen und den Strukturierungen stehen. Herausgearbeitet werden sollte, dass aus den Strukturierungen Rechnungen abgeleitet werden können und anders herum aus den Rechnungen Strukturierungen. Denkbar ist beispielsweise nach der Verallgemeinerung von Strukturierungsstrategien auch zu überlegen, welche Rechnungen zu diesen Strategien gehören und diese ebenfalls zu notieren.

3. Zur Auswahl von Anzahlbestimmungsproblemen

In Aufsätzen aus Grundschulzeitschriften und auch in Schulbüchern werden häufig kombinatorische Problemstellungen zum Kreuzprodukt verwendet, um auf dieser Grundlage die Strukturierung des Lösungsprozesses in Form des Baumdiagramms zu erarbeiten. Eine solche Thematisierung ist bedeutsam,
werden Lernende jedoch vorrangig mit Problemstellungen zum Kreuzprodukt konfrontiert ist es möglich, dass sie das Kombinieren von Elementen zu Figuren mit dem Bilden des Kreuzproduktes gleichsetzen.

Für Lernende ist es zentral zu verstehen, dass Figuren aus verschiedenen Elementen gebildet werden und verschiedene Strategien gegebenenfalls auch Figuren doppelt erzeugen, wenn die bereits erstellten Figuren nicht berücksichtigt werden. Ein solches Problem entsteht bei Problemen zum Kreuzprodukt nicht, da Elemente aus verschiedenen Mengen zu Figuren zusammengefügt werden. Demnach wird angeregt, bereits früh Problemstellungen zu thematisieren, in denen diese Disjunktheit nicht immer gegeben ist.

9.2.2 Weiterführende Forschungsinteressen

“The literature has not sufficiently addressed students' ways of thinking about combinatorial concepts at a level that enables researchers to understand how students conceptualize counting problems.”
(Lockwood 2012, S. 95)

Diese Studie leistet einen Beitrag dazu, die von Lockwood (2012) beschriebene Diskrepanz zwischen dem bisherigen Kenntnisstand über die Denk- und Vorgehensweisen von Lernenden und dem notwendigen Wissen hinsichtlich des Lösens kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme zu verringern. Die Ergebnisse der Untersuchung liefern erste Erkenntnisse über die Beziehungen zwischen den informellen Vorgehensweisen und Denkwegen von Lernenden und den fachlichen Vorgehensweisen und Konzepten. Zugleich ergeben sich aufgrund der Erkenntnisse dieser Arbeit auch eine Reihe weiterführender Fragestellungen, deren Klärung notwendig ist, um die Konzepte von Lernenden besser zu verstehen. Diese Fragestellungen werden folgend hinsichtlich der drei schwerpunktmäßig betrachteten Aspekte *Einflussfaktoren, Beschreibung von Strukturierungsstrategien sowie Strukturierungs- und Zählstrategien* gegliedert. Die formulierten Fragestellungen beziehen sich dabei vorrangig auf die Erhebung der Denk- und Vorgehensweisen von Lernenden. Abschließend werden zudem Forschungsinteressen bezüglich der *Gestaltung des Unterrichts* formuliert.

(1) Einflussfaktoren

Die Ergebnisse der Untersuchung geben erste Einblicke, wie verschiedene Aufgabenvariablen die Strategien von Lernenden beeinflussen. Es zeigte sich, dass kombinatorische Figuren und ausgewählte Kontexte einen zentralen Einfluss auf die Lösungsstrategien einzelner Lernender haben. Anzunehmen ist, dass weitere Faktoren ebenfalls einen tragenden Einfluss haben. Dazu bedarf es weiterer Informationen. Zu klären ist unter anderem, wie die in den Problemstellungen impliziten Handlungsvorstellungen, sowie die Veränderung von Zahlenwerten die Strategien der Lernenden beeinflussen. Auch bedarf es weiterer Informationen zu den Figuren und Kontexten, da im Rahmen dieser Untersuchung lediglich eine geringe Auswahl in den Blick genommen wurde.

(2) Zur Beschreibung von Strukturierungsstrategien

Um die Vorgehensweisen von Lernenden besser zu verstehen und nutzen zu können, bedarf einer Beschreibung der Strategien. Im Rahmen dieser Studie wurde als möglicher Ansatz das Modell der Strategiebausteine entwickelt. Aufgezeigt wurde, dass sich mittels des Modells die Strukturierungsstrategien von Lernenden bei der Anzahlbestimmung im Kontext von Kombinationsproblemen mit und ohne Wiederholung sowie bei Variationsproblemen ohne Wiederholung beschreiben lassen. Dies gilt allerdings einschränkend für Selektionsprobleme sowie für die Zusammenstellung von Figuren aus zwei Elementen. Aufgrund der Beziehung zu anderen Untersuchungsergebnissen ist anzunehmen, dass das Konzept potentiell auf andere Problemstellungen übertragbar ist. Ob jedoch die Strukturierungsstrategien von Lernenden bei veränderten Aufgabenvariablen ebenfalls mit diesem Ansatz vollständig beschrieben werden können, bedarf einer empirischen Überprüfung. Zu klären sind insbesondere folgende Fragestellungen:

- Inwiefern ist das Konzept auf andere kombinatorische Figuren übertragbar?

- Welche Erweiterungen des Konzeptes (u.a. weitere Strategiebausteine; Klassen von Strategiebausteinen) sind notwendig, um beispielsweise eine Übertragung auf Variationsprobleme mit Wiederholung oder auf Permutationsprobleme mit und ohne Wiederholung zu ermöglichen?
- Ist das Konzept noch tragfähig, wenn die Anzahl der Elemente, aus denen die zu bildenden Figuren bestehen, erhöht wird?

(3) Erkenntnisse über Strukturierungs- und Zählstrategien

Um an die Denk- und Vorgehensweisen der Lernenden anknüpfen zu können bedarf es weiterer Kenntnisse über den Zusammenhang zwischen den fachlichen Strategien und Konzepten und denen von Lernenden. In der vorliegenden Arbeit wurden die Denk- und Vorgehensweisen von Lernenden bei der Bearbeitung kombinatorischer Selektionsprobleme zu Kombinationen mit und ohne Wiederholung und zu Variationen ohne Wiederholung betrachtet. Dabei wurde herausgestellt, dass die Vorgehensweisen und Denkwege in einem engen Zusammengang zu den jeweiligen gesuchten kombinatorischen Figuren stehen (vgl. Batanero et al. 1997a; Hoffmann 2003; Lockwood 2012 zur hervorgehobenen Bedeutung der Aufgabenstrukturen). Die Erkenntnisse dieser Studie beziehen sich ausschließlich auf das Lösen von Selektionsproblemen, inwiefern diese Vorgehensweisen und Denkwege bei anderen Problemstellungen auftreten, ist noch zu überprüfen. Zugleich stellt sich die Frage, wie sich Veränderungen der Aufgabenvariablen auf die Denkwege und Vorgehensweisen der Lernenden auswirken:

- Wie lösen Lernende Partitions- und Distributionsprobleme? In welchem Zusammenhang stehen die Vorgehensweisen und Denkwege zur Lösung von Selektionsproblemen?
- Wie wirken sich operationale Variationen der untersuchten Aufgabenstellungen (bspw. Veränderung der Anzahl der zu kombinierenden Objekte, Veränderung der Ausgangsmenge) auf die Denk- und Vorgehensweisen sowie die Schwierigkeiten der Lernenden aus?
- Wie lösen Lernende Aufgabenstellungen zu Permutationsproblemen und welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede lassen sich insbesondere in Bezug zu den Variationen mit und ohne Wiederholung beobachten?
- Verwenden Lernende auch bei anderen Problemstellungen bereits Zählstrategien?

Untersuchungen zur Unterrichtsgestaltung

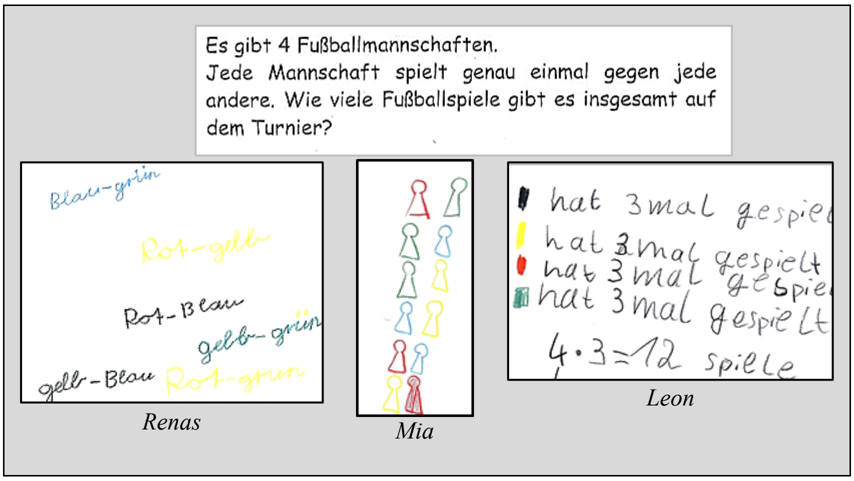
Die Langzeitstudie von Maher und ihren Kollegen (vgl. Maher et al. 2011) zeigt auf, dass die spiralförmige Thematisierung kombinatorischer Konzepte in genetisch angelegtem Unterricht dazu beiträgt, dass Lernende kombinatorische Ope-

rationen und Konzepte verstehen und nicht rezeptförmig anwenden. Bislang fehlen jedoch genauere Informationen darüber, wie der Unterricht in der Grundschule konkret zu gestalten ist. Anknüpfend an die Ergebnisse der Untersuchung wurden Konsequenzen und Impulse für die didaktische Strukturierung des Unterrichts abgeleitet. Es stellt sich die Frage, in welchem Maße die dargestellten Impulse und Leitideen zur Strukturierung des Unterrichts dazu beitragen können, dass Lernende tragfähige Strukturierungsstrategien und darauf aufbauend Zählstrategien entwickeln.
Die Ergebnisse dieser Untersuchung geben weitere Aufschlüsse hinsichtlich des Lösens von Anzahlbestimmungsproblemen, dennoch gilt es, eine Reihe weiterer Forschungslücken zu schließen. Lockwoods Aussage charakterisiert den Forschungsstand insofern sehr treffend:

“As we see […] more research is needed that explore students` ways of thinking about solving counting problems.”
Elise Lockwood 2012, S. 98

9.3 Schlussbemerkung

In der Einleitung wurde herausgestellt, dass auf der Basis der vorhandenen empirischen Untersuchungsergebnisse die Vorgehensweisen und zugrundeliegenden Vorstellungen von Lernenden beim Lösen von Anzahlbestimmungsproblemen nicht zufriedenstellend erklärt werden können und es demnach nicht möglich dass sich daraus didaktische Konsequenzen für den Unterricht abzuleiten. Auf der Grundlage der Ergebnisse dieser Arbeit wird abschließend eine erneute Betrachtung der Vorgehensweisen der Lernenden vorgenommen:



Eine erste Betrachtung der Dokumente der Lernenden zeigt, dass Mia und Renas die Figurenmenge vollzählig erstellen. Mia verwendet dazu die „Elementfixierung ohne feste Position» Sie bildet Klassen von Spielen, berücksichtigt dabei aber nicht die Anordnung der Elemente. Ihr Vorgehen ermöglicht es auch zu anderen kombinatorischen Problemstellungen, wie bspw. zu Kombinationen mit Wiederholung oder zu Aufgabenstellungen, in denen mehr Ausgangselemente zur Verfügung stehen, die Figurenmenge vollzählig zu erzeugen. Renas nutzt die «Disjunkte Paarbildung». Sein Vorgehen führt strukturiert zur Lösungsfindung bei Anzahlbestimmungsproblemen, in denen vier Elemente gegeben sind, und jeweils zwei miteinander kombiniert werden sollen. Sein Vorgehen eignet sich jedoch nur sehr bedingt zur Übertragung auf andere Problemstellungen. Leon geht ebenfalls vollständig strukturiert vor und ermittelt, wie viele weitere Lernende, eine zu große Anzahl an Lösungen, sein Vorgehen eignet sich, um über die notwendige Disjunktheit der Mengen zu sprechen und zugleich, um über mögliche Kompensationsstrategien nachzudenken. Ausgehend von diesen verschiedenen Strategien ist es zudem möglich, Kriterien für die Tragfähigkeit der Strategien zu entwickeln. Es ist demnach anzunehmen, dass die informellen Strategien dieser Lernenden einen wichtigen Ausgangspunkt zur Thematisierung kombinatorischer Anzahlbestimmungskonzepte darstellen können, wenn sie im Unterricht sinnvoll aufgegriffen werden.

–

Literaturverzeichnis

Aigner, M. (1993). *Diskrete Mathematik*. Braunschweig: Vieweg.

Aigner, M. (2007). *A Course in Enumeration: Graduate Texts in Mathematics.* Berlin: Springer.

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg.

Althoff, H. & Kosswig, F. W. (1975). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Braunschweig: Vieweg.

Annin, S. & Lai, K. (2010). Common Errors in Counting Problems. *Mathematics Teacher*, *103* (6), 403-409.

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento Combinatorio.* Madrid: Editorial Sintesis.

Batanero, C., Godino, J. & Navarro-Pelayo, V. (1997a). Combinatorial Reasoning and its Assessment. In I. Gal &. J. B. Garfield (Hrsg.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (239-252). Amsterdam: IOS Press.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997b). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 181-199.

Bauersfeld, H. (1983): Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklehrens und -lernens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6*. (1-56). Köln: Aulis.

Beck, Ch. & Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik - Didaktik*, *14* (2), 147-179.

Bender, P. (1999). Ein Plädoyer für die Kombinatorik im Unterricht. In C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science: Festschrift für Erich Christian Wittmann* (33-39). Leipzig: Klett.

Bernoulli, J. (1713). *Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars Conjectandi)* (Band 1). Übersetzung und Herausgeber R. Haussner (1899). Oswalds Klassiker der Wissenschaft.

Biggs, N. L. (1974). The roots of combinatorics. *Historia mathematica, 2* (6), 109-139.

Blaikie, N. (2000). *Designing Social Research: The Logic of Anticipation.* Cambridge: Polity Press.

Blum, W. (1985). Einige Bemerkungen zur Bedeutung von "stoffdidaktischen" Aspekten am Beispiel der Analyse eines Unterrichtsausschnitts in der Arbeit von J. Voigt. *Journal für Mathematik - Didaktik, 6* (1), 71-76.

Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division: Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis.* New York: Waxmann.

Bönig, D. (2010). Individuelle Lernwege in der Kombinatorik unterstützen. *Grundschule Mathematik, 4* (27), 14-17.

Borges, R. (1979). Ein Vorschlag zur Normung der Namen der kombinatorischen Grundbegriffe in DIN 1302. *Praxis Mathematik, 21*, 43-45.

Borges, R. (1981). Die Begriffe der Kombinatorik in der Neuausgabe von DIN 1302. *Praxis Mathematik, 23*, 148-151.

Bruner, J. S. (1973). *Der Prozeß der Erziehung* (3. Aufl.). Berlin: Berlin Verlag

Bryman, A. (2004). *Social Research Methods* (2. Aufl.). Oxford: Oxford University Press.

Cadwallader Olsker, T., Engelke, N., Annin, S. & Henning, A. (2012). Does a Statement of Whether Order Matters in Counting Problems Affect Students' Strategies? *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.*

Danckwerts, R., Vogel, D. & Bovermann, K. (1985). *Elementare Methoden der Kombinatorik: Abzählen - Aufzählen - Optimieren.* Stuttgart: B.G. Teubner.

Dewey, J. (1915). *The school and the society*. Chicago: University of Chicago Press.

Dewey, J. (1974). The child and the curriculum. In J. Dewey (Hrsg.), *The child and the curriculum AND The school and the society (3-31)*. Chicago: University of Chicago Press.

Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics, 1* (15), 37-57.

Duit, R. (1995). Zur Rolle der konstruktivistischen Sichtweise in der naturwissenschaftsdidaktischen Lehr- und Lernforschung. *Zeitschrift für Pädagogik, 41* (6), 905-923.

Eizenberg, M. & Zaslavsky, O. (2003). Cooperative problem solving in combinatorics: the inter-relations between control processes and successful solutions. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 389-403.

Eizenberg, M. & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (1), 15-36.

Engel, A. (1973). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Stuttgart: Klett.

Engel, A., Varga, T. & Walser, W. (1974). *Zufall oder Strategie?*. Stuttgart: Klett.

Engel, A. (1987). *Stochastik.* Stuttgart: Klett.

English, L. (1991). Young Children´s Combinatoric Strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 451-474.

English, L. (1992a). Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving. *British Journal of Educational Psychology, 62* (2), 31-45.

English, L. (1992b). Problem Solving with Combinations. *Arithmetic Teacher, 40* (2), 72-77.

English, L. (1993a). Children´s strategies and reasoning processes in solving novel combinatorial and deductive problems. : Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (235-240). Ascot Vale, Australien.

English, L. (1993b). Children´s strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal of Research in Mathematics Education, 24* (3), 255-273.

English, L. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *Journal of Mathematical Behaviour, 15* (1), 81-112.

English, L. (1997). The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics, 3* (34), 183-217.

English, L. (1998). Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (1), 83-106.

English, L. (1999). Reasoning by analogy: A fundamental process in children´s mathematical learning. In National Council of Teachers of Mathematics (Hrsg.), *Developing Mathematical Reasoning, K-12, NCTM Yearbook* (22-36). Reston, Va: NCTM.

English, L. (2005). Combinations and the development of children´s combinatorial reasoning. In G. Jones (Hrsg.), *Exploring Probability in School* (121-141). Ort: Springer.

English, L. (2007). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. In G. Leder & H. Forgasz (Hrsg.), *Stepping stones for the 21st century: Australasian mathematics education research* (139 - 156). The Netherlands: Sense Publishers.

English, L. & Sharry, P. V. (1996). Analogical Reasoning and the Development of Algebraic Abstraction. *Educational Studies in Mathematics, 2* (30), 135-157.

Fast, M. (2008). Über mögliche Anordnungen nachdenken und sprechen. Kinder einer dritten Schulstufe bearbeiten weitgehend selbstständig Aufgabenstellungen der Kombinatorik. *Grundschulunterricht,* 55, 7-12.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*, 193-198.

Fischbein, E. & Grossman, A. (1997). Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 27-47.

Fischbein, E., Pampu, I. & Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *British Journal of Educational Psychology, 40*, 261-270.

Flachsmeyer, J. (1969). *Kombinatorik: Eine Einführung in die mengentheoretische Denkweise.* Berlin: VEB.

Flick, U. (2002). *Qualitative Sozialforschung*. Reinbek: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

Friebertshäuser, B. & Prengel, A. (Hrsg.). (1997). *Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft*. München: Juventa Verlag.

Gerstenmaier, J. & Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. *Zeitschrift für Pädagogik, 41* (6), 867-888.

Ginsburg, H. P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics*, *1* (3), 4-11.

Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ginsburg, H. P. & Opper, S. (1998). *Piagets Theorie der geistigen Entwicklung*. Freiburg: Klett-Cotta.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for qualitative research*. London: Weidenfeld & Nicolson.

Glaymann, M. & Varga, T. (1975). *Zwischen unmöglich und sicher: Exemplarische Kapitel der Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Simulation im Unterricht der Sekundarstufe 1*. Freiburg: Herder.

Godino, J. D., Navarro-Pelayo, V. & Batanero, M. C. (1992). Analysis of students´ errors and difficulties in solving combinatorial problems. In W. Geeslin & K. Graham (Hrsg.), *PME XVI Proceedings* (249-256). New Hampshire: Mathematics Department.

Godino. J. D., Batanero, C. & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 3-36.

Grassmann, M. (2002). Kombinatorische Aufgaben. *Praxis Grundschule, 6*, 18-25.

Griesel, H. Postel, H. & Suhr, F. (Hrsg.) (2008). *Elemente der Mathematik.* Braunschweig: Schroedel.

Gropengießer, H. (2001). Wie man Vorstellungen von Schülern und Wissenschaftlern unter Vermittlungsabsicht in Beziehung setzt. In H. Bayrhuber, C. Finkbeiner, K. H. Spinner & H.A. Zwergel (Hrsg.), *Lehr- und Lernforschung in den Fachdidaktiken* (33-44). Innsbruck: Studienverlag.

Gropengießer, H. (2007). Theorie des erfahrungsbasierten Verstehens. In D. Krüger & H. Vogt (Hrsg.), *Theorien in der biologiedidaktischen Forschung* (105-116). Heidelberg: Springer.

Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The Road to Solving a Combinatorial Problem is Strewn with Pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, *12* (4), 435-443.

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung: Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik - Didaktik*, *29* (3), 163-198.

Halani, A. (2012). Students' ways of thinking about enumerative combinatorics solution sets: The odometer category. In: S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle & M. Oehrtman (Hrsg.), *The Electronic Proceedings for the Fifteenth Special Interest Group of the MAA on Research on Undergraduate Mathematics Education* (59-66). Portland, OR: Portland State University.

Hart, E. W. (1991). Discrete Mathematics: An exciting and necessary addition to the secondary school curriculum. In: M. J. Kenney & C. R. Hirsch (Hrsg.), *Yearbook of National Council of Teachers of Mathematics* (67-77). Reston, VA: NCTM.

Hasemann, K. (1986). *Mathematische Lernprozesse: Analysen mit kognitionstheoretischen Methoden.* Braunschweig: Vieweg.

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *Didaktik der Mathematik*, *12* (4), 245-262.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989). Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion: Geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. *mathematik lehren, 35*, 6-12.

Heinze, A. (2003). Kombinatorikaufgaben als spezielle Sachaufgaben. *Grundschulunterricht, 50* (2), 19-22.

Heinze, A. (2005). *Lösungsverhalten mathematisch begabter Grundschulkinder-aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen*. Münster: LIT.

Hölzl, R. (1994). *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie: Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer*. Augsburg: Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Augsburg.

Hoffmann, A. (1999). Regeln und Mikroregeln bei der Lösung kombinatorischer Probleme. *mathematica didactica, 2* (22), 37-60.

Hoffmann, A. (2003). *Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit*. Hildesheim: Franzbecker.

Janáčková, M. & Janáček, J. (2006). A classification of strategies employed by high school students in isomorphic combinatorial problems. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3* (2), 128-145.

Jeger, M. (1973). *Einführung in die Kombinatorik.* Stuttgart: Klett.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 111-127.

Kattmann, U. (1992). Originalarbeiten als Quellen didaktischer Rekonstruktion. *Unterricht Biologie, 16* (174), 46- 49.

Kattmann, U. & Gropengießer, H. (1996). Modellierung der didaktischen Rekonstruktion. In R. Duit & Ch. von Rhöneck (Hrsg.), *Lernen in den Naturwissenschaften* (180-204). Kiel: IPN.

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H. & Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion: Ein theoretischer Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 3* (3), 3-18.

Kattmann, U. (2007). Didaktische Rekonstruktion: Eine praktische Theorie. In D. Krüger & H. Vogt (Hrsg.), *Theorien in der biologiedidaktischen Forschung* (93-104). Berlin: Springer.

Kavousian, S. (2008). *Enquiries into undergraduate students' understanding of combinatorial structures* (Nicht veröffentlichte Dissertation). Simon Fraser University, Vancouver, BC, Kanada.

Kirsch, A. (1973). Eine moderne und einprägsame Fassung der kombinatorischen Grundaufgaben. *Didaktik der Mathematik*, *1* (2), 113-130.

Kirsch, A. (2004). *Mathematik wirklich verstehen: Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen* (2. Aufl.). Köln: Aulis.

KMK (Kultusministerkonferenz) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss vom 15.10.2004. München: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag.

Knobloch, E. (1973). *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Wiesbaden: Steiner.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Klix, F. (1976). *Information und Verhalten.* Bern: Verlag Hans Huber.

Kukartz, U. (1997). Qualitative Daten computergestützt auswerten: Methode, Techniken, Software. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft* (584-598). München: Juventa Verlag.

Kütting, H. (1994). *Didaktik der Stochastik*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Kütting, H. & Sauer, M. J. (2008). *Elementare Stochastik.* Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Lack, C. (2008). Türme bauen. Eine kombinatorische Problemaufgabe für Kinder im 1. und 2. Schuljahr. *Grundschulunterricht,* 55, 4-7.

Lack, C. (2009*). Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Lamnek, S. (1995). *Qualitative Sozialforschung Band 1: Methodologie* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Larivée, S. & Normandeau, S. (1985). Maîtrise du schème de la combinatoire (permutations) chez les adolescents en classe spéciales. *Canadian Journal of Education*, 10 (4), 345-361.

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg.) (2008). *Mathematik Neue Wege*. Barunschweig: Schroedel.

Lockwood, E. (2010). An investigation of post-secondary students' understanding of two fundamental counting principles. In *The Electronic Proceedings for the Thirteenth Special Interest Group of the MAA on Research on Undergraduate Mathematics Education* Raleigh, NC: North Carolina State University.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78* (3), 307-322.

Lockwood, E. (2012). A Model of Students' Combinatorial Thinking: The Role of Sets of Outcomes. In: S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle & M. Oehrtman (Hrsg.), *The Electronic Proceedings for the Fifteenth Special Interest Group of the MAA on Research on Undergraduate Mathematics Education* (95-100). Portland, OR: Portland State University.

Lockwood, E. (2013). A Model of Students' Combinatorial Thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*, 251-265.

Lütticken, R. & Uhl, C. (Hrsg.) (2009). *Fokus Mathematik.* Berlin: Cornelson

Maher, C. A. & Martino, A. M. (1992a). Teachers building on students' thinking. *The Arithmetic Teacher*, 39, 32-37.

Maher, C. A. & Martino, A. M. (1992b). Individual thinking and the integration of the ideas of others in problem solving situations. In W. Geeslin, J. Ferrini-Mundy & K. Graham (Hrsg.), *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 72-79). Durham, NH: University of New Hampshire.

Maher, C. A. & Martino, A. M. (1996). Young children inventing methods of proof: The gang of four. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Hrsg.), *Theories of mathematical learning.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Maher, C. A. & Martino, A. M. (1997). Conditions for conceptual change: From pattern recognition to theory posing. In H. Mansfield (Hrg.), *Young children and mathematics: Concepts and their representations*. Durham, NH: Australian Association of Mathematics Teachers.

Maher, C. A. & Speiser, R. (1997). How far can you go with block towers? *The Journal of Mathematical Behavior*, 16 (2), 125-132.

Maher, C. A. & Martino, A. M. (2000). From patterns to theories: Conditions for conceptual change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19 (2), 247-271.

Maher, C. A., Powell, A. B. & Uptegrove, E. B. (Hrsg.). (2011). *Combinatorics and reasoning: Representing, justifying, and building isomorphisms*. New York: Springer.

Maier, P. H. (2006). *Nussknacker: Mein Mathematikbuch 3.Schuljahr.* Stuttgart: Klett.

Martino, A. M. (1992). *Elementary students' construction of mathematical knowledge: Analysis by profile* (Nicht veröffentlichte Dissertation). Rutgers University, Amerika.

Martino, A. M. & Maher, C. A. (1999). Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice has thaught us. *Journal of Mathematical Behaviour*, *18* (1), 53-78.

Mogk, B. (2008). Kombinatorische Fragestellungen in der Grundschule. Viertklässler entdecken mögliche Bonbonkombinationen. *Grundschulunterricht,* 55, 13-17.

Möller, R. & Wesseling, A. (2008). Zu Aufgaben der Kombinatorik. *Sache, Wort, Zahl, 92*, 37-45.

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 309-331.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approachesand Empirical Findings. In J. Hiebert & M. Behr (Hrsg.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (19-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Neubert, B. (1998). Grundschulkinder lösen kombinatorische Aufgabenstellungen. *Grundschulunterricht, 45* (9), 17-19.

Neubert, B. (2001a). Möglichkeiten der Differenzierung bei der Arbeit mit kombinatorischen Aufgaben. *Grundschulunterricht, 48* (11), 52-56.

Neubert, B. (2001b). Zusammenstellen von Drei-Gänge-Menüs und Eistüten. In G. Kaiser (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (446-449). Hildesheim: Franzbecker.

Neubert, B. (2003). Gute Aufgaben zur Kombinatorik in der Grundschule. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (89-101). Offenburg: Mildenberger.

Neubert, B. (2013). Kombinatorische Aufgaben in der Grundschule. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (688-691). Hildesheim: Franzbecker.

Padberg, F. (2005). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Perko, R. (1980). Bemerkungen zur marginalen Rolle der Kombinatorik in der Realität des AHS-Unterrichts. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Stochastik im Schulunterricht: Beiträge zum 3. internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik* (141-154). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. London: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of change in children*. London: Routledge und Kegan Paul.

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica, 28* (2), 23-47.

Prediger, S. (2007). Konzeptwechsel in der Bruchrechnung: Analyse individueller Denkweisen aus konstruktivistischer Sicht. In I. Lehmann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (203-206). Hildesheim: Franzbecker.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactical categories for analyzing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18* (1), 3-17.

Reitberger (2007). Lösen kombinatorischer Aufgaben durch Handeln. *Grundschulunterricht,* 54, 39-42.

Resnick, L. B. (1987). Education and learning to think (5. Auflage). Washington D.C.: National Academy Press.

Roos (2010). Kinder schreiben Kombinatorik-Aufgaben. *Grundschule Mathematik*, 4 (27), 36-39.

Ruwisch, S. (2010a). Zählen, ohne zu zählen. *Praxis Grundschule, 27* (7), 4-5.

Ruwisch, S. (2010b). Kombinatorisches Zählen: Kombinieren, Variieren, Permutieren. *Praxis Grundschule, 27* (7), 40-44.

Ruwisch, S. & Schaffrath, S. (2010). Kombinatorik mit Ziffernkarten. *Praxis Grundschule, 27* (7), 22-26.

Scardamalia, M. (1977). Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: a demonstration using combinatorial reasoning tasks. *Child development, 48*, 28-37.

Scheidt, H. (1984). Ein Plädoyer für die Kombinatorik. *Der Mathematikunterricht*, *30* (1), 6-32.

Schink, A. (2013). *Flexibler Umgang mit Brüchen: Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schmidt, C. (1997). Am Material: Auswertungstechniken für Leitfadeninterviews. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Hrsg.), *Handbuch qualitativer Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft (*544-567).Weinheim: Juventa.

Schmidt, S. (1992). Kombinatorisches Denken als eine bildungstheoretische Kategorie für den "elementarischen Unterricht" und die Lehrerbildung gemäß der Konzeption von A. Diesterweg (1790 -1866). *mathematica didactica, 15* (1), 80-95.

Schrage, G. (1996). Analyzing Subject Matter: Fundamental Ideas of Combinatorics. In T. Cooney, S. Brown, J. Dossey, G. Schrage & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education* (167-220). Ort: Heinemann.

Schütze, F. (1983). Biographieforschung und narratives Interview. *Neue Praxis, 13* (3), 283-293.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Leipzig: Klett.

Selter, C. & Spiegel, H. (2004a). Zählen, ohne zu zählen. In G. N. Müller, H. Steinbring & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (81-90). Velbert: Kallmeyer.

Selter, C. & Spiegel, H. (2004b). Elemente der Kombinatorik. In G. N. Müller, H. Steinbring & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (291-310). Velbert: Kallmeyer.

Shin, J. & Steffe, L.P. (2009). Seventh Graders` use of additive and multiplicative reasoning for enumerative combinatorial problems. In S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Hrsg.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (170-177). Atlanta, GA: Georgia State University.

Sriraman, B. & English, L. (2004). Combinatorial Mathematics: Research into practice. Connecting Research into Teaching. *The Mathematics Teacher*, *98* (3), 182-191.

Stein, M. (1995). Elementare Bausteine von Problemlöseprozessen: Gestaltorientierte Verhaltensweisen. *mathematica didactica, 18* (2), 59-84.

Stein, M. (1996). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 17* (2), 123-146.

Strauss, A. & Corbin, J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung.* Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Törner, G. (1987). Isomorphie: ein unterrichtsrelevanter Aspekt in der Kombinatorik? *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 19* (3), 118-123.

Tropfke, J. (1924). *Geschichte der Elementar-Mathematik* (3. Band). Berlin: Walter de Gruyter & Co.

Uptegrove, E. & Maher, C. (2004). Students building isomorphisms. In M. Høines & A. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Band 4), (352-360). Bergen, Norway: Verlag.

Vergnaud, G. & Cohen, R. (1968). Sur l'activité combinatoire des enfants de 8 ans. *Psychologie Française, 14*, 321-332.

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht: Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie.* Norderstedt: Books on Demand.

Vohns, A. (2008). Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht: Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29* , 304-305.

vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3* (4), 345-364.

vom Hofe, R. (1995a). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Verlag.

vom Hofe, R. (1995b). Vorschläge zur Öffnung normativer Grundvorstellungskonzepte für deskriptive Arbeitsweisen in der Mathematikdidaktik. In H. Steiner & H. Vollrath (Hrsg.), *Neue problem- & praxisbezogene Forschungsansätze* (42-50). Köln: Verlag.

vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert: Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*, 257-291.

vom Hofe, R. (1999). Explorativer Umgang mit Funktionen: Interaktion und Kommunikation in selbstorganisierten Arbeitsphasen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 20*, 186-221.

von Glasersfeld, E. (1997). *Radikaler Konstruktivismus: Ideen, Ergebnisse, Probleme.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Werner, M. (2011). Die Turmaufgabe: Wie gehen Kinder unterschiedlicher Jahrgangsstufen mit derselben kombinatorischen Aufgabenstellung um? *Grundschulunterricht Mathematik, 4*, 15-17.

Wittmann, E. Ch. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (2. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. (1982). Unterrichtsbeispiele als integrierender Kern der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3*, 1-18.

Wittmann, E. Ch. (1995a). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht: Vom Kind und vom Fach aus. In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (10-41). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Wittmann, E. Ch. (1995b). Mathematics Education as a »Design Science«. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 355-374.

Wittmann, E. Ch. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule: Vom FACH aus. *Grundschulunterricht, 43*, 3-7.

Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch der Grundschule?. In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule: Ein Arbeitsbuch* (18-46). Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. (2013). Strukturgenetische didaktische Analysen: Die empirische Forschung erster Art. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1094-1097). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe: Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele.* Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2005). *Das Zahlenbuch* (Band 3). Stuttgart: Klett.

–

Anhang

A: Mögliche und verwendete Strukturierungsstrategien basierend auf einem abhängigen Figurenbildungskonzept

Der nachfolgenden Tabelle sind a) die möglichen und b) die tatsächlich verwendeten Strukturierungsstrategien von Lernenden in verschiedenen Kontexten und bei verschiedenen Figuren zu entnehmen.

Mögliche Strukturierungsstrategie
☑ Verwendete Strategie

		K. o. Wh.		K. m. Wh.		V. o. Wh.	
		Fußball	Lotto	Eismann	Domino	Türme	Ziffernk
Allgemeine Strategie	Disjunkte Paarbildung,	☑	☑	☑	☑	☑	☑
	Zyklische Musterbildung,	☑	☑	☑	☑	☑	☑
	Elementfixierung mit fester Position	☑	☑	☑	☑	☑	☑
	Elementfixierung ohne fester Position	☑	☑	☑	☑	☑	☑
Figurspezifische Strategie	Anzahlfixierung			☑	☑		
	Direktvertauschung,					☑	☑
	Gruppenvertauschung						
	Gesamtvertauschung					☑	☑
Kontextspezifische Strategie	Domino				☑		
	Zweistellige Zahlen						☑

Tab. 0.1 Allgemeine, figurspezifische und kontextspezifische Strukturierungsstrategien & abhängiges Figurenbildungskonzept

Mögliche Strukturierungsstrategie
☑ Verwendete Strategie

		K. o. Wh.		K. m. Wh		V. o. Wh.	
		Fußball	Lotto	Eismann	Domino	Türme	Ziffernk
Kombinationen aus allgemeinen und figurspezifischen Strategien	Disjunkte Paarbildung, & Anzahlfixierung			☑	☑		
	Elementfixierung mit fester Position & Anzahlfixierung			☑	☑		
	Elementfixierung ohne fester Position & Anzahlfixierung			☑	☑		
	Zyklische Musterbildung, & Anzahlfixierung			☑	☑		
	Disjunkte Paarbildung, & Einzelvertauschung					☑	☑
	Disjunkte Paarbildung, & Gruppenvertauschung					☑	☑
	Disjunkte Paarbildung, & Gesamtvertauschung					☑	
	Elementfixierung mit fester Position & Einzelvertauschung					☑	☑
	Elementfixierung mit fester Position & Gruppenvertauschung					☑	☑
	Elementfixierung mit fester Position & Gesamtvertauschung					☑	☑
	Elementfixierung ohne fester Position & Einzelvertauschung					☑	☑
	Elementfixierung ohne fester Position & Gruppenvertauschung					☑	☑
	Elementfixierung ohne fester Position & Gesamtvertauschung					☑	
	Zyklische Musterbildung, & Einzelvertauschung						
	Zyklische Musterbildung & Gruppenvertauschung						
	Zyklische Musterbildung, & Gesamtvertauschung					☑	☑

Tab. 0.2 Strategiekombinationen & abhängiges Figurenbildungskonzept

B: Mögliche und verwendete Strukturierungsstrategien basierend auf einem unabhängigen Figurenbildungskonzept

Der nachfolgenden Tabelle sind a) die möglichen und b) die tatsächlich verwendeten Strukturierungsstrategien von Lernenden in verschiedenen Kontexten und bei verschiedenen Figuren zu entnehmen.

Mögliche Strukturierungsstrategie
☑ Verwendete Strategie

		K. o. Wh.		K. m. Wh.		V. o. Wh.	
		Fuß-ball	Lotto	Eis-mann	Do-mino	Tür-me	Zif-fernk
Allgemeine Strategie	Disjunkte Paarbildung,						
	Zyklische Musterbildung,			☑	☑		☑
	Elementfixierung mit fester Position	☑	☑	☑	☑	☑	☑
	Elementfixierung ohne fester Position	☑	☑	☑	☑	☑	☑
Figurspezifische Strategie	Anzahlfixierung			☑	☑		
	Direktvertauschung,						
	Gruppenvertauschung						
	Gesamtvertauschung						
Kontextspezifische Strategie	Domino						
	Zweistellige Zahlen						

Tab. 0.3 Allgemeine, figurspezifische und kontextspezifische Strukturierungsstrategien & unabhängiges Figurenbildungskonzept

Mögliche Strukturierungsstrategie
☑ Verwendete Strategie

		K. o. Wh.		K. m. Wh		V. o. Wh.	
		Fußball	Lotto	Eismann	Domino	Türme	Ziffernk
Kombinationen aus allgemeinen und figurspezifischen Strategien	Disjunkte Paarbildung, & Anzahlfixierung						
	Elementfixierung mit fester Position & Anzahlfixierung			☑	☑		
	Elementfixierung ohne fester Position & Anzahlfixierung			☑			
	Zyklische Musterbildung, & Anzahlfixierung			☑	☑		
	Disjunkte Paarbildung, & Einzelvertauschung						
	Disjunkte Paarbildung, & Gruppenvertauschung						
	Disjunkte Paarbildung, & Gesamtvertauschung						
	Elementfixierung mit fester Position & Einzelvertauschung						
	Elementfixierung mit fester Position & Gruppenvertauschung						
	Elementfixierung mit fester Position & Gesamtvertauschung						
	Elementfixierung ohne fester Position & Einzelvertauschung						
	Elementfixierung ohne fester Position & Gruppenvertauschung						
	Elementfixierung ohne fester Position & Gesamtvertauschung						
	Zyklische Musterbildung, & Einzelvertauschung						
	Zyklische Musterbildung & Gruppenvertauschung						
	Zyklische Musterbildung, & Gesamtvertauschung						

Tab. 0.4 Strategiekombinationen & unabhängiges Figurenbildungskonzept