Inhaltsverzeichnis Band 2: S. 580 - 1179

Grit KURTZMANN, Rostock
Häufigkeitsdiagramme in der Grundschule - Möglichkeiten und Stolpersteine……………………………………………………………….580-583

Ana KUZLE, Rolf BIEHLER, Janina OESTERHAUS, Thomas WASSONG, Paderborn
Praxisorientierte Fortbildungsdidaktik am Beispiel der Planung und Durchführung einer Stochastikfortbildung………………….……..584-587

Ladislav KVASZ, Karls Universität zu Prag
Didaktische Aspekte der Entwicklung der Sprache der Mathematik………...588-591

Angela LAGING, Kassel
Wie wichtig sind die Selbstwirksamkeit und die Selbsteinschätzung für die mathematischen Leistungen von Studienanfänger/innen?...........592-595

Anselm LAMBERT, Saarbrücken
Zeitgemäße Stoffdidaktik am Beispiel "Füllgraph"……………….…..596-599

Diemut LANGE, Hannover
„Überlegen wir mal ...“ ‒ Barrierespezifische Kooperationsarten…………………………………………………...…600-603

Claudia LAZAREVIC
Analyse und Bewertung von Unterricht durch Mathematiklehrkräfte in der Berufseinstiegsphase…………………………………….…...….604-607

Malte LEHMANN, Bettina RÖSKEN-WINTER, Bochum
Starthilfe ins Studium – Konzept und Wirksamkeitsstudien des Projektes Mathe/Plus………………………………………………...608-611

Dominik LEISS, Lüneburg, Jennifer PLATH, Lüneburg, Knut SCHWIPPERT, Hamburg
Verstehen des Verstehens…………………………………………...….612-615

Torsten LINNEMANN, Michaela TURINA, Basel
Lernumgebungen differenziert begleiten……………………………..….616-619

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Basel, Marc SCHÄFER, Grahamstown, Duncan SAMSON, Grahamstown
VITALmaths ‒ Learning in Context („VITALmathsLIC”)……....…….620-623

Carolin LOCH, Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE, Kiel
Instrumententwicklung zur Erfassung professionellen Wissens von Lehramtsstudierenden………………………………….……….……….624-627

Katharina LOIBL, Nikol RUMMEL, Ruhr-Universität Bochum, Lars HOLZÄPFEL, Pädagogische Hochschule Freiburg
Aufgreifen von Schülerlösungen in nachfolgenden Instruktionsphasen ist wichtig für den Lernerfolg………………………………………….628-631

Matthias LUDWIG, Jens JESBERG, David WEISS, Frankfurt
MathCityMap - ein Smartphone-Projekt um Mathematik draußen zu machen……………………………………………………..……632-635

Jürgen MAASZ, Linz
Realitätsnähere Modellierung im Mathematikunterricht……………636-639

Elisabeth MANTEL, Erfurt
Räumliche Lagebeziehungen und Kartenverständnis…………….…..640-643

Michael MARXER,
Flexibel mit Dezimalbrüchen rechnen – Dezimalbrüche verstehen..644-647

Patrick MEIER, Basel
Mathematik und Computer……………………………………...……..648-651

Alexander MEYER, Dortmund
Eine unterrichtspraktische Diagnose im Bereich Algebra? Chancen einer schülerzentrierten Diagnose auf Basis algebraischer Denkmuster…………………………………………………...…………652-655

Wolfram MEYERHÖFER, Paderborn
Sind die Elemente der Stellenwerttafel Ziffern oder Das IQB als Herrscherin über die Stellenwerttafel……………………………..………656-659

Mareike MINK, Köln
Wie erzeugt man eine geradlinige Bewegung? … und wie kann diese Problemstellung zur Begriffsentwicklung von Lernenden beitragen?...660-663

Regina D. MÖLLER, Peter COLLIGNON, Erfurt
Analysis unter einer postmodernen Perspektive…………………..……..664-667

Seiji MORIYA, Tamagaw University, Tokyo
On the Pre-service of Mathematics Education for Elementary School Teachers at the University of Education(2)……………………..………..668-671

Renate MOTZER, Augsburg
Magische Quadrate von der 1.Klasse bis zur linearen Algebra……672-675

Matthias MÜLLER, Jena
Ausgewählte empirische Untersuchungen zum CAS-Einsatz im Thüringer Mathematikunterricht – Ergebnisse nach dem ersten Jahr der CAS-Einführung………………………………………………………...…….676-679

Stefanie MÜLLER-HEISE, Halle/Saale
Reflexive Gedanken von Schülerinnen und Schülern nach der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben - erste Befunde ……….………….680-683

Eva MÜLLER-HILL, Köln
Zur erklärenden Funktion geometrisch-zeichnerischer Darstellungen (GZDs)……………………………………………...….684-687

Bernd NEUBERT, Gießen
Kombinatorische Aufgaben in der Grundschule …………….………688-691

Christoph NEUGEBAUER, Münster
Mathematische Kompetenzen in Online-Self-Assessments – Grundlagen oder spezifische Anforderungen?................................692-695

Robert NEUMANN, Freiburg/Nürnberg
CAS-Taschenrechner und die Untersuchung von mathematischen Fähigkeiten bei Erstsemesterstudierenden………………….………696-699

Inga NIEDERMEYER, Lüneburg
Begründungen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern bei Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme…………………...……700-703

Engelbert NIEHAUS, Dominik FAAS, Koblenz-Landau
Mathematische Beweise in elektronischen Klausuren in der Lehramtsausbildung………………………………………………………...…704-707

Yoshiki NISAWA, Osaka, Japan
Research on the introduction of integration in Japanese High Schools……………………………………………………………….708-711

Renate NITSCH, Darmstadt
Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge………………………………………………………...712-715

Marcus NÜHRENBÖRGER, Ralph SCHWARZKOPF, Dortmund
Gleichungen zwischen „Ausrechnen“ und „Umrechnen”…....………716-719

Janina OESTERHAUS, Rolf BIEHLER, Paderborn
BeSt@Kontext: Ein schüleraktivierendes Unterrichtskonzept für die Beurteilende Statistik mit computergestützter Simulation in authentischen Kontexten…………………………………………….....720-723

Reinhard OLDENBURG, Benedikt Weygandt, Frankfurt/M.
Können Studierende alternative Begriffsdefinitionen mit Computeralgebra als Werkzeug untersuchen?................................724-727

Laura OSTSIEKER, Paderborn
Konvergenz von Folgen - Eine Studie zur Wissensentwicklung im Rahmen einer Analysis 1-Vorlesung……………………………………728-731

Barbara OTT, Bamberg
Grafische Darstellungen zu Textaufgaben in der Grundschule…….732-735

Erkki PEHKONEN, Uni Helsinki; Leonor VARAS, Uni Chile
Ein Versuch zur Entwicklung des mathematischen Denkens in der Grundschule: Vergleichstudie Finnland ‒ Chile………………….………736-739

Kathleen PHILIPP, Timo LEUDERS, Freiburg
Diagnostische Kompetenzen von Mathematiklehrkräften – Worauf greifen Lehrerinnen und Lehrer bei der Diagnose zurück?.............740-743

Franz PICHER, Klagenfurt
Schul-Analysis: Ermutigendes und Ernüchterndes…………….…….744-747

Guido PINKERNELL, Heidelberg
Mathematisches Grundwissen und digitale Werkzeuge……………..…748-752

Meike PLATH, Lüneburg
Die Präsentationsform von Aufgaben und die Mathematikleistung von Kindern als Untersuchungsgegenstand einer Studie zum räumlichen Vorstellungsvermögen……………………………………………......………753-756

Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS, Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
Augmented Reality und räumliche Entscheidungsuntersützung mit dem Smartphone………………………………………………………757-760

Susanne PODWORNY, Paderborn
Mit TinkerPlots vom einfachen Simulieren zum informellen Hypothesentesten………………………………………….……….……761-764

Jennifer POSTUPA, Nürnberg
Zeitlicher Wandel in Mathematikschulbüchern………………………765-768

Susanne PREDIGER, Timo LEUDERS, Bärbel BARZEL, Stephan HUSSMANN, Dortmund/Freiburg
Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen –– Ein Modell zur Strukturierung von Design und Unterrichtshandeln…..………………769-772

Sylvia PRINZ, Jennifer KLENZAN, Ellen ASCHERMANN, Köln
Selbstregulation in Klasse 8 – Bericht über eine Begegnung von pädagogischer Psychologie und Mathematikdidaktik………………..773-776

Juliane PÜSCHL, Paderborn
Wie besprechen Tutoren Hausaufgaben? – Potentiale und Grenzen in der Aus- und Weiterbildung von Übungsgruppenleitern……….777-780

Stefanie RACH, Ulrike SIEBERT, Aiso HEINZE, Kiel
Lehrqualität in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik: Konzeptualisierung und erste Ergebnisse………………...………….781-784

Martin RATHGEB, Siegen
Wie wird Arithmetik zu Algebra? Didaktische Aspekte der Brownschen Arithmetik…………………………………………........…785-788

Katrin REIMANN, Köln
Eulers Zahlauffassung in seiner „Algebra"……………………...……789-792

Sabine REINDL, Linz
Entwicklung und Anwendung mathematischer Lösungsstrategien – unter Betrachtung möglicher Determinanten………………………….793-796

Simone REINHOLD, Braunschweig
Diagnostische Kompetenzen von Grundschullehramtsstudierenden in praxisnahen Veranstaltungen zum Anfangsunterricht……...……797-800

Martin REINOLD, Jan WESSEL, Dortmund
Mit .mathematisch begabten. Kindern rechnen……………………..….801-804

Xenia-Rosemarie REIT, Matthias LUDWIG, Frankfurt
Wege zu theoretisch fundierten Testaufgaben zur Modellierungskompetenz……………………………………………………805-808

Nadine RENK, Susanne PREDIGER, Dortmund, Andreas BÜCHTER, Köln, Claudia BENHOLZ, Erkan GÜRSOY, Essen
Hürden für sprachlich schwache Lernende bei Mathematiktests – Empirische Analysen der Zentralen Prüfungen 10 NRW…………...…809-812

Sebastian REZAT, Paderborn
Fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik – Ein Beitrag zur Theoriendiskussion?..813-816

Vanessa RICHTER, Dortmund
‚Ich hab den Unterschied berechnet' – Einblicke in eine Lernprozessstudie zur Begriffsbildung zu linearen Funktionen…...817-820

Leonhard RIEDL, Daniel ROST, Erwin SCHÖRNER, München
Fachmathematische Kenntnisse von Studierenden des Lehramts an Grund,- Haupt- oder Realschulen an der Ludwig-Maximilians-Universität München……………………………………………...………821-825

Wolfgang RIEMER, Köln
Beurteilende Statistik ohne gute Probleme ist wie Schwimmen ohne Wasser..…………………………………………………..……...826-829

Michael RIEß, Münster
DigitaleWerkzeuge und funktionales Denken – Ergebnisse einer Langzeitstudie in der Sekundarstufe I………………………………….830-833

Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ, Landau
Der Kovariationsaspekt von Funktionen in der Sekundarstufe I …..834-837

Katrin ROLKA, Wuppertal
Fermi-Fragen als Einstieg in bilingualen Mathematikunterricht…..838-841

Bettina RÖSKEN-WINTER, Jürg KRAMER, Bochum, Berlin
Lehrerfortbildungen als berufsbegleitende Erwachsenenbildung: Einfluss von Vorwissen und Auswirkungen auf die Praxis…..………842-845

Jürgen ROTH, Rolf OECHSLER, Landau
Forschend lernen – Lernprozesse fördern..……………..…………..….…846-849

Benjamin ROTT, Hannover
Der Verlauf von Problembearbeitungsprozessen am Beispiel von Fünftklässlern………………………………….....…..…………………..850-853

Christian RÜTTEN
Metaphernanalyse zur Rekonstruktion von Vorstellungen zu negativen Zahlen……………………………………………...……...………854-857

Silke RUWISCH, Frances BEIER, Lüneburg
Schriftlich begründen in der Grundschule – ein disziplinübergreifendes Projekt………………………………………………858-861

Alexander SALLE, Bielefeld
Argumentationsprozesse beim Lernen mit animierten Lösungsbeispielen……………………………………………………..…..…..862-865

Katrin SAUER, Münster
Online-Self-Assessments für Studieninteressierte – Ein strukturierter Vergleich…………………………………………………..866-869

Petra SCHERER, Essen, Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund, Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg
Umgang mit Heterogenität - ein Modul einer NRW-Multiplikatorenqualifizierung…………………………………………..870-873

Maike SCHINDLER, Dortmund
Empirische Studie zum Begriff der negativen Zahl………..……....…..874-877

Andrea SCHINK, Dortmund
Strukturelle Zusammenhänge bei Brüchen herstellen -Diagnose und Förderung für Lernende mit Schwierigkeiten………..………..……..878-881

Kathrin SCHLARMANN, Oldenburg
Rekonstruktion von mentalen Strukturen von Studierenden zum Konzept Basis in der Linearen Algebra…………………………..….882-885

Stephanie SCHLUMP, Oldenburg
Wie denken erfahrene Gymnasiallehrkräfte über die Strukturierung von Unterricht zur Entwicklung der Problemlösekompetenz?..........886-889

Barbara SCHMIDT-THIEME, Hildesheim
Zur Sache kommen: Gegenstandskonstitution im Mathematikunterricht…………………………………………...……..890-893

Oliver SCHMITT, Darmstadt
Tätigkeitstheoretischer Zugang zu Grundwissen und Grundkönnen……………………………………………………....…..894-897

Sebastian SCHORCHT, Gießen
Mathematik mit historischem Hintergrund im Schulbuch – Analyse eines Aufgabentyps……………………………………..……..898-901

Christof SCHREIBER, Gießen
Mündliche Darstellung mit digitalen Medien………….……………902-905

Stephan SCHREIBER, Reinhard HOCHMUTH, Lüneburg
Mathematik im Ingenieurwissenschaftsstudium – Auf dem Weg zu einer fachbezogenen Kompetenzmodellierung………..……………906-909

Stanislaw SCHUKAJLOW, André KRUG, Paderborn
Planung, Kontrolle und multiple Lösungen beim Modellieren….….910-913

Stephanie SCHULER, Joana ENGLER, Maria PELZER, Gerald WITTMANN, Freiburg
Anschlussfähige mathematische Bildung – Kontinuitäten und Diskontinuitäten im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule…………914-917

Alexander SCHULTEIS, Anna C. WITTE, Thomas GAWLICK, Hannover
Entwicklung und Erprobung einer Interventionsstrategie beim Lösen von problemhaltigen Textaufgaben………………...…………918-921

Andrea SCHULZ, Katja KOCH, Tanja JUNGMANN, Rostock
„Mathe ist überall?!“ – Förderung der professionellen Responsivität pädagogischer Fachkräfte im Bereich Mathematik in Kindertageseinrichtungen…………………………………...…………922-925

Stefan SCHUMACHER, Jürgen ROTH
Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung Grundvorstellungen im Schülerlabor erarbeiten…………………………………...……………926-929

Heinz SCHUMANN, Weingarten
Automatisierte algebraische Berechnungen an geometrischen Figuren…..………………………………………………………...…….930-933

Inge SCHWANK, Osnabrück
Wenn Würfelspielen schwer fällt ... zur Bedeutung von Ereignissen für das Rechnenlernen – Vorstellung der Mathematischen Spielwelt ZARAO……………………………………………………..934-937

Björn SCHWARZ, Philip HERRMANN, Gabriele KAISER, Birgit RICH-TER, Jens STRUCKMEIER, Hamburg
Ein Projekt zur Unterstützung angehender Mathematiklehrkräfte in der ersten Phase ihres Studiums – Erste Erfahrun-gen aus der Begleitung einführender fachmathematischer Lehrveranstaltungen……...……..938-941

Ulrich SCHWÄTZER, Dortmund
Zur Relevanz komplementbildender Strategien bei der Subtraktion im Tausenderraum………………………………………………..942-945

Hans-Dieter SILL, Rostock
Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Primarstufe……………………………………………………………….946-949

Hans-Stefan SILLER, Regina BRUDER, Tina HASCHER, Torsten LINNEMANN, Jan STEINFELD, Martin SCHODL
Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II…………………………………………………………..950-953

Kerstin SITTER, Landau
Geometrische Körper an inner- und außerschulischen Lernorten…………………………………………………………………..954-957

Susanne SPIES, Siegen
Zum Bildungswert schöner Mathematik………………………………..958-961

Ute SPROESSER, Sebastian KUNTZE, Joachim Engel, Ludwigsburg
Einflussfaktoren auf Statistical Literacy – erste Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der 8. Realschulklasse………962-965

Carolina STAIGER, Weingarten
Entwicklung und Erprobung von Feedbackkomponenten in der Bruchrechnung – Klasse 6…………………………………………………966-969

Anke STEENPASS, Essen
Rahmungen von Grundschulkindern bei der Deutung von Anschauungsmitteln - Ergebnisse im Forschungsvorhaben KORA.....………………970-973

Martin STEIN, Münster
Online-Plattformen zum Üben im Fach Mathematik im deutsch- und englischsprachigen Raum – ein systematischer Vergleich..…………...974-977

Wilhelm STERNEMANN, Lüdinghausen
"Verhalten" von Ganzrationalen Funktionen - inhaltliche Denkanstöße zum Analysisunterricht…………………………………………........……..978-981

Hannes STOPPEL, Münster
Projektkurse in Mathematik im Rahmen eines Kooperationsprojekts von Schule und Hochschule……………………………………………….982-985

Christine STREIT & Christof WEBER, PH Nordwestschweiz
Vignetten zur Erhebung von handlungsnahem, mathematikspezifischem Wissen angehender Grundschullehrkräfte………………………………986-989

Horst STRUVE, Köln
Ein Fallbeispiel zur Theorieentwicklung in der Mathematik: Die Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen…………………………………990-993

Kinga SZŰCS, Matthias MÜLLER, Jena
Schwierigkeiten beim Einsatz digitaler Werkzeuge als Reaktion auf bilinguale Unterschiede..…………………………………………………994-997

Kathrin TALHOFF, Münster
Besonderheiten mathematischer begabter Kinder im Vorschulalter.………………………………………………………998-1001

Julia TELLER, Bärbel BARZEL, Timo LEUDERS, Freiburg
Förderung Diagnostischer Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern im Bereich Funktionales Denken: Eine Interventionsstudie..…..1002-1005

Sandra THOM
Bruchrechnung – Easy going?!?...1006-1009

Christoph TILL, Ludwigsburg
Vorstellungen von Grundschulkindern zu „Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit"…..……………………………………………1010-1013

Stephanie TRUMP, Andreas BOROWSKI, Aachen
Die Anwendung von Mathematik in Physik..…..……………………1014-1017

Philipp ULLMANN, Frankfurt
„Situated learning" in der Mathematikdidaktik: eine hochschul-didaktische Perspektive?..1018-1021

Christian VAN RANDENBORGH, Würzburg
Zeichengeräte erforschen - Modellieren erleben.………………..1022-1025

Emese VARGYAS, Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz
Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz?............................1026-1029

Ingrida VEILANDE, Riga
On mathematical problems with elements of the game of chess…1030-1033

Christine PLICHT, Markus VOGEL, Christoph RANDLER, Heidelberg
Diagramme im Biologieunterricht – Wie gehen Kinder damit um? ………………………………………………………………………….1034-1037

Rose VOGEL, Julia ZERLIK, Frankfurt am Main
„Bilder des Alltags" – mathematisch und mathematikdidaktisch gedeutet……………………………………………………….…..…..1038-1041

Sebastian VOGEL, Kay ACHMETLI, Janina KRAWITZ, Werner BLUM, Kassel
VELM-8 – Ein Projekt zur Verbesserung der Effektivität der Lernstandserhebungen Mathematik Klasse 8…………………..…..1042-1045

Jörg VOIGT, Münster
Eine Alternative zum Modellierungskreislauf…………………..…1046-1049

Bodo v. PAPE, Oldenburg
Erinnerungen und Gedanken eines „Nebenstrecklers" – 25 Jahre Einsatz für Tabellenkalkulation im MU………………………..………1050-1053

Sieglinde WAASMAIER
Heterogenität bei der Einführung neuer Inhalte nutzen……..……1054-1057

Gerd WALTHER, Brigitte DOERING, Claudia FISCHER, Kiel
Aufgabenauswahl, -analyse und -variation. Welche kompetenzfördernden Merkmale von Mathematik-aufgaben nutzen Lehrkräfte in einem Professionalisierungs-programm an Grundschulen?...................1058-1061

Johannes WARNECKE, Greven
Lernumgebungen im Förderunterricht…..……………………..…..1062-1065

Thomas WASSONG, Paderborn
Was sollten Mathematik-Fortbildner über das Thema statistische Verteilungen in der Sekundarstufe I wissen? – Anwendung eines Modells zum Professionswissen im Rahmen einer DZLM-Multiplikatorenqualifizierung……..……………………………………1066-1069

Nobuki WATANABE, Kyoto Univ. of Education, JAPAN
RTMaC Lesson Study of Mathematics Education in Japan…....…1070-1073

Sabine WEIDENEDER, Stefan UFER, München
Die Auswahl von Aufgaben und deren Begründung in der Unterrichtsplanung von Mathematik-Lehrkräften…………………1074-1077

Julia WEINSHEIMER, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten
Diagnosekompetenz von Grundschullehrkräften erfassen – Einblicke in die Entwicklung eines Erhebungsinstruments…..………………1078-1081

Lena WESSEL, Dortmund
Sprache und Vorstellungen parallel entwickeln – Wirkungen einer fach- und sprachintegrierten Förderung für sprachlich schwache Lernende ……………………………………………………………..1082-1085

Kirsten WINKEL, Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg
Darstellen, Argumentieren, Reflektieren und der Nutzen von Metakognition – Eine Teilstudie des Projekts La viDa-M…………………………..1086-1089

Kathrin WINTER, Münster
Diagnostisches Potential von Online-Self-Assessments - Möglichkeiten und Umsetzung………………………………………..1090-1093

Erich Ch. WITTMANN, Dortmund
Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art..…………………………………………………...1094-1097

Ingo WITZKE, Siegen
Zur Übergangsproblematik im Fach Mathematik…………………1098-1101

Bernd WOLLRING, Kassel
Rich Assessment Tasks – Aufgaben und Lernumgebungen mit weitem Differenzierungs- und Bewertungsraum……………………………..1102-1105

Jan F. WÖRLER, Würzburg
Modellieren von Kunstwerken: ein anderer Modellierungskreislauf……………………………………………...………1106-1109

Deborah WÖRNER, Nürnberg
Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriff im Mathematikunterricht – eine empirische Untersuchung..………………………………...……1110-1113

Seval YETIS, Matthias LUDWIG, Frankfurt am Main
Diagnose und individuelle Förderung: Ergebnisse einer Vorstudie zum Thema Achsenspiegelung und Achsensymmetrie……..….………1114-1117

Marc ZIMMERMANN, Christine BESCHERER, Ludwigsburg
Was ist gute Hochschullehre in Mathematik?...............................1118-1121

Larissa ZWETZSCHLER, Dortmund
Von der Ergebnisgleichheit zur Einsetzungsgleichheit –Rekonstruktion von Vorstellungsentwicklungsprozessen zur Gleichwertigkeit von Termen…………………………………………………….………1122-1125

Teil 3: Posterbeiträge

Henrike ALLMENDINGER, Siegen
Felix Klein und das Prinzip der Veranschaulichung – Zur Rolle der Anschauung in der Lehrerbildung……………….……..1128-1131

Meta Miriam BÖNNIGER, Udo KÄSER, Bonn
Wie entwickelt sich die Fähigkeit des Kopfrechnens? Eine längsschnittliche Analyse bei Schülerinnen und Schülern des vierten Schuljahres…………………………………….……..1132-1133

Anika DREHER, Kirsten WINKEL, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg
Lernen anregen mit vielfältigen Darstellungen im Mathematikunterricht – Das Projekt La viDa-M……………………………………………..1134-1135

Martin Erik HORN, Berlin
Eine Einführung in unterschiedliche Darstellungen der Pauli-Algebra: Konzeption eines Lehrbuchs……………………………………...…1136-1137

Frank HELLMICH, Fabian HOYA, Paderborn
Implizite Theorien von der Veränderbarkeit eigener Fähigkeiten bei Kindern im Mathematikunterricht der Grundschule – Ergebnisse aus einer empirischen Studie…………………..…………………...…1138-1139

Mareike MINK, Köln
Geometrische Begriffsentwicklung im Rahmen ingenieurwissenschaftlicher Anwendungen der Kinematik..…….1140-1141

Gabriele MOLL, München
Mathematische Begründungsaufgaben in Vergleichsarbeiten der Grundschule: Ein Dissertationsprojekt………….……………….…1142-1143

Angela SCHMITZ, Freiburg
Visualisierung im Mathematikunterricht: Welche Repräsentationen sehen Lehrpersonen als nützlich an?..1144-1145

Julia STEMMER, Dorothea BUSSMANN, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten
Spielintegrierte Mathematische Frühförderung (SpiMaF)……….1146-1147

Nina STURM, Landau
Wie knacke ich das Problem? Zeichnen, auflisten, tabellieren oder einfach nur rechnen...1148-1149

Teil 4: Arbeitskreise der GDM

Astrid BRINKMANN, Münster, Thomas BORYS, Karlsruhe
Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht"……………………………………………1152-1155

Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Katja EILERTS, Potsdam, Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, Nürtingen
Arbeitskreis HochschulMathematikDidaktik……………………………1156-1159

Teil 5: Sektionsbeschreibungen

Rolf BIEHLER, Paderborn
Sektion: „DZLM-Mathematik-Multiplikatorenqualifikation Sek. I "……………………………………………………1162-1163

Astrid BRINKMANN, Münster, Thomas BORYS, Karlsruhe
Sektion: „Vernetzungen im Mathematikunterricht"……………….1164-1165

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg
Mit vielfältigen Repräsentationen umgehen können………………1166-1167

Thomas GAWLICK, Hannover
Problem, Barriere und Heurismen - Hannoveraner Studien zum Problemlösen………………………………………………………1168-1170

Jürgen ROTH, Landau
Vernetzung schulischer und außerschulischer Lernorte…………1171-1172

Petra SCHERER, Essen, Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg, Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund
Entwicklungsprojekte und Aktivitäten der DZLM-Abteilung ›Inklusion und Risikoschüler‹……………………………………1173-1176

Martin STEIN, Münster
Sektion: Mathematik Online……………………………………….1177-1178

Inhaltsverzeichnis Band 1: S. 1 - 579

Teil 1: Einführungen und Hauptvorträge

**Gilbert GREEFRATH, Friedhelm KÄPNICK,
Martin STEIN, Münster**
*Vorwort zum Tagungsband „Beiträge zum
Mathematikunterricht 2013"……………………………………………..29-30*

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg
Eröffnungsrede des 1. Vorsitzenden der GDM 31-34

Martin BURGER, Münster
Biomedizinische Bildgebung und inverse Probleme…………………...….37-43

Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale
Mathematische Begabungen im jungen Schulalter………………………….45-52

Celia HOYLES, London
*From design experiments to innovation at scale: potential and
challenges for research in mathematics education…………………………..53*

Silke LADEL, Saarland
*„Garantierter Lernerfolg" oder „Digitale Demenz"? Zum frühen
Lernen von Mathematik mit digitalen Medien……………………………....54-61*

Heinz STEINBRING, Essen
*Mathematische Interaktion aus Sicht der interpretativen Forschung
– Fallstudien als Basis theoretischen Wissens……………………………...62-69*

Teil 2: Einzelbeiträge

Christoph ABLEITINGER, Wien
*Eine selbstdifferenzierende Problemlöseaufgabe zum Thema
Billard………………………………………………………………..……....…..72-75*

**Kay ACHMETLI, Kassel, Stanislaw SCHUKAJLOW, Paderborn,
André KRUG, Paderborn**
*Bearbeitungsprozesse von Schülern zu Aufgaben mit multiplen
mathematischen Lösungswegen...76-79*

Kathrin AKINWUNMI, Dortmund
Mathematische Muster verallgemeinern in der Grundschule...….……..80-83

Natascha ALBERSMANN, Wuppertal
Eltern-Kind-Interaktion im Rahmen einer mathematischen Entdeckungsreise - Einblicke in das Projekt „Familien Erleben Mathematik“…………………………………………………..84-87

Judith AMES, Landau
Musterfolgeaktivitäten für GrundschülerInnen und Studierende……..88-91

Daniela AßMUS, Halle an der Saale, Frank FÖRSTER, Braunschweig
ViStAD – Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern...92-95

Bärbel BARZEL, Ralf ERENS, Hans-Georg WEIGAND, Andreas BAUER, Freiburg/ Würzburg
EDUMATICS – eine theoriegeleitete Fortbildungsplattform zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht......................96-99

Sabine BAUM, Würzburg
Simulieren im Mathematiklabor des funktionalen Denkens…....……100-103

Sabine BAUMANN, Integrierte Gesamtschule Lehrte
Tablet-PCs im Unterricht: Erste Erkenntnisse einer Fallstudie...…..104-107

Isabell BAUSCH, Regina BRUDER, Darmstadt
TELPS – Ein Instrument zur Erforschung und Förderung von mathematikdidaktischem Wissen……………………………...………….108-111

Silvia BECHER, Rolf BIEHLER, Reinhard HOCHMUTH, Juliane PÜSCHL, Stephan SCHREIBER, Paderborn/ Lüneburg
Von Zahlenmustern zur vollständigen Induktion – Analysen zur Argumentationsqualität von Studierenden im ersten Semester…...…112-115

Ramona BEHRENS, Würzburg
Forschendes Lernen – unterstützt durch Taschencomputer…………116-119

Ralf BENÖLKEN, Münster
Gruppenwettbewerbe: Eine geeignete Organisationsform für die Förderung mathematisch begabter Kinder?..............................120-123

Matthias BERNHARD, Kristina REISS, München
Stochastik im Grundschulalter: Strategien bei der Analyse von Vierfeldertafeln1……………………………………………...………124-127

Nina BERLINGER, Friedhelm KÄPNICK, Münster
Besondere Visualisierungskompetenzen kleiner Matheasse…………128-131

Carola BERNACK, Timo LEUDERS, Lars HOLZÄPFEL, Pädagogische Hochschule Freiburg
Vertiefte Analysen zum Umbau des Überzeugungssystems während eines Problemlöseseminars………………………………..…..132-135

Michael BESSER, Kassel/ Lüneburg, Natalie TROPPER, Lüneburg, Dominik LEISS, Lüneburg
Lehrern Lehren lehren - Entwicklung und Evaluation von Lehrerfortbildungen zu formativem Assessment………….…………..136-139

Bianca BEUTLER, Braunschweig
Konkrete Würfelbauwerke vs. Schrägbilder von Würfelbauwerken – Schwierigkeiten beim Anzahlerfassen und Strukturieren……………140-143

Rolf BIEHLER, Daniel FRISCHEMEIER, Susanne PODWORNY, Paderborn
TinkerPlots 2.0 – von realen Handlungen über Computer-simulationen zum stochastischen Denken………………………………....144-147

Rolf BIEHLER, Ana KUZLE, Janina OESTERHAUS, Thomas WAS-SONG, Paderborn
Stochastikfortbildner fortbilden: ein projektorientiertes Konzept zur Multiplikatorenqualifikation ……………………………………..….148-151

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen
Wenn situationale Bedingungen die Entwicklung des Dezimabruchkonzepts stören……………………………………………..152-155

Jan BLOCK, Braunschweig
Quadratische Gleichungen – Erkennen und verstehen?...................156-159

Katrin BOCHNIK, Stefan UFER, München
Der Einfluss einer nicht-deutschen Familiensprache auf verschiedene Facetten mathematischer Kompetenz in der Grundschule………..…160-163

Rita BORROMEO FERRI, Maike HAGENA, Kassel
M@thWithApps – stärkere kognitive Aktivierung mittels neuer Medien in der Lehramtsfachausbildung Mathematik !?...................164-167

Thomas BORYS, Karlsruhe; Astrid BRINKMANN, Münster
Strukturiertes und vernetzendes Lehren und Lernen mit Maps……..168-171

Claudia BÖTTINGER, Essen
Historische Aspekte bei der Förderung mathematisch interessierter Grundschulkinder………………………….....................172-175

Martin BRACKE, Kaiserslautern
Zeitprognose beim Ausdauerlaufen – woran erkennt man ein authentisches Modellierungsprojekt…………………………………...……..176-179

Matthias BRANDL, Passau
Das isoperimetrische Problem für Dreiecke………………………...……180-183

Birgit BRANDT, Götz KRUMMHEUER, Frankfurt
Die Interaktionale Nische mathematischer Denkentwicklung im Zusammenhang mit Sprachentwicklungsauffälligkeiten…...…..……184-187

Eileen BRAUN, Münster
Lösung realitätsnaher Aufgaben – eine Voruntersuchung zum Lösungsverhalten von ViertklässlerInnen bei der Bearbeitung einer realitätsnahen FermiAufgabe………..188-191

Katinka BRÄUNLING, Andreas EICHLER, Freiburg
Vorstellungen von Lehrkräften zum Arithmetikunterricht im Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe I……………………….........192-195

Hans-Joachim BRENNER, Erfurt
Die Greensche Methode in der Lehrerfortbildung…………...……..196-199

Bernhard BROCKMANN, Augsburg
Der Nachlass einer Institution – Materialien aus der ehemaligen Zentralstelle für Computer im Unterricht……………..…………...…200-203

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover
Zwei-Tore-Regel und Zwei-Spalten-Beweis……………………………204-207

Lisa Kathrin BRÜCKEL, Osnabrück
Förderung des arithmetischen Denkens von schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern……………………………………...…208-211

Georg BRUCKMAIER, Regensburg, Stefan KRAUSS, Regensburg, Do-minik LEISS, Lüneburg, Werner BLUM, Kassel, Michael NEUBRAND, Oldenburg, Martin BRUNNER, Berlin
COACTIV-Video: Eine unterrichtsnahe Erfassung fachdidaktischen Wissens mittels Videovignetten…………………………………………212-215

Esther BRUNNER, CH-Kreuzlingen
Argumentieren und Beweisen – eine spezifische Form der sozialen Interaktion…………………………………………………..................216-219

Nils BUCHHOLTZ, Gabriele KAISER, Hamburg; Sigrid BLÖMEKE, Berlin
Die Entwicklung von Beliefs von Lehramtsstudierenden in der Studieneingangsphase – Ergebnisse aus TEDS-Telekom…………….220-223

Bernd BÜCHLER, Paderborn
Verständnis- und Darstellungsschwierigkeiten von Studierenden beim Arbeiten mit Funktionenfolgen in einer mathematischen Anfängervorlesung………………………………………………...224-227

Bernhard BURGETH, Florian KERN, Saarbrücken
Mathematik besser einsehen mit Bildverarbeitung……………….….228-231

Norbert Christmann, Kaiserslautern
Mathematik und Musik: Arvo PÄRTS Komposition „Spiegel im Spiegel"……………………………………………...232-235

Eva CLESS, Berlin
Wie erleben Kinder Geld? Datenerhebung und Forschungsansatz einer phänomenografischen Studie……………………………………...236-239

Elmar COHORS-FRESENBORG, Osnabrück
Das Hüpfen auf der Zahlenlinie als Evidenzbasis für vertragsgemäßes Rechnen………………………………………………………………….240-243

Jenny Christine CRAMER, Bremen
Sprachliche Hürden im deduktiven Schließen für Lernende mit Migrationshintergrund………………………………………………...244-247

Jan-Hendrik DE WILJES, Tanja HAMANN, Hildesheim
Die Hildesheimer Mathe-Hütte – Ein Angebot zur Einführung in mathematisches Arbeiten im ersten Studienjahr……………………...248-251

Theresa DEUTSCHER, Susanne PREDIGER, Christoph SELTER, Dortmund
Mathe sicher können – Sicherung mathematischer Basiskompetenzen in der unteren Sekundarstufe I………………………………………..…252-255

Hans M. DIETZ, Paderborn
Mathematik für Nichtmathematiker – diagrammatische Aspekte…..256-259

Christian DOHRMANN, Halle, Ana KUZLE, Paderborn
Past-Present-Future: Winkel anschaulich unterrichten!..................260-263

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Kirsten WINKEL, Ludwigsburg

Umgang mit vielfältigen Repräsentationen beim Bruchrechnen - Kompetenzen von Lernenden und professionelles Wissen von Mathematiklehrkräften……………………………………………………264-267

Ulrike DREHER, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Freiburg; Jos BERTEMES, Luxemburg
Wie kommen Lehrerfortbildungen bei Lernenden an? – Problemlösestrategien vermitteln……………………………………….268-271

Christina DRÜKE-NOE, Kassel, Svenja Mareike KÜHN, Duisburg-Essen
Zentrale Abschlussprüfungen im Fach Mathematik zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses – Prüfungsstrukturen und Aufgabenanalysen…………………………………………………….272-275

Christoph DUCHHARDT, Anne-Katrin JORDAN, Insa SCHNITTJER, Kiel
Berufsschulen und Gymnasien ‑ mathematische Kompetenzen und Einstellungen zur Mathematik im Vergleich…………………...………276-279

Simone DUNEKACKE, Lars JENßEN, Wibke BAACK, Martina TENGLER, Hartmut WEDEKIND, Marianne GRASSMANN, Sigrid BLÖMEKE (Humboldt-Universität zu Berlin; Alice Salomon Hochschule Berlin)
Was zeichnet eine kompetente pädagogische Fachkraft im Bereich Mathematik aus? Modellierung professioneller Kompetenz für den Elementarbereich…………………………………………………………..280-283

Carola EHRET, Timo LEUDERS, Freiburg
Entwicklung mathematischer Schreibkompetenz bei Fünft-klässlerInnen der Werkrealschule – erste Ergebnisse…………………….....…………….284-287

Andreas EICHLER, Alexandra STURM, Bärbel BARZEL & Lars HOLZÄPFEL, Freiburg
Integriertes Medienkonzept in der Mathematiklehrerausbildung (IM²)………………………………………………………………………….288-291

Joachim ENGEL, Ludwigsburg
Von der Schwierigkeit der Vermittlung zwischen Mathematik und dem Rest der Welt…………………………………………………………...……..292-295

Ralf ERENS, Freiburg
Rekonstruktion von curricularen Überzeugungen zum Analysisunterricht………………………………………………………296-299

Christian FAHSE, Landau
Argumentationstypen………………………………………………………..300-303

Maria FAST, Wien
Typische Entwicklungsverläufe von Lösungswegen beim Addieren und Subtrahieren von Klasse 2 bis 4……………………………………………...304-307

Nora FELDT, Darmstadt
Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen durch ein theoriegeleitetes Vorgehen………………….308-311

Astrid FISCHER, Oldenburg; Johann SJUTS, Leer
Wie wirksam ist forschendes Lernen zum Aufbau diagnostischer Fähigkeiten?...312-315

Klaus-Tycho FÖRSTER, Hildesheim/Zürich
Die Programmiersprache Scratch in der Sekundarstufe I…………...316-319

Stefan FRIEDENBERG, Bettina RÖSKEN-WINTER, Bochum
Strategien zur Lösung mathematikhaltiger Aufgaben der Technischen Mechanik……………………………………………………………...…320-323

Daniel FRISCHEMEIER, Paderborn
Verteilungen vergleichen mit TinkerPlots – und darüber hin-aus weitere Schlussfolgerungen aus Daten generieren…………………...………324-327

Daniel FRISCHEMEIER, Anja PANSE, Tobias PECHER, Paderborn
Schwierigkeiten von Studienanfängern bei der Bearbeitung mathematischer Übungsaufgaben ……………………………………..…..328-331

Albert A. Gachter, St.Gallen
Aufgabenkultur………………………………………………………...332-335

Hedwig GASTEIGER, LMU München
Förderung elementarer mathematischer Kompetenzen durch Würfelspiele – Ergebnisse einer Interventionsstudie………...……..336-339

Thomas GAWLICK, Hannover
Problem - das Gegenteil von Routineaufgabe? Zur Konzeption von Problemlösen………………………………………………………….340-343

Andrea GELLERT, Essen
Grundschulkinder erörtern verschiedenartige Deutungen eigener Lösungen – Interpretative Rekonstruktion mathematischer Argumentationsprozesse………………………………………..….344-347

Sandra GERHARD, Frankfurt am Main und Brigitte GLASER, Stade
Zur Rolle von Zeichnungen beim algebraischen Modellieren…...….348-351

Matthias GEUKES, Ralf BENÖLKEN, Kathrin TALHOFF, Münster
Mathematik in der lebenswertesten Stadt der Welt – Eine mathematische Stadtrallye durch Münster………………………..……352-355

Boris GIRNAT, Basel
Geometrische Paradigmen als Schlüsselüberzeugungen von Lehrpersonen zur Planung ihres Geometrieunterrichts……………..356-359

Robin GÖLLER, Kassel, Jörg KORTEMEYER, Paderborn, Michael LIE-BENDÖRFER, Lüneburg, Rolf BIEHLER, Paderborn, Reinhard HOCH-MUTH, Lüneburg, Jana KRÄMER, Kassel, Laura OSTSIEKER, Paderborn, Stephan SCHREIBER, Lüneburg
Instrumentenentwicklung zur Messung von Lernstrategien in mathematikhaltigen Studiengängen……………………………..……360-363

Stefan GÖTZ, Wien
Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien………………………………..……………..364-367

Daniela GÖTZE, Dortmund
„Weil ich die Wörter, die ich noch nicht kannte, einfach gebraucht habe“ – Förderung (fach)sprachlicher Kompetenzen im Mathematikunterricht der Grundschule…………………………………………………..…368-371

GÜNTER GRAUMANN, Bielefeld
Abbildungen in der Geometrie – Spiegelungsrechnen und dessen Analogien……………………………………………………..372-375

Gilbert GREEFRATH, Münster
Pragmatische Konzepte von Grundwissen und -können vor dem Hintergrund eines digitalen Werkzeugeinsatzes…………………….……..376-379

Birgit GRIESE, Michael CASPER, Bochum
Tragfähigkeit von Weg-Zeit-Kontexten beim Einstieg in die Differentialrechnung……………………………………………………………380-383

Matthias GROESSLER, Engelbert NIEHAUS, Landau
Geomedienkompetenz - Räumliche Orientierung und mobile Endgeräte…………………………………………..….……384-387

Meike GRÜßING[1], Julia SCHWABE, Aiso HEINZE, Frank LIPOWSKY Kiel / Kassel

Adaptive Strategiewahl bei Additions- und Subtraktionsaufgaben - eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsansätze……..388-391

Roland GUNESCH, Darmstadt
Improving university courses in mathematics with new lecturing technology: practical studies of classroom video recording and dissemination on the web…………………………………………………392-395

Christine GÜNTHER, Berlin
Problemlösestrategien mathematisch begabter Kinder im Grundschulalter…………………………………………...…………….396-399

Birgit GYSIN, Münster
Lerndialoge im mathematischen Anfangsunterricht – Altersmischung als mögliche lernförderliche Ressource………………………………..400-403

Dörte HAFTENDORN, Lüneburg
Ortslinie als Leitlinie………………………………………………….…..404-407

Maike HAGENA, Kassel
„Das Backsteinhaus ist ungefähr 3,875 m hoch“ Zum Einfluss der Größenvorstellungen auf die Modellierungskompetenz von Studierenden………………………………………………………….….408-411

Tanja HAMANN, Hildesheim
“Macht Mengenlehre krank?“ – Kritik an der Neuen Mathematik in der Grundschule………………………………………………………..412-415

Judit HARTKENS, Dortmund
Reflexive Wissenskonstruktionsprozesse in argumentativ geprägten Unterrichtsgesprächen………………………………………………..…..416-419

Mathias HATTERMANN, Bielefeld
Einführung und erste Rechenoperationen mit ganzen Zahlen: Ein Erfahrungsbericht……………………………………………………..420-423

Petra HAUER-TYPPELT, Wien
Entwickeln von Grundkompetenzen als Herausforderung im Mathematikunterricht………………………………………………..….424-427

Reinhold HAUG, Freiburg
Kooperatives Lernen aus fachdidaktischer Sicht…………………..….428-431

Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen
Mathematisch fundiertes fachdidaktisches Wissen…………………......432-435

Sabrina HEIDERICH, Dortmund
Von der Situation zur elementaren Funktion – wie Merksätze den Blick verkürzen………………………………………………………….…436-439
Kerstin HEIN, Berlin
Die Bedeutung von Zeichen für den Mathematikunterricht ─ eine mehrperspektivische Lesart………………………………………….…440-443

Isabelle HEINISCH, Klaus-Peter EICHLER, Schwäbisch Gmünd
Outcomeorientierung der Mathematiklehrerausbildung……………444-447

Frank HEINRICH, Anika PAWLITZKI, Lara-D. SCHUCK, Braunschweig
Problemlöseunterricht in der Grundschule……………………………448-451

Johanna HEITZER, RWTH Aachen
Infinitesimalrechnung nach Lazare Carnot im heutigen Analysisunterricht?...452-455

André HENNING, Andrea HOFFKAMP, Berlin
Aufbau von Vorstellungen zum Grenzwert im Analysisunterricht.....456-459

Esther HENSCHEN, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Qualitative Analyse von Spielsituationen in der „Bauecke"……..…460-463

Wilfried HERGET
Funktionen – immer wieder überraschend!.....................................464-467

Angela HERRMANN, Essen, Christoph ABLEITINGER, Wien
Was macht eine „gute" Musterlösung aus?....................................468-471

Katharina HOHN, München, Rita BORROMEO FERRI, Kassel
Mathematische Denkstile bei der Bearbeitung problem-haltiger Textaufgaben……………………………………………………………..472-475

Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Carola BERNACK, Institut für Mathematische Bildung der Pädagogischen Hochschule Freiburg
Veränderung mathematikbezogener Überzeugungen durch schreiben, forschen und reflektieren………………………………………….…..476-479

Martin Erik HORN, Berlin
Zur Beziehung zwischen inneren und äußeren Produkten in der Geometrischen Algebra……………………………………………….…...480-483

Hans HUMENBERGER, Wien
Elementarmathematische Betrachtungen zur gerechten Pizzateilung……………………………………………………………….....484-487

Stephan HUSSMANN, Bärbel BARZEL, Timo LEUDERS, Susanne PREDIGER Dortmund/Freiburg
Fachspezifische Differenzierungsansätze für unterschiedliche Unterrichtsphasen……………………………………………………….488-491

Melanie HUTH, Frankfurt am Main
Mathematische Gestik und Lautsprache von Lernenden……..………492-495

Caroline HÜTTEL, Weingarten
Qualität der Gestaltung und Begleitung von mathematischen Angeboten im Elementarbereich……………………………………...…496-499

Thomas JAHNKE, Potsdam
Zur Epistemologie der quantitativen ‚empirischen Bildungsforschung'……………………………….………500-503

Thomas JANSSEN, Bremen
Vorsagen erlaubt – Eigenkonstruktion vs. Hilfe in der Zone der nächsten Entwicklung………………………………………………….504-507

Judith JUNG, Rose VOGEL, Frankfurt am Main
Die Welt von oben ‑ Kinder interpretieren zweidimensionale Darstellungen von dreidimensionalen Raumarrangements…………508-511

Steffen JUSKOWIAK, Braunschweig
Zur Wirkung von Selbstreflexion beim Bearbeiten mathematischer Probleme………………………………………………………...……..512-515

Gert KADUNZ, Klagenfurt
Geometrie als Mittel zur Strukturierung des Denkens………………..516-519

Stephan BERENDONK, Köln; Rainer KAENDERS, Köln
Am Spirographen Mathematik erleben…………………………..………..520-523

Udo KÄSER, Bonn
Stochastisches Wissen und Entscheidungskompetenz in probabilistischen Problemsituationen ‚know that' und ‚know how' von Viert- und Siebtklässlern über Häufigkeit, Zufall und Wahrscheinlichkeit…...…524-527

Leander KEMPEN, Paderborn
Generische Beweise in der Hochschullehre……………………...……..528-531

Jennifer KLENZAN, Ellen ASCHERMANN, Rainer KAENDERS, Sylvia PRINZ, Köln
Selbstregulation in Klasse 8 – erste Ergebnisse eines Kooperationsprojekts zwischen Schule und Universität………..……..532-535

Christine KNIPPING, Andrea JANSSEN, Janett METZLER
Leistungsbezogene und soziale Stratifikationen von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht aus fachlicher und soziologischer Perspektive……………………………………………….536-539

David KOLLOSCHE, Universität Potsdam
Bürokratie und Rechnen im Mathematikunterricht…………….…….540-543

Jörg KORTEMEYER, Rolf BIEHLER, Niclas SCHAPER, Paderborn
Konzeptionalisierung von Lösungsprozessen bei mathematikhaltigen Elektrotechnik-Aufgaben……………………………………………….544-547

Nadine KRÄGELOH, Dortmund
Algebra verstehen, Terme aufstellen - Entwicklung und Erforschung diagnosegeleiteter Förderbausteine für Jugendliche nichtdeutscher Erstsprache……………………………………………..………..548-551

Jana KRÄMER, Kassel, Peter BENDER, Paderborn
Welche Fehler machen, welche Schwierigkeiten haben und welche Ideen entwickeln Studierende des Grundschullehramts beim Bearbeiten eines Arithmetik-Leistungstests? Oder: Was kodierte Nullen und Einsen nicht verraten..552-555

Jana KREUßLER, Horst W. HAMACHER, Kaiserslautern
Wie Geometrie zu einem anwendungsbezogenen und alltagsrelevanten Mathematikunterricht beitragen kann……………………………….556-559

Stephan KREUZKAM, Jan Marco JANOTTA, Hildesheim
Smart-ResponseTM – Gleiche Chance für alle?!..............................560-563

Stephan KREUZKAM, Hildesheim
Mangel an mathematischen Routinefertigkeiten – Basiswissen Mathematik…………………………………………….….564-567

André KRUG, Stanislaw SCHUKAJLOW, Paderborn
Prozedurales und konzeptuelles Wissen zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen und multiple mathematische Lösungswege…….....…….568-571

Stefanie KUHLEMANN, Oldenburg
Wie gehen Lehramtsstudierende mit Schülerdokumenten um?.........572-575

Sebastian KUNTZE, Anika DREHER, Ludwigsburg
Vielfältige Repräsentationen als Leitmotiv im Mathematikunterricht? Sichtweisen von Mathematiklehrkräften zum Stellenwert einer übergreifenden Idee1…………………………………………...………576-579

Grit KURTZMANN, Rostock
Häufigkeitsdiagramme in der Grundschule - Möglichkeiten und Stolpersteine………………………………………………………………….580-583

Ana KUZLE, Rolf BIEHLER, Janina OESTERHAUS, Thomas WASSONG, Paderborn
Praxisorientierte Fortbildungsdidaktik am Beispiel der Planung und Durchführung einer Stochastikfortbildung…………………..……..584-587

Ladislav KVASZ, Karls Universität zu Prag
Didaktische Aspekte der Entwicklung der Sprache der Mathematik………...588-591

Angela LAGING, Kassel
Wie wichtig sind die Selbstwirksamkeit und die Selbsteinschätzung für die mathematischen Leistungen von Studienanfänger/innen?...........592-595

Anselm LAMBERT, Saarbrücken
Zeitgemäße Stoffdidaktik am Beispiel "Füllgraph"………………..….596-599

Diemut LANGE, Hannover
„Überlegen wir mal ...” ‐ Barrierespezifische Kooperationsarten………………………………………………………..…600-603

Claudia LAZAREVIC
Analyse und Bewertung von Unterricht durch Mathematiklehrkräfte in der Berufseinstiegsphase………………………………………...….…604-607

Malte LEHMANN, Bettina RÖSKEN-WINTER, Bochum
Starthilfe ins Studium – Konzept und Wirksamkeitsstudien des Projektes Mathe/Plus……………………………………………………...608-611

Dominik LEISS, Lüneburg, Jennifer PLATH, Lüneburg, Knut SCHWIPPERT, Hamburg
Verstehen des Verstehens……………………………………………...….…612-615

Torsten LINNEMANN, Michaela TURINA, Basel
Lernumgebungen differenziert begleiten……………………………..….…616-619

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Basel, Marc SCHÄFER, Grahamstown, Duncan SAMSON, Grahamstown
VITALmaths ‐ Learning in Context („VITALmathsLIC”)……...….….620-623

Carolin LOCH, Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE, Kiel
Instrumententwicklung zur Erfassung professionellen Wissens von Lehramtsstudierenden…………………………………………….…….…624-627

Katharina LOIBL, Nikol RUMMEL, Ruhr-Universität Bochum,
Lars HOLZÄPFEL, Pädagogische Hochschule Freiburg
Aufgreifen von Schülerlösungen in nachfolgenden Instruktionsphasen ist wichtig für den Lernerfolg……………………………………………628-631

Matthias LUDWIG, Jens JESBERG, David WEISS, Frankfurt
MathCityMap - ein Smartphone-Projekt um Mathematik draußen zu machen……………………………………………………….………632-635

Jürgen MAASZ, Linz
Realitätsnähere Modellierung im Mathematikunterricht…………….…636-639

Elisabeth MANTEL, Erfurt
Räumliche Lagebeziehungen und Kartenverständnis………………..…640-643

Michael MARXER,
Flexibel mit Dezimalbrüchen rechnen – Dezimalbrüche verstehen..644-647

Patrick MEIER, Basel
Mathematik und Computer……………………………………………..……..648-651

Alexander MEYER, Dortmund
Eine unterrichtspraktische Diagnose im Bereich Algebra? Chancen einer schülerzentrierten Diagnose auf Basis algebraischer Denkmuster……………………………………………………..…………652-655

Wolfram MEYERHÖFER, Paderborn
Sind die Elemente der Stellenwerttafel Ziffern oder Das IQB als Herrscherin über die Stellenwerttafel…………………………...………656-659

Mareike MINK, Köln
Wie erzeugt man eine geradlinige Bewegung? … und wie kann diese Problemstellung zur Begriffsentwicklung von Lernenden beitragen?...660-663

Regina D. MÖLLER, Peter COLLIGNON, Erfurt
Analysis unter einer postmodernen Perspektive……………….……..664-667

Seiji MORIYA, Tamagaw University, Tokyo
On the Pre-service of Mathematics Education for Elementary School Teachers at the University of Education(2)…………………..……….668-671

Renate MOTZER, Augsburg
Magische Quadrate von der 1.Klasse bis zur linearen Algebra…..…672-675

Matthias MÜLLER, Jena
Ausgewählte empirische Untersuchungen zum CAS-Einsatz im Thüringer Mathematikunterricht – Ergebnisse nach dem ersten Jahr der CAS-Einführung………………………………………………..…….676-679

Stefanie MÜLLER-HEISE, Halle/Saale
Reflexive Gedanken von Schülerinnen und Schülern nach der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben - erste Befunde ………..………….680-683

Eva MÜLLER-HILL, Köln
Zur erklärenden Funktion geometrisch-zeichnerischer Darstellungen (GZDs)………………………………………………..….684-687

Bernd NEUBERT, Gießen
Kombinatorische Aufgaben in der Grundschule ………………..………688-691

Christoph NEUGEBAUER, Münster
Mathematische Kompetenzen in Online-Self-Assessments – Grundlagen oder spezifische Anforderungen?................................692-695

Robert NEUMANN, Freiburg/Nürnberg
CAS-Taschenrechner und die Untersuchung von mathematischen Fähigkeiten bei Erstsemesterstudierenden…………………….………696-699

Inga NIEDERMEYER, Lüneburg
Begründungen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern bei Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme……………..……700-703

Engelbert NIEHAUS, Dominik FAAS, Koblenz-Landau
Mathematische Beweise in elektronischen Klausuren in der Lehramtsausbildung…………………………………………………..….704-707

Yoshiki NISAWA, Osaka, Japan
Research on the introduction of integration in Japanese High Schools…………………………………………………………….708-711

Renate NITSCH, Darmstadt
Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge………………………………………………………...712-715

Marcus NÜHRENBÖRGER, Ralph SCHWARZKOPF, Dortmund
Gleichungen zwischen „Ausrechnen“ und „Umrechnen”…..………716-719

Janina OESTERHAUS, Rolf BIEHLER, Paderborn
BeSt@Kontext: Ein schüleraktivierendes Unterrichtskonzept für die Beurteilende Statistik mit computergestützter Simulation in authentischen Kontexten………………………………………………..720-723

Reinhard OLDENBURG, Benedikt Weygandt, Frankfurt/M.
Können Studierende alternative Begriffsdefinitionen mit Computeralgebra als Werkzeug untersuchen?................................724-727

Laura OSTSIEKER, Paderborn
Konvergenz von Folgen - Eine Studie zur Wissensentwicklung im Rahmen einer Analysis 1-Vorlesung…………………………………….728-731

Barbara OTT, Bamberg
Grafische Darstellungen zu Textaufgaben in der Grundschule…….732-735

Erkki PEHKONEN, Uni Helsinki; Leonor VARAS, Uni Chile
Ein Versuch zur Entwicklung des mathematischen Denkens in der Grundschule: Vergleichstudie Finnland - Chile…………………….……736-739

Kathleen PHILIPP, Timo LEUDERS, Freiburg
Diagnostische Kompetenzen von Mathematiklehrkräften – Worauf greifen Lehrerinnen und Lehrer bei der Diagnose zurück?.............740-743

Franz PICHER, Klagenfurt
Schul-Analysis: Ermutigendes und Ernüchterndes…………….……744-747

Guido PINKERNELL, Heidelberg
Mathematisches Grundwissen und digitale Werkzeuge……………..748-752

Meike PLATH, Lüneburg
Die Präsentationsform von Aufgaben und die Mathematikleistung von Kindern als Untersuchungsgegenstand einer Studie zum räumlichen Vorstellungsvermögen……………………………………………….….………753-756

Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS, Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
Augmented Reality und räumliche Entscheidungsuntersützung mit dem Smartphone……………………………………………………………757-760

Susanne PODWORNY, Paderborn
Mit TinkerPlots vom einfachen Simulieren zum informellen Hypothesentesten…………………………………………….…………………761-764

Jennifer POSTUPA, Nürnberg
Zeitlicher Wandel in Mathematikschulbüchern……………………….765-768

Susanne PREDIGER, Timo LEUDERS, Bärbel BARZEL, Stephan HUSSMANN, Dortmund/Freiburg
Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen – Ein Modell zur Strukturierung von Design und Unterrichtshandeln…..……………..769-772

Sylvia PRINZ, Jennifer KLENZAN, Ellen ASCHERMANN, Köln
Selbstregulation in Klasse 8 – Bericht über eine Begegnung von pädagogischer Psychologie und Mathematikdidaktik………………..773-776

Juliane PÜSCHL, Paderborn
Wie besprechen Tutoren Hausaufgaben? – Potentiale und Grenzen in der Aus- und Weiterbildung von Übungsgruppenleitern……….…777-780

Stefanie RACH, Ulrike SIEBERT, Aiso HEINZE, Kiel
Lehrqualität in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik: Konzeptualisierung und erste Ergebnisse……………......……………781-784

Martin RATHGEB, Siegen
Wie wird Arithmetik zu Algebra? Didaktische Aspekte der Brownschen Arithmetik………………………………………......……785-788

Katrin REIMANN, Köln
Eulers Zahlauffassung in seiner „Algebra"……………………...………789-792

Sabine REINDL, Linz
Entwicklung und Anwendung mathematischer Lösungsstrategien – unter Betrachtung möglicher Determinanten…………………………..793-796

Simone REINHOLD, Braunschweig
Diagnostische Kompetenzen von Grundschullehramtsstudierenden in praxisnahen Veranstaltungen zum Anfangsunterricht………...………797-800

Martin REINOLD, Jan WESSEL, Dortmund
Mit .mathematisch begabten. Kindern rechnen……………………..….801-804

Xenia-Rosemarie REIT, Matthias LUDWIG, Frankfurt
Wege zu theoretisch fundierten Testaufgaben zur Modellierungskompetenz……………………………………………………805-808

Nadine RENK, Susanne PREDIGER, Dortmund, Andreas BÜCHTER, Köln, Claudia BENHOLZ, Erkan GÜRSOY, Essen
Hürden für sprachlich schwache Lernende bei Mathematiktests – Empirische Analysen der Zentralen Prüfungen 10 NRW………...…..809-812

Sebastian REZAT, Paderborn
Fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik ‑ Ein Beitrag zur Theoriendiskussion?..813-816

Vanessa RICHTER, Dortmund
‚Ich hab den Unterschied berechnet‘ – Einblicke in eine Lernprozessstudie zur Begriffsbildung zu linearen Funktionen….…817-820

Leonhard RIEDL, Daniel ROST, Erwin SCHÖRNER, München
Fachmathematische Kenntnisse von Studierenden des Lehramts an Grund,- Haupt- oder Realschulen an der Ludwig-Maximilians-Universität München………………………………………...………821-825

Wolfgang RIEMER, Köln
Beurteilende Statistik ohne gute Probleme ist wie Schwimmen ohne Wasser..………………………………………….……………..…..826-829

Michael RIEß, Münster
DigitaleWerkzeuge und funktionales Denken – Ergebnisse einer Langzeitstudie in der Sekundarstufe I………………………………...830-833

Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ, Landau
Der Kovariationsaspekt von Funktionen in der Sekundarstufe I …..834-837

Katrin ROLKA, Wuppertal
Fermi-Fragen als Einstieg in bilingualen Mathematikunterricht…..838-841

Bettina RÖSKEN-WINTER, Jürg KRAMER, Bochum, Berlin
Lehrerfortbildungen als berufsbegleitende Erwachsenenbildung: Einfluss von Vorwissen und Auswirkungen auf die Praxis…..…….842-845

Jürgen ROTH, Rolf OECHSLER, Landau
Forschend lernen – Lernprozesse fördern..……….....……...….846-849

Benjamin ROTT, Hannover
Der Verlauf von Problembearbeitungsprozessen am Beispiel von Fünftklässlern……………………………....…...………………..850-853

Christian RÜTTEN
Metaphernanalyse zur Rekonstruktion von Vorstellungen zu negativen Zahlen……………………………………...……...…….854-857

Silke RUWISCH, Frances BEIER, Lüneburg
Schriftlich begründen in der Grundschule – ein disziplinübergreifendes Projekt……………………………………….858-861

Alexander SALLE, Bielefeld
Argumentationsprozesse beim Lernen mit animierten Lösungsbeispielen……………………………………………………..…....…..862-865

Katrin SAUER, Münster
Online-Self-Assessments für Studieninteressierte – Ein strukturierter Vergleich………………………………………………....866-869

Petra SCHERER, Essen, Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund, Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg
Umgang mit Heterogenität - ein Modul einer NRW-Multiplikatorenqualifizierung……………………………………………...870-873

Maike SCHINDLER, Dortmund
Empirische Studie zum Begriff der negativen Zahl………..……....…..874-877

Andrea SCHINK, Dortmund
Strukturelle Zusammenhänge bei Brüchen herstellen -Diagnose und Förderung für Lernende mit Schwierigkeiten………..…………..……..878-881

Kathrin SCHLARMANN, Oldenburg
Rekonstruktion von mentalen Strukturen von Studierenden zum Konzept Basis in der Linearen Algebra…………………………..….…882-885

Stephanie SCHLUMP, Oldenburg
Wie denken erfahrene Gymnasiallehrkräfte über die Strukturierung von Unterricht zur Entwicklung der Problemlösekompetenz?..........886-889

Barbara SCHMIDT-THIEME, Hildesheim
Zur Sache kommen: Gegenstandskonstitution im Mathematikunterricht……………………………………………...……..890-893

Oliver SCHMITT, Darmstadt
Tätigkeitstheoretischer Zugang zu Grundwissen und Grundkönnen…………………………………………………………....…..894-897

Sebastian SCHORCHT, Gießen
Mathematik mit historischem Hintergrund im Schulbuch – Analyse eines Aufgabentyps……………………………………..……...898-901

Christof SCHREIBER, Gießen
Mündliche Darstellung mit digitalen Medien…………..……………902-905

Stephan SCHREIBER, Reinhard HOCHMUTH, Lüneburg
Mathematik im Ingenieurwissenschaftsstudium – Auf dem Weg zu einer fachbezogenen Kompetenzmodellierung………..……………906-909

Stanislaw SCHUKAJLOW, André KRUG, Paderborn
Planung, Kontrolle und multiple Lösungen beim Modellieren……..910-913

Stephanie SCHULER, Joana ENGLER, Maria PELZER, Gerald WITTMANN, Freiburg
Anschlussfähige mathematische Bildung – Kontinuitäten und Diskontinuitäten im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule…………914-917

Alexander SCHULTEIS, Anna C. WITTE, Thomas GAWLICK, Hannover
Entwicklung und Erprobung einer Interventionsstrategie beim Lösen von problemhaltigen Textaufgaben……………………..…………918-921

Andrea SCHULZ, Katja KOCH, Tanja JUNGMANN, Rostock
„Mathe ist überall?!" – Förderung der professionellen Responsivität pädagogischer Fachkräfte im Bereich Mathematik in Kindertageseinrichtungen……………………………………..…………922-925

Stefan SCHUMACHER, Jürgen ROTH
Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung Grundvorstellungen im Schülerlabor erarbeiten………………………………………..……………926-929

Heinz SCHUMANN, Weingarten
Automatisierte algebraische Berechnungen an geometrischen Figuren…..……………………………………………………………...….930-933

Inge SCHWANK, Osnabrück
Wenn Würfelspielen schwer fällt ... zur Bedeutung von Ereignissen für das Rechnenlernen – Vorstellung der Mathematischen Spielwelt ZARAO…………………………………………………………..934-937

Björn SCHWARZ, Philip HERRMANN, Gabriele KAISER, Birgit RICH-TER, Jens STRUCKMEIER, Hamburg
Ein Projekt zur Unterstützung angehender Mathematiklehrkräfte in der ersten Phase ihres Studiums – Erste Erfahrun-gen aus der Begleitung einführender fachmathematischer Lehrveranstaltungen……....……..938-941

Ulrich SCHWÄTZER, Dortmund
Zur Relevanz komplementbildender Strategien bei der Subtraktion im Tausenderraum………………………………………………………..942-945

Hans-Dieter SILL, Rostock
Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Primarstufe..……………………………………………….…………….946-949

Hans-Stefan SILLER, Regina BRUDER, Tina HASCHER, Torsten LINNEMANN, Jan STEINFELD, Martin SCHODL
Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II..………………………………………………….……..950-953

Kerstin SITTER, Landau
Geometrische Körper an inner- und außerschulischen Lernorten...……………………………………………………………..954-957

Susanne SPIES, Siegen
Zum Bildungswert schöner Mathematik..……………………………..958-961

Ute SPROESSER, Sebastian KUNTZE, Joachim Engel, Ludwigsburg
Einflussfaktoren auf Statistical Literacy – erste Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der 8. Realschulklasse………962-965

Carolina STAIGER, Weingarten
Entwicklung und Erprobung von Feedbackkomponenten in der Bruchrechnung – Klasse 6………………………………………………966-969

Anke STEENPASS, Essen
Rahmungen von Grundschulkindern bei der Deutung von Anschauungsmitteln - Ergebnisse im Forschungsvorhaben KORA.....……..………970-973

Martin STEIN, Münster
Online-Plattformen zum Üben im Fach Mathematik im deutsch- und englischsprachigen Raum – ein systematischer Vergleich..…………...974-977

Wilhelm STERNEMANN, Lüdinghausen
"Verhalten" von Ganzrationalen Funktionen - inhaltliche Denkanstöße zum Analysisunterricht…..………………………………………......……..978-981

Hannes STOPPEL, Münster
Projektkurse in Mathematik im Rahmen eines Kooperationsprojekts von Schule und Hochschule..……………………………….……………982-985

Christine STREIT & Christof WEBER, PH Nordwestschweiz
Vignetten zur Erhebung von handlungsnahem, mathematikspezifischem Wissen angehender Grundschullehrkräfte...……………………………986-989

Horst STRUVE, Köln
Ein Fallbeispiel zur Theorieentwicklung in der Mathematik: Die Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen…………………………………………990-993

Kinga SZŰCS, Matthias MÜLLER, Jena
Schwierigkeiten beim Einsatz digitaler Werkzeuge als Reaktion auf bilinguale Unterschiede.……………………………………………………………..994-997

Kathrin TALHOFF, Münster
Besonderheiten mathematischer begabter Kinder im Vorschulalter.…………………………………………………………………….998-1001

Julia TELLER, Bärbel BARZEL, Timo LEUDERS, Freiburg
Förderung Diagnostischer Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern im Bereich Funktionales Denken: Eine Interventionsstudie..…….1002-1005

Sandra THOM
Bruchrechnung – Easy going?!?...1006-1009

Christoph TILL, Ludwigsburg
Vorstellungen von Grundschulkindern zu „Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit“…..…………………………………………......….1010-1013

Stephanie TRUMP, Andreas BOROWSKI, Aachen
Die Anwendung von Mathematik in Physik..….……………...…...….1014-1017

Philipp ULLMANN, Frankfurt
„Situated learning“ in der Mathematikdidaktik: eine hochschul-didaktische Perspektive?..1018-1021

Christian VAN RANDENBORGH, Würzburg
Zeichengeräte erforschen - Modellieren erleben.………………..…1022-1025

Emese VARGYAS, Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz
Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz?.............................1026-1029

Ingrida VEILANDE, Riga
On mathematical problems with elements of the game of chess…1030-1033

Christine PLICHT, Markus VOGEL, Christoph RANDLER, Heidelberg
Diagramme im Biologieunterricht – Wie gehen Kinder damit um? ……………………………………………………………………………….1034-1037

Rose VOGEL, Julia ZERLIK, Frankfurt am Main
„Bilder des Alltags“ – mathematisch und mathematikdidaktisch gedeutet……………………………………………………….…..…..1038-1041

Sebastian VOGEL, Kay ACHMETLI, Janina KRAWITZ, Werner BLUM, Kassel
VELM-8 – Ein Projekt zur Verbesserung der Effektivität der Lernstandserhebungen Mathematik Klasse 8…………………...…..1042-1045

Jörg VOIGT, Münster
Eine Alternative zum Modellierungskreislauf………………….…..1046-1049

Bodo v. PAPE, Oldenburg
Erinnerungen und Gedanken eines „Nebenstrecklers“ – 25 Jahre Einsatz für Tabellenkalkulation im MU………………………...……..1050-1053

Sieglinde WAASMAIER
Heterogenität bei der Einführung neuer Inhalte nutzen……...……..1054-1057

Gerd WALTHER, Brigitte DOERING, Claudia FISCHER, Kiel
Aufgabenauswahl, -analyse und -variation. Welche kompetenzfördernden Merkmale von Mathematik-aufgaben nutzen Lehrkräfte in einem Professionalisierungs-programm an Grundschulen?..................1058-1061

Johannes WARNECKE, Greven
Lernumgebungen im Förderunterricht…..…………………...…..1062-1065

Thomas WASSONG, Paderborn
Was sollten Mathematik-Fortbildner über das Thema statistische Verteilungen in der Sekundarstufe I wissen? – Anwendung eines Modells zum Professionswissen im Rahmen einer DZLM-Multiplikatorenqualifizierung……...……………………………………1066-1069

Nobuki WATANABE, Kyoto Univ. of Education, JAPAN
RTMaC Lesson Study of Mathematics Education in Japan….....…1070-1073

Sabine WEIDENEDER, Stefan UFER, München
Die Auswahl von Aufgaben und deren Begründung in der Unterrichtsplanung von Mathematik-Lehrkräften…………………1074-1077

Julia WEINSHEIMER, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten
Diagnosekompetenz von Grundschullehrkräften erfassen – Einblicke in die Entwicklung eines Erhebungsinstruments…..………………1078-1081

Lena WESSEL, Dortmund
Sprache und Vorstellungen parallel entwickeln – Wirkungen einer fach- und sprachintegrierten Förderung für sprachlich schwache Lernende ……………………………………………………………..1082-1085

Kirsten WINKEL, Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg
Darstellen, Argumentieren, Reflektieren und der Nutzen von Metakognition – Eine Teilstudie des Projekts La viDa-M……………………….1086-1089

Kathrin WINTER, Münster
Diagnostisches Potential von Online-Self-Assessments - Möglichkeiten und Umsetzung…………………………………….1090-1093

Erich Ch. WITTMANN, Dortmund
Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art...…………………………………………….1094-1097

Ingo WITZKE, Siegen
Zur Übergangsproblematik im Fach Mathematik……………….…1098-1101

Bernd WOLLRING, Kassel
Rich Assessment Tasks – Aufgaben und Lernumgebungen mit weitem Differenzierungs- und Bewertungsraum…………………………..1102-1105

Jan F. WÖRLER, Würzburg
Modellieren von Kunstwerken: ein anderer Modellierungskreislauf……………………………………………..1106-1109

Deborah WÖRNER, Nürnberg
Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriff im Mathematikunterricht – eine empirische Untersuchung..…………………………..…..1110-1113

Seval YETIS, Matthias LUDWIG, Frankfurt am Main
Diagnose und individuelle Förderung: Ergebnisse einer Vorstudie zum Thema Achsenspiegelung und Achsensymmetrie……..…..……..1114-1117

Marc ZIMMERMANN, Christine BESCHERER, Ludwigsburg
Was ist gute Hochschullehre in Mathematik?..............................1118-1121

Larissa ZWETZSCHLER, Dortmund
Von der Ergebnisgleichheit zur Einsetzungsgleichheit –Rekonstruktion von Vorstellungsentwicklungsprozessen zur Gleichwertigkeit von Termen…………………………………………………………..1122-1125

Teil 3: Posterbeiträge

Henrike ALLMENDINGER, Siegen
Felix Klein und das Prinzip der Veranschaulichung – Zur Rolle der Anschauung in der Lehrerbildung……………….…….1128-1131

Meta Miriam BÖNNIGER, Udo KÄSER, Bonn
Wie entwickelt sich die Fähigkeit des Kopfrechnens? Eine längsschnittliche Analyse bei Schülerinnen und Schülern des vierten Schuljahres………………………………………...……1132-1133

Anika DREHER, Kirsten WINKEL, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg
Lernen anregen mit vielfältigen Darstellungen im Mathematikunterricht – Das Projekt La viDa-M……………………………………………..1134-1135

Martin Erik HORN, Berlin
Eine Einführung in unterschiedliche Darstellungen der Pauli-Algebra: Konzeption eines Lehrbuchs…………………………………………...…1136-1137

Frank HELLMICH, Fabian HOYA, Paderborn
Implizite Theorien von der Veränderbarkeit eigener Fähigkeiten bei Kindern im Mathematikunterricht der Grundschule ‑ Ergebnisse aus einer empirischen Studie………………..…………………...…1138-1139

Mareike MINK, Köln
Geometrische Begriffsentwicklung im Rahmen ingenieurwissenschaftlicher Anwendungen der Kinematik..…….1140-1141

Gabriele MOLL, München
Mathematische Begründungsaufgaben in Vergleichsarbeiten der Grundschule: Ein Dissertationsprojekt………….……………….…1142-1143

Angela SCHMITZ, Freiburg
Visualisierung im Mathematikunterricht: Welche Repräsentationen sehen Lehrpersonen als nützlich an?..1144-1145

Julia STEMMER, Dorothea BUSSMANN, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten
Spielintegrierte Mathematische Frühförderung (SpiMaF)……….1146-1147

Nina STURM, Landau
Wie knacke ich das Problem? Zeichnen, auflisten, tabellieren oder einfach nur rechnen...1148-1149

Teil 4: Arbeitskreise der GDM

Astrid BRINKMANN, Münster, Thomas BORYS, Karlsruhe
Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht"……………………………………………1152-1155

Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Katja EILERTS, Potsdam, Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, Nürtingen
Arbeitskreis HochschulMathematikDidaktik…………………………1156-1159

Teil 5: Sektionsbeschreibungen

Rolf BIEHLER, Paderborn
Sektion: „DZLM-Mathematik-Multiplikatorenqualifikation Sek. I "……………………………………………………………1162-1163

Astrid BRINKMANN, Münster, Thomas BORYS, Karlsruhe
Sektion: „Vernetzungen im Mathematikunterricht"……………….....1164-1165

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg
Mit vielfältigen Repräsentationen umgehen können………………1166-1167

Thomas GAWLICK, Hannover
Problem, Barriere und Heurismen - Hannoveraner Studien zum Problemlösen…………………………………………………………1168-1170

Jürgen ROTH, Landau
Vernetzung schulischer und außerschulischer Lernorte…………1171-1172

Petra SCHERER, Essen, Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg, Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund
Entwicklungsprojekte und Aktivitäten der DZLM-Abteilung ›Inklusion und Risikoschüler‹………………………………………1173-1176

Martin STEIN, Münster
Sektion: Mathematik Online…………………………………………1177-1178

Grit KURTZMANN, Rostock

Häufigkeitsdiagramme in der Grundschule - Möglichkeiten und Stolpersteine

Die Kompetenzen zum Erstellen von Häufigkeitsdiagrammen sollten im Sinne eines langfristigen Festigens in der Grundschule schon ab der ersten Klasse entwickelt werden. Im Rahmen einer einjährigen Lehrerfortbildung zur Stochastik in der Grundschule wurde mit den Teilnehmern ein Entwicklungskonzept erarbeitet. Im Unterricht erstellten dann die Schüler Häufigkeitsdiagramme in den Klassen 1 bis 4. Hier werden nun die guten Ideen aber auch die Probleme und Stolpersteine im Unterricht dargestellt.

1. Lehrerfortbildung

Die überwiegend fachlich orientierte einjährige internetgestützte Lehrerfortbildung läuft im Schuljahr 2012/13 in der ersten Erprobung mit 12 Lehrkräften. Die Fortbildung ist in vier Präsensveranstaltungen und drei Arbeitsphasen gegliedert. Die Kommunikation während der Arbeitsphasen findet über die Internetplattform moodle statt. In den Präsensveranstaltungen werden fachliche Inhalte vermittelt und die didaktische Umsetzung im Unterricht diskutiert. In den Arbeitsphasen haben die Lehrkräfte neben einer Bearbeitung von Übungsaufgaben zur Festigung der fachlichen Inhalte die Aufgabe, die neu erworbenen Kenntnisse in ihrem Unterricht auszuprobieren und darüber Erfahrungsberichte zu erstellen. Aus der Erprobung im Unterricht ergaben sich viele gute Ideen aber auch Probleme, die ein Nachdenken über die Gestaltung und Vermittlung der Inhalte der Fortbildung erfordern.

2. Gestaltung des Stochastikunterrichtes in der Grundschule

Für die Gestaltung des Stochastikunterrichtes in der Grundschule wurden für die Fortbildung eine Reihe von Prinzipien formuliert, von denen in der Auswahl hier die für das Thema relevanten Prinzipien genannt werden sollen:

- Der Unterricht bewegt sich im Wesentlichen auf der Ebene der Phänomene, also der realen Vorgänge, die zu den Daten bzw. den Ergebnissen führen.
- Es werden inhaltliche Vorstellungen und Prototypen zu wesentlichen Inhalten des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe I vermittelt.
- Statistische Untersuchungen werden vor allem zu Vorgängen durchgeführt, deren Verlauf und Faktoren fassbar sind.

Das bedeutet vor allen, dass in Bezug auf die Entwicklung der Kompetenz des Erstellens von Häufigkeitsdiagrammen zunächst mit jenen Daten gearbeitet werden soll, die von den Schülern erhoben wurden und aus ihrer Erfahrungswelt stammen. Dies wird auch von Hasemann (2009) gefordert. In seinem ersten Meilenstein zur Kompetenzentwicklung im Bereich Daten, dem Sammeln von Daten, wird die besonders deutlich. Ein Vorteil der Erhebung eigener Daten ist, dass die Bedingungen des Entstehens dieser Daten und Prognosen bei veränderten Bedingungen diskutiert werden können.

3. Entwicklungskonzept

In Anlehnung an Neubert (2012) wurde gemeinsam mit den Lehrkräften während der Fortbildung ein Entwicklungskonzept zum Erstellen von Häufigkeitsdiagrammen erarbeitet. Dabei entstanden konkete Ziele für die einzelnen Klassenstufen 1-4, die im Folgenden dargestellt werden.

Klasse 1: Im Anfangsunterricht geht es zunächst darum, erste Kenntnisse im Erstellen von Diagrammen zu entwickeln. Dabei sollten zunächst von der Lehrkraft Fragen gewählt werden, die nur zwei mögliche Ergebnisse zulassen, um bei der Diagrammerstellung den Arbeitsaufwand gering zu halten. Für eine Untersuchung eignen sich besonders Ja-Nein-Fragen. Wählt die Lehrkraft diese geschickt, können hier sogar schon Gründe für das dann vorliegende Ergebnis untersucht werden. Zum Beispiel kann bei der Befragung „Kannst du schwimmen?“ auf Ursachen eingegangen werden. Die Erfassung der Daten der Befragung sollte zunächst auf enaktiver Ebene mithilfe von Objekten (z.B. Steckwürfel) oder den Schülern selbst, welche sich hinter einander aufstellen, erfolgen. Aus dieser enaktiven Darstellung kann dann das erste „Häufigkeitsdiagramm“ entstehen, welches nur aus der Merkmalsachse und den Streifen der Häufigkeiten besteht.

Klasse 2: In dieser Klassenstufe erfolgt für das Sammeln der Daten dadurch eine Erweiterung, dass sich die Anzahl der Ergebnisse vergrößert. Zunächst sollte sich deren Anzahl aber auf maximal 5 beschränken. Dabei kann die Lehrkraft auch Ergebnisse vorgeben, um deren Anzahl zu begrenzen. Fragen rund um die Gewohnheiten und Einstellungen der Schüler eignen sich hier besonders (z.B. Lieblingsfarbe). Das Hinzufügen einer y-Achse mit der Angabe der Häufigkeit zum besseren Ablesen der Ergebnisse und das Hinzufügen einer Überschrift, die zunächst von der Lehrkraft vorgegeben wird, ergänzen das Diagramm um wesentliche Merkmale.

Klasse 3: Das Häufigkeitsdiagramm wird nun weiter vervollkommnet. Zunächst sollte daran gearbeitet werden, dass Schüler zunehmend selbstständig in die Lage versetzt werden, eine geeignete Überschrift für das Diagramm zu finden. Diese Teilhandlung kann durch vielfältige Aufgabentypen eigenständig trainiert werden. Zur Vervollkommnung des Häufigkeitsdiagramms werden nun auch noch die Achsenbeschriftungen hinzugefügt. Das Diagramm ist nun vollständig. Eine weiterer Entwicklungsschritt wäre nun das Kippen des Diagrammes, so dass die Merkmals- und die Häufigkeitsachse vertauscht werden. Die Schwierigkeit für die Schüler besteht nun in dem Umdenken und richtigen Anordnen der Ergebnisstreifen.

Klasse 4: In dieser Klassenstufe erfolgt eine Festigung des richtigen und vollständigen Erstellens von Diagrammen. Es sollten auch statistische Untersuchungen durchgeführt werden, die eine größere Häufigkeit der Ergebnisse liefern. Daraus ergibt sich die notwendige Konsequenz, dass die Achse mit der Angabe der Häufigkeiten der Ergebnisse zum Zeichnen entsprechend eingeteilt werden muss. Diese Achseneinteilung stellt für die Schüler nicht nur in der Grundschule eine große Schwierigkeit dar. Zunächst sollte die Einteilung aus diesem Grund von der Lehrkraft vorgegeben werden. Die Fähigkeit der Achseneinteilung kann hier auch als Teilhandlung schrittweise durch einfache Übungen entwickelt werden. Diese könnten zum Beispiel zu Beginn wie folgt lauten: Du hast ein 10 cm lange Achse. Teile diese in 1000-er Schritte ein. Ziel am Ende der Klassenstufe vier sollte hier das Grundverständnis der Schüler sein, dass die Abschnitte auf der Achse genau wie auch auf dem Zahlenstrahl immer gleich groß sein müssen.

4. Stolpersteine und Konsequenzen für die Lehrerfortbildung

In der Erprobung des Entwicklungskonzeptes wurden in den verschiedenen Klassenstufen entsprechend der Vorkenntnisse der Schüler Daten gesammelt und aus diesen Häufigkeitsdiagramme erstellt. Dabei waren an den verschiedenen Bearbeitungsschritten Probleme zu beobachten.

Die ersten Schwierigkeiten traten bei der Wahl der Daten auf. Die Lehrkräfte wählten teilweise für die Schüler einer vierten Klasse sehr umfangreiches Datenmaterial aus, mit denen diese Häufigkeitsdiagramme erstellen sollten. Dadurch ergaben sich für die Schüler weitere, eigentlich vermeidbare Schwierigkeiten. Sie mussten sich für einen Datensatz entscheiden oder mehrere Merkmale in einem Diagramm unterbringen.

Weitere Probleme waren beim Erfassen von Daten in einer Strichliste zu beobachten. Hierbei zeigte sich teilweise, dass die Bedeutung der Strichliste nicht klar war. So sollten zum Beispiel in einer Erprobung Schüler aus einer Schatzkiste die Anzahl der verschiedenen Geldstücke in einer vorbereiteten Tabelle erfassen. Statt Geldstück für Geldstück in die Liste als Strich eingetragen wird, sind zunächst die Geldstücke sortiert worden, die Anzahl als Strichdarstellung und dann als Zahl notiert. Daraus lässt sich vermuten, dass den Schülern der Unterschied der Darstellung einer Zahl als Strichdarstellunng und die Bedeutung der Strichdarstellung in der Strichliste nicht ausreichend bewusst gemacht wurde.

Die häufigsten Fehler sind im Erstellen der Diagramme zu beobachten gewesen. Dabei stellt eine besondere Schwierigkeit das Eintragen mehrerer Merkmale in ein Diagramm dar. In einer Befragung sollten die Schüler von vier Grundschulklassen angeben, wie sie zur Schule kommen. Im Häufigkeitsdiagramm wurden nun für jedes Ergebnis (z. B. mit dem Fahrrad) für alle 4 Grundschulklassen die Häufigkeitstreifen eingetragen. Fachlich ist dies als problematisch anzusehen, da ein Vergleich von Klassen unterschiedlicher Größe nicht absolut sondern nur relativ betrachtet werden kann. Weiterhin wird durch diese Vielzahl der Streifen über den einzelnen Ergebnissen (5 Ergebnisse x 4 Klassen = 20 Streifen) das Diagramm unübersichtlich. Andere Probleme traten auf bei der Einteilung der Häufigkeitsachse, bei der Darstellung gruppierter Daten und bei der Darstellung anteiliger Daten. So sollten Daten einer Fahrradprüfung dargestellt werden, bei der von 270 Kindern 250 an der Prüfung teilgenommen und davon haben 230 die Prüfung bestanden haben. Die Schüler zeichneten zunächst einen gelben Streifen mit der Häufigkeit 270, darauf einen roten Streifen bis 250 und darauf einen schwarzen Streifen bis 230. Bei Lesen entstand dann der Eindruck eines Blockdiagramms, bei dem der Anteil aller Kinder am Kleinsten ist.

Aus dieser Vielzahl der beschriebenen Probleme ergeben sich für die Evaluation der Fortbildung und in Vorbereitung auf die weitere Durchführung folgende Konsequenzen:

Das Erstellen von Häufigkeitsdiagrammen sollte noch umfangreicher behandelt werden. Es müsste die ausführliche Vermittlung alle Diagrammarten mit deren wesentlichen Merkmalen als Gegenstand der Fortbildung aufgenommen werden. Durch gute Kenntnisse der Lehrkräfte zu Daten- und Skalenarten lassen sich die häufigsten Fehler in der Erstellung der Diagramme vermeiden. Das Erstellen von fachlich richtigen und vollständigen Häufigkeitsdiagrammen ist demzufolge nicht **trivial**.

Literatur

Hasemann, K. (2009): Meilensteine bei der Kompetenzentwicklung im Bereich „Daten“. In: Grundschule Mathematik, 21, S. 14-17.

Neubert, B. (2012): Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Sill, H. D. (2010): Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen. In: Stochastik in der Schule 30 (Heft 3), S. S. 2-13.

Ana KUZLE, Rolf BIEHLER, Janina OESTERHAUS, Thomas WASSONG, Paderborn

Praxisorientierte Fortbildungsdidaktik am Beispiel der Planung und Durchführung einer Stochastikfortbildung

Im Rahmen des Weiterqualifizierungsangebotes des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) wurde im Schuljahr 2012/13 erstmals ein Qualifizierungskurs „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I“ für Mathematikmoderatorinnen und -moderatoren aus NRW durchgeführt. Im ersten Modul des Kurses konzentrierten wir uns auf die Verknüpfung von inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen am Beispiel der Stochastik. Da sich der Kurs an Moderatoren richtete, wurden im Rahmen der Qualifizierung neben fachlichen und fachdidaktischen Kompetenzen auch explizit fortbildungsdidaktische Elemente vermittelt, die zur Professionalisierung der Moderatoren in ihrer Rolle als Fortbildner beitragen sollten. In diesem Artikel wird dieses Konzept zur Fortbildungsdidaktik und -methodik vorgestellt.

1. Ausgangslage

Weltweit steigen die Bemühungen, den Stochastikunterricht in den Schulen zu verändern. Durch Lehrerfortbildungen werden Konzepte für einen „modernisierten“ Stochastikunterricht, wie sie in reformierten Curricula sowie von Didaktikern und Forschern (z.B. Garfield, delMas, & Zieffler, 2012) vorgeschlagen werden, in die Schulen transferiert. Im Interesse höchstmöglicher Breitenwirkung richten sich die Angebote des DZLM in erster Linie an Multiplikator/innen. Im Schuljahr 2012/2013 wurde der Qualifizierungskurs „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I“ für Mathematikmoderatoren aus NRW durchgeführt. Die Inhalte der Fortbildung bezogen sich auf drei Themen: (1) Kompetenzorientierter Mathematikunterricht aus inhaltsbezogener Perspektive – am Beispiel der Stochastik, (2) Kompetenzorientierter Mathematikunterricht aus prozessbezogener Perspektive und (3) Fortbildungsmethodik und -didaktik und Fortbildungsmanagement. Für die erste Komponente und die darauf bezogene Fortbildungsdidaktik waren die Autoren dieses Beitrags verantwortlich (Biehler, Kuzle, Oesterhaus, & Wassong, 2013).

Bei der Planung und Ausgestaltung der Fortbildung wurde angestrebt, die Vielzahl relevanter Kompetenzen für Lehrkräfte und Moderatoren weitestgehend abzudecken. Dabei haben wir zwischen den folgenden Dimensionen des Professionswissens unterschieden: allgemeines Fachwissen und schulorientiertes Fachwissen in Mathematik, curriculares Wissen in fachlicher und fachdidaktischer Hinsicht, lern- und lehrorientiertes fachdidaktisches Wissen und medienorientiertes allgemeines und fachdidaktisches Wissen (Wassong & Biehler, 2010). Um die Moderatoren und Moderatorinnen in ihrer Tätigkeit zu unterstützen, wurde zusätzlich die Förderung von fortbildungsdidaktischem und –methodischem Wissen angestrebt, das eine wichtige Facette professioneller Kompetenz ist. Diese Kompetenzkategorie ging speziell auf die Arbeit der Teilnehmer als Moderator ein: die Moderatoren vertieften ihr fortbildungsdidaktisches/-methodisches Wissen zunächst mit Hilfe theoretischer Inputs. Darüber hinaus planten sie im Rahmen der Qualifizierung eine eigene Lehrerfortbildung zum Thema Datenanalyse in der Sek. I und führten diese als Teil der Bedingung für das Zertifikat durch. Im Anschluss an die Durchführung wurde die Fortbildung gemeinsam reflektiert. Hier wurde insbesondere auf die Auswahl der Methoden und beidseitig gemachte Erfahrungen eingegangen.

2. Konzept zur Fortbildungsdidaktik und –methodik in der Maßnahme

Das Thema Fortbildungsmethodik und -didaktik und Fortbildungsmanagement wurde jeweils additiv oder integrativ im Kurs umgesetzt. Im ersten Halbjahr wurde die Fortbildungsdidaktik praxisorientiert am Beispiel der Planung und Durchführung einer Stochastikfortbildung zur Datenanalyse in der Sek. I durch eine kontinuierliche Verzahnung von Theorie und Praxis realisiert. An drei Terminen wurde das Thema durch unterschiedliche Zugangs- und Arbeitsweisen thematisiert: (1) Einführung zur Weiterbildungsdidaktik und –management, (2) Vertiefung: Spezifika von Fortbildungen in Bereich Stochastik und (3) Planung, Durchführung und Reflexion einer Stochastikfortbildung. Durch die theoretischen Inputs der Dozenten wurden zunächst solche Teilaspekte und deren Umsetzungsmöglichkeiten erarbeitet, die in Fortbildungen bedeutend sind und die in der Fortbildungspraxis für Lehrende die größten Herausforderungen darstellen (Loucks-Horsley, Love, Stiles, Mundry, & Hewson, 2003). Beispielsweise wurden Themen aus der Weiterbildungsdidaktik und dem Weiterbildungsmanagement thematisiert, Modelle für Lehrerfortbildungen vorgestellt, Merkmale und Wirkungen effektiver Lehrerfortbildungen gemeinsam erarbeitet und diskutiert, die fachliche und fachdidaktische Literatur aufbereitet und abschließend diskutiert, wie diese nutzbringend in eigene Fortbildungen eingebunden werden kann. Ebenso hatten die Moderatoren mit Hilfe der theoretischen Inputs die Gelegenheit, ihre eigene Stochastikfortbildung didaktisch und methodisch zu planen, vorzustellen und mit den anderen Moderatoren zu diskutieren, bevor diese durchgeführt wurde.

Die Moderatorinnen und Moderatoren konnten sich so auf verschiedenen Ebenen und in verschiedenen Kontexten neue Kompetenzen aneignen bzw. diese vertiefen, insbesondere solche Kompetenzen, die helfen, nachhaltig Ideen eines innovativen Unterrichts an Lehrkräfte vermitteln zu können, d.h.

- methodische und inhaltliche Gestaltung verschiedener Fortbildungsformate
- Anpassung an die Bedürfnisse der Lehrkräfte
- Aufzeigen des Potenzials von aktuellen Schulbüchern und digitalen Werkzeugen
- Einführung in aufbereitete fachliche und fachdidaktische Literatur als Basis für Fortbildungskompetenz.

Die Rahmendaten für die Planung, Durchführung und Reflexion der eigenen Stochastikfortbildung zur Datenanalyse in der Sek. I wurden von uns vorgegeben: im Anschluss an das Modul 1 wurde von den Moderatoren erwartet, in einem Team von zwei bis vier Teilnehmern eine vierstündige schulinterne oder schulexterne Stochastikfortbildung zu einem der im Modul 1 behandelten Themen aus fachlicher und fachdidaktischer Perspektive zu konzipieren und durchzuführen. Da im Kurs auch medienorientiertes allgemeines und fachdidaktisches Wissen vermittelt wurde, wurde der Einsatz von Software in unterschiedlicher Intensität erwünscht. Darüber hinaus wurde ein Ablaufplan vorgegeben, der die folgende Komponente vorsah: (1) Einführung (Kennenlernen und Impulsreferat) (ca. 1 Stunde), (2) Block 1 (ca. 1 ¼ Stunde), (3) Block 2 (ca. 1 ¼ Stunde) und (4) Reflexion und Abschluss (ca. ½ Stunde). Während des Prozesses der Planung, Durchführung und Reflexion wurden die Moderatoren vom DZLM begleitet und unterstützt, z.B. durch Bereitstellung von DZLM-Fortbildungsmaterialien oder in Form von (Video-) Dokumentationen der Fortbildungen mit anschließender Beratung durch DZLM-Mitarbeiter.

3. Fazit und Ausblick

Unsere Erfahrungen bestätigen Erkenntnisse aus der empirischen Literatur (Loucks-Horsley et al., 2003), dass die additive Umsetzung eines Blocks zur Fortbildungsdidaktik und -methodik sinnvoll und notwendig ist: die Moderatoren sahen sich überfordert, ein Thema direkt parallel aus drei Perspektiven (Lernender, Lehrender, Fortbildner) zu bearbeiten. Dies begründete sich zum

Beispiel durch die eigenemangelnde Unterrichtserfahrungen mit digitalen Medien in Stochastik, was zu einem Konflikt mit ihrem Verständnis von Fortbildungskompetenz auf Basis von Unterrichtskompetenz führte. Um fortbildungsdidaktische und -methodische Kompetenzen effektiv zu vermitteln und zu vertiefen ist es wichtig, dass die Moderatoren Zeit haben, um ein Thema aus drei Perspektiven (Schüler ⊂ Lehrer ⊂ Moderator) betrachten zu können. Auch das ergänzende Sammeln von Unterrichtserfahrungen ist zentral, um das Selbstvertrauen der Moderatoren zu stärken. Dazu ist professionelle Unterstützung der Moderatoren bei der Unterrichtsentwicklung nicht nur notwendig, sondern gewünscht. Darüber hinaus bestätigte sich, dass die Expertise der Moderatoren als Ressource für den Lehr-Lernprozess im Rahmen einer Moderatorenqualifizierung einen großen Gewinn bringt, da sie die Expertinnen und Experten aus der Schulpraxis sind: durch gemeinsame Arbeit entstanden Synergien, wodurch Lernende und Lehrende in der Qualifizierung bidirektional profitierten.

Durch die Teilnahme an unserem Kurs sind die Moderatoren zukünftig qualifiziert, DZLM-Stochastikfortbildungen anzubieten. Unser Ziel ist es, mit ihnen insbesondere solche schulinternen oder schulexternen Fortbildungsangebote zu entwickeln und zu realisieren, die nachhaltig wirksam sind. Darüberhinaus planen wir den Kurs gemeinsam mit ausgewählten Teilnehmern des ersten Durchganges als Dozenten im Schuljahr 2013/2014 zu wiederholen und Clips aus den (Video-) Dokumentationen der durchgeführten Lehrerfortbildungen für als Anschauungs- und Reflexionsmaterial zu nutzen. Durch die angestrebte langfristige Zusammenarbeit der Teilnehmenden in Professionellen Lerngemeinschaften zur kollegialen fachbezogenen Unterrichtsentwicklung, sollen die Kooperations- und (Selbst-) Reflexionsfähigkeiten von Mathematiklehrkräften und -moderatoren gefördert werden, um nachhaltig eine Weiterentwicklung ihres Unterrichts und ihrer Fortbildungen zu erreichen.

Literatur

Biehler, R., Kuzle, A., Oesterhaus, J., & Wassong, T. (2013). Stochastikfortbildner fortbilden: ein projektorientiertes Konzept zur Multiplikatorenqualifikation. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. WTM: Münster.

Garfield, J., delMas, R., & Zieffler, A. (2012) Developing statistical modelers and thinkers in an introductory, tertiary-level statistics course. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 44*(4), 883–898.

Loucks-Horsley, S., Love, N., Stiles, K. E., Mundry, S., & Hewson, P. W. (2003). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Wassong, T., & Biehler, R. (2010). A model for teacher knowledge as a basis for online courses for professional development of statistics education. In C. Reading (Ed). *Proceedings of ICoTS 8,* Ljubljana, July 2010.

Ladislav KVASZ, Karls Universität zu Prag

Didaktische Aspekte der Entwicklung der Sprache der Mathematik

Mathematik wird oft als die Sprache der Wissenschaft verstanden, aber man vergisst, dass Mathematik selbst eine linguistische Dimension hat. In dem ersten Kapitel des Aufsatzes werden verschiedene Potentialitäten der Sprache der Mathematik diskutiert. Es sind Potentialitäten wie *logische* oder *expressive* Kraft. In dem Zweiten Kapitel wird beschrieben, wie diese Potentialitäten konstituiert sind. Dadurch wird eine Theorie des Aufbaus der formalen Sprache der Mathematik vorgeschlagen. Im dritten Kapitel werden dann einige didaktischen Konsequenzen der vorgeschlagenen Theorie gezogen.

1. Potentialitäten der Sprache der Mathematik

Wir möchten gerne bei dem Studium der Sprache der Mathematik die folgenden sechs Potentialitäten unterscheiden:

1. *Logische Kraft der Sprache* – wie etwa, dass komplexe Formeln in der Sprache bewiesen werden können,

2. *Expressive Kraft der Sprache* - Welche neue Situationen kann man in der Sprache ausdrücken, die vorher unausdrückbar gewesen sind,

3. *Methodische Kraft der Sprache* - welche neue Methoden ermöglicht uns die Sprache einzuführen dort, wo auf den vorherigen Stufen nur einzelne Tricks existierten,

4. *Integrative Kraft der Sprache* - welche neue Arten von Einheit ermöglicht uns die Sprache zu sehen dort, wo wir nur isolierte einzelne Fälle gesehen haben,

5. *Explanatorische Kraft der Sprache* - wie uns die Sprache unsere eigenes Unvermögen, das wir an früheren Stufen der Entwicklung erfahren haben, zu erklären ermöglicht,

6. *Metaphorische Kraft der Sprache* - wie die Sprache, durch Übertretung der Regeln ihrer eigenen Syntax, Situationen beschreiben kann, die gängigen Beschreibungen entgehen.

Vier von diesen Potentialitäten sind in unserem Buch *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics* (Kvasz 2008a, S. 16) beschrieben. Die *methodische* und die *metaphorische* Kraft wurden aber erst vier Jahre später in unserem Aufsatz *Language in Change* (Kvasz 2012, S. 16) eingeführt.

Wir glauben, dass ein wesentlicher Teil des Mathematikunterrichtes zum Ziel hat, dass Lernende sich diese Potentialitäten aneignen. Wir unterrichten Mathematik nicht nur ihrer selbst wegen, sondern auch um das Denken der Lernenden zu kultivieren (sehe Kaenders und Kvasz 2011, S. 72-78). Es scheint, dass die sechs angeführten Potentialitäten sechs verschiedene Dimensionen des Denkens beschreiben, die wir kultivieren möchten.

2. Wie werden die Potentialitäten konstituiert?

Der Prozess der Konstruktion einer neuen symbolischen Sprache besteht aus Schritten, die immer wieder in der Geschichte der Mathematik wiederholt wurden. In dem folgenden Text werden wir sie am beispiel der Algebra und der Analysis illustrieren (sehe dazu Kvasz 2006 und Kvasz 2008b).

1. Die *logische Kraft der Sprache* hängt eng mit der Einführung einer neuen Art von Symbolen zusammen. In der Algebra war das Symbol für die Unbekannte x, in der Analysis das Symbol für die Funktion $f(x)$.

2. Die *expressive Kraft der Sprache* hängt mit der Einführung einer neuen Operation, die unbegrenzt wiederholbar ist, zusammen. In der Algebra ist es die Operation der Potenz x, x^2, x^3, x^4 ..., in der Analysis ist es die Operation der Ableitung $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \frac{d^4f}{dx^4}, \dots$. Für einige erste Iterationen dieser Operation haben wir ein semantisches Verständnis (x ist Länge, x^2 ist Fläche, x^3 ist Volumen; die erste Ableitung ist Geschwindigkeit, die Zweite ist Beschleunigung), aber die weitere Iterationen verlassen diese Deutung und setzen sich ganz formal fort.

3. Die *methodische Kraft der Sprache* hängt mit der Einführung einer Konvention zusammen, die einem epistemischen Unterschied entspricht. In der Algebra ist es der Unterschied zwischen der Unbekannten und dem Parameter *x, y, z...// a, b, c …*; in der Analysis der Unterschied zwischen dem Wert und der Abweichung von ihm *x... // h....*

4. Die *integrative Kraft der Sprache* hängt mit der Vereinigung der Ausdrücke in eine einheitliche Form zusammen, die verschiedenen Sachverhalten entsprechen. In der Algebra werden so *Polynome* eingeführt; in der Analysis unendliche *Reihen*. Ein Polynom vereinigt Gleichungen nicht, weil sie denselben Sachverhalt beschreiben, sondern weil sie formal ähnlich sind.

5. Die *explanatorische Kraft der Sprache* hat mit der Umformung von Formen zu formalen Prädikaten zutun. In der Algebra sind es Prädikate wie

quadratische oder *kubische Irrationalität*; in der Analysis Prädikate *wie stetige* oder *differenzierbare Funktion*,

6. Die *metaphorische Kraft der Sprache* zeigt sich mit der Erweiterung der Realität um neue Objekte, die durch formale Prädikate definiert werden. In der Algebra sind das zum Beispiel die *negativen* und *komplexen Zahlen*; in der Analysis die ***nirgendwo***-*differenzierbaren Funktionen*. Diese Objekte verletzen die gewöhnlichen Eigenschaften der klassischen Objekte der entsprechenden Disziplin.

3. Didaktische Konsequenzen

Die oben beschriebenen sechs Schritte sind oft mit einer Reihe von didaktischen Problemen verknüpft.

1. Das Einführen einer neuen Art von Symbolen fordert von den Schülerinnen und Schülern eine Form der Vergegenständlichung, wie sie in der Theorie von Anna Sfard beschrieben wurde.

2. Die Einführung einer neuen, unbegrenzt wiederholbaren Operation, braucht auf der einer Seite eine Kontextbezogenheit dieser Operation, um sie überhaupt zu verstehen. Die Erweiterung der Operation über jede Grenze verlangt, auf der anderen Seite, ihre Dekontextualisierung. Was die Schüler lernen müssen, ist die Verknüpfung der Kontextbezogenheit und der Dekontextualisiertheit der durch die Operation erzeugten Ausdrücke.

3. Die Einführung der, einem epistemischen Unterschied entsprechenden, Konvention ist mit dem Problem verknüpft, das dieser Konvention in der Realität nichts entspricht. Die Schülerin/der Schüler muss lernen diese referentiell unfassbaren Unterscheidungen zu verstehen.

4. Die Vereinigung der formalen Ausdrücke, die verschiedenen Sachverhalten entsprechen, aber eine ähnliche Form haben, in einen Polynom ist auch nicht einfach. Der Schülerin/der Schüler muss lernen den Bezug zur Wirklichkeit zu unterdrücken und durch einen Bezug zu den rein Formalen Zusammenhängen zu ersetzen. Die Polynome werden als formale Objekte verstanden, die keine reale Referenz haben.

5. Die Umformung von Formen zu formalen Prädikaten ist deswegen schwer zu verstehen, weil die Unterschiede, die durch formale Prädikate eingeführt wurden, nur durch die Sprache zugänglich sind. In der Realität entspricht ihnen nichts. Der Schüler muss lernen, die empirische Realität durch eine formale Realität zu ersetzen.

6. Die Erweiterung der Realität um neue Objekte, die mit Hilfe der formaler Prädikate eingeführt werden – wie zum Beispiel die komplexe Zahlen – ist mit der Komplikation verknüpft, dass diese Objekte die gewöhnlichen

Eigenschaften der klassischen mathematischen Objekte verletzen. Die Schüler müssen lernen, den Begriff der Realität von diesen verletzten Eigenschaften zu trennen und sich an einen neuen, viel schwächeren Realitätsbegriff gewöhnen. Sie müssen die gewöhnlichen Eigenschaften der Objekte ausblenden und trotzdem ihren Anspruch an Realität aufrechterhalten.

Dank

Diese Arbeit wurde durch die Universitätspartnerschaft der Karls-Universität Prag mit der Universität zu Köln unterstützt. Der Autor ist Rainer Kaenders und Ysette Weiss-Pidstrygach für Diskussion und freundliche Unterstützung zu Dank verpflichtet. Schließlich gilt sein Dank der Grantagentur der Tschechischen Republik für die Unterstützung durch den Grant GA ČR P407/11/1740.

Literatur

Alten, H.-W., Naini, A.D., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H. & Wussing, H. (2003). *4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer, Berlin.

Kaenders, R. & Kvasz, L. (2011). Mathematisches Bewusstsein. In: M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel a M. Rathgeb (eds.), *Mathematik Verstehen*, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, S. 71-85.

Kaenders, R.H., Kvasz, L., & Weiss-Pidstrygach,Y. (2011). Mathematical awareness by linguistic analysis of variable substitution. Paper to appear in the *Proceedings of CERME 7*, Rzeszów, Poland.

Kvasz, L. (1997). Why don't they understand us? *Science and Education* **6**, S. 263-272.

Kvasz, L. (2006). History of Algebra and the Development of the Form of its Language. *Philosophia Mathematica* **14**, S. 287-317.

Kvasz, L. (2007). Sprache und Zeichen in Algebra. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007; Vorträge auf der 41. Tagung fur Didaktik der Mathematik vom 26. – 30. 3. 2007 in Berlin*, Franzbecker Verlag, Berlin, S. 467-470.

Kvasz, L. (2008a). *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Birkhäuser, Basel.

Kvasz, L. (2008b). Sprache und Zeichen in der Geschichte der Algebra – ein Beitrag zur Theorie der Vergegenständlichung. *Journal für Mathematik-Didaktik* **29**, S. 108-123.

Kvasz, L. (2012). *Language in Change. Fernando Gil International Prize 2010*. Fundacao Calouste Gulbenkian, Lisbon.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* **22**, S. 1-36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* **26**, S. 191-228.

Angela LAGING, Kassel

Wie wichtig sind die Selbstwirksamkeit und die Selbsteinschätzung für die mathematischen Leistungen von Studienanfänger/innen?

1. Einführung

Die Studienanfänger/innen in wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen weisen vielfach große Defizite in der Schulmathematik auf. Ihre eigenen Fähigkeiten und Kenntnisse in Mathematik können sie meist nicht richtig einschätzen, wobei dies vor allem mit einer Überschätzung einhergeht. Nach der Theorie und dem Forschungsstand ist anzunehmen, dass eine hohe Selbstwirksamkeit einen positiven Einfluss auf Leistung und motivationale Aspekte des Lernens hat (u.a. Bandura, 1997; Schunk, 1985; Pajares, 1996). Entsprechend wäre eine Stärkung der Selbstwirksamkeit anzustreben. Dies würde allerdings vermutlich das Problem der Überschätzung der eigenen Fähigkeiten noch verstärken. Was ist aber nun wichtiger? Sollte das Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten gestärkt werden oder sollten die Studierenden über ihre Defizite aufgeklärt werden um eine realistischere Selbsteinschätzung zu erlangen? Folglich ist eine differenzierte Betrachtung notwendig, die den Zusammenhang von Selbstwirksamkeit, Selbstverschätzung und Leistung genauer analysiert, insbesondere vor dem Hintergrund unterschiedlicher Aufgabentypen bzw. Schwierigkeitsgrade.

2. Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand

Zum Thema Selbstwirksamkeit liegen bereits einige Studien vor, unter anderem auch zur mathematischen Selbstwirksamkeit. In der Regel beziehen sich die Autor/innen auf die Definition von Bandura (1997, S. 3): „Perceived self-efficacy refers to beliefs in one’s capabilities to organize and execute the courses of action required to produce given attainments.” Die Erwartungen der eigenen Selbstwirksamkeit beeinflussen die Wahl der Aufgaben, die investierte Anstrengung, die Persistenz und die Leistung (u.a. Bandura, 1997). Studierende und Schüler/innen mit einer hohen Selbstwirksamkeitserwartung strengen sich mehr an, harren bei Schwierigkeiten länger aus und erreichen ein höheres Leistungslevel. Der Einfluss auf die Motivation, das Lernen und die Leistung wurde bereits für verschiedene Fächer in einigen Studien bestätigt (Pajares, 1996). Die Fähigkeitsentwicklung wird bei Kindern direkt von der wahrgenommenen Selbstwirksamkeit beeinflusst und indirekt durch eine Steigerung der Persistenz (Schunk, 1981). Das lässt vermuten, dass die wahrgenommene Selbstwirksamkeit sowohl Einfluss auf die Lernmethoden als auch auf deren Motivationsprozesse hat (Zimmermann, 2000). Nach der Definition von Schwarzer und Jerusalem (2002) handelt es sich um „neue oder schwierige Anforderungssituationen […] [und] nicht um Aufgaben, die durch einfache Routine lösbar sind, sondern um solche, deren Schwierigkeitsgrad

Handlungsprozesse der Anstrengung und Ausdauer für die Bewältigung erforderlich macht“ (S. 35). Bezogen auf die Mathematik bedeutet das, dass Selbstwirksamkeit vor allem bei schwierigen, komplexen oder neuen Aufgaben wichtig ist. Was ist aber eine schwierige Aufgabe, wenn Studienanfänger/innen bereits grundlegende Mathematikaufgaben aus der Mittelstufe nicht lösen können? Genau diese Problematik stellt sich im Fall der untersuchten Gruppe von Studienanfänger/innen der Wirtschaftswissenschaften.

3. Datengrundlage

Der hier verwendete Datensatz bezieht sich auf die erste von zwei anonymen Befragungen innerhalb der Veranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaften I“ an der Universität Kassel im Wintersemester 2011/12. Die Befragungen bestehen je aus einem Leistungstest mit 30 Grundlagenaufgaben in Mathematik sowie einem Fragebogen und einem Selbsteinschätzungsbogen. Für die Selbstwirksamkeit wird ein Verfahren verwendet wie es u.a. von Schunk (1981) in ähnlicher Form eingesetzt wurde. Dazu werden die Aufgaben, die im Anschluss gelöst werden sollen, jeweils für wenige Sekunden per Power-Point-Präsentation den Studierenden gezeigt. Für jede Aufgabe geben die Teilnehmer/innen auf einer Achter-Skala an, inwiefern sie sich zutrauen, diese Aufgabe erfolgreich zu lösen. Aufgrund der kurzen Zeit können die Studierenden nur die Aufgabe lesen und schnell einordnen, sie aber nicht lösen. Nach dem Einsammeln der Selbsteinschätzungsbögen werden die Leistungstests verteilt und bearbeitet. Die Selbstverschätzung wird anhand der Differenz von eingeschätzter und tatsächlicher Leistung für jede Aufgabe bei jeder Person berechnet. Somit hängen die drei Skalen Leistung, Selbstwirksamkeit (SWK) und Selbstverschätzung (SV) sehr stark von den Aufgaben und teilweise voneinander ab.

4. Erste Ergebnisse

Die Vermutung des positiven Zusammenhangs zwischen der SWK und der Leistung wird durch einen Korrelationskoeffizienten von r=0,507 bestätigt. Die Skala SV weist eine geringe, aber signifikante (p=0,026) positive Korrelation mit der Leistung auf (r=0,114), was auf den ersten Blick nicht ganz der Vermutung entspricht. Aufgrund der bereits genannten Abhängigkeit der Skalen, was u.a. durch die hohe Korrelation der Skalen SWK und SV von r=0,801 bestätigt wird, sollten die Zusammenhänge sehr vorsichtig betrachtet werden. Wie bereits dargestellt, muss vermutet werden, dass die Ergebnisse vom Aufgabentyp und vom Schwierigkeitsgrad abhängen. Deshalb sind genauere Analysen erforderlich. Insbesondere bei „leichten“ Aufgaben sind andere Zusammenhänge zu erwarten als bei vermeintlich „schweren“.

Die drei betrachteten Skalen können mittels einer Faktoranalyse in Faktoren getrennt werden. Die Screeplots verdeutlichen, dass es sich jeweils um einen Hauptfaktor handelt. Nach dem Eigenwertkriterium weisen die Skalen SWK und SV je drei Faktoren auf und die Skala Leistung zwei Faktoren. Exploratorische

Faktorenanalysen (Hauptachsenanalyse mit Promax-Rotation) mit drei Faktoren führen bei der SWK und der SV zu ähnlichen Lösungen, d.h. bis auf wenige Ausnahmen verteilen sich die Aufgaben anhand ihrer Ladungen auf die gleichen Faktoren. Drei Aufgaben wurden wegen zu hohen Nebenladungen ausgeschlossen. Die Faktoren weisen Trennungen nach Inhalt und Schwierigkeitsgrad auf: a) Ableitungen, b) schwere Aufgaben (Potenzen, Logarithmen, höhere Gleichungen/Ungleichungen) c) leichte Aufgaben (Rechnen, Funktionen, einfache Gleichungen).

Tabelle 1: Aufteilung der Faktoren (N liegt zwischen 404 und 451)

	Anzahl Aufgaben	Leistung (0 bis 1)	Itemschwierigkeit (Rasch)	SWK (1 bis 8)	SV (0 bis 7)
Faktor 1 (f1): Ableitungen	7	0,13	0,31	4,60	3,08
Faktor 2 (f2): schwere Aufgaben	8	0,09	1,32	3,44	2,26
Faktor 3 (f3): leichte Aufgaben	12	0,22	-0,27	5,18	3,29

Die über den Mittelwert gebildeten Teilskalen weisen zufriedenstellende bis sehr gute Cronbachs Alpha-Werte auf: SWK (0,934, 0,851 und 0,885), SV (0,811, 0,741 und 0,708), Leistung (0,709, 0,665 und 0,757). Eine Teilung der Leistung in zwei Teilskalen wie es von der Faktorenanalyse empfohlen wird und einer Trennung von eher einfachen und eher schwereren Aufgaben entspricht, würde bessere Werte erreichen (0,821 und 0,798).

Tabelle 2: Korrelationen zwischen Faktoren der SWK, SV und Leistung (*p<0,05 ***p<0,001)

	leistung_f1	**leistung_f2**	**leistung_f3**	**Punkte ET**
SWK_f1	0,386***	0,185***	0,246***	0,301***
SWK_f2	0,419***	0,444***	0,414***	0,493***
SWK_f3	0,285***	0,288***	0,455***	0,443***
SV_f1	-0,019	-0,056	0,004	-0,019
SV_f2	0,314***	0,237***	0,276***	0,336***
SV_f3	-0,121*	-0,173***	-0,221***	-0,177***

Die Korrelation der SWK ist jeweils bei der Leistung mit dem gleichen Faktor am höchsten, wobei der zweite Faktor am stabilsten ist und auch ähnlich hohe Zusammenhänge zu den anderen Faktoren aufweist. Das würde für ein stabileres Konstrukt sprechen und befürworten, dass die SWK gemessen an schwereren

Aufgaben aussagekräftiger ist. Dieser Faktor erreicht auch die höchste Korrelation mit der Gesamtpunktzahl, wobei der dritte Faktor fast genauso hoch ist. Auffällig bei der SV sind die unterschiedlichen Richtungen der Korrelation. So ist ein positiver Zusammenhang des zweiten Faktors mit der Leistung zu sehen, was für eine falsche Selbsteinschätzung bei schweren Aufgaben sprechen würde. Bei Betrachtung des dritten Faktors ist eine negative Korrelation erkennbar, die die Vermutung bestätigen würde, dass eine SV bei einfachen Aufgaben einen negativen Zusammenhang zur Leistung aufweist. Insgesamt scheinen die Faktoren der SV ähnliche Zusammenhänge zu allen Aufgaben zu haben und somit verhältnismäßig stabil zu sein.

Um Probleme aufgrund der hohen Korrelation zwischen den Teilskalen der SWK und SV zu vermeiden, werden in den linearen Regressionen die Teilskalen, die auf gleichen Faktoren basieren, getrennt betrachtet. Zunächst ist die Skala Leistung die abhängige Variable. Die unabhängigen Variablen, die Skalen SWK_f2 und SV_f3, können 36,7 % der Varianz aufklären, wobei beide Regressionsgewichte (0,075 und -0,060) mit $p<0{,}001$ signifikant sind und die vermutete Richtung aufweisen. Eine lineare Regression mit den Skalen SWK_f3 und SV_f2 als unabhängige Variablen kann nur 20,1 % der Varianz aufklären, wobei nun beide Regressionsgewichte positiv sind (0,045 und 0,019). Ähnliche Ergebnisse liefern Regressionen mit dem ersten Faktor der Leistung als abhängige Variable, bei der keine Überschneidung der Aufgaben zwischen den Skalen die Ergebnisse beeinflussen könnte. Auch hier hat die erste Variante mit der SWK bei schweren Aufgaben und der SV bei leichten Aufgaben eine höhere Varianzaufklärung und die Regressionsgewichte weisen die vermuteten Richtungen auf.

Die bisherigen Ergebnisse bestätigen die Vermutung, dass der Aufgabentyp bzw. der Schwierigkeitsgrad wesentlich die Zusammenhänge zwischen SWK, SV und der Leistung beeinflusst, und machen deutlich, dass weitere Untersuchungen erforderlich sind. Eine Betrachtung der Zusammenhänge in Strukturgleichungsmodellen und der Einbezug anderer Variablen und Messzeitpunkte sind geplant.

Literatur

Bandura, Albert (1997): Self-efficacy. The exercise of control. New York: W.H. Freeman.

Pajares, Frank (1996): Self-efficacy beliefs in achievement settings. In: Review of Educational Research, 66, 543–578.

Schunk, Dale H. (1981): Modeling and Attributional effects on children's Achievement: A Self-Efficacy Analysis. In: Journal of Educational Psychology, 73 (1), 93–105.

Schunk, Dale H. (1985): Self-efficacy and classroom learning. In: Psychology in the Schools 22, 208-223.

Schwarzer, R. & Jerusalem, M (2002): Das Konzept der Selbstwirksamkeit. In: Zeitschrift für Pädagogik, Beiheft 44, 28-53.

Zimmerman, Barry J. (2000): Self-Efficacy: An Essential Motive to Learn. In: Contemporary Educational Psychology, 25, 82–91.

Anselm LAMBERT, Saarbrücken

Zeitgemäße Stoffdidaktik am Beispiel "Füllgraph"

Stoffdidaktische Analyse, Reduktion und Aufbereitung von Mathematik ist eine der zentralen Aufgaben mathematikdidaktischer Forschung zur substantiellen Weiterentwicklung von Mathematikunterricht.

Zeitgemäß sollte dazu der klassische "Höhere Standpunkt" erweitert werden um wesentliche Aspekte kognitiver, epistemologischer und repräsentationaler Natur.

Am Modethema "Füllgraph" wird ein solcher theoretischer Rahmen kurz erläutert und seine fruchtbare Reichhaltigkeit exemplarisch demonstriert.

1. Höhere Standpunkte – gestern und heute

Felix KLEIN hat vor gut 100 Jahren – mit seiner gleichnamigen Vorlesung – „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt(e aus)“ als Teil des Lehramtsstudiums in Deutschland etabliert. Die Veranstaltung sollte eine Brücke schlagen zwischen Höherer Mathematik und Schulmathematik. Der höhere Standpunkt bestand im Wesentlichen aus Höherer Mathematik, aber war bereits damals schon angereichert durch psychologische Überlegungen und historisch-genetische Bemerkungen: „Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, dass er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen“ (Klein 1908). Heute ist es angezeigt diese Idee der höheren Standpunkte durch Hinzunahme klassischer und neuerer Erkenntnisse aus Kognitionspsychologie, sowie Semiotik und Epistemologie systematisch zu erweitern, sowohl in Lehrveranstaltungen für Lehramtsstudierende, als auch für die stoffdidaktische Analyse, die damit – über eine mathematische Analyse des Stoffes hinausgehend – subjektive und intersubjektive Bedingungen des Lernens stets mit beinhaltet.

2. Theorien für die Praxis

Um im Schulalltag Gehör zu finden, haben sich mathematikdidaktische Theorien durch Praxisrelevanz auszuweisen. Dies können *demonstrative Theorien* leisten, die erfolgreich kognitive Konflikte bei Lehrpersonen auslösen, wie etwa die Theorie der kognitiven Präferenzen von Inge SCHWANK (Schwank 1998). Dies kann aber auch *ordnenden Theorien* gelingen, die durch ihre proaktive Sprachgebung strukturierte Klarheit im Unterrichtsalltag schaffen helfen. (In Lehrerfortbildungen bewährte) Beispiele dafür sind der Modellbildungskreislauf nach Hans SCHUPP (Schupp 1988), die Merkmale des Wissensumgangs (Exploration, Organisation, Reflexion) nach

Johann SJUTS (Sjuts 2001), die Differenzierung epistemologisch unterscheidbarer Zugänge zur Mathematik (s.u.) oder die detaillierten Analysen von Variablenaspekten nach Günther MALLE (Malle 1993) bzw. Lutz FÜHRER (Führer 1999/2000). Im knappen Rahmen des vorliegenden Beitrags können diese nicht alle vertieft werden; alle bereichern dennoch das Thema „Füllgraph" um interessante Aspekte und ordnen es stoffdidaktisch weiter. *Theoretisch begründete Praxisempfehlungen* schließlich – in Form theoriebasiert ausgearbeiteter Unterrichtsbeispiele – helfen konkret und direkt.

3. Darstellungen und Vorstellungen von Mathematik

In Lehr-Lern-Prozessen sollten mathematische Inhalte auf drei unterschiedlichen, aber aufeinander bezogenen Ebenen dargestellt werden; wesentlich dabei sind die *Übergänge* zunächst von konkreten Handlungen zu Abbildern dieser und dann zum Erkennen und Erfassen von mathematischen Spielregeln in diesen Abbildern, die genau dadurch zu Symbolen werden.

<table>
<tr><th colspan="2">Person A</th><th colspan="2">Person B</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Vorstellung A</td><td colspan="2">EIS-Darstellung</td><td rowspan="4">Vorstellung B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Konkretes Objekt und konkrete Handlung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abbildendes (statisches oder dynamisches) Zeichen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbol (als Zeichen mit Spielregeln) und Operation</td></tr>
<tr><td>„Gemeintes"</td><td>„Gesagtes"</td><td>„Gehörtes"</td><td>„Aufgefasstes"</td></tr>
</table>

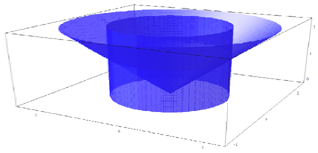
Symbole sind also Zeichen mit Kontexten, die sie mit Regeln auf(ge)laden (haben). Zeichen besitzen somit eine symbolische Kapazität, die im Lernprozess bei den Lernenden verschieden weit ausgeschöpft ist. Epistemologisch lässt sich die Ausprägung eines Zeichen/Symbols als Wort, Bild oder Formelzeichen unterscheiden (vgl. Lambert 2012).

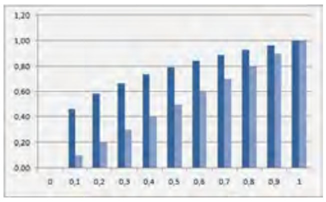
ikonisch	→	**symbolisch, wenn ergänzt um …**
Wort	→	verbal-begriffliche Regeln (VB)
Bild	→	konstruktiv-geometrische Regeln (KG)
Formelzeichen	→	formal-algebraische Regeln (FA)

4. Die E-I-S Darstellungsebenen bei Füllgraphen in Klassenstufe 5/6

- **Enaktiv:** portionsweises Füllen von konkreten Körpern: Kegel und Zylinder gleichen Volumens – Abbildung hier mit DPGraph virtuell erzeugt; Messen der Füllhöhe in Abhängigkeit vom Füllvolumen.
- **Ikonisch:** Fotografieren der Füllstände**;** Tabellieren der Werte, graphische Darstellung als Säulen – hier mit Microsoft Excel erstellt.
- **Symbolisch:** Vergleich der Füllvorgänge anhand der graphischen Darstellung: prädikativ durch Vergleich einzelner Säulen bzw. funk-

tional als ganzheitlicher Füllprozess, gleichmäßig beim Zylinder bzw. zunächst schneller(er), dann langsamer(er) Höhenzuwachs beim Kegel; Diskussion der Frage: Was passiert am Start?





Daneben sollte man in Klassenstufe 5/6 auch Quader enaktiv – ikonisch – symbolisch untersuchen und dazu deren Grundkantenlänge verdoppeln.

5. Funktion in geometrischem Gewande – gestern und heute

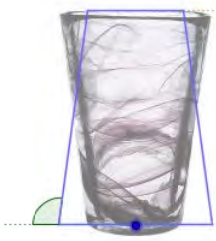
Füllgraphen sind eine 3D-Variation einer zentralen Idee der Meraner Reform des Mathematikunterrichts zu Beginn des 20. Jahrhunderts, Funktionen in geometrischem Gewand zu betrachten und so funktionale Zusammenhänge auch ohne Funktionsterme zu erfassen (vgl. Lambert 2012).

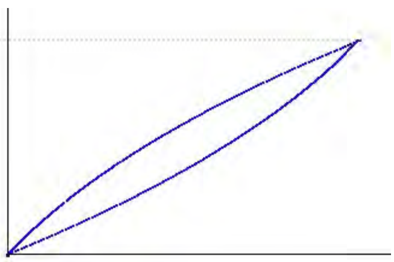
6. Spiralcurricular weiter in Klassenstufe 7/8 – Zugänge berücksichtigt

Eine zeitgemäße Stoffdidaktik hat u.a. die Aufgabe, neben den weitverbreiteten formal-algebraischen mathematischen Beschreibungen auch tragfähige konstruktiv-geometrische und verbal-begriffliche zu liefern. Das Thema Füllgraph lässt sich entsprechend ausbreiten: Interpolation (KG) der Messwerte zu einem kontinuierlichen Funktionsgraph der empirischen Funktion; Fortsetzung des Graphen zur 0 hin (VB); Proportionalität: Wie sieht der Graph zu einem „halben Zylinder“ bzw. „halben Kegel“ aus? (VB) – auch als Vorbereitung des Cavalierischen Prinzips; Diskussion der Steigung des Graphen: Wann hat eine Flasche aus Zylinder und aufgesetztem Kegel keinen Knick im Graphen? (KG & VB); Übergang vom Füllvolumen zur Füllzeit (VB). Eine weitere Fortsetzung (nicht nur) bis zum Abitur ist möglich.

7. Neue Medien und Werkzeuge zeigen mehr – und sogar beweglich

Mit entsprechender Software (hier GeoGebra; nach: www.phzh.ch) lassen sich funktionale Zusammenhänge beweglich und experimentell erfassen.





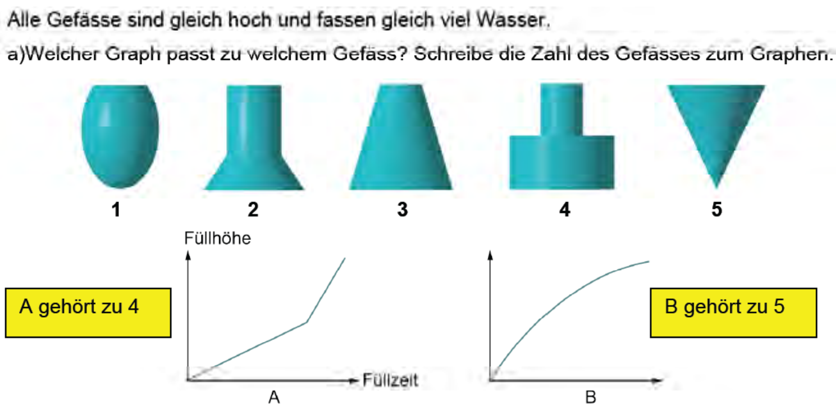
Wie sieht der Füllgraph zu einer Vase gleicher, aber auf dem Kopf stehender Gestalt aus?

Eine verbal-begriffliche und konstruktiv-geometrische Argumentation führt ohne Formeln zu einer mathematischen Begründung: Das gleichmäßige Füllen der Vase mit Wasser geht einher mit einem gegenläufigen Verdrängen von Luft. Eine aus einer Handlung gewonnene Operation zeichnet sich nach Jean PIAGET und Hans AEBLI bekanntlich dadurch aus, dass sie erlaubt die Handlung gedanklich umzukehren. Die Interpretation der Luft als Wasser und des Wassers als Luft und die Inversion der Zeit erklären den punktgespiegelten Graphen inhaltlich als zweifache Achsenspiegelung.

8. Fehler bei Füllgraphen – auch ohne Formeln sehen

Auch manche typische Fehler in qualitativ gewonnenen Füllgraphen (Abb.: www.osrema.ch – nebenbei: die Gefäße fassen als Rotationkörper natürlich nicht – wie dort behauptet – gleich viel Wasser, wenn sie gleich hoch sind) lassen sich ohne formal-algebraische Schlüsse erkennen und vermeiden. Stimmt die Steigung im Ursprung in Schaubild B? Nein: In der singulären Spitze steigt die Füllhöhe im ersten Moment unendlich schnell (VB)!

Stimmt das Steigungsverhältnis in Schaubild A? Ansatz: Das ist durch das Durchmesserverhältnis festgelegt (KG & VB)! Also …



Literatur

Führer, Lutz (1999/2000): Didaktik der Mathematik, Teil 2. Vorlesung. Frankfurt.

Klein, Felix (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil 1. Vorlesung. Göttingen.

Lambert, Anselm (2012): Enaktiv – ikonisch – symbolisch: Was soll das bedeuten? In Filler, Andreas & Ludwig, Matthias (Hrsg.): Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 5-32

Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg.

Schupp, Hans (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen. In MU 34(6), 5–16

Schwank, Inge (1998): Kognitive Mathematik. http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/kognitive-mathematik, überarbeitet 2002

Sjuts, Johann (2001): Aufgabenstellungen zum Umgang mit Wissen(srepräsentationen). In MU 47(1), 47-60

Diemut LANGE, Hannover

„Überlegen wir mal ...“ – Barrierespezifische Kooperationsarten

Sowohl Problemlösen als auch kooperative Lernformen sind in den curricularen Vorgaben verankert (Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss 2003). Folgt man Überblicksartikeln (z.B. Gudjons 2003) wird beides für sich jedoch selten im Schulalltag praktiziert, so dass eine Verknüpfung beider Bereiche ggf. noch seltener erfolgt. Bezogen auf die Forschungsseite erkennt man ebenfalls lediglich rudimentäre Bezüge. Die Ergebnisse dieser Studie weisen auf eine besondere Qualität der Zusammenarbeit in solchen Phasen des Problembearbeitens hin, in denen für die Problembearbeiter etwas als schwierig / unüberwindbar scheint.

1. Theoretischer Hintergrund

In Übereinstimmung mit der psychologischen wie mathematikdidaktischen Literatur zum Problemlösen (z.B. Schoenfeld 1985) wird auch in dieser Studie zwischen einem Problem einerseits und einer Routineaufgabe andererseits unterschieden. Im Folgenden wird ein *Problem für einen Bearbeiter* als eine Aufgabe definiert, die für den Bearbeiter mindestens eine Barriere beinhaltet. Hierin finden sich zwei Gemeinsamkeiten in den Problemdefinitionen der Literatur wider, nämlich die Relativität des Problembegriffs (ein Problem für einen bestimmten Bearbeiter statt ein Problem generell) und die Auffassung, dass der Problembegriff mit einer bestimmten Schwierigkeit einher geht. Entsprechend soll eine Aufgabe, die für den Bearbeiter keine Barriere beinhaltet, als *Routineaufgabe für einen Bearbeiter* angesehen werden. Unter einer *Barriere* und damit unter *Nichtroutine* wird im Folgenden eine Stelle in einem Bearbeitungsprozess verstanden, in der rekonstruierbar ist, dass ein Bearbeiter nichts oder etwas nicht selbstverständlich ausführt und dabei auf nichts in der Aufgabensituation Anwendbares zugreifen möchte bzw. kann.

Unter *Kooperation* wird in Anlehnung an Naujok (2000) jede Art der aufgabenbezogenen Interaktion und Inter-Aktion verstanden. *Aufgabenbezogen* bedeutet dabei, dass der Austausch einen „Beitrag zur Lösung und Erledigung einer Aufgabe leistet“ (Naujok 2000, S. 158). Die Unterscheidung zwischen *Interagieren* und *Inter-Agieren* berücksichtigt, dass die Interaktanten nicht immer wechselseitig (Interagieren), sondern auch einseitig (Inter-Agieren) aufgabenbezogen auf einander Bezug nehmen können.

Ein Anknüpfen an die von Naujok (2000) rekonstruierten (fachlichen) Kooperationshandlungen Erklären, Vergleichen, Abgucken, Vorsagen und Erfragen in der eigenen Studie scheint möglich und sinnvoll zu sein (u.a. geeignetes Abstraktionsniveau dieser Kategorien), um die Zusammenarbeitsformen an Barrierestellen näher zu analysieren. Die in der Arbeit von Naujok (2000) abgedruckten Transkriptbeispiele lassen allerdings vermuten, dass die Aufgaben für die Schüler keine Probleme dargestellt haben. Beziehungen zwischen der Kooperationsart und einer gewissen Aufgabenschwierigkeit werden in den drei qualitativen Studien von Gooding und Stacey (1993), Hertz-Lazarowitz (1989) und Goos et al. (1996) hergestellt. Die Ergebnisse dieser Studien sprechen dafür, dass die Interaktanten an Barrieren laut denken (Gooding & Stacey 1993), eher über den Prozess als über Ergebnisse (Produkte) kooperieren (Hertz-Lazarowitz 1989) sowie ein Unterschied in der beobachtbaren Kooperationsart zwischen beidseitigen Barrieren (rekonstruierbare Barriere bei allen Interaktanten) und einseitigen Barrieren (rekonstruierbare Barriere lediglich bei einem Interaktant) existieren könnte (Goos et al. 1996).

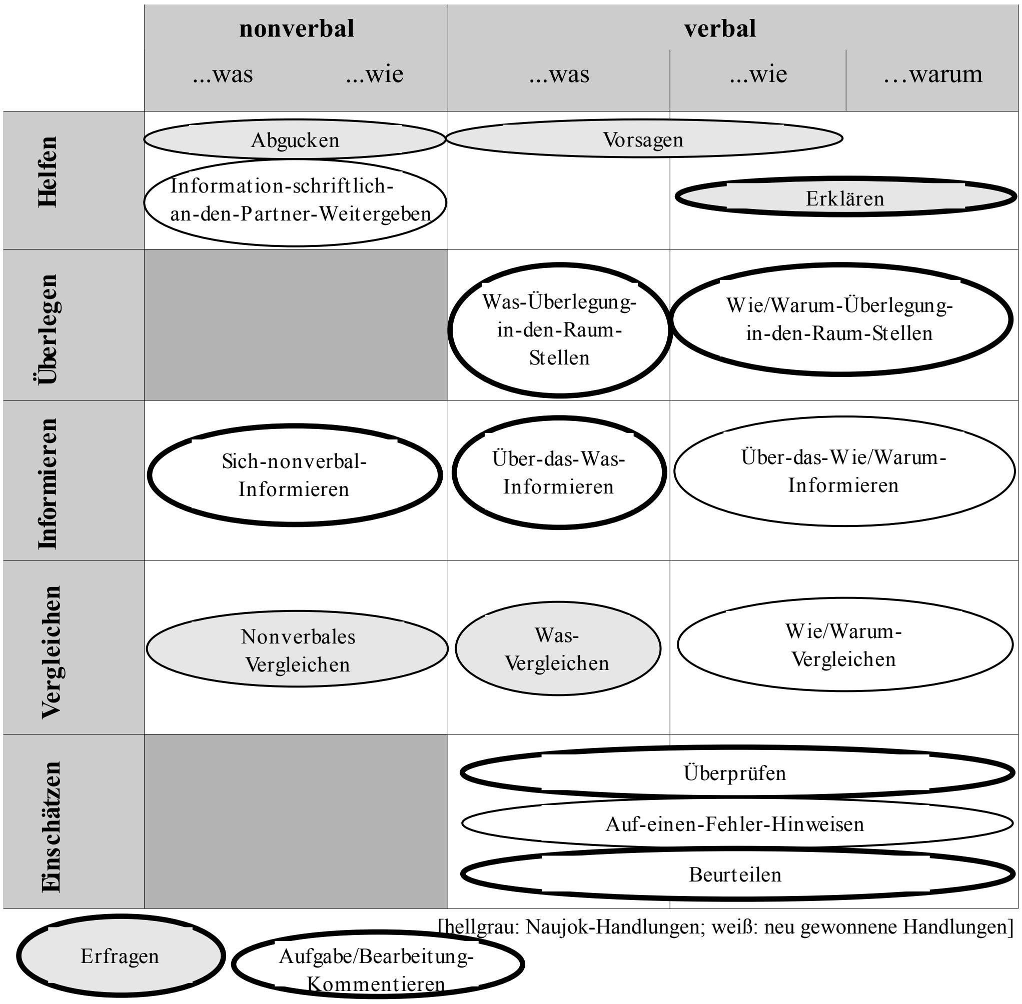
Aufgrund der jeweils unterschiedlichen Definition von Kooperation und Aufgabenschwierigkeit ergibt sich allerdings weiterer Forschungsbedarf. Daher soll die folgende Forschungsfrage näher untersucht werden: Inwiefern lassen sich bestimmte Kooperationsarten als barrierespezifisch charakterisieren? Barrierespezifisch kann heißen, dass Handlungen *nur* an Barrieren (a)), dass Handlungen *häufiger* an Barrieren als im Restprozess (b)) oder dass *bestimmte Ausprägungen nur* an Barrieren vorkommen (c)).

3. Design und Forschungsmethodik

Die Datenerhebung fand im Rahmen einer überschulischen AG („MALU“) für mathematisch interessierte Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien statt. Die Fünftklässlergruppen wurden jeweils für ein Halbjahr ausgewählt und lösten einmal die Woche nachmittags zunächst eine Einstiegsaufgabe und anschließend zumeist in Paaren 1 bis 3 Problemaufgaben (zu weiteren Informationen auch zur Aufgabenauswahl und zum methodischen Vorgehen s. Lange 2013). Die Bearbeitung der Problemaufgaben wurde videographiert. Ausgewählte Prozesse wurden transkribiert und mit Hilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2008) nach vorkommenden Kooperationshandlungen sowie Barrierestellen untersucht. Ausgehend von den Naujok'schen Kooperationshandlungen konnten so in einem teils deduktiven, teils empiriegeleiteten Vorgehen weitere Kooperationshandlungen ergänzt werden (Lange 2012; Lange 2013).

4. Ergebnisse und Diskussion

Die folgenden fett umrandeten Kooperationshandlungen konnten an Barrieren rekonstruiert werden:



[hellgrau: Naujok-Handlungen; weiß: neu gewonnene Handlungen]

In dieser Abbildung hellgrau unterlegt sind diejenigen Kooperationshandlungen, die Naujok bereits rekonstruieren konnte. Durch Vergleich der hellgrau unterlegten mit den fett umrandeten Handlungen kann man insbesondere die naheliegende Hypothese widerlegen, dass an Barrieren nur solche Kooperationshandlungen beobachtbar sind, die anhand des MALU-Datenmaterials ergänzt wurden. Die Ergebnisse dieser Studie gehen zudem konform mit denen der Studien von Gooding und Stacey (1993), Hertz-Lazarowitz (1989) und Goos et al. (1996) (s. oben), stellen aber aufgrund der feineren Differenzierung der Kategorien eine Ausdifferenzierung dieser dar.

Bezogen auf die Barrierespezifität der in der Abbildung fett umrandeten Kooperationshandlungen kann man Folgendes festhalten. Keine dieser Handlungen konnte ausschließlich an Barrieren beobachtet werden (a)). Ein χ^2-Test und eine anschließende Konfigurationsfrequenzanalyse (KFA) ergab, dass lediglich eine der Handlungen (Wie/Warum-Überlegung-in-den-Raum-Stellen) signifikant häufiger an Barrieren als im Restprozess vorgekommen ist (Zellen- $\chi^2=7{,}72>3{,}84=\chi^2_{0,05;1}$ im ersten Schritt der KFA) (b)). Hierbei handelt es sich um eine Handlung, die der des lauten Denkens ähnelt: Vermutungen zum weiteren Vorgehen werden formuliert und diskutiert, Alternativen aufgestellt, ohne diese jedoch bereits näher bearbeitet zu haben. Bezogen auf diese Handlung konnten bestimmte Ausprägungen ausgemacht werden, die nur an Barrieren rekonstruiert werden konnten (c)).

Diese Ergebnisse streichen die besondere Bedeutung der Kooperationshandlung Wie/Warum-Überlegung-in-den-Raum-Stellen heraus. Ergebnisse anderer Studien sprechen dafür, dass eine bestimmte Form dieser Kooperationsart (Diskutieren und begründetes Verwerfen oder Bestätigen der formulierten Ansätze) (s. z.B. Goos 2002) mit dem Bearbeitungserfolg zusammenhängen könnte.

Literatur

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [letzter Zugriff: 06.02.2012]

Gooding, A. & Stacey, K. (1993). Characteristics of Small Group Discussion Reducing Misconceptions. *Mathematics Education Research Journal,* 5(1), 60-73.

Goos, M., Galbraight, P. & Renshaw, P. (1996). When Does Student Talk Become Collaborative Mathematical Discussion? In P. Clarkson (Hrsg.). *Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia in Melbourne* (S. 237-244), Melbourne: MERGA.

Goos, M. (2002). Understanding Metacognitive Failure. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 283-302.

Gudjons, H. (2003). Gruppenunterricht. Eine Einführung in Grundfragen. In H. Gudjons (Hrsg.). *Handbuch Gruppenunterricht* (2., überarbeitete Auflage) (S. 10-40), Weinheim: Beltz.

Hertz-Lazarowitz, R. (1989). Cooperation and helping in the classroom: A contextual approach. *International Journal of Research in Education, 13(1)*, 113-119.

Lange, D. (2012). Cooperation types in problem solving. In Tso, T.-Y. (Hrsg.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bd. 3* (S.27-34), Taipeh: PME.

Lange, D. (in Druck, 2013). *Inhaltsanalytische Untersuchung zur Kooperation beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben*, Münster: Waxmann.

Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlage und Techniken* (10., neu ausgestattete Auflage), Weinheim: Beltz.

Naujok, N. (2000). *Schülerkooperation im Rahmen von Wochenplanunterricht. Analyse von Unterrichtsausschnitten aus der Grundschule*, Weinheim: Beltz.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press.

Claudia LAZAREVIC

Analyse und Bewertung von Unterricht durch Mathematiklehrkräfte in der Berufseinstiegsphase

Anlage und Ziele meines Forschungsvorhabens

Die Professionalität von Lehrkräften steht aktuell stark im Fokus der erziehungswissenschaftlichen Forschung. Im Bereich der Mathematikdidaktik zielen einige neuere Studien auf die Kompetenz zur Unterrichtswahrnehmung beziehungsweise die Analysefähigkeit von Lehrpersonen. Eine dieser neueren Studien ist unter anderem die in der Durchführung befindliche Nachfolgestudie von TEDS-M, die Studie TEDS-Follow up (TEDS-FU). Das Analysieren und die damit verbundene professionelle Wahrnehmung von Unterricht werden dabei als ein wesentlicher Bestandteil professionellen Handelns beschrieben. Die professionelle Wahrnehmung von Unterricht (Noticing) wird in dem vorliegenden Beitrag verstanden als das Zusammenspiel folgender zweier Prozesse (Sherin et al., 2011): das Fokussieren auf spezifische Aspekte des Unterrichts sowie das Interpretieren und Einordnen unterrichtlicher Ereignisse anhand eigenen Wissen und Konzepten. Dabei ist die professionelle Wahrnehmung von Unterricht eng mit den Orientierungen einer Lehrkräfte verknüpft: „Teachers‘ noticing is intimately tied to their orientations“ (Schoenfeld 2011a). Der Begriff der Orientierung wiederum umfasst Einstellungen, Überzeugungen (beliefs), Wertvorstellungen, Vorlieben und Prioritäten und wird von Schoenfeld umschrieben als „an inclusive term encompassing a group of related terms such as dispositions, beliefs, values, tastes, and preferences“ (Schoenfeld 2011b).

Hier setzt meine qualitativ orientierte Studie an, die anhand von Fallanalysen aufzeigen will, wie Lehrkräfte fremden Unterricht wahrnehmen und analysieren und welche Orientierungen dabei eine zentrale Rolle spielen.

Methoden

Um untersuchen zu können, wie Lehrkräfte Unterricht wahrnehmen und analysieren, habe ich im Rahmen meiner Studie eine Videovignette entwickelt, die Mathematikunterricht in einer Grundschulklasse zeigt. In der gezeigten Stunde wurde das substantielle Aufgabenformat der Zahlenkette eingesetzt. Die Videovignette ist in drei Teile gegliedert: die Einführung des Aufgabenformates, die Arbeitsphase und die Präsentationsphase. Jeder dieser Teile zeigt etwa 5 Minuten lang Szenen der jeweiligen Phase des Unterrichts, wobei zwei Kameraeinstellungen, einmal bezogen auf die Lehrerin, einmal auf die Schülerinnen und Schüler, zu sehen sind.

Auf der Basis dieser Videovignette wurden leitfadengestützte Interviews mit 13 Lehrkräften für Mathematikunterricht in der Primarstufe geführt, die zum Zeitpunkt der Untersuchung 1 bis 3 Jahre im Beruf standen und ihre Ausbildung vorzugsweise in Hamburg absolviert hatten. Im Zuge des Interviews wurden neben Fragen zum eigenen Unterricht und zum Wissen im Bereich des Übens von Rechenfertigkeiten Fragen, die auf die Analyse der gezeigten Unterrichtsszenen abzielten, gestellt. Nach jeweils fünf Minuten Unterrichtsszenen wurde eine offene Eingangsfrage zur Videovignette gestellt. Anschließend wurde anhand eines Leitfadens zu bestimmten Aspekten der Szenen nachgefragt, wie beispielsweise nach der Schüleraktivität, der Moderationsweise der Lehrerin oder dem Umgang mit Heterogenität.

Im Hinblick auf die Forschungsfrage, wie Lehrkräfte fremden Unterricht wahrnehmen und analysieren, werden die Interviews auf den Grundlagen der Methodologie der Grounded Theory ausgewertet. Ziel der Auswertung ist die Rekonstruktion von Typen der Unterrichtsanalyse durch Lehrkräfte, wobei die Studie darauf abzielt, die Varianz möglicher Typen von Unterrichtsanalysen deutlich zu machen.

Ergebnisse

Zunächst kann festgestellt werden, dass die Lehrkräfte zu gegensätzlichen Bewertungen der gezeigten Szenen kommen, wobei sie auch grundsätzlich unterschiedliche Schwerpunkte in ihren Analysen setzen. Daher wurde in der Auswertung verstärkt der Frage nachgegangen, woran sich die Lehrkräfte in ihren Analysen der Unterrichtsszenen und deren Bewertung orientieren, wenn diese Einschätzung entsprechend offen ermöglicht wird.

Es konnten zunächst zwei wesentliche übergeordnete Kategorien rekonstruiert werden. Zum einen ergaben sich Kodierungen, die sich auf die Themen beziehen, die die Lehrpersonen bei der Analyse der Videovignetten ansprechen und die so unter der Kategorie „Themen“ aufgeführt sind. Zum anderen ergaben sich Kodierungen in Bezug auf die Art und Weise, wie die Lehrpersonen die Themen ansprechen, was ich zunächst mit der Kategorie „Textsorte“ beschreibe.

Die Kategorie „Themen“ lässt sich in zwei weitere Dimensionen aufteilen, unter die sich die Themen, die die Lehrkräfte ansprechen, einordnen lassen: auf das Unterrichtsfach Mathematik bezogene Themen (fachbezogene Dimension des Unterrichts) und allgemein-pädagogische Themen (fachübergreifende unterrichtliche Dimension), die fachunspezifisch sind und für jeden Unterricht Geltung haben.

Die Kodierung der Textsorte eines Satzes oder Abschnittes gibt Aufschluss darüber, welche Themen den Lehrkräften wichtig erscheinen und für welche Themen sie in der Lage und motiviert zu sein scheinen, Argumentationen oder Alternativen zu formulieren. Zunächst ergaben sich vor diesem Hintergrund vier Kategorien für die Ebene der Textsorte, nämlich Beschreibung, Bewertung, Argumentation und Alternativen.

Durch die Verbindung dieser Kategorien konnten Orientierungen, die die Lehrkräfte bei der Analyse des fremden Unterrichts leiten, heraus gearbeitet werden. Drei Fälle sollen diese exemplarisch verdeutlichen.

Frau Goldberg fokussiert verstärkt Themen, die auf das Unterrichtsfach Mathematik bezogenen sind, wie vor allem die Passung des Arbeitsauftrags zur Stunde, den Lernzielen und dem Aufgabenformat. In diesen Themenbereichen argumentiert sie entlang eines roten Fadens und formuliert ohne Nachfrage alternative Vorgehens-weisen. Überfachliche Aspekte werden nur wenig benannt und Argumentationen hierzu lassen sich keine identifizieren.

> „Der Arbeitsauftrag an sich -- hat mir weniger gefallen. (...) Möglichst groß ist immer die Frage. (...) Oft wissen sie ja schon in der zweiten Klasse, je mehr Nullen man anhängt desto größer wird die Zahl und - um wirklich was zu erkennen an Mustern, macht es eigentlich mehr Sinn kleinere Zahlen zu nehmen, die - damit sie sich nicht so häufig verrechnen, weil es ja mehr um die Zusammenhänge geht als um wirklich die Addition an sich.“

Insgesamt orientiert sich Frau Goldberg in ihrer Analyse der Videovignetten also vor allem an fachdidaktischen Theorien und Konzepten, auf deren Grundlage sie argumentiert und die Szenen bewertet.

Frau Kramer bezieht sich in ihren Aussagen hauptsächlich auf überfachliche Themen, wobei sie auch Gebrauch von Argumentationsketten macht und unaufgefordert Alternativen benennt. Aspekte, die rein auf den Mathematikunterricht bezogen sind, werden zwar an einigen Stellen benannt, jedoch selten argumentativ unterlegt.

> „Ja. Gut, ne? Also sie ähm sie hat zum Einen ähm Stundenziele festgelegt, (...) fing halt erstmal quasi mit einer Art Stummimpuls an, wenn man das so nennen kann. (...) Dann hat sie die Meldekette machen lassen. Ähm, ich kenn das noch aus dem Referendariat mit, Unterrichtsgespräch haben wir das genannt. (...) Sogar die Zeitansage gesagt und ähm genau hat noch auf Hilfskarten gezeigt, muss sie auch irgendwie haben“

Frau Kramer orientiert sich in ihrer Analyse also verstärkt an allgemein-pädagogischen Konzepten und Methoden. Im Vergleich der beiden dargestellten Orientierungen zeigt sich einerseits ein Polarisierung im inhaltlichen Sinne: zum einen eine fachdidaktische und zum anderen eine allgemein-pädagogische. Andererseits eint die beiden Orientierung jedoch ihre normative Ausrichtung an theoretischen Konzepten. Im Gegensatz dazu steht beispielsweise die Orientierung, die die Unterrichtsanalyse von Frau Meier dominiert. Frau Meier bezieht sich ähnlich wie Frau Goldberg auf fachdidaktische Themen, wobei jedoch ihre Bewertungen nicht eindeutig positiv oder negativ formuliert sind. Vielmehr thematisiert sie das Verhalten der Schüler und Schülerinnen und den Verlauf des Unterrichts insgesamt.

„Das haben die, haben die auch selber rausgefunden. Was sie gemacht hätte, wenn sie es nicht rausgefunden hätten, weiß ich nicht. So. Aber es hat geklappt.“
„Und grad, wenn ich jetzt eben den Jungen sehe, der nicht genau weiß, was da zu machen ist, ähm, mal sehen, ob, also kann sein, dass das damit zusammenhängt.“

Sie orientiert sich also weniger an normativen Vorgaben wie an unterrichtstheoretischen oder fachdidaktischen Konzepten, sondern am Gelingen in der Unterrichtspraxis. Im weiteren Verlauf der Studie sollen weitere Orientierungen entwickelt werden, wobei es bisher gelungen ist, folgende Orientierungen im Datenmaterial zu rekonstruieren:

Normativ	**Situativ**	**Personengebunden**
• An fachdidaktischen Konzepten • An allgemein-pädagogisch Konzepten	• Am Verhalten der Akteure im Video • Am eigenen Unterricht bzw. der eigenen Erfahrung	• Lehrerinnenbezogen • SchülerInnenbezogen • Interaktionsbezogen

Diese Orientierungen deuten auf eine erhebliche Varianz in der Wahrnehmung und Bewertung von Unterricht durch angehende Lehrkräfte, was in der weiteren Datenanalyse erhärtet werden muss.

Literatur

Schoenfeld, Alan H. (2011): How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications. New York: Routledge.

Schoenfeld, Alan H. (2011): Noticing matters. A lot. Now what? In: Miriam Gamoran Sherin, Victoria R. Jacobs und Randolph A. Philipp (Hrsg.): Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes. New York: Routledge, S. 223–238.

Sherin, Miriam Gamoran; Jacobs, Victoria R.; Philipp, Randolph A. (Hg.) (2011): Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes. New York: Routledge.

Malte LEHMANN, Bettina RÖSKEN-WINTER, Bochum

Starthilfe ins Studium – Konzept und Wirksamkeitsstudien des Projektes Mathe/Plus

1. Ausgangslage

Die Studierenden des Faches Mathematik mit dem Ziel Lehramt begegnen in den ersten Semestern ihres Studiums vielen Schwierigkeiten. So ist in diesem Fach, wie in allen Studienfächern, die Mathematik in ihrem Curriculum aufweisen, die Abbruchquote im ersten Studienjahr sehr hoch (Dieter, 2012). Die zukünftigen Mathematiklehrenden belegen in diesem ersten Jahr die beiden Anfängervorlesungen „Analysis" und „Lineare Algebra und Analytische Geometrie"; in beiden Veranstaltungen bleiben die Klausurergebnisse hinter den Erwartungen zurück. Neben den fachlichen Herausforderungen sind zwei weitere Maßgaben hohe Hürden für die Studienanfänger. So wird von ihnen ein hohes Maß an Selbstständigkeit erwartet, welche sie aus der Schule in dieser Art und Weise nicht kennen. Ein zusätzliches Element der Lehramtsausbildung an der RUB ist der Optionalbereich. In diesem müssen die Studierenden neben ihren beiden Unterrichtsfächern zusätzliche Kurse aus dem Angebot der Universität und aus den Erziehungswissenschaften belegen; dies führt zu einer hohen Arbeitsbelastung.

Die Ursachen der Probleme in den Fachvorlesungen liegen besonders in drei großen Herausforderungen, mit denen die Studierenden beim Übergang von der Schule zur Hochschule konfrontiert werden. Aufgrund neuer Lehr- und Lernformen gibt es bei den Studienanfängern einen hohen Bedarf an neuen Lern- und Arbeitsstrategien (Griese, Glasmachers, Härterich, Kallweit, & Roesken, 2011). Während dieser Umstand in den unterschiedlichsten Fächern zum Tragen kommt, gibt es zusätzlich zwei Herausforderungen, die besonders für die Studienanfänger mit dem Ziel Lehramt Mathematik eine Rolle spielen. Zum Einen erleben die Studierenden der Mathematik einen starken Bruch von der anschaulichen Schulmathematik zur universitären Mathematik, die durch ihre Komplexität und formale Strenge gekennzeichnet ist (Rach & Heinze, 2011) und zum Anderen haben zukünftige Mathematiklehrende große Schwierigkeiten, Verbindungen zwischen der Schulmathematik und der Mathematik an der Universität zu erkennen. Hier benötigen insbesondere die Studienanfänger Hilfe, um entsprechende Zusammenhänge herstellen zu können (Gueudet, 2008; Prediger, 2013). Die hohe fachliche Ebene muss durchdrungen werden, bevor in späteren Veranstaltungen des *Master of Education* der eigentliche schulische Bezugsrahmen erarbeitet wird (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies & Wickel, 2011).

2. Konzept

An vielen Universitäten gibt es die unterschiedlichsten Unterstützungsmaßnahmen für Studienanfänger. An der RUB existiert seit 2010 für Ingenieurstudierende das Projekt MP2-Mathe/Plus/Praxis (Griese et al., 2011). Dieses Projekt spaltet sich in zwei Teilprojekte auf. Im Teil Mathe/Plus werden den Studierenden weitreichende Hilfestellungen gegeben, um ihre Lernstrategien und ihre Motivation zu fördern. Im Teil Mathe/Praxis erfahren die Studierenden im zweiten Semester in welchen Bereichen die Mathematik aus den ersten Semestern in der Realität ihre Anwendung findet. Das Teilprojekt Mathe/Plus bietet für verschiedene Gruppen von Studierenden eine unterschiedliche Auswahl an Maßnahmen wie Helpdesk, Repetitorium, Lerntagebücher oder wöchentliche Arbeitsbücher an. Bei der Gruppe, die alle Maßnahmen erhalten hatte, lag die Bestehensquote im März 2012 bei etwa 71%, bei der Gruppe, welche einen Teil der Maßnahmen erhalten hatte, immerhin noch bei ca. 63%. Eine Vergleichsgruppe, die zu Beginn des Studiums über ähnliche fachliche Kompetenzen verfügte, erreichte eine Bestehensquote von etwa 53%.

Das Projekt Mathe/Plus für Lehramtsstudierende besteht seit November 2011 und orientiert sich am Teilprojekt Mathe/Plus für Ingenieursstudierende. Inhaltlich und methodisch verfolgt das Projekt drei Schwerpunkte, dabei werden Methoden und Inhalte stets verbindend behandelt:

- Vermitteln fachlich-methodischer Kompetenzen
- Vermitteln von Lern- und Arbeitsstrategien
- Aufzeigen von Bezügen zum Schulunterricht

Bei den fachlich-methodischen Kompetenzen ist es gerade für Studienanfänger besonders wichtig zu verstehen, wie man mathematische Sätze, Definitionen oder Beweise lesen und wie man mit ihnen arbeiten kann, um ein besseres Verständnis für die behandelte Mathematik zu erhalten (Houston, 2012). Das Lehrformat der Vorlesung verlangt von den Studierenden neue Arbeitsformen, hier sollen Methoden für Vorlesungsmitschriften helfen, die eine effektive Nacharbeit und Vorbereitung auf die Klausur ermöglichen. Es gibt Situationen im Schulunterricht, die eine hohe fachliche Kompetenz erfordern. Auf solche Situationen sollen die Studierenden durch verschiedene Beispiele vorbereitet werden (vgl. Prediger, 2013), die ihnen helfen zu erkennen, inwiefern die universitäre Mathematik mit der Schulmathematik zusammenhängt. Dafür werden unter anderem Maßnahmen wie „Lernen an ausführlichen Musterlösungen“ (Ableitinger & Herrmann, 2011) für eine exemplarische Behandlung wichtiger Begriffe und Techniken, „Einsatz neuer Medien“ zur Veranschaulichung von Zusammenhängen aber auch für den ersten Kontakt mit lehrerspezifischen Tätigkeiten oder Methoden und Übungen für ein besseres „Zeitmanagement“ im Rahmen der Lerngruppen eingesetzt.

3. Studie

In einem Pre-/Post-Design wurden die Lern- und Arbeitsstrategien der Studierenden mit Hilfe eines modifizierten LIST-Fragebogens (vgl. Griese et al., 2011; Wild & Schiefele, 1994) und das Studieninteresse mit den Fragebogen zum Studieninteresse (Krapp et al., 1994) vor Beginn der Maßnahme und am Ende erhoben. Am Pre-Test nahmen n=32 Teilnehmer teil, am Post-Test n=28. Von diesen füllten 25 zu beiden Testzeitpunkten den Test aus. Bei dieser Stichprobe handelt es sich um eine positiv selektierte Stichprobe, da sich alle Teilnehmer freiwillig zu der Maßnahme gemeldet haben, also vermutlich über eine höhere Motivation verfügen als andere Studierende. In diesem Beitrag stehen die Untersuchungen hinsichtlich der Lern- und Arbeitsstrategien im Vordergrund. Aus den elf Subskalen des ursprünglichen LIST-Fragebogens wurden sieben ausgewählt: Neben *Organisationstrategien*, *Elaborationsstrategien*, *Wiederholungsstrategien* und *Metakognitiven Strategien* waren dies die Subskalen *Zeitmanagement*, Anstrengung und *Lernen mit Anderen*.

4. Ergebnisse

Im Durchschnitt verbesserten die Studierenden ihre Fähigkeiten im Bereich der *Organisation* signifikant (Pre: M=2.72, SD=0.75; Post: M=3.13, SD=0.80) $t(24)=-2.0142$, $p<.05$. Darüber hinaus erhöhte sich der Wert in der Subskala *Wiederholung* (Pre: M=3.02, SD=0.54; Post: M=3.60, SD=0.69) $t(24)=-2.854$, $p<.05$. In der dritten Subskala *Metakognitive Strategien* konnte ein hoch signifikanter Anstieg beobachtet werden (Pre: M=2.94, SD=0.58; Post: M=3.38, SD=0.43) $t(24)=-2.887$, $p<.01$. In den übrigen vier Subskalen gab es ebenfalls Erhöhungen, die jedoch nicht statistisch signifikant waren.

Die Daten zeigen, dass Mathe/Plus positive Auswirkungen auf einige relevante Lern- und Arbeitsstrategien hat, die von einfachen Übungstechniken (*Wiederholungsstrategien*) über anspruchsvollere Methoden der Strukturierung von Inhalten (*Organisationsstrategien*) bis hin zu metakognitiven Strategien wie *Planung*, *Überwachung* und *Selbstregulation* reichen.

Bei der statistischen Auswertung des FSI ergab sich ein nicht signifikanter Anstieg zwischen Pre- und Post-Test (Pre: M=42.83, SD=2.37; Post: M=44.22, SD=3.78), $t(22)=-1.54$, $p=.14$.

5. Ausblick

Das Projekt befindet sich derzeit noch in der Startphase; weitere Untersuchungen sind geplant. So sollen über Interviews mit den Teilnehmern am Ende des zweiten Semesters sowohl Rückmeldungen zu den durchgeführten Maßnahmen eingeholt als auch neuer Förderungsbedarf aufgedeckt werden. Bisher war es zudem nicht möglich, ein Kontrollgruppendesign zu nutzen, welches die Möglichkeit des Vergleichs von Studienerfolg, Motivation, Studieninteresse, etc. mit Studierenden, die nicht am Projekt beteiligt sind, bieten würde.

Literatur

Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2011). *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra.* Vieweg & Teubner: Wiesbaden.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R. Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken.* Vieweg & Teubner, Wiesbaden.

Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren.* (Dissertation). Universität Duisburg-Essen. Online verfügbar unter http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-30759/Dieter_Miriam.pdf [18.02.2013]

Griese, B., Glasmachers, E., Härterich, J., Kallweit, M. & Roesken, B. (2011). Engineering students and the learning of mathematics. In B. Roesken & M. Casper (Eds.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVII. Proceedings of the 17 MAVI Conference* (pp. 85-96). Bochum: Professional School of Education.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics 67*, 237-254.

Houston, K. (2012). *Wie man mathematisch denkt. Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Krapp, A., Schiefele, U., Wild, K.-P., & Winteler, A. (1993). Der Fragebogen zum Studieninteresse (FSI). *Diagnostica, 39* (4), S.335-351.

Prediger, S. (2013). Unterichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zur Verknüpfung der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 151-168). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rach, S. & Heinze, A. (2011). Studying Mathematics at the University: The Influence of Learning Strategies. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 9-16). PME: Ankara.

Wild, K.-P., & Schiefele, U. (1994). Lernstrategien im Studium. Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragenbogens. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 15,* 185-200.

Dominik LEISS, Lüneburg, Jennifer PLATH, Lüneburg, Knut SCHWIPPERT, Hamburg

Verstehen des Verstehens

Durch die vermehrte Bearbeitung von Problemstellungen mit größeren Textanteilen im Mathematikunterricht ist das Textverständnis verstärkt zu einer zentralen Voraussetzung für die erfolgreiche Aufgabenbearbeitung geworden (vgl. Duarte et al. 2011). Auch wenn dies generell für alle sechs prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards Mathematik bzw. diesbezügliche Aufgaben gilt, so stellt insbesondere bei der Kompetenz des mathematischen Modellierens das Verstehen der sprachlich dargestellten Realsituation eine wesentliche Schwierigkeit für den weiteren Bearbeitungsprozess dar.

1. Theoretischer Hintergrund

Das Projekt SITRE[1] fokussiert mit der Bildung des Situations- und des Realmodells den Beginn des Aufgabenbearbeitungsvorgangs des Modellierungsprozesses, da für diese nicht nur mathematische, sondern insbesondere auch sprachliche Kompetenzen relevant sind (vgl. Leiss et al. 2010).
So muss zu Beginn des Modellierungsprozesses die reale Situation durch Lesen des Aufgabentextes bzw. der grafischen Elemente verstanden werden. Dabei wird unter lesebasiertem Textverstehen „[…] eine kognitiv-aktive (Re-) Konstruktion von Information […], in der die im Text enthaltene ‚Botschaft' aktiv mit dem Vor- und Weltwissen der Rezipienten/innen verbunden wird" verstanden (Christmann; Groeben 2006, S.146). Lesen kann demzufolge als Zusammenspiel zwischen Bottop-Up- und Top-Down Prozessen betrachtet werden. Bottom-Up-Prozesse umfassen textgeleitete Verarbeitungsprozesse, die durch semantische, syntaktische und stilistische Textmerkmale gesteuert werden. Unter Top-Down-Prozessen hingegen werden wissensgeleitete Verarbeitungsprozesse verstanden, welche durch Lesermerkmale wie Vorwissen, Zielsetzungen oder Interessen beeinflusst werden (vgl. Christmann 2010, S. 148). Das Verstehen eines Textes ist dementsprechend eine Interaktion zwischen dem gegebenen Text und den Kognitionsstrukturen des Lesers. Das Resultat dieser Prozesse wird als mentales Modell oder Situationsmodell bezeichnet. Gemäß dessen wird das Situationsmodell von den Aufgabenmerkmalen (mathematische und semantische Struktur, Kontext, Format, Informationsdichte und grafische

[1] Bei SITRE (Das Generieren von mentalen **Sit**uations- und **Re**almodellen beim Lösen mathematischer Modellierungsaufgaben) handelt es sich um ein interdisziplinäres Projekt zwischen Mathematikdidaktik (Dominik Leiss, Lüneburg), Deutschdidaktik (Astrid Neumann, Lüneburg) und empirischer Bildungsforschung (Knut Schwippert, Hamburg).

Elemente) (vgl. Leiss 2007, S. 29ff.) und den intrapersonellen Aspekten (Lesekompetenz, Kontextwissen, kognitive Grundfähigkeit, mathematische Leistungsfähigkeit, Einstellungen gegenüber Mathematik bzw. dem Kontext und affektive Dispositionen) (vgl. Artelt el al. 2001, S. 69ff.) beeinflusst. Im darauffolgenden Schritt, der Bildung des Realmodells, wird die kognitiv konstruierte Situation durch Vereinfachungen und Strukturierungen präzisiert. Entsprechend wird bei der näheren Betrachtung des Situations- und Realmodells deutlich, dass nicht nur individuelle mathematische Kompetenzen, sondern maßgeblich auch Komponenten des Textverstehens einen Einfluss haben.

Aus diesem Grund sollte in SITRE zunächst im Rahmen einer explorativen Fallstudie untersucht werden, welche Verstehensprozesse einen Einfluss auf das mathematische Modellieren, insbesondere auf die Bildung des Situations- und Realmodells haben.

2. Design und Methode der Studie

Stichprobe. Die Untersuchung wurde im siebten Jahrgang mit 50 Realschülerinnen und Schülern aus drei Lüneburger Schulen durchgeführt.

Durchführung. Die Einzelsitzungen mit den Lernenden dauerten jeweils 120 Minuten. Um die Frage zu beantworten, welche mentalen Prozesse beim Verstehen einer Modellierungsaufgabe tatsächlich ablaufen, wurde die Methode des Lauten Denkens eingesetzt (vgl. Stark 2010, S. 61). Nach einer videogestützten methodischen Einführung bearbeiteten die Probanden unter Anwendung der Methode des Lauten Denkens in jeweils 20 Minuten drei Aufgaben. Diese Phase der Aufgabenbearbeitung wurde durch eine Kamera aufgezeichnet. Weiterhin wurde ein Smartpen eingesetzt, wodurch sowohl digitale Schriftbilder der Lösungen existieren als auch eine zeitliche Zuordnung von Wort und Schrift vorgenommen werden kann. Hieran anschließend wurde ein Mathematikbildungsstandardtest, der Lesetest LGVT 6-12 sowie ein Fragebogen zu Hintergrunddaten, zum Leseverhalten und zur Einstellung bezüglich Mathematik eingesetzt.

Aufgaben. In der Erhebung der Studie sollten sowohl Modellierungsfähigkeiten als auch Fähigkeiten im Bereich des Leseverständnisses berücksichtigt werden, weshalb die Aufgaben bezüglich sprachlicher und modellierungsbezogener Aspekte sowie bezüglich Kontextvariationen systematisch variiert wurden.

Datenanalyse. Zur Auswertung des Datenmaterials erfolgte nach der Transkription die Entwicklung und Anwendung eines Kodiermanuals mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring.

3. Erste Ergebnisse

In einer ersten Auswertung wurden die Auswirkungen des Einsatzes der Lesestrategie des Notierens auf Lösungsprozesse von anwendungsbezogenen Mathematikaufgaben untersucht. Dabei beschränkten sich die untersuchten Notizen stets auf das Notieren von im Text enthaltenen Informationen. Bei etwa 30% aller bearbeiteten Aufgaben wurde die Strategie des Notierens eingesetzt. In der vorliegenden Untersuchung fertigten 14% mehr Jungen als Mädchen Notizen an. Weiterhin hat die Muttersprache einen Einfluss auf die Entscheidung ob Notizen angefertigt werden. Hierbei lässt sich erkennen, dass durchschnittlich eher die Schüler Informationen notieren, die Deutsch als Muttersprache erworben haben.

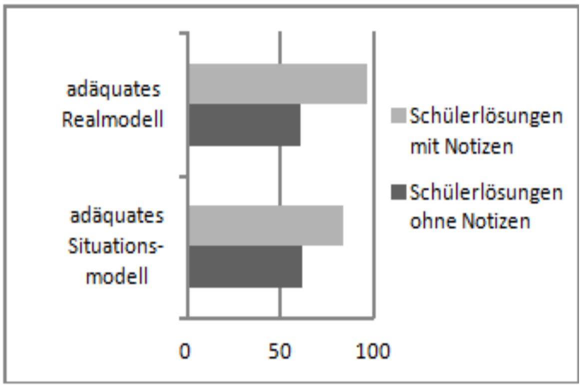


Abb. 1: Häufigkeiten adäquater Modellbildung (in %)

Die Wahrscheinlichkeit für die Bildung eines adäquaten Situationsmodells ist bei Aufgabenlösungen mit Notizen um 22% höher als bei Aufgabenlösungen ohne Notizen, woraus sich erkennen lässt, dass die Lernenden, welche die Strategie des Notierens zur Aufgabenlösung benutzen, ein besseres Verständnis für die gegebene Situation entwickelten. Weiterhin wurden in den Aufgabenbearbeitungen mit Notizen zu 30% öfter Annahmen getroffen, da die Schüler häufiger fehlende Zahlangaben erkannten. Hierbei lässt sich vermuten, dass es die beim Herausschreiben der Informationen entstehende Strukturierung ist, die dazu führt, dass fehlende Zahlangaben eher wahrgenommen werden. Dieser Unterschied führt dazu, dass bei Aufgabenlösungen ohne Notizen 35% seltener ein adäquat strukturiertes Realmodell konstruiert wird.
Um betrachten zu können, ob das Herausschreiben von Informationen einen Einfluss auf die Aufgabenlösung hat, wurde die Variable mathematische Korrektheit generiert, indem mithilfe eines Manuals jede Aufgabenlösung bezüglich ihrer mathematischen Richtigkeit mit einem Wert null, eins oder zwei bewertet wurde. Die Aufgabenlösungen mit Notizen erreichten bei allen Aufgabentypen durchschnittlich einen höheren mathematischen Korrektheitswert als die Aufgabenlösung ohne Notizen. Besonders auffällig sind die Differenzen bei den Aufgaben mit hoher Modellierungsanforderung, da die Aufgabenlösungen mit Notizen hier einen durchschnittlich doppelt so hohen Korrektheitswert erreichen wie die Aufgabenlösungen ohne Notizen. Weiterhin wurden bei den Aufgabenlösungen mit Notizen die Aufgaben mit hoher Modellierungsanforderung und hoher sprachlicher

Anforderung durchschnittlich genauso gut wie Aufgaben ohne diese Schwierigkeiten gelöst. Hieran lässt sich erkennen, dass Notizen zu einer erfolgreicheren Bewältigung der sprachlichen und modellierungsbezogenen Anforderungen beitragen, wodurch die Aufgaben mathematisch deutlich korrekter gelöst werden.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Die ersten Auswertungen lassen positive Auswirkungen der Verstehensstrategie „Anfertigen von Notizen“ auf die Lösungsprozesse von anwendungsbezogenen Mathematikaufgaben erkennen. Entgegen der Erwartungen zeigte sich allerdings kein Zusammenhang zwischen dem eingesetzten Lesetest und dem Mathematiktest, weshalb für nachfolgende Untersuchungen ein fachspezifischerer Lesetest zu entwickeln sein wird.

Zudem sind insbesondere noch detailliertere qualitative Analysen notwendig, welche die Interaktion von sprachlichen und mathematischen Kompetenzen im Prozess des Verstehens untersuchen. Hierüber wird an anderer Stelle zu berichten sein.

Literatur

Artelt, C., Schiefele, U., Schneider, W. & Stanat, P. (2001): Lesekompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Baumert, J. et al. (Hrsg.): PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, 69-137.

Christmann, U.; Groeben, N. (2006): Psychologie des Lesens. In: Franzmann, B et al.(Hrsg.): Handbuch Lesen. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren, S. 145-223.

Christmann, U. (2010): Lesepsychologie. In: Kämper van den Boogart, M. & Spinner, K. (Hrsg.): Lese- und Literaturunterricht I. (Handbuchreihe: Deutschunterricht in Theorie und Praxis). Baltmannsweiler: Schneider, 148-200.

Duarte, J., Gogolin, I. & Kaiser, G. (2011): Sprachlich bedingte Schwierigkeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben. In Özdil, E. & Prediger, S. (Hrsg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektive der Forschung und Entwicklung in Deutschland. Münster u.a. : Waxmann, 35 – 54.

Leiss, D. (2007): “Hilf mir es selbst zu tun“. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Leiss, D.;Schukajlow, S.; Blum, W.; Messner, R. & Pekrun, R. (2010): The role of the situation model in mathematical modeling – Task analyses, student competencies and teacher interventions. JMD, 31(1), 119 – 141.

Stark, T. (2001): Lautes Denken in der Leseprozessforschung. In: Didaktik Deutsch 16 (29), 58 – 83.

Torsten LINNEMANN, Michaela TURINA, Basel

Lernumgebungen differenziert begleiten

Entwicklungsidee «Kognitiv aktivierende Materialien für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II» – KAMM

Die Fachmittelschule ist in der Schweiz einer der Hauptzubringer für das Studium des Primarlehramts. Für diese Schulform sollen Unterrichtsmaterialien entwickelt werden, die

- kompetenzorientiert sind,
- das Engagement im Mathematikunterricht erhöhen
- für angehende Primarlehrpersonen relevant sind

Durch begleitende Forschung soll Qualität sichergestellt werden – und auch Erkenntnis generiert werden. Die vorgestellte Arbeit zeigt exemplarisch die Entwicklung am Beispiel einer Lernumgebung zu Zahlenmauern auf.

Forschungsfragen und Vorgehen

Im Rahmen einer für den Einsatz in der Primarschule typischen substanziellen Lernumgebung zu Zahlenmauern werden drei Fragen bearbeitet:

- Inwieweit lässt sich das Kategoriensystem zum innermathematischen Experimentieren von Leuders et al (2011) und Phillipp (2013) auf die Situation „Zahlenmauern“ und schriftliche Bearbeitung übertragen
- Zeigen sich charakteristische Unterschiede bei der Bearbeitung in verschiedenen Alterskategorien (Primarschule, Fachmittelschule (Sek II) und Studium des Lehramts?
- Wie lassen sich verschiedene Lösungswege charakterisieren, wie kann eine daran adaptierte Lernwegbegleitung aussehen?

Zunächst wurde eine substanzielle Lernumgebung zum Thema Zahlenmauern, deren Idee sich im Zahlenbuch 6 (Affolter et al, 2000) findet, in der Primarschule und bei Studierenden des 1. Semesters eingesetzt. Auffallend war, dass 94% der Primarschülerinnen und Primarschüler und 50% der Studierenden mit der Bearbeitung des ersten Teilauftrags zufrieden waren. Das Potenzial wurde nicht erschlossen. Elemente des Kategoriensystems zur ersten Forschungsfrage liessen sich nicht entdecken - die Bearbeitungen blieben auf Stufe der Beispiele.

Darauf wurde die Lernumgebung überarbeitet, auf vierstufige Zahlenmauern reduziert und bei Schülerinnen und Schülern der Fachmittelschule (10. Klasse) und Studierenden des Primarlehramts im 4. Semester eingesetzt.

Innermathematisches Experimentieren

Bei der Evaluation der Bearbeitungen war die Dissertation von Kathleen Philipp „Experimentelles Denken“ (2013) leitend. Innermathematisches Experimentieren ist definiert durch;

> „Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen, welches sich in einem konkreten Phänomenbereich an Beispielen vollzieht (…) wird im Folgenden als Innermathematisches Experimentieren bezeichnet.“ (Leuders, Naccarella, Philipp, 2011)

In Ihrem 3-Räume Modell stellen Leuders et al (2011) innermathematisches Experimentieren als Arbeiten in drei Räumen dar: Beispielraum, Strategieraum und Hypothesenraum dar. Im Strategieraum werden Strukturen gesucht und Hypothesen geprüft.

Lernumgebung Zahlenmauern

Der Kontext Zahlenmauern war allen Teilnehmenden der Studie bekannt, so dass die Aufgabe kurz gefasst werden konnte:

Gehen Sie aus von einer Zahlenmauer, bei der alle Grundsteine gleich 5 sind.

Der Deckstein ist dann 40.

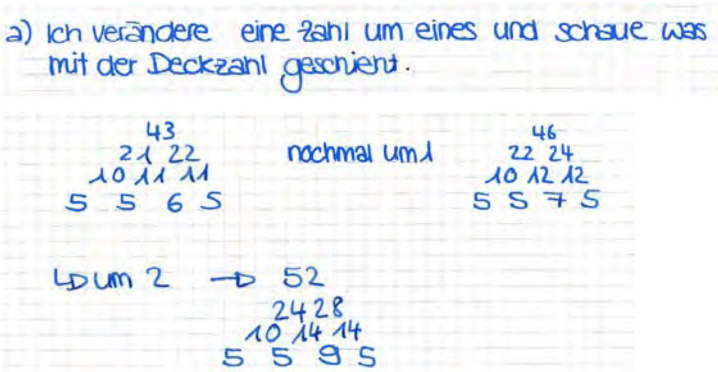
a) Verändern Sie einen der vier Grundsteine so, dass der Deckstein 52 ist. Welche Möglichkeiten gibt es?
b) Wie ist es mit dem Deckstein 49? Welche Möglichkeiten gibt es bei 48?
c) Reflexion: Wie sind Sie bei der Bearbeitung vorgegangen? Welche Beispiele haben Sie gebildet, welche Erkenntnisse sind Ihnen gekommen?

Innermathematisches Experimentieren

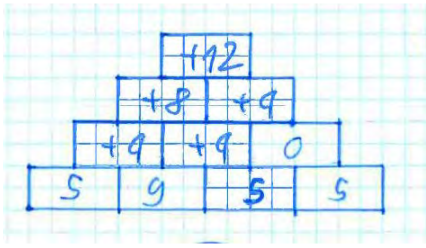
In der dieser Lernumgebung liess sich in 59 Prozent der Arbeiten der Studierenden Arbeit im Strategieraum identifizieren im Vergleich zu 79 Prozent bei der FMS. Aufgrund der kleinen Fallzahl, n=15 (FMS) bzw n=17 (Studierende), und der verschiedenen Vorbereitungen lassen sich daraus aber keine allgemeinen Schlüsse ziehen. Die Analyse der Arbeiten liefert allerdings qualitative Ergebnisse:

Die verschiedenen Räume liessen sich gut erkennen, hier zwei Beispiele zur Struktursuche im Strategieraum.

Beispiele: kleinste Änderung: Verfolgung der Änderung



Graphik 1



Graphik 2

Durch Analyse der Dokumente, insbesondere der Reflexionen kann das typische Wechseln zwischen den verschiedenen Räumen bestätigt werden.

1. Formulierung eines Beispiels – Beispielraum
2. Andere Beispiele andenken (Problem verstehen) – Strategieraum.
3. Eine (vage) Hypothese erstellen – Hypothesenraum.
4. Ansatz zur Verifizierung suchen (Plan ausdenken) – Strategieraum.
5. Ansatz schriftlich bearbeiten (Plan durchführen) – Strategieraum.
6. Hypothese oder Lösungsalgorithmus formulieren – Hypothesenraum.

Die Schritte 2 bis 4 erfolgen oft ohne schriftliche Fixierung, lassen sich dann aber aus der Reflexion herausarbeiten. Die Formulierung der zahlenmässigen Lösung erfolgt im Rahmen der Schritte 5 und 6.

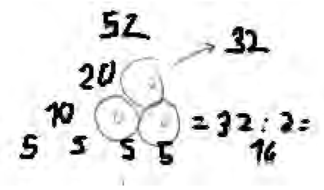
Folgerungen, Ergebnisse für das Kategoriensystem „innermath. Exp.“

Mit zunehmender Expertise nimmt die Zahl der benötigten Beispiele ab. Es wird schnell zur Struktursuche übergegangen, bei der Strategien aus anderen Lernumgebungen übernommen werden können (zum Beispiel Algebraisierung der Situation). Das typische Vorgehen als Wechsel zwischen den Räumen bleibt erhalten. Das Kategoriensystem sollte also im Strategieraum um algebraische oder allgemein-arithmetische Ansätze (Graphik 2) erweitert werden. Auch sind Kategorien wie „kleinstes“ und „grösstes“ Beispiel eher im Strategieraum zu verorten.

Lernbegleitung und Studierende der Primarstufe

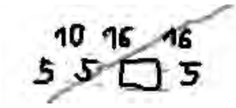
In „Lernumgebungen im Mathematikunterricht“ stellen Hirt und Wälti (2008) dar, wie Lernumgebungen von Lehrpersonen so begleitet werden können, dass das Potenzial zum Beispiel der natürlichen Differenzierung voll zum Tragen kommen kann. In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, Hinweise lernwegspezifisch zu erarbeiten.

So ist die Strategie „rückwärts arbeiten“ bei Zahlenmauern nur bei Veränderung der äusseren Zahlenreihe eindeutig. Wird versucht, mittlere Steine zu ändern, erscheinen schnell Probleme, wie die Graphik 3 zeigt.



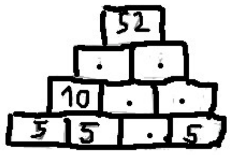
Graphik 3

Der Student zeigt im nächsten Schritt auf, dass sein Ansatz keine Lösung bringt, Graphik 4



Graphik 4

Schliesslich wird aber davon ausgehend erst richtig die Struktur von Zahlenmauern erkannt: die mittleren Grundsteine haben Einfluss auf mehrere Steine weiter oben, Graphik 5



Graphik 5

Nach Erstellung der Graphik 5 formulierte der Student: „Durch Überlegen erschien mir, dass die 9 passen könnte“. Der zwar naheliegende aber hier problematische Ansatz des Rückwärts Arbeitens führt hier also zu Erkenntnissen. Die Lernenden sollten angeregt werden, sich die Zusammenhänge mit Hilfe Ihres Ansatzes zu erschliessen.

Erkenntnisse zur Lernbegleitung

Ohne nachhaltige Lernbegleitung von sich aus keine mathematische Vertiefung. Es braucht Anregungen von aussen, um das Mathematisieren zu strukturieren.

Trotz reichhaltiger Aufgabenstellung bleibt die Bearbeitung oft auf Niveau Kenntnisse, Fertigkeiten. Es braucht strukturierende Anregungen von aussen, damit vertiefende Mathematisierungen erfolgen. Deshalb ist die fachliche Durchdringung der Aufgabe durch die Lehrperson notwendig.

Literatur

Affolter, W., Amstad, H., Doebeli, M. und Wieland, G. (2000): Das Zahlenbuch 6. Zug: Klett und Balmer.

Hirt, U; Wälti, Beat (2008): Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Seelze: Kallmeyer.

Leuders, T., Naccarella, D. und Philipp, K. (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32(2), 205 - 231

Philipp, K. (2013). Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz. Wiesbaden: Springer.

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Basel, Marc SCHÄFER, Grahamstown, Duncan SAMSON, Grahamstown

VITALmaths – Learning in Context („VITALmathsLIC“)

This project, which is a collaborative initiative between the PH FHNW in Switzerland and Rhodes University in South Africa, rests on the foundation of the VITALmaths project 2010-2013 (cf. Linneweber-Lammerskitten, Schäfer & Samson, 2010; Linneweber-Lammerskitten, 2009; 2011a; 2011b). The research associated with the latter focussed mainly on the development of a bank of online videos clips and the opportunities they offered for the mathematics teacher as interesting and appropriate teaching devices and tools to be used in conjunction with computers and mobile technologies such as tablets and mobile phones (cf. YouTube: “VITALmaths” and “linnemath”; facebook: “VITALmaths”). In this new project we would like to shift the research emphasis of the original VITALmaths project from the *development and teaching* of the videoclips, to *the learning process* that the video clips can support and enhance. The new VITALmathsLIC project envisages foregrounding how learning can take place in different learning and contextual spaces with particular reference to communication and language. In conjunction with this we would also like to develop additional video clips in such a way that they utilize accompanying resources such as worksheets and manipulatives.

In order to research this we would like to design teaching and learning support and scaffolding materials (such as “Arbeitsaufträge”, worksheets and manipulatives) to align with the existing and the newly developed bank of video clips. The three underlying themes and associated research questions that would then frame the VITALmathsLIC project are:

1. Communication

Overarching question:

- How can our video clips and materials be used to enhance learning in a collaborative and social milieu?

Specific questions:

- Within the context of collaborative learning, what is the nature of this learning when learners use the video clips in groups?

This research question could frame a possible research design that involved selected participants working in groups on specific activities. These interactions would be audio-visually recorded and analyzed, either by the researcher and/or collaboratively with the participants, using schedules to highlight specific nodes of activity that enhance learning. A pre- and post-test design could be used to determine learning development.

– Do the video clips encourage learners to ask questions of each other, as opposed to asking the teacher?

This project could possibly be located within a classroom context where interactions are audio-visually recorded and documented. The analyses would be based on emerging themes that would determine the coding process of the data.

– Do the video clips provide a platform that enables learners to justify and articulate their own mathematical reasoning?

This project would specifically involve individual learners who would be interviewed and tracked over time to access and document their cognitive processes. A think-aloud protocol would be utilised to this end.

2. Mathematical language and discourse

Overarching question:

How can the video clips and materials enhance mathematical learning through encouraging an appropriate mathematical discourse and language?

Specific questions:

– When learning in the social milieu of the classroom,while engaging with the content of the video clips, do the learners make use of appropriate mathematical language and/or discourse?

This project would rely on audio data, of learners in a classroom environment, coded according to language content and usage. Once again a pre- and post-test strategy could be employed to measure the development of the use of mathematical language.

– Do the video clips encourage the use of correct mathematical terminology?

Once again, the data obtained from interviews and observations of selected participants engaging with the videos in their classrooms (or outside this environment) would be coded according to appropriate mathematical themes.

3. Manipulatives

Overarching question:

- How can the video clips and materials encourage the use of physical manipulatives to enhance learning?

Specific questions:

- Do the video clips provide appropriate motivation for learners to explore mathematical ideas through the use of physical hands-on artefacts?

This research project lends itself to using questionnaires and focus-group interviews to explore how the videos encouraged selected learners to use physical manipulatives in conjunction with the videos to investigate mathematical ideas.

- Do the physical manipulatives in the video clips enhance visual reasoning?

The data for this project would be generated through the use of worksheets and interviews where learners would be required to engage with activities that lent themselves to a visual and/or abstract engagement. This engagement would be analysed and characterised in terms of the extent to which it incorporated visual reasoning.

- How do the physical manipulatives in the video clips enhance visual reasoning?

This project would be similar to the one above, but the analysis would be more nuanced in terms of characterising the nature of the visual reasoning. This process would involve a detailed focus on specific nodes of activity that were rich in visual reasoning.

- Do the video clips encourage independent mathematical exploration through the use of manipulatives?

This project could possibly be framed outside a classroom situation involving selected learners provided with our databank of video clips. Semi-structured interviews would be used to assess the degree of autonomy and independence experienced by the learners specifically with regard to mathematical exploration.

It is envisaged that 4 Masters students will be recruited (2 in SA and 2 in CH). Each of the students will be assigned to one of the research questions above. In addition, post-doctoral research will be conducted in South Africa and in Switzerland. This will also include the co-ordination and the production of new video and scaffolding material referred to above.

The research orientations of our individual research projects are mostly underpinned by an interpretivist paradigm whereby we are committed to understanding the phenomena we are researching and interpreting within the social and cultural context of the participants. This implies a mostly qualitative research approach in which we employ in-depth case study research designs. Although the individual case studies shed light on specific and individual experiences, they form the basis for a broader understanding of learning with said technologies. Their collective contributions will provide rich evidence to answer our three overarching research questions. In all the projects a pre- and post-test design will be employed and quantitative approaches will be used in those parts that require statistical analyses. Further, the research design will contain elements of action research, whereby the findings of the research will continuously feed into the refinement of the design of newly developed video material. The project is committed to the principle of making educational materials and media available to learners free of charge, particularly in areas of impoverishment and compromised access to information, such as the rural areas of Southern Africa. Further, the project is committed to broadening access to quality material – this includes access in terms of language and culture.

There is still a need for scientific results concerning the implementation of National Educational Standards and competence-oriented teaching and learning in Mathematics – particularly with respect to communication and language. The anticipated research results will *inter alia* fit into the wider field of “language in all subjects” and “Language in Education – Language for Education” of the European Council´s Language Policy Division and will also be fruitful for corresponding research in South Africa – particularly regarding multilingual education. Our project will also have direct impact on the understanding of teaching and learning with mobile devices and the use of manipulatives.

References

Linneweber-Lammerskitten, H. (2009): Der Einsatz von Kurzfilmen als Einstieg in Experimentier- und Explorationsphasen In Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, Münster: WTM-Verlag, 743-746

Linneweber-Lammerskitten, H. (2011a). Der Lernstick als Hilfe zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht. In Grunder, Hans-Ulrich (Hrsg.) mLearning in der Schule. Der Lernstick als Lerninstrument. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. 75-84.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2011b). VITALmaths – ein gemeinsames Forschungs- und Entwicklungsprojekt der Schweiz und Südafrika. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Münster: WTM-Verlag, S.555-558.

Linneweber-Lammerskitten, H., Schäfer, M., & Samson, D. (2010). Visual technology for the autonomous learning of mathematics. Pythagoras, 72, 27-35.

Carolin LOCH, Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE, Kiel

Instrumententwicklung zur Erfassung professionellen Wissens von Lehramtsstudierenden

Im Beitrag wird eine Konzeptualisierung des mathematikspezifischen Wissens von (angehenden) Lehrkräften vorgestellt, die Grundlage der Operationalisierung des professionellen Wissens von Lehramtsstudierenden mit Unterrichtsfach Mathematik im KiL-Projekt ist (KiL = Messung professioneller Kompetenzen in mathematischen und naturwissenschaftlichen Lehramtsstudiengängen). Erste Ergebnisse aus Pilotierungsstudien erlauben dabei Untersuchungen bezüglich der Trennbarkeit unterschiedlicher Wissenskomponenten.

1. Theoretischer Hintergrund und Fragestellung

Die hier vorgestellte Konzeptualisierung des mathematikspezifischen Wissens von Lehrkräften greift den Rahmen theoretischer und empirischer Arbeiten im Bereich der Lehrerprofessionsforschung auf. Basis ist dabei die von Shulman (1986) vorgeschlagene Unterteilung des fachspezifischen Wissens von Lehrkräften in fachdidaktisches Wissen (pedagogical content knowledge, PCK) und Fachwissen (content knowledge, CK), auf die sich viele Studien zum Professionswissen von (angehenden) Lehrkräften beziehen. Doch trotz diverser Studien zum Wissen von Mathematiklehrkräften ist die Frage der Konzeptualisierung und darauf aufbauend der Operationalisierung der Konstrukte mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens immer noch in der Diskussion. Dabei bleibt insbesondere die Frage nach der Struktur dieser fachspezifischen Lehrerwissensbasis zentral. Empirische Arbeiten im Rahmen von COACTIV (Krauss et al., 2011), TEDS-M (bzw. den zugehörigen Studien MT21 und TEDS-LT, Blömeke et al. 2008, 2010) und der Forschungsgruppe um D. Ball von der University of Michigan (Hill et al., 2004) weisen durchweg auf hohe Korrelationen zwischen dem mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen von (angehenden) Lehrkräften hin. Deswegen kann zum einen gefragt werden, ob diese beiden Konstrukte überhaupt sinnvoll empirisch trennbar sind. Zum anderen können die bisher vorgeschlagenen Konzeptualisierungen und deren Operationalisierungen kritisch hinterfragt werden, z. B. in Bezug auf deren Konstruktrepräsentativität. Letzteres wird beispielsweise von Buchholtz und Kaiser (2012) verfolgt. Sie sehen die Ursache für die hohe Korrelation zwischen den Konstrukten (in TEDS-LT) in der überwiegend stoffdidaktischen Operationalisierung des mathematikdidaktischen Wissens wobei stärker erziehungswissenschaftlich-psychologisch geprägtes, aber genuin mathematikdidaktisches Wissen unterrepräsentiert ist. Daher schlagen sie eine Untergliederung des Konstrukts mathematikdidaktisches Wissen in stoffdidaktisch geprägtes und erziehungswissenschaftlich-psychologisch geprägtes Wissen vor (Buchholtz & Kaiser, 2012).

2. Konzeptualisierung im KiL-Projekt

Im seit 2011 laufenden KiL-Projekt werden professionelle Kompetenzen von Lehramtsstudierenden der Sekundarstufe untersucht, wobei ein Schwerpunkt das mathematikspezifische Professionswissen darstellt. Das zugrundeliegende Modell fachspezifischen Wissens unterscheidet zwischen drei Wissensbereichen, so dass dieses breiter konzeptualisiert wird als in den bisherigen Studien. Damit soll möglich sein, die Struktur des professionellen Wissens in Mathematik detaillierter zu untersuchen. Insbesondere wird neben dem *mathematikdidaktischen Wissen* (MDW) zwischen einem *mathematisches Wissen im schulischen Kontext* (MWsK) und einem *universitären mathematischen Wissen* (MW), wie es Gegenstand des Studiums ist, unterschieden. Dieses Modell wird im Folgenden kurz erläutert.

Eine Analyse der veröffentlichten Items zur Erfassung des mathematikspezifischen Wissen in den oben genannten Studien legt nahe, dass nicht nur viele der mathematikdidaktischen Items durch schulmathematisches Wissen richtig beantwortet werden können, sondern dass auch die Items zum mathematischen Wissen überwiegend schulmathematisches Wissen erfassen (vgl. auch Buchholtz & Kaiser, 2012). Darauf stützt sich die Vermutung, dass in diesen Studien bisher ein eingeschränkter Bereich des mathematikspezifischen Wissens der (angehenden) Lehrkräfte erfasst wird. Es kann vermutet werden, dass der gefundene starke Zusammenhang zwischen dem mathematischen Wissen und fachdidaktischen Wissen teils auf einer zu geringen Konstruktrepräsentativität der Operationalisierungen beruht.

Im KiL-Projekt wurde daher versucht, eine umfassendere Konzeptualisierung des mathematikspezifischen Wissens zu entwickeln und auf deren Basis eine breitere Operationalisierung der Konstrukte zu realisieren. Aus diesem Grund verstehen wir – den KMK-Standards (2010) entsprechend – unter *mathematischem Wissen* dezidiert universitäres mathematisches Wissen, das zwar Bezug zur Schulmathematik aufweist, aber Gegenstand der Sekundarstufenlehrerausbildung ist und deutlich (in Inhalt und Form) über Schulmathematik hinausgeht. Zur Beschreibung des *mathematikdidaktischen Wissens* haben wir uns an der Konzeptualisierung von COACTIV orientiert und unterscheiden zwischen den Facetten *Schülerkognition*, *Instruktionsstrategien* und *Aufgabenpotenzial*. Bei der Operationalisierung dieser Facetten wurde aber explizit darauf geachtet, genuin mathematikdidaktisches Wissen zu erfassen und Items zu vermeiden, die mit rein mathematischem Wissen (bzw. Denkprozessen) gelöst werden können.

Werden die Konstrukte des mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens so gefasst, so wird allerdings ein wichtiger Teilbereich des mathematikspezifischen professionellen Lehrerwissens nicht berücksichtigt: Mathematisches Wissen, das sich direkt auf den schulrelevanten Inhalt bezieht (Konstrukt *Mathematisches Wissen im schulischen Kontext*). Dabei wird unter diesem Konstrukt in KiL vor allem *curriculares Wissen*, Wissen über *Verzerrungen durch die fachdidaktische Reduktion von Inhalten* (z. B. welche Probleme ergeben sich aus dem üblichen Umgang mit Grenzwertprozessen in der Sekundarstufe) sowie Wissen über die *Einbettung schulmathematischer Inhalte in die universitäre Mathematik* (z. B. welche Aspekte der Körpererweiterung von Q nach R spiegeln sich im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I wieder) verstanden. Dieses *mathematische Wissen im schulischen Kontext* stellt die Grundlage dar, um schulmathematische Inhalte aus fachmathematischer Perspektive zu interpretieren und kann als Grundlage für die von der KMK geforderte Fähigkeit „mathematische Gebiete […] durch Querverbindungen vernetzen und Bezüge zur Schulmathematik herstellen zu können" (KMK, 2010) verstanden werden.

3. Itementwicklung und erste Ergebnisse der Pilotierung

Zu den drei Konstrukten mathematikspezifischen Professionswissens wurden insgesamt 204 Items entwickelt und in einer Pilotstudie mit $N = 264$ Lehramtsstudierende mit Unterrichtsfach Mathematik von 12 verschiedenen Hochschulen eingesetzt (Studiengang: $n = 79$ Sek I, $n = 180$ Sek II und $n = 3$ Berufsschule). In der dreidimensionalen IRT-Skalierung erweisen sich zum derzeitigen Stand der Auswertung 116 Items als modellkonform. Dabei lassen sich das mathematische Wissen im schulischen Kontext und das mathematische Wissen reliabel erfassen ($Rel_{MWsK} = 0.67$, 40 Items; $Rel_{MW} = 0.67$, 54 Items). Die Reliabilität der kürzeren Skala zum mathematikdidaktischen Wissen (22 Items) liegt zum jetzigen Stand der Auswertung bei $Rel_{MDW} = 0.53$. Die ersten Auswertungen lassen zudem vermuten, dass die so operationalisierten Konstrukte auf latenter Ebene trennbar sind (latente Korrelationen $r_{MDW,MW} = 0.48$, $r_{MWsK,MW} = 0.79$, $r_{MDW,MWsK} = 0.82$). Diese Befunde weisen darauf hin, dass Teilscores für die einzelnen Konstrukte sinnvoll sind und eine Reduktion der Dimensionen einen Informationsverlust zur Folge hätte. Hierauf weist auch ein Modellvergleich mithilfe informationstheoretischer Indizes hin, wobei Modelle mit niedrigeren Indexwerten bessere Passung aufweisen. In Tabelle 1 sind unterschiedliche Kennwerte des 3D Modells sowie zweier alternativer 2D Modelle und des Generalfaktormodells (1D) angegeben. Es zeigt sich, dass das dreidimensionale und ein zweidimensionales Modell, in dem das Wissen im schulischen Kontext und das fachdidaktische Wissen zusammengefasst wurden eine nahezu gleich gute Passung aufweisen.

Tabelle 1: Kennwerte für Modelle unterschiedlicher Dimensionalität

Modellfit-indizes	3-dimen. Modell (3D)	[a]2-dimen. Modell (2Da)	[b]2-dimen. Modell (2Db)	1-dimen. Modell (1D)
AIC	**13063**	13066	13134	13173
BIC	13560	**13552**	13620	13652
CAIC	13699	**13688**	13756	13786

[a] Erste Dimension: MWsK und MDW; zweite Dimension: MW

[b] Erste Dimension: MDW; zweite Dimension: MWsK und MW

4. Ausblick

Auf Basis der Daten der Pilotierungsstudie sind differenzierte Analysen u. a. bezüglich der Zusammenhänge der Skalen, der verschiedenen Lehramtszugänge und der fachlichen Inhaltsgebiete geplant. Zudem soll die Validität der Aufgaben im Rahmen einer qualitativen Interviewstudie überprüft und sich als geeignet erweisende Items in einer Kalibrierungsstudie weiter untersucht werden.

Literatur

Ball, D.L. et al. (2005), Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-46.

Blömeke, S. et al. (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer.* Münster: Waxmann.

Blömeke, S. et al. (2010). *TEDS-M: Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Buchholtz, N. & Kaiser, G. (2012). Zur Konzeptualisierung des mathematikdidaktischen Wissens. Beitrag im Rahmen der AK Vergleichsuntersuchungen im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, (997-1000).

Hill, et al. (2004). Developing measures of teachers‘ mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 150*(1), 11-30.

KMK (2010). Länder gemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung: Beschluss der KMK vom 16.10.2008 i. d. F. vom 16.09.2010

Krauss S., et al. (2011). Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In: M. Kunter et al. (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, (S. 135-161). Münster: Waxmann.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Katharina LOIBL, Nikol RUMMEL, Ruhr-Universität Bochum,
Lars HOLZÄPFEL, Pädagogische Hochschule Freiburg

Aufgreifen von Schülerlösungen in nachfolgenden Instruktionsphasen ist wichtig für den Lernerfolg

1. Aufgreifen von Schülerlösungen

Wenn Schülerinnen und Schüler selbstständig Aufgaben bearbeiten, generieren sie eigene Lösungsansätze. Diese Lösungsansätze sind in der Regel nicht vollständig und oftmals auch fehlerhaft (Kapur & Bielaczyc, 2012). Für die Lehrperson ist eine Korrektur aller Schülerbearbeitung während dieser Bearbeitungsphase nicht leistbar. Die Schülerprodukte können jedoch in nachfolgender Instruktion aufgegriffen werden um das formal intendierte Vorgehen (d.h. den normativ korrekten Lösungsansatz) verständlich einzuführen (Lengnink, Prediger & Weber, 2011). Durch diesen Abgleich zwischen Schülerprodukten und formal intendiertem Vorgehen wird negatives Wissen gefördert. Mit negativem Wissen ist die Abgrenzung kanonischer Lösungen und Konzepte von fehlerhaften Prozeduren und Ideen gemeint (Oser, Hascher & Spychiger, 1999). Befunde zum Lernen aus fehlerhaften Lösungsbeispielen lassen zudem darauf schließen, dass der Vergleich von fehlerhaften oder unvollständigen Lösungen mit der formal intendierten Lösung die Aufmerksamkeit der Lernenden auf die Aspekte lenkt, in denen sich die Lösungen noch unterscheiden (Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Große & Renkl, 2007), so dass die Schülerinnen und Schüler auf die relevanten Aspekte fokussieren.

Kapur (2010) untersucht selbstständige Aufgabenbearbeitung mit anschließendem Aufgreifen der Schülerlösungen. Diesen Ansatz nennt er *Productive Failure*. Lernende suchen zunächst eigenständig Lösungswege für eine Aufgabe zu einem noch unbekannten Konzept. Obwohl die Lösungswege in der Regel nicht mit der Norm übereinstimmen, scheinen die Lernenden von der nachfolgenden Instruktion, in der typische Schülerlösungen aufgegriffen werden, besonders gut zu lernen. Insbesondere in Hinblick auf das konzeptuelle Verständniswissen konnte Kapur (2010) in mehreren Studien zeigen, dass Lernende, die gemäß dem Productive Failure Ansatz gelernt hatten, im Vergleich zu Lernenden, die erst Instruktion erhielten und anschließend Übungsaufgaben bearbeiteten (Kontrollgruppe), im Nachtest bessere Ergebnisse erzielten. Die Studien von Kapur lassen jedoch offen, ob dieser positive Effekt auf die eigenständige Aufgabenbearbeitung zurückzuführen ist oder auf die besondere Art der Instruktion, in der typische Schülerlösungen aufgegriffen und mit dem formal intendierten Vorgehen in Einklang gebracht werden.

2. Studiendesign

Um den Effekt beider postulierten Wirkmechanismen (eigenständige Aufgabenbearbeitung und Aufgreifen von Schülerlösungen) systematisch zu untersuchen, variierten wir in einer quasi-experimentellen Studie mit 240 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 10 beide Faktoren (Zeitpunkt der Instruktion: zu Beginn oder nach der eigenständigen Aufgabenbearbeitung; Art der Instruktion: mit oder ohne Aufgreifen typsicher Schülerlösungen) in einem 2x2 Design. Als Inhaltsgebiet diente das Konzept der Varianz, da Schülerinnen und Schüler hier in der Regel bereits erste formelle sowie informelle, intuitive Vorstellungen haben (in der Regel auch durch Anknüpfung an lebensweltliche Vorerfahrungen), das formale, normative Vorgehen (Standardabweichung oder Mittlerer absoluter Abstand zum Mittelwert) jedoch noch nicht bekannt ist.

In den Bedingungen mit eigenständiger Bearbeitung wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert in Kleingruppen verschiedene eigene Lösungsansätze zu einer Aufgabe entwickeln. Während dieser Phase, die eine Schulstunde dauerte, erhielten sie keine inhaltliche Unterstützung oder Feedback zu ihren Lösungsansätzen. Erst in der nachfolgenden Instruktion lernten sie das formal intendierte Vorgehen (d.h. den normativ korrekten Lösungsansatz). Auch die Instruktionsphase dauerte eine Schulstunde. In den Bedingungen, die mit Instruktion begannen, lernten die Schülerinnen und Schüler zunächst das formal intendierte Vorgehen angeleitet durch die Lehrperson. Anschließend lösten sie analoge Aufgaben in Kleingruppen.

In den Bedingungen mit Aufgreifen typischer Schülerlösungen wurden in der Instruktion das Konzept und die Formel der Standardabweichung (bzw. des Mittleren absoluten Abstands zum Mittelwert) basierend auf typischen Schülerlösungen hergeleitet. Vor- und Nachteile verschiedener Schülerlösungen wurden diskutiert und relevante Aspekte identifiziert, die in der jeweiligen Schülerlösung problematisch sind. In den Bedingungen ohne Schülerlösungen fokussierte die Lehrperson bei der Einführung des Konzepts und der Formel auf das formal intendierte Vorgehen unter Zuhilfenahme einer Musterlösung.

Anschließend bearbeiteten alle Schülerinnen und Schüler einen Nachtest. Der Nachtest diente zur Erfassung des Lernerfolgs und beinhaltete Aufgaben zum konzeptuellen Verständniswissen und prozedurale Aufgaben.

3. Ergebnisse

Die Ergebnisse des Posttest wurden mit einer MANOVA mit den Faktoren Zeitpunkt der Instruktion und Art der Instruktion und den abhängigen Variablen prozedurales Wissen und konzeptuelles Verständniswissen ausgewertet. Für *prozedurales Wissen* wurde der Haupteffekt Zeitpunkt der Instruktion marginal signifikant (F[1,236]= 2.81, p=.095, $_p^2$= .01). Schülerinnen und Schüler, die Übungsaufgaben rechneten nachdem sie das formal intendierte Vorgehen erlernten, schnitten hier besser ab. Weder der Haupteffekt Art der Instruktion (F[1,236]= 0.16, p= .69) noch die Interaktion (F[1,236]= 1.93, p= .17) wurde signifikant.

Für das *konzeptuelle Verständniswissen* zeigten die Ergebnisse ein anderes Muster: Der Haupteffekt Zeitpunkt der Instruktion wurde signifikant(F[1,236]= 10.02, p= .002, $_p^2$= .04). Hier schnitten Schülerinnen und Schüler mit eigenständiger Bearbeitung vor der Instruktion besser ab als Schülerinnen und Schüler, die mit der Instruktion starteten. Zudem wurde der Haupteffekt Zeitpunkt der Instruktion signifikant(F[1,236]= 29.35, p<.01, $_p^2$= .11). Das Aufgreifen der Schülerlösungen wirkte sich positiv auf den Verständniserwerb aus. Zudem zeigte der signifikante Interaktionseffekt(F[1,236]= 5.90, p=.02, $_p^2$=.02), dass die Art der Instruktion einen höheren Effekt hat, wenn die Schülerinnen und Schüler zuvor eigenständig Aufgaben bearbeiteten. Dahingegen war die eigenständige Bearbeitung nicht lernförderlich, wenn in der nachfolgenden Instruktion keine Schülerlösungen aufgegriffen wurden. Die Mittelwerte und Standabweichungen können der folgenden Tabelle entnommen werden:

		Art der Instruktion	
		Standardinstruktion	Instruktion mit Aufgreifen von Schülerlösungen
Zeitpunkt der Instruktion	Aufgaben-bearbeitung vor Instruktion	Proz:3.24 (0.99) Konz: 1.29 (1.02) (N = 51)	Proz: 2.99 (1.27) Konz: 2.63 (1.53) (N = 56)
	Instruktion vor Aufgaben-bearbeitung	Proz: 3.27 (1.02) Konz: 1.17 (1.23) (N = 62)	Proz: 3.41 (0.91) Konz: 1.68 (1.35) (N = 71)

4. Diskussion und Fazit

Die Ergebnisse deuten auf einen dualen Wirkmechanismus hin: Zum einen fördert die eigenständige Bearbeitung unbekannter Aufgaben den Verständniserwerb in der nachfolgenden Instruktion. Es ist anzunehmen, dass dies auf die Aktivierung von Vorwissen und Vorstellungen zurückzuführen ist (Schwartz & Martin, 2004). Zum anderen wirkt sich das Aufgreifen typsicher Schülerfehler in der Instruktion positiv auf den Verständniserwerb aus. Dieser positive Effekt kann durch die Fokussierung der Aufmerksamkeit auf diejenigen Aspekte, die sich zwischen den Schülerlösungen und der normativen Lösung unterscheiden, erklärt werden(vgl. Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Große & Renkl, 2007). Hierdurch wird wiederum negatives Wissen gefördert (Oser et al., 1999). Die Ergebnisse der Studie zeigen zudem, dass sich die Wirkung beider Faktoren unterscheidet: Selbst wenn die Kombination beider Faktoren am effektivsten ist, ist das Aufgreifen von Schülerlösungen auch ohne vorangehende eigenständige Bearbeitung wirksam. Dahingegen ist das Aufgreifen von Schülerlösungen in der anschließenden Instruktion eine wichtige Bedingung für die Effektivität der selbstständigen Aufgabenbearbeitung, die andernfalls ihre Wirkung nicht entfalten kann.

Literatur

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. Learning and Instruction, 22(3), 206-214.

Große, C. S. & Renkl, A. (2007).Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? Learning and Instruction, 17(6), 612-634.

Kapur, M. (2010). A further study of productive failure in mathematical problem solving: Unpacking the design components. Instructional Science, 39(4), 561-579.

Kapur, M. & Bielaczyc, K. (2012). Designing for Productive Failure. The Journal of the Learning Sciences, 21(1), 45-83.

Lengnink, K., Prediger, S. & Weber, C. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen - Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen.Praxis der Mathematik in der Schule, 53(40), 2-7.

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des negativen Wissens. In W. Althof (Hrsg.), Fehlerwelten (S. 11–41). Opladen: Leske + Budrich.

Schwartz, D. L. & Martin, T. (2004). Inventing to prepare for future learning: The hidden ef ciency of encouraging original student production in statistics instruction. Cognition and Instruction, 22(2), 129–184.

Matthias LUDWIG, Jens JESBERG, David WEISS, Frankfurt

MathCityMap - ein Smartphone-Projekt um Mathematik draußen zu machen

Mathematik draußen machen fasziniert (Kleine, Ludwig, & Schelldorfer, 2012). Durch unmittelbare Primärerfahrungen erhalten selbst einfache, mitunter langweilige, Aufgaben wie z.B. das Berechnen der Oberfläche einer Litfaßsäule einen ungeheuren Aufforderungscharakter wenn man die Objekte in ihrer natürlichen Umgebung aufsucht. Ganz im Gegenteil zu Aufgaben in Papierform mit all den Angaben die man vor sich liegen hat. Das Anwenden von Mathematik in realen Situationen bzw. in der Wirklichkeit, ist durch die dabei entstehenden Vernetzungen der verschiedenen kognitiven Ebenen besonders wertvoll. Man ist motivierter und erinnert sich durch solche Situationen besser an das Gelernte (Rösler, 2011).

In den letzten Jahren hat die Verbreitung von Smartphones in Deutschland sehr stark zugenommen. Sie sind mittlerweile ein fester Bestandteil des täglichen Lebens. Neben den hiermit verbundenen Risiken bietet diese neue Technik aber auch großes Potential im Bereich der Lehre und des Lernens. Mobiles Lernen, oft auch als „mobile learning“ (O'Malley, et al., 2003) bezeichnet, spielt in unserer Gesellschaft eine immer größere Rolle. Das Lernen von unterschiedlichsten Inhalten von beliebigen Orten aus wird durch die Verknüpfung spezieller Programme und der Smartphone-Technology ermöglicht. Um Lernprozesse gezielt zu starten und bestimmte Inhalte und Kompetenzen zu vermitteln ist es manchmal sinnvoll die Beliebigkeit des Ortes beim mobilen Lernen einzuschränken. „Mobiles Lernen an vorbestimmten Orten“ (siehe Ludwig & Jesberg 2012) bietet für den Mathematikunterricht eine große Chance. So kann sich mit Mathematik „vor Ort“ auseinandergesetzt werden und gleichzeitig wird eine Hilfestellung und direkte Rückmeldung ermöglicht.

Math trails

Die Idee des „math trails“ wurde in den 1980ern von D. C. Blane und D. Clarke in Melbourne an der Monash University geboren. Sie wurde dann von C. Greene und K. Toliver in Bosten und New York weiterentwickelt. Nach Shoaf, Polak und Schneider (2004) ist ein math trail ein Rundgang auf dem, bzw. durch den Mathematik entdeckt wird. Ein math trail der überall sein kann soll jeder ablaufen können. Eine „math trail-Karte“ zeigt Plätze, an denen man interessante mathematische Probleme selbst formulieren, diskutieren und lösen kann. Durch die dabei angesprochenen Kompetenzen, wie Argumentieren, Darstellen, Modellieren, Problemlösen und

Kommunizieren, könnte man sagen, dass die Idee der math trails in gewisser Weise die NCTM Standards und Prinzipien antizipiert hat.

Solche math trails, bzw. mathematischen Wanderpfade findet man derzeit auch in verschiedenen deutschsprachigen Städten wie z.B. in Chur (P. Flury& T. Juon, 2012), Cuxhaven, Gießen oder in Soest (A. Pallack).

Die MathCitymap- Idee

Das MathCityMap-Projekt (MCM) verknüpft somit die „alte Idee“ der Mathematischen Wanderpfade (math trails), insbesondere die Auseinandersetzung mit Mathematik an interessanten, realen Orten, mit den technischen Möglichkeiten aktueller Smartphones. Ein Grundprinzip der MatheCityMap ist, dass Mathematikaufgaben entwickelt werden, die in Verbindung zu realen Objekte stehen. Diese Aufgaben werden dann mit GPS Koordinaten versehen und durch das MCM-System auf einer Googlemap markiert. Zu diesen Objekten kann man sich dann zu Fuß nähern um die Aufgaben über das Smartphone abrufen.

Abb. 1: Die Grundidee von MathCityMap

In Abbildung 1 sieht man wie der Lehrer mit den Schülern das Schulhaus verlässt. Die Schüler empfangen, wenn sie in der Nähe des Objektes sind, mit ihren Smartphones die Aufgabenstellung. Die Schüler lösen die Aufgabe (eventuell mit den vom System angebotenen Hilfen), senden die Antwort an das System und erhalten eine Rückmeldung. Anschließend gehen sie zur nächsten Aufgabe.

Im Gegensatz zu den Papierformvarianten der math trails sind wir durch Verwendung von „mobile devices“ wie Smartphones, oder Tablets in der Lage, unmittelbar Rückmeldungen zu den Lösungen zu geben. Diese Rückmeldungen sind bei numerischen Lösungen natürlich nur sehr eingeschränkt möglich. Es kann ja nicht „die“ genaue Lösung für die Fläche eines Stadtteiches oder das Volumen eines Gebäudes geben. Somit darfes durchaus zulässige Messungenauigkeiten geben, es ist also ein Lösungsinmtervall möglich. Für besondere Lösungsintervalle (z.B. wenn das Ergebnis vom Ziffernwert her passt, aber um eine oder mehrere 10er-Potenzen abweicht) gibt es spezielles Feedback: Hast Du vielleicht mit falschen Einheiten gerechnet? Der Lösungsweg kann in das System nicht eingegeben und damit auch nicht beurteilt werden. Der Nutzer kann bei Bedarf gestufte Hilfen abrufen die ganz gezielt auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt sind. Da es natürlich verschiedene Lösungswege für eine Aufgabe geben kann, ist auch hier das System nur suboptimal aber durchaus hilfreich. In Abbildung 2 ist das Item-Response- Feedback- Schema verdeutlicht.

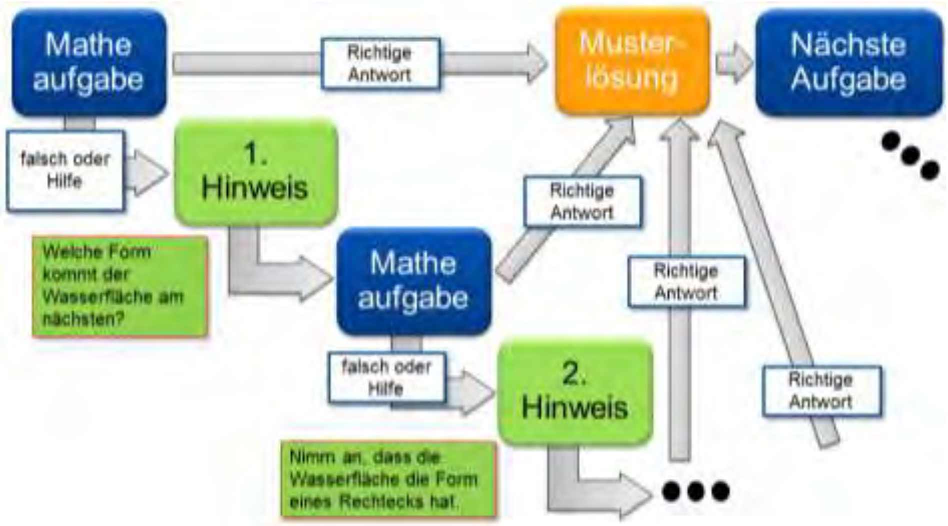


Abb. 2: Das Ablaufschema der Bearbeitung einer MCM-Aufgabe

Nutzerszenarien

Als Nutzer des MathCityMap-System stellen wir uns mathematisch interessierte Einzelpersonen, Schülergruppen und Lehrende vor.

Wenn sich mathematisch interessierte Einzelpersonen in einer Stadt befinden in der MathCityMap-Aufgaben verortet sind (derzeit leider nur Frankfurt am Main),können sie sich diese über das MCM-App auf ihrem Mobile-Device anzeigen lassen. Mit Klick auf einen Pin wird eine Aufgabenvorschau (Thema und Schlagwörter) gezeigt. Bei Interesse kann man sich wie mit einem Navigationssystem zur Aufgabe führen lassen, denn die komplette Aufgabenstellung wird erst angezeigt, wenn man sich in dem dafür vorgesehen Gebiet befindet (siehe Abbildung 3). Dies ist mithilfe der GPS-Fähigkeit der Mobile Devices möglich.

Lehrende haben andere Anforderungen und Ansprüche an ein solches System. Wir stellen uns vor, dass der Lehrende sich die Aufgaben zuhause in Ruhe ansehen kann. Dazu loggt er sich im MCM-Portal ein und kann sich zunächst über einen Filter nur Aufgaben für eine bestimmte Klassenstufe anzeigen lassen. Im MCM-Portal ist es möglich, sich die Aufgabentexte anzeigen zu lassen, ohne direkt in der Nähe des Objektes zu sein. Hat er sich nun für Aufgaben per Mausklick entschieden, so kann er diese vom System zu einer Route zusammensetzen lassen. Zudem werden alle benötigten Hilfsmittel angegeben. Die Route kann der Lehrende nun über ein Passwort schützen und später dieses Passwort an die Schüler ausgeben. Diese sehen dann nur die Aufgaben der Route, alle anderen Aufgaben sind ausgeblendet. Zudem ist es möglich, dass Lehrende eigene Aufgaben erstellen und ins MCM-Portal hochladen können. Diese kann der Lehrende in seine eigene Route einbauen. Nach einem positiven Aufgabenreview steht die Aufgabe dann auch der Öffentlichkeit zur Verfügung.

Abb. 3: Die Pins zeigen vorhandene Aufgaben(li.), Aufgabenvorschau (mi.), Route (re.)

Eine Beta-Version der MathCityMap findet man unter www.mathcitymap.eu. Das Projekt wurde von der Stiftung Polytechnische Gesellschaft und dem E-learning Förderfond der Goethe-Universität finanziert.

Literatur

Flury, P.,Juon, T.(2012). Mathematische Lernorte im Freien, in: Praxis der Mathematik in der Schule, 47. S. 9-12

Jesberg, J., Ludwig, M. (2012). MathCityMap - Make mathematical experiences in out-of-school activities using mobile technology. Proceedings of the International Conference on Mathematics Education 12. Seoul.

Kleine, M., Ludwig, M., Schelldorfer, R. (2012).Mathematik draußen machen-Outdoor mathematics, in: PM 47,S. 2-8

O'Malley, C., Vavoula, G., Glew, J., Taylor, J., Sharples, M., & Lefrere, P. (2003). Guidelines for learning/teaching/tutoring in a mobile environment. MOBIlearn deliverable D, Vol. 4.

Rösler, F. (2011). Psychophysologie der Kognition, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, S.109 ff

Shoaf, M., Pollak, H., & Schneider, J. (2004). Math Trails. Lexington: COMAP

Jürgen MAASZ, Linz

Realitätsnähere Modellierung im Mathematikunterricht

Die Bemühungen zur Verbesserung des Mathematikunterrichts in den letzten Jahrzehnten haben - dank MUED, ISTRON und vieler engagierter LererInnen - dazu beigetragen, dass mehr realitätsbezogener Mathematikunterricht stattfindet. Das ist tatsächlich eine *Verbesserung*: Einerseits kann die Lösung realitätsnaher Fragen mit Hilfe von Mathematik die oft gestellte Frage „Wozu sollen wir Mathematik lernen?“ zufriedenstellend beantworten. Andererseits trägt solcher Mathematikunterricht dazu bei, mehr über Mathematik insgesamt zu wissen. Mathematik ist eine sehr umfassende Wissenschaft mit sehr vielen Aspekten. Wer sich auf *einen* Zugang zur Mathematik - das leider nur zu oft für die Schule typische Ausrechnen vorgegebener Aufgaben - konzentriert, vermittelt damit einen einseitigen und unvollständigen Blick auf die Mathematik und riskiert, ein mögliches Interesse an Mathematik zu vermindern oder zu verhindern, weil vielleicht ein anderer Zugang zur Mathematik, der gerade motivierend wäre, gar nicht vorkommt. Andere Wege zur Mathematik führen etwa über ihre Geschichte, ihre Struktur, ihre innere Logik, philosophische Fragen, Spielerisches und Knobeleien oder eben über ihren Bezug zur Realität und ihre tatsächliche Anwendung in Beruf und Alltag.

Im realitätsbezogenen Mathematikunterricht ist das Modellieren ein unentbehrlicher Bestandteil. Welche Kompetenzen dabei gefördert und gefordert werden, hängt selbstverständlich von der konkreten Unterrichtsgestaltung ab. Hier gibt es ein weites Spektrum, weil es sehr unterschiedliche Unterrichtsgestaltungen und Auffassungen von realitätsbezogenem Mathematikunterricht gibt. Zum Beschreiben des Modellierens werden in der Literatur häufig Grafiken zum Modellierungskreislauf verwendet, in denen es von der Realität zum Realmodell, zu Berechnungen, zu Interpretationen und zurück zur Realität geht - und von dort so oft wie nötig oder sinnvoll zu einem verbesserten Modell und einem neuen Kreislauf (am meisten zitiert werden Blum und Leiss 2007, weniger bekannt Maaß 1989)

Einige wichtige Fragen zur Modellierung bleiben im Unterricht aber in dieser Literatur oft unerwähnt, die für die tatsächliche Anwendung von Mathematik in der realen Welt zentral sind: Welcher Aspekt der realen, sozialen oder natürlichen Umwelt soll weshalb und mit welcher Zielsetzung optimiert werden? Wie wird „Realität“ erkannt und modelliert? Wer gibt den Auftrag, wer setzt die Ziele, wer entscheidet über die Akzeptanz von Ergebnissen? Werden ethische Konsequenzen der Veränderung der Realität aufgrund der erzielten Ergebnisse berücksichtigt? Wer trägt die Verantwortung für die Ergebnisse?

Wenn ich - unter anderem mit diesem Beitrag - dafür plädiere, den Realitätsbezug im Mathematikunterricht noch weiter als bisher auszubauen und jene philosophischen und soziologischen Fragen, die insbesondere am Beginn und am Ende eines Modellierungsprozesse unweigerlich auftauchen, auch im Unterricht selbst zu thematisieren, dann geht es mir darum, einen einmal eingeschlagenen Weg weiter voranzuschreiten und das Potenzial zur Verbesserung des Mathematikunterrichts durch noch mehr Realitätsbezug noch besser als bisher zu nutzen. Um es auch hier noch einmal zu betonen: Das strategische Ziel ist nicht, dass nur noch realitätsbezogen unterrichtet wird, sondern in jeder Schulklasse ab und zu - es geht um Vielfalt, nicht um Einseitigkeit. Die SchülerInnen sollen mehr über die verschiedenen Aspekte und Zugänge zur Mathematik erfahren!

Entscheidungen zu Projektbeginn

Auf jedem Fall muss vor dem Beginn von Berechnungen im Zuge einer Modellierung eines Aspektes der Realität entschieden werden, was erreicht werden soll. Auf dem Wege zu dem Ausrechnen, welches im üblichen Mathematikunterricht im Zentrum steht, müssen ganz viele wichtige Entscheidungen gefällt werden: Welcher Aspekt der Realität soll thematisiert werden? Mit welcher Absicht soll etwas modelliert werden? Soll z.B. Zeit, Geld, Material oder Energie gespart werden? Wer soll etwas davon haben, wenn die Modellierung erfolgreich ist? Konkret: Wenn eine Ampelsteuerung optimiert wird, wer soll Zeit sparen bzw. sicherer unterwegs sein: Die Autofahrer, die Radler, die Fußgänger? Manchmal ist das Optimum für die eine Gruppe nachteilig für eine andere Gruppe. Wenn die Ampeln an der Straße vor der Schule so geschaltet sind, dass der Durchgangsverkehr möglichst schnell und ohne Stau fahren kann, trägt das nicht notwendig zur Sicherheit der Schulkinder bei. Wenn an der Fußgängerampel vor der Schule sehr lange Grünphasen für die SchülerInnen geschaltet werden, gibt es längere Wartezeiten für Autos und vielleicht einen Stau. Kurz: Es gibt nicht „das Optimum", sondern verschiedene für unterschiedliche Interessenten - und vielleicht einen guten Kompromiss.

Aus dem Alltag ist den meisten SchülerInnen solch eine Erfahrung durchaus bewusst; das Leben in sozialen Gemeinschaften wie Familien oder als Mitglied einer Jugendgruppe erfordert laufend Kompromisse. Mathematik ist aber für die meisten Menschen so strickt von der Realität getrennt, dass sie völlig objektiv erscheint und es ganz unerwartet ist, wenn an der entscheidenden Schnittstelle zur Realität der soziale Alltag, eine Struktur von Macht und Interesse sichtbar wird. Gehört das in den Mathematikunterricht? Selbstverständlich, es ist ein notwendiger Schritt auf dem Wege zur umfassenden Kompetenzentwicklung! Die übliche Beschränkung des Mathematikunterrichts auf das Ausrechnen von gestellten Aufgaben verhindert einen solchen Schritt zu mehr Kompetenz oder - mit anderen Worten - zur Erreichung allgemeiner Lehrziele, wie sie in den allgemeinen Teilen von Lehrplänen formuliert sind.

Die typische Struktur einer Mathematikaufgabe in Schule und Hochschule sieht etwa so aus: „Gegeben ist… Berechne…!“ Im Hinblick auf diese Struktur spielt es keine Rolle, ob die Länge von zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks gegeben ist, aus denen dann die Länge der dritten Seite auszurechnen ist oder ob eine Menge mit einer gegebenen Verknüpfung darauf zu überprüfen ist, ob es sich hier um eine Gruppe handelt. Obwohl im Angesicht elektronischer Denkwerkzeuge immer mehr Zweifel daran geäußert werden, dass es sinnvoll ist, so viel Zeit wie bisher üblich mit dieser Art Übungsaufgabe zu verbringen, ist das nicht der Punkt, über den ich hier laut nachdenken möchte. Hinter dem „gegeben ist…“ verschwindet jede Sinnfrage, der Sinn dieser Art Aufgabe besteht im Üben, im Lernen für den nächsten Test und vielleicht im Verstehen des Algorithmus. Vielleicht? Üben allein reicht in der Regel nicht, um die dazugehörige Mathematik zu verstehen.

Verantwortung für Ergebnisse und Modellierungsfolgen

Wenn in einer Schulklasse die Entscheidung gefällt wurde, dass nach dem x-ten Durchlauf das gewünschte Ergebnis erreicht wurde oder es auch umgekehrt mit weiteren Durchläufen und unter Berücksichtigung beschränkter Möglichkeiten vermutlich nicht besser wird, selbst wenn noch einige Durchläufe stattfinden, steht ein Resultat im Raum. Im Hinblick auf die gewünschte Kompetenzentwicklung ist es sehr wichtig, den Entscheidungsprozess über das Ende, das Aufhören, in der Klasse zu üben und die tatsächliche Entscheidung auch durch die Klasse selbst fällen zu lassen. Auf dem Wege dorthin kann über Kriterien für solche Entscheidungen nachgedacht werden und insgesamt gelernt werden, wie rationale und demokratische Entscheidungen getroffen werden sollen.

Wenn zur Modellierung ein relevantes und interessantes Thema gewählt wurde, ist das Ergebnis von weit größerem Interesse als üblich. Das Ergebnis soll etwas über die Wirklichkeit aussagen, einen Beitrag dazu leisten, sie besser zu verstehen und im gewünschten Sinne zu verbessern. Wenn etwa überlegt werden sollte, wie viel Farbe zum Ausmalen des Klassenzimmers gebraucht wird und das Klassenzimmer tatsächlich neu ausgemalt wird, ist die Freude groß, wenn tatsächlich genau die passende Menge Farbe gekauft wird. Wenn für einen Elternabend selbst gebackener Kuchen und Erfrischungsgetränke bereitgestellt werden sollen, ist das Erfolgserlebnis vielleicht sogar noch nachhaltiger, wenn alles zur Zufriedenheit der Eltern gelungen ist. In solchen Fällen erleben die SchülerInnen etwas sehr Ungewohntes für typischen Mathematikunterricht. Ihr mathematisches Bemühen hat reale Konsequenzen, die über Lob oder Tadel und eine Note deutlich hinausgehen!

Was aber passiert, wenn das Modell nicht so gut funktioniert? Wenn die Eltern sich nach dem Elternabend darüber beschweren oder lustig machen, dass die Planung wohl nicht so gut war, weil schon bald kein Kuchen mehr vorhanden war? Objektiv ist das sicher nicht so schlimm, subjektiv kann das die SchülerInnen ganz schön treffen. Sehr schnell wird dann die Frage gestellt, wer denn in welcher Weise für das unzureichende Resultat verantwortlich ist. Wenn die Lehrkraft diese Frage bewusst über das Niveau von schnellen - und nutzlosen - Schuldzuweisungen hinaushebt, kann daraus einiges für weitere Modellierungen gelernt werden. Bisweilen ist die Suche nach dem tatsächlichen Fehler, den Ursachen für ein unbefriedigendes Modellierungsergebnis sehr schwer und lehrreich. Gab es irgendwo einen Rechenfehler? Das lässt sich in der Schule meist am einfachsten überprüfen; bei Projekten aus der Industriemathematik ist das oft viel aufwendiger. Wo lagen wir mit unseren Modellannahmen und Auswahlentscheidungen nicht gut? Haben wir im Beispiel den Hunger der Eltern völlig unterschätzt? Haben wir so gut schmeckende Kuchen gebacken, dass nicht nur einige aus Höflichkeit etwas probiert haben, sondern alle Anwesenden gern etwas mehr essen wollten? In dem Fall können wir lernen, dass ein gutes Angebot eine vorher nicht vorhandene Nachfrage schafft. Das erleben wir auch, wenn eine Umgehungsstraße um den Ort X gebaut wird, oder ein Sonderangebot im Schaufenster oder Internet angepriesen wird. Plötzlich fahren insgesamt mehr Autos auf der Straße, die am Ort X vorbeiführt und viele Menschen meinen, den als Sonderangebot angepriesenen Artikel zu brauchen. Welche eine Erfahrung ist das für den Mathematikunterricht, in dem es normalerweise wenn überhaupt nur eine exakte Lösung gibt. Wo kommt es im Mathematikunterricht außer im Themengebiet „Systemdynamik“ vor, dass die Lösung einer Aufgabe Rückwirkungen auf die Aufgabenstellung hat?

Literatur

Blum, W., Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example “Filling up”. In Haines et al. (Eds.), Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing

Maaß, J.: (1990) Mathematische Technologie = sozialverträgliche Technologie? Zur mathematischen Modellierung der gesellschaftlichen "Wirklichkeit" und ihren Folgen, in: R. Tschiedel (Hrsg.): Die technische Konstruktion der gesellschaftlichen Wirklichkeit, Profil-Verlag München.

Elisabeth MANTEL, Erfurt

Räumliche Lagebeziehungen und Kartenverständnis

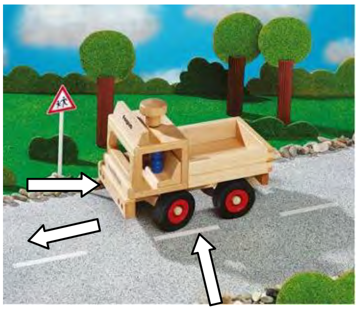
Häufig nutzt man Karten und Pläne, um sich in einer unbekannten Umgebung zu Recht zu finden. Auch im Zeitalter von Navigationsgeräten und GPS kommt man nicht ohne Lagepläne aus. Ob in der Stadt, im Museum oder im Zoo, für die Orientierung sind nicht nur Wegweiser nützlich, sondern ebenfalls Lagepläne. Jede Innenstadt stellt Lagepläne für die Besucher auf, damit diese sich besser orientieren können.

In einem Forschungsprojekt zur räumlichen Orientierung gehe ich folgenden Fragen nach:

– Wie verstehen und verwenden Grundschulkinder Lagebeziehungen bei Orientierungsaufgaben?
– Wie gehen Lehrer mit Lagebeziehungen bei Orientierungsaufgaben um?

Konkret geht es um räumliche Beziehungen und um räumliche Orientierung, zwei Komponenten des Fünf-Komponenten-Modells der Raumvorstellung nach (Maier 1999, S. 50–51).

Die **räumlichen Lagebeziehungen**, die im Projekt einbezogen werden, sind die Orientierungsbegriffe links-rechts, oben-unten, vorn-hinten, zwischen und neben und verwandte Wörter dazu (Senftleben 2008, S. 38). Diese Begriffe werden im Alltag und in der Mathematik verwendet, um Positionen oder Wege zu beschreiben. Dabei ist dies nicht immer so einfach wie es auf den ersten Blick scheint. Wo ist auf diesem Bild vorn (siehe rechts)? Ist vorn dort, wo das Lastauto hinfahren wird? Ist vorn die Vorderseite des Lastautos? Ist vorn der Vordergrund des Bildes, wenn man sich als Betrachter mit einbezieht? Häufig werden Lagebeziehungen sowohl im Alltag als auch im Mathematikunterricht einfach verwendet ohne über Bezugssysteme zu sprechen. Meist ist das Verständnis das Gleiche, doch manchmal kommt es zu Verwirrung oder Missverständnissen. Dies ist nicht nur bei Grundschülern, sondern auch bei Lehramtsstudierenden zu beobachten.



Eine **Karte** ist ein verebnetes maßstabsgebundenes, generalisiertes und inhaltlich begrenztes Modell räumlicher Informationen. (Hüttermann et. al. 1996) Ein **Plan** ist ebenfalls eine Karte gemäß dieser Definition, allerdings mit einem deutlich kleineren Ausschnitt aus der Erdoberfläche, wo die Problematik der Verebnung vernachlässigt werden kann.

Eckenhausen

Im Zahlenbuch in Klasse 1 und in Klasse 2 ist die Aufgabe „Eckenhausen" enthalten (Das Zahlenbuch 2012b, S. 84, Das Zahlenbuch 2012a, S. 106). Eckenhausen ist eine künstliche Stadt, in der alle Straßen senkrecht oder parallel verlaufen. Ziel ist es, Wege in dem Plan beschreiben oder nachvollziehen zu können, Wegstücke zu zählen und verschiedene Wege zu betrachten. Wenn man Kinder bei Orientierungsaufgaben beobachtet, fallen Punkte auf, an denen leicht Schwierigkeiten entstehen. Hierzu zwei Bespiele:

Zweitklässler bauen eine Geo-Stadt und beschreiben Wege darin. Vier Kinder sitzen um den Gruppentisch und wissen plötzlich nicht mehr, wo „vorn" ist, denn sie beschreiben einen Weg für den Nachbarn, der über Eck oder gegenüber sitzt. Aus welcher Sicht soll beschrieben werden? Aus der eigenen Sicht oder aus Sicht des Partners?

Bei Wegbeschreibungen am Plan fallen unterschiedliche Vorgehensweisen der Kinder auf. Teilweise wird mit bewegungsgebundenem Richtungssystem beschrieben, also so, wie man sich selbst auf dem Plan entlang bewegen würde; teilweise wird mit kartengebundenem Richtungssystem beschrieben, also mit Hilfe der Richtungsbezeichnungen oben, unten, rechts, links, wie man diese verwendet in der zweidimensionalen Ebene des Plans (Walther 2008).

Das Zahlenbuch ist eines von ca. 25 zugelassenen Mathematik-Lehrwerken je Klassenstufe in Thüringen. Wie greifen andere Schulbücher die Inhalte Lagebeziehungen und räumliche Orientierung auf? Dies wird das Forschungsprojekt ebenfalls analysieren.

Curricula

Im Mathematikunterricht sind Lagebeziehungen, Orientierung im Raum und auf Plänen Lehrplanziele (siehe z.B. Thüringer Ministerium für Bildung 2010a, S. 17). In den Bildungsstandards finden wir unter der Rubrik „sich im Raum orientieren" folgende Kompetenzen, die im Verlauf der Grundschule erworben werden sollen: über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen, räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten) (Konferenz der Kultusminister der

Länder in der BRD 2004, S. 10). Wege und Pläne sind ebenfalls Themen im Sachunterricht. Exemplarisch findet man im Lehrplan für Heimat- und Sachkunde der Grundschule in Thüringen ganz analoge Kompetenzen zu den o.g. Kompetenzen des Mathematikunterrichts (Thüringer Ministerium für Bildung 2010b, S. 17).

Sachunterricht

Bei der "Einführung in das Kartenverständnis" werden Grundrissdarstellung, Maßstab, Vereinfachung (Generalisierung), Orientiertheit (Einnordung der Karte, Windrose), Verebnung (Darstellung der dritten Dimension) behandelt (Hüttermann 1998, S. 19ff). Es gibt verschiedene Methoden, wie dies geschehen kann:

Das *synthetische* Verfahren baut die für das Verständnis von Plan und Karte notwendigen grundlegenden Einsichten und Erkenntnisse systematisch und in kleinen, logisch aufeinander folgenden Einzelschritten auf. Der Ablauf verläuft etwa in folgenden Stufen: Der Grundriss des Klassenzimmers und das Schulhaus. Das Schulviertel oder irgendein markanter Ausschnitt aus einem Ortsplan – der Marktplatz, die Hauptstraße, die Kirchs mit Umgebung. Das Dorf (Ortsplan). Das Dorf mit seiner näheren Umgebung. Die Gemarkung. Der Kreis. (Hüttermann 1998, S. 45f)

Das *genetische* Verfahren führt die Kinder zu einer Kartendarstellung, die ganz dem Raumerleben und der Raumdarstellung des Kindes entspricht. Die Kinder durchlaufen die wichtigsten Stufen der Kartographie im Sinne des biogenetischen Grundgesetzes. Die Wegekarte als Kinderzeichnung bildet in der Regel die Anfangsstufe. Die abstrakte geographische Karte wird in der Grundschule überhaupt noch nicht eingeführt (Hüttermann 1998, S. 46).

Das *analytische* Verfahren stellt den fertigen Plan oder die geographische Karte der erlebten Wirklichkeit gegenüber und führt so zu einer Deutung aus der Eigenerfahrung heraus. Dabei werden die verschiedenen Zeichen innerhalb des Gesamtzusammenhangs erfasst und gedeutet. Die vorausgehende Erkundung des in Plan oder Karte dargestellten Landschaftsausschnitts ermöglicht dem Schüler eine weitgehend selbstständige Analyse der Kartendarstellung und lässt sie gleichzeitig auch den entsprechenden Raum neu strukturieren. (Hüttermann 1998, S. 46)

Nur aus diesen drei Methoden ergibt sich ein Gesamtbild für das Kartenverständnis. Vom Nahen zum Fernen ist der Weg des synthetischen Verfahrens. Umgekehrt von der Ferne zur Nähe geht der Weg des analytischen Verfahrens. Beim genetischen Verfahren werden Kinderzeichnungen in den Mittelpunkt gestellt. Es werden ihre Erfahrungen genutzt und weiterentwickelt, um das Kartenverständnis nach und nach aufzubauen. Wegebilder und Pläne zeichnen Kinder schon vor der Schule (Bargmann 2009, S. 9)

Geschichte

Ein Blick in die Geschichte der Karten (Barber 2006) hilft beim Verständnis der Kartenentwicklung und unterstützt die Entwicklung des Kartenverständnisses. Hieraus gilt es, Kriterien zu entwickeln, um Darstellungen wie Eckenhausen bewerten zu können.

Forschungsprojekt

Im konkreten Forschungsprojekt sollen Zweitklässler untersucht werden mit einer ähnlichen Aufgabe wie Eckenhausen. Werden kartengebundene Wegbeschreibungen leichter verstanden als richtungsbezogene Wegbeschreibungen? Wie beschreiben Kinder selbst Wege in einem solchen Plan? Hat das verwendete Lehrbuch einen Einfluss? Die Untersuchung erfolgt in Klassentests und ausgewählten Einzelinterviews in Thüringen. Parallel zu den Schüleruntersuchungen sind Interviews mit den LehrerInnen zum Thema räumliche Orientierung im Mathematikunterricht geplant.

Literatur

Barber, Peter (2006): Das Buch der Karten. Meilensteine der Kartografie aus drei Jahrtausenden. Lizenzausg. Darmstadt: Wiss. Buchges.

Hüttermann, Armin (1998): Kartenlesen - (k)eine Kunst. Einführung in die Didaktik der Schulkartographie. 1. Aufl. München: Oldenbourg (Didaktik der Geographie).

Maier, Peter Herbert (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen. Pädag. Hochsch, Donauwörth, Freiburg (Breisgau).

Senftleben, Hans-Günter (2008): Geometrische Figuren exakt beschreiben. In: *Grundschule Mathematik* (18), S. 36–39.

Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (Hg.) (2010a): Lehrplan für die Grundschule und für die Förderschule mit dem Bildungsgang Grundschule. Mathematik.

Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (Hg.) (2010b): Lehrplan für die Grundschule und für die Förderschule mit dem Bildungsgang Grundschule. Heimat- und Sachkunde.

Walther, Gerd (2008): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.

Bargmann, Barbara (2009): Wichtelwelten und Waldkarten. Der Wald als Erlebnis- und Lernraum. In: *weltwissen Sachunterricht* (1), S. 10–12.

Das Zahlenbuch. Klasse 2 (2012a). 1. Aufl. Stuttgart, Leipzig: Klett.

Das Zahlenbuch. Klasse 1 (2012b). 1. Aufl. Stuttgart, Leipzig: Klett (Mathe 2000).

Michael MARXER

Flexibel mit Dezimalbrüchen rechnen – Dezimalbrüche verstehen

Dezimalbrüche werden von Schülerinnen und Schülern bisweilen nicht als Brüche (an)erkannt, weil sie nicht die äußere Form haben, die sich für einen Bruch „gehört“. Gleichwohl knüpft ein Verständnis von Dezimalbrüchen und der erweiterten Stellenwerttafel an Grundvorstellungen für Brüche an. Der Beitrag stellt typische Aufgabenformate vor, die auf die Verbindung von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen fokussieren, indem der flexible Wechsel zwischen diesen Darstellungen Vorteile beim Rechnen erbringt.

Wo liegt das Problem?

Die Aufgabe 2,4 · 0,5 erscheint auf den ersten Blick als sehr einfach, weil sie problemlos im Kopf gelöst werden kann – die Hälfte von 2,4 ist 1,2. Die Realität liefert jedoch ein anderes Bild: Einer Untersuchung (Wittmann 2012) zufolge wird diese Aufgabe von weniger als 40 % der Schülerinnen und Schüler an Haupt- und Realschulen richtig gelöst.

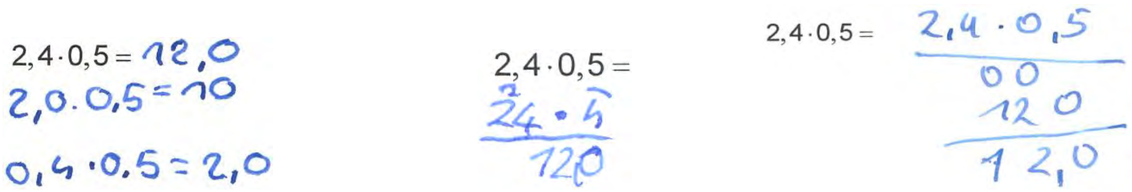


Abb. 1

Es dominieren schriftliche oder halbschriftliche Lösungen (Abb.1), obwohl andere Lösungsansätze viel nahe liegender sind, sei es, dass 0,5 auch als ½ geschrieben werden kann, dass · 0,5 gleichbedeutend ist mit : 2 oder dass das Ergebnis kleiner sein muss als 2,4. Sie rechnen automatisiert und dementsprechend mit *Ziffern*, wodurch ihnen der Blick auf die *Zahlen* verstellt wird, so dass deren spezifische Eigenschaften nicht zum Tragen kommen.

Den betreffenden Schülerinnen und Schülern hilft es nun wenig, wenn nur die *Anzahl* der Übungsaufgaben erhöht wird. Im Gegenteil: Auftretende Fehler können sich sogar einschleifen und verfestigen. Vielmehr muss die *Qualität* der Aufgaben geändert werden: Es bedarf eines Angebots variantenreicher und kognitiv aktivierender Aufgaben, die den Blick auf die gegebenen Zahlen und ihre besonderen Eigenschaften lenken. Auf diese Weise sollen die Schülerinnen und Schüler sowohl ein flexibles, aufgabenadäquates Rechnen erlernen als auch ein konzeptuelles Verständnis von Dezimalbrüchen erwerben.

Die Dezimalbruchschreibweise verstehen

Jeder Dezimalbruch kann im Sinne der Grundvorstellung *Bruch als Teil eines Ganzen* unmittelbar als gemeiner Bruch gelesen werden. 0,6 beispielsweise lässt sich interpretieren als 6 von 10 Teilen oder 0,63 als 63 von 100 Teilen. So verstanden erscheinen Dezimalbrüche lediglich als eine andere Schreibweise für Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist. Anders als bei gemeinen Brüchen ist bei Dezimalbrüchen die Gesamtzahl der Teile, in die das Ganze zerlegt wird, jedoch nur implizit gegeben: Sie muss indirekt aus der Anzahl der Nachkommastellen erschlossen werden. Während das Wissen um die Gesamtzahl der Teile bei einfachen Brüchen wie 0,6 oder auch noch 0,63 häufig automatisiert und damit abrufbar ist, können vorangestellte Nullen oder Endnullen wie bei 0,063 oder 0,630 erhebliche Probleme bereiten (und zu den bekannten Fehlern beim Umwandeln von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche führen, vgl. Padberg 2009, Wartha/Wittmann 2009).

Eine zweite Möglichkeit, Dezimalbrüchen eine Bedeutung zu geben, erfolgt über die Stellenwerttafel. Wird 0,526 als Summe von Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln,… in der Form gemeiner Brüche geschrieben, so ergibt sich jeweils unmittelbar die Darstellung in der Stellenwerttafel. Auf diese Weise erhalten die Ziffern eines Dezimalbruchs eine inhaltliche Bedeutung. Hierbei werden die Nachkommastellen *einzeln* betrachtet, sie werden wirklich *stellenweise* gedeutet, was auch die Sprechweisen „null Komma fünf zwei sieben" oder „null Komma null sechs drei" widerspiegeln. Diese Betrachtung ist universell tragfähig, hat aber den Nachteil, dass durch das ziffernweise Arbeiten der Blick auf die Nachkommastellen als Gesamtheit verlorengehen kann. So lassen sich die Größenordnung eines Dezimalbruchs und allgemeiner seine Beziehung zu gemeinen Brüchen häufig nicht mehr auf den ersten Blick ausmachen.

Aufgabenformate

Bei den im Folgenden vorgestellten Aufgaben erbringt das Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen einen massiven (Zeit-)Gewinn und bewahrt gegenüber dem ziffernweisen Rechnen den Blick für die Größenordnungen von Zahlen und Ergebnis.

Typisch für diese Aufgabenformate ist, dass sie immer wieder andere kognitive Herausforderungen mit sich bringen. Die bekannten Probleme klassischer Automatisierungsübungen wie das Einschleifen falscher oder suboptimaler Lösungsverfahren (vgl. Wartha/Wittmann 2009) sollen damit vermieden werden.

Ergebnisgleiche Aufgaben finden:

$77777 \cdot 0{,}5$	$77777 \cdot \frac{1}{3}$	$77777 : 5$	$77777 \cdot 2$
$77777 \cdot 0{,}2$	$77777 : 2$	$77777 \cdot \frac{1}{5}$	$77777 \cdot 5$
$77777 \cdot 0{,}3$	$77777 : 3$	$77777 \cdot \frac{1}{2}$	$77777 \cdot \frac{3}{10}$

Das Suchen ergebnisgleicher Aufgaben beruht hier auf dem Erkennen wirkungsgleicher Operationen, weil der erste Faktor bei allen Aufgaben derselbe ist. Die relativ große Zahl 77777 soll die schriftliche Multiplikation unattraktiv machen. Wenn auch der Einsatz des Taschenrechners vermieden werden soll, kann diese Zahl auf 12 Stellen vergrößert werden.

Aufgaben nach günstigen Lösungswegen sortieren:

$0{,}5 \cdot 2$	$48 : 0{,}5$	$64 \cdot 1{,}5$	$\frac{3}{4} : 0{,}75$
$25 \cdot 0{,}73$	$0{,}25 \cdot 3$	$12{,}5 \cdot 7{,}3$	$1{,}5 : \frac{3}{4}$
$1 : 0{,}25$	$7{,}3 \cdot 6{,}9$	$0{,}25 \cdot 100$	$\frac{1}{2} \cdot 1{,}5$

Hier besteht das Ziel darin, einen aufgabenadäquaten - also die Besonderheiten der jeweils gegebenen Zahlen nutzenden – Rechenweg finden. Verhindert werden soll, dass voreilig ausschließlich auf die schriftlichen Multiplikation zurückgriffen wird. Es gilt, „den Rechendrang aufzuhalten" (Schütte 2002). Ein Ansatz hierzu ist das Sortieren von gegebenen Aufgaben nach günstigen Lösungswegen:

- Ich „sehe" das Ergebnis oder weiß es auswendig.
- Eine kleine Umformung hilft entscheidend weiter, damit die Aufgabe im Kopf gelöst werden kann. (Beispiele hierfür sind das Umwandeln eines Bruchs in einen Dezimalbruch oder umgekehrt, s. oben).
- Diese Aufgabe kann ich nicht anders lösen, hier muss ich wirklich (schriftlich) „rechnen".

Den Wert des Produkts mit möglichst geringem Aufwand bestimmen:

$2{,}4 \cdot 0{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}05$	$2{,}4 \cdot 5$	$24 \cdot 0{,}5$	$0{,}24 \cdot 0{,}5$
$2{,}4 \cdot 0{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}25$	$2{,}4 \cdot 0{,}125$	$2{,}4 \cdot 2{,}5$	$2{,}4 \cdot 0{,}375$

Der Wert einzelner Produkte kann mühelos im Kopf bestimmt werden. Die Ergebnisse weiterer Aufgaben lassen sich aus den Einstiegsaufgaben ableiten, ohne dass aufwändig halbschriftlich oder schriftlich gearbeitet werden müsste. Die Fragestellung lautet jeweils: Welche der Aufgaben kann ich besonders einfach lösen? Hierzu müssen die *Zahl*beziehungen innerhalb einer Aufgabe betrachtet werden. Auf welche Weise komme ich geschickt zu den Lösungen der anderen Aufgaben? Hierfür sind die Zahlbeziehungen zwischen den Aufgaben – also die *Aufgaben*beziehungen – relevant.

Förderung des Zahlenblicks

Den beschriebenen Aufgabenformaten liegt die Überzeugung zugrunde, dass das eigentliche *Rechnen* in Zeiten des Taschenrechners und anderer technischer Hilfsmittel auch bei Dezimalbrüchen nur eine geringe Alltagsbedeutung besitzt. Deshalb wird es hier anders akzentuiert: Das Rechnen mit Dezimalbrüchen bildet den Anlass, dass Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der für sie neuen Zahlen erfahren können. Beim Rechnen beschäftigen sie sich mit Dezimalbrüchen, sie können deren Eigenschaften erfahren und verstehen. Insbesondere können sie die Verbindungen zu gemeinen Brüchen und die dahinter stehenden Grundvorstellungen vertiefen.

Diese Sicht auf das Rechnen mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen wird auch als *Förderung des Zahlenblicks* verortet (vgl. Marxer/Wittmann 2011; 2012). Sie zielt weniger auf das Rechnen als solches, denn auf das *Reflektieren von Rechenwegen*, also auf eine Meta-Ebene zum eigentlichen Rechnen.

Literatur

Marxer, Michael / Wittmann, Gerald (2013): Auch Dezimalbrüche sind Brüche – Mit Dezimalbrüchen flexibel rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. Erscheint in: Praxis der Mathematik Juni 2013. Themenheft: Grundvorstellungen zu Brüchen.

Marxer, Michael / Wittmann, Gerald (2012): Den Stellenwerten eine Bedeutung geben. Dezimalbrüche multiplizieren jenseits der Kommaverschiebungsregeln. In: mathematik lehren 171, S. 44–48

Marxer, Michael / Wittmann, Gerald (2011): Förderung des Zahlenblicks – Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. In: Der Mathematikunterricht 57 (2), S. 25–34

Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (4. Auflage)

Wartha, Sebastian / Wittmann, Gerald (2009): Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Beltz, Weinheim, S. 73–108

Schütte, Sybille (2002): Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks. In: Praxis Grundschule 25 (2), S. 5–12

Patrick MEIER, Basel

Mathematik und Computer

Digitale Medien sind aus dem beruflichen und persönlichen Alltag nicht mehr wegzudenken. Die Computernutzung im mathematischen Schulalltag in Schweizer Schulen ist jedoch noch zu wenig integriert. Computer oder Tablets könnten viele Vorteile für einen modernen Mathematikunterricht mit Alltagsbezügen bieten. Dazu braucht es ein persönliches ICT-Einsatzkonzept, eine bereitgestellte ICT-Infrastruktur und das Wissen, welche Software sich für die Feinplan-Zielerreichung optimal einsetzen lässt.

In einer Untersuchung zum Einsatz von eLearning im Unterricht an Schulen des Kantons Luzern (Schweiz) (Meier, Masterarbeit Evaluation und Weiterentwicklung eLearning im Kanton Luzern, 2007) wurden Experten zum Thema ICT-Einsatz im Unterricht befragt. Folgende Erkenntnisse konnten aus den Expertenrückmeldungen gewonnen werden:

1. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten gerne mit dem Medium Computer.
2. 1/3 der Investitionskosten müssten in die Ausbildung der Lehrpersonen investiert werden.
3. Es ist eine Pflicht heutiger Lehrmittel, eLearning-Elemente als Unterstützung zu entwickeln (offline und/oder online)

Auf Grund der Affinität der Lernenden für die Arbeit mit dem Computer ist es angebracht, dies auch für Unterrichtselemente des Mathematikunterrichts auszunutzen und einen Einsatz von Lehrpersonenseite her zu planen. Lehrpersonen drücken ihre Unsicherheit insofern aus, dass zum Teil Unsicherheiten im Umgang mit technischen Medien bestehen und das Wissen um die „richtige“ Wahl geeigneter Software zu wenig ausgeprägt ist. Hier muss die Lehrpersonenweiterbildung Akzente setzen. Zu den Investitionskosten von Hard- und Software gehören auch entsprechende Ausbildungskosten der Lehrpersonen und des technischen Personals. Ein wichtiger Eckpunkt ist ein didaktisch-methodisches ICT-Einsatzkonzept für den Fachbereich Mathematik. Die medien-didaktische Forschung Mathematik hat dahingehend Nachholbedarf, als „best of“ Varianten zu mathematischen Themen aufzuzeigen sind.

Zwei nachfolgende Forschungsergebnisse im Zusammenhang mit Computer und Mathematikunterricht zeigen auf, wie der ICT-Einsatz geplant werden könnte.

ELearning und Mathematikdidaktik: (2011)

Mit einem erziehungswissenschaftlichen Forschungsdesign, mit einem Pre-, Haupt- und Posttest und einer Kontroll- und Experimentalgruppe (N=17) wurde folgender Forscherfrage nachgegangen: Erreichen Lernende in einer mathematischen Übungslernumgebung der Experimentalgruppe „Computer“ bessere Resultate als Lernende einer Kontrollgruppe „Buch“ im Thema *„Üben von Flächen- und Raummassen“*. (Meier, Masterarbeit: Einsatz mathematischer Clips unter dem Kompetenzaspekt Erforschen und Explorieren, 2012) Obwohl die Gruppe „Computer“ bezüglich Rang- und Punkteverteilung im Gesamten bessere Resultate zeigte, konnte keine Signifikanz der Wirksamkeit eines Übungsverfahrens erkannt werden. Gleichwohl kann ein Vorteil für den Computereinsatz – auch in Übungsphasen – in Anlehnung an die Untersuchungen von M. Frey (Frey u.a. 2009) ausgemacht werden. Nach anfänglichem organisatorischem Mehraufwand, zeigte sich, dass weniger aufwändige inhaltliche Hilfe notwendig war, und der ICT-Einsatz somit zu einer zeitlichen Entlastung der Lehrperson beiträgt.

Das Projekt „VITALmaths“ (2012)

Die Clips aus dem Projekt VITALmaths entstammen aus einem gemeinsamen Forschungsprojekt der PH FHNW (Schweiz) und der Rhodes University Grahamstown (Südafrika). Gemäss Angaben verfolgt das Projekt VITALmaths das Ziel, *"visuelle Technologien für das selbstständige Lernen in Mathematik zu entwickeln und die Anwendungsbedingungen, die Effektivität und die Folgen dieser Technologien zu untersuchen, um eine nachhaltige Entwicklung des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik in Südafrika und in der Schweiz sicher zu stellen."* Entstanden sind kurze "Video Clip Animationen" (Linneweber-Lammerskitten, Schäfer, & Samson, VITAL Maths: Visual technologie for the autonomous learning of mathematics, 2009), welche mathematische Herausforderungen darstellen. Die Filme sind einfach strukturiert und nehmen mathematische Sachverhalte auf, welche die Lernenden einladen, selber auszuprobieren und mathematische Vorstellungen weiter zu entwickeln.

Das Projekt VITALmaths umfasst folgende Themenpunkte (Linneweber-Lammerskitten, VITALmaths - ein gemeinsames Forschungs- und Entwicklungsprojekt Schweiz Südafrika, 2009):

- Die Erstellung kurzer Video Clip Animationen
- Die Evaluation der Qualität und die Einschätzung der Wirksamkeit dieser Videoclips

- Einschätzung und Untersuchungen, ob ein Einsatz der Clips mit Hilfe von MP4-Geräten und Mobiltelefonen möglich ist (Zugang auch in abgelegenen Gegenden)
- Exploration von Einsatzmöglichkeiten der Videoclips in der Schweiz und in Südafrika
- Untersuchungen zur Akzeptanz und Wirksamkeit des Einsatzes von Videoclips innerhalb und ausserhalb des Mathematikunterrichts

Das methodische Einsatzkonzept ist einfach gehalten. Nach einem oder mehreren Visionierungs-Durchläufen mit einem Multimediagerät (Computer, Laptop, Handheald, …) sind die Lernenden eingeladen, die erlebten Erkenntnisse weiter zu entwickeln. Es soll den Lernenden möglich gemacht werden, alleine, in Partner oder Gruppenarbeit Aussagen der Clips zu bestätigen und im Sinne des Handlungsaspektes „Erforschen und Argumentieren“ des Schweizer „Lehrplan 21“ tätig zu werden.

Die Studie wurde an 14 Klassen der Sekundarstufe I und einer 6. Klasse mit N=308 an ausgewählten Schweizer Schulen durchgeführt. (Meier, Wirkungsstudie zum Einsatz mathematischer Clips unter dem Harmos Kompetenzaspekt Erforschen und Explorieren, 2012) Das Studiendesign beruhte auf einer Kontroll- und Experimentalgruppe. Es zeigte sich, dass sich ein signifikanter Unterscheid mit ($F(1,305)=16.288$; $p<.01$) in der Erreichung der Gesamtpunktzahl beim Abschlusstest ausweisen liess. Die Effektstärke betrug 0.051. Damit konnte der Einsatz der Clips aus VITALmaths aufzeigen, dass sich im Kompetenzaspekt Erforschen und Explorieren erfolgreich arbeiten lässt.

Welche Voraussetzungen bringen Studentinnen und Studenten im Zusammenhang ICT/Mathematik mit?

In einer Umfrage (Mai 2012, N=127) gaben 96% der Studentinnen und Studenten der PH FHNW und der PH Zürich an, über gute bis sehr gute Computerkenntnisse zu verfügen. Auf die Frage, ob die angehende Lehrperson Lernende beraten kann, wenn beim Einsatz des Computers im Mathematikunterricht Probleme entstehen waren 59% der Meinung, dies machen zu können. 31 % trauen sich dies zum Teil nicht zu. In der Lehrpersonenausbildung müssten auf Grund dieser Rückmeldungen in der fachspezifischen Medienkompetenz (hier im Fachbereich Mathematik) Ausbildungsschwerpunkte gesetzt werden.

Fazit

Die Voraussetzungen zum Einsatz von ICT im Fach Mathematik sind äusserst günstig. Es zeigen methodisch-didaktische Setttings gemäss beschriebener Forschungsdesigns, dass ein Einsatz erfolgreich durchgeführt werden kann. Weitere Forschungen zum Thema ICT und Mathematik müssen sich in den nächsten Jahren gezielt auf den Mehrwert ausrichten und im Sinne eines didaktischen „Best of“ ICT in Unterrichtssituationen eingebaut zu werden.

Literatur

(BLK), B.-L.-K. (1997). *Steigerung der Effizienz des mathematischen Unterrichts.* Abgerufen am 2010 von www.blk-bonn.de: http://www.blk-bonn.de/papers/heft60.pdf

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret.* Berlin: Cornelsen.

Erziehungsdirektorenkonferenz. (2011). *Arbeitspapier Grobstruktur Lehrplan 21.* EDK.

Erziehungsdirektorenkonferenz. (10. 08 2011). *Grundkompetenzen Mathematik.* Abgerufen am 10. 10 2011 von edudoc.ch: http://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf

Erziehungsdirektorenkonferenz, D. (28. Oktober 2011). *www.lehrplan.ch.* Abgerufen am 09. Dezember 2011 von lehrplan.ch: http://www.lehrplan.ch/sites/default/files/grobstruktur_lp21.pdf

Klieme, E. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards.* Berlin: Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF).

Linneweber-Lammerskitten, H., & Wälti, B. (2008). HarmoS Mathematik: Kompetenzmodell und Vorschläge für Bildungsstandards. *Beiträge zur Lehrerbildung (BZL), 3/26*, S. 326 - 337.

Linneweber-Lammerskitten, H., Schäfer, M., & Samson, D. (2009). *VITAL Maths: Visual technologie for the autonomous learning of mathematics.* persönliches Exemplar.

Meier, P. (1. Juli 2007). *Masterarbeit Evaluation und Weiterentwicklung eLearning im Kanton Luzern.*

Meier, P. (2012). *Masterarbeit: Einsatz mathematischer Clips unter dem Kompetenzaspekt Erforschen und Explorieren.* http://meierpatrick.ch/unterlagen/MA_120221_Meier%20Patrick.pdf.

Meier, P. (2012). Wirkungsstudie zum Einsatz mathematischer Clips unter dem Harmos Kompetenzaspekt Erforschen und Explorieren. *GDM Tagung.* Weingarten: GDM.

Alexander MEYER, Dortmund

Eine unterrichtspraktische Diagnose im Bereich Algebra? Chancen einer schülerzentrierten Diagnose auf Basis algebraischer Denkmuster

Eine Diagnose algebraischen Denkens kann dazu beitragen, den Unterricht zur Anbahnung algebraischen Denkens am aktuellen Verständnis der Schülerinnen und Schüler auszurichten und unterstützende Unterrichtsmaßnahmen umzusetzen. Eine solche Diagnose, die beispielsweise auf Basis von Schüleräußerungen (z.B. eine schriftliche Bearbeitung einer Aufgabe) vorgenommen wird, muss anhand geeigneter Indikatoren erfolgen: Ein Indikator wie „Anzahl der Fehler" gibt weniger Aufschluss auf das algebraische Denken, das einer Schüleräußerung zugrunde liegt, als etwa der Indikator „Schüler operiert mit einer Unbekannten" (vgl. dazu Keller, 2011). In diesem Aufsatz sollen Ergebnisse aus einem Promotionsprojekt vorgestellt werden, in dem Indikatoren für die Diagnose algebraischen Denkens gewonnen wurden.

1. Umsetzung mathematikdidaktischer Diagnostik

Mithilfe einer unterrichtlichen Diagnose soll das aktuelle Verständnis von Schülerinnen und Schülern zu einem Lerngegenstand ermittelt werden. Die im Rahmen einer solchen Diagnose entstehenden Schüleräußerungen müssen von der Lehrerin/vom Lehrer daraufhin befragt werden, was sie über das Verständnis der jeweiligen Schülerin/des jeweiligen Schülers aussagen. Hierfür braucht es Indikatoren: „[F]ür das zu beurteilende und nicht direkt beobachtbare Merkmal […][gibt es] eine Reihe von beobachtbaren Indikatoren (proximalen Merkmalen), mit deren Hilfe auf das zu beurteilende Merkmal geschlossen werden kann." (Helmke et al., 2004, S. 129). Die diagnostische Einschätzung etwa des algebraischen Denkens von Schülerinnen und Schülern braucht also eine Reihe von beobachtbaren Indikatoren, die es erlauben, auf dieses algebraische Denken (oder Teilbereiche davon) von Schülerinnen und Schülern zu schließen. Entlang dieser Indikatoren kann dann eine Förderung geplant werden, die das algebraische Denken voran bringen soll. Im Mathematikunterricht kann Diagnose und Förderung durch Diagnoseaufgaben und Lernaufgaben umgesetzt werden. Die Lernaufgaben werden entlang der indikatorgeleiteten Analyse von Schüleräußerungen, welche mithilfe von Diagnoseaufgaben gezielt gewonnen werden, konzipiert.

Dieser Aufsatz berichtet von einem Teilbereich des Promotionsprojekts des Autors. In diesem Promotionsprojekt wurde u.a. die Fragestellung adressiert, welche Denkmuster sich bei Schülerinnen und Schülern in problemhaltigen algebraischen Diagnoseaufgaben finden lassen und wie diese Denkmuster in Indikatoren für eine unterrichtpraktische Diagnose übersetzt werden können. In diesem Aufsatz soll kurz vorgestellt werden, wie diese Frage beantwortet wurde.

2. Methodologie der Studie

In der hier diskutierten Studie wurden Diagnoseaufgaben entwickelt, die der Datengewinnung zugrunde gelegt wurden. Diese Aufgaben wurden als offene Problemaufgaben konzipiert, da Schülerbearbeitungen zu diesen Aufgaben geeignet sind, Einblick in das individuelle mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern zu geben (Büchter & Leuders, 2009). Insgesamt wurden sechs Diagnoseaufgaben entwickelt, die das Anwenden algebraischer Symbolsprache herausfordern. Dabei war es möglich, zu den Diagnoseaufgaben mithilfe von generischen oder prototypischen Zahlen Zugang zu finden.

Die hier vorgestellte Studie wurde in vier 10. Klassen an norddeutschen Gymnasien mit Insgesamt 86 Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Die sechs Diagnoseaufgaben, die die oben gezeigten Merkmale erfüllen, wurden zu drei verschiedenen Diagnoseinstrumenten mit je zwei bis drei Aufgaben zusammengestellt. Die Schülerinnen und Schüler haben die Instrumente in Einzelarbeit bearbeitet. Etwa 2-3 Wochen später wurde mit 6 Schülerinnen und Schülern Interviews geführt. Diesen Interviews lag eine Diagnoseaufgabe zugrunde, die diese Probanden nicht in ihrem Diagnoseinstrument bearbeitet hatten, die aber Bestandteil anderer Diagnoseinstrumente in der schriftlichen Erhebung war. Die schriftlichen Daten wurden durch diese Interviews abgesichert.

Um Indikatoren für die Diagnose algebraischen Denkens zu gewinnen, wurde das Verfahren der Typenbildung zur Auswertung der Daten heran gezogen. Die Typenbildung erlaubt es, das Typische in beschränkten sozialen Handlungsräumen heraus zu arbeiten und dadurch „eine komplexe soziale Realität auf eine beschränkte Anzahl von Gruppen bzw. Begriffen [zu reduzieren][...], um sie [...] begreifbar zu machen.“ (Kelle & Kluge, 2010, S. 10f). Zugleich hat die Typenbildung eine theoriebildende Funktion: „Indem [Typologien] […] die zentralen Ähnlichkeiten und Unterschiede im Datenmaterial deutlich machen, regen sie die Formulierung von Hypothesen über allgemeine kausale Beziehungen und Sinnzusammenhänge an“ (Kelle & Kluge, 2010, S. 11). Das Verfahren der Typenbildung ist somit geeignet, Indikatoren für die aufgabenbasierte Diagnose algebraischen Denkens zu rekonstruieren.

3. Ergebnisse

Im Folgenden werden exemplarisch zwei von fünf Typen vorgestellt, die anhand der Daten in der hier diskutierten Studie rekonstruiert wurden (Typen entnommen aus Meyer, 2013a). Diese Typen könnten es Lehrerinnen und Lehrern ermöglichen, im Rahmen von unterrichtspraktischen Diagnosen indikatorgeleitet Schülerdokumente daraufhin zu analysieren, welche Ressourcen und Schwierigkeiten ihre Schülerinnen und Schüler zu einem Teilbereich algebraischen Denkens bereits mitbringen. An anderer Stelle wird prototypisch aufgezeigt, wie dieser Prozess der Diagnose und eine auf ihr aufbauende Förderung mithilfe der hier gezeigten Typen im Unterricht umgesetzt werden könnte (Meyer, in Vorb.).

Unsystematisches Zahlprobieren: Beim Denkmuster des Zahlprobierens benutzen Schülerinnen und Schüler Zahlen, um mit einem gegebenen Problem umzugehen. Durch Zahlen wird das vorliegende Problem vereinfacht: Entweder werden Zahlen in einen gegebenen algebraischen Ausdruck eingesetzt, um arithmetisch rechnen zu können, oder um ein gegebenes Problem zu betrachten (probierte Zahlen können zeigen, wie ein Problem im Einzelfall „funktioniert"). Die Zahl*ergebnisse*, die durch das Zahlprobieren in der Regel entstehen, werden mit Blick auf das Problem interpretiert, d.h. daraufhin befragt, was sie über das vorliegende Problem aussagen. Unsystematisch probierte Zahlen bieten keine Ressource, um für die Relationen, die vielleicht zwischen mathematischen Objekten bestehen (und die vielleicht sogar in den ursprünglich gegebenen (algebraischen) Ausdrücken des Problems dargestellt sind), sensibel zu werden.

Zahlen zur Explorierung: Bei diesem Denkmuster benutzen Schülerinnen und Schüler Zahlen, um zu explorieren, wie ein gegebenes algebraisches Problem beschaffen ist. Zentral scheint bei diesem Verwenden von Zahlen, dass die Struktur des gegebenen Problems sichtbar bleibt. Die Zahlen, die probiert werden, entfalten als prototypische oder generische Beispiele ihre Wirkung. Prototypische oder generische Beispiele erlauben es den Schülerinnen und Schülern, Beziehungen und Regelmäßigkeiten zu sehen. Dabei scheinen Schülerinnen und Schüler davon zu profitieren, dass sie sich mathematische Sachverhalte mithilfe von Zahlen besser bzw. auf natürlichere und gewohntere Weise vorstellen können. Dieses Arbeiten mit Zahlen könnte außerhalb von arithmetischen Problemstellungen weniger wirkungsvoll sein (was aber aufgrund der in der Studie benutzten Aufgaben nicht beobachtet werden konnte).

4. Diskussion und Fazit

Diagnose ist ein zentrales Mittel, um im täglichen Unterricht auf die individuellen Lernbedürfnisse der Schülerinnen und Schüler zu reagieren. Die hier vorgestellte Studie rekonstruiert Indikatoren, anhand derer Lehrerinnen und Lehrer in Diagnosen auf das algebraische Denken ihrer Schülerinnen und Schüler zurück schließen können. Es konnten fünf typische algebraische Denkweisen identifiziert werden. Diese typischen Denkweisen sind zusammen genommen eine prototypische didaktische Strukturierung, die die individuellen Diagnose- und Förderpraktiken von Lehrerinnen und Lehrern zum algebraischen Denken anleiten können.

Literatur

Büchter, A., & Leuders, T. (2009). Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen (4 Ausg.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Helmke, A., Hosenfeld, I., & Schrader, F.-W. (2004). Vergleichsarbeiten als Instrument zur Verbesserung der Diagnosekompetenz von Lehrkräften. In R. Arnold & C. Griese (Hrsg.), Schulleitung und Schulentwicklung (S. 119-144). Hohengehren: Schneider Verlag.

Hattie, J. (2009). Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement. New York: Routledge.

Kelle, U., & Kluge, S. (2010). Vom Einzelfall zum Typus: Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Keller, S. (2011). Beurteilungsraster und Kompetenzmodelle. In W. Sacher & F. Winter (Hrsg.), Diagnose und Beurteilung von Schülerleistungen (S. 143-160). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Meyer (2013). Diagnose algebraischen Denkens. Rekonstruktion typischer Denkmuster zur Strukturierung von unterrichtlicher Diagnostik. (bisher unveröffentlichte Dissertation). Voraussichtlich DIZ-Verlag Oldenburg, Oldenburg.

Meyer (in Vorb.). Indikatoren für die Diagnose algebraischen Denkens. Eine didaktische Rekonstruktion von unterrichtspraktischer Diagnose und Förderung in elementarer Algebra.

Wolfram MEYERHÖFER, Paderborn

Sind die Elemente der Stellenwerttafel Ziffern oder Das IQB als Herrscherin über die Stellenwerttafel

Für den IQB-Ländervergleich 2011 (Stanat u.a. 2012[1]) sind die verwendeten Aufgaben einer wissenschaftlichen Diskussion nicht zugänglich, aber es wurden fünf Beispielaufgaben publiziert. Hier werden einige grundsätzliche Probleme anhand der Aufgabe aus dem Bereich „Muster und Strukturen" diskutiert:

Du willst die Zahl 365 mit Plättchen in der Stellenwerttafel darstellen. Wie viele Plättchen brauchst du?

Es ist eine leere Stellenwerttafel angegeben und die Antwortalternativen

3 Plättchen, 14 Plättchen, 68 Plättchen oder 365 Plättchen.[2]

Als richtige Antwort wird „14 Plättchen" gewertet, gemeint ist damit, dass man die Zahl 365 als 3 Hunderter, 6 Zehner und 5 Einer darstellen kann. Dies ist korrekt. Alle anderen Antworten werden aber als „falsch" gewertet, obwohl weitere zwei Lösungen richtig sind: Die Zahl 365 lässt sich ebenso darstellen

- als 3 Hunderter und 65 Einer (also mit 68 Plättchen, davon 3 in der Hunderterspalte und 65 in der Einerspalte der Stellenwerttafel)
- und als 365 Einer (also mit 365 Plättchen in der Einerspalte der Stellenwerttafel).

In einem Mathematikunterricht, der Wert legt auf Stellenwertverständnis, werden die vom IQB als falsch bewerteten Antworten nicht nur geduldet, sondern sie werden sogar explizit herausgefordert. Die Schüler <u>sollen verstehen</u>, dass 365 nicht nur als 3 Hunderter, 6 Zehner und 5 Einer angesehen werden kann, sondern auch als 2 Hunderter, 16 Zehner und 5 Einer oder als 1 Hunderter, 26 Zehner und 5 Einer usw. – ebenso aber auch in jenen Formen, die vom IQB als falsch bewertet werden. Man spricht dabei von nichtkanonischen Darstellungsweisen. Die nichtkanonischen Schreibweisen helfen den Schülern nicht nur beim flexiblen Rechnen und beim Verständnis der schriftlichen Rechenverfahren – dort ist es sogar unabdingbar, dass man nichtkanonisch denken kann. Bei einem rein ziffrigen Ausfüllen der Stellenwerttafel wird kein Verständnis des

1 Das Literaturverzeichnis findet sich in der Datei zu diesem Text, die abgelegt ist unter: http://lama.uni-paderborn.de/personen/prof-dr-meyerhoefer.html

2 Aufgabe und Lösung vgl. unter dem Stichwort „Muster und Strukturen" bei „Aufgaben" bzw. „Lösungen": https://www.iqb.hu-berlin.de/laendervergleich/LV2011/Beispielaufgaben (Zugriff 24.12.2012)

Stellenwertprinzips gesichert. Man überträgt einfach die Ziffern in die Stellenwerttafel, ohne zu verstehen, dass die einzelnen Stellenwerte mit Bündeln unterschiedlicher Bündelungsstufe belegt sind. Die Kontrastierung mit nichtkanonischen Darstellungen ist ein wirksames Mittel, dies zu thematisieren. Die Konfrontation der Schüler mit nichtkanonischen Schreibweisen ist deshalb auch ein effektives Mittel um herauszufinden, ob sie verstehen, welche Mengen hinter den von ihnen verwendeten Begriffen stehen. So wird im Jenaer Rechentest (JRT) zum Beispiel gefragt:

Du hast 23 Einer. Wie viele Zehner kannst du daraus bilden?

Wie viele Einer sind in drei Zehnern gebündelt?

Wie viele Zehner sind in drei Hundertern gebündelt?

Nur mit solchen (und anderen) Fragen entwickelt und überprüft man Stellenwertverständnis. Das IQB zieht nun aber eine seltsam anmutende Grenze, es *verbietet* nämlich, solche Fragen innerhalb der Stellenwerttafel zu stellen. Das heißt aber, dass das IQB entweder jede verstehensorientierte Frage zum Stellenwertsystem im Unterricht verbieten möchte, oder aber es will eine strikte Trennung zwischen der Stellenwerttafel und allen anderen Darstellungsmitteln für Zahlen (außer den Zahlen selbst natürlich). Beides sind problematische Ansätze.

Was das IQB damit auch torpediert, ist eine unterrichtliche Debatte darüber, <u>warum</u> wir eigentlich unsere Zahlen ausschließlich mit Ziffern darstellen. Es wäre schließlich problemlos möglich, die durch die Zahl 365 dargestellte Menge auch durch die Zahldarstellungen 3|6|5 = 2|16|5 = 2|15|15 = 2|14|25 usw. oder 3.6.5 = 2.16.5 = 2.15.15 = 2.14.25 usw. darzustellen. Nur wenn im Unterricht mit nichtkanonischen Zahldarstellungen gearbeitet wird, wird es diskutierbar, dass es enorm vorteilhaft ist, eine eindeutige Zahldarstellung zu nutzen und dass mit der arabischen Notationsweise als „365“ eine eindeutige und leicht dechiffrierbare Darstellung für die Zahl erfunden worden ist.

Schüler, die einen verständnisorientierten Mathematikunterricht genossen haben und deshalb 68 Plättchen oder 365 Plättchen oder aber alle drei richtigen Antworten ankreuzen, erhalten vom IQB bei dieser Aufgabe keinen Punkt. Umgekehrt erhebt das IQB mit seinen Aufgaben den Anspruch, dass ein guter Unterricht ein Unterricht ist, der im IQB-Test zu vielen Testpunkten führt. Will ein Lehrer in diesen Tests gut abschneiden, so ist er gezwungen, der Denkweise des IQB zu folgen. Das heißt hier aber, statt eines verständnisorientierten Unterrichts einen verengten Unterricht zu halten, in dem Stellenwerttafeln nach einem schematischen Muster ausgefüllt werden – eine Fähigkeit, die in dieser Form kaum einen Nutzen hat. In einer

Stellungnahme des IQB

zu dieser Argumentation[3] vermerken Richter, Reiss, Stanat und Pant:

„In der Stellenwerttafel wird eine Dezimalzahl durch Einer, Zehner, Hunderter usw. dargestellt, wobei die Ziffern der einzelnen Dezimalstellen z.B. in Form von Plättchen in das jeweilige Feld (bezeichnet mit E, Z, H usw.) übertragen werden.

In der vorliegenden Aufgabe soll die Zahl 365 mit Plättchen in eine Stellenwerttafel eingetragen werden.

Folgt man dem Prinzip der Stellenwerttafel, legt man 5 Einer, 6 Zehner und 3 Hunderter, benötigt also insgesamt 5+6+3=14 Plättchen.“

Bei den oben dargestellten Lösungen

„vernachlässigt Meyerhöfer jedoch, dass die Zahl in einer Stellenwerttafel dargestellt werden soll. Die Stellenwerttafel bedingt, dass im Ergebnis die reguläre Dezimaldarstellung einer Zahl ablesbar sein soll, also nicht mehr als 9 Plättchen für jede Dezimalstelle verwendet werden. Übersteigt die Zahl der Plättchen den Wert 9, so muss ein Plättchen bei der nächstgrößeren Einheit ergänzt werden, denn die Elemente der Stellenwerttafel sind Ziffern, und nicht wie von Meyerhöfer angenommen, Zahlen. Bei korrekter Anwendung der Stellenwerttafel werden deshalb genau 14 Plättchen benötigt.

Ginge es bei der vorliegenden Aufgabe nicht um die Verwendung der Stellenwerttafel, sondern um unterschiedliche Formen der additiven Zerlegung der Zahl 365 in Einer, Zehner und Hunderter, so können verschiedene Antworten bei dieser Aufgabe als richtig bewertet werden. Das ist hier aber nicht der Fall. Die Aufgabe ist keineswegs fehlerhaft, sondern sie bildet vielmehr ein wichtiges Lernziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule und einen bedeutsamen Bildungsstandard ab.“

Zwei didaktische Positionen, obrigkeitliche Bearbeitung

Offensichtlich bestehen zur Art der Nutzung der Stellenwerttafel zwei gegensätzliche Positionen. Das IQB vertritt die Auffassung, dass in der

---

3 Dirk Richter, Kristina Reiss, Petra Stanat & Hans Anand Pant: Stellungnahme zur Pressemitteilung der Universität Paderborn zur Beispielaufgabe „Stellenwerttafel“ des IQB-Ländervergleichs 2011 in der Primarstufe. (vgl. Website IQB: http://www.iqb.hu-berlin.de/laendervergleich/LV2011/Bericht, Zugriff 24.12.2012)

Stellenwerttafel ausschließlich Ziffern eingetragen werden dürfen, dass die Stellenwerttafel also ausschließlich kanonisch genutzt werden darf. Ich vertrete hingegen die Position, dass es sogar *unabdingbar* ist, nichtkanonische Eintragungen vorzunehmen. Ich verweise zur Stützung dieser Position etwa auf Resnick (1983), Ross (1986) oder Gerster/Schultz (2004). Auch in Padbergs „Didaktik der Arithmetik“ sind laut der Position des IQB z.B. die Seiten 225, 227, 237, 238, 239, 259, 263 mit fehlerhaften bzw. unerlaubten Stellenwerttafel-Nutzungen versehen.

Nun bewegt es sich innerhalb wissenschaftlicher Normalität, dass es in einer Frage verschiedene Positionen gibt. Das IQB hätte die Aufgabe, nur Aufgaben zu verwenden, die verschiedenen didaktischen Positionen Raum lassen. Ein Problem ergibt sich dann, wenn das IQB selbst didaktische Position bezieht und den Konflikt strukturell in Diskriminierung auflöst. Schließlich treffen die IQB-Vergleiche Setzungen auf mehreren Systemebenen. Wer viele richtige Kreuze erzeugt, wird als guter Schüler, Lehrer, Schule, Bundesland dargestellt. Wer aber verstehensorientiert unterrichtet, fordert von seinen Schülern Stellenwertdarstellungen, die in der hermetischen, technisch orientierten Position, die das IQB verfolgt, als falsch geahndet werden. Das stellt eine obrigkeitliche Bearbeitung des didaktischen Konflikts dar. Man kann dies als Missbrauch der Position des IQB als Standardisierungsinstanz deuten, wahrscheinlicher erscheint mir aber, dass das Problem innerhalb von standardisierten Tests unauflösbar ist: Wenn das IQB alle didaktischen Konfliktfelder umschiffen wollte, dann könnte es Teile des Curriculums nicht mehr abtesten.

Als mögliche Lösung des Problems erscheint eine Veröffentlichung der didaktischen Positionen, die vom IQB als richtig anerkannt werden – das wäre vergleichbar z.B. mit der DDR-Variante der Problembearbeitung, die ich „transparente Hermetik“ nennen würde. In den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich findet sich aber sowohl im Textteil als auch in der Stellenwert-Aufgabe auf den Seiten 13 f. keinerlei Hinweis darauf, dass die technisch orientierte Deutung der Stellenwerttafel durchzusetzen ist. Im Übrigen möchte ich darauf hinweisen, dass die transparente Hermetik, also die offen obrigkeitliche Darstellung der didaktischen Positionen, die das IQB durchzusetzen wünscht, den Systembeteiligten zwar deutlich machen würde, an welchem Maßstab sie gemessen werden. Man müsste dann aber einige Jahre mit den Vergleichsarbeiten aussetzen, denn die Systembeteiligten bräuchten einige Zeit, um die IQB-Vorgaben umzusetzen.

Mareike MINK, Köln

Wie erzeugt man eine geradlinige Bewegung? … und wie kann diese Problemstellung zur Begriffsentwicklung von Lernenden beitragen?

1. Problemstellung

Geradlinige Bewegung findet man (zumindest näherungsweise) in vielen alltäglichen Anwendungen: etwa bei einem Zug auf einem geraden Streckenabschnitt; bei den Backen eines Schraubstocks; bei den Seitenkanten einer Bustür, davon eine parallel, die andere senkrecht zur Buswand; das Ende eines Bügelbrettbeines entlang des Brettes selbst. All diesen Bewegungen ist gemeinsam, dass die Geradlinigkeit durch eine Führung erreicht wird, dies ist etwa die gerade Schiene für den Zug oder die Längsachse des Gewindes, entlang dessen die Schraubstockbacken sich aufeinander zu oder voneinander weg bewegen.

Ist es aber auch möglich, eine geradlinige Bewegung auch ohne eine solche Führung – also gewissermaßen ohne die „Voraussetzung“, zuvor schon einmal eine Geradlinigkeit erreicht zu haben – zu erhalten? Kann man beispielsweise eine – einfach zu erzeugende – rotierende Bewegung in eine geradlinige überführen? Und ist dies überhaupt eine nur theoretische oder auch technisch relevante Fragestellung?

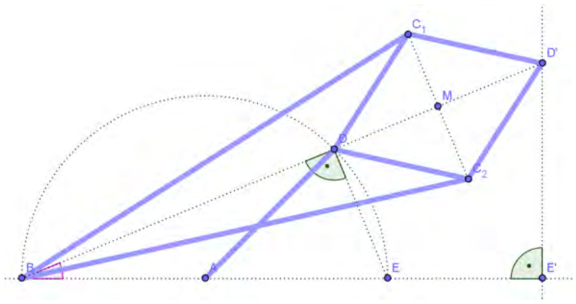
Tatsächlich beschäftigten sich in der Hochzeit des Dampfmaschinenbaus Mitte des 19. Jahrhunderts diverse Personen mit diesem Problem, wenngleich ihre Motivation genau die umgekehrte Frage war: Kann man die geradlinige Bewegung eines Dampfmaschinenkolbens in eine rotierende überführen, um damit Maschinen anzutreiben?

2. Hilfsmittel Gelenkmechanismus

Damals wurde versucht, einen dies leistenden Gelenkmechanismus zu konstruieren, d.h. ein System von starren Stangen, die teilweise miteinander oder mit festen Raumpunkten drehbar verbunden sind. Ein Beispiel für eine einfach mit einem Gelenkmechanismus zu erzeugende Kurve ist ein Kreis – mittels einer einzelnen um einen Fixpunkt rotierenden Stange.

3. eine Lösung: Peaucellier-Inversor

Dieser von Charles-Nicolas Peaucellier 1864 erfundene Mechanismus ist wie folgt aufgebaut (Kempe 1877, siehe Abb.): Im Punkt B sind Stangen BC_1, BC_2 mit $|BC_1| = |BC_2|$ drehbar befestigt; C_1 und C_2 sind zugleich gegenüberliegende Ecken einer Stangenraute C_1DC_2D'; M sei deren Diagonalen-



schnittpunkt; in D ist zudem die Kurbelstange AD befestigt, über die D zu einer rotierenden Bewegung um den Fixpunkt A angetrieben wird; dabei gilt $|AD| = |AB|$.

Eine für Lernende wohl recht komplexe Aufgabenstellung – etwa für eine Facharbeit – wäre die folgende:

Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen der Punkt D' einen Geradenausschnitt senkrecht zur Gerade AB beschreibt.

– auch dann noch, wenn man folgende Umformulierung anbietet:

Sei E' der Lotfußpunkt von D' auf der Geraden AB. Zeige, dass $|BE'|$ konstant ist (✱).

Deutlich einfacher wird die Aufgabe, wenn man sie in Teile zergliedert, für deren Beweis jeweils nur wenige Eigenschaften und Aussagen nötig sind:

Teil (a): Sei k der Kreis um A mit Radius $|AB|$, und sei E – neben B – der zweite Schnittpunkt von k mit der Gerade AB. Zeige: $\angle BDE = 90°$.

– Da nach Voraussetzung B, D und E alle auf dem Kreis k um A liegen, dabei B und E einander diametral gegenüber, gilt nach dem Satz des Thales $\angle BDE = 90°$ (außer wenn D auf die Gerade AB fällt).

Teil (b): Zeige: $|BE'| = \dfrac{|BD'| \cdot |BD|}{|BE|}$.

– Die Dreiecke BED und $BD'E'$ haben jeweils einen rechten Winkel bei D bzw. E', und es gilt $\angle EBD = \angle D'BE'$, also sind ΔBED und $\Delta BD'E'$ ähnlich zueinander, es gilt $\dfrac{|BE'|}{|BD'|} = \dfrac{|BD|}{|BE|}$ und damit die behauptete Aussage.

Da B und E Fixpunkte sind und somit $|BE|$ konstant ist, bleibt zum Beweis von (✱) nur noch zu zeigen, dass auch $|BD'| \cdot |BD|$ konstant ist. Dies könnte man wie folgt zergliedern:

Teil (c): Zeige: $|BD'| \cdot |BD| = |BM|^2 - |MD|^2$ (★).

– Da in einer Raute – hier: C_1DC_2D' – der Schnittpunkt der Diagonalen diese jeweils halbiert, gilt $|MD| = |MD'|$. Folglich ist $|BD'| \cdot |BD| = (|BM| + |MD|) \cdot (|BM| - |MD|) = |BM|^2 - |MD|^2$.

Teil (d): Zeige: $|BM|^2 = |BC_1|^2 - |MC_1|^2$ (♣) und $|MD|^2 = |DC_1|^2 - |MC_1|^2$ (♠).

– Die Diagonalen einer Raute stehen senkrecht aufeinander, somit sind die Dreiecke BMC_1 und DMC_1 rechtwinklig bei M, und die Aussagen gelten nach dem Satz des Pythagoras.

Teil (e): Begründe, warum sich aus (★), (♣) und (♠) ergibt, dass $|BD'| \cdot |BD|$ *konstant ist.*

– Setzt man (♣) und (♠) in (★) ein, so erhält man $|BD'| \cdot |BD| = |BM|^2 - |MD|^2 = |BC_1|^2 - |MC_1|^2 - |DC_1|^2 + |MC_1|^2 = |BC_1|^2 - |DC_1|^2$. Da $|BC_1|$ und $|DC_1|$ die Längen zweier Stangen sind, sind diese konstant und somit auch das Produkt $|BD'| \cdot |BD|$.

4. Problemorientierte Begriffsentwicklung

Anhand einer Problemstellung wie der Frage nach Erzeugung einer geradlinigen Bewegung können Lernende Begriffe entwickeln.

Vollrath (1984) nennt in diesem Zusammenhang vier verschiedene Funktionen, die Begriffe in Problemlöseprozessen haben können. Ein Begriff kann zunächst *Quelle* eines Problems sein – im vorliegenden Beispiel könnte man dazu etwa die geradlinige Bewegung an sich, eine *Translation*, nennen. Weiterhin kann ein Begriff als *Hilfsmittel* beim Lösen eines Problems dienen – hier beispielsweise der Begriff des *Gelenkmechanismus'*. Auch die *Lösung* selbst kann ein zu bildender Begriff sein, beim Problem der Geradführung könnte man die Abbildung der *Inversion am Kreis* als solche bezeichnen, denn genau diese wird durch den Peaucellier-Mechanismus realisiert (Coxeter Greitzer 1983). Schließlich kann ein Begriff auch ein *Lösungsverfahren rechtfertigen* – oben begründet die Tatsache, dass C_1DC_2D' eine *Raute* ist, verschiedene Eigenschaften und so unter anderem die Verwendung des Satzes des Pythagoras.

In seinem *Prinzip der angemessenen Problemorientierung* fordert Bruner (1974), dass der Unterricht mit einer Problemstellung beginnen solle, und dass diese idealerweise von den Lernenden selbst eingebracht, meist jedoch vom Lehrer gestellt sei. Das obige Beispiel und seine Lösung werden zwar sehr wahrscheinlich nicht von Schülerinnen und Schülern aufgeworfen. Jedoch können vielleicht die regelmäßige Auseinandersetzung mit alltäglichen geometrischen Phänomenen zu einer Wahrnehmungssensibilisierung und ein vorgegebener Problemkontext zur Formulierung eigener Fragen oder Thesen durch die Lernenden führen.

Im hier thematisierten Bereich könnten die Schülerinnen und Schüler etwa aufgefordert werden, in ihrer Umgebung nach (auch näherungsweise) geradlinigen Bewegungen zu suchen und diese zu analysieren. Taucht der

Peaucellier-Mechanismus auf? Liegt eine geradlinige Führung vor? Ist die Bewegung nur angenähert oder tatsächlich geradlinig?

Beispielsweise die Bewegung einer Bustür – wie oben genannt – könnte hier „gefunden" werden – sie kann auch mit recht elementaren geometrischen Mitteln wie den Eigenschaften eines Rechtecks analysiert werden. Auch ein Punkt auf dem Rand eines Kreises, der in einem anderen Kreis mit doppeltem Radius rollt, beschreibt eine geradlinige Bewegung; für den Beweis benötigt man Umfanglängen von Kreissektoren und etwa Aussagen über gleichschenklige Dreiecke.

5. Abschluss

In einer so „einfachen" – zumindest einfach zu formulierenden – und realen Fragestellung wie der nach Erzeugung einer geradlinigen Bewegung können also sehr viele und vielfältige geometrische Aspekte stecken. Die hier genannten Begriffe, Sätze und Eigenschaften sind auch sämtlich in Schulbuchreihen zu finden, beispielsweise in *Mathematik Neue Wege* von Schroedel, so dass ein Bezug zu „üblichen" Inhalten des Mathematikunterrichts hergestellt werden kann.

Neben der Problemorientierung können mit den genannten Beispielen (nachgebauter Peaucellier-Mechanismus, Schraubstock, Bustür, Bügelbrett, rollender Kreis) auch weitere Aspekte von Begriffsentwicklung angesprochen werden: So regen sie durch die enthaltenen beweglichen Elemente zum „Ausprobieren" im Sinne des *operativen Prinzips* an. Mit einer weiterführenden Aufgabenstellung wie der nach der (freien) Suche weiterer geradlinig bewegter Anwendungen wird eine *individuelle* Herangehensweise ermöglicht. Schließlich bietet sich gerade ein Problem, in dem geometrische Inhalte verschiedener Jahrgangsstufen zum Tragen kommen und das in anderen Kontexten erneut aufgegriffen werden kann (etwa der genannte Spezialfall eines rollenden Kreises bei allgemeinen Rollkurven), für das Entwickeln von Begriffen in einem fortschreitenden *Prozess*, der nicht nach einer Unterrichtseinheit abgeschlossen ist, an.

Literatur

Bruner, J.S. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin: Berlin-Verlag.

Coxeter, H.S.M, Greitzer, S.L. (1983): Zeitlose Geometrie. Stuttgart: Klett.

Kempe, A.B. (1877): How to Draw a Straight Line: A Lecture on Linkages. In: National Council of Teachers in Mathematics: Classics in mathematics education 6.

Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hrsg.) (2005-2010): Mathematik Neue Wege 5-10. Braunschweig: Schroedel.

Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begrifflehrens. Stuttgart: Klett.

Regina D. MÖLLER, Peter COLLIGNON, Erfurt

Analysis unter einer postmodernen Perspektive

1. Zum Begriff der Postmoderne

Der Begriff „Postmoderne“ wird vorwiegend verwendet, um auf Veränderungen in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts hinzuweisen. Ziel ist es, bei gewissen Entwicklungen zu klären, ob es sich bei ihnen um fortgeführte moderne Phänomene handelt oder um kritische Reaktionen auf sie. Der Begriff der Postmodernen ist weder exakt definiert noch ist er auf bestimmte Phänomene begrenzt. Insbesondere bezieht er sich auf keine festen chronologischen Einordnungen. Er kann sich auf wissenschaftliche wie auf nichtwissenschaftliche Manifestationen beziehen.

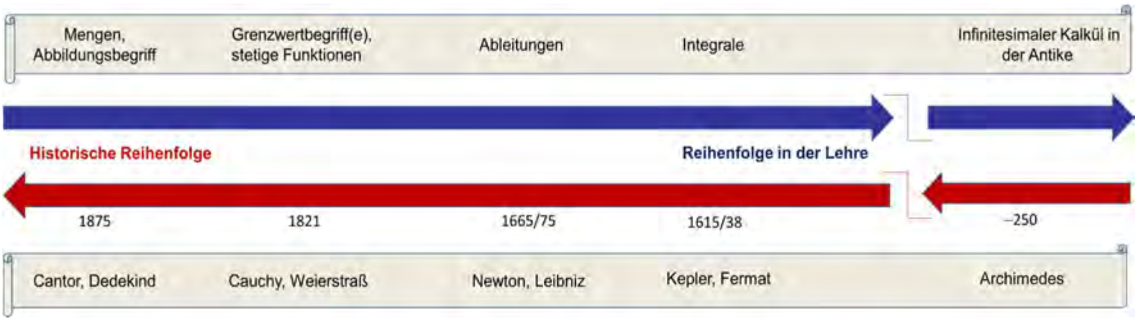
Nach dem französischen Philosophen Lyotard (1979) fasst der Begriff verschiedene Formen einer skeptischen Haltung gegenüber den Metanarrativen zusammen. Letztere stehen für „große Geschichten“ (big stories), die eine Erklärung für gesellschaftliche Phänomene bereitstellen. In der Soziologie wird unter Metanarrativen eine high-level-Theorie verstanden (z.B. eine Ideologie oder ein wissenschaftliches Paradigma). Unter einer soziologischen Perspektive sind beispielsweise der Funktionalismus, der Marxismus, der Interaktionismus und der Feminismus Metanarrative, weil sie für die verschiedensten Aspekte von Gesellschaft Theorien formulieren.

Auch die so genannten exakten Wissenschaften sind nicht frei von tradierten Paradigmen, die innerhalb der Fachdisziplinen als Theorien bezeichnet werden, und die in einem weiteren Rahmen als Metanarrative verstanden werden können. Beispielsweise zeigen sich bei der Entwicklung der Beschreibung der Naturgesetze Paradigmenwechsel, etwa durch die Weiterentwicklung vom geozentrischen zum heliozentrischen Weltbild, von der Newtonschen Mechanik zur Relativitätstheorie. In der Mathematik machte die Grundlagenkrise im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts deutlich, dass die naiven Grundlagen von Logik und Mengenlehre keine vollständige Basis sein können. Mathematiker wie Hilbert haben mit den Erkenntnissen von Gödel gerungen; letztendlich musste sich ein Paradigmenwechsel vollziehen.

Da verschiedene Bereiche, fachdisziplinär oder kulturell, sehr unterschiedlichen Aspekte des menschlichen Interesses im Fokus haben, die sich auch unterschiedlich historisch entwickelt haben, unterscheiden sich die Metanarrativen enorm voneinander. Um die beteiligten Metanarrativen zu analysieren, d.h. zu dekonstruieren, muss man auch die Abfolge historischer Entwicklungen betrachten.

2. Historische Perspektiven

Aus der Graphik ist ersichtlich, dass sich die Entwicklung der Analysis nicht in den aktuellen Unterrichtswerken widerspiegelt. Ganz im Gegenteil entspricht die Abfolge der Themen weitgehend der didaktischen Inversion (Freudenthal, 1983). Beispielsweise wird die Behandlung der reellen Zahlen häufig an den Anfang einführender Lehreinheiten zur Analysis gestellt, während sie erst sehr spät, im 19. Jahrhundert, axiomatisch grundgelegt wurden (Cauchy, Cantor, Dedekind u.a.).



Die Zeitstrahlen bilden natürlich nicht die historische Entwicklung mit all ihren Verzweigungen ab. Sie ordnen jedoch die Ideen, die sich schließlich durchgesetzt haben, zeitlich ein.

Bereits in der Antike wurden infinitesimale Berechnungen durchgeführt, die sich auf Flächen und Volumina bezogen. Beispielsweise hat Archimedes zu diesem Zweck Exhaustionen (Ausschöpfungen von Kreisen bzw. von Parabeln begrenzten Flächen) unternommen. Vor Newton und Leipniz wurden immer wieder infinitesimalen Berechnungen vorgenommen, die sich auf geometrische Objekte bezogen. Das Interesse an dynamischen Fragestellungen förderte erste Konzepte der Differentialrechnung. Dabei stand neben der Untersuchung statischer Kurven immer häufiger die Interpretation als Bahnkurve eines Objektes im Mittelpunkt der Betrachtung. Diese Verlagerung der Perspektive auf kinematische Aspekte war ein wichtiger Schritt hin zu einem Differentialkalkül. Leibniz und Newton haben unabhängig voneinander infinitesimale Überlegungen ohne den heute üblichen Funktionsbegriff angestellt. Dabei hat Leibniz mit sogenannten infinitesimalen Größen gearbeitet, die nicht von allen seiner Zeitgenossen akzeptiert wurden, deren Idee im 20. Jahrhundert im Rahmen in der Non-Standard-Analysis aber wieder aufgegriffen und präzisiert wurde.

Die Bindung des infinitesimalen Kalküls an den heutigen Funktionsbegriff nahm ihren Anfang mit Euler, auch wenn eine mengentheoretische Definition erst im 19. Jahrhundert erfolgte. Euler war zunächst der Sinn einer funktionalen Zuordnung wichtig, auch weil er in der Tradition derer stand, die sich mit naturgegebenen Abhängigkeiten befassten; hier insbesondere mit den Abhängigkeiten von Ort und Zeit, allgemeiner mit der Formulierung physikalischer Naturgesetze.

Für lange Zeit wurden infinitesimale Berechnungen eher unter einem pragmatischen Gesichtspunkt ausgeführt, wobei auch Reihen eine größere Rolle spielten. Die „exakte“ Grundlegung der reellen Zahlen ist Mathematik des 19. Jahrhunderts und hat für die Infinitesimalrechnung die Bedeutung einer theoretischen Fundierung zusammen mit der heute üblichen „Epsilontik“, die vorwiegend auf Weierstraß zurückgeht.

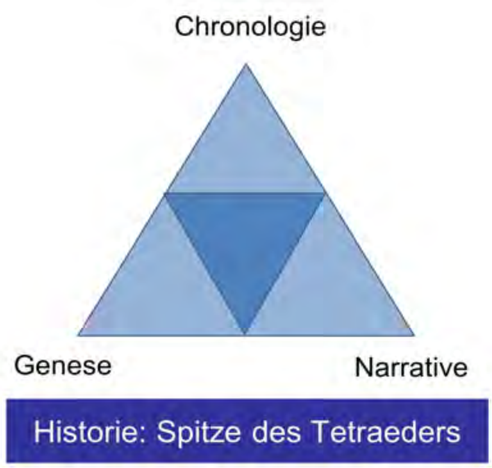
Mit einem postmodernen Blick stellen sich jetzt verschiedene Fragen: Welche Bedingungen haben zum heutigen Erscheinungsbild der Analysis beigetragen? Hätte es andere Entwicklungen geben können? Wann? Welche Einflüsse waren bestimmend? Welche Metanarrativen werden mit der heutigen Darstellung der Analysis transportiert? Sie zielen ab auf ein Verständnis dafür, dass das heutige Erscheinungsbild der Analysis von vielen Entscheidungen im historischen Verlauf bestimmt wird.

3. Folgerungen für die Lehrerausbildung

In der didaktischen Diskussion spielen „fundamentalen Ideen“ die Rolle von Leitlinien (Dankwertz 2005, Vollrath, 1978). Die Inhalte der Analysis sind bestimmt durch Messen, funktionale Zusammenhänge, Änderungsraten, Approximation, Optimieren und den Grenzwertbegriff. In der Schulmathematik steht kalkülhaftes Arbeiten immer noch im Vordergrund. Mit diesem Verständnis kommen Studierende an die Hochschule und richten ihre Erwartungen entsprechend aus.

Hier gilt insbesondere für die Lehrerausbildung, dass das Kalkülhafte den Ideen und den Bedeutungen nachfolgt. Dazu sind einerseits Kenntnisse zur Genese der Analysis und der historischen Bedingungen notwendig. Zum anderen soll eine Sensibilisierung hinsichtlich des Wissenschaftsverständnisses erreicht werden, zumal auch heute noch bei vielen Lehrenden ein naiv-szientistisches Verständnis vorherrscht.

Die nachfolgende Graphik basiert auf dem bekannten didaktischen Dreieck, das den Stoff, die Lernenden und die Lehrenden zueinander in Beziehung setzt. Hier wird es um einen vierten Aspekt, die Historie, ergänzt zu einem Tetraeder. Wenn man diesen vierten Punkt weiter aufgliedert, nämlich in Chronologie, Genese und Narrative (tradierte Geschichte), dann erhält man die entscheidenden Teilaspekte für eine postmoderne Betrachtung.



Eine solche Sichtweise macht weiter deutlich, dass die Analysis seit langem mit den Naturwissenschaften, besonders der Physik, verwoben ist. Ihre Entwicklungen bedingen sich in großen Teilen gegenseitig. Ganz anders verhält es sich mit denjenigen Wissenschaften, die die Analysis wissenschaftshistorisch spät adaptiert haben (Ökonomie, Sozialwissenschaften). Eine postmoderne Sichtweise ermöglicht ein Erkennen eines solchen „Methodentransfers“ von den Naturwissenschaften zu anderen Disziplinen, welche *alleine* keinen hinreichenden Anlass geboten hätten, die Entwicklung der Analysis zu befördern. Hier liegen also nicht in demselben Maße genetische Prozesse vor.

Zwar stellt die Analysis einen Kalkül dar, der dank neuerer Technologien auch weiter im Vordergrund steht. In der Lehrerausbildung muss dieser Sichtweise jedoch ein Korrektiv im Sinne von Vollrath gegenübergestellt werden: Rettet die Ideen!

Literatur

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. München: Elsevier / Spektrum Akademischer Verlag.

Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht [et al.]: D. Reidel Publishing Company.

Jost, J. (2005): Postmodern Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer.

Lyotard, J. (1979). *La condition postmoderne: rapport sur le savoir.* Paris: Les Éditions de Minuit.

Vollrath, H.-J. (1978): Rettet die Ideen! In: Der mathematische naturwissenschaftliche Unterricht, 31, 449 – 455.

Seiji MORIYA, Tamagaw University, Tokyo

On the Pre-service of Mathematics Education for Elementary School Teachers at the University of Education(2)

I would like to explain my concrete plans on the pre-service of mathematics education at the University of Education. The contents of my lecture are: history, recognition, methods and contents for mathematics education. These contents were taught by mathematical activities.

1. Introduction

I think that there are two big problems to be solved on teacher training in university of education in Japan. The first problem is a marked decline in the students' scholastic performance in university. The second problem is a decrease of a required or an elective subjects of mathematics education in curriculum of university of education. We can expect that teacher's ability of mathematics education in elementary school will decrease in the future. So, I would like to report on concrete plan to solve these problems in classroom of mathematic education in university. At first I would like to explain school system and teacher training of Japan. We have adopted liner school system, as 6,3,3,4 since 1947. Fig.1 is school hours of mathematics par a week in elementary school, junior high school and high school.

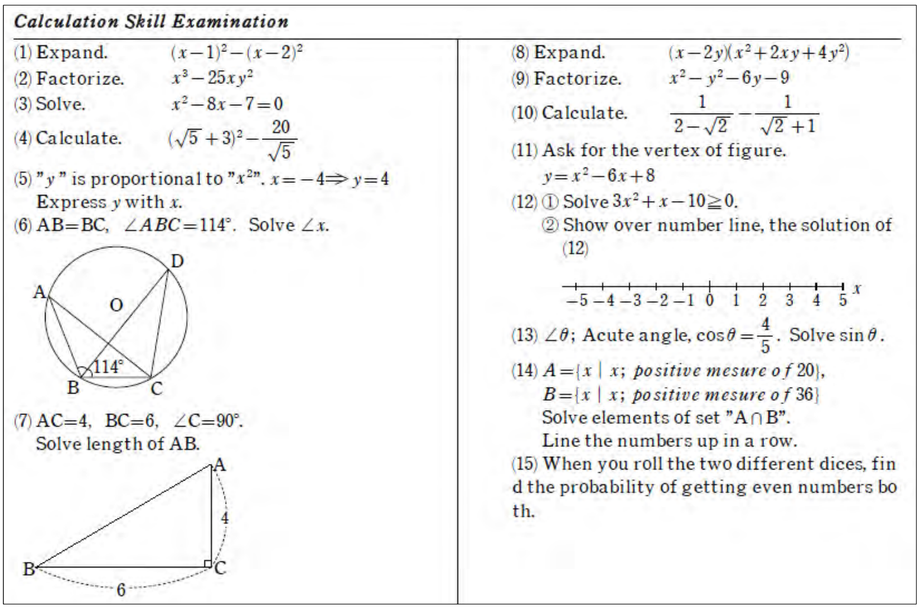
	primary school						Junior high school			High school		
age(Apr.)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Grade	1	2	3	4	5	6	1	2	3	1	2	3
Hour	4	5	5	5	5	5	4	3	4	I 3	II 4	III 5
										A 2	B 2	Apl. 2
	45minutes/h						50minutes/h					

Fig.1 School hours of mathematics par a week in Japan

School teachers generally have degree of Bachelor. Teachers who take a degree of master are recently increasing. Students take a license of teacher at university and a graduate school. The education committee of prefecture or big city employs teachers for public schools by the examination.

2. Two problems in mathematics education in university of educationat

Questionnaires on Fig.2 is mathematical problems to examine academic ability of universities students who hope to become to be elementary school teachers(T.Kawasaki and three others, 2012). The contents of these problems is the level of 10th grade. All students have studied them and passed an exam in a high school. Result is Fig.3. Teachers are trained at a faculty of education in national universities, a faculty of education in private universities and university by correspondence.



Calculation Skill Examination

(1) Expand. $(x-1)^2-(x-2)^2$

(2) Factorize. x^3-25xy^2

(3) Solve. $x^2-8x-7=0$

(4) Calculate. $(\sqrt{5}+3)^2-\frac{20}{\sqrt{5}}$

(5) "y" is proportional to "x^{2}". $x=-4 \Rightarrow y=4$
Express y with x.

(6) AB=BC, $\angle ABC=114°$. Solve $\angle x$.

A D O 114° B C

(7) AC=4, BC=6, $\angle$C=90°.
Solve length of AB.

A 4 B C 6

(8) Expand. $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(9) Factorize. x^2-y^2-6y-9

(10) Calculate. $\frac{1}{2-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

(11) Ask for the vertex of figure.
$y=x^2-6x+8$

(12) ① Solve $3x^2+x-10 \geqq 0$.
② Show over number line, the solution of (12)

$-5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ x$

(13) $\angle\theta$; Acute angle, $\cos\theta=\frac{4}{5}$. Solve $\sin\theta$.

(14) $A=\{x \mid x;\ \textit{positive mesure of } 20\}$,
$B=\{x \mid x;\ \textit{positive mesure of } 36\}$
Solve elements of set "$A \cap B$".
Line the numbers up in a row.

(15) When you roll the two different dices, fin d the probability of getting even numbers bo th.

Fig.2 The basis skill

But, mathematical ability of students is different with universities. We find that ability of the private university's students is lower than one of the national university for calculation ski and mathematical skill. Moreover, distribution of Ability of students by correspondence without the entrance examination have two peaks, as low level and high level. Students of private university who hope to become to be elementary school teacher didn't understand contents of matimatics of 10th level in high school.

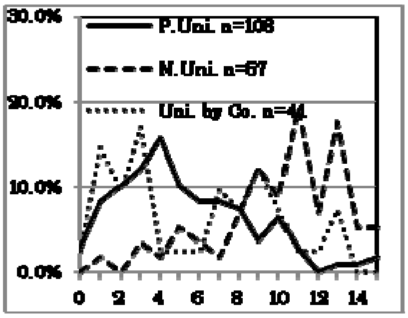


Fig.3 Results

Fig.4 is curriculum of mathematics education and mathematics for elementary school teacher's course in university of education. We find one subject of mathematics education for 4 years of university on this table. On 1976 students studied 2 subjects, but students study only one subject now.

2010			1976
Req.	Math.Edu.	1 subject	2
	Math.	0	2
Opt.	Math.Edu.	0	7
	Math.	1	2

Fig.4 Curriculum of math. edu. and math. in university

There are 15×90min. in a semester. There is only this classroom in teacher training's curriculum to study mathematics education of elementary school ! It is difficult for students to become to be good teacher about mathematics, because their ability is lower than before and there is not enough contents of mathematics education in university

3. My Concrete plans

Purposes of teaching in my classroom are that students understand Japanese history of mathematics education since the world war Ⅱ, they analyze educational problems of mathematics Education in Japan and they acquir how to study and how to develop teaching materials of mathematics education

Teaching methods are that they review mathematical contents of 10th grade school book of high school, they learn on teaching material of mathematics education of elementary school through mathematical activities and I focus mathematics connected students' daily lives

It is necessary for us to teach the following four themes to students in a class for mathematics education. These contents provide students the fundamental knowledge which allows a teacher to understand the contents of mathematics, and to develop teaching materials. Then they will be able to teach them very well.

1) The history of mathematics education.

Mathematics education have many problems to solve. Students can research the solution method of problems if they know historical processes of these problems. In Japan, a core-curriculum called "unit learning" was enforced from 1947 to about 1955. But Unit learning was stopped in 1956 because students' mathematical ability decreased. This Unit learning is similar to the "synthetic learning" executed from 2000. Theys need to study the similarities of learning of two types. And they must take care to avoid a decrease of academic ability of pupils.

2) Recognizable contents

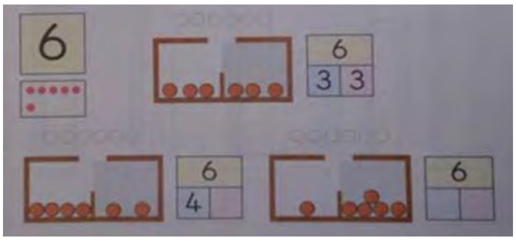


Fig.5

Fig.6

Because mathematics education starts from under the age of one, at first students need to study preschool education. Next, they underatand on cognition of pupils and they must develop teaching tools. For example, Fig.5 is school book of 1st grade of elementary school of Japan to learn decomposition and composition of numbers. But, this method is not good, because pupils can watch two rooms and they finish solving by counting balls without mental thinking. So, it is important that one room is hidden to think numbers. Students make teaching tools for this theme by themselves. And they learn how to use this tool (Fig.6).

3) Educational methods and the usage of information technology

They specially study for distance learning by using a teleconference system. Fig.7 is scene of distance learning between two classrooms at the 5st grade of elementary school. Students study the usage of information technology.

Fig.7 Teleconference

4) Educational contents

Students must study the relationship between mathematics and our daily life and culture, too.

I present on curved line and curvature, as a example of contents. Students approximate a curved line by the arcs(Fig.8). And they obtain the length of the curved line by calculating the total of the lengths of some arcs(Fig.9). Final, they make pictures. they measur surroundings of patterns and affix the woolen yarn to it(Fig.10). The picture includes using differentiable continuous curve and not differentiable continuous curve with cusp.

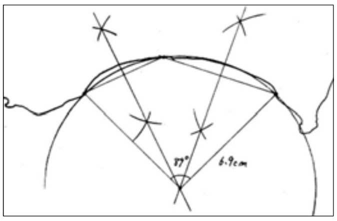


Fig.8 Review

Fig.9 Application

Fig.10 Work

4. Conclusion

In this paper I have explained problems, my concrete plan on the pre-service of mathematics education at the University of Education. I think we need to teach students mathematics education at least for one year in order to develop their experience and to study some theories for mathematics education.

Reference

T.Kawasaki, S.Moriya,Y.Okabe,T.Maesako (2012): The Problems of Mathematical Modelling Introduction on Mathematics Education in Japanese School, Journal of Mathematical Modelling and Application , 2012 Vol.1, No 5,50-58

Renate MOTZER, Augsburg

Magische Quadrate von der 1.Klasse bis zur linearen Algebra

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Magische Quadrate haben schon seit Jahrtausenden Menschen fasziniert. Das hier dargestellte sog. Lo-Shu-Quadrat ist vermutlich schon 4000 Jahre alt. Häufig ist es das erste magische Quadrat, das Kinder kennenlernen. In einige Lehrwerke findet es sich bereits Ende der 1. Klasse. Kinder können entdecken, dass die Zahlen von 1-9 so angeordnet sind, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in beiden Diagonalen die gleiche Summe vorliegt. Manchmal werden als „Geschwister von Lo-Shu“ andere Quadrate benannt, die die gleiche Eigenschaft haben und es wird ein Weg zum Erzeugen eines solchen Quadrats vorgestellt (vgl. Das Zahlenbuch 1).

In höheren Klassen kann untersucht werden, dass es nur sieben davon gibt und dass alle acht über die Symmetrieabbildungen eines Quadrats zusammenhängen. Diese Verknüpfung zwischen Geometrie und Arithmetik kann ab der 4. Klasse thematisiert werden, wenn die Symmetrieabbildungen den Kindern bekannt sind.

An der Universität kann schließlich die Gruppe der Symmetrieabbildungen diskutiert werden. Man kann die Gruppentafel aufstellen und sich die Nichtkommutativität der Hintereinanderausführung von Abbildungen bewusst machen. In diesem Zusammenhang wird noch einmal deutlich, dass man durch Drehen und Spiegeln keine weiteren magischen Quadrate finden kann. Wenn man ein gedrehtes Quadrat spiegelt, gelangt man zu einem Quadrat, das man durch eine andere Spiegelung direkt bekommen könnte. Zweimal Spiegeln andererseits ist gleichbedeutend mit einer Drehung.

In der zweiten Klasse kann man versuchen, magische Quadrate nur mit den Vielfachen von 2 (nur mit geraden Zahlen), den Vielfachen von 3 usw. zu füllen. Auch dies funktioniert. Man nehme z.B. das Lo-Shu-Quadrat und multipliziere jeden Eintrag mit 2 bzw. 3 usw.

Die Bestimmung der magischen Summe bei einem vorgegebenen Zahlenmaterial kann von Schülern entdeckt werden (alle Zahlen zusammenzählen und die Summe auf drei Zeilen/ Spalten verteilen).

Auch dass die Summe bei einem magischen 3x3-Quadrat immer das 3-fache der mittleren Zahl ist, kann entdeckt und begründet werden. Die Kinder können sehen, dass in den 4 Summen, zu denen die mittlere Zahl gehört, die anderen beiden Summanden den gleichen Abstand zu dieser Zahl haben und sich daher zum doppelten ergänzen.

Kennt man Variablen und Parameter, so kann ein magisches 3x3- Quadrat wie folgt erzeugt werden:

a-b	a+b+c	a-c
a+b-c	a	a-b+c
a+c	a-b-c	a+b

An der Universität kann man darin auch eine Basis für den Vektorraum aller magischen 3x3 Quadrate entdecken und sich bewusst machen, dass es sich um einen 3-dimensionalen Vektorraum handelt.

Etwas schwieriger stellt sich die Basissuche dar, wenn man 4x4- Quadrate betrachtet. Diese werden in der Schule meist anhand des Kupferstich „Melencholia" von Albrecht Dürer eingeführt. An dem dort dargestellten Quadrat kann man viel entdecken, z.B. dass die magischen Summe 34 noch viel öfters vertreten ist als nur in den Zeilen, Spalten und Diagonalen. Manche dieser zusätzlichen Summen gelten in allen 4x4-Quadraten: die Summe der 4 Ecken und der 4 mittleren Zahlen ist immer auch die magische Summe. Ein Beweis dieser Eigenschaft verläuft analog zu dem, warum im 3x3- Quadrat in der Mitte ein Drittel der magischen Summe steht.

Weitere Summen gelten nur in manchen magischen Quadraten und alle Quadrate, die diese Eigenschaft erfüllen, bilden einen Untervektorraum.

Wählt man z.B. die Tatsache, dass sich das Quadrat in 4 kleine Quadrate mit magischer Summe aufteilen lässt, so gelangt man zu einem (siebendimensionalen) Unterraum, für den man eine Basis aus Quadraten angeben kann, die nur die Zahlen 0 und 1 als Einträge hat, und zwar in jeder Zeile/Spalte/Diagonale genau eine 1 (diese werden oft auch Grundquadrate genannt).

In diesem Unterraum kann man auch leicht eigene magische Quadrate suchen, z.B. ein Geburtstagsquadrat, das neben dem Geburtsdatum (auf 4 Stellen verteilt) das aktuelle Jahr (auf 2 Stellen verteilt) und das Alter enthält. Eventuell braucht man beim Ausfüllen eines solchen Quadrats aber ein paar negative Zahlen.

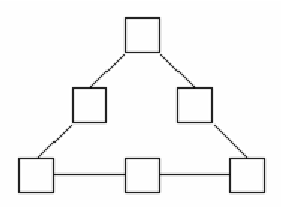
In der linearen Algebra ist interessant zu untersuchen, warum 7 der 8 Grundquadrate (es gibt 8 davon, die wie vorher durch Spiegeln und Drehen zusammenhängen) linear unabhängig sind und warum diese Menge noch keine Basis für den Vektorraum aller magischen 4x4-Quadrate liefert.

Auch weitere Zusatzeigenschaften können untersucht werden.

Weiterhin kann gesehen werden, dass alle Nullsummenquadrate einen Unterraum bilden und alle Quadrate mit einer vorgegebenen Summe einen affinen Unterraum. Die Nullsummenquadrate bilden den Kern des Vektorraumhomomorphismus, der jedem magischen Quadrat die magische Summe zuordnet.

Wer mag, kann auch die Kombinatorik ins Spiel bringen und sich erarbeiten, wie man die Koeffizienten in der Basisdarstellung wählen muss, damit man genau ein Quadrat mit den Zahlen von 1-16 erhält.

Wenn einem magische Quadrate zu aufwändig erscheinen, kann man sich auch mit magischen Dreiecken begnügen. Hier liegt die magische Summe nicht von vornherein fest und man kann untersuchen, welche Summen möglich sind. Um alle Lösungen zu einer bestimmten Summe zu bekommen, kann man wieder die Symmetrieabbildungen ins Spiel bringen.



Diesmal liegt ein vierdimensionaler Vektorraum zugrunde.

Als kompliziertere Figur könnte man einen magischen Davidstern erstellen und sich überlegen, warum bei Davidsternen die magische Summe wieder eindeutig sein muss.

Man sieht also, es gibt ein reichhaltiges Potential an Fragestellungen. Von magischen Quadraten geht eine große Faszination aus, die gelegentlich sogar im Fernsehen zu erleben ist (so hat z.B. bei „Wetten-dass“ im Oktober 2002 oder bei „Deutschlands Superhirn 2011“ ein Kandidat dafür gewonnen, dass er ein geeignetes magisches Quadrat erzeugen konnte; faszinierend anzusehen ist auch Nicolai Friedrich als Gedankenleser in http://www.youtube.com/watch?v=3gzWB_uOJHA).

Erfahrungen im Unterricht zeigen, dass manche Erstklässler noch einige Probleme haben abzusehen, ob eine Summe von 3 Zahlen nun 15 ergibt oder nicht und welche Zahl gegebenenfalls noch zu ergänzen ist.

Für diese Schüler mag es in den Mathematikstunden vor allem um die Zerlegungen der Zahl 15 gehen. Andere sehen mehr die geometrischen Eigenschaften, d.h. welche Spalten, Zeilen oder Teilfiguren ihre Plätze getauscht haben, wenn man magische Quadrate miteinander vergleicht.

Ist ein Teil eines Quadrates gegeben, so sehen manche schnell, wo sie einen weiteren Eintrag eindeutig berechnen können. Andere ergänzen mit selbst gewählten Zahlen und stoßen dann auf das Problem, dass sich nicht alle Summen passend berechnen lassen. Eindeutige Stellen zu sehen ist also ein größeres Lernziel bei der Beschäftigung mit magischen Quadraten.

Dass man selbst magische Quadrate (oder Dreiecke) mit einigen Wunschzahlen erzeugen kann, kann eine weitere Erkenntnis sein, die Kinder im Umgang mit magischen Quadraten gewinnen. Gerade ein eigenes Geburtstagsquadrat kann einen persönlichen Bezug schaffen.

Beim Vervollständigen von magischen Quadraten (die evtl. noch zusätzliche Eigenschaften erfüllen) können auch Gleichungssysteme eine Rolle spielen. Dass lineare Vektorräume viel mit Lösungen von linearen Gleichungssystemen zu tun haben, kann bewusst gemacht werden, wenn an der Universität die Vektorraumeigenschaften erarbeitet werden.

Die Tatsache, dass die Menge der magischen Quadrate Eigenschaften besitzt, die kennzeichnend für einen Vektorraum sind, d.h. dass man (skalare) Vielfache und Summen berechnen kann, kann man Kindern aber schon viel früher bewusst man (auch wenn der Vektorraumbegriff noch sehr weit weg liegt).

Matrizen tauchen im Zusammenhang mit Vektorraumeigenschaften häufig als die darstellenden Matrizen von linearen Abbildungen auf. In unserem Fall sind die Vektoren selbst Matrizen. Das mag ungewöhnlich erscheinen, zeigt aber, dass Vektorraum-Modelle nicht nur aus Zeilen- und Spaltenvektoren bestehen müssen. Den Studierenden muss oft erst bewusst gemacht werden, dass es zwar eine Isomorphie zum $\mathbf{R}^n$ gibt, aber es sich lohnt, die Objekte durchaus zunächst und immer mal wieder als das anzuschauen, was sie sind.

Literatur

Wittmann, E. Ch., Müller, G. N. (2006): Das Zahlenbuch 1 Ausgabe Bayern, Ernst Klett Grundschulverlag , S. 106f.

Motzer, R. (2008): Magische Quadrate – Einführung in die Lineare Algebra anhand dieses Vektorraummodells, erschienen als preprint: http://www.math.uni-augsburg.de/forschung/preprint/

Unterrichtsentwürfe finden sich in meinem Beitrag bei Lehrer-online:
http://www.lehrer-online.de/magische-quadrate.php

Matthias MÜLLER, Jena

Ausgewählte empirische Untersuchungen zum CAS-Einsatz im Thüringer Mathematikunterricht – Ergebnisse nach dem ersten Jahr der CAS-Einführung

Im Schuljahr 2011/ 2012 hatte sich der Mathematikunterricht für viele Thüringer Schüler stark verändert. Seitdem kommen Computeralgebra-Systeme (CAS) im naturwissenschaftlichen Unterricht verbindlich zum Einsatz. Ab der Klassenstufe 9 arbeiten die Schüler aller Thüringer Schulen mit Oberstufe mit den Systemen und auch das Abitur muss ab 2014 mit einem CAS bewältigt werden. Die Einführung wurde durch das Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (TMBWK) durch die Medieninformation „CAS-Taschenrechner werden an Gymnasien eingeführt / Wissenschaftliche Expertise unterstützt den Einsatz“ vom 20.01.2011 angekündigt. Darin begründet das TMBWK die CAS-Einführung mit der Zielstellung, dass der Mathematikunterricht noch schülerorientierter und verstehensorientierter werden soll. Dabei beruft sich das Ministerium auf eine selbst in Auftrag gegebene Expertise der Pädagogischen Hochschule Freiburg [BARZEL 2012]. Um das Ziel der Veränderung des Unterrichts in Hinblick auf eine größere Mitbestimmung der Schüler zu überprüfen, wurde eine empirische Längsschnittstudie im Rahmen der Promotion des Autors gestartet. Im Folgenden soll von den Ergebnissen aus dem ersten Jahr nach der CAS-Einführung berichtet werden.

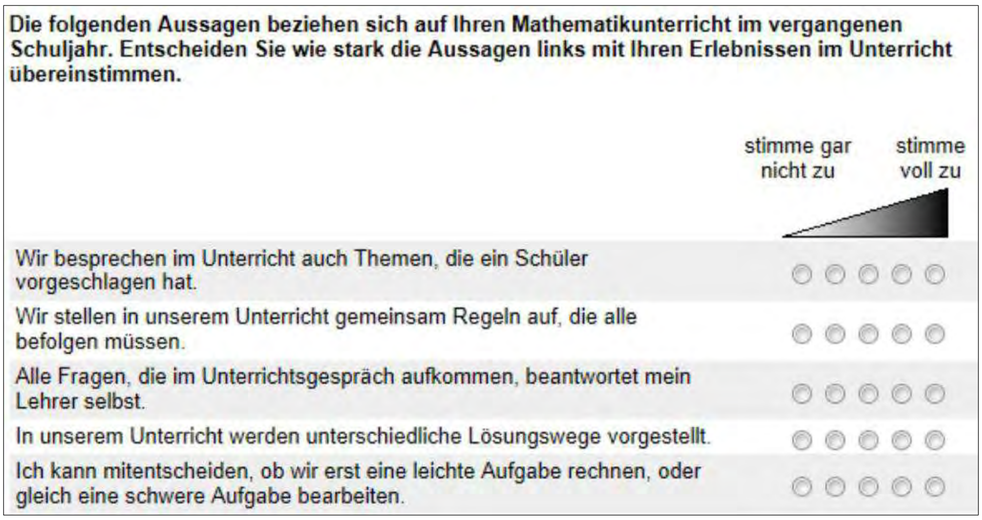
1 Theoretischer Hintergrund – Das Modell des Offenen Unterrichts nach Peschel

Aus der angesprochenen „Expertise zum Einsatz von Computeralgebra-Systemen (CAS) im Mathematikunterricht in Thüringen“ geht hervor, dass CAS als Katalysator für einen schülerorientierten Unterricht wirken kann [BARZEL 2012]. In der Tat zeigen Studien wie zum Beispiel das bayrische M^3-Modellprojekt, dass sich die Methodik des Mathematikunterrichts durch den CAS-Einsatz verändert [BICHLER 2007/ WEIGAND 2006]. Der Fokus kann sich Dank der Verwendung von CAS zu den Schülern hin verschieben. Um die Veränderung zur Schülerorientierung hin -und damit der Methodik des Mathematikunterrichts- zu beobachten, muss ein geeignetes Modell für die Offenheit des Unterrichts zu Grunde gelegt werden. Dabei ist eine Schülerorientierung im Unterricht direkt mit der Offenheit der Methodik verbunden, da die individuellen fachlichen und überfachlichen Lerninteressen und Disponibilitäten der Schüler über das Lerngeschehen entscheiden. Das soziale Geschehen innerhalb einer Lerngruppe ist dabei genauso zu berücksichtigen, wie die außerschulischen Aktivitäten [GRELL

2001]. Das Modell des Offenen Unterrichts nach Peschel umfasst all diese Aspekte und beinhaltet als Kernelement des Offenen Unterrichts die Individuen einer Lerngruppe und deren Interessen [PESCHEL 2002]. Jenes Konzept umfasst fünf Dimensionen, wonach sich Offener Unterricht in der Organisatorischen Offenheit, der Methodischen Offenheit, der Inhaltlichen Offenheit, der Sozialen Offenheit und der Persönlichen Offenheit konkretisiert [PESCHEL 2002]. Diese fünf Dimensionen beschreiben ein umfassendes Bild des Offenen Unterrichts und eigen sich für eine Untersuchung der Schülerorientierung in selbigem. Dabei ist das Modell im strengen Sinne fachunabhängig; allerdings wurde es auch im Rahmen des Mathematikunterrichts entwickelt [PESCHEL 2002]. Ausgehend von den Ergebnissen des M^3-Projektes und der Metaanalyse der Expertise zum CAS-Einsatz in Thüringen kann die Hypothese aufgestellt werden, dass der Grad der Offenheit im Mathematikunterricht aus Sicht der Schüler nach der CAS-Einführung zunimmt.

2 Methodik – Das Instrument und die Stichprobe

Aus dem Modell des Offenen Unterrichts nach PESCHEL wurden 20 Items für einen Schülerfragebogen abgeleitet. Dieser wurde mit 60 Schülern pilotiert, wobei die Schüler im Rahmen von Gruppeninterviews gezielt zur Verständlichkeit befragt wurden und die Möglichkeit dazu hatten, individuelle Anmerkungen zu ergänzen. Die Ergebnisse wurden anschließend in Expertendiskussionen ausgewertet. Final umfasst der pilotierte Fragebogen nun schließlich 17 Items und steht im jeweiligen Befragungszeitraum online zur Verfügung. Die Antworten können auf einer N-poligen 5-Punkt-Likertskala mit visueller Unterstützung angeben werden. Die Skala reicht von 1 (stimme gar nicht zu) bis 5 (stimme voll zu; siehe Abb. 1).


Die folgenden Aussagen beziehen sich auf Ihren Mathematikunterricht im vergangenen Schuljahr. Entscheiden Sie wie stark die Aussagen links mit Ihren Erlebnissen im Unterricht übereinstimmen.

	stimme gar nicht zu … stimme voll zu
Wir besprechen im Unterricht auch Themen, die ein Schüler vorgeschlagen hat.	○ ○ ○ ○ ○
Wir stellen in unserem Unterricht gemeinsam Regeln auf, die alle befolgen müssen.	○ ○ ○ ○ ○
Alle Fragen, die im Unterrichtsgespräch aufkommen, beantwortet mein Lehrer selbst.	○ ○ ○ ○ ○
In unserem Unterricht werden unterschiedliche Lösungswege vorgestellt.	○ ○ ○ ○ ○
Ich kann mitentscheiden, ob wir erst eine leichte Aufgabe rechnen, oder gleich eine schwere Aufgabe bearbeiten.	○ ○ ○ ○ ○

Abb. 1: Bildschirmausschnitt des
Online-Schülerfragebogens mit fünf Beispielitems

Da das Instrument mit einem anonymisierten ID-Code versehen ist, können die Folgeantworten eindeutig zugeordnet werden. Wenn es Unstimmigkeiten bei dem Code-Abgleich gab oder Schüler aus organisatorischen und technischen Gründen an der Erst- oder Folgebefragung nicht teilnehmen konnten, wurden die Antworten nicht berücksichtigt. Die für die Auswertung herangezogenen Antworten umfassen 393 Datensätze. Demnach liegt die Ausfallquote nach dem ersten Jahr bei 24%. Die 393 befragten Schüler stammen aus 10 Schulen in Thüringen, die sich in den Städten Erfurt, Weimar, Jena, Gera und Greiz befinden.

3 Erste Ergebnisse des Schülerfragebogens

Mittelt man die Antworten über alle 17 Items und alle 393 Schüler in den Jahren 2011 und 2012, so erhält man eine Kenngröße, die die Offenheit des Unterrichts aus Schülersicht widerspiegelt. Das arithmetische Mittel liegt für 2011 bei 2,81 (SD 0,51) und für 2012 bei 2,66 (SD 0,58). Dieser Rückgang ist nach dem Wilcoxen-Test für verbundene Stichproben signifikant (s=0,001; α=0,05). Unterscheidet man die Stichproben nach Jahrgängen, zeigt sich der Trend in allen drei Klassenstufen - allerdings ist nur der Unterschied bei der jüngsten Gruppe (Klasse 9 zu Klasse10) signifikant (s=0,000; α=0,05; siehe Abb. 2).

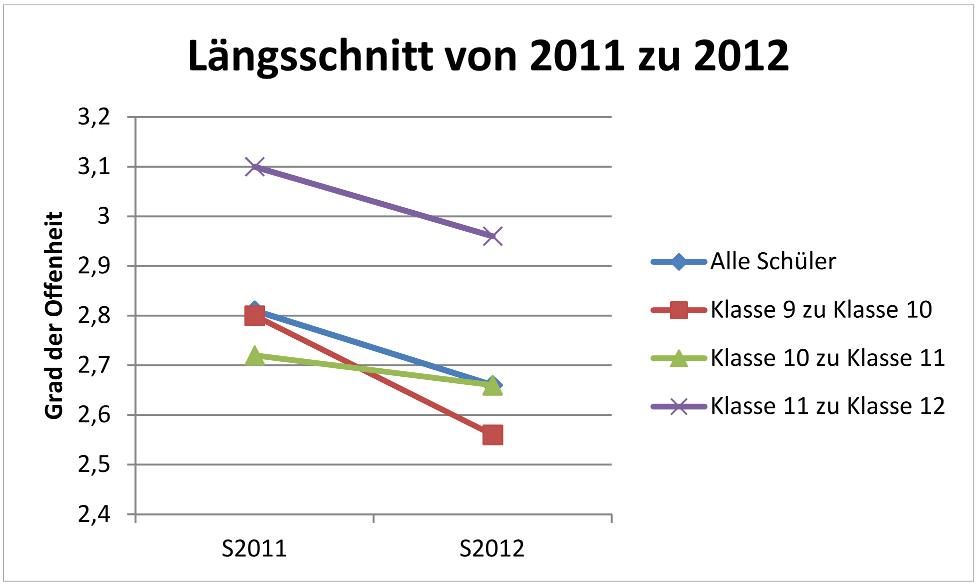


Abb. 2: Längsschnitt von 2011 zu 2012 zum
Grad der Offenheit des Mathematikunterrichts aus Schülerperspektive (N=393)

In der Folgebefragung wurden neben den 17 Items zur Offenheit des Unterrichts die Schüler auch gezielt danach befragt, ob sie sich stärker im Mathematikunterricht eingebunden fühlen bzw. ob sie mehr Entscheidungsfreiräume haben, wenn sie CAS verwenden. Die arithmetischen Mittel der entsprechenden Items liegen alle zwischen 2,1 und 2,4 (SD 0,9 bis 1).

4 Diskussion – Standpunkt und Ausblick

Es muss festgehalten werden, dass aus Sicht der Schüler keine verstärkte Öffnung des Mathematikunterrichts nach dem ersten Jahr der CAS-Einführung zu beobachten ist. Im Gegenteil: Die jüngeren Schüler, die den Übergang von Klasse 9 zu 10 vollzogen haben, empfinden ihren Unterricht sogar als geschlossener (siehe Abb.2). Dieser Umstand kann allerdings auch mit der Besonderen Leistungsfeststellung (BLF) in der 10. Jahrgangstufe zusammenhängen. In Vorbereitung auf dieses Äquivalent zur Zehnte-Klasse-Abschlussprüfung ist es durchaus nachvollziehbar, dass der Unterricht nicht gänzlich schülerorientiert erfolgt. Dass die zu erwartenden Änderungen in der Methodik Zeit brauchen und sich noch nicht nach einem Jahr einstellen, haben bereits verschiedene Studien nahe gelegt [BARZEL 2012]. Aus diesem Grund ist eine Fortsetzung der Befragung geplant und wird im Schuljahr 2013/ 2014 erfolgen. Außerdem werden die zugehörigen Fachlehrer zu dem gleichen Sachverhalt über den gesamten Untersuchungszeitraum hinweg durch eine Interviewstudie begleitet. Erste Indizien unterstreichen die Ergebnisse der Schülerbefragung. Es lässt sich mutmaßen, dass die anfängliche Verunsicherung bei der Verwendung der neuen Technologie bei den Lehrkräften zu eher lehrerzentriertem Unterricht führt. Die Einführung der CAS in einer einzelnen Klasse wird in den meisten Fällen auch demonstrativ und damit lehrerorientiert durchgeführt. Es wird insofern von großem Interesse sein, die Entwicklung im nächsten Schuljahr weiter zu verfolgen.

5 Literatur

BARZEL, B. (2012) Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert – aber wann? Waxmann Verlag. Münster.

BICHLER, E. (2007): Computer und Prüfungen - geht CAS auch? Erfahrungen aus dem bayerischen Modellversuch. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 98–101.

GRELL, J. (2001) *Schülerzentrierter Unterricht*. In: **GRELL, J.**: Techniken des Lehrerverhaltens. Verlag Beltz. S. 75-92.

PESCHEL, F. (2002) Offener Unterricht - Idee, Realität, Perspektive und ein praxiserprobtes Konzept zur Diskussion. Band I: Allgemeindidaktische Überlegungen. & Band II: Fachdidaktische Überlegungen. Schneider Verlag. Hohengehren, Baltmannsweiler.

WEIGAND, H.-G. (2006): Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Klassenstufe - Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. In: *Journal für Mathematik-Didaktik (JMD) 27 (2),* S. 89–112.

Stefanie MÜLLER-HEISE, Halle/Saale

Reflexive Gedanken von Schülerinnen und Schülern nach der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben - erste Befunde

Was bedeutet Lernen im Mathematikunterricht? Wissen wie man Formeln und Rechenoperationen anwendet? Nein. Lernen ist mehr als das. Peschek, Prediger und Schneider (2008) beschreiben es folgender maßen: „Mathematisches Tun beschränkt sich nicht auf die korrekte Durchführung von Rechenoperationen, es umfasst sehr wesentlich auch vielfältige Reflexionen im Hinblick auf die Bedeutung mathematischer Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Methoden." (ebd. S. 2)

Gerade der Begriff Reflexion scheint hier sehr wichtig zu sein. Dies nahm ich zum Anlass mich in einem Forschungsprojekt dem Reflexionsbegriff zu nähern und zu überlegen, wie bereits im Grundschulunterricht Reflexion bzgl. mathematischer Handlungen aussehen und gefördert werden kann.

1. Der Reflexionsbegriff

Unter Reflexion versteht man das Nachdenken über Zusammenhänge, die nicht unmittelbar vorliegen. (vgl. Peschek, Prediger und Schneider 2008) Das heißt, sie finden losgelöst vom eigentlichen mathematischen Handlungsprozess statt und bedürfen einem Erinnern an diese Handlungen. (vgl. Kluwe, Modrow 1988) In der Psychologie existiert übergeordnet der Begriff der Metakognition, welcher ebenfalls einen Denkprozess über das eigene Denken darstellt. Für die Bildung meines Reflexionsbegriffs habe ich zwei Modelle der Metakognition genauer betrachtet und miteinander in Verbindung gebracht. Auf der einen Seite steht das Modell von Kaiser, Kaiser (1999) aus der Psychologie, welches die Metakognition in metakognitives Wissen und metakognitive Kontrolle unterteilt. Hier ist besonders der Punkt des metakognitiven Wissens bedeutsam. Eigenes Wissen über Aufgaben, Lösungsstrategien und auch persönliche Vorlieben werden hier zusammengefasst. Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) haben in mehreren Arbeiten die Metakognition in drei verschiedene Phasen unterteilt, die sich auf unterschiedliche Zeitpunkte bzgl. des mathematischen Handlungsprozesses beziehen. Neben der Planungsphase, die vor der Bearbeitung stattfindet, und dem Monitoring, während der Bearbeitung, definieren sie die Reflexion als Phase, welche von Zwischen- oder Endergebnissen ausgeht und entsprechend nach der Bearbeitung stattfindet. Diese Bedeutung deckt sich im Kern mit den Definitionen von Kluwe, Modrow (1988) und

Peschek, Prediger, Schneider (2008). Daraus ergibt sich für mein Forschungsprojekt folgende Definition für Reflexion:

Reflexion ist ein metakognitiver Prozess, der von mathematischen (Teil-) Ergebnissen ausgehend geführt wird. Reflexion umfasst zum einen das Erinnern an den Weg, wie diese (Teil-) Ergebnisse zustande gekommen sind, also die Rekonstruktion von mathematischen Handlungen. Zum anderen umfasst Reflexion die Bewertung dieses rekonstruierten Weges. Grundlegend für den Reflexionsbegriff ist das Wissen, das die Schülerinnen und Schüler im Laufe der Zeit entwickeln, also ein Reflexionswissen.

Auch wenn in der Unterrichtspraxis häufig die Meinung vertreten wird, dass Reflexionen für Schülerinnen und Schüler zu schwer seien, ist es meiner Meinung nach wichtig, die Schülerinnen und Schüler frühzeitig zum eigenen kritischen Umgang mit ihren mathematischen Handlungen anzuregen. Dementsprechend liegt meinem Projekt der Gedanke zugrunde, Grundschüler über ihr eigenes Handeln im Mathematikunterricht nachdenken zu lassen.

2. Untersuchungsanlage

Als Aufgabentyp erscheinen Fermi-Aufgaben sehr sinnvoll. Grundsätzlich gilt hier nicht, ein richtiges Ergebnis zu finden, sondern einen Weg zu beschreiten, der nicht von vornherein klar, eindeutig und richtig ist. Gerade Wege, die nicht direkt zum Ziel führen, abgebrochen werden und zum Beschreiten eines neuen Lösungsweges führen, können die Schülerinnen und Schüler zum Nachdenken bringen. Fermi-Aufgaben werden in Kleingruppen bearbeitet und sind zeitlich schwer einzuschätzen. Somit entstand der Gedanke den Schülerinnen und Schüler ein Material an die Hand zu geben, welches sie vor allem bei der Erinnerung an den Lösungsprozess unterstützt. Diese Unterstützung wird durch den Rekonstruktionskasten gegeben, in dem sich Schalen mit Handlungskarten befinden, auf denen verschiedene mathematische Tätigkeiten abgedruckt sind. (vgl. Müller-Heise 2012)

Über sechs Untersuchungstermine wurden Schülerinnen und Schüler der 3. und 4. Klasse verschiedene Fermi-Aufgaben präsentiert. Diese wurden von ihnen zunächst in Gruppenarbeit bearbeitet. Wenn sie der Meinung waren, ein für sie plausibles Ergebnis erhalten zu haben, wurden sie zur Reflexion angeregt. Zunächst sollten sie sich Gedanken darüber machen, welche Schritte sie zur Lösungsgewinnung getan haben. Dazu erhielten sie den Rekonstruktionskasten als Unterstützung. Haben die Schülerinnen und Schüler die Rekonstruktion beendet, wurden sie zur Bewertung dieses Lösungsweges aufgefordert. Diese Bewertung erfolgte zunächst verbal und anschließend schriftlich auf einem Blatt. Abschließend wurden die Aufgabe, das Lösungsblatt, die Rekonstruktion sowie das Bewertungsblatt im Fermi-Hefter abgeheftet. Während des gesamten Prozesses wurden die Gruppen videographiert, so dass zur Auswertung neben Protokollen, dem Fermi-Hefter mit den Schülermaterialien auch videographische Aufzeichnungen als Datenmaterial zur Verfügung stehen.

3. Forschungsfragen

Neben der Frage, in welchen Phasen der gesamten Bearbeitungszeit die Gruppenmitglieder reflexive Gedanken äußern, interessiert vor allem der Inhalt dieser Äußerungen. Worüber wird denn überhaupt reflektiert? Weiterhin stellt sich die Frage, was die Schülerinnen und Schüler aus ihrer Sicht als Schwierigkeiten in der Bearbeitung sehen und als solche auch äußern. Im Gegenzug natürlich auch, was ihrer Meinung nach gut geklappt hat. Da die Untersuchung über mehrere Termine angelegt ist, könnten auch Bezüge zu zurückliegenden Bearbeitungsprozessen hergestellt und Vergleiche gezogen werden.

4. Erste Auswertungsergebnisse

Zur ersten Auswertung wurde eine Schülergruppe herausgegriffen und in den Videos nach markanten Stellen gesucht, in denen sprachliche Äußerungen mit reflexiven Gedanken zu finden sind. Dabei ist festzustellen, dass bereits während der Phase der Rekonstruktion Reflexionen auftreten. Dass derartige Äußerungen auch in der Bewertungsphase zu finden sind, war zu erwarten.

Inhaltlich konnten folgende Unterscheidungen anhand der gefunden Äußerungen in der Rekonstruktionsphase getroffen werden:

- Bezug zu vorangegangenen Bearbeitungsprozessen herstellen
- Äußerungen zu konkreten Tätigkeiten/ Handlungen im Bearbeitungsprozess der Gruppe
- Äußerungen zur konkreten Reihenfolge im Bearbeitungsprozess der Gruppe

Während der Bewertungsphase konnten folgende inhaltliche Kategorien analysiert werden:

- Bezug zu vorangegangenen Bearbeitungsprozessen herstellen
- Äußerungen zu Schwierigkeiten und deren Überwindung

- Äußerungen zu Phasen, die im Bearbeitungsprozess gut geklappt haben

Neben den zu erwarteten mathematisch-inhaltlichen Kategorien kommt auch der soziale Aspekt zum Tragen. Diese Kategorie wurde in der Schülergruppe einmal analysiert und bezog sich auf die Zusammenarbeit in der Gruppe. Wie bereits in den Kategorien zu erkennen ist, werden durchaus Bezüge zu bereits vergangenen Bearbeitungsprozessen hergestellt.

In der analysierten Schülergruppe wurde das Thema „Der Anfang", also wie begann der Bearbeitungsprozess, ab dem dritten Untersuchungstermin immer wieder thematisiert. So wurde der Anfang sowohl bei der dritten als auch bei der vierten Aufgabe als Schwierigkeit eingeschätzt. Hingegen hat der Anfang laut Schülerbewertung bei den beiden letzten Untersuchungsterminen gut geklappt. Hier wird deutlich, dass die Schüler einen Bezug zu den vorangegangen Bearbeitungen herstellen.

5. Ausblick

Der kurze Einblick in die ersten Analysen zeigt, dass die Reflexionen der Schüler verschiedene Aspekte beinhalten und sie in der Lage sind Bewertungen aus vergangenen Reflexionen auf neue Aufgabenprozesse zu beziehen.

Nachfolgend werden weitere Videos anderer Schülergruppen untersucht, um die bisher analysierten Reflexionsinhalte zu bestätigen, zu erweitern und nach weiteren übergreifenden Themen zu suchen.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile. In: Peter-Koop, A, Bikner-Ahsbahs, A. Mathematische Bildung – Mathematische Leistung. Hildesheim: Franzbecker, S. 233-248

Kaiser, A., Kaiser, R. (1999). Metakognition. Denken und Problemlösen optimieren. Neuwied/Kriftel: Luchterhand

Kluwe, R. , Modrow, K. (1988). Planen und Reflexion im Problemlöseverhalten 4- bis 7-jähriger Kinder. In: Schweizerische Zeitschrift für Psychologie. Bern: Hans Huber 47/1988, Heft 1 S. 171 – 181

Müller-Heise, S. (2012). Reflexion von mathematischen Arbeitsprozessen – wie sehen Grundschüler ihre Bearbeitung von Fermi-Aufgaben. In: BzMU. Münster: WTM

Peschek, W., Prediger, S., Schneider, E. (2008). Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. In: Praxis der Mathematik in der Schule Heft 20, S. 1- 6

Eva MÜLLER-HILL, Köln

Zur erklärenden Funktion geometrisch-zeichnerischer Darstellungen (GZDs)

1. Semiotische Aspekte mathematischen Erklärens

Das allgemeine Modell mathematischen Erklärens-warum, von dem die folgende Untersuchung ausgeht, ist eine Adaption eines wissenschaftstheoretischen Modells sogenannten nomischen Erklärens nach Bartelborth (2007) (vgl. dazu genauer (Müller-Hill 2011, 2012)). Demnach vollzieht sich eine mathematische Erklärung anhand eines hinreichend bereichsinvarianten Arguments mit Bezug auf allgemeine, stabile, essentielle Eigenschaften von für die Gültigkeit des Explanans und die Realisierung des Explanandums relevanten, grundlegenden Objekten. Eine wichtiges Charakteristikum dieser Erklärungskonzeption ist die Theorieabhängigkeit der Nomizitätseigenschaft. Im Folgenden gehe ich stets von einer gegebenen festen Hintergrundtheorie, die in erster Linie durch ihre grundlegenden Objekte und deren essentielle Eigenschaften und Beziehungen bestimmt ist, und einem darüber verfügenden hypothetisch-idealen Adressaten aus und suche nach in diesem Sinne intrinsischen Kriterien für das Erklärungspotential eines mathematischen Argumentes. Semiotische Aspekte, d.h. die Art und Weise der Zeichenverwendung im Argument, bilden dabei eine Kategorie möglicher intrinsischer Kriterien. Auf die Ausgangsfrage nach dem prinzipiellen Erklärungspotential der Zeichenverwendung in einem mathematischen Argument lassen sich hier zunächst zwei Ebenen unterscheiden: die Objektebene und die Eigenschafts- und Beziehungsebene. Mit Bezug auf diese Unterscheidung sind die folgenden beiden Thesen zum semiotischen Erklärungspotential von GZDs zu verstehen, die ich im Rahmen dieses Beitrages ohne weitere Motivation direkt formuliere:

These 1: Das semiotische Erklärungspotential von GZDs in mathematischen Argumenten für den Mathematikunterricht besteht zum einen darin, die für die Erklärung relevanten Basisobjekte durch "natürliche" oder explizit definierbare, sichtbare Zeichenkonstituenten, einzelne Basiszeichen oder Zeichenkomplexe in einem geometrischen Zeichensystem zu bezeichnen und damit sichtbar zu machen. Zum anderen werden die einer potentiellen Erklärungsbeziehung zugrundeliegenden essentiellen Eigenschaften der Basisobjekte sowie deren allgemeine Beziehungen als natürlicherweise oder definitorisch ausgezeichnete Konstruktions-, Manipulations- und Transformationsmöglichkeiten oder Invarianten darunter auf eine konkrete Handlungsebene abgebildet und damit hantierbar gemacht. Das so bezeichnete Explanandum wird also relativ zu einer geometrisch-anschaulichen

Hintergrundtheorie kausal erklärbar als Wirkung zulässigen Hantierens mit und an den Zeichen des Explanans.

These 2: Das besondere Erklärungspotential sowie spezifische Schwierigkeiten liegen hier auf der Eigenschafts- und Beziehungsebene. (Dagegen wird das Erklärungspotential von GZDs im Mathematikunterricht oft verkürzt nur in Bezug auf die Objektebene gesehen.)

Diese Thesen möchte durch drei (hier sehr skizzenhaft ausfallende) Beispielanalysen illustrieren und stützen. Den begrifflich-theoretischen Rahmen der Analyse bildet die semiotische Theorie von Peirce.

2. Semiotische Theorie der Zeichenrolle von GZDs

Im Folgenden werden GZDs grundsätzlich als ikonische Zeichen im Sinne von Peirce (1966) aufgefasst, d.h. als Zeichen, die zum bezeichneten Objekt in einer Ähnlichkeitsrelation stehen. Peirce differenziert ikonische Zeichen u.a. in Abbilder, bei denen die Ähnlichkeit zwischen "simple qualities" von ikonischem Zeichen und Objekt besteht (Bsp.: Photo), und Diagramme, bei denen die Ähnlichkeit zwischen der Form des Ikons und der relationalen Struktur innerhalb des Objekts besteht (Bsp.: Stadtplan).[1]

Peirces Differenzierung kann auf die Erklärungsfunktion von Abbild und Diagramm erweitert werden. Diagramme und Abbilder repräsentieren Basisobjekte in unterschiedlicher Weise: abbildhaft in direktem Bezug auf wahrnehmbare (z.B. visuelle) Qualitäten vs. relational-strukturell. Auch und vor allem aber identifizieren sie essentielle (also erklärungskonstituierende) Eigenschaften ihrer Objekte auf unterschiedliche Weise: Das Abbild via natürlicher Manipulationen direkt wahrnehmbarer Qualitäten des physischen Zeichens und (systematischer) Exploration von hinreichend stabilen Invarianten, das Diagramm dagegen via regelkonformer, natürlicherweise oder definitorisch ausgezeichneter strukturell-relationaler Transformationen und deren strenger Invarianten. Letztlich stellen Abbilder und Diagramme unterschiedliche Typen (in Bezug auf den logischen Status) von Erklärungsbeziehungen dar.

3. Beispielanalysen

1. Beispiel: GZDs im propädeutischen vs. abstrakten Geometrieunterricht

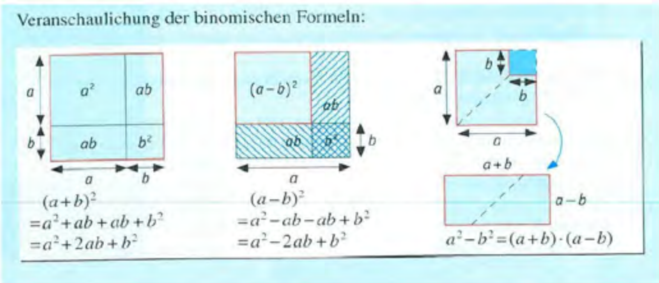
Dieses Beispiel bezieht sich auf die Rolle des Erkennens des Zeichenstatus von GZDs in einer mathematischen Argumentation beim Übergang vom propädeutischen zum abstrakten Geometrieunterricht: Im propädeutischen

---

1 Eine weitere Kategorie ikonischer Zeichen bilden die Metaphern, auf die ich im Rahmen dieses Beitrages aber nicht weiter eingehe.

Geometrieunterricht werden GZDs vor allem zur Begriffsbildung und zur Exploration geometrischer Lehrsätze (Winkelsumme etc.) eingesetzt. Die Schülerinnen und Schüler (SuS) gehen dabei mit GZDs im zeichentheoretischen Sinne als Abbilder um (vgl. Struve 1990). Im abstrakten Geometrieunterricht dienen GZDs neben der Veranschaulichung relevanter Basisobjekte und ggf. zur Verdeutlichung der Notation. Vor allem aber sollen sie hier allgemeine geometrische Argumentationen begleiten und vor dem Hintergrund einer allgemeinen geometrischen Theorie erklären. Dazu müssen sie aber als diagrammatische Zeichen interpretiert werden. Genau dieser semiotische Rollenwechsel wird von den SuS oft nicht vollzogen (vgl. prominent Schoenfeld 1985).

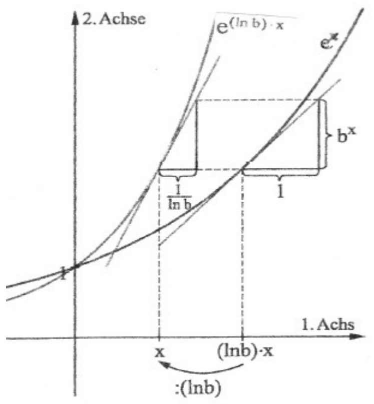
2. Beispiel: Veranschaulichungen der binomischen Formeln



Im Algebraunterricht werden GZDs diagrammatisch zur anschaulichen Rechtfertigung und Erklärung der Gültigkeit algebraischer Gleichungen eingesetzt. Die Basisobjekte der geometrischen Hintergrundtheorie sind dabei Figuren. Essentielle Eigenschaften von Figuren, die häufig konstitutiv für die anschauliche Erklärung sind, ist die Invarianz des Flächeninhalts unter unterschiedlichen Transformationen wie das Zerlegen, das Umordnen in und das Bewegen der gesamten Ebene. Im Falle des obigen Beispiels zur Veranschaulichung der binomischen Formeln zeigen sich trotz dieser Gemeinsamkeiten wichtige Unterschiede in Bezug auf das Erklärungspotential der drei GZDs: Zum einen (auf Objektebene) referieren die ersten beiden GZDs nur auf Basisobjekte, die den für die zugehörige binomische Formel relevanten, darin tatsächlich vorkommenden Termen entsprechen. Auf Eigenschaftsebene referieren sie auf die Eigenschaft der Einteilungsinvarianz von Flächen. Die dritte GZD bezieht sich auch auf Objekte, denen kein relevanter Term der Formel entspricht. Auf Eigenschaftsebene referiert sie darüber hinaus auf die Bewegungsinvarianz von Flächen, und setzt damit u.a. andere Grundvorstellungen zum Begriff „Flächeninhalt“ voraus.

3. Beispiel: Die Ableitung von Exponentialfunktionen

Im Schulbuch "Elemente der Mathematik – LK“ wird die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion vor der kalkülhaften Begründung mittels Kettenregel auf der Grundlage einer geeigneten algebraischen Darstellung mithilfe der unten abgebildeten GZD anschaulich begründet. Die GZD übernimmt dabei die Rolle eines (komplexen) Diagramms.



Die Basisobjekte der geometrischen Hintergrundtheorie sind Kurven, Tangenten und Figuren (Dreiecke), die erklärungsrelevanten Konstruktions- und Transformationsregeln im Koordinatensystem ohne Skala sind die Regel zur Tangentenkonstruktion mit Punkt und normiertem Steigungsdreieck und zur graphischen Streckung um einen konstanten Faktor ln b in x-Richtung. Hinzu tritt als erklärungskonstitutiv auf Eigenschaftsebene eine weitere allgemeine Manipulationsregel, deren Transparenz und Motivation für die SuS als Adressaten der potentiellen Erklärung gegeben sein muss: *Tangenten gehen unter Streckung der Kurve/ Ebene wieder in Tangenten über.*

4. Fazit

Die Beispielanalysen stützen Thesen (1) und (2) und unterstreichen damit, dass GZDs ein durchaus leistungsstarkes Instrument für mathematisches Erklären im Unterricht darstellen. Insbesondere wird die Erklärungsbeziehung selbst durch das Argumentieren mit GZDs als quasi kausal verständlich im Anschluss an unser Alltagsverständnis von Erklärungen. Problematisch bleibt eine verkürzte Sichtweise der Erklärungsfunktion von GZDs nur mit Bezug auf die Objektebene: der unterschiedliche Repräsentationsstatus von Zeichen in Bezug auf ihr Objekt wirkt sich, wie oben gesehen, erst auf Eigenschaftsebene wirklich aus und wird daher leicht übersehen. Ebenso werden durch eine oberflächliche Bewertung des erklärenden Nutzens von GZDs im Unterricht nur auf der Objektebene die Transparenz und Nachvollziehbarkeit der grundlegenden Konstruktions- und Transformationsmöglichkeiten für SuS u.U. nicht hinreichend hinterfragt und sichergestellt. Dadurch wird das vorhandene Erklärungspotential von GZDs letztlich nicht ausgeschöpft.

Literatur

Bartelborth, T. (2007). Erklären. Berlin: De Gruyter.

Müller-Hill, E. (2011). "Mathematische Erklärung – Wissenschaftsphilosophische Konzeptionen und ihre Relevanz für die Mathematikdidaktik". BzMU 2011, 583-586.

Müller-Hill, E. (2012). "Ein handlungsbasiertes Konzept mathematischer Erklärung". BzMU 2012, 617-620.

Peirce, Ch. S. (1966). Collected Papers of Charles Sanders Peirce. Hartshorne, Ch., & Weiss, P. (Hrsg.), Bde. 1-6. Cambridge: Harvard University Press.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Struve, H. (1990). Grundlagen einer Geometriedidaktik. Mannheim: BI-Verlag.

Bernd NEUBERT, Gießen

Kombinatorische Aufgaben in der Grundschule

Kombinatorische Aufgaben sind schon seit langer Zeit Bestandteil des Mathematikunterrichts in der Grundschule.

„Das Kombinieren – gemeiniglich ganz und sehr mit Unrecht vernachlässigt – gehört zu den allerleichtesten und vieles erleichternden Übungen, recht eigentlich für Kinder. Dass zwei Dinge ihre Stellung rechts und links (hinten und vorn, oben und unten) wechseln können, ist der Anfang. Dass drei Dringe sich sechsfach (in einer Linie) versetzen lassen, ist die nächste Folge. Wie viele Paare man aus einer Menge vorliegender Dinge nehmen könne, ist eine der leichtesten Fragen. Wie weit man fortzuschreiten habe, müssen die Umstände bestimmen.“ (Herbart 1841)

Im Beitrag soll der Frage nachgegangen werden, welches didaktische Potenzial sich im heutigen Zeitalter der Bildungsstandards damit verbinden lässt.

Einordnung kombinatorischer Aufgaben

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, dessen Inhalt sich von dem anderer mathematischer Disziplinen, zum Beispiel der Zahlentheorie, Geometrie oder Wahrscheinlichkeitsrechnung nur schwer abgrenzen lässt. Sie beschäftigt sich mit Problemen der Anordnung oder der Auswahl von bestimmten Objekten aus verschiedenen Bereichen der Wirklichkeit oder unseres Denkens und wird auch als „Kunst des geschickten Abzählens“ bezeichnet.

Die mathematische Zielstellung der Kombinatorik ist durch zwei Aufgabenstellungen gekennzeichnet:

1) Es ist festzustellen, welche Möglichkeiten es gibt, Elemente einer endlichen Menge nach bestimmten Bedingungen auszuwählen oder anzuordnen.

2) Es ist festzustellen, wie viele Möglichkeiten es dafür insgesamt gibt.

In den KMK-Bildungsstandards findet man nur eine kurze Anmerkung zu kombinatorischen Aufgaben. Unter der Leitidee „Zahlen und Operationen“ wird für den Teilbereich „in Kontexten rechnen“ auf die folgende inhaltbezogene mathematische Kompetenz orientiert: „Einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen“ (2005, S. 9).

In verschiedenen Quellen wird die Kombinatorik in engem Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeit betrachtet. Dies erscheint mir für die Sekundarstufen zur Anwendung der LAPLACE-Formel gerechtfertigt, in der Primarstufe werden für Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik weitgehend verschiedene Ziele verfolgt. Für Wahrscheinlichkeitsaufgaben sind zwar Anzahlbestimmungen nötig, dazu reicht in der Grundschule aber meist zählendes Vorgehen aus. Wirkliche kombinatorische Überlegungen kommen eher selten vor, zum Beispiel bei der Untersuchung verschiedener Summen beim Würfeln mit zwei Würfeln.

Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen

Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, welches Potenzial kombinatorische Aufgaben für die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen haben. Der Schwerpunkt wird dabei auf dem **Darstellen** liegen.

Orientiert man sich an den oben aufgeführten Fragestellungen der Kombinatorik, stellt die Suche nach prinzipiellen Möglichkeiten zum Zusammenstellen der endlichen Mengen kaum ein Problem dar, da die kombinatorische Aufgabenstellung in der Regel von Grundschülern verstanden wird. Das **Problemlösen** besteht in der Suche nach allen Möglichkeiten, der Beantwortung der Frage, ob alle Möglichkeiten gefunden wurden und dem Ausschließen „doppelter Möglichkeiten“.

Hier setzen auch die Möglichkeiten zur Entwicklung der Kompetenz des **Darstellens** an. „Für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen“ (S. 8) lautet die entsprechende Orientierung in den KMK-Bildungsstandards.

Für viele kombinatorische Aufgaben ist die Arbeit auf allen Repräsentationsebenen nach BRUNER möglich. Für den Unterricht müssen sich Lehrer unter anderem folgende Fragen stellen: Wird auf eine Darstellungsform orientiert? Wenn ja, auf welche? Oder sollen die Schüler eigene Möglichkeiten finden?

Im Folgenden werden Erkenntnisse aus Studien zur Arbeit mit kombinatorischen Aufgaben vorgestellt, die im Rahmen von Lehrveranstaltungen bzw. Examensarbeiten an der JLU Gießen durchgeführt wurden. Die Schülerinnen und Schüler konnten die Art der Darstellung selbst wählen.

In der ersten Studie wurden Zweitklässler im November mit drei kombinatorischen Aufgaben konfrontiert: Ermitteln der Anzahl der Möglichkeiten der Anordnung von drei verschieden farbigen Sternen, der Anzahl der Schlittenrennen zwischen vier Kindern, wenn immer zwei Kinder gegeneinander fahren und der Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten des

Anziehens des Weihnachtsmannes, wenn dieser vier Mützen und drei Mäntel besitzt (vgl. Breiter/Pfeil/Neubert 2009).

Die Schüler kamen beim Bearbeiten dieser Aufgaben erstmals mit kombinatorischen Problemen in Berührung. Die Darstellung der Lösungen wurde von den Schülern selbst gewählt. Dabei entstand eine breite Palette an Möglichkeiten. Während einige Schüler verständlicherweise die Anordnungen sehr emotional zeichneten, waren andere Darstellungen schon wesentlich abstrakter. Auf Nebensächlichkeiten in den Zeichnungen wurde verzichtet, die Anordnungen wurden aufgeschrieben und auch Ansätze von Baumdiagrammen waren zu finden.

In der zweiten Studie lösten Drittklässler, die vorher schon mit kombinatorischen Aufgaben in Berührung gekommen waren, die „Speisekartenaufgabe". Sie ermittelten die Anzahl aller möglichen Drei-Gänge-Menüs aus Vorspeise (zwei Möglichkeiten), Hauptgericht (vier Möglichkeiten) und Nachtisch (drei Möglichkeiten)

Obwohl die Lehrerin ausreichend Kärtchen zur Verfügung stellte, um alle möglichen Menüs getrennt zu legen, wurde dieses Material nur von wenigen Kindern genutzt. Es gab auch hier viele, recht unterschiedliche Darstellungsformen: Produktregel, Strukturdiagramm und das Notieren der Zusammenstellungen für ein Drei-Gänge-Menü in schriftlicher Form und unter Verwendung selbst erfundener Symbole (vgl. Jung 1999, Neubert 2011).

Ziel der dritten Studie (vgl. Werner 2011) war, das Notationsverhalten von Grundschulkindern aller vier Jahrgangsstufen miteinander zu vergleichen. Dazu musste eine Aufgabe gefunden werden, die auch schon von Erstklässlern verstanden und bearbeitet werden konnte. Die Wahl fiel auf das Bauen von Türmen aus drei Steinen verschiedener Farbe, wobei für einen Turm jede Farbe nur einmal verwendet werden durfte.

Typisch für Klasse 1 war, dass erst alle Türme mit jeweils neuen Steinen gebaut und anschließend die gefundenen Möglichkeiten notiert wurden.

In Klasse 2 war diese Strategie ebenfalls zu finden, wurde aber auch von anderen Vorgehensweisen abgelöst. Zum einen wurde jeder Turm direkt nach dem Konstruieren notiert, zum anderen wurde das Legematerial nur noch einfach verwendet.

Diese Vorgehensweise war auch in Klasse 3 dominierend. Außerdem kamen in dieser Klassenstufe keine Dopplungen mehr vor und die Vielfalt der Darstellungen nahm stark zu. Es gab ausgemalte Türme, Konturen von Türmen und immer mehr symbolische Darstellungen.

Die Viertklässler zeigten teilweise ein noch höheres Abstraktionsvermögen beim Lösen der Aufgabe. Die Schülerdokumente fielen vielfältiger aus. Es wurden zwar weiterhin Türme bzw. deren Konturen gezeichnet, es war aber auch eine Tendenz zum Arbeiten auf symbolischer Ebene in verschiedenen Varianten zu beobachten. Während einige Kinder die Farben der Steine nebeneinander anordneten, schrieben andere diese (als Turm) untereinander. Manche Schüler verzichteten auch schon darauf, alle Türme zu bauen, sondern lösten die Aufgabe kognitiv.

Fazit

Kombinatorische Aufgaben wirken in der Regel auf alle Kinder äußerst motivierend. Wenn die Kinder die Chance zum eigenständigen Lösen bekommen, sind sehr unterschiedliche Vorgehensweisen zu beobachten. Dies betrifft genau so die Darstellung des Lösungsweges.

Daraus lässt sich eine mögliche Empfehlung für die Behandlung kombinatorischer Aufgaben ableiten: Nach der Formulierung der Fragestellung sollten die Schüler Möglichkeiten und Darstellungsformen selbst suchen und anschließend ihre Lösungswege vorstellen. Besonders wichtige Darstellungsformen sollten explizit behandelt werden.

Literatur

Breiter, E., Pfeil, C., Neubert, B. (2009): Welche Möglichkeiten gibt es und wie viele? Kombinatorische Überlegungen in der Vorweihnachtszeit. – In: Praxis Grundschule 6, 53 - 56

Herbart, J. F. (1841): Umriss pädagogischer Vorlesungen. Zweite vermehrte Ausgabe. Göttingen: Druck und Verlag der Dieterichschen Buchhandlung

Jung, M. (1999): Lösungsverhalten von Schülern der 3. Klasse beim Bearbeiten einer kombinatorischen Aufgabe: Zusammenstellen von Menüs mit drei Gängen. Gießen: Justus-Liebig-Universität, Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen (unveröffentlicht)

Neubert, B. (2011): Kinder veranschaulichen ihre Denkprozesse und Lösungsideen. Zur Entwicklung der allgemeinen Kompetenz des Darstellens im Mathematikunterricht. In: Grundschulunterricht Mathematik 2, 4 - 4

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München

Werner, M. (2011): Die Turmaufgabe. Wie gehen Kinder unterschiedlicher Jahrgangsstufen mit derselben kombinatorischen Aufgabenstellung um? In: Grundschulunterricht Mathematik 4, 15 - 17

Christoph NEUGEBAUER, Münster

Mathematische Kompetenzen in Online-Self-Assessments – Grundlagen oder spezifische Anforderungen?

1. Ausgangslage

Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010 offenbaren eine negative Entwicklung der Schwund und Abbrecherquoten an deutschen Hochschulen (Heublein et al., 2012). Die Rechts-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften – zu denen auch die Psychologie zu zählen ist – liegen mit 24% an letzter Stelle des Rankings, Mathematik und Naturwissenschaften mit 39% allerdings an zweiter Stelle. Betrachtet man die zweite Fächergruppe genauer, so liegt die Mathematik mit 55% sogar an erster Stelle. Als Gründe für den Abbruch werden häufig drei Ursachen genannt. Während des Studiums auftretende finanzielle Schwierigkeiten, die sich im Vergleich zum Vorjahr zwar leicht gesteigert haben, aber weiterhin eher gering sind, motivationale Aspekte aufgrund falscher Erwartungen an das Studium und als häufigste Ursache für einen Studienabbruch eine Überforderung der Studierenden. 32% der befragten Abbrecher gaben Leistungsprobleme an, 14% hielten die Studienanforderungen für zu hoch, 5% hatten Zweifel an der eigenen Eignung.

Diese Schwierigkeiten im Fach Mathematik wirken sich auch auf das Studienfach Psychologie aus, da das Psychologiestudium einen hohen Mathematikanteil hat. Die Methodenlehre nimmt in den ersten beiden Semestern fast die Hälfte der Studienzeit in Anspruch und ist somit das umfangreichste Fach im Grundstudium. Neben Vorlesungen zur deskriptiven und schließenden Statistik stehen dabei Vorlesungen und Seminare zum Gebiet der Versuchsplanung und Vorlesungen zur Einführung in die elektronische Datenverarbeitung auf dem Plan. Gute Grundkenntnisse in Mathematik sind somit eine wichtige Voraussetzung für das Studium der Psychologie. Daher sollte man eine hohe Bereitschaft haben, diese Basiskenntnisse zu erlernen bzw. sich selbst beizubringen, falls man diese nicht mitbringt.

Um die hohen Abbrecherquoten zu verringern und die Studienzufriedenheit zu steigern, bieten immer mehr Universitäten Mathematik-Vorkurse für das Studienfach Mathematik und Mathematik-affine Studienfächer an.

Eine weitere Möglichkeit, frühzeitig eventuelle Schwächen aufzudecken und entsprechende Förderempfehlungen zu geben, bieten Online-Self-Assessments. Das Internet ist dabei ein ideales Zielgruppenmedium, da die angehenden Studierenden zu jeder Tageszeit den Online Test bearbeiten, unterbrechen und zu einem späteren Zeitpunkt wieder fortsetzen können.

Mit diesen Tests soll eine bessere Passung zwischen den Studieninteressierten und der Studierfähigkeit von angehenden Studierenden und den Anforderungen eines Studienganges erreicht werden. Individuelle Schwächen sollen vor Aufnahme des Studiums behoben werden, was zu einer größeren Studienzufriedenheit und einer geringeren Abbrecherquote führen kann.

2. Mathematische Kompetenzen

Gerade im Bereich der Mathematik ist der Übergang von der Schule in das Studium mit großen Hürden verbunden. Eine genauere Betrachtung der in der Schule vermittelten und im Studienfach Psychologie - einem Mathematik-affinen Fach - benötigten mathematischen Kompetenzen soll Hinweise für mögliche Gründe liefern. Dafür werden die in den Online-Self-Assessments verlangten mathematischen Kompetenzen als Maß für die im Studium benötigten mathematischen Kompetenzen herangezogen werden.

Das Kompetenzmodell (IQB, 2011), das den Bildungsstandards Mathematik in der Schule zu Grunde liegt, besteht aus den „allgemeinen mathematischen Kompetenzen“, den „inhaltsbezogenen Kompetenzen“ und den Anforderungsbereichen.

Den Kern der Standards bilden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen: (K1) Argumentieren, (K2) Probleme lösen, (K3) Modellieren, (K4) Mathematische Darstellungen verwenden, (K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen und (K6) Kommunizieren.

Zu den mathematischen Leitideen zählen: (L1) Zahl, (L2) Messen, (L3) Raum und Form, (L4) Funktionaler Zusammenhang und (L5) Daten und Zufall.

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden zusätzlich drei Anforderungsbereichen zugeordnet: (AB I) Reproduzieren, (AB II) Zusammenhänge herstellen und (AB III) Verallgemeinern und Reflektieren.

Aus dem vorliegenden Angebot onlinebasierter Self-Assessments der Internetseite von „studies-online“ (studies-online, 2013) wurden folgende Tests mit dem Studienfach Psychologie ausgewählt: Online-Studienberatung der RWTH Aachen, Studienscout Academicus der Universität Bonn, Online-Self-Assessment für das Studienfach Psychologie der Universität Frankfurt, Studienkompass Psychologie der Universität Hamburg und Online Studienwahl Assistent der Universität Freiburg.

3. Mathematische Kompetenzen in Online-Self-Assessments

Jeder Testaufgabe der fünf Self-Assessments wurden mindestens eine prozessbezogene Kompetenz, mindestens eine Leitidee und ein Anforderungsbereich zugeordnet. Verdeutlicht werden soll dies an zwei Beispielen:

Berechne: $\frac{3}{4}+\frac{3}{10}-\frac{1}{5}*\frac{1}{2}=?$

Beispiel 1:

Diese reine Rechenaufgabe erfordert als Kompetenz den Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik (K5), kann zur Leitidee (L1) „Zahl“ gezählt werden und entspricht dem Anforderungsbereich I, da es lediglich um die Anwendung eines Routineverfahrens geht.

Ein Student wertet in seinem Praktikum in einem Unternehmen einen Fragebogen zur Mitarbeiterzufriedenheit aus. Insgesamt liegen ihm von 400 der 700 Mitarbeiter/innen Fragebogen vor. In 60 % der Bögen bemängeln die Mitarbeiter/innen den Informationsfluss im Unternehmen. Wenn diese Quote repräsentativ für das Unternehmen ist, wie viele der Mitarbeiter/innen sind dann unternehmensweit mit dem Informationsfluss unzufrieden?

Beispiel 2:

Diese Aufgabe erfordert die Kompetenz (K2) „Probleme mathematisch lösen“, kann wiederum der Leitidee (L1) „Zahl“ zugeordnet werden und entspricht dem Anforderungsbereich II.

Die fünf untersuchten Self-Assessments unterschieden sich sowohl in der Anzahl der gestellten Aufgaben – 2 bis 26 Aufgaben – als auch in den geforderten prozessbezogenen Kompetenzen und den entsprechenden Leitideen. In der Abbildung 1 sind alle fünf Universitäten gegenüber gestellt. Da bei den Aufgaben der Tests Mehrfachnennungen bezüglich der prozessbezogenen Kompetenzen und der Leitideen möglich waren, summieren sich die Anzahlen der Aufgaben teilweise über das Maximum der gestellten Aufgaben eines Tests.

4. Ergebnisse

Wie der Abbildung 1 zu entnehmen ist, liegt der Schwerpunkt der abgefragten Kompetenzen eindeutig bei K5 („Mit symbolischen, formalen…“), gefolgt von K4 („Mit mathematischen Darstellungen umgehen“) und K6 („Kommunizieren“). Dagegen finden die Kompetenzen „Argumentieren“ (K1), „Problemlösen“ (K2) und „Modellieren“ (K3) keine bzw. lediglich eine geringe Beachtung.

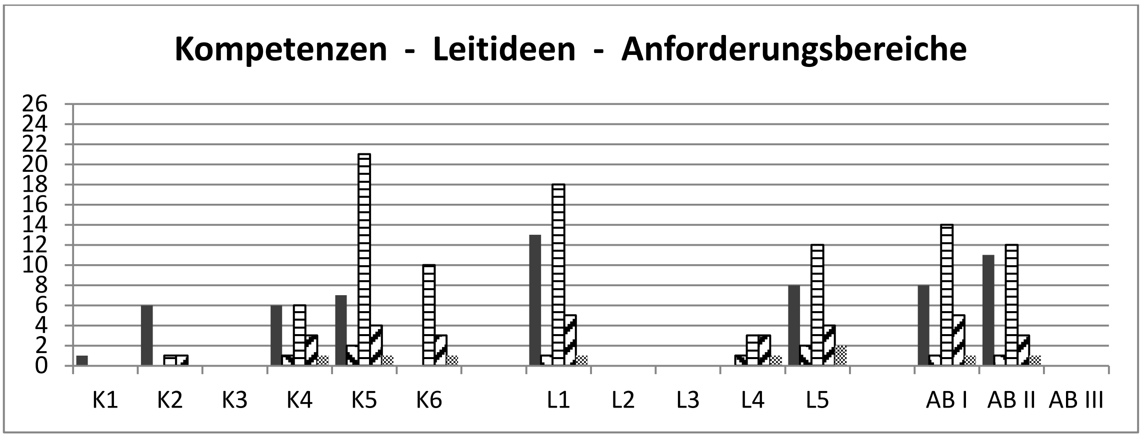


Abbildung 1: Vergleich der fünf Online-Self-Assessments

Neben der Leitidee „Daten und Zufall“ (L5) können die Aufgaben den Leitideen „Zahl“ (L1) und „Funktionaler Zusammenhang“ (L4) zugeordnet werden. Die Leitideen „Messen“ (L2) und „Raum und Form“ (L3) werden nicht berücksichtigt. Betrachtet man die Anforderungsbereiche, so stellt man fest, dass etwa die Hälfte der Aufgaben dem ersten, die andere Hälfte dem zweiten Anforderungsbereich entspricht.

Da die „Kompetenz zum Lösen komplexer, dynamischer, teilweise intransparenter Probleme […] als eine Schlüsselqualifikation für praktisch alle akademischen Berufe verstanden werden“ (Wittmann et al., 1996) kann, muss sie mehr Beachtung in Online-Self-Assessments finden. Weiterhin sind in der Psychologie vielfältige Modellierungen vorzufinden, so dass diese Kompetenz ebenfalls Berücksichtigung finden muss.

Alle vorliegenden Tests versäumen es, wichtige Aspekte mathematischer Kompetenzen abzufragen. Das Ziel ein möglichst differenziertes und realistisches Bild darüber zu vermitteln, was im Psychologiestudium erwartet wird, kann daher nicht erreicht werden.

Literatur

Heublein, U.; Richter, J.; Schmelzer, R.; Sommer, D. (2012): Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen (HIS: Forum Hochschule Nr. F03/2012) Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010.

IQB, Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen, (2011): Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik, http://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm

studies-online (2013): Verzeichnis von Selbsttests zur Studienorientierung, http://www.studis-online.de/StudInfo/selbsttests.php

Wittmann, W. W., Süß, H.-M., Oberauer, K. (1996): Determinanten komplexen Problemlösens, http://www.psychologie.uni-mannheim.de/psycho2_alt/publi/ps/ber09.pdf

Robert NEUMANN, Freiburg/Nürnberg

CAS-Taschenrechner und die Untersuchung von mathematischen Fähigkeiten bei Erstsemesterstudierenden

In den letzten Jahren befassten sich verschiedene Studien mit der Untersuchung von Computeralgebrasystemen (CAS) im Unterricht. So z.B. in Bayern im Rahmen des Bayerischen Modellversuchs M^3 (Weigand 2010), CAliMERO (Pinkernell 2011) und CASI (Rieß, M. Grefrath 2011), sowie die Metastudie von B. Barzel (Barzel 2012)

Konzeption und Forschungsfrage

Trotz positiver Ergebnisse dieser Studien wurden mangelnde händische Fähigkeiten von Studienanfängern von universitärer Seite teilweise mit dem Einsatz von CAS in der Schule begründet. Dies war ein Anlass, zu untersuchen, inwieweit sich diese These bestätigen lässt. Das Forschungsinteresse konzentrierte sich also darauf, zu untersuchen, ob sich im Hinblick auf mathematische Basiskompetenzen Unterschiede zwischen Schülern, die mit CAS und solchen, die ohne CAS in der Schule gearbeitet haben, feststellen lassen.

Das Untersuchungsdesign

Der Studie liegt ein quasiexperimentelles Untersuchungsdesign zugrunde. Es wurden Erstsemesterstudierende hinsichtlich ihrer Basiskompetenzen getestet. Dabei wurde nur unterschieden, ob im Abitur ein CAS oder ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benutzt wurde.

Die untersuchten Studienanfänger bearbeiteten zum Beginn des Studiums in der ersten Vorlesungsstunde einen Test. Es wurde zusätzlich erhoben, welche Art von Technologie im Mathematikunterricht der letzten Jahre verwendet worden war. Für die Auswertung wurden 462 Datensätze von Schülerinnen und Schülern aus allgemeinbildenden Gymnasien und Gesamtschulen ausgewertet. (Darunter 346 GTR-Benutzer und 116 CAS-Benutzer, sowie 309 GK-Schüler und 153 LK-Schüler.)

Da sich die Schulen in Niedersachsen für den verwendeten Taschenrechner schulweise entschieden, hatten die Schüler keine Möglichkeit, den verwendeten Rechnertyp zu wählen.

Die Aufgaben im Rahmen der Untersuchung

Bei der Untersuchung ging es primär darum, Basiskompetenzen zu untersuchen. Die verwendeten Aufgaben lassen sich den folgenden Gruppen zuordnen:

- Algebra- und Kalkülaufgaben. Die Aufgaben in diesem Bereich setzten sich aus Multiplikations- und Divisionsaufgaben und Aufgaben zum Potenzrechnen zusammen. Außerdem sollten Ausdrücke mit Variablen auf dem Zahlenstrahl richtig eingeordnet werden.
- Gleichungsaufgaben, bei denen Gleichungen mit einer bzw. mehreren Variablen gelöst wurden.
- Textaufgaben. Hierbei handelte es sich um „klassische" Textaufgaben.
- Interpretation von Funktionsgraphen. Es wurden Funktionsgraphen angegeben, die im Hinblick auf ihren Sachzusammenhang interpretiert werden sollten. Diese boten die Möglichkeit auch Bereiche des Reflektierens und Interpretierens zu untersuchen.

Die Studierenden bearbeiteten diese Testaufgaben in ihrer ersten Vorlesungsstunde ohne Hilfsmittel.

Methode

Die Testergebnisse wurden quantitativ ausgewertet, eine qualitative Analyse einzelner Items steht noch aus. Die Daten wurden einer Varianzanalyse unterzogen, um so den Einfluss verschiedener Faktoren auf die auszuwertenden Daten bestimmen zu können.

Ergebnisse

Bisher wurden die Daten im Hinblick auf Rechenfehler bei Grundrechenarten, Fehler beim Interpretieren von Funktionsgraphen und der Anzahl an bearbeiteten Aufgaben untersucht. In allen drei Bereichen zeigten sich ähnliche Ergebnisse bezüglich der beiden Gruppen GTR und CAS, wenn auch in unterschiedlich starker Ausprägung.

Untersucht wurde bisher der Einfluss folgender Faktoren:

- Faktor „Abiturzeitpunkt": Es handelt sich um die verstrichene Zeit zwischen dem Abitur und der Durchführung des Tests,
- Faktor „Kursniveau": Hierbei wurde unterschieden, ob in der Schule ein Grundkurs oder ein Leistungskurs besucht wurde,
- Faktor „Art des Taschenrechners": Hier wurde unterschieden, ob ein GTR oder ein CAS in der Schule verwendet wurde.

Bei allen bisher untersuchten Bereichen zeigte sich, dass der Faktor „Abiturzeitpunkt" keinen signifikanten Einfluss auf die Testergebnisse hat. (Gemessen wurde ca. 6 bzw. 18 Monate nach dem Abitur). Der in der Schule besuchte Kurs, also Grundkurs oder Leistungskurs hingegen hat einen hochsignifikanten Einfluss. Der in der Schule verwendete Rechner hat – isoliert betrachtet – keinen signifikanten Einfluss. Untersucht man jedoch die Wechselwirkung in Zusammenhang mit dem in der Schule besuchten Kurs, zeigt sich ein Einfluss, der bei zwei der drei untersuchten Gebiete statistisch signifikant ist. Dies soll am Beispiel des Themas „Interpretieren von Funktionsgraphen" verdeutlicht werden:

Die Teilnehmer des Tests interpretierten 3 Funktionsgraphen im Sachzusammenhang, die Fragestellungen waren vergleichbar mit Aufgabenstellungen im Mathematikabitur, z.B. in einem Fall eine Kurve, die die Anzahl von Fischen in einem Teich angibt.

Zur Auswertung wurden präzise Aussagen mit 1 Punkt und weniger präzise Aussagen mit 0,5 Punkten bewertet. Die anfänglich 10 Items wurden nach einer Reliabilitätsanalyse auf 8 Items reduziert (Cronbachs $\alpha = 0{,}8$). Der Wert der statistischen Signifikanz beträgt für das Kursniveau $\alpha = 0{,}001$. Betrachtet man nur die Ergebnisse des verwendeten Rechnertyps, so erhält man einen (nicht signifikanten) Wert von $\alpha = 0{,}79$. Wenn man aber den Einfluss der Wechselwirkung zwischen Kursniveau und Rechnertyp betrachtet, so ergibt sich in diesem Fall ein Wert von $\alpha = 0{,}03$. Dieser Zusammenhang wird durch Abbildung 1 illustriert.

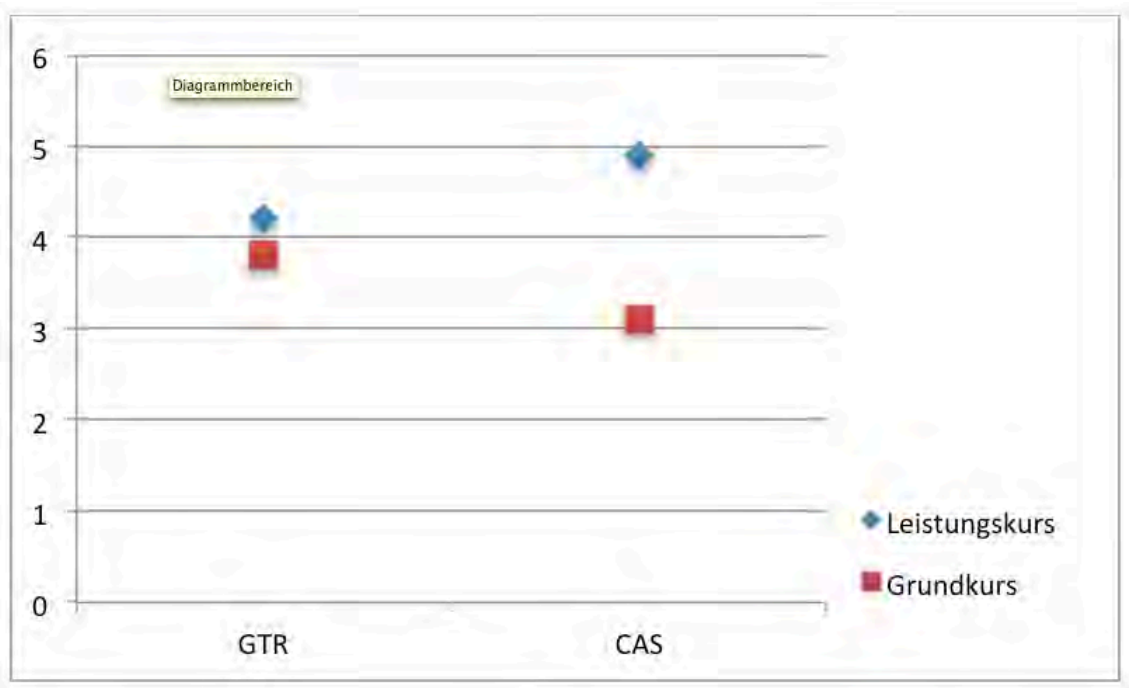


Abb. 1: Geschätzte Randmittel der erreichten Punktzahl, es konnten maximal 8 Punkte erreicht werden.

In der Grafik lässt sich erkennen, warum der verwendete Taschenrechner als Faktor insgesamt keinen signifikanten Einfluss hat, solange man nicht das Kursniveau mit in Betracht zieht: Die Mittelwerte von GTR und CAS sind annähernd gleich, aber die Varianz ist beim CAS sehr viel größer.

Ein ähnliches Bild ergibt sich auch bei den anderen beiden untersuchten Bereichen. Bei den Rechenaufgaben ist der Einfluss der Wechselwirkung allerdings nicht statistisch signifikant. Dies steht im Einklang damit, dass die Fragen im Bereich der Rechenaufgaben einen größeren Bereich abdeckten und damit auch eine kleinere Trennschärfe besitzen.

Diese Ergebnisse legen den Schluss nahe, dass es zwischen den beiden Gruppen zu einer Leistungsspreizung gekommen ist, man könnte sagen: „Die Guten wurden mit CAS besser, die Schlechten schlechter". Allerdings können mit dieser Studie keine Aussagen über die möglichen Ursachen getroffen werden. Hier wäre z.B. die Frage zu stellen, ob und inwieweit Unterrichtstil und -methoden mit dem CAS geändert wurde, oder ob das CAS nur als „Taschenrechner, der noch mehr kann" eingesetzt wurde.

Des weiteren wäre die Frage zu stellen, ob es Unterschiede in Gerätekompetenz und Motivation auf Seiten der unterrichtenden Lehrer gibt, je nachdem, ob diese einen Grund-, oder einen Leistungskurs unterrichteten.

Ausblick

Im weiteren Verlauf der Arbeit ist geplant, noch die Textaufgaben in gleicher Art zu untersuchen. Im weiteren Fortgang der Auswertung soll noch untersucht werden, ob sich qualitative Unterschiede in Bezug auf die Lösungswege zwischen den beiden Untersuchungsgruppen nachweisen lassen.

Literatur

Barzel, B. (2012), Computeralgebra im Mathematikunterricht: ein Mehrwert – aber wann? Münster: Waxmann

Rieß, M., Greefrath, G. (2011): Das Projekt CASI: Ergebnisse aus dem ersten Projektjahr, Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 21.02. bis 25.02.2011 in Freiburg, Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, WTM-Verlag, Münster, 311-314.

Pinkernell, G., Bruder, R. (2011): Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel & al. (Hrsg.): PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Münster: Waxmann, 123-234.

Weigand, H.G, Bichler, E. (2010): Der Einsatz von Taschencomputern an bayerischen Gymnasien – Analyse eines langjährigen Unterrichtsversuchs. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. GDM-Tagung für Didaktik der Mathematik. Münster: WTM-Verlag

Inga NIEDERMEYER, Lüneburg

Begründungen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern bei Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme

In Einzelinterviews mit 95 Kindern wurde getestet, wie gut Kinder am Schulanfang in der Lage sind, sich vorzustellen, wie ein Gegenstand aus einer anderen als der eigenen Perspektive betrachtet aussieht. Fragestellung der Untersuchung ist, ob der Einsatz von symmetrischen oder unsymmetrischen Gegenständen dabei einen Unterschied macht. Es wird vermutet, dass Kindern die Aufgaben mit symmetrischen Gegenständen schwerer fallen, da bei diesen zwei Ansichten symmetrisch zueinander sind und deshalb leicht miteinander verwechselt werden können. Im vorliegenden Beitrag steht die Analyse der Begründungen der Kinder bei Aufgaben mit Playmobil-Tieren im Mittelpunkt.

1. Methode[1]

Zentrale Aufgabenstellung der Interviews war die Zuordnung von Fotos zu entsprechenden Ansichten von Playmobil-Figuren, die an vier Seiten um einen Gegenstand herum platziert waren. In den Interviews wurde ein Aufgabenset mit insgesamt 16 verschiedenen Gegenständen eingesetzt. Variierte Faktoren waren dabei neben der Symmetrie der Objekte die Objektart (Playmobil-Tiere, Quaderbauwerke), die Ausrichtung der Objekte in Relation zum Kind, sowie die Art der abgefragten Ansicht (Vorder-/Hinteransicht bzw. Seitenansichten). Bei den Playmobil-Tieren wurden unsymmetrische Exemplare durch Anheben eines Beines und Hinzufügen eines Gegenstandes aus dem Zirkus-Kontext erstellt.

2. Lösungsraten und Fehlertypen

Die einzelnen Items wurden im Durchschnitt von 79% aller Kinder gelöst, das am schlechtesten gelöste Item von 36% der Kinder, das beste von 99%. Zwischen Aufgaben mit unsymmetrischen und symmetrischen Gegenständen zeigte sich bezogen auf die Lösungsraten kein Unterschied. Bei den symmetrischen Tieren wurden jedoch deutlich häufiger die Seitenansichten miteinander verwechselt, während bei unsymmetrischen Tieren häufiger ein egozentrischer Fehler begangen wurde, der sich in der Auswahl des Fotos, das die eigene Ansicht zeigt, äußert.

Um diese Beobachtungen besser zu verstehen, werden die videografierten Begründungen der Kinder für ihre Lösungen mit Hilfe eines Kategoriensystems ausgewertet, das im Folgenden vorgestellt wird.

---

[1] Für genauere Ausführungen zum theoretischen Hintergrund und zur Methode vgl. Niedermeyer 2012.

3. Kategoriensystem zur Auswertung der Kinderaussagen

Die vorgestellten Kategorien beziehen sich auf die Items der Objektart Tiere. Sie wurden durch die Analyse von Gemeinsamkeiten und Unterschieden vor dem Hintergrund der Theorie gebildet.

<u>Kategorie 1: Bezug auf Details, WAS vom Tier wird gesehen?</u>

Die erste Kategorie von Begründungen nimmt Bezug auf Details des Tieres, bezieht sich also darauf, WAS vom Standort des Männchens aus zu sehen ist. In diese Kategorie fallen beispielsweise folgende Aussagen: „Der sieht das Gesicht.“; „Sie fotografiert das hier (Kind zeigt auf ein Detail am Tier).“; „Weil man da den Schwanz sieht.“

<u>Kategorie 2: Bezug auf die innere Ausrichtung des Tieres, WIE wird das Tier gesehen?</u>

Die zweite Begründungskategorie bilden Aussagen, die sich nicht mehr auf Details, sondern nur noch auf ausgezeichnete Seiten des Tieres beziehen. Darunter fallen Aussagen wie folgende: „Man sieht das von vorne.“; „Der steht hinter ihm.“; „Der fotografiert die Seite.“

<u>Kategorie 3: Ausrichtung bzw. Blickrichtung des Tieres</u>

In diese Kategorie fallen alle Aussagen darüber, wie das Tier ausgerichtet ist, ohne dabei Bezug auf Details oder die innere Ausrichtung des Tieres zu nehmen. In den meisten Fällen wurden diese Begründungen mit Gesten unterstützt. Beispielaussagen sind: „Der Elefant guckt zu dem Männchen.“; „Der geht nach da (Kind macht Bewegung vom Tier zum Männchen).“; „Weil das sorum steht (Kind macht Bewegung am Tier von hinten nach vorne).“

<u>Kategorie 4: Ausrichtung bzw. Standort des Männchens</u>

Begründungen, die dieser Kategorie zugeordnet wurden, beziehen sich auf das Männchen, ohne zu sagen, was oder wie das Männchen das Tier sieht. Auch diese Aussagen wurden oft von Gesten begleitet. Beispiele sind: „Weil der da steht (Kind zeigt auf das Männchen).“; „Der guckt so (Kind macht Bewegung vom Männchen zum Tier).“

<u>Weitere Kategorien</u>

Neben einigen nur vereinzelt auftretenden Kategorien, die an dieser Stelle nicht vorgestellt werden (bspw. Aussagen wie „Weiß ich nicht.“) gibt es noch eine Kategorie, die oft beobachtet werden konnte. Darunter fallen alle Aussagen, die eher einer Behauptung als einer Begründung ähneln oder lediglich eine Bekräftigung der Foto-Auswahl darstellen. Beispiele für diese Kategorie sind folgende Aussagen: „Das ist so.“; „Weil das passt zusammen.“; „Das erkenn ich.“; „Guck, das ist gleich (Kind hebt Foto hoch und dreht es in Richtung des Männchens).“ Auf diese Kategorie wird im Folgenden mit der Bezeichnung „Darum!“ Bezug genommen.

4. Häufigkeiten der Kategorien

Die folgenden Häufigkeiten der Kategorien beziehen sich auf alle Begründungen bei richtiger Lösung, die eindeutig zugeordnet werden konnten. Bei den Vorder- und Hinteransichten begründeten die Kinder in 80% der Fälle ihre Lösungen mit Aussagen der Kategorien 1 oder 2, die in diesem Fall immer eindeutig sind. Ein Unterschied zwischen symmetrischen und unsymmetrischen Tieren konnte dabei nicht festgestellt werden. Dies war zu erwarten, da bezüglich Kopf und Hinterteil keine Unterschiede zwischen symmetrischen und unsymmetrischen Tieren bestehen.

Vorder-/Hinteransichten	*symmetrisch*	*unsymmetrisch*
Kategorie 1: WAS	48%	50%
Kategorie 2: WIE	35%	32%
Kategorie 3: Ausrichtung Tier	5%	5%
Kategorie 4: Ausrichtung Männchen	4%	5%
Kategorie „Darum!“	6%	7%

Bei den Seitenansichten zeigte sich dagegen ein deutlicher Unterschied zwischen Aufgaben mit symmetrischen und unsymmetrischen Tieren. Bei den unsymmetrischen Tieren nahmen die Kinder häufiger Bezug auf die Details wie die angehobenen Beine oder die hinzugefügten Gegenstände, die ihnen mit Bezug auf die Vorne-hinten-Relation die Möglichkeit bieten, zwischen den beiden Seitenansichten zu unterscheiden („Da ist das Bein vorne.“). Bei den symmetrischen Tieren, bei denen die Kategorien 1 und 2 nicht eindeutig sind, da markante Merkmale oder „die Seite“ von beiden Seiten aus gleich gut zu sehen sind, griffen sie dagegen auf die Ausrichtung des Tieres zurück oder verfielen in Begründungen der Kategorie „Darum!“.

Seitenansichten	*symmetrisch*	*unsymmetrisch*
Kategorie 1: WAS	9%	48%
Kategorie 2: WIE	17%	14%
Kategorie 3: Ausrichtung Tier	34%	14%
Kategorie 4: Ausrichtung Männchen	6%	3%
Kategorie „Darum!“	29%	20%

5. Diskussion und Ausblick

Auch wenn sich in der vorliegenden Untersuchung in Bezug auf die Lösungsraten die Vermutung, dass Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme mit symmetrischen Gegenständen weniger gut gelöst werden als mit unsymmetrischen Gegenständen, nicht bestätigt hat, so geben die beobachteten Unterschiede in der Verteilung der Fehlertypen sowie in den Begründungen zu den Aufgaben der Objektart Tiere doch einige Hinweise, auf welche Art und Weise Kinder am Schulanfang solche Aufgaben lösen und warum symmetrische Gegenstände größere Schwierigkeiten bereiten als unsymmetrische. Es scheint sich zu bestätigen, was bereits Flavell et al. 1992 sowie Coie/Costanzo/Farnill 1973 herausfanden: Kinder achten zuerst darauf, *was* vom anderen Standpunkt aus zu sehen ist und erst im zweiten Schritt darauf, *wie* genau es zu sehen ist, also auf die Relationen zwischen mehreren Objekten bzw. zwischen Objekt und Umgebung. Bei den symmetrischen Tieren liegt zwischen den beiden zueinander symmetrischen Seitenansichten kein Unterschied auf der Ebene der Merkmale vor, sondern nur in der Links-rechts-Relation, so dass es nachvollziehbar scheint, dass die Kinder dort häufiger die Seitenansichten verwechseln sowie in ihren Begründungen weniger Bezug nehmen darauf, *was* vom anderen Standpunkt aus zu sehen ist.

Die vorgestellten Häufigkeiten der Begründungskategorien beziehen sich nur auf richtige Lösungen. Im weiteren Verlauf der Auswertung werden die Begründungen bei richtiger Lösung mit denen bei Fehllösungen verglichen, um die Schwierigkeiten der Kinder zu verstehen.

Desweiteren wird es interessant sein, die Begründungen der Kinder bei den Aufgaben mit Quader-Bauwerken zu analysieren. Vermutlich zeigen sich dort andere Kategorien von Begründungen, da die Quader weniger markante Merkmale bieten und keine innere Ausrichtung haben, auf die Bezug genommen werden kann.

Literatur

Coie, J. D.; Costanzo, P.; Farnill, D. (1973): Specific transitions in the development of spatial perspective-taking ability. In: Developmental Psychology 9 (2), 167–177.

Flavell, J. H. (1992): Perspectives on perspective taking. In: H. Beilin und P. B. Pufall (Hrsg.): Piaget's theory: Prospects and possibilities. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 107–139.

Niedermeyer, I. (2012): Räumliche Perspektivübernahme am Schulanfang – Symmetriebedingungen im Aufgabendesign. In: M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM, 629-632.

Engelbert NIEHAUS, Dominik FAAS, Koblenz-Landau

Mathematische Beweise in elektronischen Klausuren in der Lehramtsausbildung

Multiple-Choice-Klausuren werden im Allgemeinen nicht als geeignete Prüfungsform für fachmathematische Beweise betrachtet. Die Komplexität logischer Strukturen und die Möglichkeit, unterschiedliche Beweiswege und Begründungen zu wählen, machen ferner eine algorithmische Überprüfung von Beweisen schwierig. Ziel ist es, in Anlehnung an Beweispuzzle für Online-Prüfungsumgebungen die Grenzen und Chancen von Beweisen in elektronischen Klausuren an dem Beispiel einer fachwissenschaftlichen Veranstaltung in der Lehramtsausbildung zu beleuchten und allgemeinere fachdidaktische Schlussfolgerungen für elektronische Klausuren mit Beweisen zu ziehen.

1. Zielsetzung der E-Klausur & organisatorische Rahmenbedingungen

Eine E-Klausur im Masterstudiengang Lehramt Mathematik wurde auf der Basis der an der Universität Koblenz-Landau für E-Klausuren genutzten OpenSource Software ILIAS konzipiert (IWM Koblenz 2011) und die Nutzung von Beweispuzzlen bezog sich dabei auf ein Standard-E-Klausurumgebung ohne verfügbare Methoden zu automatischen Beweisüberprüfung im Sinne von (Adams u. a. 1999).Die Klausur war nicht als reine E-Klausur angelegt, sondern eine *"Hybridklausur"* mit 3 E-Klausuraufgaben als Beweispuzzle und einer Beweisaufgabe die konventionell auf Papier in herkömmlicher Weise bearbeitet wurde. Die allgemeine Motivation zum Einsatz von E-Klausuren findet man z.B. bei (Wetter 2010). Die E-Klausurauteile wurden an Rechnern von den Studierenden in ILIAS eingegeben. Die Klausuren wurden aber ausgedruckt und der Ausdruck wurde von den Studierenden unterschrieben. Damit ist die E-Klausur formal eine konventionelle Papierklausur mit elektronischer Unterstützung, für die rechtlich in der Prüfungsordnung keine Erweiterung der Prüfungsform auf E-Klausuren notwendig war.

Inhaltliche Zielsetzung war die Implementierung von mathematischen Beweisen als Aufgaben innerhalb der E-Klausur, wobei die Möglichkeiten der gegeben E-Klausurumgebung in Hinblick auf den Aufgabentyp "Mathematischer Beweis" in dem Piloten untersucht werden sollte.
Durch die Hybridklausur aus E-Klausuranteilen und Papierklausuraufgabe war ein erster Vergleich von Lösungskompetenzen bei E-Klausuranteilen und Papierklausuranteil möglich, der allerdings in dieser Phase noch keine statistisch belastbaren Ergebnisse liefert.

2. Umsetzung der E-Klausur-Aufgaben

Die Umsetzung der E-Klausuraufgaben wurde als ein Beweispuzzle geplant, bei dem im Allgemeinen *m* Fragmente eines Beweises auf *p* Positionen mit $p \leq m$ verteilt werden konnten. In der Pilotklausur war den Studierenden die Anzahl *n* der notwendigen Beweisfragmente mit $n=p$ bekannt und es wurden immer zusätzliche Beweisfragmente angeboten, die als falsche Fragmente nicht für den Beweis verwendet werden konnten (d.h. es gilt $p<m$). Schwieriger würde das Beweispuzzle für Studierende, wenn aus *m* möglichen Beweisfragmenten nur *n* notwendige Beweisfragmente benötigt werden und damit aus der Anzahl der angebotenen Beweispositionen *p* nicht von den Studierenden abgeleitet werden kann, wie viele Beweisfragmente für den Beweis tatsächlich notwendig sind, d.h., für eine solche Beweispuzzleaufgabe gilt $n<p<m$.

3. Arbeitsweise mit dem Beweispuzzlen

Zunächst wird die Klausur in Papierform den Studierenden ausgehändigt. Fast alle Studierenden, die an der Klausur teilgenommen haben, bearbeiteten die E-Klausurbestandteile zunächst in Papierform. In der Regel wurde erst dann der Laptop verwendet, um die gefundene Sequenz aus Beweisfragmenten in die E-Klausurumgebungen ILIAS einzugeben (ILIAS Society 2013). Die E-Klausuraufgaben waren so aufgebaut, dass auf der *linken* Seite *p* Beweispositionen zur Verfügung standen und auf der *rechten* Seite die *m* möglichen Beweisfragmente mit der Maus auf die entsprechende Beweisposition gezogen werden konnten. Mit Beweisfragmenten belegte Positionen konnten nach der Zuordnung noch abgeändert werden und auf eine neue Position im Beweis gezogen werden. Die Eingabe der Lösung zu dem Beweis bereitete den Studierenden keine Probleme, da eine Demoaufgabe von den Studierenden im Vorfeld der Klausur in einem öffentlichen Bereich der ILIAS-Klausurumgebung bereits getestet werden konnte. Dieses Vorgehen war vorgesehen, damit während der bewerteten Testklausur keine technischen Probleme die mathematisch-inhaltliche Lösung der Aufgabe beeinträchtigen sollte. Eine Demoaufgabe zu den Beweispuzzlen steht unter (IWM Koblenz 2011) in einem öffentlichen Bereich zur Verfügung. Die erste Pilot-E-Klausur mit mathematischen Beweisen zeigt bereits die unterschiedliche Arbeitsweisen, mit denen diese Beweispuzzles bearbeitet wurden. Zunächst einmal kann man das Problem als reine graphentheoretische Anordnungsaufgabe verstehen, bei der eine Teilmenge der Beweisfragmente in eine logisch sinnvoll Abfolge gebracht wird, die ausgehend von einem *Startzustand* mit den gegebenen Voraussetzungen eine Beweislücke zu einem in der Aufgabenstellung genannten Zielzustand schließt (Interpolationsbeweis). Beweisfragmente können dabei aus

- Begründungen (z.B. "mit Anwendung des Distributivgesetzes"),
- einzelnen Termen (z.B. $a(b+c)$)
- Ungleichung oder Gleichungen (z.B. $a(b+c)=ab+ac$),

- Vergleichssymbolen mit Begründungen <,=,>,...
  (z.B. " $\leq$ *mit Dreiecksungleichung"*)

bestehen. Mit den gegebenen Voraussetzungen in ILIAS können Beweise als vollständig korrekt identifiziert werden, wenn die Beweisfragmente einer bestimmten vordefinierten Reihenfolge entsprechen. Dabei muss in einem zweiten Schritt berücksichtigt werden, dass Studierende in Papierbeweise unterschiedliche Fehlertypen zeigen, die entsprechend in der E-Klausur durch *intelligente Falschantworten* angebildet werden sollten, um das formales Verständnis der Beweisfragmente abzuprüfen. Erst diese intelligenten Falschantworten erhöhen die Schwierigkeiten der Interpolationsbeweise in einer E-Klausur und reduzieren die Möglichkeit für die Studierenden durch grobe Musterähnlichkeiten in den Beweisfragmenten die korrekte Anordnung identifizieren zu können. Für die Entwicklung von Interpolationsbeweisen sind daher Fehleranalysen in konventionellen Beweisen wesentlich. Diese Fehleranalysen können erst dann die intelligenten Falschantworten für ein Beweispuzzle liefern. Im Zusammenhang mit den Falschanworten ist für die Beweisfragemente ein weiterer wesentlicher Planungsschritt erforderlich. In der graphentheoretische Abbildung der Lösungsraumes muss man überprüfen. ob man sowohl beim *Vorwärtsarbeiten* von dem Startzustand als auch bei einem *Rückwärtsarbeiten* von dem Zielzustand geeignete intelligente Falschantworten angeboten werden, die typische Fehler der Studierenden bedienen (Stein 1986). Dadurch kann man vermeiden, dass ein Rückwärtsarbeiten von dem Zielzustand aus viel geringer Antwortalternativen ermöglicht und so das Beweispuzzle durch Rückwärtsarbeiten zu stark vereinfacht.

4. Ergebnisse & Bewertung der E-Klausuranteile

Die automatische Korrektur bedurfte bei einer vollständig korrekten Lösung der E-Klausuraufgaben keine Nachbearbeitung. Das war in 64% der Aufgaben gegeben, wenn die Lösung der Studierenden mit dem vordefinierten Beweisweg übereinstimmte. Wurde allerdings in ILIAS nicht die volle Punktezahl bei den E-Klausuraufgaben erreicht, so musste in 93% der Fälle eine manuelle Nachkorrektur vorgenommen werden. Davon wurde 56% der automatischen Punktevergabe manuell schlechter bewertet und 44% manuell besser als die automatische Korrektur.

5. Grundproblem der automatischen Bewertung in ILIAS

Betrachtet man die Bewertungsmöglichkeiten in der E-Klausurumgebung ILIAS, so hängt die Bewertung von der korrekten Positionierung eines Beweisfragmentes ab (z.B. Beweisfragement C auf Position 2). Der Bewertungsalgorithmus der Aufgabe ist unbrauchbar, wenn z.B. eine Begründung als Beweisfragment vergessen wurde. Fehlt z.B. das Beweisfragement C auf Position 2, so verschieben sich alle nachfolgende

Beweisfragmente um 1 Position nach vorne. Damit stehen ab Position 2 in der Beweissequenz u.U. alle nachfolgenden korrekten Beweisschritte auf der falschen Beweisposition und werden von dem Bewertungsalgorithmus ab Postion 2 als falsch bewertet. Damit wird deutlich, dass alle nicht mit der vollen Punktzahl bewerten Aufgaben eine manuelle Nachkorrektur benötigen. Umgekehrt werden vollständig korrekte Lösungen selbst bei dieser elementaren in ILIAS implementierten Bewertungsmethode vollständig korrekt bewertet, wenn der Beweisweg bzw. die Beweiswege korrekt in ILIAS hinterlegt wurden.

6. Fazit

Die erste E-Klausur an der Universität Koblenz-Landau im Fach Mathematik hat bei der Eingabe der Lösungen zu keinen erkennbaren Problemen bei den Studierenden geführt. Der Aufgabentyp mit Beweisfragementen lieferte für die Studierenden eine deutliche Unterstützung bei der Suche nach einer korrekten Beweisstruktur. Die Identifikation von intelligenten Falschantworten ist bei der Generierung von Beweispuzzlen ein wesentlicher Aspekt für die Qualität von E-Klausuraufgaben. Die Konzeption einer Hybridklausur, bei der sowohl E-Klausuranteile als auch Papierklausuranteile auftreten, wird in Zukunft daher weiter verfolgt. Die Rückmeldung unter Vorbehalt direkt nach Abschluss der Klausur, ob die Studierenden bereits mit dem E-Klausuranteil die notwendigen Punkte für das Bestehen der Klausur erreicht haben, wurde von den Studierenden positiv aufgenommen. Dennoch sind rechtliche Aspekte zu berücksich–tigen, wenn die Punktezahl nach unten korrigiert werden muss.

Danksagung: Institut für Wissensmedien IWM an der Universität Koblenz-Landau (Ingo Dahn, Peter Ferdinand, Guido Vollbach) für die sehr gute Unterstützung

7 Literatur

Adams, A.A. u. a., 1999. Automated theorem proving in support of computer algebra: symbolic definite integration as a case study. In *Proceedings of the 1999 international symposium on Symbolic and algebraic computation*. S. 253–260.

ILIAS Society, 2013. ILIAS Open Source e-Learning. Available at: http://www.ilias.de.

IWM Koblenz, 2011. ILIAS Installation des Instituts für Wissensmedien. *OpenSource E-Klausurumgebung v4.1.8-EA 2011-10-25*. Available at: https://ilias-ea.uni-koblenz.de/.

Stein, M., 1986. *Beweisen. Eine Analyse des Beweisprozesses*,

Wetter, G., 2010. Unterstützung von E-Klausuren durch das Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Mainz. *PIK - Praxis der Informationsverarbeitung und Kommunikation*, 33(1), S.45–55.

Yoshiki NISAWA, Osaka, Japan

Research on the introduction of integration in Japanese High Schools

1. Introduction

It is important that high school students understand mathematical concepts; however, it is generally not the case that all the concepts of mathematics are fully understood. One such example is the concept of 'integration'. Although sectional mensuration is the basis of the concept of definite integrals, in Japanese high school mathematics, integration is introduced as the inverse operation of differentiation. The advantage in this method of introduction is that the students can make integration calculations easily. However, previous studies have shown this to have the disadvantage that students do not fully understand the concept of integration. To address this problem, we have been working on the teaching materials, methods, and practices that have been used so far to enable students to understand the concept of integration. The following historical facts were revealed in this process. In the high school curriculum of 1960 onwards, integration was being taught in two stages over the second and third grades of high school. From the 1970s onwards, the present method of introducing integration has been followed.

In this paper, we first re-examine the transformation in the teaching of integration in Japanese high school mathematics textbooks. We then identify problem areas, and finally, show an example of a teaching practice that facilitates students' understanding of the concept of integration.

2. The transformation in the teaching of integration and current issues

Japanese high school textbooks are prepared based on government curriculum guidelines, and are subject to verification by the Ministry of Education, Culture, Sports, and Science. Therefore, the content of different textbooks can be almost the same. Further, the course curriculum is revised every 10 years.

We first discuss the transformation in the introduction of integration in Japanese high school mathematics textbooks, and then identify the current challenges.

2-1. Transformation in the teaching of integration

Integration came to be taught in the second and third grades of high school, in accordance with government curriculum guidelines introduced in 1960. Subsequently, integration was taught in two stages. Currently, integration is taught in the second and third grades, mainly to benefit those who wish to go to science universities. For those who wish to study humanities at university, integration is only taught during the second grade.

There are several ways in which integration was introduced in the textbooks of this period. For example, ‘sectional mensuration → definite integrals → indefinite integrals →…’, ‘indefinite integrals → sectional mensuration → definite integrals →…’, and ‘sectional mensuration → indefinite integrals → definite integrals →…’. Whatever the method of introduction, it was always based on sectional mensuration. During this time, there were several discussions about whether to introduce definite integrals through sectional mensuration, or whether it might be more convenient to introduce the indefinite integral as the inverse operation of differentiation.

Post the 1970 curriculum guideline notification, sectional mensuration came to be taught in the third grade and omitted in the second grade. This was because infinite series, which until then had been taught in the second grade, were now being taught in the third grade. Hence, it became difficult to adopt the introduction method of ‘sectional mensuration → definite integrals’ in the second year, and the indefinite integral came to be introduced as the inverse operation of differentiation. Thus, the teaching method of ‘indefinite integrals → definite integrals’ came into being.

However, to enable students to understand the concept of integration, sections such as ‘the definite integral as a quantity’, which explained the relation between the definite integral and sectional mensuration, were provided. This can be seen, for example, in ‘Revised Mathematics II B’ (Keirinkan, 1976). In this text, the introduction method adopted was ‘speed and distance → indefinite integrals → definite integrals → area → volume → definite integral as a quantity’. Subsequently, with each revision of curriculum guidelines in line with the social climate, the learning content of textbooks with regard to integration was carefully selected and streamlined. For example, present textbooks teach not only ‘speed and distance’ and ‘definite integral as a quantity’ in the third grade, but also cover ‘volume’ over this period.

Currently, second grade students use textbooks based on the high school curriculum introduced in 1999. The curriculum guidelines were revised in 2009, and so these textbooks will change from next year, but the part relating to the introduction of integration has not changed. For example, in ‘Revised Mathematics II’ (Suken Shuppan, 2007) and ‘Mathematics II’ (Suken Shuppan, 2012), the method of introducing integration is ‘indefinite integrals → definite integrals → area’.

2-2. Current challenges in the teaching of integration

As shown in 2-1, integration is introduced in the second grade as 'the inverse operation of differentiation'. Hence, there is no need to know the concept of limits or the computation of sectional mensuration. For this reason, it has the following advantages:

• Students can easily compute integrals, and can even obtain the area of irregular shapes using definite integrals;

• A sense of accomplishment in being able to solve problems.

However, the following problems may also arise:

• As students in the second grade do not know the historical background of definite integrals, or the reason why it is represented by $\int_a^b f(x)dx$, the meaning of the integration symbol is not clear to them, and hence they do not fully understand the concept of integration;

• Although they learn sectional mensuration in the third grade, when it comes to problems such as 'Evaluate the limiting value $\mathrm{S} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}\right)$ ' (Revised Mathematics III, Suken Shuppan, 2008, p.163), students are strongly inclined to solve the problem without fully understanding the concept of the definite integral. When the degree of comprehension of the concept of integration among university students (science department) was investigated, it became clear that many do not fully understand the concept as being based on the quadrature method. This problem had also been identified in previous studies.

3. Example of a teaching practice that addresses this problem

An overview of the teaching practice adopted in the third grade in order to overcome the problem outlined in 2-2 is now given. This method does not appear in any textbook, but has been found to be effective in allowing students to understand the concept and merit of integration.

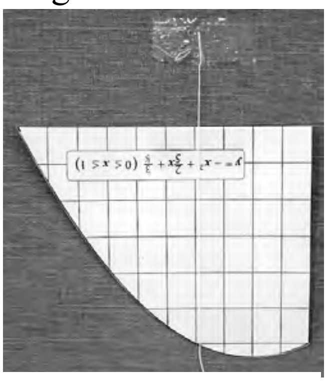


Figure 1. Model created by high school students. (Balanced even when turned upside down)

Teaching Example is as follows.

After explaining sectional mensuration, students were asked to consider problems replacing '$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$' by a definite integral, or the reverse problem. The students were then encouraged to create and solve similar problems among themselves.

Further, they were led to the formula '$x_g = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$' for determining the centre of gravity of plane figures using the concept of sectional mensuration. They then determined the coordinates of the centre of gravity of a plane figure, such as that shown in Figure 1, and verified their answers by actual practice.

4. Conclusion

Transformations in the method of introducing integration in Japanese high schools have been discussed, and the current challenges this practice faces have been clearly identified. The government curriculum guidelines are revised every 10 years, in accordance with social conditions, and thus, the method by which integration is introduced has also changed. There are two main ways in which integration is introduced, namely starting with sectional mensuration or as the inverse operation of differentiation. The advantages and disadvantages of both methods have been discussed.

By adding materials that are not given in textbooks, we were able to facilitate an understanding of the concept of integration in students. It is believed that the use of models, which is not very common in senior high schools in Japan, is especially effective. Sectional mensuration, which is taught in the third grade, helps give a better understanding of the concept of definite integrals, and it is necessary for teachers to realise this and devise suitable teaching methods. In other words, it is necessary for teachers to have leadership qualities and creative ingenuity.

We would like to examine issues how to teach students the concept of the integration in the second grade.

References and bibliography

Kawanaka, N., et al. (2007): Revised Mathematics II, Suken Shuppan

Kawanaka, N., et al. (2008): Revised Mathematics III, Suken Shuppan

Masada, K., et al. (1976): Revised Mathematics IIB, Keieinkan

Nisawa, Y. (2012): Educational Content Development of the Analysis Field that is necessary in School Mathematics in Secondary Education (Part I) - Focus on Integration Concepts, Journal of Mathematics Education, 52 No.3&4, 69-79

Ota, K. (2009): Some Problems in the Teaching of Integration in High Schools, Bulletin of Faculty of Education, Hokkaido University, 108, 21-29

Renate NITSCH, Darmstadt

Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge

Im Umgang mit funktionalen Zusammenhängen zeigen Schülerinnen und Schüler vielfältige Verständnisschwierigkeiten. Diese lassen sich meist auf konzeptuelle Schwierigkeiten mit Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren zurückführen und sind durch die Analyse systematischer Fehler aufdeckbar. Systematische Fehler zeichnen sich dadurch aus, dass sie im Gegensatz zu Flüchtigkeitsfehlern, die zufällig auftreten und meist aufgrund von Konzentrationsmangel entstehen, reproduzierbar sind und auf fehlerhaften Vorstellungen und Konzepten beruhen (Radatz, 1980). Diese werden im Bereich der Naturwissenschaften auf individuelle Alltagsvorstellungen der Schülerinnen und Schüler zurückgeführt, in der Mathematik sind jedoch auch innermathematische Fehlvorstellungen denkbar. Eine weitere Besonderheit zeigt sich bei der Untersuchung typischer Fehlermuster. Entgegen bisheriger Annahmen sind diese häufig nicht konsistent, was vermuten lässt, dass Lösungswege teilweise ad hoc gebildet werden (Wittmann, 2012). Dies wirft die Frage auf, wie sich Lernschwierigkeiten im Zusammenhang mit den beobachteten Phänomenen lerntheoretisch erfassen lassen.

Lerntheoretisches Konzept zur Entstehung von Lernschwierigkeiten

Das Tätigkeitskonzept nach Vygotskij und Leont'ev stellt ein geeignetes lerntheoretisches Modell zur Beschreibung von Lernhandlungen bei der Aneignung individueller Kenntnisse und Vorstellungen zur Verfügung. Es werden explizit Mechanismen zur Orientierungsbildung bezüglich einer gestellten Anforderung analysiert. Eine (Lern-)Handlung wird demnach unterteilt in einen orientierenden und einen ausführenden Teil, wobei sich der orientierende Teil auf eine bestimmte Orientierungsgrundlage stützt (Galperin, 1973). Diese entsteht immer unmittelbar in Bezug auf eine aktuelle Anforderung und greift auf vorhandene Kenntnisse und Vorstellungen zurück. Sie kann auf drei Orientierungsleveln ausgebildet werden, hier im Vokabular nach Bruder: Auf der Ebene der *Probierorientierung* sind einzelne Kenntnisse und Vorstellungen abrufbar, aber sie stehen in keiner geordneten Struktur. Das Vorgehen ist unbeständig und gekennzeichnet durch ein Lernen nach Versuch und Irrtum. Dabei kann die Aufgabenbearbeitung auch zum Erfolg führen, allerdings ist sie meist mit Fehlern, Umwegen oder Wiederholungen verbunden. Auf der Ebene der *Musterorientierung* sind vertraute Handlungsmuster im Rahmen einer empirischen Orientierung verfügbar. Die Vorgehensweise ist durch das Abarbeiten bekannter

Schemata bestimmt, die beispielsweise durch bereits gelöste Beispielaufgaben desselben Typs als Muster gespeichert sind. Der Lernende erfasst alle wesentlichen Merkmale und Bedingungen der Handlung, allerdings immer in Bezug auf eine konkrete Anforderung. Aufgrund des geringen Verallgemeinerungsgrades ist eine Übertragung der Handlung beschränkt auf analoge Aufgaben. Die Ebene der *Feldorientierung* zeichnet sich durch eine verallgemeinerte Orientierung aus. Der Lernende kann die erforderlichen Schritte und Bedingungen der Handlung selbst ableiten. Folglich sind größere Transferleistungen möglich, indem Kenntnisse und Vorstellungen auch auf weniger vertraute Anforderungssituationen übertragen werden.

Lernschwierigkeiten lassen sich innerhalb dieses Konzeptes mit einer unvollständigen Orientierungsgrundlage, d.h. auf Ebene der *Probier- und Musterorientierung* erklären. Scheitert ein Schüler bei seinem Lösungsversuch einer konkreten Anforderung, so kann dies zum einen darin begründet sein, dass er sich auf Ebene der *Probierorientierung* befindet. Er hat demnach weder Handlungsmuster in Bezug auf die aktuelle Anforderung verfügbar, noch besitzt er die notwendigen Fähigkeiten zur Handlungsbewältigung. Auf der Ebene der *Musterorientierung* können Lernschwierigkeiten mit der Aktivierung inadäquater Muster erklärt werden. Ist die Passung zwischen Anforderung und aktiviertem Muster nicht korrekt, kann es zu einer fehlerhaften Lösung kommen. Dabei kann der Schüler durchaus über ein passendes Handlungsmuster verfügen, bezüglich der aktuellen Anforderung greift er jedoch auf ein anderes Muster zurück. Dies lässt vermuten, dass das zutreffende Muster noch nicht ausreichend verfestigt ist und bei einer leichten Abänderung der Anforderung womöglich frühere Muster dominieren. Im Bereich funktionaler Zusammenhänge ist dies zum Beispiel zu beobachten, wenn zur Bearbeitung von Problemstellungen zu quadratischen Funktionen lineare Funktionen herangezogen werden. Um eine *Fehlvorstellung* handelt es sich dann, wenn zu einem Aufgabentyp immer das gleiche fehlerhafte Muster aktiviert wird, woraus geschlossen werden kann, dass der Schüler fehlerhafte Kenntnisse bzw. Vorstellungen verinnerlicht hat. Dabei können Fehlvorstellungen sowohl als inadäquate wissenschaftliche Vorstellung als auch als inadäquate Alltagsvorstellung auftreten.

Für die Diagnose von Lernschwierigkeiten ist diese grundlegende Unterscheidung zwischen fehlenden bzw. noch nicht gefestigten und fehlerhaften Mustern wesentlich, da sich daraus unterschiedliche Interventionsmaßnahmen ergeben. Während die beiden ersten Möglichkeiten Anlass geben, mithilfe elementarer Identifizierungs- und Realisierungsaufgaben systematisch neue Vorstellungen und Kenntnisse über den mathematischen Inhalt und/oder über mögliche Handlungsmuster aufzubauen, legt die Diagnose einer möglichen Fehlvorstellung eine Umstrukturierung vorhandener kognitiver Strukturen nahe. Hierbei kann auf Ergebnisse der aktuellen Conceptual Change Forschung zurückgegriffen werden (Vosniadou, 2008).

Bedeutung für den Inhaltsbereich funktionaler Zusammenhänge

Bezüglich der Kenntnisse und Vorstellungen im Bereich funktionaler Zusammenhänge können nach Vollrath (1989) drei Aspekte mathematischer Funktionen besonders hervortreten: *Zuordnungsaspekt, Kovariationsaspekt* und *Objektaspekt.* Diese drei Aspekte von Funktionen bilden sich unterschiedlich stark in den verschiedenen Darstellungswechseln zwischen den Darstellungsformen algebraischer Gleichung (A), Graph (G), numerischer Wertetabelle (N) und situativer Beschreibung (S) ab. Betrachtet man die einzelnen Darstellungswechsel hinsichtlich der notwendigen Lösungsschritte, so kann man jedem einzelnen einen dominierenden Aspekt zuordnen, wobei die Richtung des Darstellungswechsels (Start- vs. Zielrepräsentation) berücksichtigt werden muss.

Aspekte von Funktionen	Zuordnung			Kovariation			Objekt	
Darstellungswechsel XY	SN	NG	AN	AG	GA	NA	GS	SA
X=Startrepräsentation Y= Zielrepräsentation	NS	GN					SG	AS

Beispielsweise dominiert beim Darstellungswechsel von einer Wertetabelle zu einem Graphen in beiden Richtungen (NG und GN) der Zuordnungsaspekt, da einzelne Wertepaare abgelesen und in die Wertetabelle eingetragen werden müssen. Ähnliches gilt für den Darstellungswechsel zwischen Gleichung und Wertetabelle (AN). In der umgekehrten Richtung (NA) steht die Änderung der Werte der einzelnen Koordinaten im Vordergrund, wodurch der Kovariationsaspekt betont wird. Sofern eine situative Beschreibung enthalten ist, ist häufig die Betrachtung der Funktion als Ganzes wesentlich (Objektaspekt). Durch die Zuordnung zu den Aspekten ist es möglich, über den Umgang mit verschiedenen Darstellungswechseln Rückschlüsse auf vorhandene Kenntnisse und Vorstellungen zu ziehen.

Im Projekt HEUREKO (HEUristischen Arbeiten mit REpräsentationen funktionaler Zusammenhänge und der Diagnose mathematischer KOmpetenzen von Schülerinnen und Schülern), in welchem ein 5-dimensionales Kompetenzstrukturmodell zu Darstellungswechseln im Bereich funktionaler Zusammenhänge empirisch bestätigt wurde (Nitsch et al., eingereicht), haben sich bereits erste Anhaltspunkte für typische Lernschwierigkeiten mit bestimmten Darstellungswechseln ergeben. Diese werden durch eine aktuelle Studie von Bossé, Adu-Gyamfi und Cheetham (2011) bestätigt.

Demnach scheint der Zuordnungsaspekt am wenigsten Schwierigkeiten zu bereiten. Darstellungswechsel, die den Kovariationsaspekt fordern, sind für die Lernenden hingegen deutlich schwieriger zu bewältigen. Die größten Schwierigkeiten beinhalten Darstellungswechsel mit situativer Beschreibung (Objektaspekt).

Ausblick auf das zu entwickelnde Diagnoseinstrument

Auf Basis der vorangehenden Überlegungen soll im Rahmen des Projekts CODI (COnceptual DIfficulties in the field of functional relationships) ein Diagnoseinstrument zum Aufdecken typischer Lernschwierigkeiten entwickelt und empirisch erprobt werden. Hierzu werden unter Berücksichtigung der in der Literatur berichteten Schülerschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge und unter Nutzung der Erkenntnisse aus dem Projekt HEUREKO Items zu verschiedenen Darstellungswechseln generiert, die auf typische Lernschwierigkeiten abzielen. Durch die Analyse konsistenter Fehlermuster sollen dabei insbesondere mögliche Fehlvorstellungen untersucht werden. Langfristig sollen die Mathematiklehrkräfte mithilfe eines online-Diagnosetools bei der Diagnose von Lernschwierigkeiten unterstützt werden, um anschließend eine individuelle Förderung zur Behebung identifizierter Lernschwierigkeiten einleiten zu können.

Literatur

Bossé, M., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. International Electronic Journal of Mathematics Education, 6 (3), 113-133.

Galperin, P.J. (1973). Die Psychologie des Denkens und die Lehre von der etappenweise Ausbildung geistiger Operationen. In: Budilowa E.A. et al.: Die Psychologie des Denkens und die Lehre von der etappenweisen Ausbildung geistiger Operationen. Berlin: deb literaturvertrieb, 81-119.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, T., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (eingereicht). Students' Competencies in working with Functions in Secondary Mathematics Education – Empirical Examination of a Competence Structure Model. International Journal of Science and Mathematics Education.

Radatz, H. (1980). Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.

Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik 10, 3-37.

Vosniadou, S. (2008). International Handbook of Research on Conceptual Change. New York: Routledge.

Wittmann, G. (2012). Zur Konsistenz von Fehlermustern in der Bruchrechnung – Ergebnisse einer empirischen Studie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Band 2. Münster: Waxmann, 945-948.

Marcus NÜHRENBÖRGER, Ralph SCHWARZKOPF, Dortmund

Gleichungen zwischen „Ausrechnen“ und „Umrechnen“

Im Gegensatz zum Algebraunterricht in der Sekundarstufe scheint das Gleichheitszeichen im Arithmetikunterricht in der Grundschule auf den ersten Blick nur eine recht konkrete Bedeutung zu haben: Es weist den arithmetischen Operationen ein Ergebnis zu. In dieser Lesart kann man das Gleichheizzeichen als Aufforderung zur Berechnung eines Rechenterms ansehen, d.h. es unterscheidet eher zwischen der operativen Tätigkeit auf seiner linken Seite und dem Ergebnis auf der rechten, als dass es zwei gleiche Terme miteinander verbinden würde.

Auf den zweiten Blick ist aber diese „heile Rechenwelt“ der „Aufgabe-Ergebnis-Deutung“ (Winter 1982, 187) kritisch zu hinterfragen, denn das Gleichheitszeichen ist *das* zentrale mathematisches Zeichen, mit dem man – wie Winter (1982, 210) betont – „nicht beliebig umspringen“ kann, auch (und vielleicht erst Recht) nicht im Anfangsunterricht. Vielmehr wird gefordert, dass das Zeichen von Beginn an im Sinne eines symmetrischen Relationszeichens, das die prinzipielle Austauschbarkeit zweier Terme unterstellt, in den Unterricht einfließt (vgl. auch Malle 1993).

1. Eindrücke aus der empirischen Forschung

Die Perspektive auf das Gleichheitszeichen als Handlungszeichen scheint ebenso gegenwärtig wie bereits in den 70er und 80er Jahren Priorität für Kinder am Ende der Grundschulzeit zu haben (vgl. Borromeo Ferri & Blum 2011). Zahlreichen Studien (zusammenfassend Steinweg 2013, Cai & Knutz 2011) zur Folge erzeugt ein einseitiger, auf das Ausrechnen von Termen fokussierter Mathematikunterricht in der Grundschule eine funktional geprägte Vorstellung auf Gleichungen: “We note that one reason students may lack certain perspectives is that teaching may not highlight these properties explicitly” (Godfrey & Thomas 2004, 269).

Demzufolge ergeben sich für die Kinder in der Sekundarstufe massive Schwierigkeiten beim Deuten von Termbeziehungen, da der Übergang von der Arithmetik zur Algebra nicht angemessen vorbereitet ist (vgl. Borromeo Ferri & Blum 2011). Allerdings geben Seo und Ginsburg (2003) zu Bedenken, dass die Lernenden in spezifischen Kontexten in der Lage sind, relationale Sichtweisen auf das Gleichheitszeichen zu entwickeln. So erkennen Grundschüler ihren Studien nach in eher geometrischen oder sachstrukturellen Kontexten durchaus Beziehungen zwischen zu vergleichenden Objekten, wenngleich sie diese kaum auf arithmetische Inhalte übertragen können - die Autoren sprechen in diesem

Zusammenhang von einer „pseudo-flexiblen“ Interpretation. In diesem Sinne scheint gerade im arithmetischen Kontext das Gleichheitszeichen zu einer eingeschränkten Sicht zu verführen. Mit Blick auf die Anregung des relationalen Verstehens des Gleichheitszeichens weisen Seo und Ginsburg (2003, 169) auf die Entwicklung einer flexiblen Sicht hin:

„It‘s more important, I think, to give them many opportunities to use symbols in many situations than simply to tell them, let´s say: this is the equals sign und what´s one side of the equals sign should be the same as what´s the other side of the equals sign” (Seo & Ginsburg 2003, 169).

Zur Initiierung derartiger Lerngelegenheiten können zwei wesentliche Zugänge unterschieden werden.

(1) Die Kinder sollen das relationale Verständnis durch einen vielschichtigen Umgang mit Gleichungen entwickeln. Dies soll etwa dadurch erreicht werden, dass die Lernenden korrekte und inkorrekte Zahl- und Termvergleiche (auch in unbekannten Zahlenräumen) beschreiben, bewerten, begründen oder verändern (vgl. Winter 1982; Steinweg 2013).

(2) Die Kinder sollen zunächst einmal ein flexibles und tragfähiges Verständnis von arithmetischen Gleichheiten entwickeln, ohne dass diese formal im Sinne einer Gleichung aufgestellt werden müssten.

Im Forschungsprojekt DaruM (Deutungs- und Argumentationsprozesse bei der Behandlung substantieller Aufgabenformate im Mathematikunterricht der Grundschule) wählen wir den zweit-genannten Zugang. Dabei kommt es insbesondere auf zwei Aspekte an: Erstens muss geklärt werden, inwiefern Grundschulkinder ein relationales Verständnis für Gleichheiten entwickeln können, ohne dass ihnen die formal elaborierten Darstellungen und Begriffe aus der Sekundarstufe zur Verfügung stünden. Zweitens müssen inhaltliche Anlässe zur Aufstellung bzw. zur Untersuchung einer Gleichheit geschaffen werden.

2. Gleichheiten verstehen und begründen: Strukturelles Umrechnen

Sofern durch eine Gleichung keine triviale Identität (etwa „4=4“) ausgedrückt wird, besteht ihr Wesen - plakativ formuliert - darin, eine Gleichheit zwischen unterschiedlich aussehenden Termen zu unterstellen. Wir interessieren uns in diesem Sinne nur für „gleiche“ Terme, die anders als zwei identische Terme gewisse Verschiedenheiten aufweisen (vgl. Otte & Zawadowski 1982). Diese Verschiedenheiten mögen für den mathematischen Experten nur als oberflächliche Trivialitäten erscheinen, im Mathematikunterricht der Grundschule sind sie allerdings durchaus zentral. So sind die beiden Terme 8+6 und 10+4 zwar natürlich auch in der ersten Klasse *gleich*, aber sie stellen unterschiedliche Rechenanforderungen an die Kinder und sind dementsprechend zunächst einmal unterschiedlich. Sollen die Lernenden beide Terme als zueinander gleich ansehen, deren Gleichheit also verstehen, dann müssen sie nach Winter (1982) von diesen beiden Darstellungen auf eine gemeinsamen Gegenstandsbezeichnung abstrahieren – mit Hilfe des operativen Prinzips (Wittmann 1985) bezeichnet, müssen die Kinder einen dritten Term finden, den sie durch operative Variation aus jedem der beiden anderen Terme herstellen können. Im obigen Fall wäre ein solcher vermittelnder Term etwa 8 + 2 + 4, denn mit Hilfe des Assoziativgesetzes ließe sich jeder der beiden anderen Terme hieraus herstellen: (8+2)+4 = 8+(2+4). Allerdings ließe sich die Gleichheit auch mit dem Term 10 - 2+2 + 4 aufzeigen; für Kinder ganz sicher nicht derselbe Term wie oben, d.h. die Herstellung der Gleichheit ist durch eine gewisse Mehrdeutigkeit gekennzeichnet.

In unserem Konzept bedeutet das Verstehen von Gleichheit in der Grundschule, dass die Kinder durch *strukturelles Umrechnen*, also durch passende operative Variationen, einen Term in einen anderen überführen; in der Regel vermittelt über einen oder mehrere weitere Term. Die prinzipielle Möglichkeit, verschiedene operative Variationen anzuwenden, bedeutet eine fruchtbare Mehrdeutigkeit des Gleichheitsverständnisses, die wir zu nutzen versuchen. In diesem Sinne sollte eine Ablösung von einer einseitigen Interpretation des Gleichheitszeichens nicht über die Verbannung des Ausrechnens erfolgen, sondern vielmehr über die Konstruktion von Beziehungen zwischen ausgerechneten Objekten über strukturelles Umrechnen.

4. Anlässe, Gleichheiten zu hinterfragen: Produktive Irritationen

Das Bedürfnis von Kindern, Gleichheiten zu hinterfragen und strukturelle Zusammenhänge zu begründen, ist einerseits wesentlich für die Entwicklung eines Gleichheitsverständnisses. So betonen etwa Miller (1986) und Steinbring (2005) eindringlich, dass Grundschulkinder insbesondere (bzw. wenn nicht sogar ausschließlich) im Zuge kollektiver Argumentationen neues Wissen erwerben. Andererseits allerdings ist die Neigung der Kinder, mathematisch zu argumentieren, in der Praxis des Mathematikunterrichts in keinster Weise selbstverständlich. So wundern sich Kinder bisweilen selbst nicht über scheinbar unvorhersehbare Ergebnisse und konstruieren auch nicht allein bzw. spontan im Zuge der Auseinandersetzung mit produktiven Übungen argumentationswürdige Beziehungen zwischen Termen.

Wir gehen davon aus, dass Kinder gerade dann eine Notwendigkeit sehen, mathematische Argumente zu suchen und mit anderen auszuhandeln, wenn sie sich aus dem Fach ergeben; oder anders formuliert, wenn *produktive Irritationen* entstehen (vgl. Nührenbörger & Schwarzkopf 2011).

Irritationen entstehen dann, wenn bisherige Ansichten, Zugangsweisen, Vorstellungen oder Erwartungen im Zuge der fachlichen Notwendigkeit versagen – sie sind aber für in den Fall produktiv, wenn die Kinder Möglichkeiten zur Aufklärung der Spanne zwischen Erwartung und Enttäuschung entwickeln. Hierzu bedarf es spezifischer Aufgabenformate, in denen sich solche Situationen aus fachlicher Notwendigkeit ergeben.

Im Vortrag haben wir dazu einige Beispiele aus unseren Unterrichtsexperimenten vorgestellt.

Literatur

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2011): Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In: R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.): BzMU. Münster: WTM Verlag, 127-131.

Cai, J. & Knuth, E. (Hrsg.): Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives. Berlin: Springer.

Goodfrey, D., Thomas, M.O.J. (2003): What do they see when they look? In: L. Bragg et al. (Hrsg.): Mathematics Education Research. 263-270.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Miller, M. (1986): Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2013): Gleichheiten in operativen Übungen. Entdeckungen an Pluspfeilen. In: Mathematik differenziert, 4(1), 23-28.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2010): Diskurse über mathematische Zusammenhänge. In C. Böttinger et al. (Hrsg.): Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion. Seelze: Kallmeyer, 169-215.

Otte, M. & Zawadowski, W. (1982): Analogie, Gleichheit und mathematische Begriffe. In: Mathematiklehrer, (1), 6-7.

Seo, K., Ginsburg, H. (2003): Classroom context and children's interpretations oft he equals sign. In: A. Baroody & A. Dowker (Hrsg.): The Development of Arithmetic Concepts and Skills. London: LEA, 161-187

Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer.

Steinweg, A.S. (2013 / im Druck): Algebra in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum.

Winter, H. (1982): Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. In: mathematica didactica, 5, 185 – 211.

Wittmann, E.Ch. (1985): Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: mathematik lehren, 11(8), 7-11.

Wittmann, E.Ch. (1995): Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In: K.P. Müller (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 528-531.

Janina OESTERHAUS, Rolf BIEHLER, Paderborn

BeSt@Kontext: Ein schüleraktivierendes Unterrichtskonzept für die Beurteilende Statistik mit computergestützter Simulation in authentischen Kontexten

Die Beurteilende Statistik ist erfahrungsgemäß ein Thema der gymnasialen Oberstufe, welches sich - trotz seiner immensen Bedeutung - bei Lehrkräften geringer Beliebtheit erfreut (z.B. Eichler, 2008). Dies resultiert oftmals aus deren Empfinden heraus, während der eigenen schulischen und universitären Laufbahn selbst unzulänglich in diesem Bereich ausgebildet worden zu sein. Diesem Missstand wird in den letzten Jahren durch die vermehrte Entwicklung und Evaluation geeigneter Lehr- und Lernmaterialien im schulischen wie im universitären Bildungssektor Rechnung getragen. Bisher wenig Berücksichtigung erfuhren jedoch Fortbildungen für praktizierende Lehrkräfte. Im Beitrag wird ein, im Rahmen eines Dissertationsprojektes entwickeltes, alternatives Unterrichtskonzept für die Beurteilende Statistik in der gymnasialen Oberstufe vorgestellt und erläutert, wie dieses Konzept innerhalb einer Lehrerfortbildung des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) an praktizierende Lehrkräfte vermittelt und in deren Unterrichtspraxis transferiert werden soll.

1. Ausgangslage

Die stark auf das (Nicht-)Verwerfen einer Annahme fixierte und wenig auf Reflexion und Ergebnisinterpretation ausgelegte Art, wie insbesondere das Hypothesentesten nach wie vor in vielen gängigen deutschen Lehrwerken vermittelt wird, wird bereits seit langem als realitäts- und wissenschaftsfern kritisiert. Dies gilt als eine der Ursachen für die erwiesenen Schwierigkeiten Lernender bei der Interpretation von Ergebnissen der Schließenden Statistik. Insbesondere die mangelnde Authentizität der Kontexte sowie die häufig fehlende Thematisierung üblicherweise in der Praxis an das Hypothesentesten anschließender Schritte bedingen die geringe Anschlussfähigkeit der in der Schule vermittelten Kompetenzen im weiteren Bildungs- und Berufsleben (z.B. Krauss & Wassner, 2001). Mit dem Erlass der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) wird der Stochastik in der Sekundarstufe II noch deutlich mehr Relevanz zugeordnet. Zusätzlich zur Herausforderung, die diese neue Verbindlichkeit für viele Lehrkräfte darstellt, wird in den Bildungsstandards deutlich stärker der Einsatz von Simulation und geeigneter Software in der Oberstufe betont. Es mangelt jedoch an Anleitungen und Fortbildungsmaßnahmen für Lehrkräfte, die diese nachhaltig befähigen, die neuen Anforderungen in ihrem Unterricht umzusetzen. Mit der Entwicklung eines alternativen Unterrichtskonzepts sowie dessen Transfer in die Lehrerfortbildung soll ein Schritt zur Beseitigung dieser Mängel getan werden.

2. Entwicklung und Inhalte des Unterrichtskonzepts

Ziel des Unterrichtskonzepts *BeSt@Kontext* (Ein schüleraktivierendes Unterrichtskonzept für die Beurteilende Statistik mit computergestützter Simulation in authentischen Kontexten) ist die frühzeitige und kontinuierliche Förderung eines konzeptuellen Verständnisses für die Logik der Beurteilenden Statistik. Gefördert wird dieses Verständnis, gemäß den Empfehlungen von Aliaga et al. (2010), durch intuitive Zugänge sowohl zum Testen wie auch zum Schätzen mittels computerbasierter Simulation, das Voranstellen eines informellen Hypothesentestens mit Hilfe des P-Wert-Konzeptes (Meyfarth, 2006), fokussierte Schüleraktivierung nach dem investigativen Ansatz Modellieren – Randomisieren und Wiederholen – Evaluieren wie er bei Garfield (2012) vorgeschlagen wird, kontinuierlichen Werkzeugeinsatz und das gezielte Verwenden realer Daten. Die Entwicklung des Konzepts greift Ideen aus renommierten angloamerikanischen Curricula für Einführungskurse zur Statistik auf und gestaltet den nordrhein-westfälischen Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe damit aus. Diese Curricula setzen zentrale Merkmale zur Gestaltung von Statistikkursen um, wie sie in den *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (GAISE) von Aliaga et al. (2010) auf Basis aktueller empirischer Forschungsergebnisse zum Lehren und Lernen von Statistik empfohlen werden. Erklärtes Ziel ist es, statistisch gebildete Schüler hervorzubringen, d.h. Schüler zu statistischem Denken zu befähigen sowie ihre *statistical literacy* auszubilden. Dabei soll insbesondere das beim Erlernen notwendiger Rechenfertigkeiten entwickelte konzeptuelle Verständnis von statistischen Begriffen und Verfahren sowie deren Zusammenhängen (Aliaga et al., 2010, S.11) im Vordergrund stehen. Eine essentielle Rolle spielt hierbei die Beachtung des Prozesses der Datengewinnung, welcher in deutschen Lehrwerken kaum thematisiert wird, als Grundlage für die Möglichkeit statistische Methoden anzuwenden. Cobb (2007) schlägt vor, hier Randomisierungstests bei randomisierter Aufteilung von Experimental- und Kontrollgruppe zu nutzen, um einen intuitiven Zugang zur Schließenden Statistik zu schaffen. Dieser Zugang bietet Anschlussfähigkeit an weiteres statistisches Vorgehen, der ihm innewohnende Prozess kann im Unterricht ohne große Vorkenntnisse sowohl händisch als auch computerbasiert simuliert werden und er bietet einen natürlichen Weg, Lernende an simulationsbasierte und computerintensive Methoden heranzuführen (Cobb, 2007, S.12f.). Erste empirische Untersuchungen zu auf Randomisierungstest basierenden Statistikcurricula weisen darauf hin, dass diese das konzeptuelle

Verständnis von Lernenden für die Schließende Statistik fördern können (z.B. Tintle, 2011). Wir planen die Ausarbeitung eines „Unterrichtsdrehbuchs“, das neben Arbeitsmaterialien für Lernende ebenso didaktisch-methodische Kommentare für Lehrende wie weiterführende Materialien enthält und den Übergang zu den in den Lehrplänen geforderten Methoden des Hypothesentestens schafft. Für das Unterrichtskonzept *BeSt@Kontext* ist folgender inhaltlicher Aufbau charakteristisch: 1) Simulation von Randomisierungstests über Vierfeldertafeln für durch *random assignment* entstandene Stichproben zur Einführung des Bewertens von Testergebnissen mit dem P-Wert, 2) Simulation von Randomisierungstests für durch *random sampling* entstandene Stichproben zur Vertiefung des P-Wert-Testens, 3) Hypothesentesten mit der Binomialverteilung, 4) Hypothesentesten mit festem Signifikanzniveau, 5) Hypothesentesten mit Anteilen und 6) Konfidenzintervalle. Anknüpfend an den simulationsintensiven Einstieg werden die in den Bildungsstandards geforderten Inhalte am Beispiel der Binomialverteilung thematisiert. Hierbei wird das „Testen von Anteilen“, das in der Angewandten Statistik, aber leider nicht in der Schule üblich ist, besonders akzentuiert. Damit wird auch ein Übergang zu den Konfidenzintervallen ermöglicht (vgl. auch Biehler et al., 2011, S.129ff.). Diese im Anschluss an das Testen als diejenigen Bereiche zu behandeln, die jene Wahrscheinlichkeiten enthalten, für welche die Nullhypothese nicht verworfen würde, soll das Verständnis für den Zusammenhang der beiden Konzepte der Beurteilenden Statistik, des Testens und des Schätzens, fördern.

3. Transfer in die Lehrerfortbildung und in die Unterrichtspraxis

Im DZLM führen wir 2013 eine speziell konzipierte Fortbildungsreihe zur Stochastik in der Oberstufe durch, zu der sich 80 Lehrkräfte an 3 Standorten angemeldet haben. An vier ganztägigen Veranstaltungen erhalten die Lehrkräfte ein schrittweises fachinhaltliches und fachdidaktisches Update sowie konkrete Hilfestellungen für den eigenen Unterricht. Die beiden letzten Termine sind jeweils für die Behandlung der Beurteilenden Statistik in Form der Vermittlung des Unterrichtskonzeptes *BeSt@Kontext* vorgesehen. Distanzphasen zwischen den Fortbildungsterminen schaffen gezielte Möglichkeiten zur Erprobung im Unterricht. Insbesondere ist angestrebt, das Unterrichtskonzept *BeSt@Kontext* nach Abschluss der Fortbildung im Schuljahr 2013/14 mit interessierten Lehrkräften zu erproben. Die Evaluation ist dabei wie folgt geplant: eine Befragung aller Teilnehmenden zu deren Einstellung gegenüber dem Unterrichtskonzept nach Fortbildungsende soll erste Überarbeitungsnotwendigkeiten für das Konzept erschließen; ab September ist die Begleitung einzelner Lehrkräfte bei der Planung und Durchführung ihres Unterrichts mit dem überarbeiteten „Unterrichtsdrehbuch“ und die anschließende Weiterentwicklung des Konzepts basierend auf den Erfahrungen und Beobachtungen geplant. Die folgende Tabelle resümiert abschließend die angestrebten Ziele auf den drei Ebenen Unterrichtskonzept, Fortbildung und Unterricht.

<table>
<tr><th></th><th>BeSt@Kontext/
Material & Konzept</th><th>Stochastik kompakt/
Fortbildung</th><th>Unterricht/
TeilnehmerInnen</th></tr>
<tr><td>Kurzfristig</td><td colspan="3">Erfolgreicher erster Transfer der Ideen in die Praxis</td></tr>
<tr><td>Mittelfristig</td><td>Weiterentwicklung des Konzepts/der Materialien basierend auf praktischen Erfahrungen und Forschungsergebnissen</td><td>Weiterentwicklung des Fortbildungskonzepts basierend auf praktischen Erfahrungen und Forschungsergebnissen</td><td>Erleichterung der Umsetzung der neuen Bildungsstandards im Stochastikunterricht</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Langfristig</td><td>Optimierung des Konzepts/der Materialien</td><td>Optimierung des Fortbildungskonzepts</td><td>Aufbau professioneller Lerngemeinschaften</td></tr>
<tr><td colspan="3">Kooperation von Experten aus Schule und Hochschule
für den Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II</td></tr>
</table>

Literatur

Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Garfield, J., Gould, R., Lock, R., et al. (2010): Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) - College Report. American Statistical Association Webseite: http://www. amstat. org/education/gaise (23.03.2013).

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C., & Prömmel, A. (2011): Daten und Zufall mit Fathom - Unterrichtsideen für die SI und SII mit Software-Einführung. Braunschweig: Schroedel.

Cobb, G. W. (2007): The introductory statistics course: A ptolemaic curriculum? In: Technology Innovations in Statistics Education, 1(1), 1 - 33.

Eichler, A. (2008): Statistics teaching in German secondary high schools. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman: Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics. Monterrey, México: ICMI & IASE, CD ROM.

Garfield, J., delMas, R., & Zieffler, A. (2012): Developing statistical modelers and thinkers in an introductory, tertiary-level statistics course. In: ZDM The International Journal on Mathematics Education, 44(7), 883 - 898.

Krauss, S., Wassner, C. (2001): Wie man das Testen von Hypothesen einführen sollte. In: Stochastik in der Schule, 21(1), 29 - 34.

Meyfarth, T. (2006): Ein computergestütztes Kurskonzept für den Stochastik-Leistungskurs mit kontinuierlicher Verwendung der Software Fathom - Didaktisch kommentierte Unterrichtsmaterialien. In: Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik (KaDiSto) Bd. 2. Kassel: Universität Kassel [Online: http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214683].

Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. KMK Webseite: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_-beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (23.03.2013).

Tintle, N. (2011): Development and assessment of a preliminary randomization-based introductory statistics curriculum. In: Journal of Statistics Education, 19(1), n1.

Reinhard OLDENBURG, Benedikt Weygandt, Frankfurt/M.

Können Studierende alternative Begriffsdefinitionen mit Computeralgebra als Werkzeug untersuchen?

Dieser Beitrag berichtet von ersten Versuchen, Gymnasialstudierende Begriffsdefinitionen mit Hilfe von CAS untersuchen zu lassen.

1. Fragestellung und Rahmenbedingung

Es ist ein allgemein anerkanntes Ziel, dass Schülerinnen und Schüler die Mathematik möglichst aktiv erlernen sollen und diese dabei nach Möglichkeit selbst konstruieren. Damit künftige Lehrkräfte einen solchen Unterricht gestalten können, erscheint es notwendig, dass sie selbst ein Mathematikbild gewinnen, das nicht durch die Präsentation fertiger Mathematik dominiert wird, sondern auch deren Entstehungsprozesse umfasst. Um dies zu unterstützen, führt die Universität Frankfurt mit den „Entstehungsprozessen von Mathematik“ eine neue Lehrveranstaltung ein, die maßgeblich der genetischen Idee des Lernens verpflichtet ist (Toeplitz 1949, Beutelspacher, Danckwerts et al. 2011). Im Rahmen der Konzeptionsarbeit zu dieser Veranstaltung wurde in der Vorlesung „PC-Einsatz im Mathematikunterricht“ die hier berichtete Vorstudie gemacht. Mathematische Frage ist die Klärung verschiedener Fassungen von Begriffen. Für den Integralbegriff wird diese Frage beispielsweise auch im „Analysis Arbeitsbuch“ (Bauer 2012) diskutiert. Während fachwissenschaftliche Darstellungen der Analysis häufig nur eine Definition eines Begriffs geben, hat es in der Didaktik auch Tradition, mehrere äquivalente und auch nicht-äquivalente Definitionen zu betrachten (siehe z.B. Blum und Törner 1983). Allerdings ist die Untersuchung von Begriffsdefinitionen oft technisch anspruchsvoll, so dass die Idee entstanden ist, Computeralgebra für diesen Zweck zu nutzen.

Viele Definitionen verwenden Bausteine, die in CAS als leistungsfähige Black-Box zur Verfügung stehen, etwa den Grenzwertbegriff in seiner technischen Realisation als limit-Befehl. Wenn man dessen Bedeutung verstanden hat, kann man das Konzept der Begriffsreduktion verwenden: Im Computeralgebrasystem wird ein neuer Begriff (z.B. eine bestimmte Fassung der Differenzierbarkeit) mittels des bereits vorhandenen limit-Befehls definiert.

Der traditionelle Ableitungsbegriff kann im CAS Maxima folgendermaßen realisiert werden: `diff1(f,x0):= limit((f(x0+h)-f(x0))/h,h,0).`

Die Forschungsfrage, die sich hier stellt ist, ob Studierende (nach Studienordnung im fünften Fachsemester) dieses Konzept verwenden können, um alternative Begriffsdefinitionen zu erkunden. Um erste Einsichten zu gewinnen, wurde den Studierenden folgende Aufgabe im Rahmen der üblichen, wöchentlich abzugebenden Hausaufgaben gestellt:

> Begriffe hätten oft auch ganz anders gefasst werden können. Hier sollen Sie Maxima benutzen, um das an einem Beispiel zu erkunden.
> Das Folgende definiert eine Art Ableitung
> $$f^!(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2 \cdot h}$$
> (i) Benutzen Sie die `limit`-Funktion von Maxima, um diese Ableitungen der Terme `x^2, x^3, sin(x), abs(x)` zunächst an den Stellen 0 und 2, und dann auch für allgemeines x zu bestimmen.
> (ii) Definieren Sie eine Funktion `diff2(g,a)` in Maxima, die diese $2h$-Ableitung des Terms g an der Stelle a berechnet.
> (iii) Finden Sie drei Funktionsterme, die korrekt abgeleitet werden und einen, der nicht das erwartete Resultat liefert.
> (iv) Stimmt der Ableitungsbegriff mit dem üblichen überein?
> Hat er Vor- oder Nachteile? Begründen Sie kurz, z.B. mit einem Beispiel.
> (v) Eine weitere Art Ableitung ergibt sich auch durch $f^q(x) \coloneqq \lim_{q\to 1} \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$.
> Erkunden Sie [...] die Beziehung zum gewöhnlichen Begriff [...].

2. Beobachtungen

Es liegen 28 Bearbeitungen dieser Aufgabe als Maxima-Dateien vor, die von den Studiereden auch (unterschiedlich umfangreich) mit Kommentaren versehen wurden. Zudem wurden drei Wochen nach Abgabe mittels eines Fragebogens Einschätzungen und Kenntnisse der Studierenden erhoben. In diesem waren zwei größere Item-Kategorien enthalten: Ein Block fragte das Interesse an der Aufgabenstellung und an Definition von alternativen Begriffen ab, ein zweiter befasste sich mit Aussagen rund um das verwendete CAS Maxima. Aus den Ergebnissen kann hier nur kurz berichtet werden, dass sich die Studenten in drei Cluster aufteilten: Ein mittelgroßes Cluster mit generell skeptisch eingestellten Studierenden, ein kleines Cluster mathematisch interessierter, aber CAS-kritischer Befragter und ein großes Cluster mit mathematisch interessierten und CAS-affinen Studierenden. Insbesondere ist interessant, dass in den letzten beiden Clustern die Begriffsvariation als für die Schule relevant angesehen wurde.

Die Bearbeitungen der Übungsaufgabe zeigen eine Reihe von Ungeschicklichkeiten im Umgang mit dem CAS, beispielsweise die folgenden:

- Die abzuleitende Funktion wird nicht als Parameter übergeben, so dass diese stets unter einem festen Namen definiert werden muss.

- Der Unterscheid zwischen Ableitungsoperatoren für Terme und für Funktionen wird nicht erkannt. Die händische Gewohnheit, beide Sichtweisen flexibel zu wechseln, stößt an Grenzen.
- Verwechslung der Rolle von Variablen, z.B. x als formale Variable der Funktion und der Stelle, deren Ableitungswert bestimmt wird.
- Probleme mit der Klammerung und Vorrangregelung, beispielsweise liefert `limit((f(x+h)-f(x-h))/2*h,h,0)` immer 0 und `limit(((2^x+h)-(2^x-h))/2*h, h,0)` liefert 1.
- Verwechseln des veränderlichen Parameters des Grenzwertes: Verwendung von $\lim\limits_{h\to 2}\frac{f(x+h)-f(x)}{2\cdot h}$ für die Ableitung an der Stelle 2
- Unklarheiten bei Eingabe (`atan` oder `arctan`, `ln` oder `log`) und Ausgabe (Rückgabewert `und`)

Das Auftreten dieser Probleme ist nicht verwunderlich, da die Studierenden erst in ihrer zweiten Woche mit Maxima gearbeitet haben. Schwierigkeiten wie diese können vermutlich leicht durch Änderung des Instruktionsrahmens entschärft werden. Von anderer Qualität ist dagegen die folgende Problematik.

Studierende können häufig nicht einschätzen, ob sie ein Phänomen (also hier die Ausgabe des CAS) als angemessen im Rahmen der Mathematik interpretieren sollen, oder das Phänomen dem CAS attribuiert werden sollte (vgl. auch Oldenburg 2007). Der folgende Satz aus einem Studierendenkommentar zur symmetrischen Ableitung der Betragsfunktion in der 0 zeigt das deutlich:

> *Der Ableitungsbegriff stimmt nicht immer mit Üblichen überein. Maxima beachtet nicht, dass man bei der Ableitung des Betrags an der Stelle 0 keine Ableitung findet, da die Funktion hier nicht stetig ist.*

Hier wird deutlich, dass ein mathematisches Phänomen (symmetrische Ableitung von `abs(x)` an der Stelle 0 ist 0) fälschlicherweise als Defizit des Systems aufgefasst wird. Und es zeigt sich exemplarisch weiter, dass diese Unsicherheit mit Unsicherheit in mathematischen Zusammenhängen einhergeht. Die Situation kann als Dreieck verstanden werden mit den Bezugspunkten subjektive mathematische Theorien des Studenten, etablierte Mathematik und „Mathematik des CAS“, das die etablierte Mathematik modelliert (und damit pragmatisch verkürzt). Bei Inkonsistenzen in diesem Dreieck muss der Lernende also die richtige Verortung vornehmen. Verschärft wird dies, sobald Rückgabewerte aus technischen Grenzbereichen der CAS-Mathematik interpretiert werden müssen.

Neben dieser Kernschwierigkeit zeigt sich aber auch, dass die Aufgabe zu vielfältigen Überlegungen und Argumenten Anlass geben. Um die vorliegenden Daten systematisch auszuwerten, wurde im Sinne der Grounded Theory vorgegangen. Der Prozess ist noch nicht abgeschlossen, zum gegenwärtigen Zeitpunkt erscheint es uns aber sinnvoll, mit folgenden Kategorien zu arbeiten, die i.d.R. durch ein Zitat illustriert werden:

- <u>Schulbezogene didaktische Reflexion</u>: Studierende überlegen, welche Vor- und Nachteile die Aufgabe im Schulunterricht hätte: „*Zunächst ist es für SuS [...] schwer nachzuvollziehen, warum Maxima bei der Kettenregel direkt ausmultipliziert.*“
- <u>Generisches Verständnis der Ableitung</u>: Der Ableitungsterm ist korrekt, wenn er bis auf wenige Sonderstellen korrekt ist: abs(x)‘=x/|x|
- <u>Nicht definierte Stellen</u>: Die symmetrische Ableitung kann sogar an Definitionslücken existieren: „*Sollte es in der Fu[n]ktion f also eine Definitionslücke geben, so stört dies die 2h-Methode nicht*“
- <u>Mittelwertvorstellung</u>: Die symmetrische Ableitung als Mittelwert aus linksseitiger und rechtsseitiger Ableitung: „*[...] ist Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert und bei Differenzierbaren Funktionen sind diese beiden gleich, daraus ergibt sich der [...] Grenzwert [...] aus der Schule.*“

3. Konsequenzen und Fazit

Die beschriebene Pilotstudie hat gezeigt, dass Studierende mit Konzeptreduktion arbeiten können und dass dies vielfältige und eigenständige Überlegungen anregen kann. Allerdings ist es nur den leistungsstärksten Studierenden gelungen, dabei auch stets den Überblick zu behalten, welche allgemeingültigen mathematischen Aussagen aus dem speziellen Tun im CAS gefolgert werden können. Die Vorlesung „Entstehungsprozesse von Mathematik“ wird Gelegenheiten bieten, diesen Fragen weiter nachzugehen.

Literatur

Bauer, Th. (2012): Arbeitsbuch Analysis. Wiesbaden: Teubner.

Beutelspacher, A. et al. (2011): Mathematik Neu Denken. Wiesbaden: Teubner.

Blum, W., Törner, G. (1983): Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Oldenburg, R. (2007): Was Schüler über CAS wissen, was Schüler über CAS wissen sollten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.

Toeplitz, O. (1949): Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung - eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Berlin: Springer.

Laura OSTSIEKER, Paderborn

Konvergenz von Folgen - Eine Studie zur Wissensentwicklung im Rahmen einer Analysis 1-Vorlesung

Die Konvergenz von Folgen ist ein zentraler Begriff der Analysis 1-Vorlesung, mit dem viele Studierende Schwierigkeiten haben.

1. Forschungsstand

Zu Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff wurden bereits zahlreiche Untersuchungen veröffentlicht. Hier soll ein kurzer Überblick über einige wichtige Ergebnisse gegeben werden. Eine große Bedeutung für den Konvergenzbegriff spielt zunächst einmal der Folgenbegriff, dies betont auch Weigand (1993). Viele Lernende haben jedoch bereits Schwierigkeiten mit Folgen, insbesondere wenn diese nicht als Term gegeben sind. So schreiben Tall und Vinner (1981), dass abschnittsweise definierte Folgen von einigen Lernenden gar nicht als eine Folge aufgefasst werden. Zudem berichten sowohl Davis und Vinner (1986) als auch Roh (2005), dass viele Lernende intuitiv zunächst fälschlicherweise davon ausgehen, dass zu einem festen Index N der „Fehler" ε bestimmt werden müsse. Als eine weitere mögliche Ursache für Fehlvorstellungen wird die Diskrepanz zwischen der mathematischen Sprache und der Alltagssprache genannt, vgl. Monaghan (1991) und Tall und Vinner (1981). So haben einige Begriffe, die oft im Zusammenhang mit der Konvergenz von Folgen benutzt werden, in der Alltagssprache eine andere Bedeutung als in der Mathematik. Mit den alltagssprachlichen Bedeutungen sind oft dynamische Vorstellungen verbunden. Diese sieht Bender (1991) gerade zu Beginn des Lernprozesses eher kritisch. All das kann zu verschiedenen Fehlvorstellungen führen. So sind einige Lernende der Meinung, der Grenzwert werde nie erreicht, vgl. Davis und Vinner (1986). Andere sind der Ansicht, es könne mehrere Grenzwerte geben, vgl. Roh (2005), wiederum andere erkennen nicht, dass es einen Unterschied zwischen Grenzwerten und Häufungspunkten gibt. Eine weitere Fehlvorstellung ist, dass Grenzwerte als unendliche Prozesse angesehen werden, nicht als Ergebnisse unendlicher Prozesse, vgl. Marx (2013). Davis und Vinner (1986) berichten von der Fehlvorstellung, konvergente Folgen seien immer monoton und, dass der Grenzwert als obere oder untere Schranke aufgefasst werde.

2. Fragestellungen

Viele der genannten Ergebnisse stammen aus Untersuchungen mit Schülern oder Studierenden anderer Fächer, jedoch nicht von Studierenden des Bachelorstudienganges Mathematik oder des gymnasialen Lehramts. Daher soll zunächst untersucht werden, welche Schwierigkeiten speziell bei dieser Gruppe von Studierenden im Zusammenhang mit der Konvergenz einer Folge auftreten. Im Rahmen meines Dissertationsvorhabens soll außerdem untersucht werden, wie das Verständnis dieses Begriffes durch einen Workshop, in dem die Begriffsentwicklung exemplarisch behandelt wird, gefördert werden kann, und ob sich diese exemplarische Begriffsentwicklung förderlich auf die Lernergebnisse der Studierenden auswirkt.

3. Methode und Design

Um die Wissensentwicklung quantitativ zu untersuchen, wurden ein Vor- und Nachtest zum Thema Folgen und Konvergenz entwickelt und im Wintersemester 2012/2013 in Paderborn in der Veranstaltung Analysis 1 eingesetzt. Beide Tests bestehen aus jeweils neun Items, die teilweise selbstentwickelt sind, und hatten eine Dauer von 25 Minuten. Der Vortest wurde in der zweiten Semesterwoche, bevor das Thema Folgen und Konvergenz behandelt wurde, von 167 Studierenden bearbeitet. Darin werden technische Fähigkeiten wie das Rechnen mit Brüchen, Ungleichungen und Beträgen, Vorwissen zu Unendlichkeit und Folgen und Argumentationsfähigkeiten abgeprüft. Der Nachtest wurde von 118 Studierenden in der zehnten Semesterwoche geschrieben, nachdem das Thema Folgen und Konvergenz in der Vorlesung abgeschlossen war. Darin werden Folgen in verschiedenen Darstellungen, die Untersuchung von Folgen auf Konvergenz, das Verständnis der Definition und Zusammenhänge zwischen dem Konvergenzbegriff und anderen Begriffen abgeprüft.

Beide Tests sollen mit der Methode der Rasch-Skalierung ausgewertet werden.

4. Erste Ergebnisse

Zu einzelnen Items sollen nun erste Ergebnisse vorgestellt werden. Ein selbstentwickeltes Item aus dem Vortest lautet:

Wir betrachten verschiedene Zahlenfolgen. Versuchen Sie möglichst genau auszudrücken, was jeweils mit a_n passiert, wenn n beliebig groß wird.

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = (-1)^n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

c) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$

Aufgabenteil a) wurde von 81,4% der Studierenden angemessen gelöst, b) von 51,5% und c) von 44,9%. Die Beschreibungen wurden jeweils kategorisiert. Bei Aufgabenteil b) sind die folgenden Kategorien aufgetreten:

Kategorie	*Definition*
korrekte Beschreibung	1 und -1 wurden als Häufungspunkte genannt oder es wurden die beiden Teilfolgen beschrieben, die gegen 1 bzw. -1 konvergieren.
Beschreibung mit zwei Grenzwerten	In der Beschreibung werden 1 und -1 als Grenzwerte bezeichnet.
unvollständige Beschreibung	Alles, was ausgesagt wird, ist korrekt, aber die Beschreibung ist unvollständig.
Beschreibung des Terms	Es wird lediglich der Term beschrieben und nichts über die beiden Häufungspunkte ausgesagt.
falsche Beschreibung	Die Beschreibung enthält inhaltlich falsche Aspekte.
keine Beschreibung	Es wurde nichts geschrieben.

Ein Item aus dem Nachtest, das ebenfalls selbstentwickelt wurde, ist das folgende:

Entscheiden Sie jeweils, ob die Verbalisierung äquivalent zur Definition der Konvergenz einer Folge ist. Falls sie nicht äquivalent ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen.

b) Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn ihre Folgenglieder diesem Wert mit wachsendem n immer näher kommen, ohne ihn je zu erreichen.

c) Eine Folge konvergiert gegen einen Wert, wenn in jeder beliebigen Umgebung um diesen Wert unendlich viele Folgenglieder liegen.

Alle drei Verbalisierungen sind nicht äquivalent zur Definition der Konvergenz. 28,8% der Studierenden haben Teil a) richtig gelöst, 22,0% haben es richtig beantwortet und ein geeignetes Gegenbeispiel angegeben. Bei Teil b) sind die Lösungsraten 64,4% bzw. 50,8% und bei c) 40,7% bzw. 26,3%. Nur 6,8% der Studierenden haben das Item komplett richtig bearbeitet.

Sowohl im Vortest als auch im Nachtest wurde das folgende Item gestellt:

Ist $0,\overline{9} = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hier ist ein Wissenszuwachs zu verzeichnen. Im Vortest wurde dieses Item von 46,2% der Studierenden, die beide Tests geschrieben haben, richtig gelöst, im Nachtest hingegen von 81,3%.

5. Diskussion

Es zeigt sich, dass die Studierenden Items, in denen Folgen angegeben waren und auf Konvergenz untersucht werden sollten, zwar relativ gut gelöst wurden. Jedoch traten viele Fehler bei dem Item auf, bei dem das Verständnis der Definition durch angegebene Verbalisierungen geprüft wurde. Die angegebenen Verbalisierungen stehen in Zusammenhang mit verschiedenen aus der Literatur bekannten Fehlvorstellungen. Diese Fehlvorstellungen treten also auch bei den hier untersuchten Studierenden auf. Die Ergebnisse sind insofern plausibel, dass das konkrete Berechnen von Grenzwerten in Vorlesung und Übungen häufig durchgeführt wird, aber Verbalisierungen eher selten behandelt werden.

Literatur

Bender, P. (1991): Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 44, 238 - 243.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986): The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. In: The Journal of Mathematical Behavior, 5, 281 - 303.

Marx, A. (2013): Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen - Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 34, 73 - 97.

Monaghan, J. (1991): Problems with the Language of Limits. In: For the Learning of Mathematics, 11, 20 - 24.

Roh, K. H. (2005): College Students‘ Intuitive Understanding of the Concept of Limit and their Level of Reverse Thinking. Doktorarbeit, The Ohio State University, Columbus, OH.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Particular Reference to Limits and Continuity. In: Educational Studies in Mathematics, 12, 151 - 169.

Weigand, H.-G. (1993): Zur Didaktik des Folgenbegriffs. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Barbara OTT, Bamberg

Grafische Darstellungen zu Textaufgaben in der Grundschule

Darstellungen sind im Mathematikunterricht der Primarstufe in unterschiedlichen Kontexten für Erkenntnisprozesse von Bedeutung. Bei der Bearbeitung von Textaufgaben können verbal dargestellte mathematische Strukturen u.a. grafisch repräsentiert werden. In diesem Beitrag wird eine Pilotstudie vorgestellt, die sich der Frage widmet, inwieweit in Textaufgaben inhärente mathematische Strukturen in spontanen Kinderzeichnungen sichtbar sind. Dazu wird zunächst die Motivation für die Fragestellung begründet sowie der Begriff *grafische Darstellung* theoretisch fundiert.

1. Motivation

Die Bildungsstandards (KMK 2005) weisen die Kompetenz „Darstellen" als ein Prozessziel des Mathematikunterrichts aus. Dies beinhaltet auch die Fähigkeit, Sachverhalte z. B. in Skizzen oder Diagrammen grafisch darzustellen (vgl. Krauthausen & Scherer 2007, 154). Derartige Darstellungen spielen im Kontext von Sachaufgaben als Bearbeitungshilfen eine Rolle (Fricke 1987; Franke & Ruwisch 2010). Der Blick in die unterrichtliche Praxis zeigt jedoch oft ein anderes Bild: Immer wieder wird berichtet, dass Schülerinnen und Schüler grafische Lösungshilfen selten oder gar nicht nutzen (z.B. Bender 1980; Fricke 1987; Lopez-Real & Veelo 1993). Gerade Kinder, für die grafische Bearbeitungen hilfreich sein könnten, können diese oft nicht selbstständig anfertigen (vgl. Franke & Ruwisch 2010, 103). Es zeichnet sich ein Dissens zwischen den didaktisch motivierten Ideen und der realen Nutzung durch die Lernenden ab. Deshalb werden in der hier vorgestellten Studie Kinderzeichnungen zu Textaufgaben genauer betrachtet. Zuvor soll der Begriff *grafische Darstellung* geklärt werden.

2. Begriffsklärung *grafische Darstellung*

Kennzeichnend für die Mathematik und den Mathematikunterricht ist die Beschäftigung mit abstrakten Denkobjekten. Darstellungen sind notwendig, um diese greifbar zu machen (Duval 2006). Allgemein kann eine Darstellung definiert werden als „something, that stands for something else" (ebd., 103). In grafischen Darstellungen zu Textaufgaben müssen verbal dargestellte mathematische Strukturen, d. h. Relationen zwischen Zahlen bzw. Größen, grafisch abgebildet werden. Da Relationen selbst „amedial" sind, bedürfen sie der Vergegenständlichung (Dörfler 1988, 110). Im Kontext grafischer Darstellungen zu Textaufgaben müssen dazu die im Text sprachlich dargestellten strukturrelevanten Objekte abgebildet und den Relationen entsprechend in der Zeichenebene angeordnet werden. So werden die mathematischen Strukturaspekte mit räumlichen Darstellungsmöglichkeiten in Verbindung gebracht (vgl. Stern et al. 2003, 192). Beschriftungen können die Anordnung der Objekte in der Zeichenebene begleiten. In diesem Sinn wird hier unter einer grafischen Darstellung die Aufzeichnung der mathematischen Struktur einer Aufgabe durch Anordnung von strukturrelevanten Objekten in der Zeichenebene verstanden. Einen Überblick über die grafische Darstellungen kennzeichnenden Elemente bietet Abbildung 1.

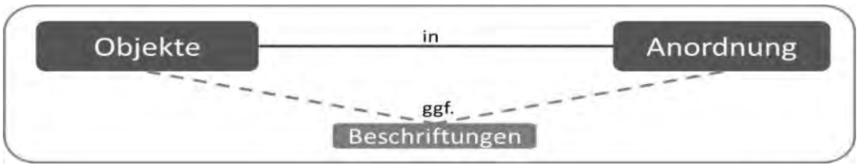


Abbildung 1: Elemente grafischer Darstellungen

3. Design der Pilotstudie

In der Pilotstudie zu grafischen Darstellungen wird untersucht, inwieweit in Textaufgaben inhärente mathematische Strukturen in spontanen Kinderzeichnungen wiedererkennbar sind. Sie wurde in jeweils zwei ersten und zweiten Klassen ($N_{Stichprobe}$=77) gegen Ende des ersten Schulhalbjahres durchgeführt. Als Erhebungsinstrument diente ein Paper-Pencil-Test mit sechs Textaufgaben-Items, der jeweils auf zwei Tage verteilt bearbeitet wurde. Die Items orientieren sich an Schulbuchaufgaben verschiedener Kontexte und mathematischer Strukturen. Sie wurden so erstellt, dass sie von Aufgaben, welche die strukturrelevanten Objekte sowie deren Anordnungen sprachlich nahelegen, bis zu Aufgaben reichen, deren strukturrelevante Objekte durch ihre physikalischen Eigenschaften nicht direkt grafisch umsetzbar sind; Hilfsobjekte und mögliche Anordnungen müssen von den Kindern gefunden werden. Mit der Aufforderung, die Gedanken zur Aufgabenlösung für andere aufzuzeichnen und aufzuschreiben, wurden die Items jeweils mehrfach vorgelesen.

4. Ausgewählte Ergebnisse der Pilotstudie

Die Kinderdokumente der Pilotierung ($N_{Dokumente}$=438) dienten als Grundlage zur Generierung von Kategorien, die es erstmals ermöglichen, Kinderzeichnungen zu Textaufgaben hinsichtlich ihrer Strukturabbildung zu klassifizieren. Mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2010) wurden sechs Kategorien identifiziert: Neben Lösungen, in denen keine Objekte aufgezeichnet wurden *(keine Aufzeichnung)* oder trotz aufgezeichneter Objekte kein Bezug zur Aufgabe besteht *(textferne Aufzeichnung)*, weisen einige Dokumente rein inhaltliche Bezüge auf *(Illustration)*. Andere bilden strukturelle Aspekte mit nicht-grafischen Mitteln wie Rechnungen ab *(nicht-grafische Darstellung)*. In weiteren Kinderzeichnungen werden Teilaspekte der mathematischen Struktur *(grafische Darstellung Teilaspekte)* oder die Gesamtstruktur *(grafische Darstellung Gesamtstruktur)* durch eine Anordnung von Objekten in der Zeichenebene sichtbar.

Es lebte einst ein König, der wollte einen 11 Meter hohen Turm bauen.
Seine Bauleute brauchten dafür mehrere Jahre. In jedem Jahr schafften sie zwei Meter.
Wie lange dauerte es, bis der Turm fertig war?

Illustration — *Grafische Darstellung Teilaspekte* — *Grafische Darstellung Gesamtstruktur*

Abbildung 2: Schülerlösungen

In knapp der Hälfte der Dokumente (49 %) werden Strukturaspekte grafisch dargestellt (s. Abb. 3). In gut einem Drittel der Schülerlösungen (35 %) ist die mathematische Struktur nicht wiedererkennbar. Den größten Anteil nehmen grafische Darstellungen von Teilaspekten ein, gefolgt von Abbildungen mit rein inhaltlichen Aufgabenbezügen (Illustrationen) und nicht-grafische Darstellungen, hier in Form von Rechnungen.

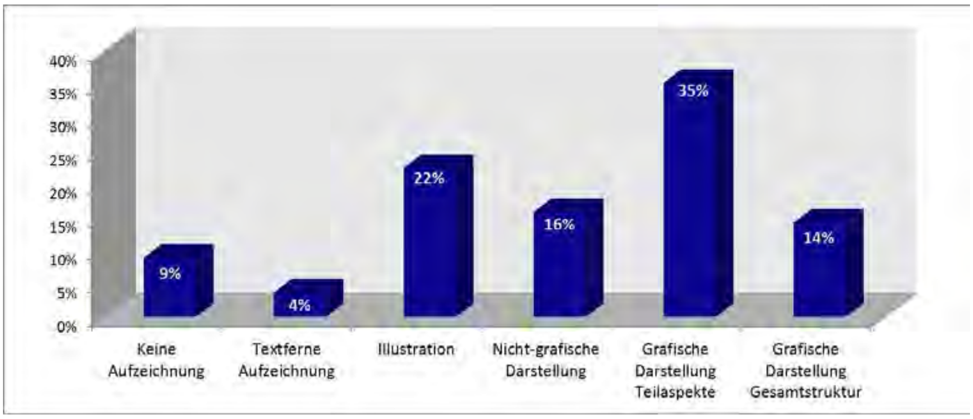


Abbildung 3: Verteilung der Schülerzeichnungen auf die Kategorien

Eine Auswertung nach Jahrgangsstufen zeigt eine Dominanz der Kategorien Illustration und grafische Darstellung Teilaspekte (jeweils 35 %) in der ersten Jahrgangsstufe. Die Gesamtstruktur wird selten sichtbar (10 %), nicht-grafische Darstellungen treten fast nicht auf (1 %). Während sich der Anteil grafischer Darstellungen in der zweiten Jahrgangsstufe nur geringfügig ändert (insgesamt 54 %), ist eine deutliche Verschiebung von Illustrationen (7 %) zu nicht-grafischen Darstellungen (33 %) zu erkennen.

Die Auswertung einzelner Items zeigt erwartungsgemäß einerseits hohe Anteile grafischer Darstellungen bei textlichen Hinweisen auf relevante

Objekte und Anordnungen und andererseits niedrige Anteile dieser Kategorien am anderen Ende des Aufgabenspektrums (s. 3.). Die Illustrationen verteilen sich im Wesentlichen entgegengesetzt. Der höchste Prozentsatz an Illustrationen (45 %) - vorwiegend von Erstklässlern - zeigte sich jedoch bei der in Abb. 2 vorgestellten Aufgabe, die teilweise grafische Darstellungsmöglichkeiten sprachlich nahelegt. Vermutlich verleitete der Märchenkontext jüngere Schulkinder zum Illustrieren (vgl. auch Rasch 2001).

5. Folgerungen

Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass Kinder die mathematische Struktur von Textaufgaben zumeist nur in Teilaspekten grafisch darstellen. Zweitklässler nutzen zunehmend strukturelle Darstellungen, allerdings oft mit nicht-grafischen Mitteln (Rechnungen). Grafische Darstellungskompetenz im Zusammenhang der Bearbeitung von Textaufgaben scheint derzeit unterrichtlich wenig unterstützt zu werden. Mögliche Fördermaßnahmen werden aktuell in einem laufenden Forschungsprojekt erprobt.

Literatur

Bender, P. (1980): Analyse der Ergebnisse eines Sachrechentests am Ende des 4. Schuljahres, Teil 3. In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, 8, 226-233.

Franke, M., Ruwisch, S. (2010): *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Auflage). Heidelberg: Spektrum.

Fricke, A. (1987): *Sachrechnen*. Stuttgart: Klett.

Dörfler, W. (1988): Rolle und Mittel von Vergegenständlichung in der Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1988*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 110-113.

Duval, R. (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

KMK (Hrsg.) (2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Wolters Kluwer.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007): *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Auflage). München: Spektrum.

Mayring, P. (2010): *Qualitative Inhaltsanalyse* (11. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz.

Lopez-Real, F., Veelo, P. (1993): Children's use of diagrams as a problem-solving strategy. In: Hirabayashi, I., Nohda, N., Shigematsu, K., Lin, F.-L. (Hrsg.): *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, 169-176. Tsukuba: University of Tsukuba.

Rasch, R. (2001): *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Stern, E., Aprea, C., Ebner, H. (2003): Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. In: *Learning and Instruction*, 13, 191-203.

Erkki PEHKONEN, Uni Helsinki; Leonor VARAS, Uni Chile

Ein Versuch zur Entwicklung des mathematischen Denkens in der Grundschule: Vergleichstudie Finnland–Chile

Kurzfassung: *Hier wird ein Forschungsprojekt beschrieben, das in der Universität Helsinki und Universität Chile realisiert wird. Das Projekt in Frage ist eine Vergleichstudie zwischen Finnland und Chile, die in den Jahren 2010–13 durch die Finnische Akademie und das Chilenische CONICYT finanziert werden. Das Ziel des Projektes ist, die Entwicklung des mathematischen Denkens bei den Schülern (von 3. bis 5. Klassen) zu folgern, wenn man monatlich ein offenes Problem neben dem traditionellen Unterricht verwendet. Zum Schluss werden aus dem Forschungsprojekt einige Problemaufgaben dargestellt.*

Sowohl in Finnland (NBE 2004) als auch in Chile (GC 2002) ist das allgemeine Ziel des Mathematikunterrichts in allen Alterstufen das Verstehen der mathematischen Strukturen und die Entwicklung des mathematischen Denkens, also nicht nur das Üben des mechanischen Rechnens. Dies sieht aber nicht so gut im Rahmen des konventionalen Mathematikunterrichts sich zu verwirklichen, wobei der Lehrer sehr eifrig in das Textbuch zugreift und mit den mechanischen Aufgaben arbeitet. Deshalb sollte man in den Unterricht neue Elemente hinfügen: solche Aufgaben, womit der Lehrer die Problemlöse- und Denkfertigkeiten seiner Schüler einüben kann.

1. Forschungsprojekt Finnland–Chile

Das drei-jährige vergleichende Forschungsprojekt Finnland–Chile ist für die Jahre 2010–13 von der Finnischen Akademie (Projekt #135556) und das chilenischen CONICYT (Projekt # AKA 09) finanziert. Das Ziel des Projektes ist die Entwicklung des mathematischen Verstehens und der Problemlösefähigkeiten bei den Primarstufe-Schülern (Klassen 3–5) zu fördern, wenn offene Probleme einmal im Monat regelmässig verwendet werden. Mehr über das Forschungsprojekt kann man z.B. im Beitrag Laine & al. (2012) lesen.

Hintergrundstudien. Als Hintergrundstudien werden verschiedene Methoden verwendet, um die Beliefs und Kenntnisse der Schüler herauszubringen: Schülerfragebogen über die Mathematikauffassungen, Schülerzeichnungen über eine Mathematikstunde, ein Schülertest über Mathematikkenntnisse und Problemlösefertigkeiten sowie Forscherbeobachtungen und Feldnotizen bei der Realisierung der Experimentaufgaben. Die Hauptidee im Projekt ist, dieselbe Messungen nach drei Jahren wiederzuholen, wenn die Schüler beim Enden des fünften Schuljahres sind. Also haben wir eine Möglichkeit, Vergleichungen sowie zwischen den Ländern als auch die Entwicklung in einem Land mit der Zeit zu machen.

Datensammlung. In beiden Ländern haben wir zwei Gruppen der dritten Klassen mit in der Forschung ein, in beiden etwa 10–15 Lehrer aus (hauptsächlich) verschiedenen Schulen: die Experimentgruppe und die Kontrollgruppe. Die Finnischen Schüler sind aus dem Gross-Helsinki Gebiet und die Chilenischen Schüler aus Santiago de Chile. In allen Gruppen werden die Hintergrundstudien durchgeführt, aber in den Experimentgruppen gibt es zusätzlich im Durchschnitt einmal in der Monat eine Stunde mit einem offenen Problem, die mit Hilfe von zwei Forschern auf der Video genommen wird.

Forscher. Die Finnische Forschungsgruppe arbeitet unter der Leitung von Prof. (emer.) Dr. Erkki Pehkonen (Universität Helsinki). Die Mitglieder der Gruppe sind wie folgt: Dr. Liisa Näveri, Frau Laura Tuohilampi, Prof. Dr. Markku Hannula, Doz. Dr. Anu Laine, Dr. Päivi Portaankorva-Koivisto, Prof. (emer.) Dr. Maija Ahtee. Dazu gibt es noch ein Spezialist für die Forschung der Schülerzeichnungen: Dr. Pirjo Tikkanen (Universität Jyväskylä).

Die Chilenische Forscherin ist Frau Prof. Dr. Maria Leonor Varas (Universität Chile, Santiago) und ihre Forschungsgruppe: Prof. Dr. Patricio Felmer, Prof. Dr. Salomé Martínez, Prof. Dr. Cristian Reyes, Prof. Dr. Alejandro López.

2. Einige typische Beispiele aus den Experimentproblemen

Während der dreijährigen Forschungsperiode 2010–13, also in den Klassen 3–5, werden insgesamt etwa 20 offene Experimentprobleme in den Klassen behandelt. Sie sind so gewählt, dass die wichtigten Gebieten der Elementarmathematik in Frage kommen: Aritmetik, Geometrie und Kombinatorik. Zusätzlich versucht man auch, lebensnahe Mathematik im Kreis der Problemen zu behalten. Im folgenden werden einige Beispiele aus den im Projekt verwendeten Problemen dargestellt.

Beispiel 1. Zerlegung eines Quadrats

> *Zerlege ein Quadrat in zwei Teile, die deckungsgleich sind. In wie viele verschiedenen Weisen kannst Du es durchführen? Mache Notizen über Deine Lösungen.*

Beispiel 2. Drei-Farben-Fahnen

> *Plane Fahnen mit drei-Farben-Streifen so viele verschiedene wenn nur möglich. Zeichne Deine Lösungen.*

Beispiel 3. Schnecke–Elli

> *Die Schnecke Elli klettert das Mauer aufwerts sehr langsam. Eines Tages kann sie 10 cm klettern und in einem anderem 20 cm. Es gibt Tage, wenn sie schläft und nicht klettert, und einige andere Tage, wenn sie so tief schläft, dass sie 10 cm zurückkommt. Das Mauer ist 100 cm hoch. Nach den zehn Tagen ist Elli erst auf dem Halbweg des Mauers (also hat sie 50 cm gestiegen). Was alles könnte es in den ersten zehn Tagen passiert haben? Beschreibe so viele verschiedene Weisen, wenn nur möglich.*

Charakteristisch für diese Probleme ist Offenheit. Jedes hat sehr viele Lösungen, einige sogar unendlich viele. Zum Anfang des Projektes war die Aufgabe nur möglichst viele Lösungen zu finden, d.h. die Kreativität der Schüler wurde betont. Etwa nach einem Jahr wurde es zusätzlich Schlussfolgerungen nachgefragt, in der Weise wie "Wie kannst Du sicher sein, dass Du alle mögliche Alternative durchgeschaut hat?" Also jetzt ist die Entwicklung des mathematischen Denkens im Vordergrund. Innerhalb des letzten Jahres hat man auch nach den Strategien gefragt, welche der Schüler verwendet hat.

3. Zum Schluss

Damit die Lehrer den Unterricht mit offenen Problemen durchführen könnten, sollten sie Interesse zur Entwicklung ihres Unterrichts haben sowie sich verpflichtet fühlen, neue Unterrichtsideen durchzuführen (vgl. Shaw & al. 1991). Die das Forschungsprojekt teilgenommenen Lehrerinnen sind deutlich fertig, neue Lösungen zu probieren, und einige sind besonders interessiert über die Möglichkeiten des offen Problemlösens. Ein paar Lehrerinnen haben sogar grosse Fortschritte in dieser Sache gemacht; es scheint, dass sie fertig sind, die Methode auch später zu verwenden.

Um Lehr-Lern-Prozesse in der Schule zu verändern, sollten die Beliefs von Lehrern zu gutem und erfolgreichem Unterricht entwickelt und verändert werden. Es scheint, dass das Ändern der Lehrer nicht möglich wäre, höchstens kann man ihnen einige Anreize zur Richtung der Änderung anbieten, aber die Lehrerin muss sich selbst ihre Lösung und deren Verwirklichung bearbeiten. Mehr über die Probleme des Lehrerwandels gibt es z.B. in der Publikation Pehkonen (2007) zu lesen.

Es gibt einige publizierte Beiträge, wo man die Resultate der Teiluntersuchungen finden kann: Schülerfragebogen über Mathematikauffassungen (vgl. Tuohilampi & al. 2013), Schülerzeichnungen über eine Mathematikstunde (vgl. Pehkonen & al. 2011, Tikkanen & al. 2011, Laine & al. 2013a, Varas & al. 2012), ein Schülertest über Mathematikkenntnisse und Problemlösefertigkeiten (vgl. Laine & al. 2013b) sowie einige Analysen der Experimentprobleme (vgl. Laine & al. 2012, Varas & al. 2013).

Literatur

GC (2002). *Objectivos Fundamentales y Contenidos Mínimo Obligatorios de la Educatión Básica* [Basic objectives and obligatory minimum contents in the basic education]. Curriculum. Gobierno de Chile: Santiago.

Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Ahtee, M., Heinilä, L. & Hannula, M. S. (2012). Third-graders' problem solving performance and teachers' actions. In: T. Bergqvist (Ed.), *Proceedings of the ProMath meeting in Umeå*. University of Umeå, 69–81.

Laine, A., Näveri, L., Ahtee, M., Hannula, M. S. & Pehkonen, E. (2013a). Emotional atmosphere in mathematics lessons in third graders' drawings. Will be published in: M. S. Hannula (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVIII. Proceedings of the MAVI-18 conference*. University of Helsinki.

Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Varas, M.L. & Hannula, M. S. (2013b). Third graders' knowledge in mathematics – Comparing Finnish and Chilean results. Will be published in the *ProMath-2012 (Ljubljana) proceedings*.

NBE (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004* [The basics of the curriculum for the basic instruction 2004]. National Board of Education. Helsinki: Opetushallitus.

Pehkonen, E. (2007). Über "teacher change" (Lehrerwandel) in der Mathematik. In: A. Peter-Koop & A. Bikner-Ahsbahs (Hrsg.), *Mathematische Bildung - mathematische Leistung: Festschrift für Michael Neubrand zum 60. Geburtstag*. Hildesheim: Franzbecker, 349–360.

Pehkonen, E., Ahtee, M., Tikkanen, P. & Laine, A. (2011). Pupils' conceptions on mathematics lessons revealed via their drawings. In: B. Rösken & M. Casper (Eds.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVII. Proceedings of the MAVI-17 Conference*. University of Bochum, 182–191.

Shaw, K. L., Davis, N. T. & McCarty, J. (1991). A cognitive framework for teacher change. In: R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of PME-NA 13*. Volume 2. Blacksburg (VA): Virginia Tech, 161–167.

Tikkanen, P., Ahtee, M, Pehkonen, E., Laine, A., Heinilä, L. & Näveri, L. (2011). Mathematics lesson in third-graders' drawings. In: M. Kontoniemi & O.-P. Salo (Eds.), *Educating teachers in the PISA paradise. Perspectives on teacher education at a Finnish university*. Jyväskylän normaalikoulun julkaisuja 12. Jyväskylän yliopisto, 187–203.

Tuohilampi, L., Hannula, M. S. & Varas, L. (2013). 9-year old students' self-related belief structures regarding mathematics: a comparison between Finland and Chile. Will be published in: M. S. Hannula (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVIII. Proceedings of the MAVI-18 Conference*. University of Helsinki.

Varas, L., Pehkonen, E., Ahtee, M. & Martinez, S. (2012). Mathematical communication in third-graders' drawings in Chile and Finland. In: T.-Y. Tso (Ed), *Proceedings of PME-36*, Vol 4. University of Taiwan, 195–202.

Varas, L., Näveri, L., Ahtee, M., Pehkonen, E., Fuentealba, A. & Martinez, S. (2013). Impact of different ways to introduce a problem solving task on pupils performance in Chile and Finland. Submitted as a presentation proposal for ICME-12 (TSG21) Seoul.

Kathleen PHILIPP, Timo LEUDERS, Freiburg

Diagnostische Kompetenzen von Mathematiklehrkräften – Worauf greifen Lehrerinnen und Lehrer bei der Diagnose zurück?

Im pädagogischen Alltag von Lehrkräften finden diagnostische Tätigkeiten in vielfältigen Situationen statt. Wesentliche Bereiche sind das Ermitteln von Lernvoraussetzungen, die Überwachung des Lernfortschritts, die Abklärung von Lernschwierigkeiten, die Bewertung von Lernprozessen und die Entwicklung des Unterrichts (Hartig, Klieme, & Leutner, 2008; Schrader, 2011). Dabei spielen neben dem systematischen Einsatz wissenschaftlicher diagnostischer Verfahren (formelle Diagnostik) informelle Diagnosen eine bedeutende Rolle. Dazu zählen nach Schrader (2011) unsystematisch gewonnene intuitive Urteile, Einschätzungen und Erwartungen, die im Rahmen des alltäglichen Handelns pädagogische Entscheidungen beeinflussen. Von Bedeutung ist es daher, auch für diese Prozesse ein tieferes Verständnis zu entwickeln. Ein fundiertes und empirisch überprüftes Modell diagnostischer Kompetenz fehlt bislang jedoch. Wenig erforscht ist bislang auch das Wissen, das diagnostischer Kompetenz zugrunde liegt (Schrader, 2011).

Theoretische Grundlagen

Eine Diagnosesituation im Unterricht erfordert von der Lehrkraft die Einschätzung des Wissensstandes von Lernenden. Eine solche Situation lässt sich mit einer in der Expertiseforschung beschriebenen Konstellation vergleichen: Ein Experte muss das Wissen von Laien einschätzen und seine Interaktion auf dieses Urteil abstimmen. Nach Nickerson (1999) entwirft der Experte zunächst ein Ausgangsmodell (*default model*) über das Wissen des Anderen. Sein eigenes Wissen dient dabei als Grundlage, wenn keine weiteren Informationen über den Anderen (*random other*) vorliegen. Das Ausgangsmodell kann dann durch Berücksichtigung von Informationen (z.B. Zugehörigkeit zu einer Gruppe) adaptiert werden. Der Adaptionsprozess kann dann durch Gewinnung von Informationen über die konkrete Person (*specific other*) fortgeführt werden. Geht man davon aus, dass eigenes Wissen als Basis für ein erstes Modell der Annäherung herangezogen wird, so wird die Bedeutung dieses Wissens deutlich. Es stellt sich also die Frage, wie sich dieses Wissen konstituiert, das in diagnostischen Situationen von Lehrkräften benötigt und genutzt wird. Insbesondere könnte im schulischen Kontext das Wissen um die Gruppenzugehörigkeit (z.B. zu einer bestimmten Klassenstufe) eine besondere Rolle spielen.

Morris, Hiebert und Spitzer (2009) sehen die Fähigkeit der *Dekomprimierung* von Lernzielen in Teilziele als zentrale Kompetenz von Lehrkräften hinsichtlich der Planung und Evaluation von Lernprozessen. Eine solche fachliche Analyse ist ohne Kenntnis individueller Schülerlösungen möglich, lässt aber eine Deutung der Teilziele als Subkonzepte von Schülerinnen und Schülern zu. Dekomprimierung kann hinsichtlich diagnostischer Tätigkeiten nützlich sein, wenn (Sub-)Konzepte in Schülerlösungen wiedergefunden werden oder Fehler anhand der Konzepte erklärt werden können. Ob auf diese Weise allerdings auch Fehlkonzepte oder Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern erkannt werden können, ist fraglich.

Ein übergreifendes Modell zur Beschreibung von Lehrerwissen nach Ball, Lubienski, & Mewborn (2001) geht auf Shulman (1986) zurück: Mehrere der dort dargestellten Facetten mathematischen Lehrerwissens sind hinsichtlich diagnostischer Tätigkeiten von Bedeutung. Zunächst spielt dabei fachliches Wissen eine Rolle. *Common content knowledge* (CCK) ist notwendige Voraussetzung für das Beurteilen der sachlichen Richtigkeit einer Schülerlösung. Unter *specialized content knowledge* (SCK) fallen diagnostische Tätigkeiten, die fachliches Wissen erfordern und spezifisch für den Lehrberuf sind wie beispielweise Aufgaben in ihrem Schwierigkeitsgrad zu verändern. Gleichzeitig ist damit auch die Fähigkeit verbunden, mathematische Inhalte fachlich dekomprimieren zu können. Daneben ist aber auch Wissen über Schülervorstellungen, -fehler und typische Lösungswege bedeutsam, was die Facette *knowledge of content and students* (KCS) als fachdidaktische Wissensfacette einschließt.

Forschungsfokus

Im Mathematikunterricht findet man zwei typische diagnostische Situationen, die beide im Zusammenhang mit Aufgaben stehen: (1) die Einschätzung von Aufgaben und (2) die Einschätzung von Aufgabenbearbeitungen. In beiden Situationen sollen dabei *Prozesse* und *Ressourcen* beleuchtet werden. Die Forschungsfragen lauten:

- Wie kommen Lehrkräfte zu einer Diagnose? Wie gehen sie vor?
- Welche Ressourcen nutzen sie dabei? Worauf greifen sie zurück?

Das Ziel der nachfolgend beschriebenen Untersuchung ist neben einem vertieften Verständnis diagnostischer Prozesse die Konkretisierung fachbezogener Facetten diagnostischer Kompetenz. Im Hinblick auf die Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften ist eine solche Modellierung von großer Bedeutung.

Interviewstudie

In einer Interviewstudie wurden Lehrkräfte und Experten (Experten verfügen neben Unterrichtserfahrung auch über fachdidaktische Expertise) befragt (n=6). Das Interview war dabei in zwei Phasen gegliedert mit methodisch unterschiedlichen Zugängen: (1) Lautes Denken beim Diagnostizieren von (a) Aufgaben und (b) Aufgabenbearbeitungen und (2) Reflexion der Diagnose hinsichtlich Prozessen und Ressourcen. Eingesetzt wurden Aufgaben aus dem Bereich der Bruchrechnung, ein Bereich, der hinsichtlich typischer Fehlermuster und Fehlvorstellungen gut erforscht ist. Alle Probanden analysierten zwei Aufgaben und je drei Aufgabenbearbeitungen. Ausgewertet werden die Ergebnisse mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 1983).

Erste Ergebnisse und Ausblick

Bezüglich der ersten Forschungsfrage nach *Diagnoseprozessen* lassen sich verschiedene Vorgehensweisen unterscheiden. Bei der Diagnose von Aufgaben zeigt sich häufig, dass Aufgabenanforderungen und Lösungswege in Teilschritte zerlegt werden, bevor potenzielle Hürden benannt werden. Ein solches Vorgehen ähnelt dem oben genannten Konzept der Dekomprimierung (Morris et al., 2009). Werden Bearbeitungen von Aufgaben analysiert, so zeigt sich, dass im Hinblick auf Fehler von Schülerinnen und Schülern Ursachenhypothesen aufgestellt werden, bei denen sich bei den Probanden große Unterschiede in ihrer Tragweite zeigen.

Bezüglich der zweiten Forschungsfrage nach den *Ressourcen*, die bei der Diagnose genutzt werden, lassen sich verschiedene Aspekte identifizieren, die an dieser Stelle exemplarisch angeführt werden. In der Tabelle wird der Kode benannt, näher beschrieben und in einer Textpassage in den Daten verankert.

Ressource	Definition	Beispiel
Grundvorstellungen	Es werden bereichsspezifische Grundvorstellungen genannt, meist mit Bezug zu fachdidaktischer Literatur.	*„[...] z.B. die Grundvorstellungen von Brüchen, die verschiedenen, einfach immer wieder (..) zu nutzen, um etwas zu erkennen.“*
Bekannte fehlerhafte Lösungen	Es werden bereichsspezifische Fehler benannt, die aus der bisherigen Praxis bekannt sind.	*„So war was, was man eigentlich auch erwartet, dass das vorkommen kann. Also man kennt das dann so mit der Zeit.“*
Multiple Zugangsweisen	Aufgaben werden hinsichtlich verschiedener Lösungswege durchdacht.	*„[...] auf verschiedenen Lehrerwegen, ja, um Schüler bei Problemen zu helfen.“*
…	…	…

An diesen Beispielen wird bereits deutlich, dass hier auf ganz unterschiedliche Wissensfacetten zurückgegriffen wird. Beim Rückgriff auf bereichsspezifische Grundvorstellungen wird fachdidaktisches Wissen explizit herangezogen. Der Rückgriff auf „Bekanntes" deutet hier den Aspekt der Unterrichtserfahrung an. Werden verschiedene Lösungswege einer Aufgabe durchdacht, so zeigt sich hier eine Art fachlicher Flexibilität.

Auf der bisherigen Datenbasis deuten sich vorläufig drei wesentliche Facetten fachbezogener diagnostischer Kompetenz an: fachliches Wissen, fachdidaktisches Wissen und Erfahrungswissen. Es bleibt noch offen, in welchem Zusammenhang diese Facetten stehen, ob sie sich gegenseitig bedingen oder möglicherweise ersetzen. In den weiteren Analysen sollen Zusammenhänge zwischen Prozessen und Ressourcen beleuchtet werden. Wesentlicher Aspekt ist darüber hinaus, Unterschiede bei der Diagnose zwischen Lehrkräften und Experten herauszuarbeiten, um so Bedarfe für die Lehreraus- und -fortbildung ermitteln zu können.

Literatur

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers´ mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), Handbook of research on teaching (pp. 433–456). New York: Macmillan.

Hartig, J., Klieme, E., & Leutner, D. (Eds.). (2008). Assessment of competencies in educational contexts. Göttingen: Hogrefe.

Helmke, A., Hosenfeld, I., & Schrader, F.-W. (2004). Vergleichsarbeiten als Instrument zur Verbesserung der Diagnosekompetenz von Lehrkräften. In R. Arnold & C. Griese (Eds.), Schulleitung und Schulentwicklung. Voraussetzungen, Bedingungen, Erfahrungen. Baltmannsweiler: Schneider-Verlag Hohengehren.

Mayring, P. (1983). Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen u. Techniken. Weinheim ;, Basel: Beltz.

Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. M. (2009). Mathematical Knowledge for Teaching in Planning and Evaluating Instruction: What Can Preservice Teachers Learn? Journal for Research in Mathematics Education, 40(5), 491–529.

Nickerson, R. S. (1999). How We Know-and Sometimes Misjudge-What Others Know: Imputing One´s Own Knowledge to Others. Psychological Bulletin, 125(6), 737–759.

Schrader, F.-W. (2011). Lehrer als Diagnostiker. In E. Terhart, H. Bennewitz, & M. Rothland (Eds.), Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf (pp. 683–698). Münster: Waxmann.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching: Feb. 1986: 4-14. (AERA Presidential Address). Educational Researcher, 4–14.

Franz PICHER, Klagenfurt

Schul-Analysis: Ermutigendes und Ernüchterndes

Die übliche Darstellung der Analysis in der Schule stellt eine unzureichende Grundlage dar, um über den Sinn des Gelernten Auskunft geben zu können. Ich stelle in Form eines Textes eine spezifische Sicht auf die Analysis zur Verfügung, die ein Nachdenken und insbesondere ein Stellen der Sinnfrage erleichtern soll. Der Text stellt einen Vorschlag für ein zusätzliches Angebot neben dem „üblichen" Analysisunterricht dar. Im Folgenden werden Anliegen und Ansatz erläutert und es wird über Erfahrungen aus der Diskussion des Textes mit Studierenden berichtet.

1. Das Anliegen

Der Autor weist einerseits einer rezeptiven Komponente, nämlich dem Erlangen von Reflexionswissen über Mathematik im gesellschaftlichen Kontext, und andererseits einer damit in Zusammenhang stehenden aktiven Komponente, nämlich dem Nachdenken über Mathematik samt der Beschäftigung mit der Sinnfrage, eine hohe Bedeutung in der Auseinandersetzung mit Mathematik im Rahmen von Allgemeinbildung zu.

Die Analysis bietet sich nun in vielerlei Hinsicht als inhaltliche Grundlage einer Auseinandersetzung mit Mathematik im obigen Sinne an: Erstens stellt sie einen größeren, weitgehend abgeschlossenen Block in den derzeit gültigen Lehrplänen dar. Zweitens werden die Lernenden im Rahmen des Analysisunterrichts mit einer mathematischen Theorie konfrontiert, deren Anwendung auf lebensweltliche Fragestellungen zumindest nicht bruchlos zu alltäglichen Vorstellungen möglich ist. Drittens bietet gerade der doch recht umfangreiche Lehrplanabschnitt zur Analysis bei entsprechender Reduktion des Operativen, wie es der bildungstheoretische Hintergrund meiner Überlegungen nahelegt, Zeit zum Nachdenken. Viertens sind die Schüler(innen) wenn Analysis unterrichtet wird in einem Alter, in dem ein gemeinsames Nachdenken gut funktionieren kann, wie mein Dissertationsprojekt zeigte (vgl. Picher 2008). Fünftens schließlich eignet sich die Analysis gerade auch deshalb, weil die Legimitationsfrage des Lernens von Analysis kontrovers gesehen bzw. diskutiert werden kann.

Übliche schulmathematische Aktivitäten sind zuweilen durch die Dimensionen „Enge", „Oberflächlichkeit" sowie „Beschränkung auf (operatives) Tun" geprägt. Im Sinne meines Anliegens sind dem entgegen eine Ausweitung des Blicks, ein (gründliches) Nachdenken sowie die Betrachtung des (operativen) Tuns aus einer Metaebene heraus anzustreben.

Gespräche mit Abiturient(inn)en im Rahmen einer Voruntersuchung geben einen Eindruck vom Ist-Zustand in Bezug auf das genannte Anliegen und bestätigen den obigen Befund. Mit Blick auf die oben angeführten Dimensionen fasse ich meine Beobachtungen wie folgt zusammen.

Ernüchterndes (im Hinblick auf das o. g. Anliegen):

- Das „Ergebnis“ des „üblichen“ Analysis-Unterrichts ist eine sehr technische Sicht auf die Analysis.
- Grundlegende Begriffe der Analysis können nicht verständlich erläutert werden.
- Über den Sinn des Gelernten kann kaum Auskunft gegeben werden, es werden überwiegend Allgemeinplätze über Mathematik genannt.

Ermutigendes (im Hinblick auf das o. g. Anliegen):

- Die Lernenden stehen dem Lehrstoff nicht gleichgültig gegenüber.
- Es besteht großes Interesse an Sinn-Angeboten.

2. Der Ansatz

Der hier vorgestellten Ansatz baut auf bildungstheoretischen Überlegungen zur Rolle der Mathematik in der Gesellschaft von Roland Fischer auf (vgl. etwa Fischer 2001, S. 151 ff). Mit diesem Hintergrund entwickelte ich zunächst eine spezifische Sicht auf die Analysis im Sinne des oben genannten Anliegens sowie der oben genannten Dimensionen und beschäftigte mich dabei selbst mit Fragen wie: „Was sollen alle (höher Gebildeten) wissen?“ und „Worüber sollen alle (höher Gebildeten) nachgedacht haben?“ Ein Ergebnis dieser Überlegungen sind Texte zur Analysis, die darauf folgend anderen zur Verfügung gestellt wurden (vgl. Picher 2011).

Die Texte unterscheiden sich von üblichen Lehr- und Schulbüchern und stellen in mehrerer Hinsicht eine neue Textsorte dar. So wenden sich die Texte etwa direkt an die Adressat(inn)en, und zwar an Personen, die den Analysisunterricht schon hinter sich haben. Diese Zielgruppe wurde gewählt, um die Forschungsfrage einzuschränken: Ich interessiere mich (zunächst) dafür, was aus einer bestimmten Position heraus – nach Absolvieren eines üblichen Analysis-Lehrgangs – in Bezug auf mein Anliegen, mit meinem Ansatz erreichbar ist. Was im Unterricht anders gemacht werden soll, und insbesondere, inwieweit ein erster Zugang zur Analysis bereits reflexiv sein kann, sind Fragen, denen ich mich (noch) nicht widme.

In einer ersten Wirkungsanalyse wurde untersucht, inwiefern die Texte einerseits als Reflexionsangebot und andererseits als Reflexionsgrundlage angenommen werden können. Auf Basis der gewonnen Erfahrungen sollen die Texte überarbeitet werden, dabei sollen auch weitere Impulse für künftige Leser(innen) eingearbeitet werden. Untersuchungen mit Schüler(inne)n, Studierenden und Lehrer(inne)n zeigten durchaus vielversprechende Weiterentwicklungen dieser Personengruppen hinsichtlich Reflexionswissen und Reflexionsvermögen die (Schul-)Analysis betreffend.

3. Die Erfahrungen

Die folgenden Aussagen von Studierenden des Lehramts Mathematik im dritten Semester, die im Rahmen einer Lehrveranstaltung zur Didaktik der Analysis entstanden, sollen einen Eindruck davon geben, was in Bezug auf mein Anliegen in der Arbeit mit den von mir erstellten Texten möglich ist. (Anm.: Die Auszüge wurden – mit Ausnahme der Formatierung – unverändert übernommen.)

- *„Es ist (…) nicht nur (…) interessant welchen Fkt.wert (…) sondern wie die Kurve (…) verlauft. (…) Ges. ist also ein Verfahren um Änderung Mathematisch deuten zu können. Dabei ist auch z.B. die Zeitdauer der Änderung wichtig. Hat sich der Ölpreis (…) im letzten Tag, Monat oder Jahr geändert. Also*

  $$\frac{\textit{Änderung des Ölpreises}}{\textit{Änderung der Zeit}}\text{.“}$$

- *„Außerdem sind mir die Zusammenhänge zwischen den Themengebieten klarer.“*
- *„Das wesentliche für mich war zu verstehen, was damit gemeint ist, dass sich Änderungen auf andere Änderungen beziehen können.“*
- *„Ableitungsfunktion (…) Diese ist dann nützlich, wenn es darum geht, die Änderung einer Änderung zu brachten.“* [Anm.: betrachten]
- *„Der Grenzwert nach Weierstraß stellt die Berechenbarkeit und mathematische Modellierbarkeit der Momentan Geschwindigkeit sicher. Dies ist der größte Mehrwert des Konzeptes. (…) Ob es eine Momentane Veränderung gibt, wird durch die Mathematik nicht geklärt.“*
- *„(…) Vorstellungen mit den Dingen zu verbinden. Dadurch ist auch die Interpretation in verschiedenen Kontexten ist auch ein zentrales Element des ‚Verstehens‘. Dazu gehört eben auch zu wissen, dass die Mathematik nicht immer mit unserem alltäglichen Verständnis der Dinge kompatibel ist.“*

Die Aussagen geben Hinweise auf eine Bearbeitung der oben genannten Dimensionen „Enge“, „Oberflächlichkeit“ sowie „Beschränkung auf (operatives) Tun“ und lassen mich die Erfahrungen wie folgt zusammenfassen.

Ermutigendes (im Hinblick auf das o. g. Anliegen):

- Ein Reflexionsangebot in der vorliegenden Form kann angenommen und für wichtig empfunden werden.
- Die Beschäftigung mit den Texten kann die oben genannten Dimensionen – Ausweitung des Blicks, (gründliches) Nachdenken, Betrachtung des (operativen) Tuns aus einer Metaebene heraus – bedienen.
- Der Einsatz von Texten über Mathematik kann angenommen werden.

Die Arbeit mit den Studierenden zeigte aber auch Schwierigkeiten, was mich die folgenden Punkte ergänzen lässt.

Ernüchterndes (im Hinblick auf das o. g. Anliegen):

- Es ist sehr schwer, jemanden zum Nachdenken zu bringen.
- Der Nachvollzug von Reflexionen anderer fällt sehr schwer.
- Gelerntes/Etabliertes sitzt sehr fest.

4. Ein Ausblick

Erste Erfahrungen mit dem hier vorgestellten Ansatz der Verwendung der Texte in der Diskussion mit Schüler(inne)n und in der Lehrer(innen)-Weiterbildung lieferten ähnliche Erfahrungen, wie die oben beschriebenen.

In meiner weiteren Forschungsarbeit möchte ich auch den Unterricht selbst in den Blick nehmen. Dabei scheint es mir wichtig, viel früher mit dem Nachdenken über Mathematik anzusetzen und sich Zeit dafür zu nehmen. Interessant scheinen auch Überlegungen zur Einsetzbarkeit der erstellten Texte im (Erst-)Unterricht in Analysis und dabei insbesondere die Frage, inwieweit ein erster Zugang zur Analysis bereits reflexiv sein kann.

Literatur

Fischer, R. (2001): Höhere Allgemeinbildung. In: A. Fischer-Buck & al. (Hrsg.): Situation – Ursprung der Bildung, Franz-Fischer-Jahrbuch für Philosophie und Pädagogik 6. Leipzig: Universitätsverlag, 151-161.

Picher, F. (2008): Sozialreflexion im Mathematikunterricht – Kooperation oder Verweigerung. München/Wien: Profil.

Picher, F. (2011): Analysis für alle. In: R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Band 2. Münster: WTM-Verlag, 623-626.

Guido PINKERNELL, Heidelberg

Mathematisches Grundwissen und digitale Werkzeuge

Die Frage, über welche mathematischen Kenntnissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten ein Schüler am Ende seiner Schulzeit verfügen soll, tritt derzeit mit der wachsenden Verbreitung von digitalen Werkzeugen im Unterricht wieder verstärkt in den Vordergrund. Eigentlich ist diese Frage je nach Randbedingungen unterschiedlich zu beantworten, und eben hiervon ist abhängig, ob man das jeweils konkretisierte Wissen und Können nun als „hilfsmittelfrei verfügbar" verstehen will oder nicht. Allerdings: Es gibt durchaus Versuche, die hilfsmittelfreie Fertigkeiten gezielt von solchen abzugrenzen, bei denen digitale und andere Werkzeuge herangezogen werden dürfen, (z. B. CAliMERO 2007 ff. und Herget et al. 2002). So willkommen solche Listen sind, weil sie pragmatische Antworten auf vielerorts drängende Fragen liefern, so problematisch sind sie, weil sie die Notwendigkeit hilfsmittelfrei verfügbaren Wissens und Könnens für das Verstehen von Mathematik nicht aufklären (Gardiner 2001). Darüber hinaus erscheint, wenn einseitig unter dem Etikett „hilfsmittelfreie Fertigkeiten" wahrgenommen, das mathematische Grundwissen in einem Gegensatz zum Einsatz digitaler Medien, der mit Blick auf die didaktischen Erwartungen an ihren Einsatz so gar nicht gerechtfertigt ist. Man könnte sogar behaupten:

> *Ein verständiger Zugang zu mathematischen Konzepten und Kompetenzen mit Hilfe digitaler Werkzeuge braucht „hilfsmittelfrei" verfügbares symbolisch repräsentiertes und syntaktisch organisiertes Grundwissen und -können.*

Diese Überlegung soll im Folgenden theoretisch begründet werden:

A Pragmatische Perspektive

> *Ein produktives Lernen mit digitalen Werkzeugen muss durch einen einsichtigen Umgang mit syntaktischen Strukturen in symbolischen Repräsentationsformen begleitet sein.*

Abb. 1: Screenshot zu einer Klassenarbeitsaufgabe mit dem Arbeitsauftrag: "Kommentiere" (R. Berding)

Diese These lässt sich auf zweierlei Weise konkretisieren. Zum einen ist wohl unmittelbar einsichtig, dass ein Schüler schwerlich einen zielorientierten Umgang z. B. mit einem CAS praktizieren kann, wenn er mit Fehlermeldungen der Maschine konfrontiert wird und diese aufgrund fehlenden Verständnisses für syntaktisch-symbolisches Arbeiten nicht korrigieren kann. Zum anderen muss nicht jede falsche Eingabe zu einer Fehlermeldung führen. Die Nichtbeachtung der Termstruktur bei der Eingabe kann in anderen Werten in der Ausgabe resultieren. Abb. 1 zeigt eine Klassenarbeitsaufgabe, in der der Schülerinnen und Schüler diesen Umstand explizit reflektieren soll.

B Epistemologische Perspektive

> *Entdeckungen in digitalen Lernumgebungen müssen als fachsystematisch ungesicherte Hypothesen wahrgenommen werden, solange ihre formale Bestätigung nicht (nach)vollzogen wird.*

Eine der wichtigsten didaktischen Funktionen des Computereinsatzes ist das Bereitstellen von Lernumgebungen für das Entdecken und Explorieren von mathematischen Zusammenhängen. Zum Beispiel führt die vielerorts beliebte „Kaninchenstallaufgabe“ in den Klassen 8 bzw. 9 zur Entdeckung eines neuen Funktionstyps, der sich schon auf den ersten Blick von den bis dahin bekannten linearen Funktionen deutlich unterscheidet (Abb. 2). Aus fachlich epistemologischer Sicht darf die hier erfolgte „Generierung neuen Wissens“ mit der bloßen Beschreibung von Oberflächenphänomenen nicht stehen bleiben. Es ist unter expliziten Bezug auf schon vorhandenes gesichertes Wissen, also deduktiv zu begründen. Dass der unbekannte funktionale Zusammenhang neue Eigenschaften aufweist, ist also nicht aus dem Sachkontext herzuleiten, sondern weil er durch einen Term neuer Art beschrieben werden kann: Er weist, anders als bei den bisher betrachteten Funktionstermen, ein quadratisches Glied auf. Die besonderen arithmetischen Eigenschaften quadratischer Potenzen bilden so die Argumentationsbasis für die Begründung der beobachteten Funktionseigenschaften.

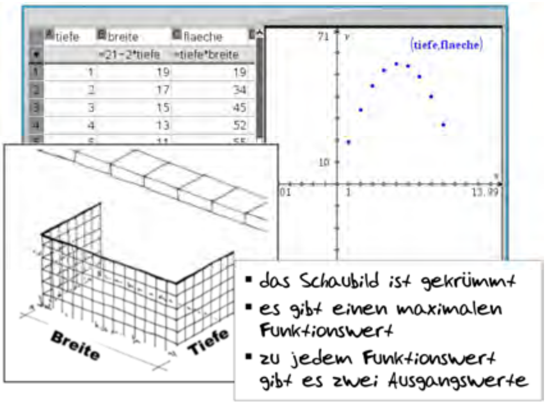


Abb. 2: Die numerische Lösung der bekannten "Kaninchenstallaufgabe" führt zur Entdeckung eines Funktionstyps mit neuen Eigenschaften, begründet diese aber nicht.

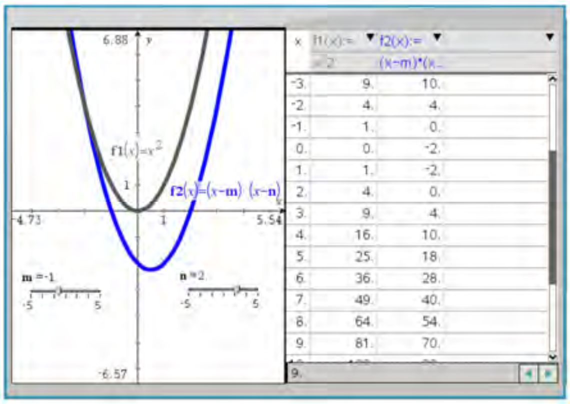


Abb. 1: Die Variation von Parametern in der Funktionsgleichung lässt auf Zusammenhänge zwischen Term, Wertetabelle und Schaubild schließen, stellt aber keine strukturellen Analogien heraus.

In der Regel schließt sich der Entdeckung eines neuen Funktionstyps eine systematische Exploration seiner Eigenschaften mittels Parametervariation an (vgl. CAliMERO 2007ff.). Eine typische Aufgabe bei gegebener faktorisierter Funktionsgleichung f(x) = (x-m)·(x-n) könnte z. B. lauten, Zusammenhänge zwischen den Werten von n und m, der Gestalt und Position des Schaubildes und den tabellarisch erfassten Wertepaaren zu erkunden (Abb. 3). Die Vermutung, dass m und n wohl die Nullstellen der Funktion darstellen könnten, ist nicht dadurch begründet, dass Schaubild und Wertetabelle sie für jeden erfassten Wert von n und m bestätigt. Aus fachlicher Sicht überzeugt nur der explizite Hinweis, dass ein Produkt zweier Zahlen genau dann gleich null ist, wenn einer der beiden Faktoren null beträgt. Das ist eine arithmetisch nachvollziehbare Aussage, die in diesem Kontext dann Anwendung finden kann, wenn der Funktionsterm als ein Produkt zweier linearer Terme erkannt wird.

C Kognitive Perspektive

Die situationsunabhängige Aktivierung vorhandenen Wissens gelingt, wenn die situativ erworbenen Repräsentationen, Anwendungen und Kontexte vermittels Abstraktion sachlogisch vernetzt und syntaktisch modifizierbar sind.

Fachlich gesehen erfolgt die Sicherung neuen Wissens durch Begründung bei Bezug auf schon gesichertes Wissen. Lernpsychologisch gesehen kann man die Wissenserweiterung als ein Vernetzen des neuen Wissens mit dem vorhandenen beschreiben. Situativ erworbenes Wissen muss, damit es anwendbar und übertragbar wird, vom Kontext des Einführungsproblems abstrahiert werden (Stern & Schumacher 2004). Solches Wissen ist im

Sinne Weinerts „intelligent“, d. h. flexibel und situationsangemessen anwendbar (Weinert 2000). Lompscher und Giest (2010) beschreiben den Erwerb intelligenten mathematischen Wissen als einen Lernprozess, der mit der Dekontextualisierung des in einem oder mehreren sinnstiftenden Kontexten kennengelernten neuen Wissensinhalt beginnt und nun in abstrakter Form in verschiedenen inner- und außermathematischen Anwendungen rekontexualisiert und damit weiter vernetzt wird. Gelingt die Abstraktion vom Kontext nicht, so kann sich die Vernetzung der verschiedenen Repräsentationen und Kontexte nur an Oberflächenmerkmalen orientieren. Eine strukturelle Analogiebildung der verschiedenen Repräsentationen dagegen gelingt dann, wenn der Begriff jenseits der Kontexte erfasst wird, in denen er erscheint. Lompscher und Giest nennen dies einen „wissenschaftlichen Begriff“, der für weiterführende Erkenntnis- und Lernhandlungen die notwendige Argumentationsbasis liefert, im Gegensatz zum „Alltagsbegriff“, dem als Orientierung für praktisches Handeln im Alltag der Vergleich von Oberflächenmerkmalen ausreicht. Übertragen auf die im vorangegangenen Abschnitt diskutierte Aufgabenfolge zum Entdecken und Explorieren eines neuen Funktionstyps mit digitalen Werkzeugen hieße das, dass nach der Betrachtung der einführenden Anwendungskontexte sich ein Vergleich auf struktureller Ebene anschließen muss. Dieser erfolgt sinnvollerweise in algebraischer Form, die ein hinreichendes Abstraktions- und Transferpotential aufweist und die für die formale Wissenssicherung und -konstruktion notwendige Syntax mitbringt.

Grundwissen und -können für den Aufbau mathematischen Wissens mit digitalen Werkzeugen

Nach Pinkernell und Greefrath (2011) zeichnet sich mathematisches Grundwissen als Basis für erfolgreiches Weiterlernen „durch Vernetzung, Flexibilität und Situationsunabhängigkeit in der Anwendung aus. Eine Abhängigkeit von Werkzeugen wie Rechnern oder auch Hilfsmitteln wie Formelsammlungen würde diese Auffassung widersprechen.“ Mathematisches Grundwissen ist demnach nicht als Gegensatz zu rechnergebundenen mathematischen Kompetenzen zu verstehen, sondern die Forderung nach einer hilfsmittelfreien Verfügbarkeit ergibt sich aus dem zugrunde liegenden Weinertschen Begriff des „intelligenten Wissens“ mit seiner grundsätzlichen situativen Unabhängigkeit, die einen flexiblen Wissenstransfer und damit ein erfolgreiches Weiterlernen in neuen Lernsituationen verspricht. Digitale Hilfsmittel sind insbesondere dann, wenn sie dynamisch vernetzte Repräsentationen ermöglichen, aus didaktischer Sicht sinnvolle Medien für einen verständigen Zugang zu neuen Inhalten. Damit diese ihre Funktion erfüllen können, braucht es hilfsmittelfreies Grundwissen auch im algebraischen Bereich, damit die Vernetzung auch aus sowohl fachlich epistemologischer Sicht als auch kognitiver Perspektive gelingen kann.

Literatur

CAliMERO (2007 ff.) Arbeitsmaterialien und methodische und didaktische Handreichungen, hrsg. v. Bruder R., & Weiskirch, W. WWU Münster, ZfL.

Gardiner, T. (2001). Education or CAStration? Micromath, (Spring), 6–8.

Giest, H., & Lompscher, J. (2006). Lerntätigkeit. Berlin: Lehmann.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., & Lehmann, E. (2002). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? MNU, Heft 8.

Pinkernell, G, & Greefrath, G. (2011): „Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule.“ MNU 64(2), 109–113.

Stern, E., & Schumacher, R. (2004). Lernziel: Intelligentes Wissen. Universitas, 59(2).

Weinert, F. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft. Pädag. Nachr. Rheinl. Pfalz, 2.

Meike PLATH, Lüneburg

Die Präsentationsform von Aufgaben und die Mathematikleistung von Kindern als Untersuchungsgegenstand einer Studie zum räumlichen Vorstellungsvermögen

In der Studie werden die Lösungsstrategien von Kindern bei Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen untersucht. Der Fokus des Artikels liegt auf dem Zusammenhang zwischen räumlichen Fähigkeiten und der Art der Aufgabenpräsentation, sowie der Mathematikleistung der Kinder. Die Interviewdaten zeigen, dass die Mathematikleistung Einfluss auf das räumliche Denken hat, wohingegen dies bezüglich der Präsentationform lediglich bei einem bestimmten Aufgabentyp festzustellen ist.

1. Einleitung

Aufbauend auf den in Plath (2012)[1] und Plath & Ruwisch (2012) vorgestellten Ergebnissen zur Forschungsfrage nach den Lösungsstrategien der Kinder widmet sich der vorliegende Beitrag den folgenden zwei Fragen:

- Beeinflusst die Art der Präsentationsform der Aufgaben die Strategiewahl und den Erfolg der Kinder?
- Unterscheiden sich mathematisch leistungsschwache und leistungsstarke Kinder beim Lösen von Raumvorstellungsaufgaben?

Die erste Frage zielt auf die Diskrepanz ab, dass räumliche Fähigkeiten traditionell mit Aufgaben in Paper-and-Pencil-Tests geprüft werden, wie sie schon bei Thurstone (1938, 1950) eingesetzt wurden, dagegen die Förderung dieser Fähigkeiten meist durch Handlungen mit konkreten Materialien stattfindet. Im Rahmen der zweiten Frage soll der Zusammenhang zwischen der mathematischen Leistung der Kinder und deren räumlichen Fähigkeiten genauer untersucht werden.

2. Theoretischer Rahmen

Raumvorstellung kann nach Rost (1977) als die Fähigkeit beschrieben werden, mental mit zwei- und dreidimensionalen Objekten zu operieren. Dies ist allerdings nur eine von vielen Definitionen. Es wird davon ausgegangen, dass Raumvorstellung ein komplexes Konstrukt mit verschiedenen Teilkomponenten ist, wobei man sich über die Art und Anzahl der Komponenten nicht einig ist (vgl. u.a. Thurstone 1938, 1950 und Linn & Petersen 1985). Der vorliegenden Studie liegt das Strukturmodell von Maier (1999) zugrunde, das die fünf Komponenten Veranschaulichung, räumliche Bezie-

[1] Die vollständige Literaturliste kann bei der Autorin (meike.plath@uni.leuphana.de) angefragt werden.

hungen, räumliche Wahrnehmung, räumliche Orientierung und mentale Rotation unterscheidet.

Präsentationsformen von Aufgaben. Zum Einfluss unterschiedlicher Aufgabenpräsentationen auf das Lösungsverhalten bei Aufgaben zu räumlichen Fähigkeiten existieren bislang nur wenige Untersuchungen. Nigl & Fishbein (1974) führten eine Untersuchung mit Perspektivaufgaben in Form von Fotografien und Würfelarrangements durch. Die Ergebnisse zeigten bei den Aufgaben mit realen Würfelarrangements bessere Leistungen der Kinder. Eine andere Studie zum Volumenverständnis und der Anordnung bei Würfelarrangements stammt von Olkun (2003). Auch hier wiesen die Ergebnisse bei den Würfelarrangements bessere Leistungen aus und darüber hinaus unterschiedliche Lösungsstrategien bei Bildern und realen Objekten. Die theoretischen Grundlagen zu verschiedenen Präsentationsformen sind im Bereich der kognitiven Psychologie anzusiedeln. (Visuelle) Wahrnehmung ist u.a. abhängig von Erfahrungen und Wissen. Derartiger Faktoren beeinflussen den Wahrnehmungsprozess, d.h. welche Informationen wie wahrgenommen werden, und regen verschiedene mentale Aktivitäten an (vgl. Kebeck 1994; Anderson 2007). Unterschiedlich präsentierte Aufgabenobjekte bieten unterschiedliche wahrnehmbare Informationen. Es ist daher anzunehmen, dass verschiedene Präsentationsformen verschiedene kognitive Prozesse anregen und somit zu unterschiedlichen Vorgehensweisen beim Lösen von räumlichen Aufgaben führen. In der vorliegenden Untersuchung wurden zwei Präsentationsformen eingesetzt. Zum einen wurden Aufgaben in Form von realen Objekten (Holzwürfel) und zum anderen in Form von Farbfotografien dieser Objekte präsentiert.

Mathematikleistung und Raumvorstellung. Im Gegensatz zur Präsentationsform existiert eine Reihe verschiedener Studien zu Raumvorstellung und Mathematikleistung und der Zusammenhang beider Bereiche wird als bestätigt angesehen. Nur wenige der Studien, wie die von Guay & McDaniel (1977), untersuchten allerdings die Fähigkeiten von Grundschulkindern. Darüber hinaus werden meist nur einzelne Raumvorstellungskomponenten durch die eingesetzten Aufgaben abgedeckt. Auch handelt es sich bei dem bestätigten Zusammenhang um die Annahme, das räumliche Denken beeinflusse die mathematische Leistung (vgl. u.a. Smith 1964; Fennema & Tarte 1985; Grüßing 2005). Die umgekehrte Schlussfolgerung geht nur aus wenigen Studien, wie der von Guay & McDaniel (1977) hervor. Insgesamt gilt der Zusammenhang von Raumvorstellung und Mathematikleistung also als bestätigt, sollte aber gerade aufgrund der Vielzahl verschiedener Studien und deren unterschiedlichen Designs differenzierter, z.B. in Bezug auf die unterschiedlichen Raumvorstellungskomponenten, betrachtet werden.

3. Design der Studie

Bei der Untersuchung handelt es sich um eine Interviewstudie, an der 57 Kinder im vierten Schuljahr teilgenommen haben. Vorab wurde mit 117 Kindern der Hamburger Rechentest 4 durchgeführt. Auf Grundlage der Testergebnisse wurden leistungsschwache (N=30) und leistungsstarke (N=27) Kinder für die Hauptuntersuchung identifiziert. Darüber hinaus wurden die Kinder der Präsentationsform „Objekt“ (N=28) oder „Foto“ (N=29) zugeordnet. In Einzelinterviews wurden die Kinder aufgefordert 38 Teilaufgaben, welche sich vier Aufgabentypen zuordnen lassen, zu lösen und ihr Lösungsvorgehen zu beschreiben (vgl. Plath & Ruwisch 2012).

4. Ergebnisse

Insgesamt konnten die Kinder 38 Punkte erzielen. Im Durchschnitt erreichten sie 25,9 Punkte, d.h. die Lösungsrate lag bei 68,1%.

Präsentationsformen von Aufgaben. Über alle Aufgabentypen betrachtet unterscheiden sich die Objekt-Kinder mit durchschnittlich 27,0 Punkten (71,0%) nicht von den Foto-Kindern, welche durchschnittlich 24,8 Punkte (65,3%) erzielten. Betrachtet man die Ergebnisse der Aufgabentypen separat, so zeigt sich, dass die Gruppen sich lediglich bei einem Aufgabentyp unterscheiden: Bei den Aufgaben zur mentalen Rotation erzielten die Objekt-Kinder im Durchschnitt 86,4% und die Foto-Kinder im Durchschnitt 75,8% der Punkte. Damit unterscheiden sich die Gruppen signifikant voneinander. Kinder lösen die Aufgaben also besser, wenn diese durch reale Würfelkonfigurationen präsentiert werden als mit Fotografien. Beim Einsatz und dem Erfolg von analytischen und holistischen Strategien (vgl. Plath 2012; Plath & Ruwisch 2012) ist wiederum insgesamt kein Unterschied zwischen den Gruppen festzustellen. Beide Strategien werden ähnlich häufig und erfolgreich eingesetzt. Auch bei Auswertung der Aufgabentypen zum Strategieeinsatz und dem Erfolg zeigen die Ergebnisse keine klaren Unterschiede. Zum Strategieerfolg lassen sich allenfalls Tendenzen feststellen. Objekt-Kinder scheinen bei Aufgaben zur Veranschaulichung und zu räumlichen Beziehungen mit analytischen Strategien erfolgreicher zu sein. Entsprechend den geschilderten Ergebnissen sind die Objekt-Kinder bei den mentalen Rotationsaufgaben mit beiden Strategien etwas erfolgreicher als die Foto-Kinder. Bei den Aufgaben zur Perspektivübernahme zeigen sich dagegen keinerlei Unterschiede. Zusammenfassend zeigt sich kein klarer Einfluss der Präsentationsform auf die Lösungsrate, den Strategieeinsatz und den Strategieerfolg. Die unterschiedlichen Tendenzen zum Strategieerfolg lassen vermuten, dass der Einfluss der Präsentationsform stark von der jeweiligen Aufgabenkonzeption abhängt.

Mathematikleistung und Raumvorstellung. Im Gegensatz zur Präsentationsform zeigt sich bei der Auswertung zur Mathematikleistung ein deutlicher Unterschied zwischen den leistungsstarken und leistungsschwachen Kindern. Die leistungsstarken Kinder erzielten im Durchschnitt 28,4 Punkte (74,8%) und die leistungsschwachen Kinder erzielten im Durchschnitt 23,6 Punkte (62,0%). Demnach unterscheiden sich die zwei Gruppen signifikant voneinander. Mathematisch leistungsstarke Kinder zeigen also höhere Leistungen bei Raumvorstellungsaufgaben als mathematisch leistungsschwache Kinder. Bei separater Auswertung der Ergebnisse zeigt sich für die vier Aufgabentypen, dass sich die zwei Gruppen bei allen Aufgabentypen außer bei der mentalen Rotation signifikant unterscheiden. Beim Einsatz analytischer Strategien unterscheiden sich die beiden Gruppen nicht. Auch holistische Strategien werden von den leistungsstarken Kindern nur gering häufiger eingesetzt. Allerdings sind die leistungsstarken Kinder mit beiden Strategien deutlich erfolgreicher als die leistungsschwachen Kinder. Aber auch hier sind Unterschiede bei den verschiedenen Aufgabentypen festzustellen. Während die leistungsstarken Kinder bei den Perspektivaufgaben mit beiden Strategien erfolgreicher sind, zeigt sich der erfolgreichere Einsatz bei den Veranschaulichungsaufgaben lediglich bei den holistischen und bei den Aufgaben zur räumlichen Beziehung lediglich bei den analytischen Strategien. Auch der Einfluss der Mathematikleistung beim Lösen von Raumvorstellungsaufgaben scheint demnach stark von der Aufgabenkonzeption abzuhängen.

5. Zusammenfassung

Die erste Forschungsfrage nach dem Einfluss der Präsentationsform von Raumvorstellungsaufgaben kann anhand dieser Auswertung nicht pauschal beantwortet werden. Bei den Aufgaben zur mentalen Rotation war ein deutlicher Einfluss festzustellen. Beim Erfolg der Strategien zeigten sich abhängig von der Aufgabenkonzeption aber unterschiedliche Tendenzen. Diese hier sehr kurz dargestellten Ergebnisse werden durch eine umfangreichere Auswertung weiter aufgeschlüsselt, um aussagekräftigere Resultate zu erhalten. Die zweite Forschungsfrage nach dem Einfluss der Mathematikleistung ist dagegen schon an dieser Stelle eindeutiger zu beantworten. Die Mathematikleistung hat, außer bei Aufgaben zur mentalen Rotation, deutlichen Einfluss beim Lösen von Raumvorstellungsaufgaben. Aber auch hier zeigt sich, dass der Einfluss von der Aufgabenkonzeption abhängt. Auch diese Daten sollen durch eine detaillierte Auswertung weiter aufgeschlüsselt werden.

Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS, Universität Koblenz-Landau, Campus Landau

Augmented Reality und räumliche Entscheidungs-untersützung mit dem Smartphone

1. Einleitung

Mobiltelefone stellen im Alltag von Schülerinnen und Schülern (SuS) ein zentrales Kommunikationsmittel dar. Durch GPS in Mobiltelefonen können digitale Informationen außerhalb des Klassenzimmers maßgeschneidert für den aktuellen Ort bereitgestellt werden. Angewendet auf räumliche Entscheidungsunterstützung (EU) können digitale Informationen mittels Augmented Reality (AU) mit dem aktuellen Ort visuell vernetzt werden. Mit Hilfe von Funktionsgraphen im dreidimensionalen Raum können im Mathematikunterricht (MU) Verfahren zur räumlichen EU und deren Visualisierung behandelt werden. Unsichtbare Prozesse können durch digital angebotene Animationen ergänzt werden. Da die an den realen Raum angehefteten Informationen digital sind, können auch Echtzeitinformationen über die zukünftige Omnipräsenz von Smartphones (SPs) sichtbar und maßgeschneidert für den Ort bereitgestellt werden. Im Mathematischen Umweltlabor der Universität Koblenz-Landau, Campus Landau bearbeiten mathematisch begabte SuS Fragestellungen aus den Umweltwissenschaften, die gleichzeitig mathematische Modellbildung für die Problemlösung benötigen. Eine solche Problemstellung ist die Navigation einer Person, die sich möglichst unbeschadet durch ein Gefahrengebiet bewegen soll, in dem ein unsichtbares Risiko in der Umwelt vorliegt. Des Weiteren sollen Ressourcen zur Risikominimierung möglichst effizient verteilt werden. Die Lokalisierung der Ressourcen und die Nutzbarkeit dieser Ressourcen in der direkten Umgebung des Nutzers ist ggf. auch nicht sichtbar. Risikokarten, Ressourcenkarten und spezielle Graphische Benutzerschnittstellen, engl. Graphical User Interface (GUI), sollen im Risikogebiet befindliche Personen unterstützen.

2. Mathematische Aspekte von Risiko- und Ressourcenkarten

Mit Hilfe von Funktionsgraphen im dreidimensionalen Raum können im MU Verfahren zur räumlichen EU und deren Visualisierung behandelt werden. Geographische Lernorte können mit Hilfe des Grundraums Ω folgendermaßen beschrieben werden:

$$\Omega := L2 \times L1 \text{ mit } L2=[-180°,180°] \text{ und } L1=[-90°,90°].$$

Diese Definition liefert einen zweidimensionalen Koordinatenraum bestehend aus GPS-Koordinaten mit dem Längengrad *L1* und dem Breitengrad *L2*. Ein Graph mit gewichteten Kanten, welcher die möglichen Wege, welche eine Person gehen kann, repräsentiert, kann generiert werden. Die Kantengewichte geben die Zeit an, welche zum Zurücklegen des jeweiligen Weges benötigt wird. Zur Bestimmung des schnellsten Weges muss ein Wegeproblem gelöst werden. Anschließend kann aufgrund der gesammelten Daten der Form *(x,y,r)* in *Ω x [0,1]* eine Risikokarte interpoliert werden (z.B. mit „Gnuplot“). Die Risikokarte kann über einem Weg integriert werden (siehe Abb. 1). Jedem Ergebnis kann eine Güte in *[0,1]* zugeordnet werden. Die Güte eines Weges und die Güte des Ergebnisses der Integration über diesem Weg können mit Hilfe der Fuzzy-Logik verknüpft werden.

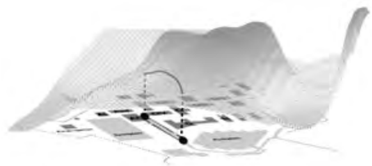


Abbildung 1: Risikokarte und Graph mit gewichteten Kanten

3. Außerschulische Lernorte & digitale Kontextinformationen

Außerhalb des Klassenzimmers können durch die SP-Nutzung multimediale Kontextinformationen gebunden an geographische Lernorte dargeboten werden. Da SPs mit GPS ausgestattet sind, können die GPS-Koordinaten des SPs des Benutzers bestimmt werden und Informationen zu räumlich in der Nähe liegenden Orten und Objekten können dem Benutzer über das SP angezeigt werden. Dazu werden multimediale Informationsangebote durch Verknüpfung mit sichtbaren Objekten und Vorgängen zu Kontextinformationen, die unsichtbare Risiken sichtbar machen können (z.B. epidemiologische oder ökotoxikologische Risiken), ergänzt. Die Gemeinsamkeit von Quick Response (QR)-Code und GPS-Koordinaten ist die Herstellung einer Verbindung von digitalen Kontextinformation zu geografischen Orten. Ein QR-Code ist eine Abbildung von dem aktuellen Ort zu einer Textinformation oder URL. Im Gegensatz zum QR-Code können durch AR weiter entfernte Phänomene und Objekte in der jeweiligen Blickrichtung und Orientierung des SPs erläutert werden. QR-Codes können als Zugangshilfe für diese Kontextinformationen dienen, wenn sich z.B. epidemiologische Vorgänge direkt auf den Ort beziehen, an dem sich der SP-Nutzer gerade befindet. Nähere Inforationen über AR und QR-Codes stellt Platz et al. 2013 bereit. Insgesamt wird ein geografischer Ort durch die Verbindung von realen Raumerfahrungen mit digitalen Kontextinformation zu einem angereicherten Lernort. Im MU können somit

Verfahren zur räumlichen EU und deren Visualisierung mit Funktionsgraphen im dreidimensionalen Raum behandelt werden. Außerdem kann das SP zur Navigation außerhalb des Klassenzimmers verwendet werden mit einer auf das jeweilige Areal zugeschnittenen Navigations-Applikation. Beispielsweise könnte Open Source (OS)-Software, wie die Applikation „Navit“, für diesen Zweck angepasst werden, sodass die relevanten Kartenpunkte, Points of Interest (POI), direkt mit einer GUI (als jpg-Datei) verbunden werden können, sodass durch einen Klick das entsprechende GUI im SP aufgerufen wird (vgl. Haase & Feilner, 2010). Im Folgenden werden zwei Anwendungen für den MU vorgestellt. In der ersten Aufgabe, die für die Sek. II geeignet ist, geht es um die Interpretation und Generierung von Risikokarten und die Nutzung dieser zur EU, um eine Person möglichst unbeschadet durch ein Gefahrengebiet zu navigieren. Zunächst soll eine Datensammlung durch die SuS erfolgen. Durch QR-Codes können Risikoinformationen an einer bestimmten GPS-Koordinate über ein GUI, welches AR beinhaltet übermittelt werden. Die SuS werden mit einer Navigationshilfe zu den Datenpunkten in Form von QR-Codes geführt. Anschließend kann aufgrund der gesammelten Daten EU generiert werden, indem wie im Abschnitt „Mathematische Aspekte von Risiko- und Ressourcenkarten“ beschrieben wurde, vorgegangen wird. Die zweite Aufgabe befasst sich mit der Beurteilung räumlicher Gerechtigkeit, genauer mit der Lokalisierung eines Ressourcenpunktes abhängig von Versorgungspunkten. Diese Aufgabe ist in Sek. I umsetzbar. Drei Versorgungsgruppen (*A,B,C*) sind über das Untersuchungsareal verteilt (siehe Abb. 2). Nun soll eine Ressource möglichst gerecht platziert werden. Zusätzlich zur Lokalisierung der Versorgungspunkte können noch Zusatzinformationen zu den Versorgungsgruppen über QR-Codes bereitgestellt werden (z.B. ein Mitglied von Gruppe *A* hat ein gebrochenes Bein). Auch bei dieser Aufgabe kann das bei Aufgabe 1 vorgestellte Wegeproblem zur Bestimmung des gerechtesten Ressourcenpunktes mit einbezogen werden.

Abbildung 2: Bestimmung räumlicher Gerechtigkeit

4. Zusammenfassung

In den dargestellten Aufgaben wurde funktionales Denken zur Lösungsfindung bei der Interpretation und Generierung von Risikokarten (*f(GPS-Koordinate)=Risiko*), bei der Integration, und bei der Lösung des

Wegeproblems (*g(Weg)=Güte*) angewendet. Räumliche Orientierung wurde sowohl beim Daten sammeln und messen der Zeitdauer, um einen Weg zurückzulegen, als auch bei der Interpretation von Lageplan und Graph mit gewichteten Kanten und der Interpretation und Generierung von Risikokarten benötigt. Eine Bewertung von räumlicher Gerechtigkeit wurde durch das Sammeln nützlicher Daten und messen nützlicher Weglängen oder Zeiten, die benötigt werden, um einen Weg zurückzulegen, vorgenommen. Dazu mussten Lageplan und Graph mit gewichteten Kanten interpretiert werden. EU wurde generiert durch die Verknüpfung der Ergebnisse mit Fuzzy-Logik, die Visualisierung von Karten, und ggf. geeigneten GUIs. Zudem können die Ergebnisse der SuS verifiziert werden durch Datensammlung an weiteren Datenpunkten. Durch AR wird die enaktive Ebene mit der ikonischen verbunden. Kombiniert mit QR-Codes kann eine Verbindung von der enaktiven Ebene mit der ikonischen und symbolischen Ebene erzeugt werden. Somit dienen AR und QR-Codes der Vernetzung der Repräsentationsebenen nach Bruner, 1966. Die dargestellten möglichen Einsatzszenarien von SPs im MU beschreiben zunächst einmal nur die technologische Möglichkeit und die Zielsetzung des Einsatzes. Die Akzeptanz der SuS hängt aber nicht nur von den technischen Möglichkeiten der SPs ab, sondern ebenfalls von der didaktischen Aufbereitung der digitalen Inhalte. Auf der reinen Technologieebene sind mobile Endgeräte für die Nutzung im MU außerhalb des Klassenzimmers geeignet, da sie ein weit verbreitetes Medium mit GPS darstellen. Die Akkuleistung von SPs wird stets verbessert. OS-Applikationen, welche unter dem Betriebssystem „Android“ zur Verfügung gestellt werden, können kostenfrei verwendet werden. Eine Kombination aus SPs (Hardware), AR (Software) und QR-Codes (Zugangshilfe) stellt damit auf technologischer Ebene eine geeignete Lösung zur Bereitstellung von digitaler Kontextinformation für unsichtbare Prozesse und Strukturen im Bereich EU und mathematische Modellbildung dar.

Literatur

Bruner, J. S. (1966): Towards a Theory of Instruction. Cambridge: Harvard.

Haase, T.; Feilner, M. (2010): Open-Source-Navigation mit Navit. In: Linux Magazin. http://www.linux-magazin.de/Ausgaben/2010/07/Richtungweisend

Platz, M.; Größler, M.; Rapp, J.; Niehaus, E.: QR-Codes & Augmented Reality - Digitale Kontextinformationen für unsichtbare Prozesse im Bereich Wasser und Bildung Deutsche Gesellschaft für Limnologie (DGL). Erweiterte Zusammenfassungen der Jahrestagung 2012 (Koblenz), Hardegsen 2013.

Susanne PODWORNY, Paderborn

Mit TinkerPlots vom einfachen Simulieren zum informellen Hypothesentesten

Einführung

TinkerPlots™ ist eine in den USA entwickelte und von in der AG Biehler übersetzte Datenanalyse- und Simulationssoftware für den Stochastikunterricht der Klassen 3 – 8 (Projekt TinkerPlots.de: http://lama.uni-paderborn.de/personen/rolf-biehler/projekte/tinkerplots.html). Im Folgenden wird von einer Lehrveranstaltung berichtet, in der die Software durchgängig zur Simulation eingesetzt wird.

Rahmenbedingungen

In der Stochastik finden sich viele Anwendungsaufgaben mit Alltagsbezug. Diese sind häufig interessant, jedoch oft schwierig formal zu berechnen. Aus diesem Grund wird hier der Ansatz des Informal Inferential Reasoning verfolgt (z. B. Zieffler et al., 2008, Garfield & Ben-Zvi, 2008), bei dem die formalen Berechnungen hier durch Simulation ersetzt werden. Simulationen können zusätzliches Verständnis der stochastischen Inhalte aufbauen (Konold, Harradine und Kazak, 2007) und sind somit gut geeignet, den Lernprozess zu unterstützen (Biehler & Maxara, 2007).

Im Wintersemester 2012/2013 findet die Lehrveranstaltung „Mit Simulationen komplexe Probleme verstehen und lösen“ als fachwissenschaftliches Vertiefungsseminar an der Universität Paderborn für Studierende des Fachs Mathematik für Grund,- Haupt,- Real- und Gesamtschulen statt. Studierende sollen hierin befähigt werden, stochastische Aufgaben mit Hilfe von Simulationen mit der Software TinkerPlots eigenständig zu bearbeiten und zu verstehen. Das Themenspektrum reicht dabei von einfachen Anwendungsaufgaben bis hin zu Aufgaben der beurteilenden Statistik. Zu diesem Seminar gab es im Wintersemester 2010/2011 eine Vorstudie und im Sommersemester 2012 einen ersten Durchlauf. Zur weiteren Auswertung liegen sämtliche Aufgabenbearbeitungen der Studierenden in Form von TinkerPlotsdateien, Worddateien, handschriftlichen Bearbeitungen und Camtasia-Aufnahmen der Bildschirmaktivitäten vor. Desweiteren gibt es einen Pre- und Posttest zur Erfassung der stochastischen Kompetenz, Portfolios als Leistungsnachweise und Interviewaufnahmen. Das Forschungsinteresse liegt dabei auf zwei Ebenen: erstens auf inhaltlicher Ebene, auf welcher untersucht werden soll, in wie weit nach dem Besuch der Veranstaltung stochastische Kompetenzzuwächse bei den Studierenden zu verzeichnen sind. Zweitens soll auf Werkzeugebene erforscht werden, wie komplexe

Probleme von Studierenden mit der Software TinkerPlots bearbeitet und gelöst werden und ob ein Simulationsplan hilfreich ist.

Die Inhalte der Lehrveranstaltung

Für das Seminar stehen 15 Sitzungen à 90 Minuten zur Verfügung. Diese sind zu fünf inhaltlichen Blöcken unterschiedlichen Umfangs (siehe Tabelle) zusammengefasst und werden nun erläutert.

Sitzung	Inhalt	Thema
1		Organisatorisches; Vortest
2	Block I	Datenanalyse mit TinkerPlots
3	Block II	Probleme lösen mit Simulationen
4		
5		
6		
7	Block III	Genauigkeit und Sicherheit von Simulationsergebnissen
8		
9	Block IV	Stochastische Un-/Abhängigkeit
10		
11	Block V	Beurteilende Statistik
12		
13		
14		
15		Abschluss; Nachtest

Abbildung 1: Übersicht über die Inhalte der Lehrveranstaltung

Die erste und die letzte Sitzung sind jeweils reserviert für den Vor-, bzw. Nachtest und organisatorische Dinge. Der erste Block behandelt das Thema „Datenanalyse mit TinkerPlots“ und umfasst eine Sitzung. Hier geschieht eine Einführung in das Programm und ein Anknüpfen an das, bzw. Verknüpfen mit dem Vorwissen der Studierenden. Von zentraler Bedeutung sind hier die Fragen: Wie werte ich Daten mi TinkerPlots aus? Was ist eine geeignete Darstellung der Daten? Im zweiten Block wird das Thema „Probleme lösen mit Simulationen“ in vier Sitzungen behandelt. Dabei müssen die Studierenden auf zwei Ebenen arbeiten: an den stochastischen Inhalten der gestellten Aufgaben und an den technischen Anforderungen der Software TinkerPlots. Primärziel ist es, hier die Kompetenz für einen adäquaten Umgang mit der Software in vier Sitzungen aufzubauen. Weiter soll erreicht werden, dass das Sprachangebot der Stochastik mit TinkerPlots verknüpft wird und so eine Kommunikation auf Metaebene über TinkerPlots möglich ist. Dazu wird in diesem Block ein graphischer Simulationsplan eingeführt (abrufbar unter: http://lama.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathemtik/MathematikDidaktik/Personen/Podworny/Tinker

Plots_Simulationsplan.pdf). Mit dem Einsatz des Simulationsplans soll vor allem die Verbalisierung des Simulationsprozesses unterstützt werden und er soll eine einfache Offline-Dokumentation der bearbeiteten Aufgaben ermöglichen. In einer sich an die Lehrveranstaltung anschließenden Interviewstudie wird der Einsatz des Simulationsplans näher untersucht. Die nächsten beiden Sitzungen in Block III haben zum Inhalt das „Schließen aus Stichproben/Genauigkeit und Sicherheit von Simulationsergebnissen". Ausgehend vom Gesetz der großen Zahl wird hier das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz erarbeitet. Für die Genauigkeit von Simulationsergebnissen in Abhängigkeit von der Stichprobengröße werden Faustformeln thematisiert. Der vierte Block umfasst ebenfalls zwei Sitzungen zum Thema „Stochastische Un-/Abhängigkeit". Diesem Thema wird sich über die Vorstellung von Daten erzeugenden Fabriken genährt (siehe Konold, Harradine, Kazak, 2007). Im ersten Teil wird von Modellen auf Daten geschlossen, also Vorhersagen für Daten gemacht, z. B. beim Mammographietest (ähnlich zum bekannten AIDS-Test). Im zweiten Teil wird von Daten auf zugrunde liegende Modelle geschlossen unter der Fragestellung: Welches Modell passt zu gegebenen Daten? Dabei wird immer wieder die stochastische Unabhängigkeit von Merkmalen diskutiert. Im letzten inhaltlichen Block geht es um Fragen der beurteilenden Statistik. In diesem Block liegt neben dem zweiten Block der inhaltliche Schwerpunkt des Seminars. Am Beginn steht eine Einführung in das Hypothesentesten mit P-Werten am praktischen Beispiel des Musikhörens nach Riemer (2009). Zur Unterstützung werden ein Schema eingesetzt (mit den Schritten: Beobachtung notieren; Nullhypothese aufstellen; Simulieren; Testgröße bestimmen; P-Wert bestimmen; Interpretation) und der Simulationsplan verwendet. Nach ausführlicher Besprechung und weiteren Aufgaben zum P-Wert Testen wird mit Randomisierungstests (Rossmann, 2008) die Lehrveranstaltung inhaltlich beendet.

Zur Akzeptanz des Simulationsplans

Der Simulationsplan verbindet graphische Elemente von TinkerPlots mit auszufüllenden Textfeldern. Es müssen fünf Schritte ausgefüllt und beschrieben werden: 1. Fragestellung, 2. Modellieren, 3. Ereignisse und Zufallsgrößen, 4. Auswerten, 5. Interpretation. Der Einsatz kann dabei auf drei Arten stattfinden, erstens zum Planen einer Simulation (vor einer Simulation), zweitens zur Prozessunterstützung einer Simulation (während einer Simulation) oder drittens zur Dokumentation einer Simulation (nach einer Simulation). Der Frage, in wie weit der Plan bei einer Simulation hilfreich ist, wurde in der Lehrveranstaltung mehrfach nachgegangen. Dabei zeigt sich recht deutlich, dass Studierende den Plan zum Planen, also vor dem eigentlichen Simulieren am PC, ungern einsetzen: 68 % der Teilnehmer (n = 28) finden ihn an dieser Stelle wenig oder nicht hilfreich. Während einer Simulation zur Prozessunterstützung wird er deutlich positiver bewertet: 64 % der Teilnehmer stimmen zu oder stimmen eher zu, dass er dafür hilfreich ist. Am hilfreichsten wird der Plan für die Dokumentation eingeschätzt: 78 % der Studierenden stimmen zu oder stimmen eher zu, dass der Plan zur Dokumentation hilfreich ist. Erste Einblicke einer Interviewstudie zeigen, dass er vor allem als Offline-Dokumentation geschätzt wird und zu weiteren Reflexionen über die durchgeführte Simulation und die Interpretation der erhaltenen Ergebnisse anregt. Als weiteres Ergebnis lässt sich festhalten, dass 82 % der Studierenden ihn als ausgefülltes Musterbeispiel für weitere Aufgaben sehr hilfreich finden.

Ausblick

Die entwickelten Lernumgebungen werden durch die retrospektive Analyse der Daten weiter optimiert. So wird beispielsweise der Simulationsplan zukünftig nicht mehr zum Planen einer Simulation eingesetzt, sondern stärker als Kommunikations- und Reflexionsunterstützung verwendet. Vor allem das Unterstützungspotential durch den Simulationsplan in Bezug auf die Versprachlichung des gesamten Simulationsprozesses wird detailliert untersucht. Die dazu laufende Interviewstudie mit den Teilnehmern des letzten Seminardurchgangs ist auf diesen Aspekt fokussiert. TinkerPlots wird auch in den kommenden Semestern weiter an der Universität Paderborn eingesetzt und der Einsatz mit den aus diesem Forschungsprojekt gewonnenen Einsichten optimiert.

Literatur

Biehler, R, Maxara, C. (2007): Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werzeugsoftware. In: MU Der Mathematikunterricht, 53(3), 45-61.

Garfield, J., Ben-Zvi, D. (2008): Developing Students' Statistical Reasoning. Springer Science + Business Media B. V.

Konold, C., Harradine, A. & Kazak, S. (2007): Understanding distributions by modeling them. International Journal of Computers for Mathematical Learning 12, 217-230.

Riemer, W. (2009): Soundcheck: CD contra MP3. Ein Hörtest als Einstieg in die Stochastik. In: mathematik lehren 153, 21-23.

Rossman, A. (2008): Reasoning about Informal Statistical Inference: A Statistician´s View. Statistics Education Research Journal 7(2), 5-19.

Software: TinkerPlots 2.0 (deutsch) (2012). Biehler, R.; Frischemeier, D.; Podworny, S. (unveröffentlichte Betaversion).

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., Reading, C. (2008): A Framework To Support Research On Informal Inferential Reasoning. Statistics Education Research Journal, 7(2), 40-58.

Jennifer POSTUPA, Nürnberg

Zeitlicher Wandel in Mathematikschulbüchern

Historische Mathematikschulbücher unterscheiden sich bereits auf den ersten Blick erheblich. Bei annähernd gleichbleibenden mathematischen Inhalten, wie etwa Bruch- und Prozentrechnung, dem Umgang mit Größen oder der Raumlehre, sind die Veränderungen zu einem großen Teil auch in außermathematischen Merkmalen zu finden. Um insbesondere den gesellschaftlich bedingten Wandel in Mathematikschulbüchern zu erfassen, sollen Volksschulbücher der vergangenen 150 Jahre analysiert werden. Worin sich dieser Wandel möglicherweise zeigt, soll am Beispiel der beiden folgenden Aufgaben verdeutlicht werden.

Der Weg von Hamburg nach Bombay durch den Suezkanal beträgt 6630 Seemeilen. Früher mußten die Schiffe um das Kap der guten Hoffnung 10 895 Meilen zurücklegen. a) Welche Zeit erspart ein Schiff bei Benützung des Suezkanals, wenn es stündlich im Durchschnitt 20 Seemeilen fährt? — b) Wieviel wird an Betriebskosten gespart, wenn dieselben täglich etwa 2400 ℳ, die Durchfahrtsabgaben durch den Suezkanal aber 12 400 Frs. betragen?

Abbildung 1: Schulbuchbeispiel aus Küffner 1916, S. 65

$\boxed{7}$ Am 4. 10. 1957 starteten die Russen den ersten Erdsatelliten. Seine Umlaufzeit betrug 96 Min. Der Satellit verglühte am 4. I. 1958. Der erste amerikanische Satellit wurde am 31. I. 1958 in seine Bahn geschossen. Die Umlaufzeit betrug bei 31 040 km/h 103,7 Minuten. Seine Lebensdauer wurde mit 5 Jahren angegeben. Stelle Vergleiche zwischen den beiden Satelliten an!

Abbildung 2: Schulbuchbeispiel aus Hagen ca. 1963, S. 82

Aspekte zeitlichen Wandels

Betrachtet man die beiden Aufgaben genauer, so lassen sich vier mögliche Aspekte feststellen, an denen ein Wandel deutlich werden könnte. Auf den ersten Blick erkennbar, aber nicht im Zentrum des Interesses, ist die Veränderung in der *äußeren Gestaltung*. Dazu zählen der Schrifttyp, die Farbigkeit der umgebenden Seite und andere drucktechnische Aspekte.

Eine weitere Veränderung zeigt sich in den auftretenden *Sachsituationen*. Diese liegen eventuell nur bedingt im Fokus beziehungsweise im Bewusstsein der Schulbuchautoren und stellen den Kern meiner Untersuchung dar. Die Sachsituationen beider Aufgaben lassen sich zum einen dem Themenbereich ‚Technik‘ zuordnen, da es um Fahrzeuge beziehungsweise technischen Fortschritt in der Raumfahrt geht. Die

Aufgabe von 1916 lässt sich darüber hinaus dem ‚ökonomischen' Themenbereich zuordnen, da es um die wirtschaftliche Betrachtung der Kostenersparnis geht. Die zweite Aufgabe ist dagegen eher dem gesellschaftlichen Themenbereich zuzuordnen, da hier die Konkurrenzsituation der Ost- und Westmächte während des Kalten Krieges thematisiert wird. Hier wird auch deutlich, dass Veränderungen in den Sachsituationen mehr sind, als die reine Anpassung an technische Gegebenheiten. Je nach Fragestellung und Präsentation der Aufgabe wird eine bestimmte Sicht der Dinge mit vermittelt. Bezüge zum vierten in der Untersuchung erfassten Themenbereich, dem direkten Lebensumfeld der Kinder, finden sich in den Beispielaufgaben nicht. Dabei ginge es beispielsweise um den Einkauf von Lebensmitteln oder die jeweilige Wohnsituation.

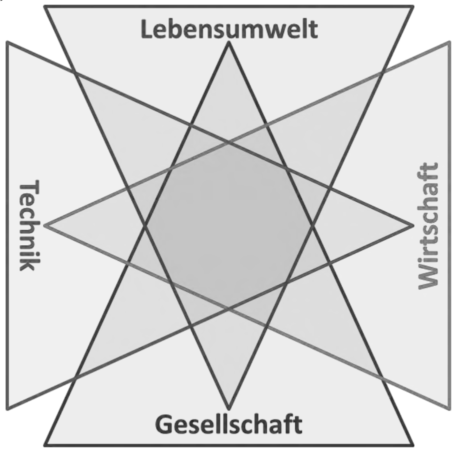


Abbildung 3: Themenbereiche

Dass diese Bereiche nicht trennscharf sind, ist zu erwarten. Da aber sehr viele Aufgaben in der Schnittmenge der vier Bereiche liegen werden in der Untersuchung noch Einzelthemen unterschieden, die trotz unterschiedlicher Bereiche den gleichen außermathematischen Gegenstand aufgreifen. Beispiele wären die Themen Gesundheit, Geldanalage oder Energie.

Weiterhin weisen die beiden Beispielaufgaben auch didaktische Unterschiede auf, die ebenfalls einem zeitlichen Wandel unterliegen. Während die erste Aufgabe vollkommen geschlossen ist, zeigt die zweite Aufgabe bereits Ansätze von Offenheit, indem nicht konkret vorgegeben wird, bezüglich welcher Eigenschaften die beiden Satelliten verglichen werden sollen. Da unter *didaktischen Gesichtspunkten* in jeder zu untersuchenden Epochen eine unüberschaubare Vielzahl an Ideen und Strömungen vorliegt, sollen einzelne didaktische Aspekte herausgegriffen und exemplarisch betrachtet werden.

Auch wenn in den vorliegenden Beispielaufgaben der *mathematische Inhalt* annähernd gleich ist, gibt es im Untersuchungszeitraum sehr wohl Veränderungen. Deutlich zeigt sich dies am Beispiel der Mengenlehre, die Anfang der 70er Jahre Einzug in die Schulbücher der Volksschulen hält und in den darauffolgenden Jahren wieder abnimmt. Da diese inhaltlichen Veränderungen stark durch Bildungspläne und Richtlinien vorgegeben werden, liegen auch diese nicht im Zentrum der Untersuchung.

Formen des Wandels

Stellt man nun die Frage, wie sich der Wandel in Mathematikschulbüchern konkret zeigen könnte, so geht es zum einen um das Auffinden *epochentypischer Merkmale*. Durch die Analyse von Schulbüchern der gleichen Epoche fallen Themen auf, die in dieser Zeit verstärkt auftreten. Ein Thema, das nur in der Zeit des Nationalsozialismus vorkommt, ist beispielsweise die Rassenkunde. Auch die Geldanlage in Form von Bausparverträgen scheint ein solches epochentypisches Thema zu sein. Während sich Aufgaben zum Sparen in allen betrachteten Epochen finden lassen, treten Bausparverträge hauptsächlich in den Wirtschaftswunderjahren auf. Während der Zusammenhang zur Wohnungsnot der Nachkriegsjahre deutlich ist, muss die genaue Einbindung in den historischen Kontext erst noch erfolgen.

Aber auch didaktisch lassen sich epochentypische Elemente erkennen. Betrachtet man beispielsweise die verwendeten Abbildungen genauer, so legen erste Analysen einzelner Bücher die Vermutung nahe, dass in den 60er Jahren Diagramme mit zusätzlichen illustrierenden Elementen typisch sind. Auffällig ist dabei, dass diese Illustrationen nicht immer dem besseren Verständnis der Daten dienen, sondern wie in Abbildung 4 falsche Interpretationen nahelegen. So wird dem längsten Balken ganz oben nicht die zahlenmäßig größte Unfallursache („Zu schnell“) zugeordnet.

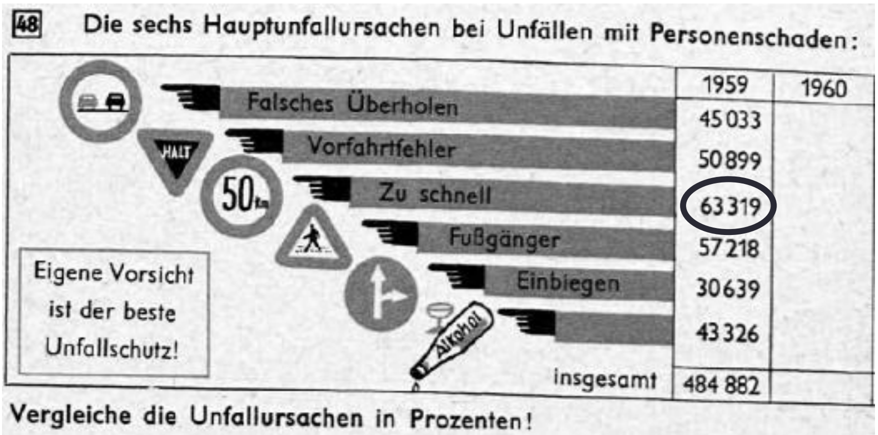


Abbildung 4: Diagramm mit illustrierenden Elementen aus Hagen 1960, S. 42

Da es in der Untersuchung in erster Linie um den Wandel in Schulbüchern geht, sollen im zweiten Schritt Veränderungen über verschiedene Epochen hinweg beschrieben werden. Diese können einerseits *quantitativ*, andererseits auch *qualitativ* erfasst werden wie das Beispiel offene Aufgaben zeigt. Als offen werden dabei Aufgaben verstanden, wenn entweder der Anfangszustand, die Transformation oder der Zielzustand unklar bleibt (vgl. u.a. Blum, Wiegand 2000). Vergleicht man in einem aktuellen (Sailer 2008) und einem Buch aus den 60er Jahren (Hagen ca.

1960) den Anteil offener Aufgaben, so finden sich in dem älteren Buch mit 13% mehr offene Aufgaben als in dem aktuellen Buch mit 9%. Geht man davon aus, dass diese Ergebnisse durch die Analyse weiterer Bücher der beiden Epochen bestätigt werden, stellt sich die Frage, wie sich der Anteil offener Aufgaben verändert. Handelt es sich dabei um eine wellenförmige oder eher lineare Entwicklung? Auch qualitativ wäre eine Veränderung der offenen Aufgaben denkbar. So bleibt zu überprüfen, ob es sich in den 1960er Jahren um den gleichen Typ offener Aufgaben handelt wie heute. Entsteht der hohe Anteil offener Aufgaben in den 60er Jahren beispielsweise durch das Erfinden eigener Aufgaben, während in aktuelle offene Aufgaben stärker auf die mathematischen Inhalte eingehen?

Auch auf thematischer Ebene lassen sich Veränderungen sowohl quantitativ als auch qualitativ beschreiben. Erste Aussagen über die Bedeutung der vier Bereiche Technik, Gesellschaft, Ökonomie und Lebensumfeld soll die Betrachtung ihrer Anteile in verschiedenen Epochen liefern. Während Aufgaben zum Einzelthema Gesundheit in allen Epochen etwa gleichstark vertreten sind, verändern sich die dargestellten Inhalte. Diese reichen von Hinweisen zur Vermeidung ansteckender Krankheiten wie Tuberkulose in der Kaiserzeit über die Betrachtung der staatlichen Kosten für erbkranke Menschen in der NS-Zeit bis hin zu Fragen kalorienarmer Ernährung in der heutigen Zeit.

Fazit

Im Rahmen der Arbeit geht es um die Frage, inwiefern sich Schulbücher unter gesellschaftlichen Gesichtspunkten verändern. Dazu werden neben Sachsituationen auch exemplarisch ausgewählte didaktische Aspekte näher betrachtet. Die so erfassten und beschriebenen Veränderungen sollen in einem weiteren Schritt in den Kontext der gesellschaftlichen, politischen und wirtschaftlichen Entwicklungen eingeordnet werden.

Literatur

Blum, W., Wiegand, B. (2000): Offene Aufgaben – Wie und wozu? In: Mathematik lehren 100. Seelze: Friedrich. S. 52-55

Hagen, M. (ca. 1960). Wir rechnen 8. Rechenbuch für Volksschulen. Bamberg: C. C. Buchner.

Hagen, M. (ca. 1963). Wir rechnen 8. Rechenbuch für Volksschulen. Ausgabe für Mädchen. Bamberg: C. C. Buchner.

Küffner, E., & Lang, P. (1916). Rechenbuch für die Volkshauptschule. Würzburg: Buchersche Verlagsbuchhandlung.

Sailer, W., Vollrath, E., & Weidner, S. (2006). Formel 8. Mathematik für Hauptschulen einschließlich Mittlere-Reife-Zug. Bamberg: C. C. Buchner.

Susanne PREDIGER, Timo LEUDERS, Bärbel BARZEL, Stephan HUSSMANN, Dortmund/Freiburg

Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen — Ein Modell zur Strukturierung von Design und Unterrichtshandeln

Was ist eine gute Aufgabe? Welcher Differenzierungsansatz ist der beste? Wie moderiert eine Lehrkraft angemessen? Antworten auf solche Fragen zur Gestaltung von Lehr-Lernarrangements sind nicht pauschal zu geben, sondern hängen ab von der Stelle im Lernprozess und den jeweils relevanten didaktischen Intentionen der Lehrkraft. Bruder definiert dazu Unterrichtssituationen als „zeitlich fixierten Abschnitt einer Unterrichtsstunde zur Realisierung eines spezifischen (Teil-)Ziels in einer bestimmten dominierenden didaktischen Funktion." (Bruder 1991, S.131). Dieser Beitrag plädiert dafür, die didaktische Reflexion von Strukturierungsmodellen wiederaufzugreifen und wirbt für eine ergänzende epistemologische Perspektive zu ihrer Ausschärfung, wie am Beispiel eines im KOSIMA-Projekt (Hußmann et al. 2011) entwickelten Modells ausgeführt wird.

Historische Modelle zur Strukturierung von Unterricht

Für die Strukturierung von Unterricht nach Situationen – ob im wissenschaftlichen oder unterrichtspraktischen Kontext – wurden immer wieder Modelle vorgeschlagen, die dem unterschiedlichen Charakter von Lehr-Lern-Situationen Rechnung tragen (z.B. Aebli 1983). Das im deutschsprachigen Raum wohl einflussreichste Phasenmodell geht auf Herbart (1776–1841) und seine Schüler zurück (vgl. Weinert 1996, S. 26):

1. *Stufe der Klarheit*, in der die Lehrkraft das Vorwissen der Lernenden ordnet und für den Unterricht in Klarheit bereitstellt.
2. *Stufe der Assoziation*, in der den Lernenden neue Wissenselemente angeboten werden, die Lernenden nehmen sie auf und assoziieren sie.
3. *Stufe des Systems*, in dem die neu erworbenen Vorstellungen systematisch in den bereits vorhandenen Wissensbestand eingeordnet werden.
4. *Stufe der Methode*, in der das neu erworbene (assoziierte) und eingeordnete (systematisierte) Wissenselement eingeübt und angewandt wird.

Diese Gliederungselemente gelten aus heutiger Sicht als „kluge Beschreibung der Aneigungsstufen für den Erkenntnisprozess. Die moderne kognitive Psychologie ist gar nicht so weit entfernt" (Gudjons 2008, S. 98). In der Nachfolge wurde hieraus allerdings ein starres Schema, das die Lehrerausbildung noch bis ins 20. Jahrhundert beherrschte und von der Reformpädagogik als lehrerzentriert abgelehnt wurde. Einflussreich für Praxis und

Theorie des Mathematikunterrichts erwies sich im letzten Jahrhundert das schülerzentriertere Stufenmodell von Roth (1957), der das genetische Prinzip integrierte in einer Stufe der Motivation (Entwicklung des Lernbedürfnisses), einer Stufe der Schwierigkeiten (Wahrnehmung der Grenzen bisheriger Mittel zur Problemlösung) und einer Stufe der Lösungen. Zech (1977) und Bruder (1991) griffen diese Ideen auf und forderten zudem eine flexiblere Gewichtung und Chronologie dieser Stufen.

Ein mehrperspektivisches Strukturierungsmodell nach Kernprozessen

Im Rahmen des KOSIMA-Projektes wurde ein Strukturierungsmodell entwickelt, das sich als ein Design von Lehr-Lernarrangements eignet als auch für das praktische Unterrichtshandeln situationsspezifische Entscheidungen ermöglicht. Unterschieden werden dabei im Wesentlichen die folgenden vier *Kernprozesse* (Barzel et al. 2011; Leuders & Prediger 2012):

- den Kernprozess des **Anknüpfens** an Vorerfahrungen und Interessen,
- den Kernprozess des **Erkundens** neuer Zusammenhänge,
- den Kernprozess des **Ordnens** als Systematisieren und Sichern,
- den Kernprozess des **Vertiefens** durch Üben und Wiederholen.

Diese Kernprozesse beschreiben keine starre Chronologie, sondern dienen der Unterscheidung von Unterrichtssituation nach drei Perspektiven:

- didaktische Funktion im Lehr-Lernprozess (**didaktische Perspektive**)
- kognitive Aktivitäten der Lernenden (**kognitive Perspektive**)
- Qualität der Erkenntnisprozesse (**epistemologische Perspektive**)

In epistemologischer Perspektive interessiert die Qualität der durch die kognitiven Aktivitäten ausgelösten Erkenntnisprozesse. Nur wenn diese Qualitäten passend sind, kann sich die intendierte didaktische Funktion durch entsprechende kognitive Aktivitäten auch einlösen. Die epistemologische Perspektive betont zudem, dass nicht nur im wissenschaftlichen, sondern auch im pädagogischen Kontext das authentische Erleben mathematischer Erkenntnisprozesse möglich und wünschenswert ist (vgl. Leuders 2003 „prozessorientierter Mathematikunterricht“).

Im Lehrwerk *Mathewerkstatt* (Barzel et al. 2012ff) dienen die genannten Kernprozesse der (für Lehrende und Lernende gleichermaßen transparenten) Strukturierung, welche durch eine Reihe von Strukturmerkmalen des Schulbuches, Aufgabenqualitäten, methodischen Unterrichtsarrangements und Moderationsformen getragen wird.

Kernprozess des Anknüpfens

Didaktische Funktion: Lehrende diagnostizieren Vorwissen, aktivieren lebensweltliche Vorstellungen der Lernenden (Lengnink et al. 2011) und geben eine Vorausorientierung durch Kernfragen (Leuders et al. 2011).
Kognitive Aktivitäten: Lernende erinnern sich, äußern erste Intuitionen, stoßen auf Schwierigkeiten, werfen Fragen auf (vgl. „Kernideen“ nach Gallin & Ruf 1998).
Epistemologische Qualität: Das Aufgreifen von Wissen und Erfahrungen und das Entwickeln von Problembewusstsein dient der Ermöglichung von Kumulativität und Selbststeuerung im Erkenntnisprozess.

Strukturelemente des Schulbuches, die dieses unterstützen, sind beispielsweise bildlich eingeführte sinnstiftende Kontexte (Leuders et al. 2011) und situativ aufgeworfene Fragen. Die Abbildungen zeigen jeweils Beispiele zur Abgrenzung der Konzepte Flächeninhalt / Umfang (aus Holzäpfel et al. 2012).

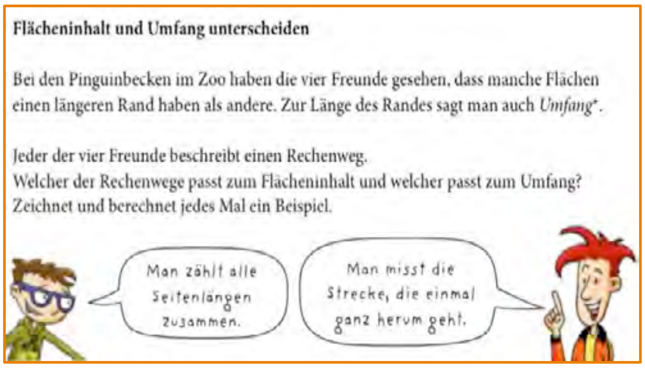
Kernprozess des Erkundens

Didaktische Funktion: Problemhaltige intentionale Situationen dienen dem Aufbau von Begriffen, Entwickeln von Verfahren und Herausarbeiten von Zusammenhängen (Freudenthal 1973; Hußmann 2002; Leuders et al. 2012).
Kognitive Aktivitäten: Lernende lösen Probleme, untersuchen mathematische Muster und Phänomene der inner- und außermathematischen Umwelt.
Epistemologische Qualität: Das mathematische Erkunden von Situationen dient dem individuelle Erfinden von bisher unbekannten „mathematischen Werkzeugen“ und dem Entdecken bisher verborgener Zusammenhänge.

Stützende *Strukturelemente* über die Erkundungsaufgaben hinaus können bieten methodische Arrangements, die die individuelle Kreativität und den kooperativen Austausch begünstigen (vgl. Barzel et al. 2007) sowie Lehrerimpulse zur Stützung des Entdeckungsprozesses (z.B. „Das ist eine gute Frage!“).

Kernprozess des Ordnens

Didaktische Funktion: Individuelle Erkenntnisse werden mit der „fertigen Mathematik“ verknüpft und langfristig verfügbar gemacht. *Kognitive Aktivitäten:* Die Balance zwischen konvergenzerzeugender Einengung und individueller Aktivität stellen „Aneignungshandlungen“ her, das sind Tätigkeiten des Zuordnens, des Ergänzens von Beispielen, des Erklärens, usw. Dieser neue Aufgabentyp wurde im KOSIMA-Projekt entwickelt (Prediger et al. 2011).
Epistemologische Qualität: Fertige Mathematik entsteht durch Ordnen, d.h. durch Systematisieren und Sichern der gefundenen/erfundenen Zusammenhänge und Begriffe. Dieser Kernprozess stellt den entscheidenden Konnex zwischen individueller Erkundung und regulärer Mathematik dar, fokussiert also auf das Regularisieren.


Flächeninhalt und Umfang unterscheiden

Bei den Pinguinbecken im Zoo haben die vier Freunde gesehen, dass manche Flächen einen längeren Rand haben als andere. Zur Länge des Randes sagt man auch *Umfang**.

Jeder der vier Freunde beschreibt einen Rechenweg.
Welcher der Rechenwege passt zum Flächeninhalt und welcher passt zum Umfang?
Zeichnet und berechnet jedes Mal ein Beispiel.

Strukturelemente: Ergebnisse werden in Aufgaben zum konvergenzerzeugenden Ordnen produziert und können in einem Wissensspeicher langfristig festgehalten werden.

Zum Kernprozess des **Vertiefens** verweisen wir aus Platzgründen auf Publikationen zum Üben (vgl. Übersicht bei Leuders 2009).

Fazit

Auch wenn natürlich andere Strukturierungsmodelle denkbar sind (Schulz 1996, S. 153f zählt 26 auf), hat sich das hier verwendete für das *Design von Lehr-Lernarrangements* mehrfach bewährt: Bei der Erarbeitung des Lehrbuchs diente es als theoretische Rahmung für die Konstruktion von adäquaten Aufgaben (Büchter & Leuders 2005) und Lernsequenzen. Die kernprozessspezifische Auswahl von Methoden (Barzel et al. 2007), Strukturelementen und Differenzierungsansätzen (Leuders & Prediger 2012, Barzel et al. 2013) ermöglichen eine epistemologisch treffsichere unterrichtliche Einbettung. Für das praktische *Unterrichtshandeln* ist insbesondere die angebotene Phasentransparenz hilfreich, um den beteiligten Lehrenden und Lernenden eine Orientierung über den Erkenntnisprozess zu geben und so Impulse und ad hoc Entscheidungen epistemologisch passend zu treffen.

Literatur

(nur in der elektronischen Fassung des Artikels auf der Webseite: www-ko-si-ma.de)

Sylvia PRINZ, Jennifer KLENZAN, Ellen ASCHERMANN, Köln

Selbstregulation in Klasse 8 – Bericht über eine Begegnung von pädagogischer Psychologie und Mathematikdidaktik

Selbstregulation gilt als eine zentrale Voraussetzung für schulisches Lernen. Dazu gehören das Setzen von Zielen, die Planung und Durchführung von Lernhandlungen sowie die Evaluation erreichter Ergebnisse (vgl. Artelt, Demmrich & Baumert, 2001, S. 271). Aber wie kann Unterricht gestaltet werden, um Lernende an dieses eigenverantwortliche Lernen heranzuführen? Konzepte der pädagogischen Psychologie können die Ansätze der Mathematikdidaktik ergänzen und beide Perspektiven dienen als Grundlage eines Forschungsprojektes, in dem durch eine kooperative Intervention mit Lehrkräften der Unterricht verändert und erprobt wurde.

1. Selbstregulation als Basiskompetenz für schulische Lernprozesse

In der Mathematikdidaktik herrscht weitgehend Konsens darüber, dass Lernen die Erweiterung oder Umstrukturierung des bestehenden Wissensnetzes bedeutet, wobei den Lernenden eine aktive und konstruktive Rolle zukommt, die die Bedeutung selbstregulativer Fähigkeiten evident macht. Neben den kognitiven Aspekten der Informationsverarbeitung stellen metakognitive und emotionale Prozesse grundlegende Aspekte der Handlungsregulation dar und sind eine zentrale Voraussetzung für erfolgreiches selbstständiges Lernen auch im Mathematikunterricht (vgl. Hußmann, 2004). Ziel unseres Projektes ist es, Lehrende auf dem Weg dahin zu unterstützen, dass sie Lernende in die Lage versetzen, ihr Lernen selbst zu regulieren.

Im Kölner Handlungskreismodell (Aschermann & Armbrüster, 2011) wird die Selbstregulation als ein zirkulärer Prozess dargestellt, der auf dem Zusammenspiel des Systems, in dem die Person handelt, und den mit diesen Handlungsschritten assoziierten kognitiven sowie motivational-emotionalen Prozessen beruht (vgl. Heckhausen, 2003; Kuhl, 2001). Emotionen – z. B. Begeisterung, Langeweile, Ungeduld – sind wesentlich für den Beginn, die Aufrechterhaltung und den Abschluss einer Lernhandlung. Sie zeigen auf, inwiefern Einklang zwischen einer Situation und den Bedürfnissen und Zielen einer Person besteht und in welche Richtung eine möglicherweise notwendige Veränderung erfolgen sollte. Diese wechselseitige Beziehung zwischen Kognition, Emotion, Motivation und Handeln gilt es im Rahmen schulischen Lernens systematisch zu gestalten und zu vermitteln.

Für erfolgreiches Lernen ist es bedeutsam, ein klares **Ziel** vor Augen zu haben, das uns selbst wichtig ist. Es gilt, eigene Entschlüsse zu fassen oder sich für einen Inhalt zu begeistern. Die **Planung** der einzelnen Handlungsschritte umfasst, die eigenen Kompetenzen zu aktivieren, Teilziele zu definieren, Prioritäten zu setzen, mögliche Schwierigkeiten vorauszusehen und Alternativen zu berücksichtigen.

Abb.1:Kölner Handlungskreismodell

Die **Handlung** verlangt Selbstvertrauen und die Fähigkeit, sich nicht von anderen attraktiven Möglichkeiten oder scheinbar dringenderen Tätigkeiten ablenken zu lassen, wenn die Arbeit nur mühsam vorangeht. Die **Evaluation** beinhaltet die Feststellung der Handlungsergebnisse sowie die Überprüfung, inwieweit das eigene Ziel erreicht wurde. Hier ist es also wichtig, eine Metaperspektive gegenüber dem eigenen Arbeiten einzunehmen und eine realistische Selbsteinschätzung zu erreichen.

Zwischen den einzelnen Handlungsphasen finden charakteristische Veränderungen in der Stimmung statt, die den reibungslosen Ablauf mitbestimmen. Damit ist die Kompetenz, eigene Emotionen verändern zu können, für erfolgreiche Lernprozesse von zentraler Bedeutung. So ist es zum Beispiel entscheidend, mit Misserfolgen umgehen zu können oder nach einer Detailanalyse wieder den Überblick über die Gesamtsituation zu gewinnen, um eine Evaluation durchzuführen. Ein optimaler Stimmungsverlauf beginnt mit der Begeisterung für ein neues Ziel und somit mit einer optimistischen und gehobenen Stimmungslage; bei der Planung wird die Gefühlslage nüchterner, wenn die möglichen Schwierigkeiten des Projektes in den Vordergrund treten (**Fokussierung**). Das Anfangen und Durchhalten fällt in einer zuversichtlichen Verfassung leichter (**Bahnung**), und bei der Evaluation wird wieder stärker auf die Details geachtet und die Stimmung wird ernster (**Rezentrierung**). Die Evaluationsergebnisse werden dann in den Kontext der eigenen Erfahrungen übertragen. Die anschließende Ausrichtung auf ein neues Ziel erfordert wiederum eine emotionale Energetisierung (**Selbstbezug**).

Da Menschen in Bezug auf ihre Schwerpunkte in den Handlungsphasen sowie auf die Fähigkeiten, ihre Emotionen zu regulieren und sich damit selbst zu motivieren, unterschiedliche Stärken haben, besteht eine Aufgabe von Lehrkräften darin, die Lernenden bei der Entwicklung beider Aspekte zu fördern. Der Handlungskreis bietet damit als Instrument zur Metakommunikation über Lernprozesse und deren Analyse zusätzliche Perspektiven, die sich situationsübergreifend nutzen lassen.

2. Kollaborative Unterrichtsentwicklung

Die Kooperation zwischen Lehrkräften wird oft als ein zentrales Merkmal effektiv arbeitender Schulen gesehen. Fachbezogene Zusammenarbeit hat sich als wirksame Strategie erwiesen, schulische Lernprozesse zu verbessern (Steinert & Maag Merki, 2009), wenn Innovationen unmittelbar mit dem eigenen Unterricht in Zusammenhang gesetzt und dort erprobt werden können. Diese kollaborative Unterrichtsentwicklung (Krainer, 2003) ist durch die Zusammenarbeit von Lehrkräften und Wissenschaftlern besonders erfolgversprechend, da so der schulpraktische Erfahrungsaustausch mit Ergebnissen und Impulsen aus der didaktischen und pädagogisch-psychologischen Forschung verbunden werden kann (Kaenders, 2010). Häufig wird von Lehrkräften zu Beginn eines solchen Projektes die Befürchtung formuliert, eine derartige Zusammenarbeit sei zu zeitaufwendig. Indes zeigt sich, dass die gemeinsame Arbeit zeitlich und konzeptionell entlastend wirkt, wenn konkret an einer gemeinsamen Frage gearbeitet wird und die Unterrichtseinheiten in einem zirkulären Prozess verbessert werden. Diese reflexive Zusammenarbeit von Lehrkräften und Forschern soll zum Aufbau einer professionellen Gemeinschaft durch situiertes Lernen beitragen („Communities of Practice“, vgl. Lave & Wenger, 1991).

Im Rahmen des Projektes wird also der eigene Unterricht auf der Grundlage des Handlungskreises reflektiert, weiterentwickelt, erprobt und hinsichtlich der Lern- und Motivationsentwicklung empirisch evaluiert. Insofern handelt es sich um einen „didaktischen Doppeldecker“ im Sinne Wahls (2005), der die Verantwortung der Lehrkräfte für ihren Unterricht bei ihnen belässt.

Trotz des immer wieder betonten Stellenwertes der Lehrerkooperation sind regelmäßige Treffen zur Unterrichtsentwicklung oft schwierig in den Schulalltag zu integrieren. Deshalb wird die interdisziplinäre Zusammenarbeit im mathematikdidaktischen Internetlabor math-il.de (www.math-il.de) realisiert. Hier ist eine große zeitliche Flexibilität gewährleistet, darüber hinaus kann schulübergreifend zusammengearbeitet werden (vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2002).

Details über die bisher entwickelte Kooperation zwischen Lehrkräften an mehreren Gymnasien und Mitgliedern der Universität sowie eine Schilderung erster Ergebnisse finden sich im Artikel von Klenzan et al. in diesem Tagungsband. Insgesamt wird in diesem Projekt die Bedeutung der Metakognition in doppelter Hinsicht deutlich: Bei der Analyse und Weiterentwicklung ihres Unterricht reflektieren die Lehrkräfte einerseits ihre eigenen Unterrichtstheorien und Gepflogenheiten und andererseits vermitteln sie die Betrachtung von Lernprozessen an die Lernenden.

Literatur

Aschermann, E. & Armbrüster, C. (2011. *Get involved – persönliche Kompetenzen erkennen und fördern*. Abschlussbericht zum Forschungsprojekt SERGE. Universität zu Köln.

Artelt, C., Demmrich, A. & Baumert, J. (2001). Selbstreguliertes Lernen. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, P. Stanat, K.-J. Tillmann & M. Weiß (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 271-298). Opladen: Leske + Budrich.

Heckhausen, H. (2003). *Motivation und Handeln*. Berlin: Springer.

Hußmann, S. (2004). Selbstgesteuertes Lernen – ein Grundbedürfnis des Menschen. *MU – Der Mathematikunterricht, 50 (3),* 5-24.

Kuhl, J. (2001). *Motivation und Persönlichkeit. Interaktion psychischer Systeme*. Göttingen: Hogrefe.

Kaenders, R. (2010). Entwicklung von Mathematikunterricht mit math-il.de am Beispiel des Zahlenteufels. Beitrag zum 15. Dresdner Kolloquium zur Mathematik und ihrer Didaktik. TU Dresden, 58-1 – 58-12.

Krainer, K. (2003). Interventionsstrategien. Auf dem Weg zu einer "kooperativen Interventionsforschung". In E. Schmidt (Hrsg.), *Interventionswissenschaft - Interventionsforschung. (43-66).* Klagenfurt: IFF Abteilung für Weiterbildung und Systemische Interventionsforschung.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2002). Analyse und Förderung kooperativen Lernens in netzbasierten Umgebungen. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 34 (1)*, 44–57.

Steinert, B. & Maag Merki, K. (2009). Kooperation zwischen Lehrpersonen und Schulen. Empirische Analysen und offene Forschungsfragen. *Beiträge zur Lehrerbildung, 27 (3)*, 395-403.

Wahl, D. (2005). *Lernumgebungen erfolgreich gestalten. Vom trägen Wissen zum kompetenten Handeln*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Juliane PÜSCHL, Paderborn

Wie besprechen Tutoren Hausaufgaben? – Potentiale und Grenzen in der Aus- und Weiterbildung von Übungsgruppenleitern

Wegen steigenden Studierendenzahlen werden immer mehr studentische Tutoren in Übungen eingesetzt. Doch was passiert in den Übungen wirklich? In diesem Beitrag wird eine Interventionsstudie vorgestellt, welche die Kompetenzen der Übungsgruppenleiter bei der Besprechung von Hausaufgaben erfassen soll. Ziel ist es durch spezifische Unterstützungsmaßnahmen die Tutoren in diesem Bereich nachhaltig zu fördern.

1. Hintergrund der Studie

Basierend auf allgemeinen, hochschuldidaktischen (vgl. z.B. Knauf 2007) und mathematikspezifischen (vgl. z.B. Liese 1994) Tutorenschulungsprogrammen wurde im Rahmen des LIMA-Projekts[1] ein Konzept entwickelt, was spezifisch auf die Aufgaben der Übungsgruppenleiter in der Mathematik eingeht (vgl. Biehler et al. 2012). Hierfür wurden neben dem allgemeinen Nachbereiten der Vorlesungsinhalte die folgenden Tätigkeitsfelder für die Tutoren identifiziert:

– das Vorstellen von Lösungen zu Übungsaufgaben
– das Anleiten und Unterstützen von Kleingruppenarbeit
– die Korrektur von Hausaufgaben und das Feedbackgeben
– das Betreuen von Studierenden im „Mathe-Treff“

Der Erfolg des Schulungsprogrammes wurde bisher an den Leistungen und Zufriedenheit der Studierenden gemessen, wobei die Ausbildung der Tutoren wenig Effekt auf die Klausurleistung hatte[2], jedoch das Kompetenzwahrnehmen der Studierenden bezüglich ihrer Übungsgruppenleiter signifikant erhöht hat. Die Leistung und Zufriedenheit der Studierenden allein geben wenig Auskunft über die eigentlichen Prozesse, die in den Übungen ablaufen, daher soll im Rahmen dieser Studie der Schulungserfolg anhand einer genauen Analyse der Übung erfasst werden. Da dies aufgrund der Komplexität der Übung nicht für alle Tätigkeitsfelder möglich ist, werden wir uns im Folgenden auf die Vorstellung von Lösungen zu Übungsaufgaben beschränken.

---

[1] Förderkennzeichen 01PH08028B

[2] hier wurden weitere Analysen gemacht, siehe Becher et. al. (2013) in diesem Band

2. Design der Studie

Im WS 2012/13 wurden in der Veranstaltung „Funktionen und Elemente der Analysis“ für Studierende des Lehramts Grund-, Haupt- und Realschule zehn Tutoren während ihrer Tätigkeit begleitet. Diese Tutoren hatten neben der Korrektur von Studierendenbearbeitungen die Aufgabe, in Tandems die Schwierigkeiten aus den Hausaufgaben in den Übungen zu besprechen. Alle Tutoren haben an dem 2-tägigen Eingangsworkshop teilgenommen, in dem die Besprechung der Hausaufgaben jedoch nur in Bezug auf Vortragsstil und Tafelbild thematisiert wurde.

Im Rahmen der Studie wurden sechs Übungen, betreut von unterschiedliche Tutorentandems, in folgenden drei Schritten begleitet:

Im ersten Teil der Studie sollten die Probleme bei der Besprechung von Hausaufgaben erfasst werde. Dafür haben die Studierenden in der dritten Semesterwoche eine ausgesuchte Aufgabe bearbeitet, welche von den Tutoren korrigiert und in den Übungen besprochen wurde. Die korrigierten Bearbeitungen wurden eingescannt und die Fehler der Studierenden kategorisiert. Die sechs Übungen wurden videographiert, mit den Problemen der Studierenden der jeweiligen Gruppe abgeglichen und auf weitere Schwierigkeiten der Tutoren, die schon aus zahlreichen Hospitationen vorheriger Schulungen bekannt waren, untersucht.

Anhand der Ergebnisse aus dem ersten Teil der Studie wurde in der Mitte des Semesters ein zweistündiger Workshop angeboten, in dem die Tutoren auf ihre Problemstellen aufmerksam gemacht wurden. Gemeinsam wurde hier über verschiedene Lösungen diskutiert, beispielsweise wurden unterschiedliche Besprechungsvarianten mit ihren Einsatzpotentialen zusammen erarbeitet. Im zweiten Teil des Workshops wurden die in der darauffolgenden Woche zu besprechenden Aufgaben intensiv vorbereitet, wobei die Problemstellen explizit behoben werden sollten. Auf diese Art und Weise sollte ausgeschlossen werden, dass die im ersten Teil der Studie aufgetretenen Probleme aufgrund fehlenden Wissens oder Relevanz erneut auftreten. Die Studierendenbearbeitungen der folgenden Woche wurden wieder eingescannt und die Übungen videographiert, um den zeitnahen Transfer der Schulungsinhalte erfassen zu können.

In der vorletzten Übung im Semester wurden alle sechs Übungen nochmals aufgenommen, um festzustellen, in wie weit die Inhalte der Intervention auch einen langfristigen Effekt erzeugen konnten.

3. Erste Ergebnisse

Nach Analyse der Studierendenbearbeitungen und der Videos aus der ersten Hospitation konnten folgende Problembereiche erfasst werden:

- Weder motivieren die Tutoren die zu besprechende Aufgabe, noch ordnen sie diese in den Veranstaltungskontext ein.
- Die Auswahl der besprochenen Inhalte passt nicht zu den Bearbeitungen der Studierenden.
- Die Tutoren wählen fast ausschließlich das Lehrgespräch als Besprechungsvariante und können ihre Methodenwahl didaktisch nicht begründen.
- Die Tafelbilder sind häufig unstrukturiert und im Nachhinein schwer nachvollziehbar, so dass sie sich zum einen für das Selbststudium der Studierenden nur bedingt eignen und zum anderen nicht als Vorbild für den Aufschrieb der Studierenden fungieren können.

Alle Problembereiche lassen sich zu einem gewissen Grad auf die inhaltliche Strukturiertheit von Unterricht zurückführen, was nach Meyer (2004) und Helmke (2009) das zentrale Merkmal für Lernerfolg darstellt und daher auch auf das Lernen der Studierenden einen Einfluss haben sollte. Natürlich spielen noch weitere Aspekte bei der Hausaufgabenbesprechung eine Rolle, wie z.B. der Vortragsstil oder die Wahl der Fragestellungen, doch aufgrund der schon bestehenden Komplexität der Studie werden diese nicht weiter betrachtet.

An dieser Stelle soll noch kurz erste Ergebnisse zum der zweiten Auffälligkeit vorgestellt werden:
Die untersuchte Aufgabe hatte vier Aufgabenteile, wobei es sich bei den ersten beiden Teilen um das Aufstellen von Annahmen und das Zeichnen eines Funktionsgraphen handelte, während die Studierenden in den letzten beiden Aufgabenteilen rechnen mussten. Nach der Kategorisierung der Studierendenbearbeitungen ist aufgefallen, dass die Studierenden in den ersten beiden Aufgabenteilen erhebliche Defizite aufwiesen (in einigen Übungen konnten weniger als die Hälfte der Studierenden die Aufgabe sinnvoll bearbeiten), bei den Rechnungen aber etwa zwei Drittel der Bearbeitungen zufriedenstellend waren. Daher war zu erwarten, dass der Schwerpunkt der Besprechungen in den Übungen auf den ersten beiden Aufgabenteilen liegen würde. Nach Analyse der Videos zeigte sich jedoch ein anderes Bild. Dabei traten folgende zwei Fälle auf:
- Die Tutoren besprachen alle Aufgaben (2 von 6 Übungen).

– Die Tutoren besprachen die ersten beiden Aufgabenteile sehr kurz oder ließen diese aus und bearbeiten die anderen beiden Teile ausführlich an der Tafel (4 von 6 Übungen).

Natürlich kann die Auswahl der Aufgaben auch begründet geschehen sein, beispielsweise können die Inhalte der vorherigen Übungen eine Rolle gespielt haben. In Gesprächen mit den Tutoren lässt sich jedoch erkennen, dass der subjektive Eindruck aus den Korrekturen zu täuschen scheint und die Tutoren bei der Auswahl der Inhalte dadurch beeinflusst wurden.

4. Ausblick

Diese Studie gibt einen ersten Einblick in das eigentliche Geschehen in den Mathematikübungen. Sie zeigt, dass es viele Bereiche gibt, in denen Mitarbeiter und Dozenten, aber auch Tutorenausbilder ihre Übungsgruppenleiter unterstützen können.

In den kommenden Analysen sollen die weiteren Problemstellen genauer betrachtet und die Effektivität der Intervention gemessen werden. Darauf aufbauend soll der Workshop zur Besprechung der Hausaufgaben angepasst und in das bestehende Tutorenschulungsprogramm integriert werden. Darüber hinaus wäre es natürlich wünschenswert, auch die anderen Tätigkeitsfelder studentischer Tutoren, wie beispielsweise die Korrektur von Hausaufgaben, genauer analysieren zu können.

Literatur

Becher, S., Biehler, R., Hochmuth, R., Püschl, J. & Schreiber, S. (2013). Von Zahlenmustern zur Vollständigen Induktion – Analysen zur Argumentationsqualität von Studierenden im ersten Semester. In diesem Band.

Biehler, R., Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S. & Hänze, M. (2012). Fachbezogene Qualifizierung von MathematiktutorInnen - Konzeption und erste Erfahrungen im LIMA-Projekt. In M. Zimmermann, C. Bescherer & C. Spannagel (Hrsg.), Mathematik lehren in der Hochschule - Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen (S. 21-33). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Helmke, A., & Weinert, F. E. (2009). Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. (2., aktualisierte Aufl. ed.). Seelze-Velber: Klett Kallmeyer.

Knauf, H. (2007): Tutorenhandbuch: Einführung in die Tutorenarbeit. 3. ed., Bielefeld.

Liese, R. (1994): Unterrichtspraktische Übungen für Übungsgruppenleiter in Mathematik. Ein Beitrag zur Verbesserung der Lehre durch Ausbildung und Training von Fachtutoren. Preprint Nr. 1674. TU Darmstadt.

Meyer, H. (2004). Was ist guter Unterricht? (1. Aufl. ed.). s.l.: Cornelsen Verlag Scriptor.

Stefanie RACH, Ulrike SIEBERT, Aiso HEINZE, Kiel

Lehrqualität in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik: Konzeptualisierung und erste Ergebnisse

Der Übergang von der Schule zur Hochschule stellt für Studierende im Fach Mathematik eine große Herausforderung dar, was sich beispielsweise an hohen Studienabbruchquoten zeigt. Vielfach wird die Lehre in der Studieneingangsphase kritisiert und die Schwierigkeiten der Studierenden auf ungünstige Lerngelegenheiten zurückgeführt. In diesem Beitrag sollen einige Besonderheiten von universitären Lerngelegenheiten herausgearbeitet werden. Darauf aufbauend werden eine Beobachtungsstudie zu mathematischen Lehrprozessen in Erstsemesterveranstaltungen und daraus resultierende deskriptive Ergebnisse vorgestellt.

Besonderheiten von Lerngelegenheiten im Fach Mathematik

Vergleicht man Lehrprozesse an der Schule mit denen an der Hochschule, so stellt man zum einen eine Charakterverschiebung des Lerngegenstandes Mathematik fest. Während die Mathematik an der Schule eine allgemein bildende Funktion besitzt, ist sie an der Hochschule durch einen axiomatischen Theorieaufbau geprägt. Die typische Struktur *definition-theorem-proof* beinhaltet formale Begriffsdefinitionen zur Beschreibung mathematischer Objekte und deduktive Beweise als Evidenzkriterium für mathematische Aussagen zwischen diesen Objekten. Der Mathematik an der Schule kann dagegen ein eher instrumenteller Charakter zugeschrieben werden, wobei mentale Vorstellungen von Begriffen und plausibles Schließen im Vordergrund stehen (Rach & Heinze, 2013).

Die zweite Veränderung bezüglich der Lehr-Lern-Prozesse betrifft die Lerngelegenheiten und ihre Nutzung. Der konstitutionelle Rahmen in der Schule besteht aus einer ausgebildeten Lehrkraft, die den Unterricht didaktisch strukturiert und oftmals Strategien zur Lösung einer Problemstellung induziert oder vorgibt. Die Lehrprozesse an der Schule orientieren sich somit eher an den Lernenden, während die Strukturierung und Auswahl der Inhalte an der Hochschule an der mathematischen Sachlogik ausgerichtet sind (de Guzmán et al., 1998). Begriffe und Aussagen werden durch die Lehrenden in einer Vorlesung zwar definiert bzw. bewiesen und dann in Tutorien vertieft, es ist jedoch anzunehmen, dass Studierende die Inhalte aktiv für ihren eigenen Lernprozess aufbereiten müssen, da beispielsweise Strategien zum Bearbeiten von Übungsaufgaben meist implizit bleiben.

Konzeptualisierung von Lehrqualitätskriterien

Zur Qualität des Lehrangebotes an der Hochschule im Fach Mathematik gibt es nur wenige empirische Ergebnisse. Meistens handelt es sich um Fallstudien mit methodologischen Einschränkungen (z. B. Bergsten, 2007). Im Bereich des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe gibt es Erkenntnisse von Heinze und Reiss (2004), dass beispielsweise explorative Phasen in Beweisprozessen wenig expliziert werden. In der allgemeinen Unterrichtsforschung sind zudem die vier folgenden Unterrichtsqualitätsmerkmale etabliert: Instruktionseffizienz, Schülerorientierung, kognitive Aktivierung und Strukturierung (z. B. Clausen et al., 2003).

Forschungsfragen

Wir gehen davon aus, dass es spezifische Besonderheiten von mathematischen Lehrveranstaltungen (Vorlesungen und Tutorien) an der Hochschule gibt. Aufgrund der bisher wenigen empirischen Ergebnisse lauten unsere Forschungsfragen:

- Welche allgemeinen und mathematikspezifischen Lehrqualitätsmerkmale lassen sich für universitäre Lehrveranstaltungen für das Fach Mathematik konzeptualisieren?
- Welche dieser Merkmale lassen sich durch Beobachtungen reliabel erfassen?

Design

Für diese Studie wurde die Lehre des Erstsemestermoduls „Analysis I“ für Hauptfachstudierende beobachtet und dabei der Inhaltsbereich „Folgen und Reihen“ fokussiert. Es wurden drei Wochen mit insgesamt fünf Vorlesungs- und drei Tutorienterminen beobachtet. Dazu wurden standardisierte Beobachtungen von zwei oder drei geschulten Beobachterinnen und Beobachtern durchgeführt. Zur Erhebung der Lehrqualität wurden Codiermanuale und Beobachtungsbögen entwickelt und die Beobachtungen erfolgten auf einer vierstufigen Likert-Skala von „gut behandelt“ (3) über „behandelt“ (2), „schlecht behandelt“ (1) bis „nicht behandelt“ (0).

Es wurden vier Aspekte bzgl. der Einführung von Begriffen beobachtet: (1) Motivation und Einordnung in das Themengebiet, (2) Nennen einer formalen Definition, (3) Nennen von Beispielen und Gegenbeispielen und (4) Verwenden mentaler und visueller Repräsentationen. Der zentrale Qualitätsaspekt besteht darin, dass Verbindungen zwischen der formalen Definition eines Begriffs (2) und den dazugehörenden Aspekten des Begriffsverständnisses (1, 3, 4) hergestellt werden. Dazu wurde die Einführung von vier Begriffen beobachtet.

Beweisprozesse wurden in der Vorlesung ähnlich wie bei Heinze und Reiss (2004) beobachtet. Dabei wurde der Beweisprozess als qualitativ hochwertig eingeschätzt, wenn die einzelnen Beweisphasen explizit gemacht werden. Insgesamt wurden dafür Beweise von neun Aussagen herangezogen. Die Operationalisierung in den Tutorien zum Beweisprozess unterscheidet sich dahingehend, dass die einzelnen Beweisphasen im Kontext der Aufgabenlösung beobachtet wurden. Die Beweisphasen in den Tutorien sind (1) Motivation und Gebietseinordnung, (2) Lösungs- und Beweisidee und (3) Organisation der Argumente zu einem formalen Beweis. Im Durschnitt wurden 12-23 Aufgabenpräsentationen in den Tutorien beobachtet.

Neben der mathematikspezifischen wurde die allgemeine Lehrqualität mittels adaptierter Kriterien nach Clausen et al. (2003) operationalisiert. Beispielsweise wurden die folgenden Kriterien untersucht: Explizierung von Strategien (Schülerorientierung), Denkanstöße (kognitive Aktivierung) und Unterscheidung (Un)Wichtiges (Strukturierung).

Die Beobachterübereinstimmungen wurden mit Hilfe des ICC bestimmt und lagen im guten bis akzeptablen Bereich.

Ergebnisse

Bezüglich der mathematikspezifischen Lehrqualität ist festzuhalten, dass in der Vorlesung die Einführung von formalen Begriffsdefinitionen ($M = 2.25$, $SD = 0.50$) betont wird und es kaum eine Motivation zu den Begriffen ($M = 0.13$, $SD = 0.25$) und eher wenig umfassende (Gegen-) Beispiele ($M = 1.25$, $SD = 0.96$) bzw. Verknüpfungen mit mentalen Vorstellungen ($M = 0.88$, $SD = 1.03$) gibt.

P1: Entwicklung einer Behauptung	P2: Formulierung einer Behauptung	P3: Exploration einer Behauptung	P4: Organisation eines Beweises	P5: Rückschau auf den Beweis
1.24 (0.88)	2.67 (0.29)	1.48 (0.80)	1.65 (0.53)	0.83 (0.97)

Tab. 1: Mittelwert (Standardabweichung) der Phasen im Beweisprozess in der Vorlesung (3: gut behandelt, 2: behandelt, 1: schlecht behandelt, 0: nicht behandelt)

Hinsichtlich des Beweisprozesses zeigt sich, dass die Explorationsphasen P1 und P3 eher weniger gut behandelt werden (Tab. 1). Ein ähnliches Resultat ergab sich in den Tutorien, in denen die Motivation einer Aufgabe fast nie thematisiert wurde ($M = 0.13$, $SD = 0.23$). Auch scheinen in den Tutorien die Organisation eines Beweises ($M = 2.10$, $SD = 0.50$) im Allgemeinen wichtiger zu sein als das Explizieren einer Beweisidee ($M = 1.48$, $SD = 0.69$).

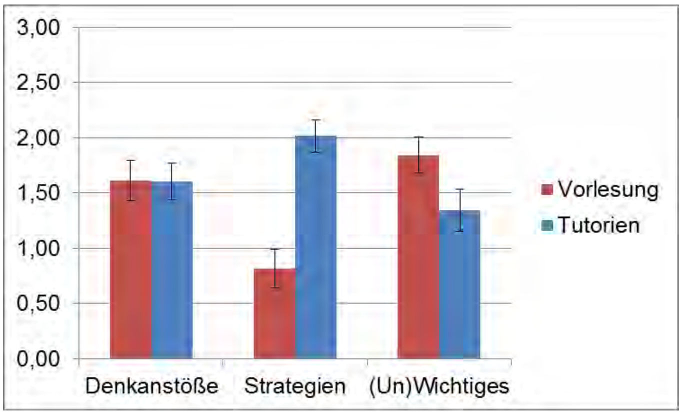


Abb. 1: Allgemeine Qualitätskriterien in der Vorlesung und in den Tutorien (vierstufige Likert-Skala von 3: gut vorhanden bis 0: nicht vorhanden).

Die allgemeine Lehrqualität weist sowohl in der Vorlesung als auch in den Tutorien relativ große Unterschiede auf. In der Vorlesung scheint die Unterscheidung zwischen Unwichtigem und Wichtigem mehr zur Geltung zu kommen, während in den Tutorien das Explizieren von Strategien zum mathematischen Arbeiten einen größeren Stellenwert annimmt (Abb. 1).

Diskussion

Diese Studie liefert einen ersten Einblick in mathematische Lehrqualität in der Studieneingangsphase. Die Ergebnisse dieser Beobachtungsstudie sind nicht generealisierbar, da nur eine Vorlesung (mit Tutorien) an einer Hochschule beobachtet wurde. Jedoch zeigt sich mit dieser Studie die Machbarkeit solch einer Erfassung von Lehrqualität. Einige an den Lehrveranstaltungen häufig geäußerten Kritikpunkte, wie z. B. die mangelhafte Explizierung von Strategien bzw. das Ansprechen von nur wenigen mentalen Vorstellungen zu einem Begriff, zeigten sich auch hier.

Literatur

Bergsten, C. (2007). Investigating Quality of Undergraduate Mathematics Lectures. *Mathematics Education Research Journal, 19*(3), 48-72.

Clausen, M., Reusser, K. & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualität auf der Basis hochinferenter Unterrichtsbeurteilungen. *Unterrichtswissenschaft, 31*(2), 122-141.

Guzmán, M. de, Hodgson, B. R., Robert, A. & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. In G. Fischer (Hrsg.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (S. 747-762). Rosenheim: Geronimo.

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level – a video study. *ZDM, 36*(3), 98-104.

Rach, S. & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? Zur Rolle von Selbsterklärungen beim Mathematiklernen in der Studieneingangsphase. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34*(1), 121-147.

Martin RATHGEB, Siegen

Wie wird Arithmetik zu Algebra? Didaktische Aspekte der Brownschen Arithmetik

Im Folgenden möchte ich die *Anwendung mathematikdidaktischer Konzepte* innerhalb meines mathematikphilosophischen Dissertationsprojektes vorstellen und darauf hinweisen, dass George Spencer-Browns „Laws of Form“ m.E. als *Lektüre in Lehrveranstaltungen* zur Schulalgebra an der Hochschule verwendet werden kann. Zunächst geht es mir um *zentrale Aspekte der Primärquelle*.

1. Zentrale Aspekte der „Laws of Form“

In diesem Beitrag wird der *Übergang zwischen Arithmetik und Algebra* beobachtet, der in George Spencer-Browns mathematischem Essay „Laws of Form“ (LoF) erfolgt; genauer: Es geht um den Übergang von einer *Arithmetik als Kalkül* zu einer *Arithmetik als Theorie über diesen Kalkül*. Der Umschwung von der *Innenansicht* zur *Außenansicht* bzgl. einer formalen Arithmetik wiederholt sich für die Algebra. – Browns Algebra inkl. ihrer Arithmetik ist allerdings nicht die der Schulmathematik, sondern eine *Sonderform Boolescher Algebren*, also eine Variante der klassischen Aussagenlogik. Zudem geht obige Spezifikation innerhalb der Arithmetik sowie der Algebra und weiter die Unterscheidung zwischen der Algebra und der (Meta-)Theorie zur Arithmetik über die schulische Perspektive auf Mathematik hinaus. – Bemerkenswert an der Entstehung von LoF ist m.E., dass der Autor die Booleschen Algebren zunächst *arithmetisieren* musste; die Niederschrift folgt dann allerdings wieder dem üblichen Vorgehen, wonach die Arithmetik *algebraisiert* wird. – Weiter ist LoF ein Beitrag zum Themenfeld adäquater *Grundlegung der Mathematik*; LoF liefert insbesondere eine *Rechtfertigung der Logik* durch ihre Rekonstruktion als korrekter Zeichengebrauch; genauer: als bestimmter Teil des Umgangs mit *Unterscheidungen* und *Bezeichnungen* in der Lebenswelt.

In LoF Kap. 1 sind die im Titel „Laws of Form“ genannten *Gesetze* zu finden; sie bilden zusammen mit dem Unterscheidungskonzept den systematischen Anfang des Buches. Ich passe ihre Formulierung an die nachfolgend aus technischen Gründen verwendete Notation (mittels eckiger Klammern) ihrer in Kap. 2 gegebenen Formalisierung zu zwei *Formen* an:

1. *Gesetz des Nennens*: Wieder-Nennen ist Nennen.
   Form der Kondensation: [][]=[]
2. *Gesetz des Klammerns*: Wieder-Klammern ist nicht Klammern.
   Form der Aufhebung: [[]]=

Gemäß Vereinbarung des Autors mit dem Leser gelten die Gesetze und Formen im Hinblick auf folgendes Sprachspiel: Im Diskursuniversum wird lediglich über zwei *Zustände* gesprochen – den *markierten* und den *unmarkierten*; auf den ersten verweist die Anwesenheit, auf den zweiten die Abwesenheit von []: Es kann also [] als „Nennen" des markierten Zustands und [][] als „Wieder-Nennen" gelesen werden. – Weiter wird [] als *Kondensation* von *deskriptivem* und *injunktivem* Zeichengebrauch vereinbart, insofern *die* Klammern als *Name* für den markierten Zustand gelten (Sichtweise von [] als Operand) und *das* Klammern mittig abwesender Klammern als *Injunktion* gilt, die auf den markierten Zustand als auf *den anderen* bzgl. des mittig angezeigten unmarkierten Zustands hinweist (Sichtweise von [] als Operator). – Das liefert im Gesetz des Klammerns, in der Form der Aufhebung und in der üblichen Abgrenzung der Syntax von der Semantik je eine weitere *Kondensation*.

2. Anwendung mathematikdidaktischer Konzepte

In diesem Abschnitt zeige ich, wie das Rechnen in dieser *Arithmetik ohne Zahlen* entwickelt und von Arithmetik zu Algebra übergegangen wird.

Ein *Präliminarium*: In Schul- und LoF-Mathematik läuft manches parallel, manches antiparallel; beachtet man solche Zusammenhänge, so kann man über beide Mathematikformen lernen. Bspw. wird in ersterer üblicherweise die Arithmetik algebraisiert (vgl. Malle 1993 Kap. 6); in letzterer dagegen erfolgt zwar die Formalisierung der Algebra im Rückblick auf die Arithmetik, doch ist diese im Hinblick auf die Algebra konzipiert. In LoF ist also das Gleichheitszeichen sogleich als *Vergleichszeichen* konzipiert: In Kap. 2 zeigen die beiden Formen *Äquivalenzen* an und verweisen die Terme einer Gleichung auf denselben Wert. In Kap. 3 wird für jegliche Terme *vereinbart*, dass der *Wert* eines Terms der Wert *des* einfachen Terms ist, der durch *Vereinfachung* erreicht wird, wobei die *einfachen Terme* [] und „" sind (dabei ist „" die Explikation der Abwesenheit von []), also die rechten Seiten der Formen, mit markiertem bzw. unmarkiertem Zustand als Wert. Ist das *Resultat* der Vereinfachung eines gegebenen Terms invariant bzgl. des konkreten *Prozesses*? Ist also der Wert eines Terms wohldefiniert? Wie vereinfacht man auf erlaubte Weise? – Die Beantwortung der Fragen erfolgt in umgekehrter Reihenfolge.

Die *LoF-Arithmetik*: Jeder *Term* der Arithmetik ist ein einfacher Term oder eine Zusammensetzung solcher. *Rechnen* heißt in LoF, Terme gemäß den erlaubten Umformungen zu ändern, wobei als Umformungen folgende *Schritte* erlaubt sind: [][]→[] sowie [[]]→„" als vereinfachende und []→[][] sowie „"→[[]] als verkomplizierende; diese vier Schritte werden in Kap. 3

aus den *Äquivalenzen* von Kap. 2 genommen, die dafür in beide Richtungen als *Zuweisungen* gelesen werden (vgl. Rathgeb 2011). Mittels dieser elementaren Umformungen wird in Kap. 3 [[][]][]=[] gezeigt, alle weiteren arithmetischen Äquivalenzen werden in Kap. 4 von außen bzw. als Gegenstand der (Meta-)Theorie behandelt. Erprobt der Leser dagegen selbst die Konsequenzen der erlaubten Transformationen, so stellt er bspw. fest, dass die Terme [][], [[]][], [[]][][] allesamt auf [] vereinfacht werden können, der letzte etwa so [[]][][]→[] []→[] oder so [[]][][]→[[]][]→[]. Kann man das Resultat bereits am Term bzw. an dessen Aufbau erkennen, ohne einen Vereinfachungsprozess explizit zu durchlaufen? – In LoF ist von *Mustern* die Rede, womit direkt auf „Theoreme“ (LoF, 12) und auf „Konsequenzen“ (LoF, 25) verwiesen wird und damit indirekt auf Muster in Termen und in Argumentationen.

Eine *Didaktik-Optik*: Lisa Hefendehl-Hebeker weist in ihrem Aufsatz „Wege zur Formelsprache“ die „Einführung in den verständigen Gebrauch der Formelsprache [als] eine didaktische Herausforderung“ (S. 66) aus und zudem auf sich wiederholende Stufen hin; dabei ist die fünfte Stufe der ersten prinzipiell gleich, sie liegt allerdings auf höherer Ebene (vgl. S. 68f.). Diese Stufenfolge wird für die Beschäftigung mit dem harmonischen Dreieck in der Schulmathematik vorgeführt, sie ist m.E. aber auch geeignet, um den von Spencer-Brown in LoF Kap. 4 konzipierten Weg durch eine (Meta-)Theorie der formalen Arithmetik zu beschreiben. – Auf Stufe 1 „Muster erkennen“ wird aus Sicht des Lernenden ein Muster vermutet; in der LoF-Arithmetik bspw.: Ein LoF-Term, in welchem neben dem Restterm ein einzelnes Klammernpaar steht, lässt sich auf das Klammernpaar vereinfachen (vgl. obige Frage); ein Pendant aus der Schularithmetik ist bspw.: Das Produkt einer bel. Zahl mit Null ist Null. – Auf Stufe 2 „Inhärente Strukturen erfassen“ wird „strukturierte Arithmetik“ betrieben, d.h. ein prototypisches Beispiel betrachtet: Vereinfacht man [[[][]]][][] derart, dass die Umformung jeweils möglichst weit links erfolgt, so erhält man [[[][]]][][]→[[[]]][][]→[][][]→[][]→[]. Zwar kann der Term auch anders vereinfacht werden, doch kann das [] rechts außen bis zuletzt stehen bleiben. Diese Äquivalenz von Termen des genannten Musters mit [] ist in Theorem 2 zunächst in Worten beschrieben, d.i. „verbale Algebra“ (S. 68). – Die Formulierung der Aussage, die noch vor Beweisbeginn mittels bezeichnender Buchstaben(-kombinationen) erfolgt, und der Beweis selbst, der hauptsächlich mittels Fallunterscheidung geführt wird, liegen bereits auf Stufe 3 „Symbolisches Beschreiben – Darstellen und Begründen“. – Theorem 3, das die Wohldefiniertheit des Werts für jeden Term behauptet und Theorem 2 als Lemma benutzt, kann zwar auf Ebene 2 formuliert werden, doch liegt sein Beweis auf Ebene 4 „Symbolisches Explorieren –

Formeln manipulieren und interpretieren“: Spencer-Brown gewinnt aus weiteren Vereinbarungen mit dem Leser ein Verfahren der Wertbestimmung, das von jedem konkreten Vereinfachungsprozess mittels Schrittfolgen unabhängig ist. – Auf Ebene 5 „Neue Muster erkennen – der kreative Blick“ kann man bspw. die beiden Formen aus Kap. 2 mittels Buchstaben systematisch modifizieren und die entstehenden Termgleichungen mittels Fallunterscheidung auf ihre Gültigkeit hin untersuchen: [a][a]=[a], [[a]]=a, [[a]a]=„“, aa=a, [[a]b]a=a u.ä.; Spencer-Brown selbst geht anders vor: Er zeigt zunächst, dass der *Wert* eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Terme der LoF-Arithmetik induziert; genauer: Die Reflexivität und Transitivität des als symmetrisch konzipierten Gleichheitszeichens werden explizit bewiesen; er zeigt weiter zwei Äquivalenzen zwischen vier Termmustern. Im Anschluss (Kap. 5) wechselt er seine Perspektive und betrachtet nicht mehr die LoF-Arithmetik von außen, sondern definiert vor dem erkundeten arithmetischen Grund die formale LoF-Algebra. Muster algebraischer Terme werden in Kap. 6 unter einer Innenperspektive behandelt, in Kap. 7 unter einer Außenperspektive.

3. „Laws of Form“ als Lektüre in Lehrveranstaltungen

Ich halte *LoF als Lektüre* in einer bzw. für eine Veranstaltung zur Schulalgebra an der Hochschule für geeignet, insofern verschiedene Thematiken „in a nutshell“ auftreten: das Wechselverhältnis zwischen Arithmetik und Algebra sowie zwischen präformalen, formalen und postformalen Bereichen innerhalb von Arithmetik und von Algebra; verschiedene Variablenaspekte; verschiedene Beweistypen (inhaltlich, formal, experimentell); Formeln als Notationsformen für „Muster“; etc. Damit kann LoF zur *konstruktiven Irritation* eingesetzt werden, insofern den Lehrämtlern dort in verfremdeter Form und damit als neue Herausforderung begegnet, was ihnen in der Schulmathematik vertraut geworden, sie aber zukünftig den SuS als neuen Lernstoff zu lehren haben.

Literatur

Hefendehl-Hebeker, L. (2008): Wege zur Formelsprache – Entwicklung algebraischen Denkens als didaktische Aufgabe. In: Unikate 33/2008, 66–71.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig [u.a.]: Vieweg.

Spencer-Brown, G. (1997): Laws of Form – Gesetze der Form. Übersetzung: Thomas Wolf. Lübeck: Bohmeier Verlag. (erstveröffentlicht 1969 in Englisch)

Rathgeb, M. (2011): Zeichen defizient verstehen. In: Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G., Rathgeb, M.: Mathematik Verstehen – Philosophische und Didaktische Perspektiven. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 27–46.

Katrin REIMANN, Köln

Eulers Zahlauffassung in seiner „Algebra“

Leonhard Euler gilt als einer der bedeutenden Mathematiker und als ein herausragender Kopf seiner Zeit. In diesem Beitrag wird Eulers Zahlauffassung in seinem Lehrbuch „vollständige Anleitung zur Algebra“ dargelegt. Die „vollständige Anleitung zur Algebra“ erschien 1770 in St. Petersburg und wurde als systematische Einführung in die Arithmetik und lineare Algebra für ein mathematisch interessiertes Publikum konzipiert. Eulers Absicht war es ein „ein Lehrbuch zu verfertigen aus welcher ein jeder ohne einige Beyhülffe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne“ (Euler, Vorwort). Zu Beginn des Lehrbuchs gibt Euler eine programmatische Definition an, was er unter Mathematik versteht: „Die Mathematik ist überhaupt nichts anderes als eine Wissenschaft der Größen, welche Mittel ausfindig macht, wie man diese ausmessen kann“ (Euler, Teil 1 § 2). Den Begriff der Größe will Euler wie folgt verstanden haben: „Erstlich wird alles dasjenige eine *Größe* genannt, was einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist“ (Euler Teil 1 § 1). Als Beispiele für Größen nennt er Gewichte, Längen und Summen von Geld. Euler definiert die Größen bezogen auf die Möglichkeit der Vermehrung und der Verringerung und setzt damit implizit eine Ordnung voraus, welche er nicht näher charakterisiert. Auch die Eigenschaft der Transitivität und der Irreflexivität der „kleiner als“-Relation, welche wir heute klassischerweise mit einem Größenbereich verbinden, thematisiert Euler nicht. Die Größen stammen bei Euler aus der Empirie. Sie sind mit ihren Eigenschaften gegeben und werden nicht formal eingeführt.

1. Zahlen

Euler führt Zahlen in Bezug zu Größen ein. Dazu führt er zunächst aus, dass eine Größe nur durch eine bekannte Größe der gleichen Art bestimmt bzw. ausgemessen werden kann, indem das Verhältnis der beiden Größen zueinander angegeben wird. Bezogen auf dieses Verhältnis von zwei Größen bestimmt Euler die Zahl: „Somit ist eine Zahl nichts anderes als das Verhältnis, in dem eine Größe zu einer anderen steht, welche als Einheit angenommen wird“ (Euler, Teil 1 § 4). Zahlen werden hier definiert im Sinne der Grundvorstellung einer Aufteilsituation bzw. des Messens und nicht der Verteilsituation, bei welcher die vorhandene Einheit erhalten bleibt. Zahlen werden also nicht im Maßzahl-, oder Kardinalzahlaspekt eingeführt, wie es heute in der Schule üblich ist, sondern im Verhältniszahlaspekt. Dadurch werden Zahlen als das Verhältnis zweier Größen gleicher Art aus der Anschauung definiert. Durch diese empirische Herleitung übernehmen die Zahlen die Eigenschaften der messbaren Größen.

Bei der Erweiterung des Zahlbereichs auf die ganzen Zahlen und auch später auf die Bruchzahlen nimmt Euler jeweils wieder Bezug zu den zugrundeliegenden Größen: „Da nun negative Zahlen als Schulden betrachtet werden können, insofern als die positiven den wirklichen Besitz angeben, kann man sagen, dass die negativen Zahlen weniger sind als nichts;" (Euler Teil 1 § 18). Er definiert somit die negativen Zahlen im Bezug auf empirische Größen. Durch die Grundrechenart der Division stößt Euler auf nicht ganzzahlige Verhältnisse, deren Existenz er nun zunächst durch Rückführung in den realen Gegenstandsbereich erklärt und rechtfertigt. „Man darf sich nur eine Strecke vorstellen, die 7 Fuß lang ist. Wohl niemand wird bezweifeln, das es möglich ist diese Strecke in drei gleiche Teile zu zerlegen und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Teiles zu machen" (Euler, Teil 1 § 68). Diese Erläuterung in dem Größenbereich der Längen reicht für Euler aus, um sich einen Begriff von einem Bruch zu machen und diesen den Grundrechenarten zu unterwerfen. Die Eigenschaften der Zahlen werden von den Größen abgeleitet und werden nicht definiert. Deutlich wird dies auch am Beispiel von Eulers Begründung der Dichtheit in den reellen Zahlen. Euler erläutert, dass zwischen zwei Zahlen unendlich viele Mittelzahlen liegen müssen am Beispiel einer Strecke innerhalb des Größenbereich der Längen auf. Dies stellt jedoch keine Veranschaulichung des Sachverhaltes dar, sondern liefert die Begründung für die Eigenschaft. Die Eigenschaften werden also durch die Bezugnahme auf den realen Gegenstandsbereich erklärt und begründet. Sie kommen den Zahlen auf „natürliche Weise" zu, indem sie ihnen auf Grund ihrer empirischen Herkunft übertragen werden.

Auch bei der Begründung von Regeln und Gesetzten nimmt Euler Bezug auf die Größenbereiche. So erläutert Euler die Regel, dass das Produkt einer negativer Zahlen mit einer positiven Zahl negativ sein muss, durch Schulden und verankert es im Größenbereich der Geldsumme. Eine formale algebraischer Herleitung erfolgt nicht.

2. Variable

Euler verwendet den Begriff der Variable selber nicht, sondern spricht von der veränderlichen Zahlgröße oder unbekannten Zahl. Buchstaben als Bezeichnung für Zahlen führt Euler schon bei der Erläuterung der Addition ein: „Da dies nun an und für sich klar ist, so bemerke man noch, dass auf allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, wie a, b, c, d usw. angedeutet werden." (Euler, Teil 1 § 10). Im Anschluss wendet er die Addition auf die

Buchstaben als Stellvertreter der Zahlen an. Bei der Betrachtung von Gleichungen tauchen die Buchstaben auch noch in einer weiteren Funktion auf. Neben den Buchstaben, welche gesuchte unbekannte Zahlen repräsentieren, führt Euler Buchstaben auch als gegebene unbekannte Zahlen ein. Der Umgang mit den Variablen wird in den vorgerechneten Beispielaufgaben deutlich: "[...] Nun ist die Frage wie viele Männer und Frauen sind es? Um diese Aufgabe zu lösen, setzt man die Zahl der Männer gleich x und sieht diese als bekannt an, d.h. man verfährt mit ihr, als ob man die Probe machen wollte, ob sie der Aufgabe genügt.“ (Euler, Teil 2 § 5) Variablen werden hier behandelt als wären sie konkrete Zahlen.

3. Imaginäre Zahlen

Eine gesonderte Stellung innerhalb Eulers Ausführungen nehmen die Imaginären Zahlen ein. Bei der Lösung von Gleichungen taucht die Quadratwurzel von negativen Zahlen auf natürliche Weise auf. Jedoch passen diese nicht in die von Euler gemachte Auffassung von Zahlen. Sondern er stellt fest: „Daher bedeuten $\sqrt{-1},\ \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4},$ usw. solche unmöglichen oder imaginären Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von Negativenzahlen angegeben werden. Von diesen behauptet man also mit vollem Recht, dass sie weder größer noch kleiner als nichts, ja nicht einmal nichts selbst sind, weshalb sie für unmöglich gehalten werden müssen.“ (Euler, Teil 1 § 144) Für Euler sind „mögliche Zahlen“ immer innerhalb einer Ordnungsrelation vergleichbar, da Euler Zahlen von empirischen Größen aus denkt, die zu einer „Vermehrung oder Verminderung“ fähig sein sollen. Die imaginären Zahlen können aber eben so nicht angeordnet werden. Dies bringt Euler bei der Besprechung der imaginären Zahlen als Lösung von Gleichungen auf den Punkt. Dort grenzt er diese von den irrationalen Lösungen ab, von denen immerhin eine Näherung möglich ist. „[…] während bei imaginären Ausdrücken, wie etwa $\sqrt{-5}$, auch keine Näherung stattfindet, da 100 davon ebensoweit entfernt ist wie 1 oder irgendeine andere Zahl“ (Euler, Teil 2 § 140). Ebenso wie die negative Abgrenzung zu den „möglichen Zahlen stellt diese Ausführung die Unmöglichkeit der Anordbarkeit der imaginären Zahlen heraus. Imaginäre Zahlen sind also nicht das Verhältnis von zwei Größen zueinander und beziehen sich höchstens indirekt auf einen empirischen Gegenstandsbereich.

Die Beschäftigung mit den imaginären Zahlen hielt Euler dennoch für wichtig. In seinem Lehrbuch spricht er sich explizit für eine Betrachtung von diesen aus und rechtfertigt sein Handeln somit vor dritten. Euler sah in den Imaginären Zahlen ein Indikator für die Unlösbarkeit der Aufgabe an. Dies zeigt deutlich, dass die Ergebnisse für Euler in der Realität möglich und sinnhaft sein mussten. Euler löst sein Problem im Umgang mit den imaginären Zahlen, indem er feststellt: „Obwohl aber diese Zahlen, wie z.B. $\sqrt{-4}$ ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, haben wir von ihnen doch einen hinlänglichen Begriff, da wir wissen, daß durch sie eine Zahl angedeutet wird, die mit sich selbst multipliziert als Produkt -4 hervorbringt; und dieser Begriff ist ausreichend, um diesen Zahlen den Rechenverfahren zu unterwerfen“ (Euler, Teil 1 § 145). Durch diese begriffliche Klärung war Euler in der Lage die gängigen Rechengesetze auch auf die imaginären Zahlen anzuwenden. Dies führte zu einem weiteren Grund für die Behandlung der unmöglichen Zahlen, da sie nach Anwendung weitere Operationen wieder zu möglichen Ergebnissen führen konnten. Euler ließ sie daher als Zwischenergebnisse zu.

4. Eulers Auffassung von Algebra

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Euler nicht definiert bzw. „setzt“ wie ein moderner Mathematiker, da sein Untersuchungsgegenstand aus der Empirie gegeben ist. Sein Vorgehen ist regelhaft und wird im Bezug zu einem realen Gegenstandsbereich gerechtfertigt. Frasers Ausspruch bezogen auf den Analyst im 18. Jahrhundert kann auch auf Euler im Bezug auf die Zahlen formuliert werden: „For the 18th century analyst, functions are things that are given ′out there`, in the same way that the natural scientist studies plants, insects or minerals, given in nature“ (Fraser, S. 262).

Im Gegensatz zu einer modernen formalen Auffassung von Algebra, bei welcher die Strukturen im Vordergrund stehen und deren Objekte rein abstrakt sind, ist Eulers Zielsetzung in seiner Algebra es Phänomene der Umwelt zu beschreiben und zu verstehen. Seine Objekte sind messbare Größen, bzw. das Verhältnis der Größen zueinander. Damit erfüllt Eulers Auffassung in seiner Algebra den Merkmalen einer empirisch-gegenständlichen Theorie in der Mathematik. Ein besonderer Augenmerk soll dabei noch auf dem Begriff der imaginären Zahlen gelegt werden. Diese entstehen durch die der Theorie eigenen Rechengesetze und besitzen kein Referenzobjekt. Jedoch kommt innen innerhalb Eulers Algebra eine Bedeutung zu und auch die Rechengesetze können wieder auf sie angewandt werden. Sie stellen somit ein theoretischer Begriff innerhalb Eulers Algebra dar. (Für eine umfangreichere Betrachtung siehe Reimann/Witzke, erscheint in Kürze)

Literatur

Euler, L. (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra, Stuttgart.

Fraser, C. G. (2005) Joseph Louis Lagrange, In: Landmarks writings in western mathematics 1640 – 1940, Amsterdam.

Sabine REINDL, Linz

Entwicklung und Anwendung mathematischer Lösungsstrategien – unter Betrachtung möglicher Determinanten

Zahlreiche Studien belegen die hohe Variabilität in der Anwendung von Lösungsstrategien. Manche Strategien werden aufgegeben, andere dafür aufgenommen. Zu jedem Zeitpunkt liegen aber mehrere verschiedene Strategien vor, aus denen adaptiv ausgewählt wird.

In diesem Beitrag wird zunächst ein Überblick über die Kategorisierung von Lösungsstrategien bei der Addition und Subtraktion sowie deren Einbettung in den aktuellen Mathematikunterricht gegeben. Im nächsten Schritt erfolgt eine auszugsweise Darstellung der Strategieentwicklung. Abschließend werden die Forschungsfragen, sowie das Forschungsdesign zu einem aktuell laufenden Forschungsprojekt vorgestellt.

1. Lösungsstrategien und Unterricht

Eine arithmetische Aufgabenstellung kann durch Rückgriff auf verschiedene Strategien gelöst werden. Bei der Addition und Subtraktion im Zahlenraum 20 wird grundsätzlich zwischen Faktenwissen, Zähl- und Ableitungsstrategien, auch als heuristische/operative Strategien oder Backup-Strategien bezeichnet, unterschieden. Vergrößert sich der Zahlenraum, so wird meist zwischen Schrittweisem und Stellenweisem Rechnen, sowie einer sich aus diesen beiden Formen ergebenden Mischform differenziert. Auch hier kann aber auch wieder auf bekannte Rechenstrategien aus dem Zahlenraum 20 rückgegriffen werden. (z.B. Padberg & Benz, 2011)

Im Zusammenhang mit der Strategieanwendung und auch deren Entdeckung wird immer wieder eine der Rechnerin/dem Rechner obliegende freie Wahlmöglichkeit (z.B. Siegler & Araya, 2005) gefordert. Dies impliziert, dass Strategien nicht obligatorisch vorgegeben werden können, sondern individuell in Konsens mit den persönlichen Rahmenbedingungen und Vorstellungen, sowie in Abhängigkeit mit der jeweiligen Situation gewählt werden. Diese grundlegende Entscheidungsfreiheit findet sich auch klar in aktuellen fachdidaktischen Forderungen (z.B. Padberg & Benz, 2011; Schütte, 2008; Spiegel & Selter, 2010). Vom Konstruktivismus getragen, stellt das Rechnen einen individuellen Vorgang dar, der auf eigenen Erfahrungen und Vorkenntnissen basiert. Diese Forderungen ziehen im Mathematikunterricht aber weitere Veränderungen mit sich. So wird die Lehrperson zunehmend zum Lernbegleiter und Berater. Fehler werden als Lernchance und als etwas Positives wahrgenommen. Das Schulbuch, häufig ein zentrales Arbeitsmittel im Unterricht, sollte durch ganzheitliche stoffliche Bearbeitungen das Entdecken von heuristischen und operativen Zusammenhängen fördern und somit eventuell auch der absinkenden Lernfreude dem Fach Mathematik gegenüber (Reindl & Hascher, 2013) entgegenwirken.

2. Strategieentwicklung und -anwendung

Kindliche Lösungsstrategien bei arithmetischen Aufgabenstellungen rückten zunehmend in den 1960iger Jahren in den Forschungsfokus (Siegler & Shipley, 1995). So finden sich zu diesem Thema mit Beginn der 70iger bis in die 90iger Jahre des letzten Jahrhunderts, vor allem aus dem angloamerikanischen Raum, eine Vielzahl an Studien und Publikationen. Basierten die ersten Forschungsstudien vorwiegend auf chronometrisch erhobenen Daten (z.B. Ashcraft & Fireman, 1982; Groen & Parkman, 1972), verlagerte sich später durch Beobachtungen, Videoaufzeichnungen und durch die konkrete Befragung der Kinder (z.B. Siegler 1989) der Fokus stärker auf das Tun und Denken des Kindes. Auch im deutschsprachigen Raum finden sich einige Studien zur Strategieverwendung von Grundschulkindern (z.B. Benz, 2007; Fast, 2008; Gaidoschik, 2010; Selter, 2000;).

All diese zeigen, dass Kinder zu jedem Zeitpunkt über verschiedene Lösungsstrategien verfügen, aus denen anscheinend je nach Aufgabenstellung und Situation adaptiv ausgewählt wird. Wie wird aber diese Entscheidung getroffen? Klärungen dazu bieten beispielsweise das \`network retrieval model\` von Ashcraft (z.B. 1992) oder das \`network interference model\` von Campbell (z.B. 1987). Beide Netzwerkmodelle sehen die Entscheidung für die Nennung eines bestimmten Ergebnisses in der Assoziationsstärke zwischen den Kontenpunkten begründet. Campbell (1987) hebt in seinem Modell noch die Knotenstärke selbst und das Fehlerwissen in Form des \`error-priming\` Effekts hervor. Jedoch liefern Netzwerkmodelle nur Erklärungen hinsichtlich der Entscheidung für ein Faktenwissen, Ableitungs- oder Zählstrategien bleiben dabei unberücksichtigt. Dies beziehen Siegler und Kollegen (z.B. Shrager & Siegler, 1998) im \`strategy choice and discovery simulation\` Modell (SCADS) ein. Damit wird nicht nur ein Erklärungsmodell zur grundsätzlichen Strategieauswahl geliefert, sondern auch die Einbindung neuer Strategien angedacht. Neben diesem Strategieentscheidungsmodell entwickelte Siegler (z.B. 2001) die Grundüberlegungen zum \`overlapping waves approach\`, meist übersetzt mit \`überlappender Wellenansatz\`(Siegler, 2001, S. 121). Dem zufolge nimmt die Verwendung einer bestimmten Strategie wie ein Wellengang zu und ab (horizontale Betrachtung). Zu jedem Zeitpunkt (vertikale Betrachtung) stehen aber immer mehrere verschiedene Strategien zur Auswahl.

Die Entdeckung einer neuen Strategie hat jedoch noch nicht deren unmittelbaren favorisierten Einsatz zur Folge. Viel mehr zeigen sich Veränderungen erst allmählich. Gleichzeitig ergibt sich durch die eventuell vorhandene Strategievielfalt eine hohe Variabilität in deren Verwendung. Dies führt auch dazu, dass Kinder identische Aufgabe zu zwei verschiedenen Zeitpunkten mit unterschiedlichen Strategien lösen.

3. Forschungsfrage und Forschungsdesign

Gaidoschik (2010) zeigt in seiner Studie 6 Typen von Strategiepräferenzen am Ende der 1. Schulstufe. Benz gibt einen Einblick in das Rechnen von Kindern der 2. Schulstufe und Fast (2008) sowie Selter (2000) erbringen dies für die Grundstufe 2. Was passiert aber nun im Übergang vom kleinen (z.B. ZR 20) in den größeren Zahlenraum (z.B. ZR 100 oder 1000)? Finden sich in diesen großen Rechnungen die bereits im kleinen Zahlenraum favorisierten Lösungsstrategien wieder? Und vor allem, nutzen die Kinder erworbene Strategien später bei der Lösung von unbekannten Aufgabenstellungen? Unbeachtet blieb auch noch, welche Rolle dabei zum Beispiel das Schulbuch einnimmt und ob sich zwischen den „Strategieanwendertypen" Unterschiede in der emotionalen Einstellung zum Schulfach Mathematik ergeben.

Aus all diesen Überlegungen ergeben sich folgende Forschungsfragen:

1) Welche Rechenstrategien nutzen Grundschulkinder von der 2. bis in die 3. Schulstufe und welche Einflussfaktoren lassen sich dabei bestimmen?

2) Auf welche Strategien greift das Kind in der 3. Schulstufe bei der Lösung neuer (unbekannter) Aufgaben zurück?

Wie im Kapitel 2 dargestellt, unterliegt die Strategieverwendung einer sich ständig wandelnden Variabilität. Folglich müssen Kinder über einen längeren Zeitraum in ihrem Lösungsverhalten begleitet werden, um darüber Aussagen treffen zu können. Die formulierten Forschungsfragen werden daher empirisch im Zuge einer Längsschnittstudie mit vier Messzeitpunkten (3/12, 6/12, 11/12 und 03/13) untersucht. In den teilnehmenden acht Grundschulklassen der 2. (bzw. 3.) Schulstufe (N=156) wird jeweils eine Gesamterhebung durchgeführt. Zu jedem Messzeitpunkt löst jedes Kind in Einzelinterviews mehrere Additions- und Subtraktionsaufgaben (ZR 20, 100 bzw. 1000) und erklärt dabei ihr/sein Lösungsvorgehen. Vor den Interviews füllten die Kinder im Klassenverband einen Fragebogen zur emotionalen Befindlichkeit gegenüber dem Fach Mathematik und der Fehlerhaltung aus. Zwischen den Erhebungszeitpunkten bearbeiteten die Kinder zudem 3 Lerntagebücher, welche einen weiteren Einblick in ihr Lösungsverhalten bieten. Weiters erfolgten eine qualitative Inhaltsanalyse, der in den jeweiligen Schulklassen verwendeten Mathematikschulbüchern, sowie teilstrukturierte Leitfadeninterviews mit den Klassenlehrerinnen.

4. Ausblick

Mit Ende März 2013 ist die grundsätzliche Datenerhebung abgeschlossen. Zur Auswertung der in großer Menge vorliegender Daten wurde ein Kodierleitfaden erstellt, mit dem nun schrittweise die Kodierung, Eingabe und in weiterer Folge die Auswertung erfolgt.

Literatur

Ashcraft, M. (1992): Cognitive arithmetic: A review of data and theory. In: Cognition, 44, 75-106.

Ashcraft, M. & Fireman, B. (1982): Mental Addition in Third, Fourth, and Sixth Graders. In: Journal of Experimental child Psychology, 3, 216-234.

Benz, C. (2007): Die Entwicklung der Rechenstrategien bei Aufgaben des Typs ZE+-ZE im Verlauf des 2. Schuljahres. In: Journal für Mathematikdidaktik, 28, 49-73.

Campbell, J. (1987): Network Interference and mental multiplication. In: Memory & Cognition, 15 (4), 349-364.

Fast, M. (2008): Entwicklung und Verlauf individueller Rechenstrategien bei Volksschulkindern. [www-Dokument] Erreichbar unter: https://www.imst.ac.at/imst-wiki/images/b/b3/995_Langfassung_Fast.pdf (Datum des Zugriffs: 30.01.2013)

Gaidoschik, M. (2010): Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Frankfurt: Peter Lang.

Groen, G. & Parkman, J. (1972): Chronometric Analysis of simple addition. In: Psychological Review, 79 (4), 329-343.

Padberg, F. & Benz, C. (2011): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum.

Reindl, S. & Hascher, T. (2013). Emotionen im Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Unterrichtswissenschaft, 2 (angenommen).

Schütte, S. (2008): Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. München: Oldenbourg.

Selter, C. (2000): Vorgehensweise von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im ZR bis 1000. In: Journal für Mathematik Didaktik, 2, 227-258.

Shrager, J. & Siegler, R. (1998): A Model of Children´s Strategy Choices and Strategey Discoveries. In: American Psychological Society, 9 (5), 405-410.

Siegler, R. (2001). Das Denken von Kindern. München, Wien: Oldenbourg.

Siegler, R. (1989): Hazards of mental chronometry: An example from children´s subtraction. In: Journal of Educational Psychology, 81, 497-506.

Siegler, R. & Araya, R. (2005): A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. In: R.V. Kail (Ed.). Advances in child development and behavior. Vol. 33 (1-42). Oxford, UK: Elsevier.

Siegler, R. & Shipley, C. (1995): Variation, selection, and cognitive change. In: T. Simon & G. Halford (Eds.), Developing cognitive competence (31-76). Hilsdale, NJ: Erlbaum.

Simone REINHOLD, Braunschweig

Diagnostische Kompetenzen von Grundschullehramtsstudierenden in praxisnahen Veranstaltungen zum Anfangsunterricht

1. FL!P: Forschendes Lernen im Praxiskontext

Im Lehrprojekt **FL!P** wird das Prinzip des Forschenden Lernens zur (mathematikdidaktischen) Professionalisierung künftiger Lehrkräfte aufgegriffen. Künftige Grundschullehrkräfte sollen dabei in die Lage versetzt werden „(…) fachdidaktische Konzepte und empirische Befunde mathematikbezogener Lehr-Lernforschung [zu] nutzen, um Denkwege und Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu analysieren (…)“ (KMK 2008, 30). Das Vorbereiten, Durchführen und Analysieren mathematischer Diagnosegespräche („klinischer Interviews“) gilt in dieser Hinsicht als etablierte Form qualitativ-forschenden Lernens in der mathematikdidaktischen Lehreraus- und -weiterbildung (z.B. Wollring 1999; Peter-Koop & Prediger 2005; Selter et al. 2011; Clarke et al. 2011).

Das praxisnahe Lehrprojekt **FL!P** zeichnet sich durch eine institutionenübergreifende, inhalts- und methodenbezogenen Kooperation von Schule und Hochschule aus: Die Schulpraxis bietet dem wissenschaftlichen Arbeiten der Studierenden ein ertragreiches Feld, authentische Einblicke in die Belange des mathematischen Anfangsunterrichts und interessierte Adressaten für die Ergebnisse ihrer empirischen Erkundungen. Im Gegenzug sind die beteiligten Lehrkräfte Nutznießer der gewonnenen Forschungsergebnisse. Eine auf erste Informationen und inhaltliche Absprachen mit den beteiligten Lehrkräften folgende Seminargestaltung gliedert sich dabei in drei Sequenzen: Im Rahmen einer jeweils mehrtägigen Blockveranstaltung vor Semesterbeginn erfolgt eine vorbereitende inhaltliche Einführung in zentrale Themen des Anfangsunterrichts sowie eine eingehende Einführung in die Konzeption und Durchführung klinischer Interviews. In der ersten Hälfte des Semesters führen die Studierenden die konzipierten Interviews in der Schule durch, reflektieren diese mit den beteiligten Lehrkräften und entwickeln gemeinsam Förderideen („Förderkonferenz“). In der zweiten Semesterhälfte werden Ergebnisse der diagnostischen Erkundungen im Seminar diskutiert und in Fallstudien ausgearbeitet, die wiederum den kooperierenden Lehrkräften zur Verfügung gestellt werden.

Im Mittelpunkt der Forschungsbegleitung des Lehrprojekts **FL!P** steht seit Beginn der Kooperation im Jahr 2011 die Frage, inwiefern die intensive Zusammenarbeit mit der Schulpraxis dazu beiträgt, diagnostische Kompetenzen bei den beteiligten Studierenden zu entwickeln.

2. Perspektiven auf das Konstrukt der Diagnosekompetenz

In Studien zur diagnostischen Kompetenz von Lehrkräften wird vielfach untersucht, inwieweit diese fähig sind, zutreffende Einschätzungen von Schülermerkmalen abzugeben (vgl. Südkamp et al. 2012). In einem erweiterten, auf den pädagogischen Alltag bezogenen Verständnis reicht diagnostische Kompetenz über diese Urteilsgenauigkeit hinaus, beinhaltet auch unsystematisch gewonnene Einschätzungen und wird als mehrdimensionales Konstrukt angesehen (z.B. Helmke 2009, Karst 2012). Verschiedene Prozessmodelle greifen vielfältige Interdependenzen sowie mögliche Verläufe diagnostischer Aktivität auf und heben z.T. auch den zirkulären Prozess des Diagnostizierens als Tätigkeit hervor (Klug et al. 2011; 2013). Mathematikdidaktische Positionen spezifizieren die innerhalb dieser diagnostischen Makroprozesse zu leistenden Anforderungen und verweisen beispielsweise darauf, dass es sich bei mathematikdidaktischen diagnostischen Kompetenzen vornehmlich um die Fähigkeit handelt „(…) sich mit mathematischen Eigenproduktionen von Kindern auseinanderzusetzen“ (Wollring 1999, 272). Fachbezogenes Interesse an qualitativ differierenden mathematischen Denkweisen von Kindern und eine sensible Sicht auf solche Unterschiede sollten diese Auseinandersetzung mit kindlichen Lern- und Lösungsprozessen prägen (vgl. Selter et al. 2011). Auf welche Weise derartige diagnostische Mikroprozesse gestaltet werden, welche Diagnosestrategien also während des Diagnostizierens genutzt werden, ist jedoch bislang kaum untersucht (vgl. Marx 2011). Diagnostische Kompetenz sollte aber auch das Wissen um Facetten mathematikdidaktisch diagnostizierenden Vorgehens und die Verfügbarkeit von Diagnosestrategien in der Begegnung mit kindlichen Lernprozessen und Eigenproduktionen umfassen.

Hier setzt das Projekt ***diagnose:pro*** mit einem qualitativ ausgerichteten Forschungsinteresse an: Wie diagnostizieren Studierende? Welche Elemente kennzeichnen die Strategien, die sie im Verlauf eines mathematischen Diagnosegesprächs einsetzen? Welche Strategietypen lassen sich identifizieren und inwiefern wird flexibel zwischen diesen Strategien variiert?

3. Zur qualitativen Erhebung diagnostischer Kompetenzen

Im Rahmen einer Vorstudie, die sich von Oktober 2011 bis Januar 2013 auf die Arbeit mit Studierenden in vier Seminaren zum Anfangsunterricht erstreckte, wurde der Einsatz von Videovignetten erprobt. Diese enthielten Szenen aus diagnostischen Interviews mit Schulanfängern und sollten u.a. zu schriftlich festgehaltenen Überlegungen hinsichtlich des Entwerfens, Durchführens und Reflektierens diagnostischer Situationen anregen. In einem prozessorientiert-qualitativen Verständnis diagnostischer Kompetenz erfassen die dabei entstandenen „Produkte“ jedoch nur bedingt das diagnostizierende Vorgehen im engeren Sinne. Mit einem besonderen Fokus auf die beim Diagnostizieren ablaufenden „Prozesse“ wurden daher auch Gespräche zwischen zwei bis drei Studierenden aufgezeichnet, die ein mit einem Kind durchgeführtes Interview auswerten (vgl. Bräuning & Steinbring 2011; Marx 2011). Die dabei erhobenen Video- und Audiodaten aus zwei Veranstaltungen werden im Sinne empirisch begründeter Theoriebildung kategorienentwickelnd interpretiert, um Elemente mathematikdidaktischer Diagnosestrategien bei Studierenden zu rekonstruieren.

4. Erste Ergebnisse aus der Analyse diagnostischer Prozesse

Innerhalb der Diagnoseprozesse von Studierenden, die im Rahmen des Projekts ***diagnose:pro*** analysiert werden, zeigt sich, dass bereits diese Novizen mathematikdidaktisch fokussierend Daten sammeln, Relevantes identifizieren und (bewusst) kontrastieren. Im Sinne qualitativer Datenanalyse gelangen sie zu teils fundierten Interpretationen und handeln alternative Deutungen aus. Dies ähnelt einem bereits von Marx (2011, 335) beschriebenen „Wechselspiel aus Hypothesengenerierung und Hypothesenprüfung“, das in den bislang analysierten Diagnoseverläufen innerhalb eines mehrschrittigen Vorgehens (Daten sammeln; Daten verarbeiten; Daten bewerten und interpretieren) angesiedelt ist. Hervorzuheben ist aber, dass diese Prozesse vielfach einen ausgeprägt rekursiven Charakter haben: So werden von einzelnen Studierenden innerhalb einer interpretativen Phase bewusst (ergänzende) Daten zur Kontrastierung herangezogen oder auch eigene Kodierungen für Beobachtetes generiert, während anderen Studierenden Strategieelemente dieser Art (noch) nicht zur Verfügung stehen.

5. Perspektiven des Projekts *diagnose:pro*

Neben der Erhebung von Daten, die in der Hauptstudie aus reflexiven Einzelinterviews unmittelbar nach einem eigenen mathematischen Diagnosegespräch gewonnen werden, wird nunmehr verstärkt untersucht, welche mathematikspezifischen Anteile in den Diagnosestrategien wirksam werden. Zudem werden Methoden erarbeitet und erprobt, die tragfähige Strategien ins Bewusstsein rücken und zum Gegenstand der Ausbildung machen.

In die gegenwärtig andauernden Analysen werden auch Befunde zu kognitiven Diagnosestrategien aus anderen Disziplinen einbezogen, die beispielsweise darauf hinweisen, dass sich Diagnoseprozesse verschiedener Individuen vor allem in der Qualität der Suche nach zu beachtenden Aspekten unterscheiden (topographic, functional, symptomatic search; Cegarra & Hoc 2006). Prozessanalysen aus der sozialen Kognitionsforschung bieten zudem Hinweise darauf, dass (erfahrene) Lehrkräfte flexibel zwischen kategorienbasierter und merkmalsgeleiteter Informationsverarbeitung wechseln, wenn sie aufgefordert sind, sich einen Eindruck von einem Schüler zu verschaffen (Krolak-Schwerdt et al. 2009).

Literatur

Bräuning, K. & Steinbring, H. (2011). Communicative characteristics of teachers' mathematical talk with children: from knowledge transfer to knowledge investigation. *ZDM* 43(2011), S. 927-939.

Cegarra, J. & Hoc, J.M. (2006). Cognitive styles as an explanation of experts' individual differences: A case study in computer-assisted troubleshooting diagnosis. *International Journal of Human- Computer Studies* 64(2006), 123-136.

Clarke, D.; Clarke, B. & Roche, A. (2011). Building teachers' expertise in understanding, assessing and developing children' s mathematical thinking: the power of task based, one-to-one assessment interviews. *ZDM* 43(2011), 901-913.

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze: Klett-Kallmeyer.

Karst, K. (2012). *Kompetenzmodellierung des diagnostischen Urteils von Grundschullehrern*. Münster: Waxmann.

Klug, J. (2011). *Modeling and training a new concept of teachers' diagnostic competence*. Darmstadt: TU Darmstadt.

Klug, J.; Bruder, S.; Kelava, A.; Spiel, Ch.; Schmitz, B. (2013). Diagnostic competence of teachers: A process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. *Teaching and Teacher Education* 30(2013), 38-46.

KMK (2008): Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung, Beschluss der KMK vom 16.10.2008.

Krolak-Schwerdt, S.; Böhmer, M. & Gräsel, C. (2009). Verarbeitung von schülerbezogener Information als zielgeleiteter Prozess. Der Lehrer als „flexibler Denker". *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 23 (3-4), S. 175-186.

Marx, A. (2011). Angehende Lehrpersonen in mathematikdidaktischen Diagnosesituationen – Vorgehensweisen und Ziele. In K. Eilerts et al. (Hrsg.), *Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung*. (S. 323-338), Münster: LIT.

Peter-Koop, A. und Prediger, S. (2005). Dimensionen, Perspektiven und Projekte mathematikdidaktischer Handlungsforschung. In E. Eckert und W. Fichten (Hrsg.): *Schulbegleitungsforschung: Erwartungen – Ergebnisse – Wirkungen* (S. 185-201), Münster: Waxmann.

Selter, Ch. et al. (2011). Mathematikdidaktische diagnostische Kompetenzen erwerben – Konzeptionelles und Beispiele aus dem KIRA-Projekt. In K. Eilerts et al. (Hrsg.), *Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung* (S. 307-321), Münster: LIT.

Südkamp, A.; Kaiser, J. & Möller, J. (2012). Accuracy of Teachers' Judgements of Students' Academic Achievement: A Meta-Analysis. *Journal of Educational Psychology* 104(3), 743-752.

Wollring, B. (1999). Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In Ch. Selter & G. Walther (Hrsg.). *Mathematikdidaktik als design science* (S. 270-276), Leipzig u.a.: Klett.

Martin REINOLD, Jan WESSEL, Dortmund

Mit „mathematisch begabten“ Kindern rechnen

Die Forderung nach individueller Förderung der Schülerinnen und Schüler ist ein „allgemein akzeptiertes Hauptanliegen der Grundschule“ (Käpnick, 2001, S. 5) und wird so auch explizit im Lehrplan für Mathematik an Grundschulen des Landes Nordrhein-Westfalen gefordert (vgl. MSW, 2008). Dabei richtet sich die Aufmerksamkeit der Lehrkräfte oftmals auf die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler. Damit einhergehend kann es den Lehrkräften an Kapazitäten mangeln, um auch die Leistungsstärkeren individuell zu fördern. Nicht selten fehlt es aber auch an Wissen über Merkmale und Erscheinungsformen von mathematischer Begabung sowie geeigneten Fördermaßnahmen für mathematisch begabte Kinder (vgl. Peter-Koop, 2002).

Vor diesem Hintergrund ist im Rahmen des Projekts PIK AS, in Zusammenarbeit mit dem DZLM (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik), ein Fortbildungs-Workshop zu diesem Thema mit dem Titel „Mit ‚mathematisch begabten‘ Kindern rechnen“ konzipiert worden. Im Folgenden werden zentrale Inhalte, theoretische Hintergründe sowie fortbildungsdidaktische Ziele des Workshops vorgestellt. Die Darstellung folgt dabei der Gliederung des Fortbildungsworkshops.

1. Einstieg

Zu Beginn der Fortbildung steht ein videografiertes Fallbeispiel der Schülerin Helena im Zentrum. Dabei wird die Drittklässlerin im Rahmen des Themas „figurierte Zahlen“ aufgefordert, die 30. Dreieckszahl zu bestimmen. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine sogenannte „Indikatoraufgabe“, die Käpnick (2001) zur Diagnostik mathematisch begabter Kinder empfiehlt. In Vorbereitung auf die Analyse von Helenas Lösungsweg (vgl. Abb. 1) bearbeiten die teilnehmenden Lehrkräfte zunächst selbst die Aufgabe, um so die Anforderungen der gestellten Aufgabe nachvollziehen zu können.

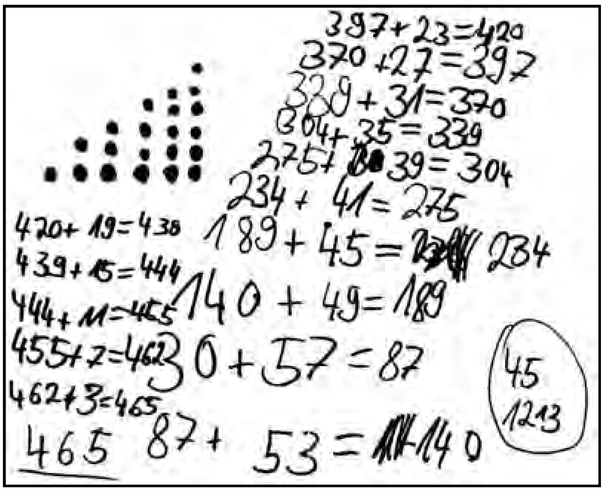


Abbildung 1: Helenas Lösungsweg

Anschließend beobachten die Teilnehmenden die Schülerin bei der Aufgabenbearbeitung mit dem Auftrag, Helenas mathematische Begabung einzuschätzen und Kriterien für die Diagnose von mathematischer Begabung herauszuarbeiten. Helenas Lösung bietet dabei Gesprächsanlässe, da sie zwar geschickt und ausdauernd das richtige Ergebnis bestimmt, aber auch einige - sich aufhebende - Rechenfehler begeht. Diese Aktivität hat die Zielsetzung, einen Einblick in das Begabungsverständnis der teilnehmenden Lehrkräfte zu erhalten und einen ersten Austausch über Merkmale mathematischer Begabung anzuregen. Nach dieser ersten praktischen Auseinandersetzung, die viele Fragen bezüglich des Begriffs der Begabung aufwirft, folgen im Fortbildungsverlauf theoretische Überlegungen zur Begriffsklärung.

2. Begriffsklärung

Der Begriff der Begabung erscheint nach einem Blick in die Literatur als ein sehr komplexer, für den bisher noch keine „allgemein anerkannte [...] Definition" (Peter-Koop et al., 2002, S.7) existiert. In der Fortbildung wird zunächst ein kurzer Überblick über die in der Begabungsdiskussion verwendeten Termini gegeben. Anschließend werden zusammenfassend verschiedene Perspektiven auf die Entstehung und den Umfang von Begabung eingenommen. Dabei sehen die Autoren nicht nur personenbezogene Merkmale, sondern ein komplexes Zusammenspiel von umwelt- und personenbezogenen Merkmalen als Ursache für die Entstehung von Begabung an (vgl. Bardy & Hrzán, 2005). Gleichzeitig liegt der Fortbildung das Verständnis zu Grunde, dass sich die Begabung nicht auf die gesamte Leistungsdisposition eines Lernenden beziehen muss. Vielmehr kann sich das besondere Fähigkeitspotential auch nur auf einen bestimmten Bereich beziehen. Im Workshop wird daher der Terminus der „mathematischen Begabung" verwendet.

3. Diagnose mathematischer Begabung

Um auch mathematisch begabte Kinder - wie im Lehrplan gefordert - individuell zu fördern, müssen diese zunächst im Unterricht erkannt werden. Dazu bedarf es Kriterien, die Käpnick (2001) als mathematikspezifische Begabungsmerkmale beschreibt. Diese Begabungsmerkmale umfassen Punkte wie die Fähigkeit zum Strukturieren, zum Wechsel von Repräsentationsebenen, zum Transfer und zur Nutzung gegebener Strukturen. Weiterhin werden mathematische Sensibilität und die Originalität und Phantasie in Lösungsprozessen in diesem Zusammenhang genannt.

In der Fortbildung werden diese Merkmale genutzt, um Helenas mögliche Begabung vor diesem Hintergrund zu analysieren. So erkennt und nutzt sie zum Beispiel die gegebenen Strukturen der Dreieckszahlen zur Orientierung in der Additionsfolge ihres Lösungsweges. Auch der Wechsel der Repräsentationsebene - von der ikonisch dargebotenen Aufgabenstellung zur symbolischen Darstellung ihres Lösungsweges - bereitet ihr keine Probleme.

Für eine gelungene Diagnose muss ein solcher Merkmalskatalog auf Seiten der Lehrkräfte freilich bekannt sein. Gleichzeitig sollten die Lehrkräfte den Lernenden mittels ergiebiger und offener Aufgaben die Möglichkeit geben, ihre Kompetenzen zu zeigen. So wird die Diagnose zu einem unterrichtsbegleitenden Prozess, der nicht allein auf Momentaufnahmen reduziert werden kann (vgl. Bardy & Hrzán, 2005). Im Rahmen der Fortbildung wird daher herausgestellt, dass der Ausschnitt aus Helenas Aufgabenbearbeitung zwar erste Anhaltspunkte liefern kann, er aber keine Entscheidung bezüglich ihrer Begabung zulässt.

Im Fortbildungsverlauf schließt sich an diese Phase natürlich die Frage nach der Förderung mathematisch begabter Kinder an.

4. Förderung mathematisch begabter Kinder

In der Literatur werden die Förderansätze „acceleration“ (Beschleunigung) und „enrichment“ (Anreicherung) (vgl. Bardy & Hrzán, 2005) beschrieben, wobei der Ansatz „enrichment“ sowohl qualitativ als auch quantitativ verstanden werden kann.

Um aus diesen Konzepten Vorgehensweisen für die unterrichtspraktische Förderung mathematisch Begabter abzuleiten, werden die Förderansätze in der Fortbildung mit den Schlagworten „Mehr“ (enrichtment-quantitativ), „Eher“ (acceleration) und „Tiefer“ (enrichtment-qualitativ) umschrieben.

Der Ansatz „Mehr“ beschreibt die Förderung der begabten Kinder mittels zusätzlicher Aufgaben, die nicht im direkten inhaltlichen Zusammenhang zu den aktuellen Lerninhalten der übrigen Lerngruppe stehen. Es handelt sich dabei tatsächlich um ein „Mehr“ an Inhalten und Aufgaben, die jedoch nicht in einer sinnlosen mathematischen Beschäftigung münden sollte.

Der Ansatz „Eher“ bezieht sich auf die Auseinandersetzung der begabten Schülerinnen und Schüler mit Aufgaben, die Kompetenzerwartungen höherer Klassenstufen ansprechen. Dieses Vorziehen von Unterrichtsinhalten kann durch gezieltes Einsetzten von Aufgaben, zum Beispiel aus Lehrwerken höherer Jahrgänge, geschehen. Aber auch der Einsatz offener Aufgaben ermöglicht eine solche Förderung, da den Kindern die Gelegenheit gegeben wird, von sich aus Kompetenzerwartungen höherer Klassenstufen zu erfüllen (z.B. Aufgaben in höheren Zahlenräumen zu bearbeiten).

Der dritte - von den Autoren favorisierte Ansatz - „Tiefer“ sieht eine Auseinandersetzung aller Kinder einer Lerngruppe mit demselben Inhalt vor. Für ein solches Vorgehen ist es notwendig, ergiebige Aufgaben einzusetzen, die eine Bearbeitung auf unterschiedlichen Anforderungsniveaus (vgl. KMK, 2005) nach dem Prinzip der natürlichen Differenzierung ermöglichen. Diese Förderung an einem gemeinsamen Lerninhalt bietet den Vorteil, dass der fachliche Austausch mit den anderen Lernenden ermöglicht wird und die mathematisch begabten Kinder in der Lerngruppe integriert bleiben, während sie „tiefer“ in den Lerninhalt vordringen.

Nach der Erörterung dieser Förderansätze diskutieren die Teilnehmenden abschließend einen Vorschlag für die weitere Förderung Helenas anhand einiger Arbeitsaufträge zu dem Themengebiet der figurierten Zahlen.

5. Abschließende Bemerkung

Das Ziel der vorgestellten Fortbildung ist es, sowohl theoretische Erkenntnisse als auch praktische Anregungen miteinander zu verbinden. So werden beispielsweise die vorgestellten Förderansätze durch konkrete Unterrichtsbeispiele illustriert. Da die Unterstützung mit praktischen Unterrichtsanregungen für den Fortbildungserfolg von großer Bedeutung ist (vgl. Lipowsky, 2010), können diese auf der Projektwebsite www.pikas.tu-dortmund.de heruntergeladen werden. Auch die vollständigen Unterlagen zur Fortbildung, welche an dieser Stelle nur in Auszügen dargestellt werden konnte, sind dort zu finden.

Literatur

Bardy, P., Hrzán, J. (2005): Aufgaben für kleine Mathematiker. Mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Käpnick, F. (2001): Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Sj. Berlin: Volk und Wissen Verlag.

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. München: Wolters Kluwer.

Lipowsky, F. (2010): Lernen im Beruf. Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In: Müller, F. et al. (Hrsg.): Lehrerinnen und Lehrer lernen. Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung. Münster: Waxmann. S. 51-70.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008): Lehrplan Mathematik an Grundschulen. Frechen: 1. Aufl. Ritterbach Verlag.

Peter-Koop, A. (2002): Leistungsstarke Kinder im Mathematikunterricht – (k)ein Problem?. In: Die Grundschulzeitschrift, 160, 6-7.

Peter-Koop, A., Fischer, Ch., Begic, A. (2002): Finden und Fördern mathematisch besonders begabter Grundschulkinder. In Peter-Koop, A., Sorger, P. (Hrsg.): Mathematisch besonders begabte Kinder als schulische Herausforderung. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Xenia-Rosemarie REIT, Matthias LUDWIG, Frankfurt

Wege zu theoretisch fundierten Testaufgaben zur Modellierungskompetenz

Angestoßen durch internationale Vergleichsstudien wie PISA (Programme for International Student Assessment) oder TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) hat sich die Kompetenzmessung als Evaluationsinstrument der Entwicklung von Fähigkeiten der Schüler und Schülerinnen in verschiedensten Anforderungsbereichen im deutschen Bildungssystem etabliert (Klieme, Leutner, & Kenk, 2010). Allerdings stellt die theoretische, als auch die methodische Erfassung gerade des mathematischen Modellierens, das aus mehreren Teilkompetenzen besteht, immer noch eine große Herausforderung dar. Auch im Bereich der mathematikdidaktischen Forschung wurden und werden die Begriffe „mathematisches Modellieren" und „Modellierungskompetenz" häufig und kontrovers diskutiert. Unter anderem stand dabei die Frage wie man Modellierungskompetenz messen kann und, als eine Folge daraus, wie man sie verbessern kann, oft im Fokus des Interesses (z.B. Blomhøj & Jensen, 2003; Kaiser, Blum, Borromeo Ferri, & Stillman, 2011). In verschiedensten Studien wurden die Auswirkungen der jeweils entwickelten Lernumgebungen auf das mathematische Modellieren zumeist durch Multiple-Choice Fragen getestet, die allzu oft nur bestimmte Teilkompetenzen des mathematischen Modellierens abdecken (z.B. Zöttl, Ufer, & Reiss, 2011). In Folge dessen, ist das Instrument zur Evaluation der Modellierungskompetenz stark auf die vom Treatment geförderten Teilkompetenzen reduziert, was eine globale und unabhängige Anwendung des jeweiligen Tests unmöglich macht.

1. Projektdesign

Das Ziel des Projekts MokiMaS (Modellierungskompetenz im Mathematikunterricht der Sekundarstufe) ist die Entwicklung eines Modellierungskompetenztests für Schülerinnen und Schüler der 9. Jahrgangsstufe. Als Theoriebasis soll dabei ein Kompetenzmodell fungieren, das der holistischen Struktur des mathematischen Modellierens Rechnung trägt. Dazu werden Modellierungsaufgaben nach folgenden Kriterien entwickelt:

- Authentischer Kontext (Maaß, 2007)
- Realistische Zahlenwerte (Müller, Leiß, Schukajlow, Blum, & Messner, 2007)
- Problemlösecharakter (Maaß, 2007)
- Lebensnahes Frageformat

- Offenheit im Sinne einer Anwendbarkeit verschiedener mathematischer Modelle → großer Lösungsraum

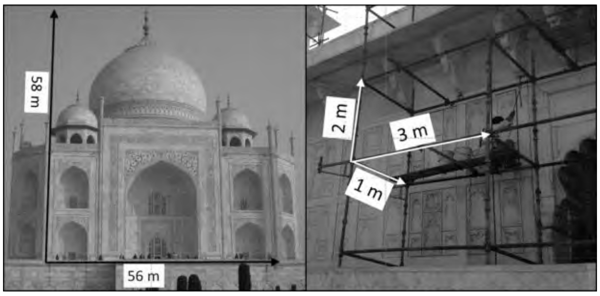
Neben der Vorgabe authentische Kontexte zu verwenden, soll auch die Fragestellung nah an der Lebenswirklichkeit der Schüler sein oder zumindest eine realistische Frage aufgreifen, wie sie so auch in der Realität auftreten könnte. Die Offenheit der Modellierungsaufgaben soll weniger in fehlenden Daten, also im Abschätzen von Größen, begründet sein, als vielmehr in der Auswahlmöglichkeit verschiedener mathematischer Modelle. Damit sollen die Schülerinnen und Schüler breite Möglichkeiten haben die Aufgabe zu lösen. Das trägt einerseits dem eigentlichen Sinn von Modellierungsaufgaben Rechnung, als auch der Tatsache einer eindeutigeren Bewertungsmöglichkeit im Sinne eines kleineren Ergebnisintervalls. Schlussendlich sollen so drei bis vier Booklets mit je drei Modellierungsaufgaben entwickelt werden, mit denen es dann möglich ist die mathematische Modellierungsfähigkeit zu evaluieren.

2. Ergebnisse einer ersten Pilotierung

Die ersten drei Modellierungsaufgaben (siehe Fig. 1) wurden mit 54 Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Jahrgangsstufe 9 getestet.

Das Zähneputzen lernt man schon im Kleinkindalter und gehört zu den alltäglichen Dingen eines Jeden. Doch für wie viele Tage reicht die Zahnpasta in einer Tube eigentlich?
Stelle eine allgemeine Formel auf, mit der sich berechnen lässt, für wie viele Tage eine Zahnpastatube reicht!

Im Stadtgebiet soll ein neues Stadion (ein reines Fußballstadion) gebaut werden, was ca. 75.000 sitzende Zuschauer aufnehmen kann. Bei der Planung muss eine Sitzfläche mit einer Breite und Länge von 60cm berücksichtigt werden. In einem weiteren Schritt muss jetzt geklärt werden, wie groß das Stadion sein muss um die geforderte Zuschauerkapazität aufnehmen zu können, unter der Berücksichtigung, dass das Spielfeld eine Länge von 105m und eine Breite von 68m hat. Wie sieht dein Stadion aus und welche Außenmaße muss das Stadion haben?



Das Mausoleum des Taj Mahal wurde von einem Großmogul zum Gedenken an seine Ehefrau in Indien erbaut. Es besitzt im Wesentlichen ein quaderförmiges Hauptgebäude mit abgeschrägten Ecken und eine Kuppel. Seine weiße Marmorfassade verfärbt sich durch Luftverschmutzung mit der Zeit gelb weshalb die Außenfassade in regelmäßigen Abständen aufwendig per Hand gereinigt wird. Dazu werden in Indien traditionell Baugerüste aus Bambusrohr verwendet. In einem ersten Schritt soll zunächst nur das Hauptgebäude gereinigt werden. Doch wie viel Meter Bambusrohr ist nötig um das Hauptgebäude komplett mit einem Gerüst zu umgeben?
Versuche deine Lösung und Ideen möglichst verständlich zu erklären!

Fig. 1: Aufgabe „Zahnpasta“, Aufgabe „Stadion“, Aufgabe „Taj Mahal“

Bei diesem ersten Vortest ging es nicht um die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler und folglich deren Abschneiden beim Test, sondern um die Eignung der Aufgaben im Sinne einer adäquaten Lösbarkeit bzw. Bearbeitungszeit und der tatsächlichen Größe des Lösungsraums, also der Vielfältigkeit der mathematischen Modelle. Im Einzelnen wurden mit dieser Pilotierung folgende Fragestellungen verfolgt:

- Wie ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben einzuschätzen?
- Ist die Bearbeitungszeit angemessen?
- Wie ist der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben untereinander?

Um den Schwierigkeitsgrad jeder Aufgabe einschätzen zu können wurden die einzelnen Simplex- bzw. Komplexstrukturen (Breidenbach, 1969) der prominentesten Lösungsansätze je Aufgabe ausgewertet (Fig. 2). Dabei fällt auf, dass bei der Zahnpasta- als auch bei der Taj Mahal-Aufgabe jeweils zwei Lösungsansätze vorherrschend sind. Untersucht man diese Lösungsansätze, lassen sich die einzelnen kognitiven Schritte offen legen und die einzelnen Simplexstrukturen können in einer Art Rechenbaum verdeutlicht werden, der exemplarisch für den jeweiligen Lösungsansatz steht. So konnte gezeigt werden, dass Tiefe und Breite der verschiedenen Lösungsansätze je Aufgabe (Zahnpasta und Taj Mahal) gleich sind, was zu dem Schluss führt, dass der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben unabhängig vom gewählten Lösungsansatz als gleich anzusehen ist. Ein Unterscheid, der sich in einer zusätzlichen Simplexstruktur bei einem Lösungsansatz der Taj Mahal-Aufgabe zeigte, ist bezogen auf die Schwierigkeit als gering einzuschätzen, da es sich dabei um eine Tiefenstruktur handelt. In Anlehnung an die Cognitive Load Theory (Sweller, 2003) ist nämlich anzunehmen, dass der ausschlaggebender Faktor die Breite des Lösungsansatzes ist, die Aussagen darüber liefert wie viele kognitive Schritte gleichzeitig ausgeführt werden müssen.

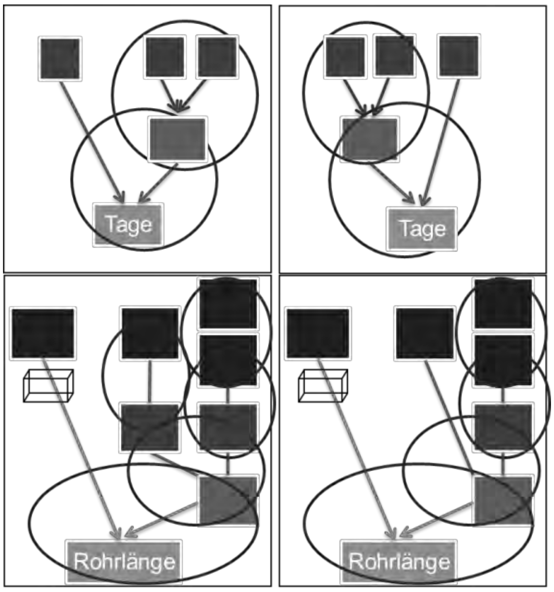


Fig. 2 Simplex- bzw. Komplexstrukturen von Zahnpasta- und Taj Mahal-Aufgabe

Obwohl die Stadionaufgabe in einer Expertenvoreinschätzung als vergleichbar schwierig eingeschätzt wurde, war die Lösungshäufigkeit sehr gering. Dies ist womöglich durch eine gesteigerte Komplexität aufgrund vieler möglicher Nebenbedingungen erklärbar. Dadurch, dass Schülerinnen und Schüler eine bildliche Vorstellung von Fußballstadien haben, sind sie sich auch deren durchaus komplexen Struktur bewusst (Form des Stadions als Oval, Notausgänge, usw.). Zwar sind die Lösungsansätze an sich, bezogen auf die Anzahl verwendeter Simplexstrukturen, vergleichbar mit den anderen zwei Aufgaben, allerdings scheint die bloße Möglichkeit der Berücksichtigung fast beliebig vieler Nebenbedingungen zu einer Blockade, im Sinne einer unüberbrückbaren Verkomplizierung des Sachverhalts zu führen. Vermutlich fehlt auch die nötige Erfahrung im Umgang mit Approximationen, was zur Folge hat, dass die Aufgabe als unlösbar erscheint.

Neben der Entwicklung und Pilotierung weiterer Modellierungsaufgaben, wird nun ein fundiertes Kompetenzmodell erstellt, um darauf aufbauend einen Bewertungskatalog formulieren zu können und die Modellierungsaufgaben entsprechend anzupassen. Somit soll schließlich ein valides Instrument entstehen um mathematisches Modellieren mit einem holistischen Ansatz erfassen zu können.

Literatur

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications Vol. 22(3)*, S. 123-138.

Breidenbach, W. (1969). *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen.* Hannover: Schroedel.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (2011). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14.* New York: Springer.

Klieme, E., Leutner, D., & Kenk, M. (2010). Kompetenzmodellierung - Eine aktuelle Zwischenbilanz des DFG Schwerpunktprogramms. *Zeitschrift für Pädagogik 56*, 9-11.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Müller, M., Leiß, D., Schukajlow, S., Blum, W., & Messner, R. (2007). Auswendiggelernt - Abgehackt - Abgefragt? In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 723-726). Hildesheim: Franzbecker.

Sweller, J. (2003). Evolution of human cognitive architecture. *The Psychology of Learning and Motivation 43*, 215-266.

Zöttl, L., Ufer, S., & Reiss, K. (2011). Assessing Modelling Competencies Using a Multidimensional IRT Approach. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman, *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling - ICTMA 14* (S. 427-437). Heidelberg: Springer.

Nadine RENK, Susanne PREDIGER, Dortmund,
Andreas BÜCHTER, Köln, Claudia BENHOLZ, Erkan GÜRSOY, Essen

Hürden für sprachlich schwache Lernende bei Mathematiktests – Empirische Analysen der Zentralen Prüfungen 10 NRW

0. Ausgangspunkt: Sprachkompetenz als wichtigster Hintergrundfaktor für Mathematikleistung

Die Empirische Bildungsforschung hat in den vergangenen Jahren mit zunehmender Vehemenz auf den Zusammenhang zwischen Mathematikleistung und sozialen Hintergrundfaktoren aufmerksam gemacht (zur Zusammenschau vgl. Prediger et al. 2013). Doch was genau hindert sozial benachteiligte Schülerinnen und Schüler am Erfolg in Leistungstests? Die empirische Untersuchung der Zentralen Prüfungen 10 (ZP10) Mathematik in Nordrhein-Westfalen zeigte, dass die bildungssprachliche Kompetenz in Deutsch der (mit einem C-Test operationalisierte) Hintergrundfaktor mit dem stärksten Zusammenhang mit Mathematikleistung ist – stärker als der sozioökonomische Status, der Migrationshintergrund, Mehrsprachigkeit oder die Lesekompetenz (für Operationalisierungen und genauere Ergebnisse vgl. ebd.).

Um genauer zu verstehen, wie eine geringe Sprachkompetenz den Erfolg in den Zentralen Prüfungen beeinflusst, wurden die Hürden in den Prüfungen mit verschiedenen Fragestellungen und Methoden genauer geortet:

1. Bei welchen Items haben sprachlich schwache Schülerinnen und Schüler die größten Nachteile? (DIF-Analyse)

2./3. Bei welchen potentiellen sprachlichen und konzeptuellen Hürden haben sprachlich schwache Lernende besondere Schwierigkeiten? (Merkmalsanalysen und Bearbeitungsanalysen)

1. Identifikation von relativ schwierigen Items in DIF-Analysen

Auf der Basis einer Skalierung der Leistungsdaten der ZP10 Mathematik 2012 im eindimensionalen dichotomen Rasch-Modell wurden mit Hilfe von DIF-Analysen solche Items identifiziert, die von sprachlich schwachen Lernenden signifikant seltener richtig gelöst wurden als dies aufgrund ihrer Gesamtleistung zu erwarten war. Für diese Analysen wurde die Stichprobe von 698 Lernenden auf Basis der Deutsch-Sprachtest-Ergebnisse halbiert. Für die sprachlich schwächere Hälfte wurde für jedes Item die Lösungswahrscheinlichkeit (die im Rasch-Modell aus der Gesamtleistung und der Itemschwierigkeit für die Gesamtstichprobe berechnet werden kann) mit der beobachteten Lösungshäufigkeit dieser Gruppe verglichen. Eine signifikant schlechtere Lösungshäufigkeit lässt sich u. a. bei Item 1a1 mit folgendem Text feststellen: „Schätze, wie viele Kilometer hoch ein Turm aus 2,4 Milliarden 1-Cent-Münzen ungefähr wäre. Beschreibe, wie du vorgegangen bist.“. Warum dieses Item für sprachlich schwache Lernende relativ schwieriger ist, wurde in Tiefenanalysen untersucht (Abschnitt 3).

2. Merkmalsanalysen zur Spezifikation potentieller und tatsächlicher Hürden

In theoretischen Aufgabenanalysen wurden mathematikdidaktische und sprachliche Merkmale als potentiell schwierigkeitsgenerierend spezifiziert (mathematikdidaktisch ausgehend von Neubrand & Neubrand 2004, sprachlich vgl. Gürsoy et al. 2013). Auch wenn die geringe Anzahl von 27 Items nicht ausreicht, um Aussagen über die Effekte isolierter Item-Merkmale statistisch abzusichern, lassen sich doch einige Tendenzen erkennen: Sowohl für die Vorhersage absoluter Itemschwierigkeit als auch für die Vorhersage relativer Itemschwierigkeit für sprachlich schwache Lernende lassen sich für diese 27 Items die mathematikdidaktischen Merkmale leichter isolieren als die sprachlichen Merkmale. So erweisen sich für sprachlich schwache Lernende diejenigen Items als besonders schwer, die einen Problemlöseanteil haben, Verbalisierungen einfordern oder Offenheit der Lösungswege aufweisen. Eine hohe Informationsdichte wirkt sowohl auf die absoluten als auch auf die relativen Schwierigkeiten.

3. Bearbeitungsanalysen zur genaueren Verortung der Hürden

Um mehr darüber zu erfahren, welche Stellen im Lösungsprozess besondere Herausforderungen für sprachlich schwache Lernende darstellen, wurden 195 schriftliche Schülerinnen- und Schüler-Bearbeitungen von ausgewählten Items der ZP10 Mathematik 2012 entlang der notwendigen Elemente im Lösungsprozess kategorisiert, unterschieden nach Bearbeitung (B) und Darstellung (D).

Erste Ergebnisse der Bearbeitungsanalysen werden hier am Beispiel des Items 1a1 dargestellt, das in der DIF-Analyse signifikante relative Schwierigkeiten für sprachlich schwache Lernende aufwies. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Analysekategorien (erste Spalte) und die Lösungshäufigkeiten für Gruppen mit unterschiedlicher sprachlicher Kompetenz. Für den Vergleich beider Gruppen entscheidend sind die bedingten relativen Häufigkeiten „in gültigen %“, die jeweils auf die potentiell relevante Teilgruppe bezogen wurden. Somit wird etwa der Anteil „nicht tragfähiger“ Bearbeitungen eines Lösungsschritts in dem sprachlich schwachen Drittel nicht schon dadurch vergleichsweise groß, dass die Aufgabe insgesamt seltener bearbeitet wurde.

Lösungsschritt (B Bearbeitung - D Darstellung)	**Häufigkeiten bei sprachlich schwachem Drittel** (n=87)					**Häufigkeiten bei sprachlich starkem Drittel** (n=48)				
	Item nicht bearb.	nicht anwendbar	nicht bearbeitet	nicht tragfähig	tragfähig	Item nicht bearb.	nicht anwendbar	nicht bearbeitet	nicht tragfähig	tragfähig
	(in %)		(in gültigen %)			(in %)		(in gültigen %)		
Strukturierung des Realmodells										
B Erfassung Fragestellung	16	6	0	13	87	4	2	0	4	96
B Schätzung Münzhöhe	16	1	22	39	39	4	0	7	20	74
D Schätzung Münzhöhe	16	20	2	34	64	4	6	0	0	100
D Beschreibung Vorgehen	16	1	68	21	11	4	0	50	11	39
Mathematisierung										
B Wahl der Rechenoperation	16	0	22	15	63	4	0	11	13	76
Durchführung										
B Stellengerechte Multiplikation	16	29	6	29	65	4	19	3	8	89
B Umrechnung Mill / Einheiten	16	3	39	40	21	4	0	11	48	41
D Umrechnung Mill / Einheiten	16	39	5	56	39	4	17	8	34	58
D Ergebnis (Antwortsatz)	16	2	10	68	23	4	0	7	50	44

Von den sprachlich schwachen Lernenden haben 16 % keine Bearbeitung abgegeben, bei sprachlich starken Lernenden beträgt dieser Anteil 4 %. In jedem Lösungsschritt erreichen die sprachlich Schwachen geringere Anteile tragfähiger Ansätze als das sprachlich starke Drittel, doch mit variierend starken Differenzen: So liegt bei „B Erfassung Fragestellung“ der Anteil der tragfähigen Bearbeitungen bei den sprachlich schwachen Lernenden mit 87 % nur unwesentlich unter dem der sprachlich starken (96 %). Die Schwierigkeiten der sprachlich schwachen Lernenden scheinen also bei diesem Item nicht vordergründig im Verstehen der Aufgabenstellung begründet zu liegen. Dagegen ist beim Schritt „B Schätzung der Münzhöhe“ (nicht bei der Darstellung der Schätzung) der Anteil der tragfähigen Bearbeitungen mit 39 % bei den sprachlich schwachen bedeutend niedriger als bei den sprachlich starken Lernenden mit 74 %. Obwohl bei oberflächlicher Betrachtung die Vermutung nahe liegt, dass die reine Schätzung der Münzhöhe nicht von der Sprachkompetenz abhängen sollte, erweist sich die notwendige Bildung eines Situationsmodells (als Höhe ist nicht der Durchmesser relevant, also nicht 0,8 oder 1 cm, sondern etwa 1 mm) als größte Hürde für sprachlich Schwache. Deutliche Unterschiede lassen sich darüber hinaus z. B. bei „B Stellengerechte Multiplikation“ und „B Umrechnung Mill / Einheiten“ identifizieren, obwohl auch hier Sprachkompetenz nicht an der sichtbaren Oberfläche der Bearbeitung relevant ist, sondern anscheinend bei den zugrunde liegenden mentalen Prozessen.

4. Fazit

Die Hürden bei den ZP10 Mathematik liegen für sprachlich schwache Lernende nicht, wie oft vermutet wird, allein bzw. primär in Text- oder Satzlänge oder einzelnen schwierigen Wörtern. Stattdessen ergeben sich Schwierigkeiten durch ein komplexes Zusammenspiel sprachlicher und konzeptueller Hürden. Bei der Frage, welche Item-Merkmale relative Schwierigkeit für sprachliche schwache Lernende hervorbringen, können mathematikdidaktische Merkmale tendenziell besser isoliert werden als sprachliche Merkmale. Für die weitere Analyse der sprachlichen Merkmale werden andere Untersuchungsdesigns notwendig sein.

Von besonderem Interesse für weitere Untersuchungen dürfte außerdem sein, dass die relative Schwierigkeit von Items in zunächst unerwarteten Bereichen der Bearbeitung liegen kann. Dies wurde exemplarisch durch die Analyse der schriftlichen Bearbeitungen des in der DIF-Analyse auffälligen Items 1a1 deutlich: Hier treten bei einigen Lösungsschritten, die bei oberflächlicher Betrachtung nicht von der Sprachkompetenz abhängen, deutliche Unterschiede bei den Anteilen tragfähiger Bearbeitungen zwischen sprachlich schwachen und sprachlich starken Lernenden auf. Dies verweist darauf, dass für den Lösungserfolg von sprachlich schwachen Lernenden nicht nur das Aufgabenverständnis und die Sprachproduktion Probleme darstellen, sondern auch die Ausbildung eines Situationsmodells und des konzeptuellen Verständnisses – vermutlich aufgrund einer schwächer ausgeprägten „Denksprache“.

Literatur

Gürsoy, E., Benholz, C., Renk, N., Prediger, S. & Büchter, A. (2013, im Druck): Erlös = Erlösung? – Sprachliche und konzeptuelle Hürden in Prüfungsaufgaben. Erscheint in: Deutsch als Zweitsprache.

Neubrand, N. & Neubrand, M. (2004): Innere Strukturen mathematischer Leistung im PISA-2000-Test. In M. Neubrand (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwiss., 87-108.

Prediger, S., Renk, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2013, eingereicht): Family background or language disadvantages? Factors for underarchievement in high stakes tests. Eingereicht für Proceedings of 37th PME. Kiel (Germany).

Sebastian REZAT, Paderborn

Fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik – Ein Beitrag zur Theoriendiskussion?

Mathematikdidaktik als wissenschaftliche Disziplin

Seit ihren Anfängen ist die Mathematikdidaktik als wissenschaftliche Disziplin von einer Theoriendiskussion begleitet. Dies belegen die von Steiner gegründete „Theories of Mathematics Education Group“ (TME) sowie die regelmäßig auf den großen internationalen Tagungen wie der International Conference of Mathmatics Education (ICME) und dem Annual Meeting der International Group for the Psychology of Mathematics Education (IG-PME) angebotenen Arbeitsgruppen zur Theorienfrage in der Mathematikdidaktik. Die Theoriendiskussion ist dabei häufig mit der Frage nach dem Fokus und der Identität der wissenschaftlichen Disziplin verbunden. Dies spiegelt sich u.a. in Buchtiteln wie der ICMI-Studie „Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity“ (Sierpinska & Kilpatrick, 1998) wider. Die Suche nach Fokus und Identität der Disziplin entspringt nicht zuletzt der Problematik der Theorienvielfalt, durch die die mathematikdidaktische Forschung gekennzeichnet ist. Hinzu kommt, dass viele dieser Theorien keine genuin mathematikdidaktischen Theorien, sondern Theorien aus Bezugsdisziplinen wie z.B. Psychologie, Pädagogik und Philosophie sind. In einer Rezension der oben genannten ICMI-Studie kennzeichnet Steen die Mathematikdidaktik daher als „a field of disarray, a field whose high hopes for a science of education have been overwhelmed by complexity and drowned in a sea of competing theories“ (Steen, 1999).

Innerhalb der Disziplin wird die Theorienvielfalt mittlerweile weniger als Defzit gesehen, sondern als ein weitgehend akzeptiertes Charakteristikum der Mathematikdidaktik. So konstatieren beispielsweise Bikner-Ahsbahs und Prediger (2006, p. 54) *„Diversity is richness!“*. Dennoch bzw. gerade deshalb besteht die Frage nach dem Fokus und der Identität der Disziplin weiter. Da sich diese Frage offenbar nicht über eine einheitliche Theorie der Mathematikdidaktik lösen lässt, wird in diesem Beitrag eine Alternative zur Diskussion gestellt. Diese Alternative lässt sich mit Hilfe der folgenden Frage umschreiben: Lassen sich fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik als wissenschaftlicher Disziplin identifizieren, die die Foci der Disziplin zum Ausdruck bringen und damit zur Identitätsstiftung beitragen können? Ziel dieses Beitrags ist zu erörtern, ob diese Frage überhaupt sinnvoll ist. Es soll kein Katalog fundamentaler Ideen der Mathematikdidaktik als wissenschaftlicher Disziplin zur Diskussion gestellt werden. Wenn diese Frage jedoch sinnvoll ist, d.h. wenn sich solche fundamentalen Ideen der Mathematikdidaktik formulieren lassen, dann könnten diese eine ordnende Funktion im Hinblick auf die Vielfalt der Theorien einnehmen, indem Theorien in Relation zu bestimmten fundamentalen Ideen der Disziplin gebracht werden.

Im Folgenden wird zunächst das Konzept der fundamentalen Ideen verdeutlicht, um deren Eignung für die oben formulierte Funktion zu prüfen.

Fundamentale Ideen

Bruner erörtert in seinem 1960 erstmals erschienen einschlägigen Werk „The Process of Education" fundamentale Ideen als Mittel zur Lösung des Transferproblems eines jeden Bildungssystems. Das Transferproblem besteht darin, eine geeignete (begrenzte) Auswahl an Lerninhalten zu bestimmen, die das Denken in einer Weise schulen, die sich auch in der Zukunft als tragfähig erweisen wird. Seine Antwort auf diese Frage besteht darin, die Struktur von Fächern anstelle von Fakten in den Vordergrund zu stellen. Als Mittel die Struktur von Fächern zu betonen sieht er fundamentale Ideen der jeweiligen wissenschaftlichen Disziplinen an: „in order for a person to be able to recognize the applicability or inapplicability of an idea to a new situation and to broaden his learning thereby, he must have clearly in mind the general nature of the phenomenon with which he is dealing. The more fundamental or basic is the idea he has learned, almost by definition, the greater will be its breadth of applicability to new problems. Indeed, this is almost a tautology, for what is meant by 'fundamental' in this sense is precisely that an idea has wide as well as powerful applicability. (Bruner, 1960, p. 18).

Neben dem Beitrag, den fundamentale Ideen zur Lösung des Transferproblems leisten sollen, beschreibt Bruner weitere Funktionen fundamentaler Ideen, die hier nach epistemologischen und pragmatischen Funktionen gegliedert werden sollen. In direktem Zusammenhang mit der Lösung des Transferproblems steht dabei die pragmatische Funktion, dass fundamentale Ideen die Entwicklung von Curricula unterstützen sollen, sodass ein Fach verständlich wird. Dies soll wiederum dazu führen, dass die Gedächtnisleistung unterstützt wird. Als epistemologische Funktionen hebt Bruner (1960) hervor, dass fundamentale Ideen die Struktur einer Disziplin, deren Praxis und deren Essenz verdeutlichen und damit die Bildung semantischer Netzwerke zwischen verschiedenen Teilgebieten unterstützen sollen.

Auch wenn Bruner fundamentale Ideen am Beispiel der Mathematik erläutert, betont er doch ausdrücklich, dass das Konzept ‚fundamentale Ideen' auf jede Disziplin anwendbar ist. Auffällig ist jedoch, dass die Diskussion über fundamentale Ideen in der Folge Bruners im Wesentlichen in der Mathematikdidaktik in Bezug auf die Disziplin ‚Mathematik' geführt wird. Im Sinne Bruners haben die „fähigsten Gelehrten und Wissenschaftler“ (vgl. Bruner, 1960, p. 32) der Mathematikdidaktik Vorschläge verschiedener Kataloge fundamentaler Ideen der Mathematik allgemein oder in Bezug auf eine ihrer Teildisziplinen unterbreitet, ohne sich dabei auf einen verbindlichen Katalog zu einigen. In diesem Beitrag soll es nicht darum gehen, diese Diskussion aufzugreifen. Im Vordergrund steht vielmehr, was sich aus dieser Diskussion lernen lässt, um fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik zu erörtern. Schweigers (2006) Versuch, die verschiedenen Vorschläge zu fundamentalen Ideen der Mathematik zu systematisieren, ist in diesem Zusammenhang aufschlussreich, da Schweiger im Zuge dessen fundamentale Ideen im Sinne von vier deskriptiven Kriterien charakterisiert: „Fundamental Ideas

- recur in the historical development of mathematics (time dimension)
- recur in different areas of mathematics (horizontal dimension)
- recur at different levels (vertical dimension)
- are anchored in everyday activities (human dimension)” (Schweiger, 2006, p. 68)

Fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik

Eine nähere Betrachtung von Schweigers (2006) vier deskriptiven Kriterien von fundamentalen Ideen der Mathematik zeigt, dass diese Kriterien nicht mathematikspezifisch sind, sondern im Sinne Bruners auf jede Disziplin übertragbar sind. Angewandt auf die wissenschaftliche Disziplin ‚Mathematikdidaktik' bedeutet dies, dass fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik

- durch eine Zeitdimension gekennzeichnet sind, d.h. in der historischen Entwicklung der Mathematikdidaktik eine Rolle spielen;
- im Sinne der horizontalen Dimension in verschiedenen Teilgebieten der Mathematikdidaktik bedeutsam sind;
- im Sinne der vertikalen Dimension in unterschiedlichen Diskursen der Mathematikdidaktik wiederzufinden sind;
- im Sinne der menschlichen Dimension in Alltagsdenken und -sprache verankert sind.

Im Rahmen dieses Beitrages kann kein Vorschlag eines Kataloges fundamentaler Ideen zur Diskussion gestellt werden. Vielmehr geht es darum, grundsätzlich die Diskussion darüber anzuregen.

Fundmentale Ideen und Theorienvielfalt

Abschließend soll auf die Frage eingegangen werden, die im Titel dieses Beitrags formuliert ist: Welchen Beitrag können fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik zur Theoriendiskussion leisten?

Bikner-Ahsbahs und Prediger (2006, p. 52) verweisen darauf, dass Theorien in der Mathematikdidaktik ihren Gegenstand nur bis zu einem gewissen Grad teilen: „Most theories about and within mathematics education share their research object up to a certain point: it is about aspects of mathematics teaching and learning. But they differ in the situations that are considered, what exactly in these situations is theoretically conceptualized, in the methods that are used for generating results for theory building and in their aims“. Demzufolge lassen sich Theorien also nicht hinsichtlich der Situationen, situationsspezifischen Objekte, Methoden, Ziele und Fragestellungen systematisieren. Diese Aspekte scheinen die jeweilige Theorie zu spezifisch zu kennzeichnen und eher dazu geeignet zu sein, verschiedene Theorien zu unterscheiden als ihre Verbindungen aufzuzeigen. Fundamentale Ideen sind jedoch nicht zuletzt aufgrund des vertikalen Kriteriums auf einer abstrakteren und allgemeineren Ebene angesiedelt. Gelänge es fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik zu bestimmen, die gerade das Verbindende der jeweils spezifischen Situationen, situationsspezifischen Objekte, Methoden und Ziele fassen, könnten diese Ideen zunächst als Mittel zum „lokalen Ordnen“ der Theorien in der Mathematikdidaktik herangezogen werden. Es könnte deutlich werden, auf welche Weise bestimmte fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik theoretisch konzeptualisiert werden. Dies würde nicht nur zu einem besseren Verständnis der jeweiligen Theorien führen, sondern auch zur Identitätsbildung der Disziplin einen Beitrag leisten.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2006). Diversity of theories in mathematics education—How can we deal with it? *ZDM, 38*(1), 52-57. doi: 10.1007/bf02655905

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Schweiger, F. (2006). Fundamental Ideas. A bridge between mathematics and mathematics education. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.), *New Mathematics Education Research and Practice* (pp. 63-73). Rotterdam: Sense.

Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics education as a research domain. A search for identity. An ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.

Steen, L. A. (1999). Review: Theories That Gyre and Gimble in the Wabe. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 235-241.

Vanessa RICHTER, Dortmund

‚Ich hab den Unterschied berechnet' – Einblicke in eine Lernprozessstudie zur Begriffsbildung zu linearen Funktionen

Der Begriff der Linearen Funktion bildet einen zentralen Anker für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. Auch für komplexere Konzepte (z.B. in der Analysis) sind tragfähige Vorstellungen zu gleichbleibenden Wachstumsprozessen unabdingbar. Tragfähigkeit bezieht sich sowohl auf die Fähigkeit Funktionen statisch und dynamisch zu betrachten – aus normativer Perspektive die Grundvorstellungen der Zuordnung, Kovariation und der Funktion als Ganzes zu aktivieren (vgl. Vollrath 1989), als auch mit Funktionen in unterschiedlichen Darstellungsformen (numerisch, graphisch, symbolisch, verbal) zu arbeiten und zwischen diesen zu wechseln (vgl. Duval 2006). Der vorliegende Beitrag konzentriert sich auf die Beschreibung von Teilen typischer Lernverläufe samt Hürden unter den Bedingungen eines kontextgebundenen und darstellungsreichen Designs.

1. Spezifiziertes Forschungsinteresse und methodologischer Zugang

Viele Lernende nutzen ihre Vorstellungen zu gleichbleibendem Wachstum nicht adäquat. Häufig wird Proportionalität auf nicht-lineare Problemstellungen angewendet: ‚overuse of linearity' (vgl. u.a. Van Dooren/Greer 2010). Andererseits haben Lernende vielfach Schwierigkeiten Linearität zu erfassen, z.B. funktionale Zusammenhänge dynamisch zu betrachten (vgl. Tall 1992). Bestehende Studien zeigen dies zumeist an Lernständen auf. Differenzierte Erkenntnisse über Entwicklungen in Lernprozessen gibt es nur wenig. Daher setzt sich diese Studie zum Ziel, Prozesse der Begriffsbildung zu linearen Funktionen zu begleiten, Fragen nach Lernverläufen, möglichen Hürden, sowie Bedingungen und Wirkungen ausgewählter Design-Prinzipien nachzugehen.

Das Vorhaben wird im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung realisiert (vgl. Prediger et al. 2012). Der Zugang konzentriert sich zuvorderst auf das Verstehen von Lernprozessen zu einem konkreten Lerngegenstand. Durch produktive Verknüpfung von Forschung und Entwicklung entstehen lokale gegenstandsgebundene Theorien des Lehrens und Lernens (Forschungsprodukt) und ein Prototyp eines Lehr-Lernarrangements zum Begriff der linearen Funktion (Entwicklungsprodukt).

2. Methodische Umsetzung

In drei Zyklen von Designexperimenten (vgl. Prediger et al. 2012) wurden Daten in Form halbstandardisierter Leitfadeninterviews erhoben. Der Kern der Design-Experimente gründete auf einem Lehr-Lernarrangement (vgl. Hußmann et al. 2015) aus dem Projekt KOSIMA (vgl. Prediger/Hußmann et al. 2012). Davon wurden verschiedene Aspekte mit Hilfe der Design-Experimente ausdifferenziert und weiterentwickelt.

Zentral für Design und Lehr-Lernarrangement ist die Einbettung in den Kontext der Routenplanung und die Orientierung entlang der Kernidee ‚Vorhersagbarkeit und Berechenbarkeit unbekannter Werte in gleichbleibenden Wachstumsprozessen'. Diese Prinzipien sind leitend für die Design-Entwicklung und werden durch weitere ergänzt. Im Folgenden werden Erkenntnisse zu dem spezifizierten Design-Prinzip ‚Durchschnittsgeschwindigkeit als gleichbleibendes Wachstum nutzen' angeführt.

Zyklus	*Forschungsfokus*	*Entwicklungsfokus*	*Design-Experiment*	*Stichprobe*
1	Ausschärfung des Forschungsinteresses	Entwicklung Kernidee / Sinnstiftung Kontext der Routenplanung	2 Partner-Interviews	1 Gesamtschule (NRW) Jgst. 7 (n=4)
2	Beforschung von Vorerfahrungen zum Begriff ‚lineare Funktion'	Strukturierung des Designs/Optimierung Aufgabenformulierungen	5 Partnerinterviews	2 Gymnasien (NRW) Jgst. 7 (n=6); Jgst. 8 (n=4)
3	Beforschung von Lernprozessen	Diagnose und Förderung mit Hilfe spezifischer Aufgaben	6 x Serie von 4-5 Partnerinterviews	2 Gesamtschulen (NRW) Jgst. 8 (n=12)

Die erstellten Transkripte wurden sequenzanalytisch ausgewertet und in Sinn- und Analyseeinheiten strukturiert. Um Begriffsbildungsprozesse detailliert zu analysieren, wird ein sprachphilosophischer Zugang gewählt, der den Gebrauch von Begriffen in Begründungszusammenhängen fokussiert (vgl. Hußmann/Schacht 2009; Schacht 2012). In lokaltheoretischer Perspektive wird dies an den Ansatz der operationalen Invarianten für eine Klasse von Situationen (vgl. Vergnaud 1996) angebunden. Werkzeuge der Analyse sind ‚Festlegungen bzw. Urteile' (Behauptungen in propositionaler Form, die das Individuum für wahr hält – vgl. Hußmann 2013, Schacht 2012) und ‚Fokussierungen' (Hußmann 2013, aktivierte Konzepte und Kategorien, die ein Individuum zur Bewältigung einer Situation nutzt).

3. Auszug eines möglichen Lernverlaufes und exemplarische Identifizierung einer konzeptuellen Hürde

Fallbeispiel Niklas

Niklas bearbeitet eine Aufgabe, bei der er ausgehend von einer numerischen Darstellung und Annahme eines gleichbleibenden Wachstums im Kontext der Routenplanung weitere Zwischenwerte bestimmen soll.

N	Ich glaub bei 0 kommt 30 hin.
I	Wie hast du das denn jetzt gemacht?
N	Wenn man 300 durch 2 rechnet, kommt da 150 raus und da steht aber 180 ((zeigt auf die 2.Zeile der Tabelle)), also müssen 30 vorher drauf gewesen sein.

Zeit (in h)	Strecke (in km)
0	~~30~~ 60
1	180
2	300
3	~~480~~ ~~480~~ 420
5	[illegible] 600
10	[illegible]
20 264	[illegible]

Ausgangspunkt der Überlegungen von Niklas in dieser Situation ist die Fokussierung ‚zeilenweise Abhängigkeit' (Er nutzt das Argument 2 und den zugehörigen Funktionswert 300, um die gefahrenen Kilometer für eine Stunde zu bestimmen). Leitend ist die Fokussierung ‚Orientierung an Eins', die er aktiviert, um auf weitere Werte zu schließen. Auf Basis dieser Fokussierungen legt er sich fest auf: „In einer Stunde werden 150 km gefahren". Mit diesen Fokussierungen gelingt es ihm nicht das richtige Wachstum von 120 km/h zu bestimmen. Im weiteren Verlauf des Interviews ändert er seine Strategien von (1) Proportionales Hochrechnen mit Faktor 150 zu (2) Proportionales Hochrechnen mit Faktor 150 und Addition von 30. Die Fokussierung ‚zeilenweise Abhängigkeit' ist dabei stets leitend.

In der folgenden Situation des gleichen Interviews, bei der die noch zu fahrende Reststrecke gesucht wird, lässt sich eine Verschiebung seiner Fokussierung beobachten.

N	O k a y .. Also ich habe 650 minus 410 gerechnet, da kommt ((rechnet das Ergebnis mit dem Taschenrechner aus)) 240 raus. Das ist dann für 2 Stunden gefahren. Hab ich geteilt durch 2 für eine Stunde, das ergibt () das ergibt 120. Dann hab ich 650 minus 120, ergibt 530 ((zeigt auf den entsprechenden Wert in der Tabelle)). 530 minus 120 das is ja wieder ne Stunde also 410. Dann die Hälfte von 120 is 60. 410 minus 60 ergibt 350 und immer so weiter.

Zeit (in h)	Strecke (in km)
0	650
1	530
2	410
2,5	~~470~~ 350

Der Fokus ‚Orientierung an Eins' wird fortgeführt, aber zusätzlich eine neue Perspektive ergänzt: ‚Zeilenübergreifende Abhängigkeit'. In der Situation des negativen gleichmäßigen Wachstums nutzt Niklas die lokale Veränderung zwischen zwei Funktionswerten, um das Wachstum zu bestimmen. Die Betrachtung dieser Veränderung führt zur Bestimmung des richtigen Wachstums. Auf Nachfrage ist ihm zunächst nicht bewusst, dass er sein Vorgehen geändert hat: „Das hab ich doch eigentlich auch so gemacht. Ich hab den Unterschied berechnet". Mit Blick auf beide Tabellen erkennt er schließlich doch seine unterschiedlichen Vorgehensweisen und er überträgt die Fokussierung der ‚Zeilenübergreifenden Abhängigkeit' auf die Tabelle mit positivem Wachstum und erhält auf diese Weise den (richtigen) festen Faktor von 120 km/h.

4. Konsequenzen für das Design

Die Tendenz in numerischen Darstellungen linearer Situationen proportionale Rechenstrategien anzuwenden, lässt sich bei weiteren Lernenden beobachten. Dies scheint eine konzeptuelle Hürde zu sein, worauf bestehende Forschungsbefunde ebenfalls hindeuten (s.o.). Die Einbindung negativer Wachstumsprozesse kann hier das Verständnis für lineare Zusammenhänge befördern und sollte daher noch stärker in das Design eingebunden werden.

Literatur

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 61, 103-131.

Hußmann, S. (2013). The role of focuses and commitments in learning processes. (in preparation, available as preprint).

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 419-422.

Hußmann, S., Mühlenfeld, U., Richter, V. & Witzmann, C. (2015). Voraussagen mit dem Routenplaner – Mit Funktionen modellieren. Erscheint in: S. Hußmann, T. Leuders & S. Prediger, B. Barzel, (Hrsg.). *mathewerkstatt. Klasse 8*. Cornelsen: Berlin.

Hußmann, S. & Schacht, F. (2009). Toward an Inferential Approach Analyzing Concept Formation and Language Processes. Proceedings of CERME 6 (Lyon), 842-851.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B. & Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunter Modell. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 65(8), 452-457.

Schacht, F. (2012). Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In: D.A. Grouws (Hrsg.). Handbook of research on mathematics teaching and learning, 495-511.

Van Dooren, W. & Greer, B. (2010). Students´ behaviour in linear and non-linear situations. In: Mathematical Thinking and Learning, 12(1), 1-3.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In: L.P. Steffe & al (Hrsg.). Theories of Mathematical Learning. Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum, 219-239.

Vollrath, H.-J.(1989): Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik 10, 3-37.

Leonhard RIEDL, Daniel ROST, Erwin SCHÖRNER, München

Fachmathematische Kenntnisse von Studierenden des Lehramts an Grund,- Haupt- oder Realschulen an der Ludwig-Maximilians-Universität München

1. Grundlagen der Studie

Zentrales Anliegen der Studie ist es, die fachmathematischen Kenntnisse angehender Lehrkräfte im Grund-, Haupt- und Realschulbereich, die ihre Ausbildung bis zum ersten Staatsexamen an der LMU München absolvieren, zu analysieren. Dabei wird das Augenmerk besonders auf schulspezifisches Wissen gelegt; dieses wird mit Hilfe von Testerhebungen in den vier zentralen Bereichen der Schulmathematik Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik gemessen. Als theoretischer Rahmen für die Aufgabenauswahl dienen die aktuellen bayerischen Lehrpläne der Realschule und des Gymnasiums sowie die von der KMK beschlossenen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss (vgl. ISB Lehrpläne R6 und G8; KMK 2004). Ferner komplettiert ein parallel zu den fachmathematischen Testerhebungen konzipierter Fragebogen das Testdesign; dieser erfasst persönliche und studienbezogene Angaben der Studierenden, die folglich mit den Ergebnissen der Testerhebungen in Verbindung gebracht werden können (vgl. Porst 2008).

Das Testgefüge wird zu zwei unterschiedlichen Erhebungszeitpunkten durchgeführt. Der erste Termin findet direkt zu Studienbeginn im ersten Fachsemester statt; damit kann der Wissensstand ermittelt werden, welchen die Studierenden direkt von der Schule mitbringen. Der zweite Zeitpunkt ist nach einem Studienjahr, also nachdem die Studierenden die Vorlesungen der ersten beiden Fachsemester gehört haben. Zu beiden Messzeitpunkten werden exakt die gleichen Aufgaben in den oben genannten zentralen mathematischen Schuldisziplinen zur Bearbeitung gestellt.

2. Neukonzeption des ersten Studienjahres

Das erste Studienjahr im fachmathematischen Bereich für den Studiengang Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen an der LMU München ist im Zuge der Modularisierung der Lehramtsprüfungsordnung I vom 13.03.2008 zum Wintersemester 2010/11 neu konzipiert worden. Genau dieses Zeitfenster liegt zwischen den oben dargestellten Erhebungszeitpunkten.

Es sollen nun kurz Struktur, Leitgedanke, Inhalte und Ziele des neustrukturierten ersten Studienjahrs skizziert werden, welches durch den Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ charakterisiert ist.

Struktur: Der Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ erstreckt sich über die ersten beiden Fachsemester und beginnt stets mit dem ersten Teil im Wintersemester. Der Umfang dieser Veranstaltungen beträgt vier Semesterwochenstunden für die Vorlesung und zwei für die Übung. Ferner wird dieses Gefüge durch zahlreiche Tutorien in Kleingruppen ergänzt.

Leitgedanke: Die zentralen und charakterisierenden Schwerpunkte dieses Zyklus sind elementare Zahlentheorie, elementare Stochastik und Elementargeometrie. Dabei sind die Vorlesungen am Aufbau des Zahlensystems orientiert, wobei die klassischen Zahlenbereiche (von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen) mit jeweils spezifischen Anwendungen fokussiert werden.

Inhalte: Zunächst werden zentrale Begriffe und Methoden vorgestellt, die auch für weitere Bereiche der Mathematik grundlegend sind; dabei werden die Themen Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen besprochen. Als erster Zahlenbereich werden die natürlichen Zahlen eingeführt; dabei werden Peanoaxiome, Induktion und Rekursion thematisiert und Kombinatorik als Anwendung besprochen. Zentrales Kernstück bei der Behandlung der ganzen Zahlen ist die Teilbarkeitslehre, die Anwendung bei der Behandlung von Primzahlen und Restklassenringen findet. Im Zahlenbereich der rationalen Zahlen werden Brüche und Bruchzahlen eingeführt und elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung als klassische Anwendung besprochen. Durch die Motivation von Fragestellungen der elementaren Geometrie wird die Vollständigkeit der reellen Zahlen thematisiert und in der deskriptiven Statistik verwendet. Den Abschluss dieses zweisemestrigen Vorlesungszyklus bilden die komplexen Zahlen. Es wird die Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene behandelt; als Anwendung werden Polynome und Nullstellen betrachtet.

Ziele: Dieser Zyklus soll im ersten Studienjahr den universitären Charakter der Mathematik in Aufbau und Struktur vermitteln. Wie die Darstellung der Inhalte zeigt, soll der Abstraktionsschock beim Übergang von der Schule zur Universität durch die Thematisierung spezieller Schulinhalte vom höheren Standpunkt der Mathematik gedämpft werden, da oftmals auf bekannte schulische Lehrinhalte zurückgegriffen wird (vgl. Klein 1933). Ferner soll die Vorlesung eine Grundlage für weitere Gebiete der Mathematik (lineare Algebra und Analysis) darstellen.

3. Zentrale Ergebnisse der Studie

Im ersten Schritt werden die Leistungen in den vier Einzelfächern (Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik) zu beiden Erhebungszeitpunkten bewertet; dabei werden die Ergebnisse von 139 Studierende zum ersten

Zeitpunkt (Vortest) und 88 Studierenden zum zweiten Zeitpunkt (Nachtest) betrachtet. Folgende Tabelle zeigt die arithmetischen Mittelwerte für die vier Disziplinen zu beiden Messzeitpunkten:

Fächer	*Vortest*	*Nachtest*
Algebra	18,87	21,01
Geometrie	11,23	16,03
Analysis	13,35	13,05
Stochastik	9,25	12,01

In den Bereichen Algebra, Geometrie und Stochastik können signifikante Leistungssteigerungen zwischen Vor- und Nachtest festgestellt werden (Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %); für die Disziplin Analysis liegen zu beiden Messzeitpunkten annähernd gleiche Ergebnisse vor.

Im zweiten Schritt sollen nun die Leistungen in Abhängigkeit ausgewählter Regressoren betrachtet werden, welche durch die Angaben aus dem Fragebogen gewonnen werden. Die Analyse der Ergebnisse im Vortest zeigt, dass die beiden erklärenden Variablen „studierter Lehramtstyp“ (Grund-, Haupt- oder Realschullehramt) und „mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe“ (Leistungskurs, Grundkurs, Fachoberschule) entscheidenden Einfluss auf das Leistungsbild in den Testerhebungen haben. Andere Regressoren wie Alter, Geschlecht und das Bundesland, in dem die Hochschulreife erlangt wurde, haben keinen bedeutsamen Einfluss auf die Ergebnisse. Folgende Tabellen demonstrieren für die entsprechenden Gruppen die Leistungen zu beiden Erhebungszeitpunkten; dabei werden jeweils die Mittelwerte aus den vier Einzelfächern betrachtet:

Lehramtstyp	*Vortest*	*Nachtest*
Grundschule	14,68	16,32
Hauptschule	9,16	14,19
Realschule	13,32	15,54

Schwerpunkt	*Vortest*	*Nachtest*
Leistungskurs	15,03	16,73
Grundkurs	11,84	14,53
Fachoberschule	13,33	15,98

Für beide Regressoren (studierter Lehramtstyp und mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe) können jeweils für alle drei betrachteten Gruppen signifikante Leistungssteigerungen zwischen Vor- und

Nachtest festgestellt werden; diese Steigerungen sind auf die drei Teilgebiete Algebra, Geometrie und Stochastik zurückzuführen. Die Leistungen zu Studienbeginn (Vortest) divergieren für beide Regressoren deutlich (vgl. dazu die Unterschiede zwischen Grund- und Hauptschule sowie Leistungs- und Grundkurs); diese Differenzen sind im Nachtest nicht mehr zu beobachten, die Leistungen liegen auf einem höheren und kompakteren Niveau.

4. Zusammenfassung

Die Neukonzeption des ersten Studienjahres im fachmathematischen Bereich für die Lehramtsausbildung angehender Grund-, Haupt- und Realschullehrkräfte soll den Abstraktionsschock beim Übergang von der Schule zur Hochschule dämpfen. Der Vorlesungszyklus vermittelt den universitären Charakter der Mathematik in Aufbau und Struktur, greift aber in vielen Bereichen auf Schulinhalte zurück; diese werden nun vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik thematisiert.

Es können zwischen Vor- und Nachtest signifikante Leistungssteigerungen in den schulischen Disziplinen Algebra, Geometrie und Stochastik erkannt werden; genau diese drei Bereiche werden im Vorlesungszyklus Grundlagen der Mathematik im Rahmen der Behandlung der drei zentralen Gebiete elementare Zahlentheorie, elementare Stochastik und Elementargeometrie fokussiert. Die Ergebnisse in Analysis bleiben annähernd gleich; die Thematisierung dieser Disziplin ist im Studienverlauf für das dritte Studienjahr vorgesehen, wodurch dieses Ergebnis zu begründen ist.

Die zu Studienbeginn vorliegende Leistungsheterogenität für die beiden oben dargestellten Regressoren kann egalisiert werden; dies ist durch die Steigerung aller Gruppen auf ein höheres und leistungsähnliches Ergebnisniveau zu erklären, wobei hier wiederum die Disziplinen Algebra, Geometrie und Stochastik auffallend verbessert werden.

Literatur

ISB Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. Lehrplan der sechsstufigen Realschule R6. http://www.isb.bayern.de (Zugriff: 13.03.2013)

ISB Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. Lehrplan des achtstufigen Gymnasiums G8. http://www.isb.bayern.de (Zugriff: 13.03. 2013)

Klein, F. (1933): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Erster Band. Berlin: Springer.

Beschluss der Kultusministerkonferenz (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss - Beschluss vom 4.12.2003. München: Luchterhand Verlag.

Porst, R. (2008): Fragebogen. Ein Arbeitsbuch. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Wolfgang RIEMER, Köln

Beurteilende Statistik ohne gute Probleme ist wie Schwimmen ohne Wasser

Kaum ein Schüler, der im Abitur Aufgaben zur beurteilenden Statistik löst, hat je einen Test mit authentischen selbst erhobenen Daten durchgeführt, um eine ihn „persönlich betreffende“ Fragestellung zu beantworten. Der „normale“ Stochastik-Unterricht läuft nach einem Muster ab, das sich durch Aufgabenstellungen folgender Art gut charakterisieren lässt:

Es wird behauptet, ein Würfel sei gezinkt, die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen seine unterschiedlich, also nicht jeweils $\frac{1}{6}$.
Um diese Vermutung zu überprüfen, könnte man den Würfel sehr oft (2000mal) werfen. Damit ließe sich eine Entscheidung über die relativen Häufigkeiten fällen. Solch ein Verfahren ist jedoch sehr aufwendig und die ermittelte relative Häufigkeit trotz großem Stichprobenumfang auch nur ein Näherungswert.
Gesucht ist ein rechnerisches Verfahren, das auf kürzerem Weg (also beispielsweise 50mal würfeln) eine Entscheidungshilfe gibt, ob der Würfel ideal ist oder nicht. Ein solches Verfahren nennt man Testen von Hypothesen.

http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb2/modul4/4_unterricht/ (1.3.2013)

Probleme werden nicht wirklich ernst genommen. Sie dienen als Vehikel, um „rechnerische Verfahren“ einzuführen, deren Anwendung sich in zentralen Prüfungen leicht abtesten lässt. Und dabei ist es gerade in der Statistik einfach, Authentizität herzustellen:

Nehmen Sie statt des fiktiven gezinkten Würfels einen realen Bleistift, dessen Seiten nummeriert werden und lassen Sie jeden Ihrer Schüler 120-mal würfeln. Man hört Jubeln und Fluchen!

Die nebenstehende Tabelle zeigt, mit welchen Ergebnissen man rechnen kann: Lisa und Gabriel sind (im Gegensatz zu Miriam, Onno und Birk) felsenfest davon überzeugt, keinen Laplace-Stift erwischt zu haben. Die Frage, wie man das Bauchgefühl quantitativ absichern kann, führt wie folgt direkt ins Herz der beurteilenden Statistik.

	1	2	3	4	5	6	t
Luca	16	34	23	14	8	25	21
Felix	15	14	32	23	35	1	40
Lucia	7	20	14	12	50	17	59
Youness	21	21	13	28	26	11	12
Max	16	29	32	10	3	30	37
Chiara	23	12	37	19	11	18	22
Alex	27	20	20	23	15	15	5
Emilia	25	13	11	21	37	13	25
Hannah	26	25	13	27	20	9	14
David	24	23	18	7	13	35	24
Lisa	21	48	22	16	12	1	62
Niklas	31	27	3	7	15	37	47
Jasper	19	17	24	19	23	18	2
Jan	6	28	28	17	17	24	18
Lara	16	20	19	28	7	30	18
Jula	15	24	29	15	18	19	8
Gabriel	24	1	6	27	33	29	44
Begüm	42	14	29	16	3	16	46
Miriam	18	23	20	13	21	25	4
Sören	18	5	21	20	32	24	20
Onno	21	15	20	20	21	23	2
Stefan	41	15	23	9	3	29	48
Volkan	18	14	8	43	24	13	39
Birk	18	22	20	20	20	20	0

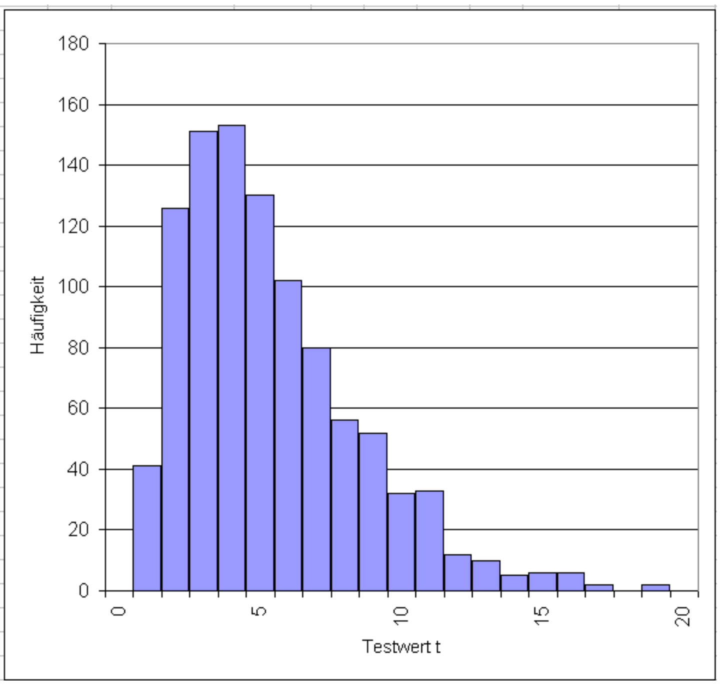
Beim 120-maligen Rollen eines fairen Stifts erwartet man jede Seite 20-mal. Die Abweichungen zu den tatsächlichen Häufigkeiten $n_1, ..., n_6$ misst man in intuitiv eingängiger Weise durch die (Chi-Quadrat) Testgröße

$$t = \frac{(n_1 - 20)^2}{20} + \frac{(n_2 - 20)^2}{20} + ... + \frac{(n_6 - 20)^2}{20},$$

deren (ganzzahlig gerundetete) Werte für jeden einzelnen Stift in der letzten Spalte obiger Tabelle zu sehen sind. Man erkennt: Je größer die Testwerte sind, desto mehr Grund hat man, an der Fairness des Stiftes zu zweifeln. So erhält Lisa t=62 und Gabriel t=44, was gefühlsmäßig für einen Laplace-Stift viel zu hoch ist.

Aber welche Testwerte sind für einen Laplace-Stift normal? Die Antwort liefert ein zweites Klassen-Experiment mit richtigen Spielwürfeln. Wie der Tabellenteil der folgenden Abbildung zeigt, treten bei richtigen Spielwürfeln Testwerte über 11 nur sehr selten (in weniger als 5% aller Fälle) auf.

1	2	3	4	5	6	t
29	21	24	14	14	18	9
20	17	19	19	25	20	2
20	22	25	19	14	20	3
21	21	24	24	16	14	4
12	26	20	21	20	21	5
14	16	14	21	30	25	11
25	17	18	16	24	20	4
18	20	20	21	21	20	0
21	21	27	17	21	13	6
18	28	20	10	18	26	10
22	22	22	22	15	17	3
16	24	15	22	17	26	5
21	16	22	19	22	20	1
20	19	18	19	25	19	2
20	19	21	20	19	21	0
28	21	16	14	21	20	6
21	20	23	22	12	22	4
20	23	16	16	22	23	3
27	24	17	17	15	20	5
16	18	27	25	24	10	11
18	16	20	22	23	21	2
19	23	17	23	15	23	3
18	19	22	20	21	20	1
23	17	19	26	11	24	8
23	21	20	13	19	24	4
12	17	21	24	20	26	6
19	25	22	15	16	23	4



Eine Computersimulation (vgl. das obige Säulendiagramm) sichert diese Erkenntnis ab – aber richtiges Würfeln ist für Schüler von Klasse 7 bis zum Abitur wegen der emotionalen Betroffenheit und des tatsächlichen Handelns *sehr* viel überzeugender als Computersimulieren!

Man hält folgende statistische Entscheidungsregel fest:

Einen Stift kann man bis zu einem Testwert t=11 als „fair“ durchgehen lassen, bei höheren Testwerten sind Zweifel an der Fairness angebracht.

Würfeln mit Bleistiften: Durch Simulation Hypothesen bewerten Kopiervorlage

Bleistiftwürfel: Die Leimung verschiedener Hölzer könnte die Symmetrie beeinflussen

Wenn sie die Seiten IHRES Bleistiftes mit den Augenzahlen 1, 2, ..., 6 beschriften und diesen Stift über den Tisch rollen lassen, haben sie einen „Bleistiftwürfel". Ist er fair, d. h.: ***Werden alle Seiten IHRES Bleistifts mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 „gewürfelt"?*** Sie werden vermutlich sagen: „Klar, doch, symmetrischer als ein Sechskant-Bleistift kann man doch gar nicht sein". Aber gar nicht so selten erlebt man ein „blaues Wunder....

1 Rollen sie ihren Bleistift 120-mal. Zählen sie, wie oft die einzelnen Seiten auftraten. Können sie obige Frage für ihren Bleistift schon intuitiv beantworten?
2 Bei einem fairen Bleistift erwartet man jede Seite ca. 20-mal. Messen Sie die Abweichungen von der Gleichverteilung durch Berechnung des Testwertes $t = \frac{(n_1-20)^2}{20} + \frac{(n_2-20)^2}{20} + \ldots + \frac{(n_6-20)^2}{20}$

wie in Fig. 1, wobei $n_1, n_2, \ldots, n_6$ die Häufigkeiten der sechs Seiten bezeichnen.

- Begründen sie: Je kleiner der Testwert, desto fairer der Stift!
- Berechnen sie den Testwert für ihren eigenen Versuch.
- Entscheiden sie gefühlsmäßig durch Diskussion in einer Kleingruppe / im Plenum, ab welchem Testwert man die Annahme, es handle sich um einen fairen Stift, fallen lassen sollte.

3 Sichern sie ihr Kriterium ab, indem sie das Experiment mit einem normalen Spielwürfel (statt eines Bleistiftes) durchführen, alle Ergebnisse zusammentragen und dadurch erforschen, welche Testwerte ***bei fairen Würfeln*** selten (mit höchstens ca. 5% Wahrscheinlichkeit) auftreten.

i	1	2	3	4	5	6	Summe	Testwert
n(i)	15	23	21	23	20	18	120	Jan
(n(i)-20)²	25	9	1	9	0	4	48	2.4
n(i)	16	34	23	14	8	25	120	Lucia
(n(i)-20)²	16	196	9	36	144	25	426	21.3

Fig. 1: Jan ist zufrieden, Lucia zweifelt...

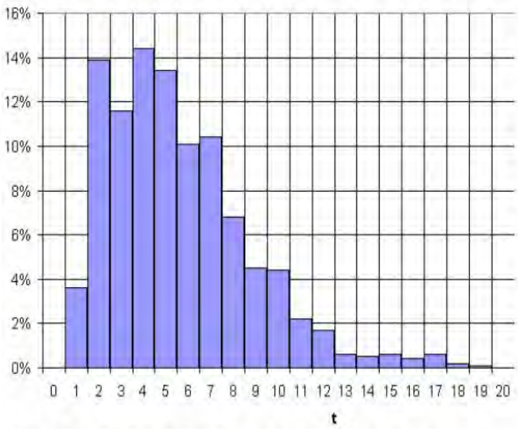
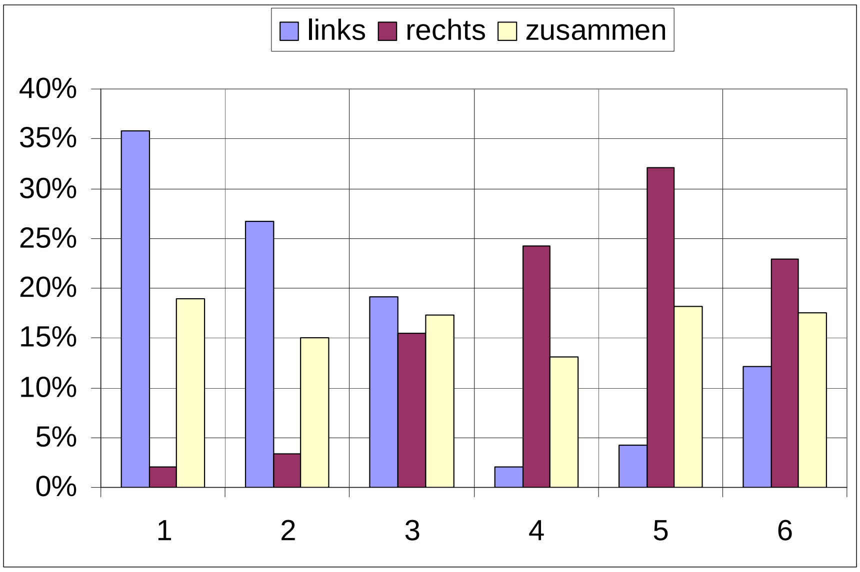


Fig. 2: Verteilung von t bei fairen Würfeln

4 Nutzen sie zusätzlich eine Tabellenkalkulation, um über den Befehl =Zufallsbereich(1;6) die Verteilung der Testwerte t bei fairen Würfeln zu studieren und das Ergebnis aus 3 zu prüfen.
5 Überprüfen sie folgende Vermutung: Wenn man mit einem fairen Würfel statt 120 nur 60-mal würfelt und bei der Berechnung des Testwertes in Zähler und Nenner 20 durch 10 ersetzt, ändert sich die Verteilung der Testwerte nicht.
6 Wenn bei ihrem Bleistift einzelne Seiten zu häufig oder zu selten auftreten, wiederholen sie den Versuch mit geänderter Rollrichtung. Studieren sie, ob sich dadurch die Wahrscheinlichkeiten ändern.

Damit können nur 6 der 24 untersuchten Stifte als „fair“ akzeptiert werden. Wer hätte das gedacht? Noch viel überraschender ist die Entdeckung, dass die Wahrscheinlichkeiten vieler Bleistifte von der Rollrichtung abhängen, wie das folgende Säulendiagramm belegt. Der hier zugrunde liegende Stift rollte 240-mal linksherum (t=124) und 240-mal rechtsherum (t=104). Wenn man beide Teilexperimente zu einem 480-er Experiment zusammenfasst, kompensieren sich die Abweichungen von der Gleichverteilung, dann könnte dieser Stift mit einem Testwert t=7 noch als fair „durchgehen“.



Die Kopiervorlage auf der vorigen Seite lädt Schüler zum Bleistiftforschen an, insbesondere auch zum Erkunden, warum man bei der Testgröße t durch 20 dividiert.

Eine Fülle weiterer authentischer Experimente die im Sinne des Titels wie „Leuchttürme“ im Kursverlauf der beurteilenden Statistik Sinn stiften und an die man sich auch lange nach dem Abitur mit Vergnügen erinnert findet man auf der Website des Autors: **www.riemer-koeln.de** .

Uber diese Website kann man Würfelbleistifte auch in Klassensatzstärke bestellen – und Auswertungsvorlagen herunterladen.

Literatur

Riemer, W. (2012): Mit Bleistiften würfeln. Beurteilende Statistik zwischen Realität und Simulation. In: Praxis der Mathematik, 43, 30-35. (Excel-Version).

Riemer, W. – Seebach, G. (2011): Bleistiftrollen – beurteilende Statistik im Federmäppchen. In R. Kaenders & al. (Hrsg.): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Wiesbaden: Vieweg-Teubner, 69-83.

Riemer, W. (2012): Statistik mit Red Bull. In: mathematiklehren, 175, 54-59.

Lambacher-Schweizer: Stochastik (2012): Stuttgart: Klett, 84 und 145. Online-Links www.klett.de 735710-0841 und 735710-1451.

Michael RIEß, Münster

Digitale Werkzeuge und funktionales Denken – Ergebnisse einer Langzeitstudie in der Sekundarstufe I

Während die groß angelegten Langzeitstudien zum Einsatz digitaler Werkzeuge in Deutschland wie CALiMERO oder M³ (vgl. Ingelmann & Bruder 2007, Bichler & Weigand 2010) an Gymnasien durchgeführt wurden, untersucht das Projekt CASI den Einsatz von Taschencomputern mit Computeralgebrasystem (CAS) an Real- und Gesamtschulen am Ende der Sekundarstufe I. Die in diesem Artikel vorgestellten Ergebnisse resultieren aus Leistungstests, die im Rahmen einer Unterrichtseinheit zu quadratischen Gleichungen und Funktionen durchgeführt wurden.

1. Computereinsatz im Mathematikunterricht und Funktionen

Das digitale Werkzeug, in diesem speziellen Fall der Taschencomputer mit CAS, besitzt die Fähigkeit schnell und unkompliziert zwischen den verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (Swan 1982) Tabelle, Graph und algebraischer Ausdruck wechseln zu können (Hollar & Norwood 1999). Daher gab es bereits Ende der 90er-Jahre eine große Anzahl an Veröffentlichungen, die sich dieses Themenbereichs annahmen. O'Callaghan (1998) beobachtete beispielsweise bei den mit CAS unterrichteten Schülern sowohl besseres Wissen über die einzelnen Komponenten des Modellierens, Interpretierens und Wechselns der Darstellungen als auch ein generell besseres Verständnis des Funktionskonzepts. Schwarz und Hershkowitz (1999) berichten von einem umfassenderen „concept image" von Funktionen, wenn man Schüler mit CAS unterrichtet.

Auch in deutschen Studien wurden in diesem Themenfeld Ergebnisse berichtet. Bichler und Weigand (2007) beobachten bessere Ergebnisse der Projektschüler bei dem Wechsel zwischen Graph und Funktionsgleichung. Sie berichten auch über Probleme bei der Nutzung problemadäquater Darstellungsformen auch noch nach einem Jahr Erfahrung mit dem digitalen Werkzeug. Während Bichler und Weigand gemischte Eindrücke der Leistungssteigerung von schwachen Schülern beobachten, war der Leistungszuwachs in der Gruppe der schwächeren Schüler bei Ingelmann und Bruder (2007) signifikant höher als in den anderen Gruppen.

2. Das Projekt CASI

Das Ziel des von Prof. Gilbert Greefrath geleiteten Projekts CASI (<u>C</u>omputer<u>a</u>lgebrasystemeinsatz in der <u>S</u>ekundarstufe <u>I</u>) ist die Förderung, Erprobung und Untersuchung der Nutzung von digitalen Werkzeugen auf Realschulniveau am Ende der Sekundarstufe I. Zu diesem Zweck wurden in den Schuljahren 2009/10 und 2010/11 10 Projektklassen an 5 Schulen mit dem Taschencomputer CASIO Classpad ausgestattet. Der CAS-Taschenrechner stand den Schülern dabei sowohl in der Schule als auch zuhause zur Verfügung und wurde von den Projektlehrkräften nach eigenem Ermessen eingesetzt. Die Parallelklassen der Schulen dienten als Kontrollgruppe für die Kompetenztests.

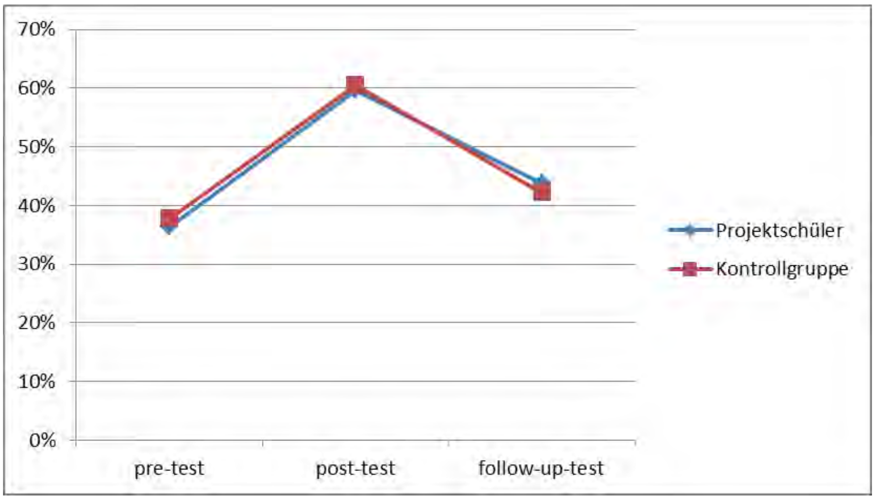
Im Rahmen des Projekts wurden 5 Unterrichtseinheiten besonders beobachtet, unter anderem eine Unterrichtseinheit zu quadratischen Gleichungen und Funktionen. Zu diesen wurden auf Projekttreffen Kompetenzen der Schüler mit und ohne technische Hilfe sowie einige Aufgaben vereinbart und Kompetenztests im Pre-/Posttestdesign durchgeführt. Wann immer es für sinnvoll erachtet wurde, gab es Testteile, bei denen jeglicher Technologieeinsatz untersagt war. Bei den Themengebieten im Bereich des funktionalen Denkens, die aus den oben erwähnten Gründen von besonderem Interesse waren, wurden die Testaufgaben im Hinblick auf Übersetzungsfertigkeiten parallel gestaltet. Weiterhin wichtig für die Planung dieser Unterrichtseinheiten war die vielfältige Verwendung des Rechners. (Greefrath 2010).

Weiterhin wurden zu drei Zeitpunkten Einstellungsfragebögen ausgegeben, tabellarische Stundenprotokolle über den Einsatz des digitalen Werkzeugs geführt und qualitative Untersuchungen der Schülerprodukte angestellt. Für die bisher publizierten Ergebnisse dieser Erhebungsmethoden sei auf die Veröffentlichungen Greefrath & Rieß (2012, 1013) sowie Rieß & Greefrath (2011) verwiesen.

3. Testdesign und Ergebnisse

Die in diesem Artikel vorgestellten Ergebnisse entstammen dem Pre-, Post- und Follow-up-Test zu der Unterrichtseinheit über quadratische Gleichungen und Funktionen. Diese Unterrichtseinheit fand nach ungefähr 2 Monaten des zweiten Projektjahres statt und dauerte bis zu dessen Mitte. Der Follow-up-Test fand ca. 4 Monate nach Abschluss der Unterrichtseinheit ohne vorherige Wiederholung statt. Alle drei Tests enthielten auch einen hilfsmittelfreien Testteil. Die Auswertung der Tests erfolgte nach mit skalierender Inhaltsanalyse in Form eines kriteriengeleiteten Punkteschemas.

Im folgenden Diagramm sind die Ergebnisse der Schüler abgetragen, die an alle drei Tests teilnehmen konnten (Projektschüler N=131, Kontrollgruppe N=67). Es gibt zu keinem der Testzeitpunkte einen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen, wobei die Projektschüler an den ersten beiden Zeitpunkten tendenziell schlechter und beim Follow-up-Test tendenziell besser als die Kontrollgruppe abschnitten. Die Betrachtung der einzelnen Aufgaben zeigt, dass auch im hilfmittelfreien Teil zu keinem Testzeitpunkt ein signifikanter Unterschied zu beobachten war.



Um einen ergänzenden Einblick zu bekommen, wurden zusätzlich die Ergebnisse aller Schüler, die an mindestens zwei Tests, von denen einer der Follow-up-Test ist, teilgenommen haben, betrachtet. Dort ist im Post- und Follow-up-Test ein signifikant besseres Abschneiden der Projektschüler zu beobachten. Dieses ist zu einem großen Teil auf eine Aufgabe zurückzuführen ist, bei der Graphen ihren Gleichungen und diese dann speziellen Punkten zugeordnet werden müssen. Die detaillierten Resultate dieser Aufgabe sind in dieser Tabelle zusammengefasst:

Test	Mittelw. Projektgr.	Mittelw. Kontr.gr.	St.Abw. Projektgr.	St.Abw. Kontr.gr.	t	df	p	r
Pre	59%	48%	34%	36%	2.294	233	.03	0.148
Post	91%	84%	19%	23%	2.342	157	.02	0.157
Follow-up	83%	64%	26%	33%	4.917	161	.001	0.301

Die hilfsmittelfreien Fertigkeiten zeigen auch bei dieser Betrachtung selten signifikante Unterschiede. Vereinzelt schnitten die Projektschüler bei diesen Aufgaben signifikant besser ab. Für eine detailliertere Beschreibung der Ergebnisse und speziell dieser Schülerauswahl sei auf Rieß & Greefrath (2013) verwiesen.

4. Diskussion

Bei der Bearbeitung der gestellten Testaufgaben zeigten sich keine Leistungsunterschiede zwischen der Projekt- und der Kontrollgruppe. Es war im Projekt CASI also möglich, die Kompetenz der Projektschüler im Lösen von Aufgaben, die auch ohne den Taschencomputer gestellt werden konnten, mindestens zu erhalten, in den beobachteten Tendenzen sogar zu verbessern. Besonders hervorzuheben ist in diesem Zusammenhang, dass dies auch für den hilfsmittelfreien Teil Gültigkeit behält. Somit konnte ein Erhalt der Rechenfertigkeit erreicht werden.

Das auffallend gute Abschneiden bei der gesondert erwähnten Aufgabe ist sicherlich teilweise auf die Funktionen des ClassPads zurückzuführen. Wenn es sich dabei also eventuell auch nicht um eine Beobachtung höherer Leistungsfähigkeit handelt, so haben die Schüler in diesem Fall gezeigt, dass sie nach einem guten Jahr Erfahrung in der Lage waren, den Taschencomputer selbstständig und problemadäquat zu nutzen.

Literatur

Bichler, E., & Weigand, H.-G. (2010). Der Modellversuch "M3 - Medienintegration im Mathematikunterricht" an bayrischen Gymnasien. TI-Nachrichten, 10(1), 32–35.

Greefrath, G. (2010): Mit dem Computer qualitativ arbeiten?, Praxis der Mathematik in der Schule 52 Bd. 31, 20-24.

Greefrath, G., & Rieß, M. (2012). Using CAS-Handhelds at lower secondary Level - Results of an empirical Study. In Pre-Proceedings ot the 12th International Congress on Mathematical Education, July 8-15, 2012, Seoul, Korea (pp. 3823–3830). Seoul.

Greefrath, G., & Rieß, M. (2013, in print). Reality Based Test Tasks with Digital Tools at Lower Secondary. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), ICTMA 15. Springer.

Hollar, J. C., & Norwood, K. (1999). The Effects of a Graphing-Approach Intermediate Algebra Curriculum on Students' Understanding of Function. Journal for Research in Mathematics Education, 30(2), 220.

Ingelmann, M., & Bruder, R. (2007). Sinnvoller Einsatz von CAS in den Klassen 7 und 8. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik präsentiert: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. (pp. 94–97). Hildesheim: Franzbecker.

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions. Journal for Research in Mathematics Education, 29(1), 21.

Rieß, M., Greefrath, G. (2011). Das Projekt CASI: Ergebnisse aus dem ersten Projektjahr, Beiträge zum Mathematikunterricht 2011.

Rieß, M., Greefrath, G. (2013). Results on the function concept of lower achieving students using handheld cas-calculators in a long-term Study. Proceedings of the eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. February 2013, Antalya (Turkey).

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. Journal for Research in Mathematics Education, 30(4), 362-389.

Swan, M. (1982). The teaching of functions and graphs. In G. van Barneveld & H. Krabbendam (Eds.), Conference on functions. Conference report (Vol. 1, pp. 151–165).

Tobias ROLFES, Jürgen ROTH, Wolfgang SCHNOTZ, Landau

Der Kovariationsaspekt von Funktionen in der Sekundarstufe I

1. Die Bedeutung des Kovariationsaspekts

Zwei Aspekte von funktionalen Zusammenhängen werden in der mathematikdidaktischen Forschung herausgestellt (Malle, 2000; Thompson, 1994; Vollrath, 1989). Beim Aspekt der Zuordnung wird jedem Wert des Definitionsbereichs genau ein Wert des Wertebereichs zugeordnet. Beim Aspekt des Änderungsverhaltens – auch Kovariationsaspekt genannt – wird die Sicht des funktionalen Zusammenhangs um eine dynamische Komponente ergänzt: In welcher Weise verändert sich der Wert der abhängigen Variable, wenn der Wert der unabhängigen Variable systematisch verändert wird?

Bei der Behandlung von Funktionen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I wird vorwiegend die Zuordnungssicht angewendet (Malle, 2000). Es ist aber fraglich, ob ein adäquates mentales Modell des Konzepts der Funktion ohne Berücksichtigung des Kovariationsaspektes erzeugt werden kann (Vogel, 2006). Außerdem ist ein Verständnis des Kovariationsaspektes für die Infinitesimalrechnung – als dominantes Themengebiet der Oberstufe – unerlässlich. Dieses führt zu der Frage, ob Verständnisprobleme in der Analysis nicht auch in der zu späten schulischen Anbahnung des Kovariationsaspektes zu suchen sind.

Neben der Relevanz für den Erfolg in der Schule und ggf. Hochschule kann ein Grundverständnis für Änderungsverhalten auch als Element der mathematischen Grundbildung angesehen werden. Gerade in der modernen Industriegesellschaft ist der Mensch einer Vielzahl von dynamischen Vorgängen ausgesetzt, die ein Denken in Veränderungen erforderlich machen: In welcher Weise muss der CO_2-Ausstoß verringert werden, damit ein globaler Temperaturanstieg aufgehalten wird? Reduziert sich mit einer sinkenden Neuverschuldung auch der Schuldenstand?

In den Standards des National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) wurde der Bedeutung des Denkens in Veränderungen dadurch Rechnung getragen, dass der Aspekt *Analyze change in various contexts* als eine von vier Unterkategorien des Themengebietes Algebra für alle Jahrgangsstufen aufgenommen wurde (NCTM, 2000). In den deutschen Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss ist der Kovariationsaspekt hingegen nicht explizit erwähnt. Untersuchungen, in welcher Form der Kovariationsaspekt in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I implementiert werden kann und welche Schwierigkeiten hierbei bei den Lernenden entstehen, sind nur in Ansätzen vorhanden (z.B. Hahn, 2008).

2. Problembereich verbale Repräsentationen

Soll der Kovariationsaspekt in der frühen Sekundarstufe I verstärkt implementiert werden, so ist die formal-symbolische Algebra nur eingeschränkt hilfreich. Als Alternative bietet sich an, Änderungsverhalten mit Hilfe von verbalen Repräsentationen zu analysieren und zu beschreiben.

Eine verbale Repräsentation für die Behandlung des Kovariationsaspekts ist der Begriff der *Steigung*. Der Begriff hat den didaktischen Vorteil, dass die Lernenden auf Alltagserfahrungen (z.B. aus dem Straßenverkehr) zurückgreifen können. Andererseits ist er aber an eine graphische Sichtweise gebunden, da an einer Wertetabelle die Steigung nicht direkt ersichtlich ist. Erst wenn die Werte der Tabelle in einen Graph übertragen werden, erhält die Bezeichnung Steigung eine visuell fassbare Bedeutung.

Darüber hinaus zeigen Zaslavski, Sela und Leron (2002), dass der Begriff der Steigung auf Grund seiner visuellen Grundlegung Probleme bereiten kann. Falls die Abszisse und die Ordinate nicht gleichartig skaliert sind, kann eine visuell flache Gerade durchaus eine sehr große Steigung aufweisen. Gerade durch den zunehmenden schulischen Einsatz von graphischen Taschenrechnern und Computerprogrammen ist dieses Problem des Steigungsbegriffs nicht zu unterschätzen.

Eine alternative verbale Repräsentation stellt der Begriff der *Änderungsrate* dar. Er ist nicht an eine bestimmte Repräsentationsform gebunden, sondern sowohl in situativen Beschreibungen, als auch in Wertetabellen, Diagrammen und Graphen erfassbar. Allerdings ist die Verknüpfung von Änderungsrate und Steigung nicht selbstverständlich, wie Postelnicu (2011) in einer Untersuchung zeigt. So sollten Schüler der Klassenstufen 8 bis 10 die Geschwindigkeit und die Steigung eines linearen Zeit-Weg-Graphen bestimmen. Etwa 45% der Probanden bestimmten die Geschwindigkeit richtig. Von diesen Personen konnte allerdings nur rund die Hälfte die Steigung richtig bestimmen, obwohl sie denselben numerischen Wert wie die Änderungsrate (hier die Geschwindigkeit) hat. Aus diesem empirischen Ergebnis lässt sich folgern, dass Steigung und Änderungsrate für viele Schüler als unterschiedliche Konzepte wahrgenommen werden und die Änderungsrate das intuitiv zugänglichere Konzept sein könnte.

Die mehrdeutige Verwendung des Begriffs Änderungsrate stellt allerdings eine nicht zu unterschätzenden Problematik dar. So werden sowohl *absolute* Änderungsraten (z.B. Geschwindigkeit, Benzinverbrauch oder Ableitung) als auch *relative* Änderungsraten (z.B. Inflationsrate, Wirtschaftswachstum oder Zinssatz) im Alltag und in der Mathematik verwendet. Thompson (1994) präsentierte Mathematiklehrern und -dozenten einen

Graphen mit der Preisentwicklung in den USA zwischen 1928 und 1992 (Abb. 1) und fragte die Versuchsteilnehmer nach dem Zeitraum der höchsten Inflationsrate. Viele Teilnehmer nannten hierbei den Zeitraum der größten absoluten Änderungsrate in den achtziger Jahren und nicht den Zeitraum der größten relativen Änderungsrate nach dem Ende des Zweiten Weltkriegs. Obwohl die Versuchsteilnehmer eine intensive mathematische Vorbildung aufwiesen, verwechselten sie die relative und die absolute Änderungsrate. Es ist davon auszugehen, dass dieses Problem bei Schülern der Sekundarstufe I noch stärker auftritt. Da bereits in den Klassenstufen 7 und 8 mit absoluten Änderungsraten (Steigung einer linearen Funktion) und relativen Änderungsraten (Zinssatz) gearbeitet wird, kann dieser Unterschied nicht ignoriert werden.

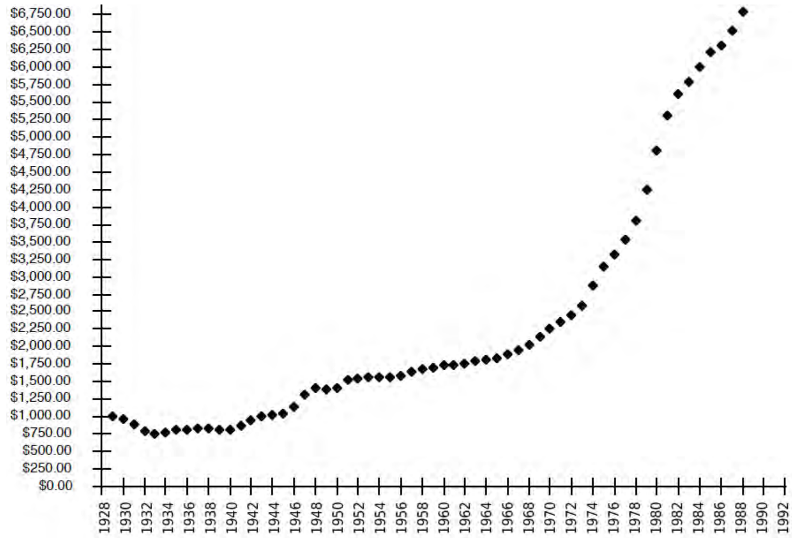


Abb. 1: Zeitraum der höchsten Inflationsrate? (Thompson, 1994)

3. Problembereich graphische Repräsentationsform

In einer Unterrichtsdoppelstunde wurde vom Erstautor mit 27 Schülern einer 7. Klasse eines Gymnasiums eine Unterrichtseinheit zur Förderung des Denkens in Veränderungen durchgeführt. Nach etwa 40 Minuten Instruktion erhielten die Schüler einen Papier-und-Bleistift-Test. Hierbei enthielten zwei Aufgaben eine nahezu identische situative Beschreibung eines Wachstumsvorgangs, wobei einmal eine Wertetabelle und einmal ein Graph erzeugt werden sollte. Bei der quantitativen Auswertung zeigte sich, dass die Lösungsrate bei der Wertetabelle signifikant höher war als beim Graphen (Vorzeichentest, $p < .001$, $g = .35$).

Betrachtet man die Realität im Mathematikunterricht, so wird die Wertetabelle vielfach als Hilfsmittel für die Erzeugung eines Graphen verwendet, mit dem dann weitergearbeitet wird. Das dargestellte Ergebnis unterstreicht die Tatsache, dass die Wertetabelle eine wertvolle eigenständige Repräsentationsform für die Analyse des Änderungsverhaltens darstellt und als solche verstärkt genutzt werden sollte.

4. Diskussion

Angesichts der dargelegten Probleme mit dem Begriff der Steigung ist eine stärkere Verwendung des Begriffs der Änderungsrate im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I zu erwägen. So könnte z. B. bei Anwendungsaufgaben zu linearen Zusammenhängen eine bewusste Verknüpfung der Begriffe Steigung und Änderungsrate förderlich für die Entwicklung eines tragfähigen Grundverständnisses für das Änderungsverhalten sein.

Auf Grund der höheren Lösungsrate bei der Konstruktion einer Tabelle im Vergleich zum Graphen stellt sich die Frage, ob die Tabelle für Schüler bei bestimmten Typen von Kovariationsaufgaben leichter zugänglich ist als der Graph. Die hier verwendeten Aufgaben zielten auf die Konstruktion von Repräsentationsformen aus numerischen Angaben zu Änderungen. Es bleibt zu untersuchen, ob auch bei Interpretationsaufgaben im Hinblick auf den Kovariationsaspekt die Wertetabelle für Schüler leichter zugänglich ist als der Funktionsgraph. Darüber hinaus ist zu klären, ob bei qualitativen Analysen eventuell der Graph einen leichteren Zugang zum Änderungsverhalten ermöglicht. Die Klärung dieser Fragen ist wesentlich für ein Unterrichtskonzept zur Entwicklung eines Grundverständnisses für das Änderungsverhalten in der Sekundarstufe I.

Literatur

Hahn, S. (2008). *Bestand und Änderung: Grundlegung einer vorstellungsorientierten Differentialrechnung*. Oldenburg: Didaktisches Zentrum, Carl-von-Ossietzky Universität.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, (103), 8–11.

National Council of Teachers of Mathematics (Hg.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Postelnicu, V. (2011). *Student Difficulties with Linearity and Linear Functions and Teachers' Understanding of Student Difficulties*. Dissertation, Arizona State University. Verfügbar unter http://repository.asu.edu/attachments/56417/content/Postelnicu_asu_0010E_10384.pdf.

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Hg.), *Research in Collegiate Mathematics Education I* (S. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Heidelberg: Franzbecker.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10, 3–37.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49* (1), 119–140.

Katrin ROLKA, Wuppertal

Fermi-Fragen als Einstieg in bilingualen Mathematikunterricht

In Deutschland gibt es bilingualen Unterricht mittlerweile in fast allen Bundesländern, und das mit steigender Tendenz (Bach, 2010). Aus der Tradition heraus werden auch heute noch überwiegend die Fächer Geographie, Geschichte und Politik bilingual unterrichtet, aber seit etlichen Jahren findet bilinguales Lernen zunehmend auch in Biologie, Chemie und Physik statt. Neuerdings werden auch die Fächer Kunst, Musik und Sport in Überlegungen zum bilingualen Unterricht mit einbezogen. In der überblicksartigen Aufzählung der bilingualen Sachfächer bei Bach (2010) fällt auf, dass Mathematik keinerlei Berücksichtigung findet. Auch wenn es durchaus Bemühungen gibt, eine Fremdsprache als Arbeitssprache im Mathematikunterricht einzusetzen, so kann dennoch die Frage gestellt werden, warum Mathematik in Diskussionen zum bilingualen Unterricht eher selten einbezogen wird. Antworten auf diese Fragen liefern den Anlass dafür, Fermi-Fragen (z.B. Büchter et al., 2007) als Einstieg in bilingualen Mathematikunterricht zu berücksichtigen und Ergebnisse aus einem entsprechenden Maths-English-project vorzustellen.

1. Argumente für bilingualen Unterricht

In der fremdsprachendidaktischen Literatur werden vielfach zwei Argumente für die Eignung eines Faches für bilingualen Unterricht genannt. Zum einen sind dies zahlreiche Anlässe zur Verwendung von Sprache, zum anderen betrifft dies Möglichkeiten für landeskundliche oder interkulturelle Bezüge (Mäsch, 1995). Auch die Antworten von im Rahmen einer kleinen Interviewstudie (Rolka, 2004) befragten Lehrkräften weisen in eine ähnliche Richtung. Insbesondere nach der Konkretisierung für den Mathematikunterricht gefragt, verneinen die Lehrkräfte z. T. vehement die Möglichkeit, dass Mathematik mit Blick auf reichhaltige sprachliche Anlässe sowie interkulturelle Bezüge einen Beitrag leisten könne. Nach der Rolle der Sprache im Mathematikunterricht gefragt, antwortet beispielsweise ein Lehrer wie folgt (Rolka, 2012): „Im Mathematikunterricht liegen sprachreduzierte Vorgänge vor. Es geht um Zahlen, Formeln und Rechnen. Sprache spielt da kaum eine Rolle.“ Weitere Zitate aus der Studie sowie Hintergründe zu den zugrunde liegenden mathematischen Weltbildern finden sich in Rolka (2012).

In der Mathematikdidaktik ist hinlänglich bekannt, dass es zahlreiche Publikationen zu beiden Forschungsrichtungen gibt (z. B. Gallin & Ruf, 1993;

Maier & Schweiger, 1999 zur Sprache sowie z. B. Prediger & Schroeder, 2003; Presmeg, 1998 zum interkulturellen Lernen). Ebenso ist unstrittig, dass es noch weitere Argumente für den Einsatz einer Fremdsprache im Mathematikunterricht gibt (z. B. Rolka, 2012). In diesem Beitrag knüpfe ich bewusst an die beiden oben angeführten Argumente „Rolle der Sprache“ sowie „interkulturelle Bezüge“ an, um aufzuzeigen, inwiefern der Einsatz von Fermi-Fragen im bilingualen Mathematikunterricht genau diesen beiden Argumenten Rechnung tragen kann.

2. Hintergründe zum bilingualen Unterrichtsprojekt

An dem Maths-English-project nahmen 26 Schülerinnen und Schüler eines Gymnasiums in Nordrhein-Westfalen aus Klasse 7 teil. Das Projekt erstreckte sich über vier aufeinander folgende Unterrichtsstunden – regulär im Stundenplan fanden jeweils eine Doppelstunde Mathematik und Englisch statt, so dass sich diese kompakte Durchführung anbot.

Nach einer kurzen Einführung in Hintergründe zu Fermi-Fragen wurden die Schülerinnen und Schüler in sechs Gruppen zu je vier oder fünf Personen eingeteilt. Jeweils zwei Gruppen arbeiteten unabhängig voneinander an einer der drei folgenden Fermi-Fragen:

- How many hours has an American student at your age already spent in school? Compare with yourself.
- How much gasoline is used by all cars in the United States of America every year? Compare with Germany.
- How heavy are the burgers an American eats in a year?

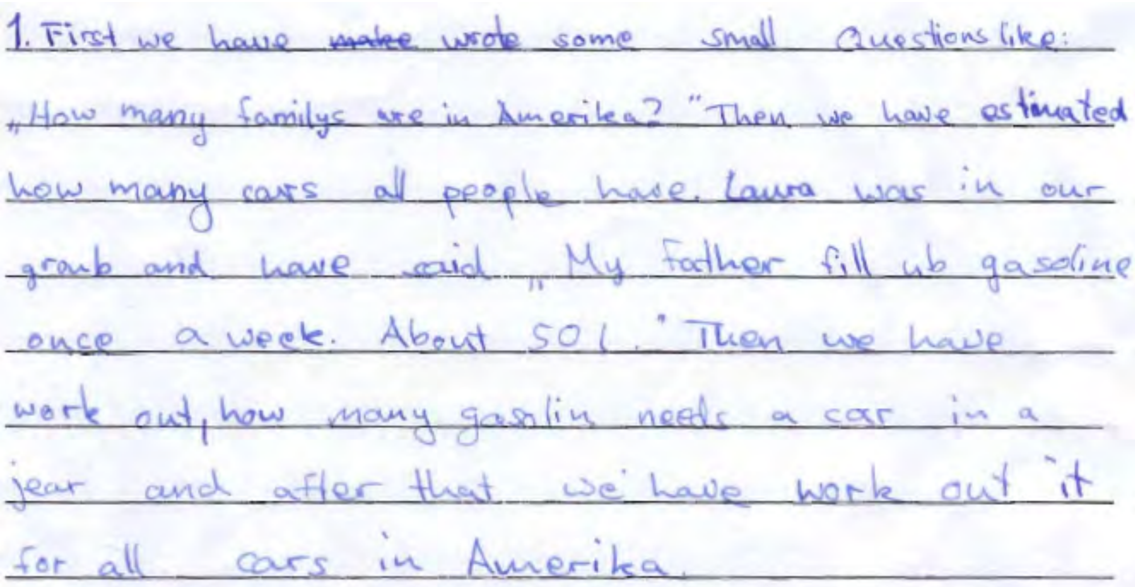
Diese drei Fermi-Fragen bieten zahlreiche Möglichkeiten, um landeskundliche Bezüge zu thematisieren – nicht zuletzt auch durch das bewusste Aufgreifen von Stereotypen, die im Rahmen des Unterrichtes behandelt werden können.

Die Schülerinnen und Schüler hatten in ihrer Gruppe zunächst Zeit zur Bearbeitung ihrer Fermi-Frage und sollten anschließend ein Plakat anfertigen, auf dem sie ihre Vorgehensweise und ihren Lösungsweg auf Englisch darstellen. Als Vorbereitung auf die Präsentation vor der Klasse wurde eine „Murmelphase“ durchgeführt, in der die Schülerinnen und Schüler ihren Vortrag leise proben konnten. Zu jeder der drei Fermi-Fragen präsentierte nur eine Gruppe ihr Plakat und die jeweils andere Gruppe, die auch diese Frage bearbeitet hatte, stellte Ähnlichkeiten sowie Unterschiede zu ihrer Vorgehensweise heraus. Als Arbeitsauftrag für zu Hause sollten folgende Reflexionsfragen von jedem einzeln auf Englisch beantwortet werden:

- Describe the steps you took to get an answer to the question. Use the simple past. Write a paragraph for each step and use linking words, e.g. “First, …“, „Then...“, „After that...“.
- Which difficulties did you have? What did you do to overcome them?
- How did you like our Maths-English-project?

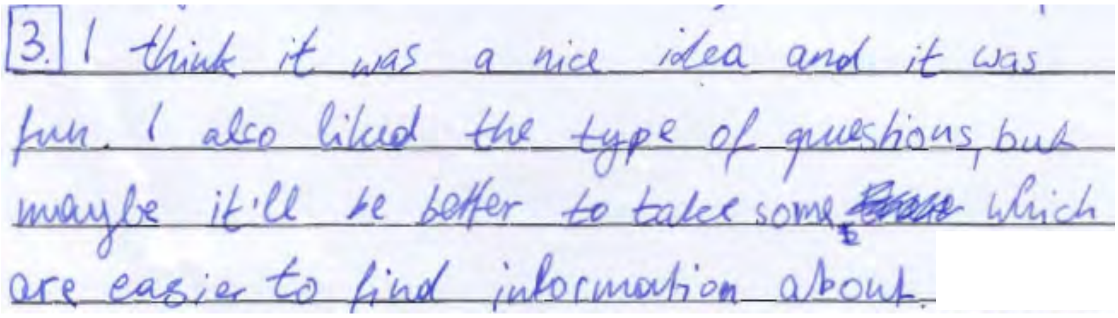
3. Einblick in Ergebnisse des bilingualen Unterrichtsprojektes

Aus Platzgründen ist es nicht möglich, die von den Schülerinnen und Schülern angefertigten Plakate einzufügen. Die Darstellung auf den Plakaten lässt allerdings erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst Teilfragen formulierten, um sich nach und nach einer Antwort an ihre Fermi-Frage zu nähern. So überlegten die Schülerinnen und Schüler beispielsweise bei der „Schulzeit-Fermi-Frage“ zunächst, an wie vielen Stunden pro Tag in Amerika Schule stattfindet, wie viele Ferien es gibt und wie viel Unterricht anderweitig ausfallen könnte. Diese allgemeine Strategie der Problemzerlegung (vgl. auch Büchter et al., 2007) wird auch durch Antworten der Schülerinnen und Schüler im Rahmen der ersten Reflexionsfrage zu ihrer Vorgehensweise bestätigt, wie exemplarisch ein Auszug aus der Antwort eines Schülers zur „Kraftstoff-Fermi-Frage“ verdeutlicht:


1. First we have ~~make~~ wrote some small Questions like: „How many familys are in Amerika?“ Then we have estimated how many cars all people have. Laura was in our graub and have said „My father fill ub gasoline once a week. About 50 l.“ Then we have work out, how many gaslin needs a car in a year and after that we have work out it for all cars in Amerika.

Die erwähnte Schülerin greift auf ihre Alltagserfahrung zurück, um einen Schätzwert für den Kraftstoffverbrauch anzugeben. Hier finden sich natürlich viele Anknüpfungspunkte, um landeskundliche Aspekte mit Blick auf die Autokultur in Amerika aufzugreifen und zu thematisieren. Weitere Anlässe für sprachliche Auseinandersetzungen oder zum Hinterfragen der getätigten Annahmen liefern natürlich auch die von den Schülerinnen und Schülern gefundenen Ergebnisse. So gibt etwa die eine Gruppe zur „Schulzeit-Fermi-Frage“ 8500 Stunden als Antwort an, die andere Gruppe 243 Milliarden.

Von den 26 Schülerinnen und Schüler haben 18 die Frage nach der Bewertung des bilingualen Unterrichtsprojektes beantwortet, darunter waren 14 positive und 4 negative Antworten. Ein Beispiel für eine positive Antwort, die wiederum Möglichkeiten zur Diskussion über die Art der Fragen sowie Sinn und Zweck von Fermi-Fragen bietet, ist das folgende Zitat eines Schülers:


3. I think it was a nice idea and it was fun. I also liked the type of questions, but maybe it'll be better to take some which are easier to find information about.

4. Ausblick

Im Vergleich zu durchgängig bilingualem Unterricht, bei dem über ein komplettes Schuljahr eine Fremdsprache in dem entsprechenden Sachfach verwendet wird, oder auch im Vergleich zu flexiblen bilingualen Modulen, die sich in der Regel über eine gesamte Unterrichtseinheit erstrecken, sind Fermi-Fragen ein sehr überschaubarer Einstieg in bilingualen Mathematikunterricht. Darüber hinaus bieten Fermi-Fragen zahlreiche Möglichkeiten zur Verwendung von Sprache sowie für landeskundliche Bezüge.

Natürlich besteht der häufige Einwand, dass durch die Fremdsprache doch zusätzliche Schwierigkeiten davor geschaltet würden. Damit verbunden ist die Frage, was denn der Mathematikunterricht von diesem zusätzlichen Aufwand habe. Zunächst sind es sicherlich die überwiegend positiven Rückmeldungen der beteiligten Schülerinnen und Schüler, die hier anzuführen sind – auch aus anderen Projekten (Schmerbeck & Rolka, 2011). Des Weiteren können sich natürlich Schülerinnen und Schüler im bilingualen Mathematikunterricht entsprechend ihrer fremdsprachigen und/oder mathematischen Fähigkeiten und Vorlieben einbringen – welche oftmals eben nicht gleichermaßen ausgeprägt sind.

Welche Rolle allerdings die Fremdsprache mit Blick auf mathematisches Lernen und mathematisches Verständnis spielt, bleibt noch genauer zu untersuchen.

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann per E-Mail angefordert werden: rolka@math.uni-wuppertal.de.

Bettina RÖSKEN-WINTER, Jürg KRAMER, Bochum, Berlin

Lehrerfortbildungen als berufsbegleitende Erwachsenenbildung: Einfluss von Vorwissen und Auswirkungen auf die Praxis

Die „klassische" Lehrerfortbildung verschwindet mehr und mehr: Lehrer/innen werden für Fortbildungen häufig nicht freigestellt, Schulen haben wenig Mittel für Fortbildungen zur Verfügung, Fortbildungsprogramme sind wenig aufeinander abgestimmt und meistens befristet und letztlich fehlt es oftmals an Abstimmungen zwischen staatlichen Instanzen und anderen Trägern. Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung (DZLM) hat sich zum Ziel gesetzt, umfassende Angebote für *Continuous Professional Development* (CPD) der Mathematiklehrer/innen bereit zu halten und sie in ihrer gesamten Laufbahn zu begleiten. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf Angeboten, die sich an „Multiplikator/inn/en" richten wie (Fach)-berater, Fach(bereichs)leiter, Fortbildner, Mentoren, Moderatoren, Referenten usw. und welche in dieser Rolle verantwortlich für die Fort- und Weiterbildung von Lehrer/innen/n sind. Oftmals übernehmen Multiplikator/-inn/en diese Rolle ohne eine gezielte Ausbildung dafür zu erhalten, sie führen die Tätigkeit „nebenher" aus und es existieren kaum Qualifizierungsprogramme. Eines der Ziele des DZLM liegt darin, umfassende Fortbildungsprogramme für Multiplikatoren zu entwickeln und in Kooperation mit den Ländern anzubieten. Dieser Beitrag erörtert anhand nachstehender Fragestellungen wie dabei der Einfluss von Vorwissen und dessen Auswirkungen auf die Praxis in Multiplikatorenfortbildungen einbezogen wird:

- Wie werden Vorwissen und Vorerfahrungen in DZLM-Fortbildungen für Lehrkräfte und Multiplikatoren berücksichtigt?
- Welche Kompetenzen benötigen Multiplikatoren, insbesondere um Vorwissen und Vorerfahrungen berücksichtigen zu können?
- Wie werden Multiplikatoren darauf vorbereitet, Vorwissen und Vorerfahrungen von den Teilnehmenden (Lehrkräften) „ihrer" zukünftigen Fortbildungen zu berücksichtigen?

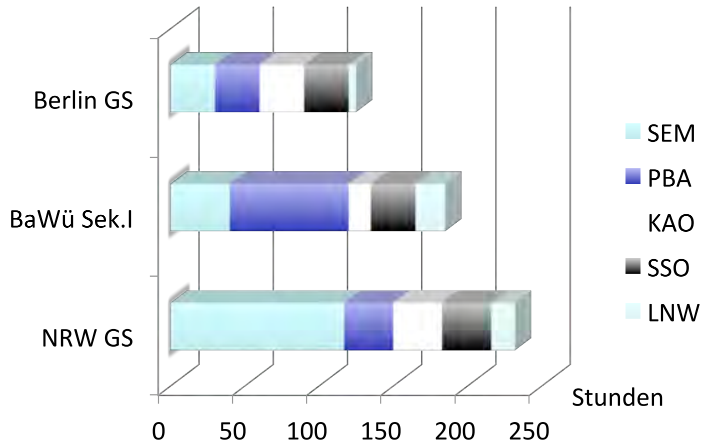
Theoretische Fundierung

Alle DZLM-Fortbildungsangebote orientieren sich inhaltlich an dem nachstehend beschriebenen Kompetenzrahmen. Unterschieden werden zunächst die kognitiven Facetten professioneller Kompetenz hinsichtlich des mathematischen, mathematikdidaktischen und pädagogischen Professionswissens (vgl. Baumert & Kunter, 2006). Dabei zeigen empirische Studien, dass diese fachbezogenen Facetten einen engen Zusammenhang aufweisen (Blömeke & Delaney, 2012). Weitere wichtige Parameter sind epistemologische Überzeugungen zur Natur der Mathematik (Goldin, Rösken & Törner, 2009) und selbstbezogene *Beliefs*. Darüber hinaus berücksichtigt der Kompetenzrahmen, dass die Angebote des DZLM computer- und internetbasierte Komponenten einbeziehen (Wassong & Biehler, 2010) und dass das CPD-Management für Multiplikatoren die Gestaltung von Fortbildungen und die schulische Begleitung umfasst. Alle DZLM-Fortbildungsangebote orientieren sich *methodisch*, unter Bezug auf die nationale und internationale Lehr-Lernforschung (vgl. Lipowsky, 2011; Lipowsky & Rzejak, 2012), an nachfolgenden Gestaltungsprinzipien: kompetenzorientiert (ergebnisorientiert, zieltransparent), teilnehmerorientiert (aktive Teilhabe), kooperationsanregend (gemeinsame Arbeit an Problemstellungen und Umsetzungen, Anregung langfristiger Zusammenarbeit), fallbezogen (Praxisbezug, Orientierung an den Praxiserfahrungen), vielfältig (verschiedene Vermittlungsformate, Verschränkung von Input-, Erprobungs- und Reflexionsphasen) und selbstreflexionsanregend (Vertiefung des Verständnisses der Lehr- und Lernprozesse).

DZLM-Fortbildungen für Multiplikator/inn/en

In den DZLM-Fortbildungen für Multiplikator/inn/en sind vier Themenkategorien integriert, welche *Inhaltsbereiche der Mathematik unter didaktischer Perspektive*, *kompetenzorientierten Mathematikunterricht*, *mathematische Lehr- und Lernprozesse* und die *Aus- und Weiterbildung von Multiplikator/inn/en* umfassen. Das letztgenannte Themenfeld setzt sich zusammen aus Aspekten der Didaktik der Erwachsenenbildung/Weiterbildung, Lehr-Lernmethoden der Weiterbildungsdidaktik, E-Learning, Beratung, Coaching und Peer-Learning, Reflexions- und Evaluationsmethoden und Seminarorganisation und Weiterbildungsplanung.

Für die Multiplikatorenschulung stehen verschiedene Vermittlungsformate zur Verfügung: Präsenzseminare zur intensiven Zusammenarbeit (SEM), praxisbasiertes Arbeiten im eigenen Unterricht/Fortbildungspraxis (PBA), kollaboratives Lernen online (KAO), Selbststudium online (SSO) und Erbringung von Leistungsnachweisen (LNW). Die nachstehende Übersicht zeigt die Realisierung verschiedener Formate für einzelne Moderatorenfortbildungen:



Der derzeit stattfindende Multiplikatorenkurs SEK I in NRW besteht aus zwei Modulen: Kompetenzorientierter Mathematikunterricht aus inhaltlicher (Modul 1) und aus prozessbezogener Perspektive (Modul 2). Das Modul 2 umfasst eine Gesamtzeit von 96 h für den Bereich HR und 120 h für den Bereich GyGe. Angeboten werden sieben Präsenz-Workshops, in welchen sieben verschiedene Themen wie beispielsweise Differenzieren, Diagnose, Umgang mit Fehlern und Verstehensorientierung behandelt werden.

Bezugnehmend auf die zu Beginn gestellten Eingangsfragen lässt sich für die Multiplikatorenfortbildung das Folgende festhalten: Den Rahmen für die Berücksichtigung des Vorwissens und der Vorerfahrungen in DZLM-Fortbildungen für Multiplikatoren bilden die Gestaltungsprinzipien. Jedes Thema wird wie in nachstehender Abbildung dargestellt in zwei Präsenz- und eine Distanzphase aufgeteilt:

Präsenz 1	Distanz	Präsenz 2
Impuls I	Erprobung Unterricht	Reflexion/ Impuls II

Präsenz 1
Ansetzen an Vorerfahrungen, theoretischer Input: Rahmungen und Systematisierungen, praktische Beispiele

Distanz
Erprobung: beispielsweise Schulbuchaufgaben auswählen, Schülerprodukte einholen

Präsenz 2
Praxisbeispiele aufarbeiten, gemeinsam Unterrichtskonzept erarbeiten, Fortbildung hinsichtlich der eigenen Fortbildungstätigkeit reflektieren

In der ersten Präsenz wird an die Vorerfahrungen der Teilnehmenden angeknüpft und ein theoretischer Rahmen für Systematisierungen angeboten. Während der Distanzphase erfolgt eine Erprobung im eigenen Unterricht, sodass zur Präsenz 2 die Praxisbeispiele aufgegriffen und in umfassende Unterrichtskonzepte integriert werden.

Eine Fundierung der Kompetenzorientierung wird auch durch die Abfrage von Vorwissen und Vorerfahrungen gewährleistet. Für das Thema *Prozessbezogene Kompetenzen* im Modul 2 wurde beispielsweise eine umfassende Abfrage zu den eigenen Erfahrungen in der Rolle als Lehrer/in und als Moderator/in in die Planung des Moduls einbezogen.

Zur Eingangsfrage Zwei, welche Kompetenzen Multiplikator/inn/en benötigen, um insbesondere Vorwissen und Vorerfahrungen berücksichtigen zu können, ist festzuhalten, dass eine Verschränkung von Professionswissen und CPD-Management den Kompetenzrahmen bildet. Diese Inhalte werden in Beantwortung der dritten Frage so umgesetzt, dass ein Perspektivwechsel vom Fortgebildeten zum Fortbildenden integriert wird. Durchlaufend findet eine Parallelisierung beider Ebenen hinsichtlich der Inhalte und auch der Gestaltung von Fortbildungen statt. Die Ebene der Fortbildungsdidaktik wird reflektiert hinsichtlich der Phasen einer Fortbildung: Anfangen, Erarbeiten, Beenden (vgl. Barzel & Prediger) zunächst auf allgemeiner Ebene und dann auf beispielhafter Ebene zu den Themen des Moduls.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9,* 469–520.

Blömeke, S. & Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: A review of the state of research. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 44* (3), 223–247.

Lipowsky, F. (2011). Theoretische Perspektiven und empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfort- und -weiterbildung. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 398–417). Münster: Waxmann.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen effektiver Lehrerfortbildungen. *Schulpädagogik heute, 5*(3), 1–17.

Goldin, G., Roesken, B., & Toerner, G. (2009). Beliefs – no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maaß & W. Schloeglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research resul*ts (pp. 9–28). Rotterdam: Sense Publishers.

Wassong, T. & Biehler, R. (2010). A model for teacher knowledge as a basis for online courses for professional development of statistics education. In C. Reading (Ed), *Proceedings of ICoTS 8*, Ljubljana, July 2010. Voorburg: IASE.

Jürgen ROTH, Rolf OECHSLER, Landau

Forschend lernen – Lernprozesse fördern

Am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau läuft gegenwärtig ein interdisziplinäres Forschungsprojekt, in dem Fachdidaktiker/innen (Mathematik, Chemie, Geografie), Pädagog/inn/en und Psycholog/inn/en zusammenarbeiten. Das Ziel ist die Vernetzung schulischer und außerschulischer Lernorte mit dem Fokus auf forschendes Lernen. Der Campus Landau ist zu diesem Zweck sehr gut aufgestellt. Hier gibt es eine Reihe von institutionalisierten außerschulischen Lernorten, wie etwa die Nawi-Werkstatt (Naturwissenschaften) und das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr". Außerdem existiert mit der CampusSchule ein Netzwerk von mit der Universität verbundenen Schulen, die an der konkreten forschungsbasierten Weiterentwicklung von Unterricht interessiert sind und mit denen über die Schuladministration fest verankerte Kooperationsvereinbarungen existieren.

1. Vernetzungsaspekte

Die Nachhaltigkeit außerschulischen Lernens, hängt entscheidend von der Vor- und Nachbereitung im Unterricht ab. Negative empirische Befunde zur Lernwirksamkeit von Schülerlaboren (vgl. Schmidt, Di Fuccia, Ralle 2011) sind auch auf die mangelnde Einbindung in den Unterricht zurückzuführen. Die Vernetzung zwischen den außerschulischen Lernorten und dem Lernort Schule wird deshalb im Rahmen dieses Projekts auf vielfache Weise realisiert. Zunächst wird an den außerschulischen Lernorten jeweils an einem Lehrplanthema gearbeitet, so dass die Vernetzung mit dem Lernort Schule bereits aus inhaltlichen Gründen unabdingbar ist. Lehrkräfte besuchen mit ihren Klassen unsere Schülerlabore, erhalten im Vorfeld Informationen zu den notwendigen Lernvoraussetzungen, bereiten auf dieser Grundlage die Arbeit in den Schülerlaboren vor und gewöhnen im Idealfall die Schüler/innen an schülerzentrierte Arbeitsweisen. Die Schüler/innen arbeiten an drei aufeinanderfolgenden Wochen jeweils für eine Doppelstunde in Kleingruppen im Schülerlabor und erhalten im Anschluss eine Hausaufgabe, die im schulischen Unterricht von der Lehrkraft kontrolliert wird. Für die Nachbereitung im Unterricht werden den Lehrkräften die Ergebnisse von durchgeführten Leistungstests als Diagnoseinstrument sowie Hinweise und Materialien für die weitere Arbeit am Thema zur Verfügung gestellt. Die Schüler/innen erhalten ihre Erarbeitungsergebnisse in Form von selbsterstellten Gruppenergebnisheften zum Reflektieren und Weiterarbeiten im Unterricht.

Neben dieser Verbindung der außerschulischen Lernorte mit dem Lernort Schule werden auch verschiedene außerschulische Lernorte miteinander vernetzt. Dies geschieht durch strukturgleiches Arbeiten in den Schülerlaboren, in denen jeweils anhand von Materialien, gegenständlichen Modellen, Computersimulationen und Forscherheften gearbeitet wird, die einerseits die Arbeitsaufträge enthalten und andererseits als Laborprotokoll dienen. Darüber hinaus durchlaufen die Schulklassen jeweils zwei Schülerlabore nacheinander, also z. B. erst die Nawi-Werkstatt und anschließend das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ oder umgekehrt. Auf diese Weise kann untersucht werden, ob sich die Arbeitsweise des forschenden Lernens in einem Schülerlabor positiv auf die Ergebnisse im nachfolgend durchlaufenen Schülerlabor auswirken, in dem methodisch analog, aber in einer anderen Domäne gearbeitet wird.

2. Forschend Lernen

Die gemeinsame Arbeitsweise bzw. Arbeitshaltung von Schüler/innen, die für das Arbeiten in den Schülerlaboren charakteristisch ist, nennen wir „forschend Lernen“. Was genau damit gemeint ist, lässt sich mit Blick auf die Literatur eingrenzen. Der Begriff forschendes Lernen findet sich explizit bereits 1970 in einer Veröffentlichung der Bundesassistentenkonferenz (BAK), in der folgende Kennzeichen forschenden Lernens (vgl. BAK, 1970, S. 14-15) für die Hochschullehre herausgearbeitet wurden:

- selbständige Themen- und „Strategie“-Wahl
- unbegrenztes Risiko (Irrtümer, Umwege), aber auch Chance für Zufallsfunde, „fruchtbare Momente“
- Notwendigkeit, dem Anspruch der Wissenschaft zu genügen (Forschungsansatz bis zu einem Ergebnis durchhalten, vorhandene Kenntnisse und Instrumente ausreichend prüfen)
- Prüfung des Ergebnisses
- Resultat darstellen

Für das Arbeiten in Schülerlaboren, mit ihrem begrenzten zeitlichen Rahnen (drei Doppelstunden à 45 Minuten), sind die selbständige Themen- und Strategiewahl nicht in Reinform umsetzbar. Insbesondere das unbegrenzte Risiko Umwege zu gehen und Irrtümern anheimzufallen ist nur schwer mit dem Erreichen von Inhaltszielen des Lehrplans vereinbar. Die Notwendigkeit, dem Anspruch von Wissenschaft zu genügen, stellt für fast alle Schüler/innen eine Überforderung dar. Aepkers (2002, S. 86) warnt hier vor zu hohen Erwartungen an Schüler/innen und spricht sogar von Fahrlässigkeit. Aus diesen Gründen fasst Bönsch (1991) forschendes Lernen für den schulischen Unterricht sehr viel offener: „Mit dem Terminus ‚forschendes Lernen‘ sind Lernmöglichkeiten gemeint, die Lernende in Lernsituationen bringen, in denen sie für sie subjektiv Neues erforschen und auf diese Weise zu ihrem Lernbesitz machen.“ (Bönsch 1991, S. 199) An anderer Stelle betont er die Denk- und Experimentierprozesse, indem er festhält: „Forschendes Lernen wird (…) als die Möglichkeit verstanden, Schüler einen ihnen unbekannten Sachverhalt mit Denk- und Experimentierprozessen erforschen zu lassen.“ (Bönsch 1991, S. 202)

Der Erstautor ist der Überzeugung, dass „forschend Lernen“ zunächst eine *Lern- und Arbeitshaltung* von Schüler/innen und ihren Lehrkräften darstellt, die es auszubilden und zu entwickeln gilt. Dies kann gelingen, wenn grundlegende Lernprozesse von Schüler/innen angebahnt und gefördert werden. Forschend Lernen umfasst insbesondere folgende Lernprozesse:

- Ziele setzen
- Systematisch experimentieren und beobachten
- Beobachtungen strukturieren
- Prozesse und Ergebnisse darstellen
- Prozesse und Ergebnisse reflektieren

Die Ziele, die hier von den Schüler/innen gesetzt werden, sind eher kleinere Zwischenziele, welche sich aus Entscheidungen ergeben, die im Rahmen des Erkenntnisprozesses immer wieder getroffen werden müssen. Für das systematische Experimentieren und Beobachten ist es notwendig, dass den Schüler/innen für ihre selbständige Arbeit geeignete Lernumgebungen zur Verfügung gestellt werden, die Arbeitsaufträge, Medien, Materialien und Hilfestellungen umfassen, die sie bei Bedarf zu Rate ziehen können (vgl. Vollrath, Roth 2012, S. 150-151). Zur Strukturierung der Beobachtungen ist die Kommunikation in Kleingruppen hilfreich und für viele Schüler/innen sogar unabdingbar. Das Führen von Forscherheften, in denen die Beobachtungen festgehalten werden, ist ein ganz wesentliches Element beim forschenden Lernen. Das Darstellen von beobachteten Prozessen und den daraus resultierenden Ergebnissen erfordert die Konzentration auf das Wesentliche des Erkenntnisprozesses sowie die Nutzung geeigneter Repräsentationen, hilft beim Strukturieren, initiiert eine sinnvolle Reflexionstiefe und ermöglicht schließlich eine rückblickende Bewertung der Ergebnisse und Arbeitsprozesse.

Das oben genannte interdisziplinäre Forschungsprojekt fokussiert insbesondere auf die Darstellungskompetenz, die, wie eben erläutert, eine besondere Rolle beim forschenden Lernen spielt. Es geht insbesondere darum, zu erfassen, wie sich die Darstellungskompetenz entwickelt und wie dieser Prozess unterstützt werden kann.

3. Das Beispiel Figurierte Zahlen

Auf der Internetseite www.mathe-labor.de/stationen/figurierte_zahlen/ findet sich die Materialien zur Laborstation „Figurierte Zahlen" des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr" der Universität Landau. Diese Lernumgebung zielt auf das zielgerichtete forschende Lernen ab, das oben beschrieben wird. Schüler/innen setzen sich hier anhand von Materialien (vgl. Abbildung 1) und Computersimulationen auf der Basis des dynamischen Mathematiksystems GeoGebra (vgl. Abbildung 2) forschend mit figurierten Zahlen auseinander. Dadurch festigen und vertiefen sie ihre Kenntnisse und Fähigkeiten rund um das Aufstellen, Umformen und Interpretieren von Termen.

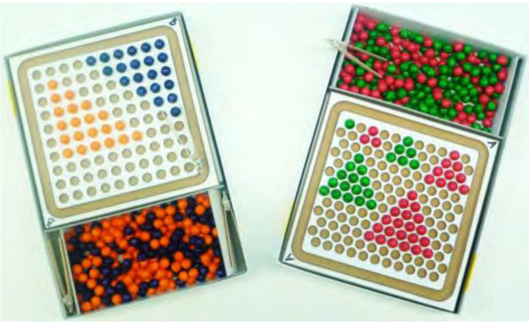


Abbildung 1: Material zur Station

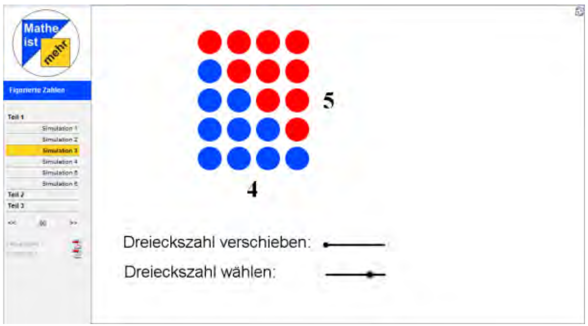


Abbildung 2: GeoGebra-Simulation

Dabei wird systematisch experimentiert und beobachtet, das Beobachtete z. B. in Form von Skizzen und daraus abgeleiteten Termen strukturiert sowie Ergebnisse und Prozesse (z. B. der Übergang von einer Dreieckszahl zur nächsten) im Forscherheft festgehalten. Dieses Vorgehen wird anschließend reflektiert und so für weitere Forschungsprozesse verfügbar gemacht.

Literatur

Aepkers, M. (2002): Forschendes lernen – Einem Begriff auf der Spur. In M. Aepkers, S. Liebig: Entdeckendes, Forschendes und Genetisches Lernen. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren, 69-87.

Bönsch, M. (1991): Forschendes Lernen. In M. Bönsch: Variable Lernwege – Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden. Paderborn: Schöningh, S. 197-211.

Bundesassistentenkonferenz (BAK) (1970): Forschendes Lernen – Wissenschaftliches Prüfen. Bonn: BAK (Schriften der BAK 5).

Schmidt, I., Di Fuccia, D. S., Ralle, B. (2011): Außerschulische Lernstandorte − Erwartungen, Erfahrungen und Wirkungen aus der Sicht von Lehrkräften und Schulleitungen. In MNU 64/6, 362-369.

Vollrath, H.-J., Roth, J. (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Benjamin ROTT, Hannover

Der Verlauf von Problembearbeitungsprozessen am Beispiel von Fünftklässlern

Problemlösen ist ein essentieller Bestandteil der Mathematik und daher (auch – aber nicht nur – wegen curricularer Vorgaben) wichtig für die Schule. Ob eine Aufgabe für jemanden ein Problem darstellt oder nicht, hängt von der jeweiligen Person und ihrem Vorwissen ab (vgl. Schoenfeld 1985, S. 74). Wir verwenden daher folgende Definition:

> Eine Aufgabe ist für ihren Bearbeiter (genau) dann eine (mathematische) Problemaufgabe, wenn bei ihrer Bearbeitung ein *Prozess des Problemlösens* stattfindet (im Gegensatz zu einem *Routineprozess*). (Gawlick & Rott, WiSe 2009/10)

Dies verlagert die Entscheidung, ob ein Problem vorliegt, auf den zugehörigen Prozess. Des Weiteren wird hier davon ausgegangen, dass es nur zwei – komplementäre – Typen von Prozessen gibt, Routine- und Problemlöseprozesse (siehe Abb. 1):

> Ein Prozess ist genau dann ein *reiner Routineprozess*, wenn sofort ein Verfahren zur Lösung der gestellten Aufgabe bekannt ist und angewendet wird. Ist dies nicht der Fall oder wird das Verfahren während der Bearbeitung verworfen, handelt es sich um einen *Problemlöseprozess*.

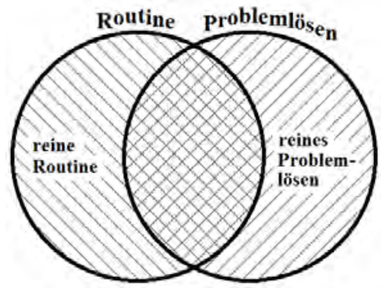


Abbildung 1: Prozesstypen

In der mathematikdidaktischen Literatur zum **Ablauf von Problembearbeitungsprozessen** finden sich vor allem Stufenmodelle. Diese Modelle sind in der Regel *normativ*, d.h. sie geben vor, wie Problemlösen verlaufen könnte; sie beschreiben aber nicht, wie empirisch vorliegende Prozesse ablaufen (*deskriptiv*). Auch bauen fast alle diese Modelle stark auf den vier Stufen von Pólya (1945) auf, wobei insb. die Phasen „(1) Verstehen der Aufgabe“ und „(4) Rückschau“ sich oft sehr ähneln, wohingegen die Phasen „(2) Ausdenken eines Plans“ und „(3) Ausführen des Plans“ variiert werden. In Abb. 2 findet sich je ein Beispiel für ein Modell mit einer zusätzlichen Phase (Schoenfeld 1985, Kap. 4) und für eines, in dem die Phasen (2) und (3) zusammengelegt wurden (Mason, Burton & Stacey 1982).

Als weitere Ergänzungen zu Pólyas Überlegungen betonen neuere Modelle stärker den Einfluss von *Metakognition* beim Phasenwechsel und die Tatsache, dass Prozesse nicht *linear*, d.h. in der von Pólya vorgeschlagenen Reihenfolge verlaufen. Stattdessen wird das *Zyklische* des Problemlösens hervorgehoben, wobei die Modelle solche Schleifen teilweise nur in den ersten zwei Phasen verorten und teilweise nach allen Phasen vorsehen.

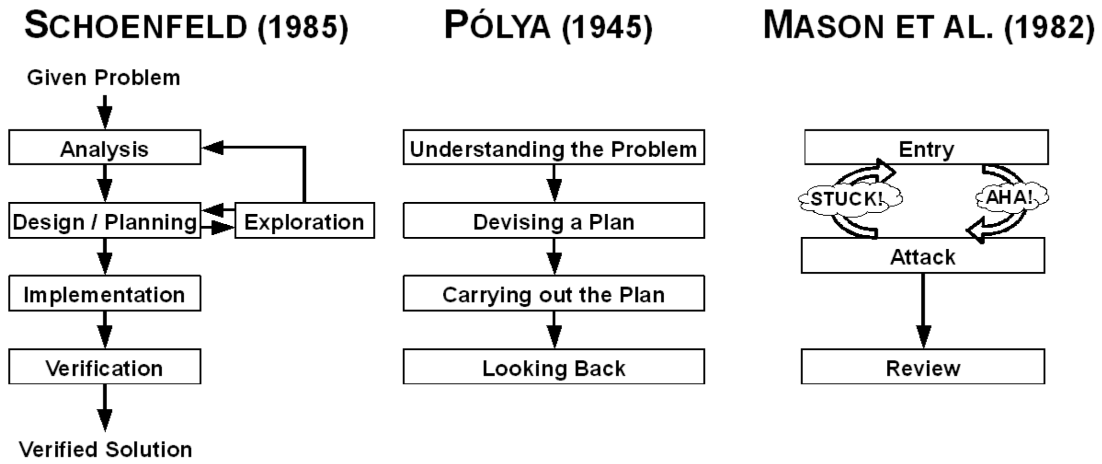


Abbildung 2: Der Problembearbeitungsprozess nach Pólya, Schoenfeld und Mason

Es stellt sich die **Frage**, welche Elemente der Problemlösemodelle am besten geeignet sind, empirisch vorliegende Prozesse zu beschreiben – hier konkretisiert für SchülerInnen der Jahrgangsstufe 5 (Alter: 10 – 12).

Studie und Methoden

Die Basis für die vorliegende Auswertung bildet das Projekt „MALU“ für engagierte Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien. Die SchülerInnen wurden beim Bearbeiten von Aufgaben in Paaren gefilmt. Näheres zu den Details der Studie und den Aufgaben findet sich z.B. in Rott (2013).

Zur Untersuchung aller Schüler-Prozesse wurde das adaptierte *Protocol Analysis*-Verfahren von Schoenfeld (1985, Kap. 9) verwendet, mit dem die Prozesse in sogenannte *Episoden* eingeteilt werden, die den Phasen auf Abb. 2 (links) entsprechen. Details finden sich z.B. in Rott (2013).

Um Metakognition zu erfassen, haben wir das „Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten“ von Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) verwendet. Zuvor wurde mithilfe studentischer Abschlussarbeiten sichergestellt, dass es sich, obwohl für die Auswertung von Klassenunterricht entwickelt, auf Paar-Prozesse anwenden lässt. Wegen des hohen Aufwands wurden nur etwa 25% der Prozesse mit diesem Verfahren kodiert.

Ergebnisse

Mit „Das Superauto“ haben wir eine Schulbuch-Aufgabe gestellt, die für unsere Schüler leicht zu lösen sein sollte. Und tatsächlich entsprachen 11 der 12 zugehörigen Prozesse der obigen Definition von „reiner Routine“. Zusätzlich waren 10 Prozesse der „Schachbrett“-Aufgabe („Wie viele Quadrate finden sich auf einem Schachbrett?“ – in diesen Prozessen haben die Kinder die Bearbeitung nach kurzer Zeit mit „64 Quadrate“ beendet) von diesem Typ; diese Prozesse sind im Folgenden grau gekennzeichnet.

Da sich die theoretischen Modelle insbesondere in den Pólya-Phasen (2) und (3) voneinander unterscheiden, wird hier ein Schwerpunkt auf die Betrachtung von *Exploration* und *Planning* gelegt (siehe Tabelle 1 und 2).

Aufgabe		**Anzahl der Prozesse**		
Name	**Math. Gebiet**	**mit *Exploration* (davon mit *Planning*)**	**ohne *Exploration***	**gesamt**
Bierdeckel	Geometrie	30 (3)	2	**32**
Marcos Zahlenreihe	Arithmetik	18 (8)	14	**32**
Sieben Tore	Arithmetik	6 (5)	9	**15**
Schachbrett, Problem	Kombinatorik	9 (9)	0	**9**
Schachbrett, Routine	Kombinatorik	0 (0)	10	**10**
Superauto, Routine	Arithmetik	1 (0)	11	**12**
Summe		**63 (25) + 1 (0)**	**25 + 21**	**88 + 22**

Tabelle 1: *Exploration* in den MALU-Prozessen

Aufgabe	**Anzahl der Prozesse**			
	mit *Planning* oder *Planning-Implementation*	**(davon mit explizitem *Planning*)**	**ohne *Planning***	**gesamt**
Bierdeckel	5	(1)	27	**32**
Marcos Zahlenreihe	22	(2)	10	**32**
Sieben Tore	12	(4)	3	**15**
Schachbrett, Problem	7	(0)	2	**9**
Schachbrett, Routine	10	(2)	0	**10**
Superauto, Routine	11	(0)	1	**12**
Summe	**46 + 21**	**(7 + 2)**	**42 + 1**	**88 + 22**

Tabelle 2: *Planning* in den MALU-Prozessen

Wichtig ist auch die Unterscheidung von linearen und zyklischen Verläufen. Die Daten unserer Prozesse zeigt Tabelle 3.

Aufgabe	**Anzahl der Prozesse**			
	linear	***zyklisch***	**(davon nur in Phasen 1 und 2)**	**gesamt**
Bierdeckel	27	5	(4)	**32**
Marcos Zahlenreihe	17	15	(5)	**32**
Sieben Tore	11	4	(3)	**15**
Schachbrett, Problem	3	6	(0)	**9**
Schachbrett, Routine	10	0	(0)	**10**
Superauto, Routine	12	0	(0)	**12**
Summe	**58 + 22**	**30 + 0**	**(12 + 0)**	**88 + 22**

Tabelle 3: Linearität und Nicht-Linearität in den MALU-Prozessen

Aus diesen Ergebnissen wird nun ein Modell abgleitet: Man sieht, dass die Unterscheidung in strukturiertes und unstrukturiertes Planen (*Planning* bzw. *Exploration*) hilfreich ist (Tab. 1). Auch sollten *Planung* und *Ausführung* gemeinsam auftreten können, da explizite *Planung* nur selten in den Fünftklässler-Prozessen feststellbar ist (Tab. 2). Ein Großteil der Prozesse verläuft tatsächlich *linear*, ein empirisches Modell sollte aber auch *zyklische* Prozesse darstellen können – und dabei Schleifen zwischen allen

Problemlösephasen vorsehen (Tab. 3). Schließlich zeigt die Kodierung nach Cohors-Fresenborg und Kaune, dass nahezu alle Phasenübergänge mit metakognitiven Aktivitäten verbunden sind. Das resultierende Modell ist in Abb. 3 (a) dargestellt; lineare Prozesse verlaufen darin niemals aufwärts.

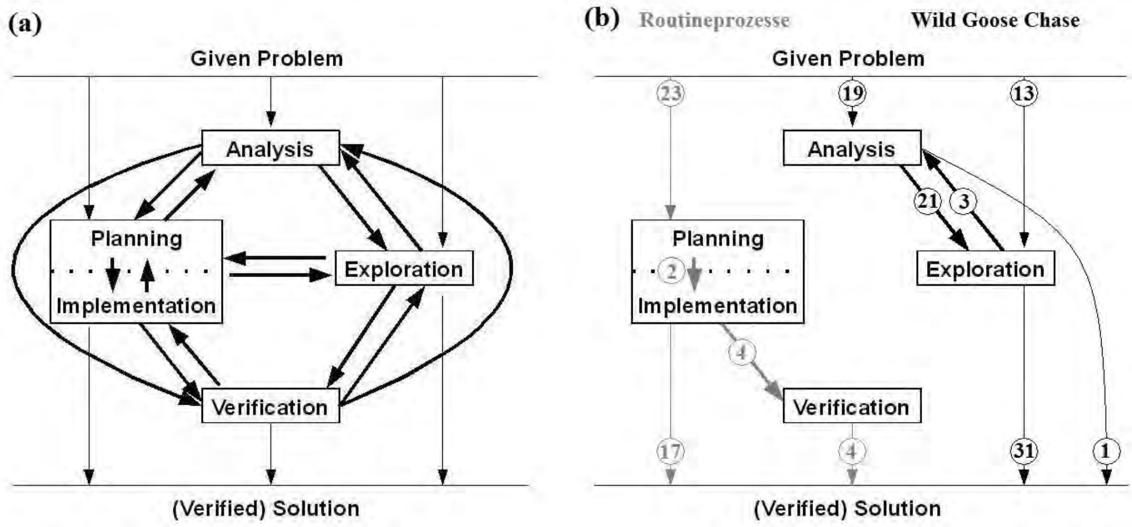


Abbildung 3: (a) Ein empirisches Problemlöse-Modell und (b) Prozesstypen

Diskussion

Mit dem hier vorgestellten Modell lassen sich Prozessverläufe beschreiben und darstellen wie in Abb. 3 (b). Dort wurden – durch Auszählen der Übergänge in den entsprechenden Prozessen – die oben angesprochenen Routineprozesse und alle „Wild Goose Chase"-Prozesse (vgl. Schoenfeld 1985, Kap. 9; Rott 2013) aufgeführt – es ergeben sich für diese Typen charakteristische Bilder: Erstere zeichnen sich durch sofortiges Eintreten in die *Planung* (*-Ausführung*) aus, wohingegen letztere per definitionem nur aus *Exploration* oder *Analysis & Exploration* bestehen.

Weitere Untersuchungen, insb. zum Einfluss der Metakognition auf den Erfolg, die Phasenwechsel und wie dies zusammenhängt, sind geplant.

Literatur

Cohors-Fresenborg, Elmar & Kaune, Christa (2007): *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht.* Arbeitsbericht Nr. 44, Institut für Mathematikdidaktik, Universität Osnabrück.

Mason, John; Burton, Leone & Stacey, Kaye (1982): *Thinking Mathematically*. Dorchester: Pearson Education Limited. Second Edition (2010).

Pólya, George (1945): *How to Solve It*. Princeton: University Press.

Rott, Benjamin (2013): *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM.

Schoenfeld, Alan H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Christian RÜTTEN

Metaphernanalyse zur Rekonstruktion von Vorstellungen zu negativen Zahlen

Einleitung

Mit „weniger als nichts" bezeichnet Euler (1771, S. 9) in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* den Bereich der negativen Zahlen. Für die Zweitklässlerin Pia ist die Differenz 9–12 „Supernull". Entsprechend der metapherntheoretischen Sichtweise von Lakoff und Núñez (1997; 2000) liegt dem sprachlichen Paradoxon Eulers und dem Neologismus Pias die *metaphorizing capacity*, die Fähigkeit, nicht unmittelbar Erfahrbares mittels Begriffen der Erfahrung vorzustellen, zugrunde. Sowohl Euler als auch Pia können auf der Grundlage ihrer erfahrungsgebundenen Vorstellung der natürlichen Zahlen als *object collection* (Lakoff/Núñez 1997; 2000) mithilfe einer *entity creating metaphor* (Lakoff/Núñez 2000) den Zahlbereich der natürlichen Zahlen erweitern. Durch eine im Folgenden vorzustellende systematische Metaphernanalyse von Eulers Abhandlung zu den negativen Zahlen (vgl. Euler 1771) und Pias Äußerungen zur Aufgabe 9–12 im Rahmen eines Interviews lassen sich die oben benannten Gemeinsamkeiten aufzeigen.

Einordung in das Forschungsvorhaben

Pias Äußerung macht die in der Mathematikdidaktik nicht neue Erkenntnis deutlich, dass Lernende nicht als *tabula rasa*, als unbeschriebenes Blatt in den Unterricht kommen (Spiegel 1992). Alltagserfahrungen, Sprache und Unterricht lassen sogenannte vorunterrichtliche Vorstellungen bei den Lernenden entstehen. Im Rahmen einer konstruktivistischen Auffassung von Lehren und Lernen, müssen solche vorunterrichtlichen Vorstellungen als Grundlage für die Konstruktion der „normativ geprägten sachadäquaten Grundvorstellungen" (vom Hofe 1995, S. 123) Berücksichtigung bei der Planung und Durchführung von Unterricht erfahren.

Um Vorstellungen von Grundschülerinnen und -schülern zu negativen Zahlen zu untersuchen und näher beschreiben zu können, werden in der vorliegenden Untersuchung die Vorstellungen der Lernenden auf der Grundlage einer schriftlichen Befragung und angeschlossener problemzentrierter Interviews, durchgeführt in verschiedenen Klassenstufen, rekonstruiert. Für die schriftliche Befragung wurde ein Aufgabenbogen mit 11 Aufgaben (variiert für verschiedene Klassenstufen) entwickelt. Die Bearbeitung dieses Aufgabenbogens dient sowohl als Sampling als auch als inhaltliche Grundlage für die Interviews.

Systematische Metaphernanalyse als qualitative Methode

Die Vorstellungen zu negativen Zahlen lassen sich aus sprachlichen Äußerungen von Lernenden mittels der auf der kognitiven Metapherntheorie (Lakoff/Johnson 1980; dt. 2011) gründenden systematischen Metaphernanalyse (Schmitt 2011; auch Kruse u. a. 2011) rekonstruieren.

Die kognitive Metapherntheorie sieht das Wesen der Metapher darin, „dass wir durch sie eine Sache oder einen Vorgang in Begriffen einer anderen Sache bzw. eines anderen Vorgangs verstehen und erfahren können“ (Lakoff/Johnson 2011, S. 13). „Durch die Metapher wird etwas Abstraktes, Unbekanntes bzw. ‚Un-Fassbares‘, nicht ‚Be-Greifbares‘ übersetzt in konkrete, bekannte Zusammenhänge“ (Kruse u. a. 2011, S. 65). Das Neue im Metaphernverständnis der kognitiven Metapherntheorie ist dabei die Erkenntnis, „dass Metaphern in der Regel nicht ohne Zusammenhang auftreten, sondern sich bündeln lassen“ (Schmitt 2009, S. 12). Diese Bündelung nennt die kognitive Metapherntheorie *metaphorical concept*. Diese metaphorischen Konzepte beleuchten (*highlighting*) und verbergen (*hiding*) immer bestimmte Aspekte des Konzepts, indem sie sich auf bestimmte Aspekte desselben konzentrieren (Lakoff/Johnson 1980; 2011).

Auf diesem theoretischen Hintergrund haben Schmitt (2000; 2003; 2009; 2011) und Kruse u. a. (2011) die systematische Metaphernanalyse als qualitative Forschungsmethode (weiter-)entwickelt. Anders als in den Metapheranalysen der kognitiven Metapherntheorie (Lakoff/Johnson 1980; Lakoff/Núñez 1997; 2000) folgt die systematische Metaphernanalyse einer klar strukturierten und nachvollziehbaren Ablaufskizze:

- Kontext- und Selbstreflexion (Schmitt 2011; auch 2003)
- Identifikation der Metaphern (Schmitt 2003; 2011)
- Synthese von metaphorischen Konzepten (Schmitt 2003; 2011)
- Interpretation (Schmitt 2011; auch Kruse u. a. 2011)

Der Identifikation der Metaphern mittels Wort-für-Wort-Analyse kann eine Kontext- und Selbstreflexion vorgeschaltet werden (Schmitt 2011). Als Forschungsvorbereitung wird ein Lexikon möglicher metaphorischer Konzepte angelegt (Schmitt 2003). Dieses Lexikon umfasst die außerhalb des Samples auffindbaren sowie die das Denkmuster des Interpreten dominierenden metaphorischen Konzepte, um sich im Rahmen der Analyse gegen das Übersehen von Metaphern abzusichern (Schmitt 2011). Nach der dekonstruierenden Zergliederung des zu analysierenden Textes werden aus den identifizierten Metaphern metaphorische Konzepte rekonstruiert (Schmitt 2003; 2011). Abschließend werden die metaphorischen Konzepte im Kontext der Forschungsfrage interpretiert (Kruse u. a. 2011; Schmitt 2011).

Euler erklärt einem Schneider die negativen Zahlen – Kontextanalyse

Im Rahmen der Kontextreflexion eignet sich in Bezug auf die Rekonstruktion metaphorischer Konzepte zu negativen Zahlen Eulers Abhandlung zu den negativen Zahlen (vgl. Euler 1771). Da Metaphern kulturabhängig sind (Lakoff/Johnson 2011), sind zunächst die kulturellen Zusammenhänge, in denen Euler sein Lehrbuch verfasst, zu betrachten. Dabei prägen vermutlich zwei kulturelle Entwicklungen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts Eulers Abhandlung. Zum einen mag Euler das wachsende Bildungsinteresse motiviert haben, den Inhalt seiner Abhandlung so lange zu überarbeiten, bis einer seiner Mitarbeiter, der Schneider war, diesen verstand (Euler 1771). Zum anderen wird die Handelsstadt St. Petersburg, in der Euler sein Lehrbuch abfasst, und der aufkommende Wirtschaftsliberalismus sein Verständnis von Mathematik als einer „Wissenschaft der Größen, welche Mittel ausfündig macht, wie man letztere ausmessen soll“ (Euler 1771, S. 4), geprägt haben. Vor diesem Hintergrund versteht Euler Zahlen unter anderem als Geldwerte und negative Zahlen als Schulden (ebd., S. 9). Da man Schulden wie Objekte haben, anhäufen und verlieren kann, konzeptualisiert Euler ne-gativen Zahlen wie positive Zahlen zunächst als *object collection* (Lakoff/ Núñez 1997; 2000), wobei Schulden und Besitz zunächst als zwei getrennte Größen gedacht werden. Malle (1996) weist auf die bei Lernenden zu beobachtende spiegelbildliche Anordnung der positiven und negativen Zahlen bezüglich der Ordnungsrelation hin, die in einer solchen Vorstellung getrennter (Sub-)Größen ihren Ursprung haben dürfte. Gerade unter der Perspektive der Ordnungsrelationen verknüpft Euler die zunächst getrennten Größen mittels der *entity creating metaphor* (Lakoff/Núñez, 2000) NEGATIVE ZAHLEN SIND „WENIGER ALS NICHTS“ (Euler 1771, S. 9), indem er die Null (Nichts) als Vergleichsmarke nutzt.

Pia bearbeitet die Aufgabe 9–12 – Skizze einer Metaphernanalyse

Im Rahmen der Pilotierung der oben vorgestellten Untersuchung wurde die Zweitklässlerin Pia gebeten, die Aufgabe 9–12 während eines Interviews zu bearbeiten. Aus Pias Äußerungen lässt sich das aus der Kontextanalyse von Eulers Abhandlung bekannte metaphorische Konzept ZAHLEN SIND ANSAMMLUNGEN VON OBJEKTEN rekonstruieren. Pia nutzt bei der Lösung der Aufgabe 9–12 das Fingerrechnen, wobei die Finger Zahlen und das Handeln mit den Fingern Operationen repräsentieren. Damit konsistent wird von Pia Subtraktion als Wegnehmen verstanden. In Ablehnung der Gültigkeit der Kommutativität bei der Subtraktion („Nö, das ist nicht das

Gleiche…“) gibt Pia als Lösung der Aufgabe 9-12 „Supernull“ an. Sie überblendet in dieser *entity creating metaphor* (Lakoff/Núñez 2000) Elemente aus ihrer mathematischen und alltagsweltlichen Erfahrung. Indem Pia dem Zeichen „0“ einen Umhang anfügt, vollzieht sie diese Überblendung auch auf der Ebene des mathematischen Zeichens. Ohne eine spezifische Vorstellung vom Zahlbereich zu haben, in dem die Aufgabe 9–12 eine Lösung besitzt, erweitert Pia ähnlich wie Euler ihren Zahlbereich mittels *metaphorizing capacity*, der Fähigkeit sich auf der Grundlage der Erfahrungen Nicht-Erfahrbares vorzustellen. Dabei kommt auch bei Pia der Null verstanden als Nichts („…dann würde alles weg“) eine zentrale Rolle zu.

Literatur

Euler, L. (1771). *Vollständige Anleitung zur Algebra* (Erster Theil)*: Von den verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen*. St. Petersburg: Kayserliche Akademie der Wissenschaften.

Kruse, J., Biesel, K. & Schmieder, Ch. (2011). *Metaphernanalyse. Ein rekonstruktiver Ansatz*. Wiesbaden: VS Verlag.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. London: The university of Chicago press.

Lakoff, G. & Johnson, M. (2011). *Leben in Metaphern: Konstruktion und Gebrauch von Sprachbildern* (7. Aufl.). Heidelberg: Carl-Auer-Systeme-Verl.

Lakoff, G. & Núñez, R. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out a cognitive foundation for a mind-based mathematics. In: L. English (Hrsg.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (S. 21–89). Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from? How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Malle, G. (1996). Lehrgang über negative Zahlen. *Österreichische Mathematische Gesellschaft: Didaktikheft*, 26, 142–151.

Schmitt, Rudolf (2000). Skizzen zur Metaphernanalyse (10 Absätze). *forum qualitative sozialforschung* [Online Journal], 1(1).

Schmitt, R. (2003). Methode und Subjektivität in der Systematischen Metaphernanalyse (54 Absätze). *forum qualitative sozialforschung* [Online Journal], 4 (2).

Schmitt, R. (2009). Metaphernanalyse und Konstruktion von Geschlecht (84 Absätze). *forum qualitative sozialforschung* [Online Journal], 10 (2).

Schmitt, R. (2011). Systematische Metaphernanalyse als qualitative sozialwissenschaftliche Forschungsmethode. *metaphorik.de* [Online Journal], 21, 47–81.

Spiegel, H. (1992). Was und wie Kinder zu Schulbeginn schon rechnen können. Ein Bericht über Interviews mit Schulanfängern. *Grundschulunterricht*, 39 (11), 21–23.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum, Akademischer Verlag.

Silke RUWISCH, Frances BEIER, Lüneburg

Schriftlich begründen in der Grundschule – ein disziplin-übergreifendes Projekt

1 Begriffsbestimmung

Die Auseinandersetzung mit den Begriffen *beschreiben*, *erklären*, *begründen*, *argumentieren* und *beweisen* führte zu einem Begriffsnetz mit folgenden Entscheidungen:

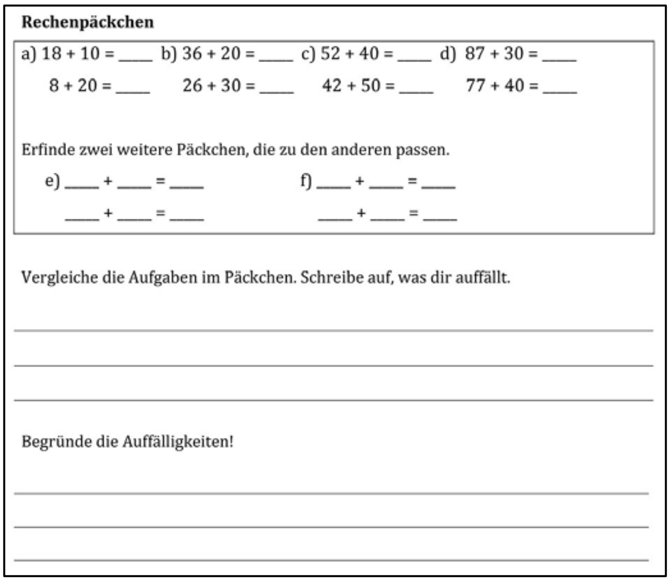
Eine *Begründung* baut auf der *Beschreibung* eines mathematischen Sachverhaltes oder Zusammenhangs auf, welche ihrerseits erfordert, derartige Zusammenhänge konstruieren und wahrnehmen zu können (vgl. Meyer 2007, Bezold 2009). Ein *Beweis* erfolgt ebenfalls aus einer Beschreibung bzw. Behauptung, stellt jedoch die formal-symbolische und damit eine abstraktere Form der Begründung dar (vgl. die Diskussion in Dörfler / Fischer (Hrsg.) 1979, Mormann 1981, Fischer / Malle 1985). *Erklären* lässt sich einerseits als *Erklären-was* und *Erklären-wie* im Beschreiben verorten. Andererseits lässt es sich dem Argumentieren zuordnen, da das *Erklären-warum* beschreibende und begründende Elemente aufweist, die für eine argumentative Lösung eines Problems notwendig sind (vgl. Klein 1987; 2001; Neumeister/Vogt 2009).

Das *Argumentieren* als umfassendes Handlungsmuster benötigt eine inhaltliche Basis, die mit einer Beschreibung oder einem Verweis auf gemeinsames Vorwissen realisiert werden kann (vgl. Ehlich/Rehbein 1986, Krummheuer 2003; Krummheuer/Fetzer 2005). Zudem erfordert es eine Begründung, um die beschriebenen Sachverhalte als wahr anzuerkennen (vgl. Toulmin 1975, Wittmann 1978, Schwarzkopf 2000). Die Argumentation wird somit in der Verbindung der oben diskutierten Terminologien als Oberbegriff verwendet (vgl. neben bereits genannter Literatur Bardy 2007, Beckmann 2010, Fetzer 2011, 2012, Malle 2002, Reiss 2001).

Folgende Begriffsdefinition wird zugrunde gelegt:
Mathematisches Begründen ist eine Vorform des mathematischen Beweisens und bedeutet, auf der Beschreibung eines Sachverhalts aufbauend den Nachweis für die Gültigkeit einer mathematischen Aussage zu erbringen. Die Begründung muss in sich schlüssig (kohärent) und adressatengerecht formuliert sein, um die Doppelfunktion zu erfüllen 1) die eigenen Gedanken zu fixieren, zu ordnen und weiterzudenken und 2) diese Erkenntnisse einem Gegenüber erfolgreich zu kommunizieren.

2 Überlegungen zur Entwicklung eines Kompetenzmodells

Konstituierend für unser Kompetenzmodell ist die Trennung des mathematischen Begründungsniveaus von der sprachlichen Realisierung einer Begründung, so dass wir schriftliche Schülerbearbeitungen mittels zweier Begründungsskalen zu erfassen suchen. Die Bearbeitung der Arbeitsblätter (vgl. Abb.1) erfordert zuvor das Erkennen von mathematischen Zusammenhängen und deren Übertragung auf weitere Aufgaben sowie das Berechnen dieser Aufgaben. Deren Richtigkeit und Vollständigkeit wird unabhängig von den Begründungen auf einer dreistufigen Skala bewertet. Der ersten Stufe werden Schülerinnen und Schüler zugeordnet, die unwesentliche Aspekte aufgegriffen und fortgesetzt oder falsch gerechnet haben. In Stufe zwei sind diejenigen eingeordnet, die nicht alle, aber einzelne Aspekte der mathematischen Zusammenhänge erkannt und übertragen haben. Der höchsten Stufe wird zugeordnet, wer alle Muster innerhalb der Aufgabensequenz erkannt und alle Ergebnisse richtig berechnet hat.



Rechenpäckchen

a) 18 + 10 = ___ b) 36 + 20 = ___ c) 52 + 40 = ___ d) 87 + 30 = ___

8 + 20 = ___ 26 + 30 = ___ 42 + 50 = ___ 77 + 40 = ___

Erfinde zwei weitere Päckchen, die zu den anderen passen.

e) ___ + ___ = ___ f) ___ + ___ = ___

___ + ___ = ___ ___ + ___ = ___

Vergleiche die Aufgaben im Päckchen. Schreibe auf, was dir auffällt.

Begründe die Auffälligkeiten!

Abb. 1: Arbeitsblatt zum Begründen arithmetischer Zusammenhänge

Die Skalierung des mathematischen Begründens schließt an den theoretischen Überlegungen an und berücksichtigt die folgenden Annahmen: *Beschreiben* von Auffälligkeiten beinhaltet zwar noch kein *Begründen*, jedoch werden bereits Zusammenhänge erkannt. *Begründen* baut auf diesen Beschreibungen auf und stellt seinerseits eine Vorform des *Beweisens* dar. Derzeit arbeiten wir mit einer fünfstufigen Skala des mathematischen Begründens. Die erste Stufe erfasst all diejenigen, die eine mathematische Auffälligkeit beschreiben, aber noch nicht begründen. Der zweiten Stufe werden Schülerinnen und Schüler zugeordnet, die passende Auffälligkeiten erkannt, beschrieben und ansatzweise begründet haben. Es fehlt jedoch i.d.R. der zweite Aspekt, so dass auch keine vollständige Begründung gegeben sein kann. Stufe drei beinhaltet die vollständige Erfassung aller Auffälligkeiten, die beispielbezogen begründet werden. Enthält die Begründung zusätzlich verallgemeinernde Aspekte wie „immer“, „in jedem Päckchen“ oder ähnliches, wird von einer teilweise abstrakten Begründung gesprochen und die Bearbeitung wird Stufe vier zugeordnet. Der höchsten Stufe der vollständig abstrakten Begründung wird zugeordnet, wer sowohl beide Aspekte verallgemeinernd darstellt als auch mathematische Symbole verwendet. Damit umfasst diese Stufe auch den mathematischen Beweis, der allerdings außerhalb des erwartbaren Grundschulniveaus liegt.

Die schriftsprachliche Umsetzung einer Begründungshandlung wird ebenfalls fünfstufig untergliedert. Explizite sprachliche Indikatoren anzugeben, jedoch keine Begründungsstruktur einzuhalten und daher eher eine beschreibende Schreibform zu verwenden, fällt unter die Kompetenzstufe eins. Die Konjunktionen und Adverbien *und*, *aber*, *dass* und *immer* fallen unter anderem darunter. Wird eine Grund-Folge-Beziehung und demnach eine explizite Begründungsstruktur sprachlich realisiert, welche jedoch ohne Aufgabenbezug formuliert ist, so wird von der zweiten Kompetenzstufe gesprochen. Typische Indikatoren der Textverknüpfung sind hier *wenn…dann*, *obwohl*, *dadurch* und *weil*. Wird neben diesen sprachlichen Indikatoren einer Grund-Folge-Beziehung explizit ein Aufgabenbezug deutlich, werden die Bearbeitungen Stufe drei zugeordnet. Texte dieser Kategorie sind jedoch teilweise noch unvollständig, nicht eindeutig oder widersprüchlich formuliert. Vollständige und widerspruchsfreie Begründungen mit thematischem Aufgabenbezug, u.a. erkennbarer Rekurrenz, werden Kompetenzstufe vier zugeordnet. Alltagssprachliche statt fachsprachlicher Formulierungen schließen die Einteilung in die Kompetenzstufe fünf aus. Eine Einordnung in letztere beinhaltet neben den Indikatoren von Kompetenzstufe vier die Verwendung der unterrichtlichen Fachsprache und eine erkennbare Adressatenorientierung.

3 Beispielbezogene Anwendung des Modells

3.1 Mathematisches Fortsetzen

Um bei obigem Arbeitsblatts (vgl. Abb. 1) zwei passende ‚Päckchen‘ und die Ergebnisse ergänzen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Zehner der zweiten Aufgabe durch gegensinniges Verändern aus der ersten Aufgabe gebildet werden, während die Einer unverändert übernommen werden. Die Ergebnisse eines Päckchens weisen somit denselben Wert auf. In Stufe 1 landete ein Kind, das Aufgaben konzipiert hat, bei denen weder die ‚Zehner wandern‘ noch das Ergebnis gleich ist. Beide Aspekte wurden hier nicht berücksichtigt. Stufe 2 wurde ein Kind zugeordnet, das in einer der zu konzipierenden Aufgaben beide Aspekte berücksichtigt hat oder aber in beiden Aufgaben jeweils nur einen der Aspekte. Auf Stufe 3 werden all die gesehen, die bei beiden Aufgaben beide Aspekte bedacht haben.

3.2 Begründungsniveaus

1) es sind immer die gleichen aufgaben nur umgedreht weil wenn man es rechnet merkt man das.	4) Das es immer 10 weniger sind. Zum beispiel 18+10=28 aber wenn man 10 weg nimmt und in der mitte 10 dazu nimmt z.b. 8+20=28 und dann kommt das gleiche ergebnis wie bei der 1. Aufgabe
2) Es sind immer 10 mehr und 10 wenieger.	
3) Dass es die gleichen Ergebnisse sind, kommt davon, weil bei der einen Aufgabe immer 10 weniger sind als bei der anderen. Aber bei der Aufgabe wo 10 weniger sind, ist die Zahl die noch dazu gerechnet wird wiederum 10 größer als die über ihr.	5) mir fällt auf das immer die Ersten 2 Ergebnisse gleich sind. Die Ersten zwei Ergebnisse sind gleich weil die bei zum beispiel a) 18+10=38 und dann haben die bei 8+20 einfach 18 10 weniger 8 und bei 10 10 mehr 10-10 ist 0 also bleibt das so

Mathematische Begründungsstruktur: Bsp. 1 verdeutlicht, dass das Kind erkannt hat, dass „irgendetwas“ gleich und irgendetwas umgedreht ist, jedoch wird weder auf den Zusammenhang zwischen den Aufgaben noch auf das paarweise gleiche Ergebnis eingegangen, so dass diese Antwort Stufe 1 entspricht. Stufe 2 lassen sich Bspe. 2 und 4 zuordnen. Während Bsp. 2 deutlich nur einen Aspekt fokussiert, lässt sich bei Beispiel 4 diskutieren, inwieweit beispielgebunden vollständig argumentiert wird und es deshalb Stufe 3 zugeordnet werden sollte. So ist das gegensinnige Verändern implizit in „10 weg … und … 10 dazu“ enthalten, wird jedoch nicht explizit mit Bezug aufeinander formuliert. Dagegen zeigt Bsp. 5 beide Bezüge deutlich auf und vermag darüber hinaus beispielgebunden auch den Schluss auf das gleichbleibende Ergebnis zu ziehen. Auch Bsp. 3 argumentiert sehr ähnlich, nutzt darüber hinaus erste Kennzeichnungen von Verallgemeinerbarkeit durch die Verwendung „weil bei der einen Aufgabe *immer* 10 weniger sind als bei der anderen“.

Sprachliche Begründungsstruktur: Bsp. 1 wird aufgrund des komparativen Konnektors „weil“ in Stufe 2 eingeordnet, da so die Textverknüpfung sichtbar wird. Bsp. 2 weist außer des Indikators „immer“ keine Textverknüpfung auf, weshalb es Stufe 1 zugeordnet wird. Stufe 4 lassen sich die Bspe. 3 und 4 zuordnen, da die komparativen Konnektoren „weil“ und „wenn...dann“ verwendet werden und ein deutlicher Aufgabenbezug gegeben ist. Aufgrund der Mehrdeutigkeit und unpräziser Sprache befindet sich Beispiel 5 dagegen auf Stufe 3. Ein komparativer Konnektor wird zwar mit Aufgabenbezug verwendet, dennoch verbleibt unklar, inwieweit die Zehner mit dem gleichen Ergebnis zusammenhängen, wenn das Kind schreibt: „10-10 ist 0“.

Literatur

Die verwendet Literatur kann als Liste bei den Autorinnen unter folgender Email angefordert werden: ruwisch@uni.leuphana.de

Alexander SALLE, Bielefeld

Argumentationsprozesse beim Lernen mit animierten Lösungsbeispielen

Lösungsbeispiele sind ein effektives instruktionales Mittel für das Lernen von Mathematik. Insbesondere in der Anfangsphase des Wissens- und Kompetenzerwerbs zeigen sie sich in zahlreichen Untersuchungen beispielsweise Problemlöse-Ansätzen weit überlegen. Dies konnte auch für animierte Lösungsbeispiele repliziert werden, wenn auch nicht in gleicher Deutlichkeit (Betrancourt, 2005). Letztere haben den Vorteil, Prozesse dynamisch repräsentieren zu können und so beispielsweise die Verarbeitung der Inhalte zu erleichtern (Rasch & Schnotz, 2006).

Aufgabenlösungen werden häufig mit einem eintönigen, kalkülorientierten Mathematikunterricht konnotiert, in dem die Übertragung der Algorithmen eines Lösungsbeispiels auf strukturgleiche Aufgaben in Einzelarbeit zentral ist. Untersuchungen, inwieweit Lösungsbeispiele[1] in Gruppenarbeiten und zur Förderung prozessbezogener Kompetenzen eingesetzt werden können, gibt es nur vereinzelt (Retnowati et al., 2010).

1. Selbsterklärungen

Ein neuralgischer Punkt beim Lernen mit Lösungsbeispielen ist die Verarbeitung durch die Lernenden – der Einsatz angemessener kognitiver Lernstrategien bestimmt maßgeblich über den Erwerb transferfähigen Wissens (Chi et al., 1989). Solche *Selbsterklärungen* sind aktive Wissenskonstruktionsprozesse, die eine sinnvolle Verarbeitung des Lernmaterials darstellen. Beispiele dafür sind das Verbinden von Lösungsschritten im Lösungsbeispiel, das Reparieren eigenen Vorwissens oder die Bedeutungsbestimmung von Operatoren oder Rechenausdrücken.

Studien legen nahe, dass Selbsterklärungen beim Verarbeiten von Lösungsbeispielen eher selten spontan auftreten (Renkl, 1997). Sie können jedoch beispielsweise durch Selbsterklärungsprompts hervorgelockt werden (Chi et al., 1994). Ein Selbsterklärungsprompt ist eine Frage oder eine Erklärungsaufforderung, die auf den inhaltlichen Kern des Lösungsbeispiels fokussiert. Die Wirkung von solchen Prompts auf die Leistung und das Auftreten von Selbsterklärungen ist gut untersucht (Roy & Chi, 2005). Ungeachtet dessen sind die Auswirkungen in Gruppensettings und auf inhaltliche Argumentationen kaum untersucht.

[1] Ausgenommen sind heuristische Lösungsbeispiele, da sie keine übliche Aufgabenlösung abbilden, sondern mit anderen Elementen angereichert sind (Reiss & Renkl, 2002).

2. Argumentieren

Seit der Formulierung der Bildungsstandards (KMK, 2003) hat die Bedeutung prozessbezogener Kompetenzen für den Mathematikunterricht in Deutschland auf breiter Ebene zugenommen. Argumentieren stellt hier eine zentrale Kompetenz beim Umgang mit mathematischen Inhalten dar.

Eine mögliche Definition von Argumentieren liefert Bezold (2012). Bei ihr bedeutet Argumentieren, „Vermutungen über mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge [...] zu beschreiben (zu formulieren), diese zu hinterfragen sowie zu begründen bzw. hierfür eine Begründungsidee zu liefern". Das Beschreiben von mathematischen Sachverhalten wird ausdrücklich als Teil des Argumentierens verstanden, da bereits das erfolgreiche sprachliche Erfassen einer Situation einerseits als Voraussetzung für anspruchsvollere Argumentationen zu sehen ist, und es andererseits für Schüler mit sprachlichen Schwierigkeiten oder ausgeprägten Leistungsdefiziten einen Erfolg darstellen kann (vgl. Bezold, 2012, S.77).

3. Anlage der Studie & Fragestellungen

Ausgehend von dieser Definition lassen sich Bestandteile von Argumentationen in die Kategorien *Beschreiben*, *Hinterfragen* und *Begründen* einteilen und quantitativ erfassen. Die Schülerinnen und Schüler arbeiteten zu zweit an Desktop-PCs und konnten in einer 2 x 90 minütigen Trainingsphase aus einem Pool von Lösungsbeispielen, unvollständigen Beispielen und Aufgaben das passende Lernmaterial auswählen. Während der gesamten Trainingsphase wurden die Lernenden videographiert. Die Lösungsbeispielphasen wurden in Stillarbeit, inhaltliche Gespräche, Lehrergespräch und Ablenkung eingeteilt.

Die Fragestellung dieses Beitrags nimmt die Auswirkung der Selbsterklärungsprompts auf das inhaltliche Argumentieren in den Fokus. Dafür sind zwei relevante Teilfragen zu klären:

– Mit welcher Häufigkeit treten die verschiedenen Kategorien von Argumentationen während der Bearbeitung der Lösungsbeispiele und der Selbsterklärungsprompts auf?

– Welche Auswirkungen hat das schriftliche Festhalten der Promptantworten auf die inhaltlichen Argumentationen?

4. Ergebnisse

Die Lösungsbeispiel- und Promptbearbeitung lässt sich in einem dreiphasigen Schema beschreiben. Phase 1 umfasst das Verarbeiten des Lösungsbeispiels, ohne dass der Prompt dabei gelesen oder berücksichtigt wird. Phase

2 beginnt mit dem erstmaligen Lesen des Prompts und enthält im Wesentlichen die Diskussion über die Antwort. In Phase 3 werden die diskutierten Antworten schriftlich festgehalten.

Während Phase 1 wird das Lösungsbeispiel Schritt für Schritt durchgegangen. Dabei arbeiten die Lernenden größtenteils still oder lesen die abgebildeten Sätze und Rechnungen vor (Abb. 1 links). Die wenigen inhaltlichen Gespräche dieser Phase bleiben oftmals auf einem beschreibenden Niveau, selten werden Sachverhalte hinterfragt oder begründet. In Abb. 1 rechts ist die Anzahl der in den Kategorien *Beschreiben*, *Hinterfragen* und *Begründen* kodierten Sinneinheiten abgebildet.

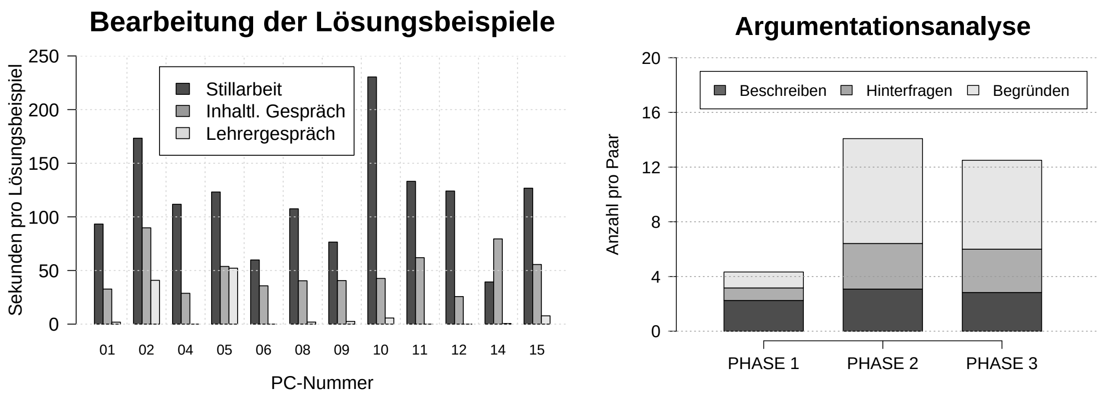


Abbildung 1: (links) Zeiten der Stillarbeit, inhaltlicher Gespräche und von Lehrergesprächen während der Bearbeitung der Lösungsbeispiele – (rechts) Anzahl der kodierten Sinneinheiten (*Beschreiben, Hinterfragen, Begründen)* in den Bearbeitungsphasen.

In Phase 2 erhöhen sich die Anzahl und der Anteil von Hinterfragen und Begründen an den kodierten Sinneinheiten stark. Der Selbsterklärungsprompt dient einerseits als „Stein des Anstoßes“ und zieht unmittelbare Begründungsversuche nach sich, andererseits folgen auch Diskussionen über andere relevante Begriffe, die zum Teil nur mittelbar mit der Promptantwort in Verbindung stehen.

Durch die in Phase 3 geforderte schriftliche Beantwortung der Selbsterklärungsprompts werden die in Phase 2 erstellten Sammlungen häufig präzisiert und während der Notation in eine sinnvolle lineare Struktur gebracht. Das Hinterfragen und Begründen dominiert Phase 3. Dabei lässt sich häufig ein metronomartiger Prozess beobachten, in dem Stillarbeits- und inhaltliche Gesprächsphasen alternieren.

5. Diskussion & Fazit

Im Hinblick auf die Frage nach aufgetretenen Kategorien lässt sich festhalten, dass in der Lösungsbeispielphase wenige Bestandteile von Argumentationen zu beobachten sind. Dabei handelt sich hauptsächlich um Beschreibungen. Mit dem Lesen der Prompts wird Hinterfragen und Begründen angeregt, der Anteil der Beschreibungen bleibt klein. Dies setzt sich auch während des schriftlichen Festhaltens der Promptantworten fort.

Aus diesen Ergebnissen kann gefolgert werden, dass Selbsterklärungsprompts einen positiven Einfluss auf inhaltliche Argumentationen haben. Die Schülerinnen und Schüler werden konkret zu einer Begründung aufgefordert – dadurch werden Diskussionen angestoßen. Doch auch in der Schreibphase werden diese Gespräche oft fortgesetzt und enthalten viele Elemente des Hinterfragens und Begründens.

Selbsterklärungsprompts wirken sich nicht nur positiv auf das Auftreten von Selbsterklärungen – und somit den Lernerfolg – aus, wie vielfach in Studien repliziert wurde, sondern leisten auch einen Beitrag zum Hervorlocken von Argumentationen in Zweiergruppen und zur aktiven Verarbeitung von Lösungsbeispielen in Partnerarbeit.

Die Anordnung und Präzisierung von Argumenten während der Notation der Antworten führt weiterhin oftmals zur Aushandlung einer angemessenen Beantwortung der Prompts und bietet vielfältige Möglichkeiten zur Entfaltung von argumentativen und kommunikativen Kompetenzen.

Literatur

Betrancourt, M. (2005). The Animation and Interactivity Principle in Multimedia-Learning. In R. E. Mayer (Ed.), The Cambridge Handbook of Multimedia Learning (pp. 287–296). Cambridge, U.K.; New York: Cambridge University Press.

Bezold, A. (2012). Förderung von Argumentationskompetenzen auf der Grundlage von Forscheraufgaben. mathematica didactica, 35, 73–103.

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-Explanations: How Students Study and Use Examples in Learning to Solve Problems. Cognitive Science, 13, 145–182.

Chi, M. T. H., De Leeuw, N., Chiu, M.-H., & LaVancher, C. (1994). Eliciting Self-Explanations Improves Understanding. Cognitive Science, 18(3), 439–477.

KMK - Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Neuwied: Luchterhand.

Rasch, T., & Schnotz, W. (2006). Lernen ermöglichen - Lernen erleichtern: Was die Cognitive Load Theorie (wirklich) empfiehlt. In Schulische Leistung - Grundlagen, Bedingungen, Perspektiven (pp. 183–204). Münster: Waxmann.

Renkl, A. (1997). Learning from Worked-Out Examples: A Study on Individual Differences. Cognitive Science, 21(1), 1–29.

Retnowati, E., Ayres, P., & Sweller, J. (2010). Worked example effects in individual and group work settings. Educational Psychology, 30(3), 349–367.

Katrin SAUER, Münster

Online-Self-Assessments für Studieninteressierte – Ein strukturierter Vergleich

In den letzten Jahren sind die Studienabbruchquoten in einigen Fächern stark gestiegen. Die Studie des Hochschul-Informations-Systems (HIS) aus dem Jahr 2008 zeigt, dass insbesondere das Fach Mathematik betroffen ist. So brachen von den Absolventen 2004 (Studienanfänger 1997-1999) rund 23% ihr Mathematikstudium ab, während es unter den Absolventen 2006 (Studienanfänger 1999-2001) schon 31% waren (vgl. Heublein et al. 2008). Werden die MINT-Fächer insgesamt betrachtet, so liegt die Studienabbruchquote mit 28% „weit über den Zahlen anderer Fächer“ (Hetze 2011, S. 15). Die HIS-Studie hält aber gleichzeitig fest, dass auch andere Fächergruppen (z. B. Sprach- und Kulturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften und Wirtschaftswissenschaften) von hohen Abbruchquoten betroffen sind (vgl. Heublein et al. 2008). Die Faktoren für einen Studienabbruch sind dabei zahlreich. Als Hauptfaktoren werden in der HIS-Studie 2010 die zu hohen Leistungsanforderungen, finanzielle Probleme und die mangelnde Studienmotivation genannt (vgl. Heublein et al. 2010). Von allen Studienabbrechern beenden „18% ihr Studium vor allem deshalb nicht erfolgreich, weil ihre Studienmotivation sehr stark zurückgegangen ist. Sie stellen fest, dass sie sich falsche Vorstellungen vom Studienfach (…) gemacht haben. Die fehlende Fachidentifikation führt sie meist sehr schnell zu der Überzeugung, die falsche Fachwahl getroffen zu haben“ (Heublein et al. 2010, S. 19).

Genau an dieser Stelle setzen die sogenannten Online-Self-Assessments an. Ihnen wird das Potential zugesprochen, diesen falschen Vorstellungen und somit auch der falschen Fachwahl entgegenwirken zu können. „Self-Assessments (Selbsteinschätzungstests) zur Studienwahl sind darauf ausgerichtet, eine bessere Passung zwischen den Studieninteressierten und der Studierfähigkeit von angehenden Studierenden und den Anforderungen eines Studienganges zu erzielen“ (Baker, Tillmann 2007, S. 80). Zusätzlich zu diesen individuellen Vorteilen nennen Reiss et al. (2009) auch Veränderungen für die Institutionen, da „andererseits frühzeitig entdeckte individuelle Schwächen Hinweise für geeignete Fördermaßnahmen liefern und die Hochschulen in die Lage versetzen (können), mittels unterstützender Maßnahmen einen Beitrag zum Studienerfolg sowie zur Verringerung von Studienabbrüchen zu leisten“ (Reiss et al. 2009, S. 60).

1. Typen von Online-Self-Assessments

Grundsätzlich lassen sich alle angebotenen Online-Self-Assessments in zwei Kategorien einordnen.

- Kategorie 1: In dieser Kategorie befinden sich die Online-Self-Assessments, mit denen die Studieninteressierten bei einer bereits getroffenen Wahl des Studienfachs ihre Erwartungen an das Fach und die tatsächlichen Inhalte des Studiums abgleichen können. Es werden sowohl die Motivation und das Engagement als auch kognitive Kompetenzen (z. B. logisches Denken, mathematische Kompetenzen, deutsches und englisches Textverständnis) abgefragt.
- Kategorie 2: Dieser Kategorie sind Online-Self-Assessments zugeordnet, die den Studieninteressierten bei der Wahl des Studienfachs helfen sollen. Oft wird hierbei ein Abgleich der Interessen mit Inhalten des Studienfachs vorgenommen. Es werden hauptsächlich das persönliche Interesse und die Motivation abgefragt.

2. Derzeitiges Angebot an Online-Self-Assessments

Mittlerweile bieten tertiäre Bildungseinrichtungen deutschlandweit Online-Self-Assessments an. Das Spektrum der dabei bedienten Fächer reicht von Gesellschafts- und Sozialwissenschaften, Naturwissenschaften und Rechtswissenschaften über die Wirtschaftswissenschaften bis hin zu den Sprach- und Geisteswissenschaften.

In Nordrhein-Westfalen bieten momentan vier von 18 Universitäten eigene Online-Self-Assessments an. Fünf der restlichen 14 Universitäten verweisen auf ihren Homepages (z. B. auf der Seite der Studienberatung) auf Online-Self-Assessments anderer Universitäten und Hochschulen. Werden alle Hochschulen in den Blick genommen, und nicht nur die Universitäten, lässt sich feststellen, dass in NRW sieben von 64 Hochschulen eigene Online-Self-Assessments anbieten.

Die Teilnahme an diesen Online-Self-Assessments ist immer kostenfrei und in der Regel freiwillig. Nur in Ausnahmefällen wird bei der Einschreibung ein Nachweis über die Teilnahme an dem Online-Self-Assessment gefordert, wobei das Abschneiden dabei keine Rolle spielt. Die Betrachtung verschiedener Online-Self-Assessments weist dabei gleichzeitig große Unterschiede auf. Zum einen sind der Umfang der Tests und damit auch die Bearbeitungsdauer sehr unterschiedlich. Zum anderen werden sehr verschiedene Themenbereiche abgefragt. Darüber hinaus variieren die Rückmeldungen an die Studierenden sehr. Um diese Unterschiede aufzuzeigen und einen Überblick/Vergleich über verschiedene Online-Self-Assessments geben zu können, wird im Folgenden ein für dieses Vorhaben entwickelter Merkmalkatalog vorgestellt.

3. Merkmalkatalog

Der entwickelte Merkmalkatalog umfasst die folgenden Aspekte:

<table>
<tr><td>Allgemeines</td><td>Studiengänge, für die der Test konzipiert ist
Ziel(e) der Universität
Zielgruppe
Verbindlichkeit
Umfang/Dauer
Hilfen/erlaubte Hilfsmittel</td></tr>
<tr><td>Inhalte</td><td>Inhalte
Kognitive
Nicht-kognitive
Aufgabentypen bei kognitiven Inhalten
Beispiele vorhanden?
Zeitlimit
Multiple-Choice-System
Antwortformat
Anzahl der Antwortmöglichkeiten
Auslassen oder Überspringen von Fragen möglich?</td></tr>
<tr><td>Feedback</td><td>Feedback
Diagnostisches Potential
Rückmeldung
Wo?/Wann?
Wie detailliert?
Welche Aufgaben waren falsch/richtig?
Werden Antworten/Fehler erklärt?
Was wird geraten?/Gibt es Förderhinweise?</td></tr>
<tr><td>Sonstiges</td><td>Besonderheiten</td></tr>
</table>

Mithilfe des vorgestellten Merkmalkatalogs können detaillierte Beschreibungen und Vergleiche erfolgen. Die Tabelle 1 zeigt beispielhaft, wie ein solcher Vergleich bei der Betrachtung dreier unterschiedlicher Online-Self-Assessments aussehen könnte.

	RWTH Aachen	**Hochschule Niederrhein-Krefeld**	**Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn**
Umfang	• 5 Themenbereiche, insgesamt etwa **100 Aufgaben**/zu bewertende Aussagen.	• 2 Themenbereiche, insgesamt **18 Aufgaben** (teilweise müssen mehrere Aussagen in einer Aufgabe bewertet werden).	• 9 Themenbereiche, insgesamt etwa **120 Aufgaben**/zu bewertende Aussagen.

Dauer	• **90 bis 120 Minuten** (Aufgaben zum Teil zeitlich beschränkt).	• **30 bis 45 Minuten**.	• **45 bis 60 Minuten.**

Tabelle 1: Vergleich des Merkmals „Umfang/Dauer“ von Online-Self-Assessments.

4. Fazit

Ein ausführlicher Vergleich[1] aller Online-Self-Assessments macht deutlich, dass einige Verbesserungsmöglichkeiten existieren. Zum einen sollten die kognitiven Inhalte den Anforderungen des Studienfachs entsprechen, damit sich die Studierenden realistische Vorstellungen über die Inhalte und Schwierigkeiten des Studiengangs machen können. Zum anderen sollten die Rückmeldungen individuell auf die Studierenden zugeschnitten werden. Dafür sollten die Online-Self-Assessments ihr teils schon vorhandenes diagnostisches Potential (vgl. Winter 2011) nutzen und den Studierenden gezielte Fördermaßnahmen vorschlagen, die sie bis zu Beginn des Studiums umsetzen können.

Literatur

Baker, A. A.; Tillmann, A. (2007): Ein generisches Konzept zur Realisierung von Self-Assessments zur Studienwahl und Selbsteinschätzung der Studierfähigkeit. In: Eibl, C.; Magenheim, J; Schubert, S.; Wessner, M. (Hrsg.): DeLFI 2007. Die 5. E-Learning Fachtagung Informatik. Bonn: Köllen Druck + Verlag, S. 79-89.

Hetze, P. (2011): Nachhaltige Hochschulstrategien für mehr MINT-Absolventen. Essen: Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, 2. aktualisierte Auflage.

Heublein, U.; Schmelzer, R.; Sommer, D. (2008): Die Entwicklung der Studienabbruchquote an den deutschen Hochschulen. Ergebnisse einer Berechnung des Studienabbruchs auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2006. HIS:Projektbericht. Februar 2008. Hannover.

Heublein, U.; Hutzsch, C.; Schreiber, J.; Sommer, D.; Besuch, G. (2010): Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen. Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08. HIS:Forum Hochschule 2/2010. Hannover.

Reiss, S.; Tillmann, A.; Schreiner, M.; Schweizer, K.; Krömker, D.; Moosbrugger, H. (2009): Online-Self-Assessments zur Erfassung studienrelevanter Kompetenzen. In: Reinmann, G. (Hrsg.): Zeitschrift für Hochschulentwicklung. Jg. 4, Heft 1, S. 60-71.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse. Münster: WTM-Verlag.

[1] Für eine ausführliche Beschreibung des Vergleichs siehe: Sauer, K. (2013): Online-Self-Assessments für Studieninteressierte – Erstellung und Anwendung eines vergleichenden Merkmalkatalogs. In: Stein, M. (Hrsg.): Mathematik online. Münster: WTM-Verlag (im Druck).

Petra SCHERER, Essen, Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund, Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg

Umgang mit Heterogenität – ein Modul einer NRW-Multiplikatorenqualifizierung

1 Einleitende Informationen

Vor dem Hintergrund individueller Förderung gilt der Umgang mit Heterogenität, die Fähigkeit, individuelle Lernprozesse in ihrer Vielfalt differenziert zu erkennen und gezielt anzuregen, als zentrales Ziel der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts. Das Deutsche Zentrum Lehrerbildung Mathematik (DZLM) bildet u. a. hierzu Multiplikatorinnen und Multiplikatoren im Fach Mathematik im Rahmen einer gegenwärtig laufenden NRW-Qualifizierungsmaßnahme fort, die im Weiteren näher erläutert wird. Insbesondere sollen die Umsetzung der DZLM-Gestaltungsprinzipien (siehe Beitrag Scherer et al. in diesem Band: Kompetenzorientierung, Teilnehmerorientierung, Anregung zur Kooperation, Fallorientierung, Methodenvielfalt, Reflexionsförderung) verdeutlicht sowie das Zusammenspiel der DZLM-Themenkategorien (vgl. Scherer et al. in diesem Band) konkretisiert werden, in der vorliegenden Maßnahme sowohl additiv als auch integrativ umgesetzt.

2 NRW-Multiplikatorenqualifizierung

2.1 Ziele und Rahmenbedingungen

Die Maßnahme wird von mehreren DZLM-Abteilungen verantwortet und zielt ab auf die

- Vertiefung fachdidaktischer und fortbildungsdidaktischer Kompetenzen,
- die Umsetzung von entsprechenden Inhalten im eigenen Unterricht und/oder in eigenen Fortbildungen sowie
- die Etablierung Professioneller Lerngemeinschaften (PLGs).

Die Zielgruppe sind Mathematik-Moderatorinnen und -Moderatoren für die Grundschule (vorrangig Mitglieder der NRW-Kompetenzteams). Aktuell nehmen 18 Personen aus verschiedenen Bezirksregierungen teil.

Die Maßnahme erstreckt sich über das gesamte Schuljahr 2012/13 und hat einen Arbeitsumfang von 250 Stunden (10 Credit Points). Dabei werden Präsenztermine, praxisbasiertes Arbeiten, Selbststudium und z. T. Online-Aktivitäten kombiniert. Zudem wird die Maßnahme durch das Erbringen von Leistungsnachweisen zertifiziert.

2.2 Inhalte

Die Maßnahme umfasst drei große Themenfelder, die vorrangig folgenden Themenkategorien (vgl. Scherer et al. in diesem Band) zugeordnet sind:

- Kompetenzorientierter Mathematikunterricht (TK 2)
- Heterogenität im Mathematikunterricht (TK 3)
- Fortbildungsdidaktik und -management (TK 4)

In diesem Beitrag wird exemplarisch das Themenfeld ›Heterogenität im Mathematikunterricht‹ illustriert. Folgende Themen werden dazu in der Veranstaltung bearbeitet:

- Rahmenbedingungen und rechtliche Bestimmungen zu Heterogenität, Differenzierung und individueller Förderung
- Klassische Konzepte innerer Differenzierung und individueller Förderung sowie das Konzept der Natürlichen Differenzierung (ND)
- Charakterisierung geeigneter Lernumgebungen zur Umsetzung einer ND
- Umsetzung ausgewählter Lernumgebungen (Diskussion von Aufgabenstellungen, Erprobung, kollegiale Reflexion)
- Eigene Gestaltung und Umsetzung von Lernumgebungen
- Differenzierung und Jahrgangsmischung/Inklusion

Diese Themen werden entsprechend der o. g. Gestaltungsprinzipien umgesetzt. Dies wird exemplarisch an vier Beispielen gezeigt.

2.3 Exemplarische Themen

Beispiel 1: Das Thema ›Rahmenbedingungen u. rechtl. Bestimmungen zu Heterogenität, Differenzierung und individuelle Förderung‹ wird folgendermaßen umgesetzt: In einer ersten Präsenzveranstaltung wird ein theoretischer Input gegeben. Im Form von Selbststudium bzw. Arbeit in PLGs findet eine weitere Auseinandersetzung mit dem ›Recht auf individuelle Förderung‹ statt, die Teilnehmenden bereiten sich dabei auf Beratungsgespräche zu dieser Thematik vor (Elterngespräch, kollegiale Beratung). In der folgenden Präsenzveranstaltung finden dann Simulationen solcher Gespräche anhand der Methode ›Fishbowl‹ (Knoll 2007) statt. Ziele der Simulation sind die Erprobung der Sachkompetenz anhand konkreter Fälle, die Anwendung von Methoden der Gesprächsführung sowie die Reflexion hinsichtlich der Moderatorenaufgabe.

Beispiel 2: Das Thema ›Klassische Konzepte innerer Differenzierung‹ wird auch durch verschiedene Fortbildungselemente repräsentiert. In der Präsenzveranstaltung nehmen die Teilnehmenden nach einem fachdidaktischen Input (vgl. z. B. Krauthausen/Scherer 2010) exemplarische Analysen von Materialien (z. B. Zauberdreieck, Metzner 1991 oder Textaufgabenkartei, Trautmann 2003) mit vorgegebenem Schwierigkeitsgrad (qualitative Differenzierung) vor und reflektieren über Aspekte, die den Schwierigkeitsgrad beeinflussen sowie über entsprechende Lern- und Unterrichtsprozesse (Zuweisung des Materials nach (angenommenem) Schwierigkeitsgrad vorab durch die Lehrperson versus Schüler wählen Material entsprechend dem (angenommenen) Schwierigkeitsgrad selbst). Im Anschluss vertiefen die Teilnehmenden, wiederum im Selbststudium bzw. in der Arbeit in PLGs, das Thema: Sie analysieren selbst ausgewählte Materialien mit vorgegebenem Schwierigkeitsgrad (Recherche etwa zu Aufgabenkarteien, Online-Angeboten, Unterrichtsvorschlägen mit vorgegebenen Schwierigkeitskategorien oder Material aus dem alltäglichen Mathematikunterricht), die auch weitere Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts abdecken. Dabei reflektieren sie ihre Analysen auch mit Blick auf die Durchführung eigener Fortbildungen. Diese Analysen werden schriftlich dokumentiert, und die Materialien werden für eigene Fortbildungsveranstaltungen mit Reflexion möglicher Lern- und Unterrichtsprozesse aufbereitet. Die Teilnehmenden erhalten Feedback zu ihren Dokumentationen, u. a. im Austausch im Rahmen einer Web-Konferenz (Adobe Connect).

Beispiel 3: Beim Thema ›Umsetzung ausgewählter Lernumgebungen‹ werden im Rahmen der Präsenzveranstaltung geeignete Problemstellungen diskutiert und vorgegebene Formate und Problemstellungen didaktisch reflektiert und eingeordnet, etwa hinsichtlich der Übungstypen (Wittmann 1992). Im Selbststudium bzw. der Arbeit in PLGs werden dann ausgewählte Problemstellungen im eigenen Unterricht erprobt bzw. Erprobungen im Unterricht von Kolleginnen und Kollegen begleitet. Auch diese Erprobungen werden geeignet dokumentiert, u. a. durch Videoaufzeichnungen und/oder schriftliche Schülerdokumente. In der nachfolgenden Präsenzveranstaltung findet dann eine kollegiale Reflexion ausgewählter Erprobungen statt (Schülerdokumente, Videoaufzeichnungen; vgl. auch Scherer et al. 2004).

Beispiel 4: Das Thema ›Differenzierung und Jahrgangsmischung/Inklusion‹ wird im Rahmen der Präsenzveranstaltung hinsichtlich der theoretischen Hintergründe (z. B. rechtliche Bestimmungen, rehabilitationspädagogische Grundlagen, empirische Erkenntnisse, unterrichtsorganisatorische Umsetzungen, fachdidaktische Ansätze gemeinsamer Lehr- und Lernsituationen) aufgezeigt. Begleitend finden exemplarische Analysen von ausgewählten Materialien statt. Hierzu reflektieren die Teilnehmenden z. B. die fachdidaktische Relevanz von offen, zieldifferent oder parallelisiert angelegten

Aufgabenstellungen im Spannungsfeld zwischen sozial-interaktiven Verständigungs- und subjektiven Verstehensprozessen (z. B. anhand der Erörterung fachlicher Reduktionen und Erweiterungen bei der Erarbeitung der Multiplikation mit Blick auf die Formulierung eines Zielkontinuums für den gemeinsamen Mathematikunterricht, vgl. Transchel et al. 2013). Darüber hinaus diskutieren die Teilnehmenden die Rolle der Lehrkraft hinsichtlich der Moderation individueller und kooperativer Lernprozesse und der Zusammenarbeit mit Kolleginnen und Kollegen im Rahmen des Team-Teachings bzw. der klassenübergreifenden Zusammenarbeit. Im Selbststudium finden theoretische und – wenn möglich – konkret-praktische Vertiefungen im eigenen Unterricht statt.

3 Schlussbemerkungen

Die Teilnehmenden der laufenden Maßnahme haben im Rahmen der Zwischenevaluation bereits wichtige Rückmeldungen und Hinweise für die Gestaltung einer Wiederholungsmaßnahme gegeben, etwa bezogen auf den Arbeitsumfang und die Passung zur eigenen Fortbildungstätigkeit. Positiv gesehen wurde an vielen Stellen das Zusammenspiel von fachlichen Inhalten und Praxisbezügen mit der Möglichkeit des Austausches, sowohl in PLGs als auch in der Gesamtgruppe in den Präsenzveranstaltungen.

Literatur

Knoll, J. (2007). Kurs- und Seminarmethoden. Ein Trainingsbuch zur Gestaltung von Kursen und Seminaren, Arbeits- und Gesprächskreisen (11. vollst. überarb. und erw. Auflage ed.). Weinheim: Beltz.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2010). Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Download unter: http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf

Metzner, W. (1991). Das Zauberdreieck. Begleitheft zum gleichnamigen Holzmaterial. Stuttgart: Klett.

Scherer, P., Söbbeke, E., & Steinbring, H. (2004). Praxisleitfaden zur kooperativen Reflexion des eigenen Mathematikunterrichts. Arbeiten aus dem Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld. Occasional Paper(189).

Trautmann, T. (2003). Amelie & Co. Rechengeschichten. Begleitheft: Finken.

Transchel, S., Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2013, i. Dr.). Zahlen treffen! Kooperation und Kommunikation im gemeinsamen Mathematikunterricht. Erscheint in: Mathematik differenziert, 4(2).

Wittmann, E. C. (1992). Üben im Lernprozeß. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Eds.), Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen (pp. 175-182). Stuttgart: Klett.

Maike SCHINDLER, Dortmund

Empirische Studie zum Begriff der negativen Zahl

Im vorliegenden Beitrag werden die Konzeption und die Ergebnisse einer empirischen Studie im Rahmen eines Dissertationsprojektes dargestellt, in welchem die individuellen Begriffe der negativen Zahl von Schülerinnen[1] in den Blick genommen wurden. Die Ziele der Untersuchung bestanden unter anderem darin, das Vorwissen der Schülerinnen zum Begriff der negativen Zahl sowie seine Entwicklung über eine Unterrichtsreihe hinweg zu erfassen, um Rückschlüsse zu diesem Gegenstandsbereich zu erzielen.

Negative Zahlen haben für Schülerinnen in verschiedener Hinsicht Relevanz: Sie sind zum einen für die Lebenswelt der Schülerinnen, zum anderen für weitere Gegenstandsbereiche, bspw. die Algebra, bedeutsam. Entsprechend sind negative Zahlen Unterrichtsgegenstand der Sekundarstufe: Während Schülerinnen bereits in der Primarstufe verschiedene Erfahrungen im Zusammenhang mit Zahlen*raum*erweiterungen machen, werden in der Sekundarstufe vermehrt Zahl*bereichs*erweiterungen bedeutsam (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006), die unter anderem auch eine Erweiterung des Zahlbereichs um die negativen Zahlen umfassen. Dies geht mit einer „gewandelten Zahlvorstellung“ (ebd., 1) einher: Es kommt zu einer Erweiterung und Veränderung des Zahlbegriffs der Schülerinnen.

Im Rahmen dieser Studie wird eine Perspektive auf ***Begriffe*** eingenommen, in der das *individuelle* Verständnis der Schülerinnen von Begriffen im Fokus steht. Diese individuelle Perspektive kann unterschieden werden von einer *fachlichen* Perspektive, in der Begriffe die Bausteine der Mathematik darstellen (Vollrath 1987). Um Begriffe in ihrer individuellen Perspektive zu konzeptualisieren und erfassen zu können, wurde für den Rahmen der vorliegenden Studie ein theoretischer Hintergrund gewählt, der philosophische (vgl. Brandom 2000), (entwicklungs-) psychologische und mathematikdidaktische Sichtweisen (vgl. Vergnaud 1996) einbezieht und in ähnlicher Form in den Arbeiten von Hußmann und Schacht (2009) und Schacht (2012) zum Einsatz kam. Wesentlich für den Theoriehintergrund und das in diesem Zusammenhang entwickelte Schema zur Analyse individueller Begriffe ist die Betrachtung von Begriffen in ihrer diskursiven Praxis. Dabei werden individuelle *Urteile* i.S. individueller Annahmen (z.B. „Minuszahlen sind unter der Null.“) und ihr Gebrauch in Begründungszusammenhängen sowie individuelle *Fokussierungen* auf bestimmte Aspekte der Situation (z.B. Minuszeichen oder Temperaturveränderungen) als essentiell für

[1] Das generische Femininum bezieht sich in diesem Beitrag auf beide Geschlechter.

individuelle Begriffe aufgefasst. Individuelle Begriffe werden entsprechend als Netze aus Fokussierungen und Urteilen, welche inferentiell gegliedert sind – als *individuelle Begriffsnetze* – verstanden.

Das übergreifende ***Anliegen der Untersuchung*** besteht darin, einen Beitrag zur Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen im Zusammenhang mit dem Begriff der negativen Zahl zu leisten. Um Lehr- und Lernprozesse optimal zu gestalten, ist es notwendig, mögliche Lernvoraussetzungen von Schülerinnen i.S. möglicher Hürden sowie effektive Hilfen u.v.m. zu kennen und aufzugreifen. In der vorliegenden Studie wurde im Speziellen untersucht, über welches Vorwissen – im Sinne von Begriffsnetzen – Schülerinnen bereits *vor* einer Einführung negativer Zahlen verfügen, und es wurde untersucht, wie diese Begriffsnetze sich mittelfristig über eine Unterrichtsreihe hinweg entwickeln und verändern. Dabei wurden insbesondere die ersten Anfänge mit negativen Zahlen in den Blick genommen. Werden negative Zahlen im Mathematikunterricht eingeführt, so erfolgt i.d.R. zunächst ein erster Kontakt unter Rückgriff auf lebensweltliche Kontexte. In diesem Zuge lernen Schülerinnen u.a., dass das Minuszeichen neben seiner Funktion als Operationszeichen auch die Funktionen als Vorzeichen und als Inversionszeichen hat (vgl. Vlassis 2004). Es schließt sich eine Thematisierung der Ordnungsrelation an, woraufhin die Rechenoperationen für ganze Zahlen thematisiert werden. Im Rahmen dieser Studie wurden die Begriffsnetze der Schülerinnen mit besonderem Blickwinkel auf die Deutungen des Minuszeichens und die Ordnungsrelation untersucht. Bisherige Untersuchungen deuten darauf hin, dass Schülerinnen z.T. bereits *vor* einer unterrichtlichen Einführung negativer Zahlen diese offenbar in ihrer formal-symbolischen Darstellung deuten können (vgl. Malle 1988, Borba 1995). Ein Erkenntnisinteresse der dargestellten Untersuchung besteht darin, diesem Sachverhalt nachzugehen, und zu ermitteln, inwiefern Schülerinnen formal-symbolisch dargestellte negative Zahlen bereits vor einer unterrichtlichen Einführung deuten können und welches Begriffsnetz sie dabei zu negativen Zahlen aktivieren können.

Um u.a. zu erfassen, inwiefern Schülerinnen negative Zahlen in ihrer formal-symbolischen Darstellung deuten können, wurde ein ***Untersuchungsdesign*** gewählt, in dem die Schülerinnen je zwei formal-symbolisch dargestellte Zahlen der Größe nach ordneten: Es wurden halbstandardisierte, klinische Einzelinterviews mit Schülerinnen einer 6. Klasse einer Gesamtschule in NRW geführt, in welcher negative Zahlen noch nicht eingeführt worden waren. In den Interviews erhielten die Schülerinnen je zwei Zahlenkarten, bei denen sie bestimmen sollten, welche der Zahlen die größere sei (z.B. bei 12 und -15, -8 und -12). Auf diese Weise wurde zum einen untersucht, inwiefern die Schülerinnen negative Zahlen deuten konnten, und zum anderen, inwiefern sie bereits über eine tragfähige Ordnungsrelation für ganze Zahlen verfügten. Das Datenmaterial in Form von Videodokumenten, entsprechenden Transkripten und Schreibprodukten der Schülerinnen wurde für die Analyse mit dem entwickelten Analyseschema genutzt.

Die im Folgenden dargestellten, ***ausgewählten Ergebnisse der Untersuchung*** basieren auf den Einzelfallanalysen zweier Schülerinnen (Nicole und Tom) mit dem Analyseschema. Hinsichtlich der ***Begriffsnetze***, über welche Schülerinnen *vor einer unterrichtlichen Einführung negativer Zahlen* verfügen, weisen die Untersuchungsergebnisse auf eine große Heterogenität der Schülerinnen hin. Die Einzelfallanalyse des Schülers *Tom* zeigt auf, dass dieser bei der Betrachtung von Zahlen der Form ‚-12' bereits ein Begriffsnetz zu negativen Zahlen aktivieren und das Minuszeichen als Vorzeichen (vgl. Vlassis 2004) deuten kann und von „Minuszahlen" spricht. Sein Begriffsnetz ist bereits reichhaltig, stabil und über weite Teile tragfähig. Essentiell sind dabei lebensweltliche Erfahrungen mit Temperaturen, die er wiederholt aktiviert und gebraucht. Es gelingt Tom, diese Erfahrungen zu dekontextualisieren: Er überträgt diese auf „Minuszahlen" und er wechselt bspw. zu einer Darstellung an der waagerechten Zahlengeraden. Die Schülerin *Nicole* aktiviert bei Betrachtung von Zahlen der Form ‚-12' ein Begriffsnetz zu natürlichen Zahlen und zur Subtraktion. Sie deutet das Minuszeichen als Operationszeichen (vgl. ebd.) und aktiviert Vorwissen im Zusammenhang mit der Subtraktion, dem Zählen und der schriftlichen Subtraktion. Sie scheint insbesondere anzunehmen, dass es vor der Null keine Zahlen gebe. Sie aktiviert – im Gegensatz zu Tom – kein Vorwissen aus lebensweltlichen Kontexten. Die Feinanalyse mit dem Analyseschema deutet darauf hin, dass Nicole zum Zeitpunkt vor der unterrichtlichen Einführung negativer Zahlen Zahlen der Form ‚-12' noch nicht als negative Zahlen deuten kann und in diesem Zusammenhang noch kein Begriffsnetz speziell zu negativen Zahlen aktivieren kann. Dies ist zu dem Zeitpunkt im Lernprozess natürlich angemessen – jedoch erweitert es die bisherigen Befunde, die darauf hindeuteten, Schülerinnen hätten hierzu in der Regel bereits Vorwissen. Diese Ergebnisse tragen insofern zu einer Restrukturierung des Gegenstandsbereiches bei, als sie aufzeigen, welche Heterogenität und Spannweite an Vorwissen zum Begriff der negativen Zahl vorliegen kann und welche (lebensweltlichen) Erfahrungen die Schülerinnen dabei je (re-)aktivieren. Hinsichtlich einer *Entwicklung über eine Unterrichtsreihe* hinweg zeigt sich u.a., dass auch die Schülerin Nicole schließlich das Minuszeichen als Vorzeichen deutet und negative Zahlen an der Zahlengerade anordnen kann. Es zeigt sich darüber hinaus, dass beide Schülerinnen im Nachinterview zum Erklären und Begründen maßgeblichen Gebrauch von der Zahlengerade machen, welche während der Unterrichtsreihe ein essentielles Modell war. Dies deutet darauf hin, dass das gewählte Modell sich offenbar auf die Begriffsnetze der beiden Schülerinnen ausgewirkt hat.

Hinsichtlich der ***Ordnungsrelation*** zeigt das Begriffsnetz des Schülers Tom zum Zeitpunkt *vor der Einführung* negativer Zahlen auf, dass in seinem Fall ein Fokussieren auf den Absolutwert der negativen Zahlen zu einer geteilten Ordnungsrelation, die sich an den Beträgen der Zahlen orientiert (vgl. Mukhopadhyay 1997), führt. Diese Fokussierung scheint er in Analogie zu den natürlichen Zahlen zu wählen: Die Zahl, die den größeren „Zahlenwert" hat, ist größer. Dass es *zwei* mögliche Ordnungsrelationen gibt, die – je nach Fragestellung und Kontext – adäquat und sinnvoll sind, scheint ihm noch nicht bewusst. *Nach* der Unterrichtsreihe scheint der Schüler jedoch dazu in der Lage, bewusst die beiden möglichen Ordnungsrelationen zu unterscheiden und sie flexibel zu wählen. Eine solche Flexibilität im Umgang mit negativen Zahlen und der Ordnungsrelation für ganze Zahlen ist ein zu erstrebendes Lernziel für Schülerinnen.

Literatur

Borba, R. E. (1995): Understanding and operating with integers: difficulties and obstacles. In: L. Meira & D. Carraher (Hrsg.): Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (19th, Recife, Brazil, July, 22-27, 1995). Volume 2, 226-231.

Brandom, R. (2000): Expressive Vernunft. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag.

Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. In: Praxis der Mathematik H. 11, 1-7.

Hußmann, S. & Schacht, F. (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, 339-342.

Malle, G. (1988): Die Entstehung neuer Denkgegenstände – untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In: W. Dörfler (Hrsg.): Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Band 16. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky und Stuttgart: B.G. Teubner, 259-319.

Mukhopadhyay, S. (1997): Story telling as sense-making: children's ideas about negative numbers. In: Hiroshima Journal of Mathematics Education H. 5, 35-50.

Schacht, F. (2012): Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Wiesbaden: Vieweg-Teubner Verlag.

Vergnaud, G. (1996): The theory of conceptual fields. In: Steffe, L. P. & Nesher P. (Hrsg.): Theories of mathematical Learning. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum, 219-239.

Vlassis, J. (2004): Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. In: Learning and Instruction H. 14, 469-484.

Vollrath, H.-J. (1987): Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 19(3), 123-127.

Andrea SCHINK, Dortmund

Strukturelle Zusammenhänge bei Brüchen herstellen – Diagnose und Förderung für Lernende mit Schwierigkeiten

Einigkeit besteht darüber, dass Lernende über vielfältige inhaltliche Vorstellungen zu Brüchen und ihren Operationen verfügen sollten (z.B. Padberg 2009). Daneben ist auch das Erfassen struktureller Zusammenhänge für einen flexiblen Umgang mit Brüchen zentral (Schink 2013), womit jedoch gerade schwächere Lernende oft Schwierigkeiten zu haben scheinen.

Im von der „Deutsche Telekom Stiftung“ initiierten und geförderten Projekt „Mathe sicher können“ werden daher die diesbezüglichen individuellen Vorgehensweisen und kognitiven Hürden im Rahmen von Diagnose- und Fördereinheiten untersucht und gezielt bearbeitet (Deutscher, Prediger, Selter 2013). Vorgestellt werden der methodologische Rahmen und das Design des großen Projekts sowie der theoretische Hintergrund und empirische Befunde einer ihm zugehörigen Studie zum Herstellen struktureller Zusammenhänge beim Vergröbern und Verfeinern von Brüchen.

1. Lernprozessfokussierende Fachdidaktische Entwicklungsforschung

Den methodologischen Rahmen bildet das Modell der Lernprozessfokussierenden Fachdidaktischen Entwicklungsforschung mit seinen iterativen Zyklen der Entwicklung und Erforschung (Prediger, Link 2012): Das Diagnose- und Fördermaterial wird zu jeder Kompetenz in mehreren Lerngruppen zeitlich versetzt erprobt. Die Fördersitzungen werden videographiert und begleitend analysiert, um das Material sukzessive zu überarbeiten. So ergeben sich mehrere Zyklen pro ca. sechswöchiger Fördereinheit.

2. Die Lernumgebung: Gleichwertigkeit verstehen

Die Studie bezieht sich auf zwei aufeinander aufbauende Kompetenzen zur Gleichwertigkeit von Brüchen. Die erste *Ich kann zu einem Anteil in Bildern und Situationen gleichwertige Anteile finden* widmet sich dabei dem konsequenten Aufbau inhaltlicher Vorstellungen, während die zweite *Ich kann gleichwertige Brüche finden durch Erweitern und Kürzen* von den inhaltlichen Vorstellungen ausgehend den Kalkül als Denkentlastung entwickelt. Als Darstellungsmittel dienen gleichlange Bruchstreifen, die systematisch in der „Streifentafel“ (vgl. Abb. 1) untereinander angeordnet sind, so dass sich gleichwertige Anteile vertikal ablesen lassen: 1/2 = 2/4, da beide Anteile gleich lang sind (Prediger 2013).

Strukturiert wird die Lernumgebung in fünf Etappen: Gleichwertige Anteile (1) in Streifen einzeichnen / ablesen (qualitativ), (2) in der Streifentafel finden (Muster erkennen / nutzen), (3) in Streifen untersuchen (Verfeinern / Vergröbern), (4) im Kopf finden (Ablösung vom Material), (5) über Erweitern / Kürzen finden (verständnisorientiert üben).

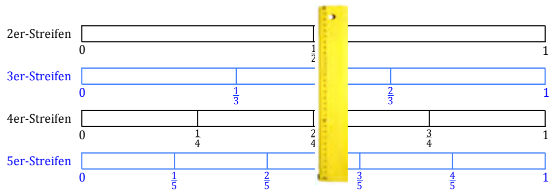


Abb. 1: Die Streifentafel (Ausschnitt)
aus Mathewerkstatt 6, Cornelsen Verlag

Nach dem ersten qualitativen Einstieg zum Kennenlernen der Bruchstreifen als geeignetem Darstellungsmittel zum Reden über gleichwertige Brüche, wird den Lernenden mit der Streifentafel ein Darstellungsmittel bereit gestellt, das die für das Finden gleichwertiger Brüche notwendigen Strukturen bereits beinhaltet (Etappen 1-2). Im weiteren Verlauf der Förderung sollen die Lernenden diese Strukturen jedoch zunehmend im Sinne einer fortschreitenden Schematisierung selbst herstellen und als Grundlage für die Argumentation über Gleichwertigkeit nutzen (Etappen 3-4).

3. Theoretischer Rahmen: Strukturelle Zusammenhänge verstehen

Die Gleichwertigkeit von Brüchen lässt sich unter drei miteinander verbundenen Perspektiven betrachten: einer inhaltlichen mit Fokus auf notwendige Vorstellungen (Padberg 2009), einer kalkülhaften mit Fokus auf Rechenregeln (ebd.) und einer relational-strukturellen (Schink 2013).

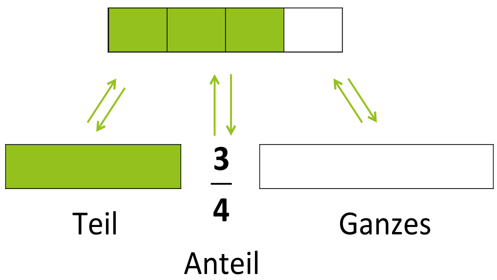


Abb. 2: Teil, Anteil, Ganzes

Für das Verständnis von gleichwertigen Brüchen und der Verfahren, sie zu erzeugen (inhaltlich: Verfeinern und Vergröbern; syntaktisch: Erweitern und Kürzen) wird in der Lernumgebung die Anteilsvorstellung von Brüchen aktiviert. Dabei müssen für den Umgang mit Brüchen stets triadische Zusammenhänge gedeutet werden, die sich im Zusammenspiel dreier Komponenten ergeben (Schink 2013): So bezieht sich ein Anteil immer auf ein bestimmtes Ganzes und erzeugt eine Strukturierung, aus der sich der Teil ergibt. Der Anteil ergibt sich als Beziehung zwischen dem Teil und dem zugehörigen Ganzen. Das Ganze ergibt sich aus der Rekonstruktion des Teils durch die Nutzung des Anteils (Abb. 2).

Um diese strukturellen Zusammenhänge herstellen und das Vergröbern und Verfeinern flexibel verstehen zu können, ist das Bilden und Umbilden von Einheiten zentral: Unter dem Bilden von Einheiten versteht man das sogenannte „unitizing“, das Beschreiben von Zahlen und Mengen über ihre Zerlegung in Teilmengen, die als neue Einheiten verstanden werden (Lamon

1994). Dabei werden bei Brüchen multiplikative Einheiten gebildet, wie beim Zählen in Schritten für natürliche Zahlen. Komplexer wird es dadurch, dass neue Beziehungen zwischen *Mengen* in Form von Zuordnungen betrachtet werden können, z.B. *pro Quadrat kommen 4 Seiten hinzu (und nicht bloß eine).*

Für das Erweitern und Kürzen als Verfeinern und Vergröbern werden Einheiten durch Anteile geschaffen, wobei eine gemeinsame Strukturierung des Teils *und* des Ganzen gefunden werden muss (Abb. 3): Wird 1/4 im 12er-Streifen betrachtet, so werden alle Viertel (die die Einheiten im 4er-Streifen bilden) in neue Einheiten umgebildet (zerlegt), von denen drei so groß wie 1/4 sind. Mit diesen neuen Einheiten werden Teil und Ganzes neu beschrieben. So wird plausibel, wieso 3/4 genauso groß ist wie 9/12 und wie diese beiden Brüche strukturell zusammen hängen. Diese Zusammenhänge liegen schließlich den kalkülhaften Verfahren Erweitern und Kürzen zu Grunde. In diesem Kontext ergeben sich folgende Forschungsfragen:

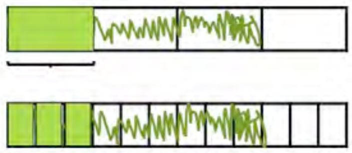


Abb. 3: Einheiten bilden

(1)/(2): Welche Vorgehensweisen nutzen Lernende zum Herstellen und Beurteilen gleich großer Anteile? Und inwiefern stellt das Verständnis des Bildens und Umbildens von Einheiten für Lernende eine Hürde dar?

(3): Wie können Lernende darin unterstützt werden, ein tragfähiges Verständnis von Erweitern und Kürzen zu erwerben?

4. Empirische Einblicke in individuelle Strukturierungen

Sven soll in einer mündlichen Diagnose einen gleich großen Anteil zu 6/8 im 4er-Streifen angeben (Abb. 4). Er argumentiert: „hier *[zeigt die 6 gefärbten Felder im 8er-Streifen]* ist ja mehr als da *[die 2 ungefärbten Felder]*. Also, da sind ja mehr *[...]*“. Auf Kalkülebene, als Sven symbolisch einen gleich großen Anteil zu 3/4 bestimmen soll, gibt er die Anteile 8/9 und 1/2 an, mit der Begründung, dass dann ein Kästchen frei bleibt. Svens Argumentation zeigt somit die Schwierigkeit, den Blick von der Anzahl der Teile weg auf die Relation der Teile zueinander hin zu legen: Er schaut auf die Anzahl der Teile und nicht auf die Beziehung von Teil und Ganzem. Dabei löst der Anteil 1/2, der durch das Freilassen von zwei Kästchen im 4er-Streifen ent-

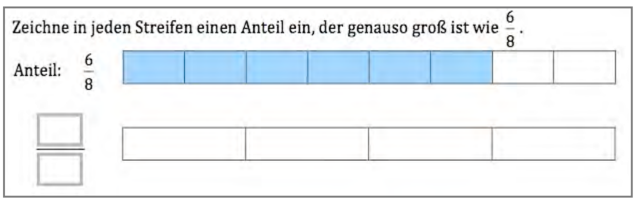


Abb. 4: Gleichgroße Anteile zu 6/8 finden

stehen würde, im Bild einen kognitiven Konflikt aus; in symbolischer Realisierung hingegen nicht.

In der noch andauernden Auswertung weiterer Fälle zeigen sich folgende erste Befunde zu den Forschungsfragen:

Zu (1)/(2): Lernende gehen vielfältig vor, um Anteile zu vergleichen und gleichwertige Anteile herzustellen. Dabei bereiten vielen insbesondere *relationale Bezüge* Schwierigkeiten. So wird etwa die *Anzahl der Einheiten* verglichen und *nicht gleichzeitig auch ihre Größe*, d.h. additive Zerlegungen stehen im Fokus.

Zu (3): Gerade schwächere Lernende müssen im Erkennen und Nutzen von Strukturen unterstützt werden, um den Fokus von absoluten und additiven Sequenzen auf das Bilden von (multiplikativ nutzbaren) Einheiten zu verschieben, die sich im Bezug von Teil und Ganzem ergeben. Die Schwierigkeit liegt hierbei in der *gleichzeitigen Betrachtung von Teil und Ganzem* bei *gleichzeitiger Strukturierung durch zwei Anteile*, die es zu vergleichen bzw. herzustellen gilt. Diese Perspektive und das Verstehen der Zusammenhänge kann durch die Struktur der Streifentafel unterstützt werden, denn diese lässt sie gleichzeitig betrachten und miteinander vergleichen.

Dank: Der Dank für die Initiative und Unterstützung des Projekts „Mathe sicher können“ (www.mathe-sicher-koennen.de) unter Leitung von S. Prediger und C. Selter geht an die Deutsche Telekom Stiftung.

Literatur

Deutscher, T., Prediger, S. & Selter, C. (2013): Mathe sicher können – Sicherung mathematischer Basiskompetenzen in der unteren Sekundarstufe I. BzMU.

Lamon, S. J. (1994): Ratio and proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In: G. Harel & J. Confrey (Hrsg.): The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany: SUNY, 89-120.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum.

Prediger, S. (2013): Focussing structural relations in the bar board – a design research study for fostering all students’ conceptual understanding of fractions. In: M.A. Mariotti & B. Ubuz (Hrsg.): Proceedings of CERME 8, Antalya 2013.

Prediger, S. & Link, M. (2012): Fachdidaktische Entwicklungsforschung - Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In: H. Bayrhuber et al. (Hrsg.): Formate Fachdidaktischer Forschung. Band 2. Münster et al: Waxmann, 29-46.

Schink, A. (2013): Flexibler Umgang mit Brüchen – Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem. Wiesbaden: Springer.

Kathrin SCHLARMANN, Oldenburg

Rekonstruktion von mentalen Strukturen von Studierenden zum Konzept Basis in der Linearen Algebra

Die Lineare Algebra stellt eine komplexe Theorie konzeptueller Natur dar. Charakteristisch für die Lineare Algebra sind eine Vielzahl von Äquivalenzaussagen und viele gehaltvolle Begriffe mit weitreichender Bedeutsamkeit. Um den Begriff Basis flexibel anwenden zu können, müssen die Beziehungen zwischen den Teilbegriffen Linearkombination, lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensystem gut ausgebildet sein. Im Rahmen einer Analyse zweier Fallbeispiele behandelt dieser Aufsatz folgende Frage: Wie unterscheiden sich aktivierte mentale Strukturen von Studierenden voneinander, die in der Bearbeitung von Aufgaben zum Thema Basis erfolgreich beziehungsweise nicht erfolgreich sind?

Mentale Strukturen

Die Vernetzung von Ideen und Inhalten stellt einen essentiellen Bestandteil von Begriffsbildung dar. Nach Skemp (1973) resultiert der gesamte Prozess des Verbindens und Transformierens von Ideen in der Konstruktion einer komplexen mentalen Struktur. Skemp nennt eine solche mentale Struktur „Schema" (1973, S. 39) und beschreibt sie als das „major instrument (…) for solving new problems" (Skemp 1973, S. 43). Mentale Strukturen sind rein gedankliche Objekte, die nicht direkt zugänglich sind. Studierende greifen bei der Bearbeitung von Aufgaben auf subjektive Erfahrungen und individuelle Perspektiven zurück (dazu gehören z.B. mentale Strukturen, Strategien und Überzeugungen). Um mentale Strukturen, die von Studierenden aktiviert werden, zu untersuchen, ist eine Analyse ihrer Denkprozesse erforderlich. Darauf aufbauend erfolgt im Folgenden die Rekonstruktion von mentalen begrifflichen Strukturen, die dem mathematischen Denken und Handeln zugrunde liegen. In Bearbeitungsprozessen wird nur ein Teil der mentalen Struktur aktiviert. Als formales Raster für die Analyse von Denkprozessen und die Rekonstruktion der mentalen Strukturen dient die triadische Zeichenrelation nach Peirce (unter anderem angewendet in Presmeg 2006 oder Schreiber 2012), bestehend aus Representamen, Interpretant und Objekt. Aufgrund des begrenzten Umfangs kann darauf nicht ausführlicher eingegangen werden.

Zur Untersuchung

An der Untersuchung haben 15 Mathematikstudierende teilgenommen, wobei in diesem Aufsatz nur die zwei Fälle Peter und Mike betrachtet werden. Die Untersuchung fand etwa vier Wochen nach der Abschlussprüfung zum Modul Lineare Algebra statt. Die Probanden wurden (unter anderem) aufgefordert, eine Basis zum Untervektorraum $\mathrm{U} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = z\right\} \subset \mathbb{R}^3$ anzugeben (exakte Aufgabenstellung mit Erläuterungen siehe Schlarmann 2012). Die Probanden arbeiteten zunächst alleine an der Aufgabe. In einem anschließenden Einzelinterview reflektierten sie ihre Bearbeitungen und entwickelten weitere Ideen zum Lösen der Aufgabe. Dem Interviewer kam dabei die Aufgabe zu, die Probanden anzuregen, ihre Gedanken offenzulegen. Er fungierte nicht als Erklärer.

Peters Bearbeitungsprozess und seine aktivierte mentale Struktur

Im Folgenden wird der Bearbeitungsprozess von Peter zusammenfassend dargestellt. Die Nummern in Klammern verweisen auf die jeweilige Verbindung in Abbildung 1. Peter fokussiert zunächst die in U gegebene Bedingung $2x = z$ und wählt unter ihrer expliziten Berücksichtigung den Vektor (1,1,2) als einen Basisvektor (1). Des Weiteren fügt er den Vektor (2,0,4) hinzu und erläutert die zweite Komponente mit den Worten: „Da die (beiden Basisvektoren) aber linear unabhängig sein müssen, hab ich da die Null gewählt.“ (2) Mit der Begründung „Da wir im $\mathbb{R}^3$ sind, brauche ich drei Basisvektoren“ (3), gibt Peter (0,1,0) als dritten Vektor an. Erläuternd, dass die lineare Unabhängigkeit nach wie vor gelten müsse, bemerkt er, dass der Vektor (0,1,0) aus den zuvor gewählten Basisvektoren erzeugbar ist (4): „Wenn man den (zeigt auf (2,0,4)) durch zwei teilen würde und dann (…) die alleine schon voneinander abzieht (zeigt auf (1,1,2)), dann fällt der weg (streicht (0,1,0) durch).“ (5) Peter überprüft dann, ob ein anderer dritter Basisvektor, nämlich (1,2,2), in Frage kommt. Er erkennt wieder eine Linearkombination, die diesen Vektor aus den übrigen beiden erzeugt (6), und streicht den zuvor geschriebenen Vektor (1,2,2) durch. Peter wendet sich daraufhin dem gegebenen Untervektorraum in der Aufgabenstellung zu und erläutert: „Vielleicht reichen auch zwei. (…) Das ist zwar ein Vektor im $\mathbb{R}^3$, aber das könnte ja zum Beispiel eine Ebene sein und dann braucht man nur zwei Vektoren.“ An dieser Stelle betrachtet er U als irgendein ganzheitliches Objekt, z.B. eine Ebene, und erinnert, dass eine Ebene von zwei Basisvektoren aufgespannt wird (7). Des Weiteren erklärt er, bei U handele es sich um eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Drei Basisvektoren kämen somit nicht in Frage, „weil dann wär es der $\mathbb{R}^3$ ja auch selbst“ (8). Schließlich überprüft Peter, ob alle Elemente aus U mit den Vektoren (1,1,2) und (2,0,4) erzeugbar sind, indem er sie linear kombiniert und Beziehungen unter den Komponenten sowie die allgemeine Struktur der Vektoren fokussiert (9). Abbildung 1 zeigt die rekonstruierte, bei der Bearbeitung aktivierte mentale Struktur von Peter. Dabei wird der Fokus auf die konzeptuellen Aspekte gelegt. Der Begriff Basis steht im Mittelpunkt, da die Aufgabe eine Beschäftigung mit diesem Konzept explizit fordert.

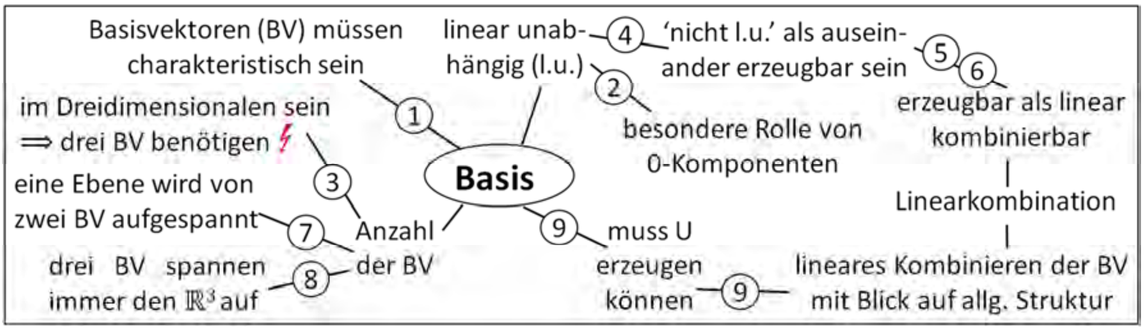


Abbildung 1: Rekonstruktion der aktivierten mentalen Struktur von Peter

Mikes Bearbeitungsprozess und seine aktivierte mentale Struktur

Zu Beginn der Bearbeitung erwähnt Mike, dass eine Basis ein linear unabhängiges Erzeugendensystem sei, und notiert daraufhin: „Es gilt $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow$ lin. unabh.“ (1). (Die Nummern in Klammern verweisen auf die jeweilige Verbindung in Abbildung 2.) Diese Eigenschaft wendet Mike an, indem er drei mögliche Basisvektoren, nämlich (1,0,2), (0,1,0) und (1/2, 0,1) als Spaltenvektoren in eine 3x3-Matrix schreibt und ihre Determinante berechnet (2). Bei der Wahl der Vektoren wird explizit beachtet, dass $2x = z$ erfüllt wird (2). Die Berechnung der Determinante ergibt Null. Daraufhin beginnt Mike einen neuen Versuch mit den Vektoren (1,0,2), (0,1,0) und (1,1,2). Er kommt zu dem Ergebnis, dass auch diese drei Vektoren nicht linear unabhängig sind (3) und probiert noch zwei weitere Möglichkeiten, bei denen er den dritten Vektor variiert (4), (5). Dabei liegt sein Fokus auf den Berechnungen der Determinanten. Mike stellt die Vermutung auf, dass es keinen dritten Vektor gäbe. Er erläutert, dass er keinen dritten Vektor finde, sodass die lineare Unabhängigkeit erfüllt sei, und er könne sich vorstellen, dass eine Basis aus den beiden Vektoren (1,0,2) und (0,1,0) bestehe. Darauf reagiert der Interviewer mit der Aufforderung, dies zu prüfen. Mike erklärt, man müsse mit der Basis U aufspannen können (6) und sagt: „Weiß ich jetzt gerade nicht mehr wie man es prüft. (…) Spann von ja den beiden halt (schreibt $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$). Weiß ich jetzt so nicht. Das ist jetzt einfach der Spann von den beiden. Was man da jetzt mit aufstellen kann, bin ich auch gerade überfragt.“ (7) Seitens des Interviewers wird das Stichwort Linearkombination gegeben. Mike äußert, er habe dies schon mal gehört und sollte es auch eigentlich wissen. Er assoziiert jedoch keine weiteren Ideen (8) und kann an dieser Stelle nicht weiterarbeiten.

Abbildung 2 zeigt die Rekonstruktion der aktivierten mentalen Struktur von Mike.

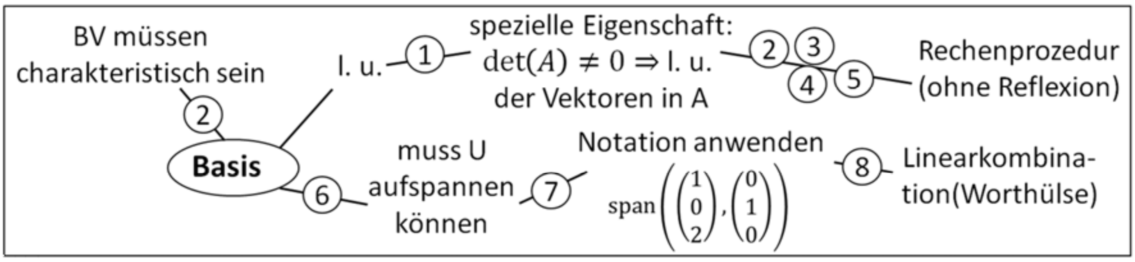


Abbildung 2: Rekonstruktion der aktivierten mentalen Struktur von Mike

Vergleich der Fallbeispiele

Peter und Mike fokussieren zu Beginn ihrer Bearbeitungen beide den Aspekt der linearen Unabhängigkeit, assoziieren dabei aber unterschiedliche Aspekte. Mike greift auf eine rechenbetonte Eigenschaft zurück (vgl. Abb. 2), die nur in speziellen Kontexten Anwendung findet und in dieser Aufgabe nicht greift, da sich damit nur n-viele n-Tupel auf lineare Unabhängigkeit untersuchen lassen. Die von Peter verwendeten Aspekte lassen sich auch auf andere Vektorräume übertragen. Daher wird die Verbindung zur linearen Unabhängigkeit in Peters aktivierter mentaler Struktur bzgl. dieser Aufgabe als substantieller angesehen. Beide Probanden gehen zunächst davon aus, dass eine Basis von U drei Vektoren beinhalte, und greifen im weiteren Verlauf die Eigenschaft des Erzeugens auf. Während Mike Probleme mit der Anwendung in diesem Kontext hat und auch der Begriff der Linearkombination scheinbar nur als Worthülse vorliegt, kann Peter die Eigenschaft des Erzeugens nutzen, um sich selbst von seiner Lösungsidee zu überzeugen. Das Konzept der Linearkombination verwendet Peter an dieser Stelle und auch zuvor im Zusammenhang mit der linearen Unabhängigkeit. Somit ist es für ihn in diesem Aufgabenkontext flexibel zur Argumentation verfügbar.

Literatur

Presmeg, N. (2006): Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. Educational Studies in Mathematics, Vol. 61, 163–182. New York: Springer.

Schlarmann, K. (2012): Konzeptuelles Begriffsverständnis von Lehramtsstudierenden in der Linearen Algebra. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0202_Schlarmann.pdf, letzter Aufruf 19.03.2013

Schreiber, C. (2013): Semiotic processes in chat-based problem-solving situations. Educational Studies in Mathematics, Vol. 82, 51-73. New York: Springer.

Skemp, R. R. (1973): The psychology of learning mathematics. Harmondsworth: Penguin Books.

Stephanie SCHLUMP, Oldenburg

Wie denken erfahrene Gymnasiallehrkräfte über die Strukturierung von Unterricht zur Entwicklung der Problemlösekompetenz?

Problemlösen wird als eine der zentralen prozessbezogenen Kompetenzen angesehen, die Schülerinnen und Schüler im Laufe ihrer Schulzeit im Mathematikunterricht erwerben sollen (KMK 2006). Lehrkräfte stehen daher vor der Herausforderung, ihren Mathematikunterricht derart zu strukturieren, dass relevante Lernprozesse angeregt und damit einhergehend ein Kompetenzaufbau aufseiten der Schülerinnen und Schüler ermöglicht wird.

Forschungsfragen

Ausgehend von dieser Situation wurden in Anlehnung an das Modell der Didaktischen Rekonstruktion für die Lehrerbildung (vgl. van Dijk & Kattmann (2007)) folgende Forschungsfragen formuliert:

- Wie können Lehrerinnen und Lehrer ihren Mathematikunterricht zur Entwicklung der Problemlösekompetenz ihrer Schülerinnen und Schüler strukturieren (*theoretische Perspektive*)?
- Wie denken erfahrene Gymnasiallehrkräfte über die fachdidaktische Strukturierung von Unterricht zur Entwicklung der Problemlösekompetenz (*empirische Perspektive*)?

Theoretische Perspektive

Fachdidaktische Strukturierung kann selbst als ein Problemlöseprozess aufgefasst werden, bei dem es erforderlich ist, über verschiedene Aspekte zugleich nachzudenken und diese dynamisch und rekursiv miteinander in Beziehung zu bringen. Im Folgenden werden basierend auf einer Literaturrecherche wesentliche Aspekte vorgestellt, die bei der fachdidaktischen Strukturierung relevant werden.

Oser und Baeriswyl (2001) unterscheiden zwei Ebenen des Unterrichts: die *Oberflächenstruktur* beschreibt die objektiv einschätzbaren Gestaltungselemente des Unterricht (z. B. Methoden oder Sozialformen), während sich die *Tiefenstruktur* auf die gezielte Anregung von kognitiven Prozessen der Schülerinnen und Schüler bezieht. Nach Shulman (1986) ist das Fachwissen eine notwendige Voraussetzung für Strukturierungsprozesse der Lehrpersonen. Daher muss eine Lehrkraft eine Aufbereitung der eigenen *Fachstruktur* vornehmen, die es dann in eine *kohärente Sachstruktur* (z. B. Seel 1981) auf einer anderen Ebene für Schülerinnen und Schüler zu überführen gilt. Diese wiederum kann in eine *chronologische Sachstruktur* (z. B. Seel 1981) übertragen werden, die auf Ebene der Oberflächenstruktur sichtbar wird. Daneben ist das Konzept der *kognitiven Strukturierung* nach Einsiedler und Hardy (2010) relevant. Hier spielt zum einen die *kognitive Aktivierung* auf Ebene der Tiefenstruktur eine Rolle; zum anderen ist über einen geeigneten Einsatz von *instruktionaler Unterstützung* (z. B. dynamische Begleitung oder statische Hilfen) auf Ebene der Oberflächenstruktur nachzudenken.

Bei der fachdidaktischen Strukturierung von Mathematikunterricht zur Entwicklung der Problemlösekompetenz sollten ferner zwei unterschiedliche Perspektiven Berücksichtigung finden: die kurzfristige Strukturierung von Problemlösesequenzen und der langfristige Aufbau der Problemlösekompetenz. Bei der *kurzfristigen Strukturierung* sollen die kognitiven Aktivitäten von Schülerinnen und Schülern gezielt angeregt werden. Es lassen sich fünf Phasen des Problemlöseprozesses benennen (z.B. Pólya, 1967, Newell & Simon, 1972, Dörner, 1976, Bruder & Collet, 2011), die jeweils durch spezifische kognitive Aktivitäten charakterisierbar sind: Phase (1) Problemgenerierung und -identifikation, Phase (2) Problemformulierung, Phase (3) Lösungswege aufstellen, Phase (4) Lösungswege testen und Phase (5) Reflexion. Die Phase 2 lässt sich beispielsweise durch die kognitiven Aktivitäten Situations- und Zielanalyse charakterisieren. Für den *langfristigen Kompetenzaufbau* schlagen Bruder und Collet (2011) ein Modell vor, das beschreibt, wie Schülerinnen und Schüler die flexible Anwendung von Heurismen erlernen können. Die Konstruktion von Unterrichtseinheiten kann dabei annähernd anhand von vier Etappen erfolgen.

Empirische Perspektive

Untersuchungsdesign

Da gerade Lehrpersonen für die Strukturierung von Unterricht verantwortlich sind, ist es aus empirischer Perspektive vor allem interessant, handlungsnahe und situierte Kognitionen von Lehrkräften zu erfassen. Aus diesem Grund wird ein *komplex konstruiertes qualitatives Interview* genutzt. Den Kern der Interviews bilden auf theoretischer Grundlage konstruierte *Unterrichtsvignetten*, die dazu dienen, auf bestimmte Aspekte von Unterricht zu fokussieren (Krammer und Reusser, 2005). Die Interviews werden technisch durch die computerbasierte Software vKID (Lindmeier, 2011) realisiert und bestehen aus zwei Teilen. Im *ersten Teil* lösen die Probanden selbst ein Beispielproblem, das in den Unterrichtsvignetten zu sehen ist, in Anlehnung an die Methode des Lauten Denkens, so dass die Problemlösekompetenz (Fachstruktur) der Probanden rekonstruiert werden kann. Um weiterhin das Bild der Probanden zur kohärenten Sachstruktur des Problemlösens zu erfassen, sollen sie einen vorgegebenen Schülerlösungsprozess analysieren und in Problemlösephasen gliedern. Im *zweiten Teil* des Interviews werden acht kurze Unterrichtsvignetten als Stimuli genutzt, um zu erfassen, wie die Probanden über die ausgewählten Aspekte der fachdidaktischen Strukturierung nachdenken: die gezielte Anregung der kognitiven Aktivitäten des Problemlöseprozesses, den Einsatz instruktionaler Unterstützung und den Einsatz allgemeiner Unterrichtsmerkmale. Die Stichprobe umfasst zwölf Gymnasiallehrkräfte aus Niedersachsen, die alle mindestens zehn Jahren Berufserfahrung haben. Für die Auswertung wurden die Transkripte der Interviews sowie alle von Hand angefertigten Aufzeichnungen der Probanden herangezogen.

Erste Ergebnisse

Die erhobenen Daten werden unter Ausnutzung von inhaltsanalytischen Verfahren ausgewertet. Bislang lassen sich erste Ergebnisse zu einem der Probanden eingehender formulieren. Mit Blick auf die *Fachstruktur* dieses Probanden lässt sich festhalten, dass dieser eine hohe Problemlösekompetenz zu haben scheint. Dies wird vor allem daran deutlich, dass sich viele Teilprozesse (u.a. Situationsanalyse) bei seiner Bearbeitung des Problems identifizieren lassen. Bei der Analyse des vorgelegten Schülerlösungsprozesses benennt der Proband viele Teilprozesse (z. B. Situationsanalyse), so dass sich ein ausgeprägtes Bild dieses Probanden hinsichtlich der *kohärenten Sachstruktur* des Problemlösens rekonstruieren lässt. Die Analyse des zweiten Interviewteils, in dem die Unterrichtsvignetten als Stimuli eingesetzt wurden, machen deutlich, dass er auf die *gezielte Anregung der kognitiven Aktivitäten des Problemlöseprozesses* fokussiert. Dies zeigt sich darin, dass dieser Proband viele der in den Unterrichtsvignetten angelegten kognitiven Aktivitäten benennen kann. Zum Beispiel identifiziert er die in einer der Vignetten angelegte Situationsanalyse. Zum anderen wird aber auch ein ausdifferenziertes Bild über die gezielte Anregung der kognitiven Aktivitäten bei der Strukturierung seines eigenen Unterrichtes deutlich, da er konkrete Handlungsoptionen zu vielen Teilprozessen des Problemlöseprozesses äußert. Anhand der Aussage des Probanden *„…dann hätten wir, ja, gemeinsam nochmal versucht zusammen zu tragen, was haben wir eigentlich. Was wollten wir? Was haben wir? Dass man ruhig nochmal so Weg macht [und] an die Tafel bringt…“* zur fünften Vignette wird beispielsweise eine konkrete Handlungsoption zur Situationsanalyse - aber auch zur Zielanalyse - deutlich. Im Sinne einer leichten Lehrerlenkung wird in dieser Handlungsoption auch der Einsatz instruktionaler Unterstützung sowie der Medieneinsatz der Tafel und der Einsatz der Sozialform Plenum als allgemeine Unterrichtsmerkmale deutlich. Insgesamt lässt sich diese Handlungsoption dann wie folgt beschreiben: Die Lehrkraft entwickelt zusammen mit den Schülern im Plenum eine Bestandsaufnahme der gegebenen Mittel des mathematischen Problems an der Tafel. Ein Blick auf die Ergebnisse dieses Probanden lässt also die Verzahnung der einzelnen Aspekte der fachdidaktischen Strukturierung deutlich werden.

Ausblick

Im Verlauf der weiteren Arbeit werden die Daten der übrigen elf Probanden analysiert und miteinander verglichen, um ein möglichst breites Antwortspektrum zur fachdidaktischen Strukturierung des Unterrichts zur Entwicklung der Problemlösekompetenz zu erhalten. Des Weiteren sollen basierend auf den Ergebnissen der theoretischen und empirischen Perspektiven *Konsequenzen für die Lehrerbildung* formuliert werden (im Sinne der konstruktiv-entwickelnden Perspektive des Modells der Didaktischen Rekonstruktion für die Lehrerbildung).

Literatur

Bruder, R. & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelson Scriptor.

Dijk, E. van, & Kattmann, U. (2007). A research model for the study of science teachers' PCK and improving teacher education. Teaching and Teacher Education, 23, 885–897.

Einsiedler, W. & Hardy, I. (2010). Kognitive Strukturierung: Einführung und Begriffserklärungen. In: Unterrichtswissenschaft, 38(3), 194-209.

Krammer, K. & Reusser, K. (2005). Unterrichtsvideos als Medium der Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen. In: Beiträge zur Lehrerbildung, 23, 35-50.

Lindmeier, A. (2011). Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers: A Threefold Domain-Specific Structure Model for Mathematics. Münster: Waxmann.

Newell, A. & Simon, H.A. (1972). Human problem solving. Engelwood: Prentice-Hall

Niedersächsisches Kultusministerium (KMK) (2006). Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5-10. Mathematik. Niedersachsen. Unidruck: Hannover.

Oser, F. & Baeriswyl, F. (2001). Choreographies of Teaching: Bridging Instruction to Learning. In: V. Richardson (Hrsg.) Handbook of research on teaching (1031-1065). Washington, D. C.: American Educational Research Association.

Pólya, G. (1967, 1945). Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme (How to solve it). Bern, München: Francke Verlag.

Seel, N. (1981). Lernaufgaben und Lernprozesse. Stuttgart: Kohlhammer.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. In: Educational Researcher, 15, 4-14.

Barbara SCHMIDT-THIEME, Hildesheim

Zur Sache kommen: Gegenstandskonstitution im Mathematikunterricht

1. HILDE - Hildesheimer Videos zur Fachdidaktik

*HILDE*sheimer Videos zur Fachdidaktik sind ein videobasiertes Archiv an der Universität Hildesheim mit derzeit über 60 Unterrichtsaufzeichnungen in den Fächern Deutsch, Mathematik, Sachunterricht und Sport. Die Erhebungskontexte sind überwiegend Jahrgangsstufen 3 – 8 in verschiedenen Schulformen. Dabei handelt es sich meist um einzelne Unterrichtsstunden in verschiedenen Klassen und bei verschiedenen Lehrpersonen. Die Rahmenbedingungen der Aufnahmen sind alltägliche Unterrichtspraxis in Klassenzimmern bzw. Sporthallen der beteiligten Schulen, dazu Unterrichtsversuche im Rahmen von Praktika. Einsatzmöglichkeiten bieten sich vor allem innerhalb der Theorie-Praxis-Verzahnung in der Lehrerausbildung (Brophy 2004; Mühlhausen 2005; Reusser 2005; Krammer u.a. 2006) sowie in qualitativer fachdidaktischer Forschung an.

Dabei lässt sich mit den Videosequenzen aus verschiedenen fachunterrichtlichen Kontexten arbeiten in der Rekonstruktion unterrichtlicher Interaktions- und Kommunikationsprozesse oder verdichteten Analyse als Potential für die Entwicklung einer Routine der Reflexion in der Lehrerausbildung.

Im Forum Fachdidaktische Forschung an der Universität Hildesheim wird die fachdidaktische Perspektive fokussiert, z. B. in der Bestimmung der Spezifik fachbezogener Lehr-Lernsituationen auf der gegenstandsbezogenen Ebene bzw. der didaktisch-methodischen Ebene des Unterrichts oder in der Rekonstruktion von Situationen unterrichtlicher Praxis, in denen inhaltlich-thematische Aspekte des Unterrichts, also fachliches Lernen in den Blick rückt.

2. „Zur Sache kommen"

Ein interdisziplinäres Forschungs(- und Lehr)projekt der Fachdidaktiken Deutsch und Mathematik an der Universität Hildesheim untersucht die Gegenstandskonstituierung im Unterricht, d.h. die Gestaltung von Lehr-Lernsituationen, die der Hinführung zum Unterrichtsthema dienen. Stundeneinstiege übernehmen hierbei eine sensible Phase des Unterrichtens, indem sie verschiedene Funktionen im Unterrichtsprozess initiieren: organisatorische Einbindung in die institutionellen Parameter Unterrichtszeit, Unterrichtsort und Unterrichtsgemeinschaft, motivational gesehen den Aufbau einer Lernbereitschaft und natürlich unter fachlicher Perspektive die Vorbereitung und Einstimmung der Schülerinnen und Schüler auf das

Thema (bzw. Lernziel) der Stunde (Vollrath 1980; Greving, Paradies 2000; Ulm 2010) .

Erste Analysen des Materials aus dem Fallarchiv HILDE ergeben allerdings, dass die Etablierung der „Sache“ oft über die Einstiegsphase hinausgeht und sich insbesondere für die verschiedenen Akteure im Klassenraum unterschiedlich darstellt. Untersucht werden daher die unterrichtlichen Interaktionen unter dem Aspekt der zwar gemeinsamen, für die einzelnen Akteure aber möglicherweise differenten Erarbeitung des Unterrichtsgegenstandes.

Dies erfolgt auf drei Ebenen: dem Einsatz von Aufgaben, der Nutzung bestimmter Interaktionsroutinen und der Themenentwicklung im Unterrichtsprozess. Das zugrundeliegende Material sind Videoaufzeichnungen aus dem Hilde-Archiv (Lehrer-, Schülerkamera), zugehörige Transkripte und die Begleitdokumente (Unterrichtsverlaufplan; Lehrerreflexion, Schülerrückmeldungen). Entsprechend den untersuchten Aspekten und Ebenen werden verschiedene Methoden eingesetzt wie z.B. aus der Gesprächsanalyse, Sprechakttheorie oder die Thema-Rhema-Analyse. In letzterer werden auf Satzebene Themata (alte, bekannte) und Rhemata (neue Informationen) als Äußerungseinheiten bestimmt, damit die Relationen zwischen den einzelnen Propositionen sichtbar gemacht und thematische Progression erkennbar (Danes 1976; Gärtner 2000).

Zur Analyse der Gegenstandskonstitution durch Themenentwicklung mittels der Thema-Rhema-Analyse wird in einem ersten Schritt der Unterricht nach einer ersten Sichtung des Videos und Lesung des Transkriptes in Phasen eingeteilt. Interessante Phasen werden dann auf der Mikroebene mittels der Thema-Rhema-Analyse codiert und so die thematische Entfaltung herausgearbeitet. Diese konkrete Gegenstandskonstitution kann nun zum einen mit der Planung der Stunde und den Reflexionen der Lehrenden und Rückmeldungen der Lernenden nach der Stunde verglichen werden, zum anderen können im Vergleich mehrerer Stunden Muster erarbeitet werden und hier auf die Fächerspezifik eingegangen werden.

3. Beispiel: Umfang und Flächeninhalt des Parallelogramms

Das Video zeigt eine Stunde in der Unterrichtsreihe „Figuren und ihre Maße“ einer 8. Realschulklasse. In der vorangehenden Stunde wurden die Umfangs- und Flächenformel für das Parallelogramm erarbeitet, diese werden in den ersten Minuten wiederholt. Das Stundenthema wird an der Tafel festgehalten „*Fläche und Umfang des Parallelogramms*“.

Der Einstieg geht weiter: „*jetzt lege ich mal eine Folie auf, […] so, ich möchte nur mal – jetzt n paar Äußerungen von euch dazu hören... was ihr* *hier so seht"* (73). Diese explorative Aufgabe der Lehrerin erweist sich als den Lernenden bekannte Routine, sie läuft auf didaktisch-methodischer Ebene ohne Zwischenfälle ab. Es folgt eine Sammlung von Äußerungen mit dem Ziel, zur Sache zu kommen. Aber die Schülerinnen und Schüler kommen nicht zur Sache, der Gegenstand wird nicht (erneut) konstituiert.

Daraufhin greift die Lehrerin steuernd ein: *„könntet ihr mal Vermutungen zu unserem Thema der Stunde […] Fläche und Umfang, Vermutungen aufstellen einfach zu diesem Bild zu dieser Darstellung"* (101). Die Lehrerin bricht die Sammlung der Vermutungen nach einer Weile ab ohne konkurrierende Vermutungen zu konstatieren bzw. zu thematisieren. Sie geht davon aus, die Lernenden hätten das Thema der Stunde – Fläche und Umfang von Parallelogrammen – zu ihrem eigenen Thema (für diese Stunde) gemacht.

Es folgt eine Gruppenarbeitsphase mit Aufgaben, in denen Flächeninhalt und Umfang von verschiedenen Parallelogrammen bestimmt werden muss. Während dieser Phase beobachtet und kommentiert die Lehrperson die Arbeiten der Schülerinnen und Schüler. Bei jeder (!) Gruppe wird die Höhe des Parallelogramms Thema: „*Fang doch bitte an, dass du erst die Grundseite Höhe einträgst*" (147); „*Sag mal, wie habt ihr da die Höhe eingetragen?*" (177); „*Das ist die Grundseite. Wo die Höhe steht ist ganz egal*" (195); „*Wo ist die Höhe, wo steht die im rechten Winkel*" (202).

Am Ende der Stunde rahmt die Lehrerin die Stunde mit einer Aufgabe zur Ergebnissicherung unter Benutzung der Folie vom Einstieg: *„Was könnt ihr mir über diese drei Parallelogramme in Bezug auf die Fläche sagen? Seid ihr zu irgendeinem Ergebnis gekommen? Vorhin waren nur Vermutungen"*(674). Obwohl die Lehrerin während der Gruppenarbeitsphase gemerkt hat, dass sich der Unterrichtsgegenstand neu konstituiert hat (Höhe im Parallelogramm), orientiert sich der Ablauf zum Schluss am eigentlich geplanten Gegenstand (*erneuter Einsatz des „stillen Impulses"*, Unterrichtsverlaufplan der Lehrerin).

Ihr in ihrer Planung genanntes Ziel: *„Parallelogramme mit gleicher Höhe und Grundseite sind stetes flächengleich, Umfang verändert sich!"* hat sie nach eigener Einschätzung nicht erreicht - *Sind Sie zufrieden mit der Stunde? „Nein. Lernziel wurde nicht erreicht."* -, die Themenneukonstitution jedoch wohl wahrgenommen - *Was war für die Schülerinnen und Schüler schwer? „Die Höhe einzutragen, die Konzentration!"* (Lehrerreflexion).

Die Schülerrückmeldungen geben Hinweise zur Gegenstandskonstitution der einzelnen Akteure: *Was hast du gelernt? „Wie man Umfang und Flächeninhalt berechnet"* (4 Nennungen); *„Wie man verschieden große Paral-*

lelogramme ausrechnet" (5 Nennungen); *„Wie man den Umfang eines Parallelogramms berechnet"* (6 Nennungen); *„Nichts." „Kannte schon alles"* (7 Nennungen). Eine einzige trifft genau den neu konstituierten Gegenstand: *„Wir haben festgestellt, dass die Höhe und die Seite des Parallelogramms nicht gleich groß sind."*

4. Fazit

Die Analyse der Themenentwicklung im Unterricht zeigt zum einen deutlich, dass die Konstitution des Gegenstandes für die Akteure differiert und nur zu einem Teil dem unterrichtlichen Handeln und der Steuerungsrolle der Lehrperson geschuldet ist. Insbesondere der stumme Impuls als Einstieg bedarf sorgfältiger Planung und gelassener Steuerung durch die Lehrperson, um einen Bruch im Übergang vom Einstieg auf die anschließenden Phasen zu vermeiden. Weiter bilden Einstieg und Schluss eine Klammer um das unterrichtliche Geschehen, eine geplante Abgestimmtheit dieser Phasen kann aber bei einer ungeplanten Themenentwicklung zu einem weiteren Bruch am Ende der Stunde führen.

Anstehende Analysen weiterer Deutsch- und Mathematikstunden werden sich der detaillierten Beschreibung dieser Übergangsstellen widmen und auf die Erarbeitung von (fach)typischen Handlungsmustern und Formulierung von Gelingensbedingungen derselben zielen.

Literatur

Brophy, J. E. (Hrsg., 2004): Using video in teacher Education. Oxford: Elsevier.

Danes, F. (1976): Zur semantischen und thematischen Struktur des Kommunikats. In: Danes, F., Viehweger, D. (Hrsg.): Probleme der Textgrammatik. Berlin: Akademie 29-40.

Gärtner, B. (2000): Johannes Widmanns „Behende vnd hubsche Rechenung". Die Textsorte ‚Rechenbuch' in der Frühen Neuzeit. Tübingen: Niemeyer.

Greving, J., Paradies, L.(2000): Unterrichts-Einstiege. Berlin: Cornelsen.

Krammer, K., Ratzka, N., Klieme, E., Lipowsky, F., Pauli, Ch, Reusser, K. (2006): Learning with classroom videos. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38, 5, 422-432.

Mühlhausen, U. (Hrsg., 2005): Unterrichten lernen mit Gespür. Szenarien für eine multimodal gestützte Analyse und Reflexion von Unterricht. Hohengehren: Schneider.

Reusser, K. (2005): Situiertes lernen mit Unterrichtsvideos. In: journal für lehrerinnen- und lehrerbildung, 2, 8-18.

Ulm, V. (2010): Das ist neu, das erforsche ich! Einstiege differenzierend gestalten. In: mathematik lehren, 162, 10-12.

Vollrath, H.-J. (1980): Einstiege im Geometrieunterricht. In: mathematica didactica, 3, 59-67.

Oliver SCHMITT, Darmstadt

Tätigkeitstheoretischer Zugang zu Grundwissen und Grundkönnen

Im Rahmen der Orientierung an Kompetenzen gerät das fachliche Wissen und Können als Voraussetzung von Kompetenz gelegentlich aus dem Blick. Ein Grund ist sicher darin zu sehen, dass der gebräuchliche Kompetenzbegriff nach Weinert die Rolle fachlichen Wissens und Könnens weitgehend offen lässt. Renkl und Nückles (2006) nennen drei Gründe dafür, dass Kompetenzen als kontextgebunden zu betrachten sind: Neben Problemen der Passung zum Anwendungskontext und fehlendem Metawissen über das eigene Vermögen und die durch eine Situation gestellten Ansprüche können vor allem auch bereichsspezifische Voraussetzungen fehlen, insbesondere Vorwissen. Dieses stellt also einen entscheidenden Faktor für die Transferierbarkeit des Erlernten dar.

Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen

Es scheint daher angebracht ein nach fachdidaktischen Kriterien begründetes Grundwissen und Grundkönnen zu diskutieren und anzugeben. Damit sollen jene mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten gemeint sein, die bei allen Schülerinnen und Schülern am Ende der beiden Sekundarstufen in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren langfristig und situationsunabhängig, das heißt insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln, verfügbar sein sollen.

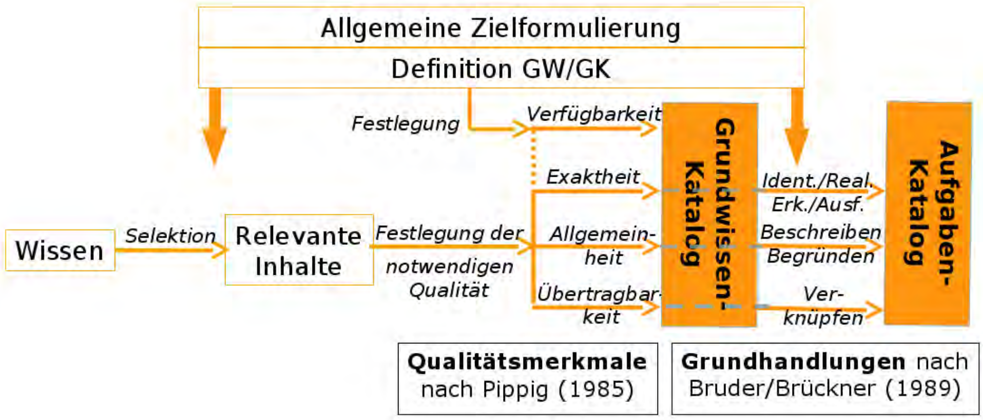
Den lerntheoretischen Hintergrund dieser Begriffsdefinition bildet hier die Tätigkeitstheorie. *Wissen* bezeichnet dabei „kognitive Abbilder objektiver Realität“ im „gesellschaftlichen Bewusstsein“, während *Kenntnisse* „in rationaler Form im individuellen Gedächtnis verankert“ sind. Kenntnisse sind angeeignetes Wissen, ermöglichen es dem Menschen „sich seiner selbst bewußt zu werden, zu allen Erscheinungen der Welt eine Position zu beziehen und durch seine Tätigkeit bewußt Beziehungen zur Welt zu realisieren“ (Pippig 1985, S. 21). *Können* bezeichnet das Gefüge von Leistungsvoraussetzungen für das Bewältigen einer Klasse von Anforderungen (Pippig 1985, S. 19). *Fähigkeiten* sind „Bestandteil des Könnens, […] generalisierte und verfestigte Komponenten des Verlaufs der psychischen Regulation der Tätigkeit“, sie äußern sich vor allem im „Übertragen von Kenntnissen und Handlungen auf neue Sachverhalte“ (Pippig 1985, S. 20). Die häufige Ausführung einer Handlung kann zur Ausbildung einer *Fertigkeit* führen, die einen „automatisierten Handlungsvollzug“ ermöglicht (Pippig 1985, S. 52), der ohne bewusste

Steuerung abläuft und das Bewusstsein entlastet. Die Tätigkeitstheorie räumt fachlichen Kenntnissen einen hohen Stellenwert ein ohne dabei die zentrale Stellung von aktiven Handlungen im Lernprozess zu vernachlässigen (vgl. Giest und Lompscher 2006, S. 69).

Mit dem Begriff der Orientierungsgrundlage kann zudem das Transferproblem in neuen Handlungskontexten beschreiben werden. Bei einer Handlung, die einer im Lernprozess entstandenen Anforderung folgt, lassen sich nach Galperin (1967) zwei Teile unterscheiden: der Orientierungsteil und der Ausführungsteil. Im Orientierungsteil wird eine Orientierungsgrundlage als „vorläufige Vorstellung einer Aufgabe" (Galperin 1967, S. 376) entwickelt, sie umfasst die handlungsbezogene Vorwegnahme der objektiven Komponenten einer Handlung. Dazu gehören die Anforderungsstruktur, Abfolge von Teilhandlungen, Methoden, Begründung der Handlung sowie mögliche Folgen etc. (vgl. Giest und Lompscher 2006, S. 192). Galperin unterscheidet dabei drei verschiedene Orientierungstypen, die bei Bruder die Bezeichnungen Probier-, Muster- und Feldorientierung erhalten. Während bei der Probierorientierung die Orientierungsgrundlage auf Basis von Versuch und Irrtum im Verlauf der Handlung entwickelt wird, ist sie bei der Musterorientierung durch bereits bekannte und auf die vorliegende Anforderung übertragbare Muster direkt entwickelbar. Die Weite des möglichen Transfers ist dabei allerdings durch die Qualität der bekannten Muster eingeschränkt. Bei der Feldorientierung wird die Orientierungsgrundlage auf Basis allgemeiner Gesetzmäßigkeiten gebildet, so dass die anschließende Handlung und deren Bedingung sowie innere Struktur vollständig einsichtig sind, wodurch eine mögliche Transferleistung stark verbessert wird. Anforderungen, die in den Bereich von Grundwissen und Grundkönnen fallen, sollten von Lernenden auf Feldorientierungsniveau bearbeitet werden können, damit ein möglichst flexibler Transfer auch in neuen Lernsituationen möglich ist.

Identifizierung und Beschreibung von Grundwissen und Grundkönnen

In der unten stehenden Abbildung sind die Schritte zur Entwicklung eines



Aufgabenkatalogs für Grundwissen und Grundkönnen dargestellt (vgl. ausführlicher Feldt in diesem Band). Ein wesentlicher Aspekt ist dabei die Selektion der Inhalte, die mit ganz verschiedenen Zielsetzungen erfolgen kann. So ist beispielsweise eine pragmatische Selektion üblich, die sich an zentralen Inhalten der Schule, weiterführenden Bildungseinrichtungen oder Arbeitsstätten orientiert. Diese pragmatische Sichtweise kann für sich genommen aber nicht umfassend sein, sie würdigt weder den genetischen oder fachlichen Aufbau mathematischer Kenntnisse noch in ausreichendem Maße die der Schule eigenen Bildungsziele.

Reflexionswissen als Zielperspektive

Der insbesondere von Skovsmose (1989) und Fischer (2001) mit unterschiedlichen theoretischen Hintergründen in die mathematikdidaktische Diskussion eingebrachte Begriff des Reflexionswissens ist geeignet die pragmatische Sichtweise auf Grundwissen und Grundkönnen mit Blick auf Bildungsziele zu ergänzen. Reflexionswissen setzt Grundwissen und Grundkönnen voraus, etwa um die Reflexion eines Problems begrifflich überhaupt möglich zu machen oder durch Fertigkeiten kognitiven Freiraum für Reflexionen zu gewinnen.

Begründung und Auswahl der Inhalte von Reflexionswissen

Mit der Angabe von Reflexionswissen als Zielstellung ist noch nicht gesagt über was im Mathematikunterricht reflektiert werden soll. Für eine solche Aussage ist eine bildungstheoretische Einordnung nötig. Es bietet sich an hier auf den weit verbreiteten Bildungsbegriff Klafkis zurückzugreifen, da dieser neben konkreten inhaltlichen Zielstellungen in Form der Schlüsselprobleme auch „instrumentelle Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten“ stets bezogen auf individuelle Entfaltung und die Schlüsselprobleme als wesentlich für den Bildungsprozess anerkennt (vgl. Klafki, 1996, S. 74f). Grundwissen und Grundkönnen als ausgewiesener Teil des Curriculums wird zudem auch durch Klafkis Unterscheidung von „Fundamentum“ und „Additum“ nahe gelegt (vgl. Klafki 1996, S. 183f).

Beim Reflexionswissen können mit Blick auf den Wissensbegriff zwei Ebenen unterschieden werden: eine kollektive, die etwa historisches Wissen, Wissen über Modellierungen sowie über Ideen oder Denkweisen umfasst, und eine individuelle, die persönliche Bedeutungen und Bewertungen einschließt. Besonders bei Fragestellungen, für die es keine allgemein akzeptierte „richtige“ Antwort gibt, wird die individuelle Ebene relevant. Wenn die thematische Ausrichtung auf die Schlüsselprobleme ernst genommen wird, sind solche Fragestellungen im Unterricht als unabdingbar anzusehen. Es erscheint dabei sinnvoll das dargestellte

Konzept der Orientierungsgrundlagen um eine weitere zu ergänzen, die den Umgang mit solchen offenen Fragestellungen ermöglicht, für die es keinen effektivsten Lösungsweg gibt. Es geht dann um das Auffinden einer geeigneten Problemformulierung und Fragestellungen (vgl. Schmitz 1977). Diese Orientierungsgrundlage soll „Problemorientierung" genannt werden.

Ausblick

Welche Voraussetzungen ein konkreter Inhalt des Reflexionswissens besitzt, etwa welche Verfahren dafür wirklich sicher beherrscht werden müssen und welche nicht, kann nur an einzelnen Aufgaben inhaltlich begründet werden. Dabei werden bestehende oder eigens konstruierte Aufgaben auf ihr Reflexionspotential hin untersucht, die dann nach den zur Bearbeitung nötigen Grundhandlungen analysiert werden. Daraus können das nötige Grundwissen und Grundkönnen sowie deren jeweilige Qualitätsmerkmale bestimmt werden. Mit diesem konstruktiven Ansatz können sowohl konkrete Vorschläge für die reflexionsorientierte Bearbeitung eines Themas gemacht werden als auch die pragmatische Sichtweise auf Grundwissen und Grundkönnen ergänzt werden. Eine exemplarische Durchführung dieses Arbeitsplanes ist im Vortrag an einer Aufgabe von Astrid Fischer (2010) gezeigt worden, dies soll auf andere Aufgaben der Linearen Algebra der Sekundarstufe II ausgeweitet werden.

Literatur

Fischer, R. (2001): Höhere Allgemeinbildung. URL: http://imst3plus.uni-klu.ac.at/materialien/2001/fischer190901.pdf [Stand: 18.02.2013].

Fischer, A. (2010): Algebraische Denkwerkzeuge in der Analytischen Geometrie. In: Praxis Mathematik, 33, 30-35.

Galperin, P. J. (1967): Die Entwicklung der Untersuchungen über die Bildung geistiger Operationen. In H. Hiebsch (Hrsg.): Ergebnisse der sowjetischen Psychologie. Berlin: Akademie-Verlag, 367-405.

Giest, H. & Lompscher, J. (2006): Lerntätigkeit - Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Berlin: Lehmanns Media.

Klafki, W. (1996): Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Weinheim und Basel: Beltz.

Pippig, G. (1985): Aneignung von Wissen und Können - psychologisch gesehen. Berlin: Volk und Wissen.

Renkl, A. & Nückles, M. (2006): Träge Kompetenzen? In: Bildung und Erziehung, 59/2, 179-191.

Schmitz, U. (1977): Interiorisation und Widerspruch. Zur Diskussion der Galperinschen Lerntheorie. Kritische Psychologie, Sonderband 15, 65-71.

Skovsmose, O. (1989): Models and reflective knowledge. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1, 3-8.

Sebastian SCHORCHT, Gießen

Mathematik mit historischem Hintergrund im Schulbuch – Analyse eines Aufgabentyps

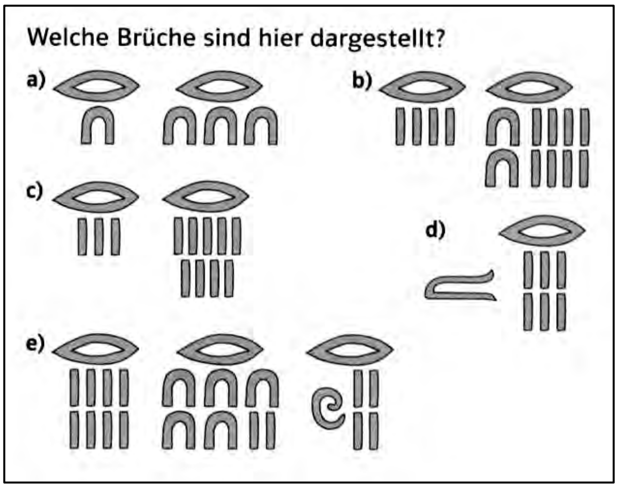
Welchen Beitrag können Aufgaben mit historischem Hintergrund für Mathematikunterricht leisten? Wie erweitern sie den Blick auf die Mathematik?

Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht kann beitragen

- „zu Einsichten in die *Entwicklung mathematischer Begriffe;*

- zu einem vertieften Verständnis *der Rolle der Mathematik in unserer Welt* und ihrer Beziehungen zu Anwendung, Kultur und Philosophie;

- sowie zur Wahrnehmung und zum Verstehen der Ziele und Intentionen mathematischer Begriffsbildungen, der Möglichkeiten alternativer Wege und persönlicher Aspekte. Die Schüler erfahren so etwas über die *subjektive Seite* der Mathematik." [Jahnke & Habdank-Eichelsbacher 1999, S. 96]



Im Mathematikschulbuch gibt es Aufgaben mit mathematikhistorischem Hintergrund. Als Beispiel ist eine solche Aufgabe abgedruckt [Mathematik 6, S. 137]. Sie ist in eine Doppelseite zu den ägyptischen Bruchzahlen eingebettet. Nach einer kurzen Erläuterung, wie in Ägypten um 1500 v. Chr. Brüche dargestellt wurden, finden sich einige Aufgaben zur Übersetzung der Darstellungen. Die abgedruckte Aufgabe ist solch eine typische Aufgabe zur Interpretation von fremden Darstellungsweisen. Im Beispiel führen Erweitern, Addieren und Kürzen von Brüchen zur Lösung. Eine Übersetzung, die im Schulbuchfließtext unsystematisch erklärt wird, ist hier rechts systematisch abgedruckt. Die Zeichen bedeuten von oben nach unten gelesen: 1/2; 1; 10 und 100 sowie ein Zeichen für Bruchteil eines Ganzen. Interessant scheint das Zeichen für 1/2, da das Bildungsgesetz – Zahlzeichen abgebildet mit Zeichen für Bruchteil – eine Ausnahme erfährt. Für 1/4 und 2/3 ist dies auch der Fall [Vgl. Imhausen u. a. 2007, S. 14]). In der Aufgabe wird diese Ausnahme nicht aufgegriffen, sondern didaktisch reduziert in Aufgabenteil (b) dargestellt.

Erfüllen diese Aufgabentypen den oben genannten Beitrag, den Mathematikgeschichte leisten kann?

Entwicklung mathematischer Begriffe - Historizitätsbewusstsein

In der Aufgabe können die Schülerinnen und Schüler etwas zur Mathematik in Ägypten erfahren. Wie Mathematik betrieben wurde oder ob sich heutige Verfahren, Darstellungen und Vorstellungen der Mathematik verändert haben, wird nicht aufgegriffen. Ein Einblick in die Entwicklung der Vorstellung von Brüchen kann aber beim Thema ägyptischer Stammbrüche lohnenswert sein: Eine Begriffs- und Vorstellungsentwicklung wird durch die Fokussierung des historisch-genetischen Prozesses illustriert. Entwicklungen können an einzelnen Veränderungen festgemacht werden, wenn ein Bewusstsein für Wandel – Pandel nennt es „Historizitätsbewusstsein" [Pandel 1991, S. 63f.] – angebahnt wird. Die Ausbildung solch eines Bewusstseins ist abhängig von den Angeboten im Mathematikunterricht.

Die ägyptische Bruchrechnung erscheint in dieser Aufgabe als punktuelles Moment. Aus der Bruchzahlentwicklung herausgegriffen, wird ausschnitthaft gezeigt, wie Brüche dargestellt wurden. Dem gegenübergestellt ist das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler – die heutige Mathematik. Die Vorstellung einer zeitunabhängigen, allgemeingültigen Mathematik wird durch diese Art der Darstellung begünstigt [Vgl. Spalt 1987, S. 311 – 314.]. Dabei ist eine Thematisierung der Vorstellungsveränderungen durchaus möglich, denn Brüche werden in der ägyptischen Hochkultur als Anteil *eines* Ganzen verstanden, nicht als Anteil *mehrerer* Ganzer [Vgl. Imhausen u. a. 2007, S. 16] oder als Verhältnis. Die Vorstellung eines Bruchs als Aufforderung zur Operation – Dividieren des Ganzen in die vom Nenner angegebenen Bruchteile und dem anschließenden Multiplizieren mit dem Zähler – wird bei den Stammbrüchen vereinfacht, weil das Multiplizieren „entfällt" (Ausnahme: 2/3). Hinzu kommt eine neue Darstellung von Brüchen: Der *Anteil* eines Ganzen wird in der Darstellung erweitert zu *mehreren Anteilen* eines Ganzen. So notierten die Ägypter jener Zeit den Bruch 5/9 mit $\overline{3}\ \overline{6}\ \overline{18}$ (Notation bei Transkriptionen von ägyptischen Stammbrüchen). Es sind mehrere Anteile, die zusammen einen Anteil eines Ganzen beschreiben. Die Vorstellungsveränderung zu Brüchen als Verhältnisse, als Aufforderung zur Operation oder als Anteil mehrerer Ganzer kann die Entwicklung der Mathematik hervorheben und ein Bewusstsein für solche Veränderungen schaffen.

Mathematik und ihre Rolle in der Welt – Zeitliche Tiefendimension

Die Rolle der Mathematik in der Welt kann durch die Mathematikgeschichte angesprochen werden. Mathematik als Kulturgut zu begreifen ist eine

Möglichkeit, die Rolle der Mathematik greifbar zu machen. Kann die ausgewählte Aufgabe diesen Anspruch umsetzen?

Zur heutigen mathematischen Kultur, zum Beispiel Gemeinsamkeiten und Unterschiede, wird in der Aufgabe keine Verbindung hergestellt. Mathematik als Kulturgut begreifen bedeutet die heutige Mathematik in die Kulturentwicklung zu integrieren. Erfolgsversprechend erscheint Jörn Rüsens Ansatz der Sinnstiftung:

Die Beschäftigung mit Geschichte erfolgt immer aus der Gegenwart heraus. Gegenwartsbezüge zeichnen sich durch drei Betrachtungsweisen aus: Erstens zur Klärung von Traditionen, zweitens zum Verständnis gegenwärtiger Situationen und drittens zur Erweiterung der Handlungskompetenz [Vgl. Sauer 2009, S. 92f]. Wird Mathematikgeschichte zum Verständnis gegenwärtiger Mathematik herangezogen oder zur Klärung von Traditionen in der Mathematik, dann verknüpft diese Betrachtungsweise Gegenwart und Vergangenheit. Die Darlegung der Tradition, Brüche für verschiedene Vorstellungsaspekte zu verwenden, knüpft an den gegenwärtigen Umgang mit Brüchen an. Bruchvorstellungen erhalten einen Sinn, die Gegenwart wird um eine „zeitliche Tiefendimension“ [Vgl. Rüsen 2001, S. 83] bereichert. Die Verknüpfung von Gegenwart und Vergangenheit kann Mathematik als Kulturgut erfahrbar machen. Welche Vorstellung von Brüchen gab es früher, welche heute? Worin unterscheiden sich die Vorstellungen und wo liegen die Grenzen oder Möglichkeiten gewisser Bruchzahlvorstellungen?

Mathematik und ihre subjektive Seite – Mathematische Werkstätten

Die Aufgabe der Mathematikgeschichte lautet nach Moritz Epple:

„Geschichte der Mathematik untersucht ‚mikroskopisch‘ das mathematische Handeln und die mathematischen Werkstätten unter deren Umstände mathematische Ideen/Wissen entstanden und entstehen.“ [Epple 2000, S. 149]

Unter mathematischen Werkstätten versteht Epple die Bedingungen und Möglichkeiten mathematischen Handelns. Thematisiert wird dabei der Kontext in dem Mathematik entsteht und genutzt wird.

Welche Bedingungen führten zur Darstellung verschiedener Stammbrüche (und 2/3) in einem additiven System? Das ägyptische Verfahren zur Division durch fortgesetztes Halbieren war sicher an der Entwicklung der Bruchdarstellung beteiligt und ist in der sechsten Jahrgangsstufe diskutierbar. [Vgl. Imhausen u. a. 2007, S. 14–17] Kontrastbildend könnten die Bedingungen in Mesopotamien herangezogen werden. Dort waren die Voraussetzungen andere und provozierten keine eigene Bruchdarstellung. Trotzdem besaß die Mathematik in Mesopotamien Darstellungsweisen für Bruchteile, denn das vorhandene Sexagesimalsystem begünstigte durch seine Teilerfreundlichkeit eine Komma-Schreibweise. Gibt es mathematische Werkstätten die das Entstehen einer Bruchschreibweise begünstigen? Sind diese Werkstätten verantwortlich für die verschiedenen gegenwärtigen Darstellungsweisen von Bruchteilen? Werden solche Fragen in Aufgaben mit historischem Kontext diskutiert, kann die subjektive Seite der Mathematik erfahrbar werden.

Zusammenfassung

Sollen Aufgaben mit historischem Hintergrund im Mathematikschulbuch *Entwicklungen* aufzeigen, dann bietet sich die Fokussierung auf Veränderungen an. Nicht nur die Veränderung der mathematischen Darstellungen können dabei aufgegriffen werden, sondern auch die Veränderungen der abstrakten Vorstellungen. Durch eine gegenwärtig motivierte Beschäftigung mit der eigenen mathematischen Kulturgeschichte wird Mathematik als Kulturgut, ein Aspekt ihrer *Rolle in der Welt*, sichtbar. Die *subjektive Seite* der Mathematik, ihre Bedingungen und Möglichkeiten, werden im Mathematikunterricht aufgegriffen, wenn mathematische Werkstätten untersucht und Handlungsspielräume damaliger Zeiten diskutiert werden.

Literaturverzeichnis

Epple, Moritz (2000): Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten: Formen der Mathematikgeschichte. Mathematische Semesterberichte 47. Springer. S. 131 – 163.

Herling, Jochen u. a. (2006): Mathematik. Allgemeine Ausgabe 2006 für die Sekundarstufe I. Schülerband 6. Hessen. Westermann. o.O.

Imhausen, Annette und Katz, Victor J. [Hrsg.] u.a. (2007): The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. Princeton Univ. Press. Princeton [u.a.].

Jahnke, Hans Niels und Habdank-Eichelsbacher, Britta (1999): Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. In: Selter, Christoph und Walther, Gerd: Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann. Ernst Klett Grundschulverlag. Leipzig.

Pandel, Hans-Jürgen (1991): Dimensionen und Struktur des Geschichtsbewusstseins. In: Süssmuth, Hans: Geschichtsunterricht im vereinten Deutschland. Auf der Suche nach Neuorientierung. Teil I. Nomos-Verlag-Gesellschaft. Baden-Baden.

Rüsen, Jörn (2001): Zerbrechende Zeit. Über den Sinn der Geschichte. Böhlau. Köln.

Sauer, Michael (2009): Geschichte unterrichten. Eine Einführung in die Didaktik und Methodik. Unveränderter Nachdruck der 5. aktualisierten und erweiterten Auflage. 8. Auflage. Kallmeyer [u.a.]. Seelze-Velber.

Spalt, Detlef D. (1987): Die Bedrohung der Mathematikgeschichte durch die Didaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker. Bad Salzdetfurth.

Christof SCHREIBER, Gießen

Mündliche Darstellung mit digitalen Medien

In vorausgegangenen Projekten stand die schriftlich-grafische Darstellung im Mathematikunterricht im Fokus (Schreiber 2010; Merkel 2012). Es bildete sich aber auch die Frage heraus wie speziell solche mathematischen Lernprozesse mit digitalen Medien unterstützt werden können, in denen die mündliche Darstellung dominant ist (s. auch Schreiber 2012).

1. Erfahrungen mit Podcasts zu mathematischen Themen

Bei der Erstellung von Podcasts zu mathematischen Themen geht es um eine Verwendung digitaler Medien, die speziell die mündlichen Anteile beim Darstellen von Mathematik fokussiert. Dabei ist es wichtig, dass es sich um AudioPodcasts handelt, also solche, die eben gerade keine Abbildungen oder animierten Filme verwenden, sondern lediglich auf Tonaufnahmen beruhen. Erste Versuche führten zu einem Ablauf der Erstellung, den man unter Schreiber (2011) oder Klesczewski & Klesczewski (2012) nachlesen und –hören kann. Erstellt werden Podcasts dabei von Schülerinnen und Schülern, auf Deutsch und in anderen Sprachen aber auch von Studierenden verschiedener Lehrämter. Die unterschiedlichen Podcast-Typen werden jeweils in einem Blog zur Verfügung gestellt, sie sind also öffentlich zugänglich. Ein Blog ermöglicht, dass über Kategorien und eine Verschlagwortung die einzelnen Podcasts schnell gefunden werden können. Die Beispiele sind sehr unterschiedlich bezüglich Länge, Art der Entstehung und Qualität. Um die inhaltliche Qualität der AudioPodcasts sicherzustellen und gleichzeitig die Reflexion über das eigene Wissen weiter zu vertiefen, wurde der im Folgenden neu beschriebene Ablauf entwickelt. Dabei gehe ich zunächst auf Podcasts von Schülerinnen und Schülern der Primarstufe ein (PriMaPodcasts), dann auf Podcasts von Studierenden (MathePodcasts) und schließlich auf Podcasts, die von Grundschülerinnen und –schülern in anderen Sprachen erstellt wurden.

2. PriMaPodcasts: Podcasts in der Primarstufe

Die Erstellung beginnt mit einem mathematischen Impuls, zu dem zunächst spontan eine Aufnahme gemacht wird (zum Ablauf s. auch Abb. 1). Impulse können Fragen sein wie „Was ist das besondere an der Zahl 0?“, „Wie funktioniert der 10er Übergang?“ oder „Welche geometrischen Körper kennst Du?“ Aber auch Aufforderungen wie „Beschreibe einen geometrischen Körper genau!“ sind möglich. Anschließend hören die Schülerinnen und Schüler ihre Aufnahme mehrfach an und planen dann eine Aufnahme als Podcast, die potentiell zur Veröffentlichung geeignet ist. Dabei ist es sinnvoll, sich Notizen zu machen bzw. eine Art Drehbuch zu erstellen. Es folgt die Aufnahme eines ersten Podcasts (s. Abb. 1). In einer anschließenden Redaktionssitzung, an der mehrere Schülergruppen und die Lehrperson (Lehrerin oder Lehrer, aber auch Studierende oder Lehrende der Universität) teilnehmen, dient die Podcast-Aufnahme nochmals als Gesprächsanlass. Hier wird Gelungenes deutlich gelobt sowie Berichtigungen und Ergänzungen besprochen.

Abbildung 1: Ablauf zur Erstellung eines Podcasts

Mithilfe der Hinweise und Anregungen kommt es zu einer Drehbuchüberarbeitung, auf die eine neue Aufnahme folgt. Hieran könnte auch eine weitere Redaktionssitzung anschließen, im Prinzip könnten die Schritte 4 bis 6 mehrfach wiederholt werden, bis schließlich die Entscheidung getroffen wird, dass die Aufnahme als PriMaPodcast veröffentlicht werden kann. Die Veröffentlichung wird dann in Form eines Blogs auf der folgenden Seite umgesetzt: http://blog.studiumdigitale.uni-frankfurt.de/primapodcast/.

3. MathePodcasts: Podcasts mit Studierenden

Die Erstellung der Podcasts mit den Studierenden verläuft identisch (s. Abb. 1) und hat verschiedene Motive: Da die Erstellung der PriMaPodcasts oft von Studierenden angeleitet wird, sollen sie den gleichen Ablauf selbst durchlaufen, damit für alle klar ist, wie die Podcasts mit den Schülerinnen und Schülern später erstellt werden. Dabei erkennen die Studierenden auch, wie anspruchsvoll es ist, wenn spontan ein Thema, das für gesichert gehalten wurde, abgefragt wird und nur mündliche Ausdrucksmittel zur Verfü-

gung stehen. Allerdings steht bei der Erstellung von Podcasts zu mathematischen Themen auch die Vertiefung der mathematischen Inhalte selbst im Zentrum. Auch für die Studierenden finden hier ein Lernzuwachs und eine Sicherung von bereits behandelten Inhalten statt. Die Themenbereiche können dabei gleichermaßen im Bereich der schulischen Mathematik liegen („Was ist das Besondere an der Zahl Null?“) oder sich auch auf in Vorlesungen behandelte Bereiche beziehen („Erläutere das Haus der Vierecke“). Beispiele für die Podcasts von Studierenden findet man unter:
http://blog.studiumdigitale.uni-frankfurt.de/mathepodcast/

4. Podcasts in weiteren Sprachen

Besonderes Interesse hat sich auch an PriMaPodcasts in weiteren Sprachen entwickelt. Dazu gehören einerseits Podcasts, die mit Schülerinnen und Schülern aus bilingualen Klassen aufgenommen wurden und zwar auf Spanisch und auf Englisch. Die Analyse solcher Podcast, die hier zu erkennende Entwicklung der Begriffsbildung im bilingualen Mathematikunterricht und die Einsatzmöglichkeiten von PriMaPodcasts in diesem Bereich, sollen Gegenstand eines Dissertationsprojektes werden. Die entsprechenden Beispiele findet man unter:
http://blog.studiumdigitale.uni-frankfurt.de/primapodcast-es (Spanisch)
http://blog.studiumdigitale.uni-frankfurt.de/primapodcast-en (Englisch).

Andererseits interessieren mich auch Podcasts von Schülerinnen und Schülern, deren Erstsprache nicht Deutsch ist und die auch keinen Mathematikunterricht in ihrer Erstsprache erhalten. Dazu wurden erste Aufnahmen auf Türkisch gemacht, die demnächst zur Verfügung stehen werden. Dies scheint mir erfolgversprechend, gerade für die Sensibilisierung von Studierenden im Grundschullehramt, in Bezug auf die unterschiedlichen sprachlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler in den Grundschulklassen. Die Fokussierung auf diese sonst weniger beachteten Sprachen ist auch für Studierende mit entsprechendem sprachlichen Hintergrund von Vorteil und stellt eine wichtige Auseinandersetzung mit der eigenen Mehrsprachigkeit dar. Ein Blog mit ersten Beispielen auf Türkisch wird zu finden sein unter:
http://blog.studiumdigitale.uni-frankfurt.de/primapodcast-tr .

5. Ausblick

Nachdem nun der Ablauf zur Erstellung von mathematischen Podcasts nach ersten Durchgängen geklärt werden konnte, haben wir bereits zahlreiche PriMaPodcasts mit Schülerinnen und Schülern auf Deutsch erstellt und erstellen lassen. Diese dienen der Untersuchung zur Begriffsbildung im Mathematikunterricht und dienen als Beispiel für den Einsatz digitaler Medien im Fachunterricht der Primarstufe. Die Nutzung im Bereich der Sekundarstufen wäre aus meiner Sicht zweifellos möglich.

Es werden außerdem weitere Podcasts in bilingualen Klassen auf Englisch erstellt, die im Rahmen eines Dissertationsprojektes als Datengrundlage dienen. Hierzu wird es erforderlich werden, den ganzen Prozess zur Erstellung der PriMaPodcasts auch videografisch zu dokumentieren, um alle Schritte des Prozesses genau untersuchen zu können.

Für das forschende Lernen Studierender ist die Aufnahme weiterer Podcasts auch auf Türkisch und in anderen Sprachen durch Grundschülerinnen und -schüler geplant, sofern entsprechende mutter- bzw. fremdsprachliche Kompetenzen bei Studierenden in den Seminaren vorhanden sind. Mit diesem Fokus werden zunächst auch weitere Podcasts auf Spanisch im Rahmen einer Examensarbeit erstellt.

Zahlreiche Themen und Beispiele sind bereits mit Studierenden bearbeitet worden. Die Ergebnisse sind dabei äußerst vielfältig. Geplant ist nun, Podcasts im Rahmen zusätzlicher Angebote für Studierende aller Lehrämter im Bereich des Studienbeginns (erstes und zweites Semester) anzubieten. Dabei wird an der fachlichen Bildung der Studierenden angesetzt. Durch die reflexiven Aktivitäten der Studienanfänger über den eigenen mathematischen Kenntnisstand können zum einen ein besseres Verständnis der Inhalte des Grundstudiums und eine höhere Nachhaltigkeit beim Lernen erreicht werden. Zum anderen werden die Podcasts als Eigenproduktionen der Studierenden von den Lehrenden gemeinsam mit der Lerngruppe analysiert und die dort vorhandenen Ankerpunkte für mathematische Vorstellungen erhoben.

Literatur

Klesczewski, S. & Klesczewski, J. (2012) PriMaPodcast zum Thema Vierecke - ein Beispiel. Bei "lehrer-online": http://www.lehrer-online.de/podcasts-vierecke.php

Merkel, A. (2012) Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht mit der Lernumgebung wiLM@. In: Ladel, S. & Schreiber, Chr. (Hrsg.) Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe. Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz. Band 1. Franzbecker: Hildesheim. 103-130.

Schreiber, Chr. (2012) Mit Neuen Medien forschen– Schriftlichkeit und Mündlichkeit beim Darstellen im Mathematikunterricht. In: Ladel, S. & Schreiber, Chr. (Hrsg.) Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe. Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz. Band 1. Franzbecker: Hildesheim. 131-150.

Schreiber, Chr. (2011) PriMaPodcasts - Podcasts zur Mathematik in der Primarstufe. Bei "lehrer-online": http://www.lehrer-online.de/mathe-podcasts.php

Schreiber, Chr. (2010) Semiotische Prozess-Karten - Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen. Waxmann: Münster u. a.

Stephan SCHREIBER, Reinhard HOCHMUTH, Lüneburg

Mathematik im Ingenieurwissenschaftsstudium – Auf dem Weg zu einer fachbezogenen Kompetenzmodellierung

Das Projekt KoM@ING (www.kom-at-ing.de) ist ein Verbundprojekt von Wissenschaftlern aus sechs Universitäten und wird vom Bundesministerium für Bildung und Forschung im Schwerpunktprogramm KoKoHs gefördert.[1]

Der vorliegende Beitrag berichtet im ersten Teil aus dem Antrag des Projekts an dessen Erstellung R. Hochmuth (Lüneburg), R. Biehler, N. Schaper (Paderborn), B. Rösken-Winter, M. Petermann (Bochum), J. Wildt, E. Tekkaya, M. Heiner (Dortmund), R. Nickolaus (Stuttgart) und A. Heinze (Kiel) beteiligt waren. Der zweite Teil begründet kurz den aktuell im Lüneburger Teilprojekt favorisierten Zugang, im Wesentlichen den epistemologischen Ansatz der Anthropologischen Theorie der Didaktik (Chevallard) für die Verwendung mathematischer Begriffe und Handlungsweisen in der Elektrotechnik. Dieser Ansatz erlaubt es insbesondere die Praxis etablierter Handlungszusammenhänge und deren inhärente Logik in verschiedenen „institutionellen" Zusammenhängen zu analysieren und aufeinander zu beziehen.

Das Projekt KoM@ING und seine Teilprojekte

Im Zentrum von KoM@ING stehen einerseits Beiträge zur Kompetenzmodellierung und andererseits Studien zur Kompetenzentwicklung und deren relevanten Entwicklungsbedingungen bezogen auf Mathematik und ihre Verwendungen in zentralen Gegenstandsfeldern der beiden ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge Elektrotechnik und Maschinenbau. Die an den Hochschulen übliche curriculare Trennung in mathematische und ingenieurwissenschaftliche Lehrveranstaltungen stellt dabei eine große Herausforderung für die angestrebte Kompetenzmodellierung dar.

Im Fortgang des Projekts sollen zwei Forschungszugänge, ein quantitativ ausgerichteter, IRT-basierter und ein vornehmlich qualitativer prozessanalytischer parallel verfolgt und in drei Teilprojekten in vielfältiger Weise miteinander verschränkt werden, um die jeweiligen Stärken der Ansätze zu nutzen und zugleich die den Ansätzen eigenen Begrenzungen zu kompensieren. Im Sinne einer anwendungsbezogenen Grundlagenforschung sollen Grundlagen für eine Kompetenzdiagnostik geschaffen werden, die u. a. als Basis für die Gestaltung und Evaluation von Lehrinnovationen dienen

[1] Kennziffer 01PK11021D

kann. Darüber hinaus sollen Hinweise darauf gewonnen werden, wie die Schnittstelle zwischen Mathematik für Ingenieure und Mathematik in den Ingenieurwissenschaften besser gestaltet werden kann.

Das Verbundprojekt besteht aus folgenden drei Teilprojekten:

- Teilprojekt A (Universität Paderborn / Leuphana Universität Lüneburg): Kompetenzmodellierung, Kompetenzerfassung und Kompetenzentwicklung bezogen auf die Elektrotechnik
- Teilprojekt B (Technische Universität Dortmund / Ruhr-Universität Bochum): Kompetenzmodellierung, Kompetenzerfassung und Kompetenzentwicklung im Bereich Maschinenbau
- Teilprojekt C (Universität Stuttgart / IPN Christian-Albrechts-Universität zu Kiel): IRT-basierte Modellierungen zentraler Felder ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge, insbesondere höhere Mathematik für Ingenieure, Technische Mechanik, Werkstoffkunde und Konstruktionstechnik

In den Teilprojekten A und B werden für die beiden Fachrichtungen Elektrotechnik und Maschinenbau bezogen auf die Entwicklung ingenieurwissenschaftlicher Kompetenz jeweils zwei Phasen des Studiums in den Blick genommen: die „Grundlagenphase“ (die ersten 2-3 Semester) und die „fortgeschrittene Bachelor- und Masterphase“ (3.-10. Semester).

Teilprojekt A – Lüneburg

Dieses Teilprojekt fokussiert zunächst speziell auf die mittlere Bachelorphase des Studiengangs Elektrotechnik und die Veranstaltung „Signale und Systeme“ bzw. Lehrveranstaltungen mit vergleichbarem Inhalt und die damit zusammenhängenden Bereiche der vorangehenden fachlichen und mathematischen Veranstaltungen.

Ausgangspunkt ist zunächst die Beobachtung, dass sich Studierende der Elektrotechnik Mathematik in verschiedenen Kontexten aneignen, einerseits im Veranstaltungszyklus Höhere Mathematik für Elektrotechniker (oder Ingenieure) und andererseits in Fachveranstaltungen (wie bspw. Grundlagen der Elektrotechnik, Signale und Systeme). Verwendet wird die angeeignete Mathematik dann in fortgeschrittenen Fachveranstaltungen, Abschlussarbeiten und Laboren. Dabei stehen die Studierenden vor der anspruchsvollen Aufgabe, die vielfältigen und teilweise widersprüchlichen mathematischen Vorstellungen und Strukturen in anschlussfähiges Wissen, bezogen auf die ingenieurwissenschaftlichen Fachinhalte, zu transformieren. Dies führt zur Frage, mit welchen mathematik-bezogenen und personellen Kompetenzen Studierende elektrotechnische Aufgaben lösen. Zur

Klärung dieser Frage werden im Hinblick auf die Kompetenzmodellierung Begriffsanalysen und Aufgaben- sowie Aufgabenbearbeitungsanalysen durchgeführt werden, die es ermöglichen, grundlegende Vorstellungen und typische Schwierigkeiten Studierender zu identifizieren. Dabei stehen Aufgabenbearbeitungen im Zentrum, bei denen einerseits der Lösungsprozess und andererseits die den Lösungsprozess steuernden theoretischen Hintergründe betrachtet werden. Hierbei erscheint es wesentlich, die beiden gegenüberstehenden Sichtweisen auf Mathematik (Mathematik in den Ingenieurwissenschaften und Ingenieurmathematik) in die Kompetenzmodellierung mit einzubeziehen.

Dabei stellt sich insbesondere die Frage, ob dann, wenn in der Elektrotechnik mit mathematischen Symbolen, Algorithmen, usw. operiert wird, tatsächlich „Mathematik“ oder nicht vielmehr weiterhin „Elektrotechnik“ betrieben wird. Diese Problematik führt u.a. auf die beiden folgenden Fragen:

- Mit welchen Vorstellungen ist das jeweilige Handeln verbunden?
- Wird mit Größen/Symbolen im engeren Sinne „mathematisch“, etwa als „Variable“, oder im engeren Sinne „elektrotechnisch“, etwa als „Messgröße“ umgegangen oder beides?

Welcher Kategorien bedarf es zur Beschreibung und Analyse relevanter Wissenssysteme, um solche Fragen in Lehr-Lern-Kontexten stellen und empirisch untersuchen zu können? Erste Überlegungen bezüglich möglicher Zugänge ergaben Folgendes: In unserem Kontext erscheinen uns erstens Modellierungskreisläufe nicht geeignet, das komplexe Zueinander potentiell verschiedener Vorstellungen und Handlungsweisen zu beschreiben. Insbesondere die in diesen Kreisläufen typischerweise zentral herausgestellte Trennung von „Mathematik“ und dem „Rest der Welt“ erscheint uns als problematisch. Zweitens erscheint es uns für unsere Fragestellungen unabdingbar zu sein, zu berücksichtigen, dass sich die im Fortgang des Studiums entwickelnden übergreifenden Organisationsformen des mentalen, kommunikativen und objektiven Wissens (vgl. dazu Holzkamp, 1993) und in diesem Zusammenhang insbesondere der jeweilige subjektive innere Verweisungszusammenhang von Wissenselementen, also letztlich das was im Hinblick auf „Bedeutungen“ von hoher Relevanz ist, nicht als kognitive Konstrukte allein beschrieben werden können.

Unter anderem diese Überlegungen führten dazu, als Analysewerkzeug auf die Anthropologische Theorie der Didaktik (Chevallard, 1992, 1999) zurückzugreifen. Dieser Ansatz erlaubt insbesondere die institutionelle Verfasstheit mathematischen Wissens in den verschiedenen Lehr-Lern-Kontexten im Hinblick auf deren Struktur, spezifische Hürden und Zugriffe zu explizieren. Im Bereich der mathematikbezogenen Ingenieurdidaktik ist dieser Ansatz bereits in einer französischen Arbeitsgruppe fruchtbar gemacht worden (Castela & Romo Vázquez, 2011).

Ausblick (Teilprojekt A – Lüneburg)

Unseres Erachtens erlaubt es der gewählte Ansatz präzise Erkenntnisse zum Verhältnis von Mathematik und Elektrotechnik zu gewinnen, da er eine feinkörnige Kategorienbildung erlaubt, die es gestattet, Fragen zur spezifischen Mathematikverwendung in der Elektrotechnik (Vorstellungen beim „Mathemachen“, mathematischer oder elektrotechnischer Umgang mit Formeln und Größen) fachnah zu untersuchen.

Darüber hinaus lassen sich auf der Seite der Prozessteuerung Verbindungen zu soziokulturellen (Community of Practice, vgl. Wenger, 1998) und gesellschaftlichen (Habitustheorie, vgl. Bourdieu,1994) Kompetenzdimensionen herstellen. Auch lässt sich der institutionelle Blickwinkel auf die Ebene der konkreten Lehr-Lern-Situation erweitern. Möglichkeiten dazu bietet die Theorie der didaktischen Situationen (Brousseau, 1997). Schließlich bieten Materialien, die Wissen auf verschiedenen Ebenen repräsentieren (Expertenwissen, Lehrwissen, gelehrtes Wissen, gelerntes Wissen), die Möglichkeit die didaktische Transposition (Chevallard, 1991) relevanter mathematischer Inhalte zu beschreiben, wovon wir uns weitere Impulse für Kompetenzmodellierungen erwarten.

Literatur

Bourdieu, P. (1994). Raisons pratiques. Sur la théorie de l’action. Paris: Editions du Seuil.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990. translated by Cooper, M., Balacheff, N., Sutherland, R., Warfield, V. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné (2. ed.). Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. RDM, Selected Papers. La Pensée Sauvage, Grenoble, 131–167.

Chevallard, Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. RDM, 19(2), 221–266.

Castela, C., & Romo Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. RDM, 31(1), 79–130.

Holzkamp, K. (1993). Lernen: Subjektwissenschaftliche Grundlegung. Frankfurt/Main: Campus-Verlag.

Wenger, E. (1998). Communities of practice. Cambridge: Cambridge University Press.

Stanislaw SCHUKAJLOW, André KRUG, Paderborn

Planung, Kontrolle und multiple Lösungen beim Modellieren

1. Einleitung

Die Entwicklung mehrerer Lösungen und Repräsentationen zu einem mathematischen Problem wird als Merkmal eines guten Unterrichts angesehen und gehört zu den Unterrichtsstandards in verschiedenen Ländern (NCTM, 2000; Neubrand, 2006). Eine lerntheoretische Begründung zur positiven Wirkung der Erstellung von mehreren Lösungen auf Lernen stützt sich auf konstruktivistisch orientierte Lehr-Lerntheorien und Konzeptionen wie die cognitiv flexibility theory (Spiro, Coulson, Feltovich, & Anderson, 1988) oder die Handlungstheorie (Aebli, 1980). Vereinzelt vorliegende empirische Erkenntnisse aus methodisch kontrollierten Studien bestätigen zwar mehrheitlich eine förderliche Wirkung der Entwicklung multipler Lösungen auf Leistungen (Große & Renkl, 2006; Rittle-Johnson & Star, 2007), jedoch haben diese Studien sequentielle Bearbeitung von zwei Lösungen mit der Vermittlung von zwei Lösungen an einer Aufgabe verglichen. Aus diesem Grund bleibt es ungeklärt, ob die Behandlung mehrerer Lösungen im Vergleich zu Behandlung einer Lösung Vorteile im Leistungsbereich bringt. Ferner wurde der Einfluss von multiplen Lösungen auf strategische und motivational-affektive Merkmale von Lernenden bisher kaum erforscht. An diesen Forschungslücken setzt das von der DFG geförderte Projekt MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientiertem Mathematikunterricht) an. Gegenstand der Untersuchung ist die Modellierungskompetenz am Ende der Sekundarstufe I. Das Projekt teilt sich in zwei Phasen. In der ersten Phase wurden multiple Lösungen untersucht, die durch Annahmen über fehlende Angaben entstehen. In der zweiten Phase stehen multiple Lösungen im Mittelpunkt, die durch die Anwendung verschiedener mathematischer Verfahren erstellt werden können. Ergebnisse der ersten Projektphase deuten auf positive Wirkungen der Behandlung von multiplen Lösungen auf Selbstregulation, Interesse und Präferenzen für die Bearbeitung von Aufgaben mit mehreren Lösungen (Schukajlow & Krug, 2012a, 2012b, 2013). In diesem Beitrag berichten wir über eine experimentelle Studie, in der Einfluss der Behandlung und der Entwicklung multipler Lösungen auf metakognitive Aktivitäten Planung und Kontrolle untersucht wurde.

2. Planung und Kontrolle

Kognitive und metakognitive Aktivitäten sind von Bedeutung für einen effektiven Lernprozess und speziell für eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung. Der Zusammenhang zwischen Kognition und Metakognition beschreiben Garofalo und Lester (1985, S. 164) wie folgt: "… cognition is involved in doing, whereas a metacognition is involving in planning and choosing what to do and monitoring what is being done". Flavel (1979, S. 232) schreibt zu Metakognition: "'Metacognition' refers to one's knowledge concerning one's own cognitive processes and products or anything related to them …". Neben Selbstregulation gehören Planung und Kontrolle zu metakognitiven Aktivitäten.

Planung und Kontrolle spielen eine wichtige Rolle in den Beschreibungen von Problemlöseprozessen. Schon die vierschrittige Beschreibung der Bearbeitung eines Problems von Pólya enthält als Bestandteile u.a. die Entwicklung und Ausführung eines Plans (divising and carrying out a plan) sowie die Überprüfung der Lösung (looking back) (Pólya, 1948). Ähnlich haben Garofalo und Lester (1985) Planung und Kontrolle in die Liste von Aktivitäten aufgenommen, die bei der Bearbeitung eines schwierigeren Problems helfen können.

Ergebnisse aus korrelativen und experimentellen Studien bestätigen die Bedeutung von metakognitiven Aktivitäten beim Lernen (siehe Überblick z.B. bei Schneider & Artelt, 2010). Ein Beispiel zur positiven Wirkung von Metakognition auf Leistungen stellt das Programm (IMPROVE) dar, welches Fragen zur Stimulierung von Planung und Kontrolle bei der Aufgabenbearbeitung enthielt (Kramarski, Mevarech, & Arami, 2002).

3. Forschungsfragen und Methode der Studie

Die Bearbeitung von Aufgaben mit multiplen Lösungen legt eine bewusste Planung der Lösungsprozesse nah und stimuliert eine Kontrolle der Ergebnisse. Eine Planung ist am Anfang des Lösungsprozesses notwendig, um multiple Lösungsmöglichkeiten zu identifizieren. Kontrolle kann durch einen Vergleich von mehreren erstellten Lösungen angeregt werden. Erwartet werden Effekte der *Behandlung* von Modellierungsaufgaben mit multiplen Lösungen wie auch positive Wirkungen der *Entwicklung* mehrerer Lösungen auf Planung und Kontrolle.

Hypothesen der Studie lauten:

1. Behandlung mehrerer Lösungsmöglichkeiten im Unterricht mit Modellierungsaufgaben führt gegenüber einem Unterricht, in dem nur auf eine Lösung hingearbeitet wird, zu häufigerer Planung und Kontrolle bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben.
2. Schüler, die im Unterricht mehr Lösungen entwickeln, berichten nach der Unterrichtseinheit häufiger über Planung und Kontrolle bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben.

138 Realschüler aus 6 Klassen der Jahrgangsstufe 9 haben an der Untersuchung teilgenommen. Jede teilnehmende Klasse wurde leistungs- und geschlechtsheterogen in zwei Teile separiert und in zwei getrennten Räumen 5 Schulstunden lang mit Hilfe von Parallelaufgaben mit und ohne multiplen Lösungsmöglichkeiten unterrichtet. Die Lehrkräfte wurden gleichmäßig auf die Untersuchungsbedingungen aufgeteilt, so dass der Einfluss ihrer Persönlichkeit zwischen Bedingung nicht unterschieden hat.

Planung und Kontrolle wurde mit Hilfe von Befragungen vor und nach der Unterrichtseinheit durchgeführt. Die beiden Likert-Skalen wurden aus einer anderen Studie übernommen (Schukajlow & Leiss, 2011) und zeigten befriedigende bis sehr gute Reliabilität. Die Anzahl der entwickelten Lösungen wurde im Rahmen einer aufgabenbezogener Befragung während des Unterrichts erhoben. Schüler habe dabei angegeben, wie viele Lösungen sie zu einer Unterrichtaufgabe entwickelt haben.

4. Ergebnisse und Diskussion

Die Überprüfung der ersten Hypothese erfolgte mit Hilfe der Kovarianzanalyse (ANCOVA; unabhängige Variable: Unterrichtsbedingung, abhängigen Variablen Planung bzw. Kontrolle im Posttest; Kovariaten: Planung bzw. Kontrolle im Pretest). In der Gruppe „multiple Lösungen“ berichteten Schüler im Posttest unter Kontrolle des Pretests über häufigere Planung und Kontrolle der Lösung bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben mit Effektstärken Eta-Quadrat von .03 für Planung und .08 für Kontrolle. Somit zeigen sich Effekte der Behandlung von multiplen Lösungen beim Modellieren auf untersuchte metakognitiven Strategien.

Die zweite Hypothese wurde unter Anwendung der linearen Regression überprüft. Abhängige Variablen waren Planung bzw. Kontrolle im Posttest und unabhängige Merkmale entsprechende Konstrukte im Vortest sowie die Anzahl der entwickelten Lösungen im Unterricht. Wie angenommen hatten Planung bzw. Kontrolle im Vortest sowie die Anzahl der entwickelten Lösungen einen auf dem 5% Niveau signifikanten, positiven Einfluss auf die metakognitive Aktivitäten im Posttest. Regressionskoeffizient für die Anzahl der Lösungen betrug für Planung .24 und für Kontrolle .19. Die Anzahl der entwickelten Lösungen konnte somit einen signifikanten Beitrag zur Varianzaufklärung in metakognitiven Aktivitäten Planung und Kontrolle im Posttest leisten. Eine detaillierte Beschreibung der vorliegenden Studie ist im Beitrag von Schukajlow und Krug (Schukajlow & Krug, 2013, in press) zu finden.

5. Literatur

Aebli, H. (1980). *Denken: das Ordnen des Tuns*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitivedevelopmental inquiry. *American Psychologist, 34*, 906-911.

Garofalo, J., & Lester, F. K., Jr. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 163-176.

Große, C. S., & Renkl, A. (2006). Effects of multiple solution methods mathematics learning. *Learning and Instruction, 16*(2), 122-138.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 225-250.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (pp. 162-177). Berlin: Cornelsen.

Pólya, G. (1948). *How to solve it a new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561-574.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 42*(2), 149-161.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2012a). Effects of treating multiple solutions on students' self-regulation, self-efficacy and value. *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 59-66). Taipei, Taiwan: PME.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2012b). Multiple Lösungen beim Modellieren: Wirkungen auf Leistungen, kognitive Aktivierung, Kontrollstrategien, Selbstregulation, Interesse und Selbstwirksamkeit. In M. Kleine & M. Ludwig (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013). *Uncertanty orientation, preferences for solving tasks with multiple solutions and modelling*. Paper presented at the CERME 8, Antalya, Turkey.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013, in press). *Planning, monitoring and multiple solutions while solving modelling problems.* Paper presented at the Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Kiel, Germany.

Schukajlow, S., & Leiss, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *Journal für Mathematikdidaktik, 32*(1), 53-77.

Spiro, R. J., Coulson, R. L., Feltovich, P. J., & Anderson, D. K. (1988). Cognitiv Flexibility theory: Advanced knowledge aquisition in ill-structured domains. *The tenth annual conference of the cognitive science society* (pp. 375-383). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stephanie SCHULER, Joana ENGLER, Maria PELZER,
Gerald WITTMANN, Freiburg

Anschlussfähige mathematische Bildung – Kontinuitäten und Diskontinuitäten im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule

Der Begriff der Anschlussfähigkeit wird seit der Jahrtausendwende im Kontext von Übergängen insbesondere vom Kindergarten in die Grundschule verstärkt diskutiert (vgl. z.B. Hacker 2001, Faust u.a. 2004, Hellmich 2007, von Bülow 2011). Anschlussfähigkeit zwischen diesen beiden Bildungsinstitutionen wird dabei aufgrund der unterschiedlichen Rahmenbedingungen und Traditionen zumeist als nicht gegeben, aber als notwendig für einen gelungenen individuellen Übergang angesehen. Auch wenn in der aktuellen Diskussion zumeist die Unterschiede zwischen Kindergarten und Grundschule betont werden (vgl. Roßbach 2006, Diehm 2008, Faust u.a. 2011), lassen sich aktuelle Entwicklungen im Kindergarten wie die Einführung von Bildungsplänen, länderspezifische und -übergreifende Kooperationsprojekte, die Akademisierung der Ausbildung sowie domänenspezifische Ansätze im Kindergarten auch im Sinne einer Annäherung des Kindergartens an die Schule deuten.

Verbunden mit der Tatsache von institutionellen und damit auch individuellen Übergängen in der Bildungsbiographie ist die Forderung nach der Herstellung von bzw. nach einer Verbesserung der Anschlussfähigkeit. Idealtypisch lassen sich zwei Positionen unterscheiden (vgl. Roßbach 2006): (1) Erhöhung von Kontinuität, Reduktion von Unterschiedlichkeiten mit dem Ziel eines gleitenden, bruchlosen Übergangs für das einzelne Kind; (2) Unterstützung des Kindes bei der Bewältigung von Diskontinuitäten durch alle am Übergang Beteiligten (ErzieherIn, LehrerIn, Eltern), diese werden (auch) als entwicklungsförderliche Herausforderungen angesehen.

Inhaltlich beziehen sich die Forderungen nach einer Verbesserung der Anschlussfähigkeit auf folgende Bereiche (vgl. Roßbach 2006): (1) Kooperation von Kindergarten und Grundschule, (2) Aus- und Fortbildung des Fachpersonals, (3) strukturelle Veränderungen in Kindergarten und Grundschule, (4) curriculare Abstimmung. Unter Rückgriff auf die idealtypischen Positionen zur Verbesserung der Anschlussfähigkeit können Entwicklungen in allen vier Punkten im Hinblick auf Kontinuität und Diskontinuität beschrieben werden. In der Mathematikdidaktik werden beispielsweise die Bildungspläne für Kindergärten bezüglich ihrer Kontinuitäten und Diskontinuitäten zu den KMK-Standards für die Grundschule untersucht (vgl. Royar 2007) sowie an die KMK-Standards angelehnte Entwürfe für Kompetenzbereiche für den Kindergarten entwickelt (vgl. Steinweg 2008, 147; Royar & Streit 2010, 25).

Unter Bezug auf die Beliefs-Forschung wird für die Verbesserung der Anschlussfähigkeit auf die Bedeutung der Überzeugungen und Einstellungen der am Übergangsprozess Beteiligten – also der ErzieherInnen und LehrerInnen – verwiesen (vgl. von Bülow 2011). Bisherige Untersuchungen in diesem Bereich beziehen sich zumeist auf eine der Berufsgruppen und nehmen insbesondere das Bild von Mathematik in den Blick (vgl. z.B. Thiel 2010, Benz 2012).

Im Projekt AnschlussM wird die Anschlussfähigkeit der mathematikdidaktischen Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen untersucht. In diesem Beitrag werden Ergebnisse zur folgenden Teilfrage vorgestellt: *Welche Materialien werden im Kindergarten und in der Schule verwendet und welche Sichtweisen/Überzeugungen in Bezug auf das Lehren und Lernen von Mathematik steht dahinter?*

Neben einer repräsentativen Fragebogenstudie in Baden-Württemberg und Bremen wurde im Projekt AnschlussM hierzu auch eine qualitative Teilstudie durchgeführt, die sich wiederum aus zwei Teilen zusammensetzt. Im Rahmen von zehn Fallstudien wurden fünf Mathematikangebote von Erzieherinnen und fünf Mathematikstunden von Lehrerinnen zu Beginn des ersten Schuljahres, die nach Aussage der Betreffenden jeweils typisch waren, videotechnisch aufgezeichnet. Im Anschluss wurde jeweils ein Leitfadeninterview mit der Erzieherin beziehungsweise der Lehrerin geführt. Zu zwei Gruppendiskussionen brachten insgesamt 35 TeilnehmerInnen Materialien aus ihren Einrichtungen und Schulen mit. Diese Materialien waren der Ausgangspunkt für einen Austausch über die Gestaltung mathematischer Bildung innerhalb der Institutionen und im Übergang. Sowohl die Leitfadeninterviews als auch die Gruppendiskussionen wurden zunächst inhaltsanalytisch ausgewertet (vgl. Mayring 2010). Ergänzend werden in einem zweiten Schritt Überzeugungen der beiden Professionen in Bezug auf das Mathematiklernen im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule rekonstruiert (vgl. Bohnsack 2009).

Im Rahmen der Teilstudie gezeigte und berichtete Aktivitäten bezogen sich bis auf wenige Ausnahmen auf die Leitidee *Zahl und Operationen*. Die beteiligten ErzieherInnen setzen Alltagsmaterialien, Programme für das vorschulische Mathematiklernen oder auch beides ein. Die Verwendung von Alltagsmaterialien wird damit begründet, dass Mathematik überall im Kindergarten bzw. im Alltag zu finden sei. Dies verweist auf die Überzeugung, dass mathematische Bildung im Alltag stattfinden kann und soll. Die im Kindergarten auftretende Heterogenität mathematischer Kompetenzen wird in diesem Zusammenhang als normal und problemlos beschrieben. Der Einsatz von Programmen für das vorschulische Mathematiklernen (insbesondere *Zahlenland*, vgl. Preiß 2004), erfolgt – so ErzieherInnen – im Hinblick auf die Schulvorbereitung. Diese Argumentation verweist auf die Überzeugung, dass eine Schulvorbereitung aller Kinder nur durch derartige Programme zu gewährleisten ist oder zumindest besser gelingen kann als mit Alltagsmaterialien. Als ein Ziel des Einsatzes sowohl von Alltagsmaterialien als auch von Programmen geben ErzieherInnen an, dass die Kinder „Spaß an Mathematik" haben sollen. Genauer betracht ist „Spaß an Mathematik" damit gleichermaßen Ziel wie Gestaltungsprinzip der mathematischen Bildung im Kindergarten.

Dass die anwesenden LehrerInnen primär über didaktische Arbeitsmittel im Anfangsunterricht berichten und diese als typisch für ihren Unterricht einschätzen, zeigt ihre Schwerpunktsetzungen. Neben dem Zählen, das auch von ErzieherInnen als zentral angesehen wird, stehen die Anzahlerfassung und das Verständnis der Teil-Ganzes-Beziehung im Vordergrund. Mathematische Bildung im Kindergarten, die über das Zählen hinausgeht, wird hingegen kritisch gesehen. Dahinter lässt sich die Überzeugung ausmachen, dass die Vermittlung von Kulturtechniken der Schule überlassen werden soll. Diese erfährt ihre Begründung einerseits aus der Besorgnis, das im Kindergarten Falsches gelernt werden könne (z.B. falsche Schreibabläufe beim Ziffernschreiben), andererseits aus der Befürchtung, dass sich die Heterogenität am Schulanfang durch Förderung im Kindergarten weiter erhöhen könne. Während die Lehrkräfte die Heterogenität am Schulanfang als Herausforderung oder Belastung schildern, erhoffen sie sich von vorschulischer mathematischer Bildung im Kindergarten einen Abbau dieser Heterogenität. Diese Überzeugung zeigt sich auch in der Forderung, dass der Kindergarten allgemeine Kompetenzen wie Stifthaltung, Schneiden mit der Schere, Stillsitzen und Arbeitshaltung anbahnen solle, um den Schulanfang zu erleichtern.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sich in der Wahl der Materialien und in den für den Materialeinsatz angeführten Begründungen ein professionsspezifisch unterschiedliches Bild von Mathematiklernen sowie unterschiedliche Ziele der jeweiligen Einrichtung widerspiegeln. Anschlussfähigkeit wird in den Augen der Beteiligten offenbar dann erreicht, wenn der Kindergarten seiner „Zuliefererrolle" an die Schule besser gerecht wird. In Bezug auf die Frage, worin diese Zuliefererrolle konkret besteht, gibt es – wie dargelegt – allerdings unterschiedliche Vorstellungen von ErzieherInnen und Lehrkräften.

Literatur

Benz, C. (2012): Attitudes of Kindergarten Teachers about Math. In: JMD 33, 203–233.

Bohnsack, R. (2009)[7]: Gruppendiskussionen. In: Flick, U.; von Kardorff, E. & Steinke, I. (Hg.): Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek: Rororo, 369–384.

Diehm, I. (2008): Kindergarten und Grundschule – Zur Strukturdifferenz zweier Erziehungs- und Bildungsinstitutionen. In: Helsper, W. & Böhme, J. (Hg.): Handbuch der Schulforschung. Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften, 557-575.

Faust, G.; Wehner, F. & Kratzmann, J. (2011): Zum Stand der Kooperation von Kindergarten und Grundschule. Maßnahmen und Einstellungen der Beteiligten. In: Journal für Bildungsforschung Online, Jahrgang 3, Ausgabe 2, 38–61. Münster: Waxmann

Faust, G. u.a. (Hrsg.) (2004): Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hacker, H. (2001): Die Anschlussfähigkeit von Kindergarten und Grundschule. In: Faust-Siehl, G. & Speck-Hamdan, A. (Hg.): Schulanfang ohne Umwege. Frankfurt a. M.: Grundschulverband – Arbeitkreis Grundschule, 80–94.

Heinze, A. & Grüßing, M. (Hg.) (2009): Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium: Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht. Münster: Waxmann.

Hellmich, F. (2007): Bedingungen anschlussfähiger Bildungsprozesse von Kindern beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. In: bildungsforschung, Jahrgang 4, Ausgabe 1.

Mayring, P. (2010)[11]. Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. Weinheim und Basel: Beltz.

Preiß, G. (2004). Leitfaden Zahlenland. Band 1. Kirchzarten: Zahlenland Verlag Prof. Preiß.

Roßbach, H.-G. (2006): Institutionelle Übergänge in der Frühpädagogik. In: Fried, L. & Roux, S. (Hg.): Pädagogik der frühen Kindheit. Weinheim: Beltz, 280–292.

Royar, T. (2007): Mathematik im Kindergarten. Kritische Anmerkungen zu den neuen „Bildungsplänen“ für Kindertageseinrichtungen. In: mathematica didactica 30(1), 29–48.

Royar, T. & Streit, C. (2010): MATHElino. Seelze: Klett Kallmeyer.

Steinweg, A.S. (2008): Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In: Hellmich, F. & Köster, H. (Hg.): Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften. Klinkhardt, 143–159.

Thiel, O. (2010). Teachers' attitudes towards mathematics in early childhood education. In: European Early Childhood Education Research Journal, 18(1), 105-115.

von Bülow, K. (2011): Anschlussfähigkeit von Kindergarten und Grundschule. Rekonstruktion von subjektiven Bildungstheorien von Erzieherinnen und Lehrerinnen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wird mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung und des Europäischen Sozialfonds der Europäischen Union unter den Förderkennzeichen 01NV1025/1026 und 01NV1027/1028 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

Alexander SCHULTEIS, Anna C. WITTE, Thomas GAWLICK, Hannover

Entwicklung und Erprobung einer Interventionsstrategie beim Lösen von problemhaltigen Textaufgaben

1. Zielrichtung der empirischen Studie

Problemlösen ist eine auch curricular wichtige Prozesskompetenz, die gefördert zu werden verdient. In der Literatur gibt es bereits zahlreiche Interventionsstudien, vgl. Bruder & Collet (2011), allerdings i.d.R. auf Klassenniveau. Die Wirksamkeit dürfte dabei entscheidend davon abhängen, inwieweit ein vorgegebenes Problemlöseschema individuell umgesetzt werden kann. Gegenstand unserer Studie ist daher die Suche nach einer *individuellen* Interventionsstrategie, die Schülerinnen und Schüler (SuS) bei der Bearbeitung von problemhaltigen Textaufgaben zusätzlich unterstützen soll. Der Focus auf letztere ist auch dadurch begründet, dass gerade hierbei Interventionen im Lösungsprozess notwendig sind, denn „problemhaltige Textaufgaben bezeichnet eine Aufgabengruppe, [...] die mitunter so in Sachsituationen eingebettet sind, dass die den Kindern vertrauten Grundmodelle der Rechenoperationen nicht ohne weiteres sichtbar bzw. nicht ohne Transformationsleistung anzuwenden sind.“ (Rasch, 2001, S. 26) Die SuS werden dazu in einem Laborexperiment *individuell* mit zwei Interventionssettings begleitet, die das Spannungsverhältnis Schema-Individualisierung verkörpern. Wir analysieren vergleichend die Wirksamkeit beider Settings auf Prozess und Lernerfolg der SuS beim Lösen der Aufteilaufgaben *Frosch* und *Imker*, s. Gawlick (in diesem Band).

2. Entwicklung der beiden Interventionssettings

Im schematischen Setting werden zwecks Durchführungsobjektivität schematische Anweisungen in ihrer Abfolge genannt, ohne viel Rücksicht auf den individuellen Bearbeitungsprozess des Probanden zu nehmen. Der schematische Interventionsplan wurde aus den Fragen von Polya (1949, S. 1) und Handlungsvorschlägen in Zech (1996, S. 339) entwickelt und auf die beiden Aufgaben zugeschnitten, vgl. Witte & Schulteis (2012, Anhang S. 8 & 9).

Im Gegensatz dazu orientieren sich die Interventionen des klientenzentrierten Settings am Prozess des Probanden und werden angepasst an diesen bereitgestellt. In diesem Setting ist ein gewisses Maß an Spontanität gefordert, um je nach Situation geeignet zu reagieren. Es werden „der Klientin keine Interpretation, Ratschläge oder fertige Lösungen [angeboten], sondern die Auseinandersetzung mit emotionalen Prozessen und das Finden neuer Wege und Betrachtungsweisen [gefördert].“ (Weinberger 2011, S.

33) Der Interventionsplan ist in Anlehnung an Gendlins Focusing entwickelt worden, vgl. Sachse et. al. (1992), sowie an Rogers (1973), da das Focusing an Rogers‘ klientenzentrierte Gesprächspsychotherapie anknüpft und uns ebendort konkrete Interventionsvorschläge für diese vorlagen.

Um die Intervention aufgabenbezogen durchführen zu können, wurden die Lösungswege und die dabei möglichen Fehler aus der Sachanalyse empirisch ergänzt – hierfür analysierten wir die Bearbeitungen mehrerer freiwilliger Probanden, vgl. Gawlick (in diesem Band) und entwickelten mittels Typenbildung nach Kelle & Kluge (2010) verschiedene Lösungs- und Fehlertypen, anhand derer wir unsere Interventionen anpassen konnten.

3. Design und Durchführung der Studie

Um die Erfolgswirksamkeit der Interventionen ermitteln zu können, wurde ein Gruppen-Pretest-Posttest-Design (Bortz & Döring 2006, S. 55) gewählt, wobei vergleichbare Aufteilaufgaben schriftlich zu bearbeiten waren. Die Probanden unserer Hauptstudie stammen aus drei fünften Klassen des Wilhelm-Busch-Gymnasiums Stadthagen. Die eine fünfte Klasse stellte die Kontrollgruppe dar, die ohne weitere Intervention beide problemhaltigen Textaufgaben bearbeitete. Aus den anderen beiden bildeten wir zwei Versuchsgruppen, deren Bearbeitungen mit einem der beiden Interventionssettings begleitet und videographiert wurden. Um beide Versuchsgruppen möglichst gut vergleichbar zu machen, bildeten wir parallelisierte Stichproben (n= 2×14, matched samples“ nach Bortz & Döring 2006, S. 527).

4. Ergebnisse der Studie

Forschungsfrage 1: Wie wirken die Interventionen beim Aufgabenlösen?

Hierzu wurden diese mittels Qualitativer Inhaltsanalyse jeweils auf positive, keine oder kontraproduktive Wirkung hin kategorisiert und mit Ankerbeispielen belegt. Beim schematischen Setting ergaben sich folgende Wirkungen: Das Setting stellt ein Gerüst dar, an dem sich die SuS besonders in der ersten Phase der Aufgabenbearbeitung „entlang hangeln“ können. Die schematischen Interventionen sind für SuS erlernbar und bei anderen Aufgaben anwendbar. Auf der anderen Seite können die Interventionen des schematischen Settings die SuS auch verwirren oder einschränken, da sie nicht an dem individuellen Bearbeitungsprozess angepasst sind. Das klientenzentrierte Interventionssetting wirkt überwiegend positiv, sofern die passgenaue Auswahl der Interventionen gelingt – was allerdings eine intensive Vorbereitung und Übung benötigt.

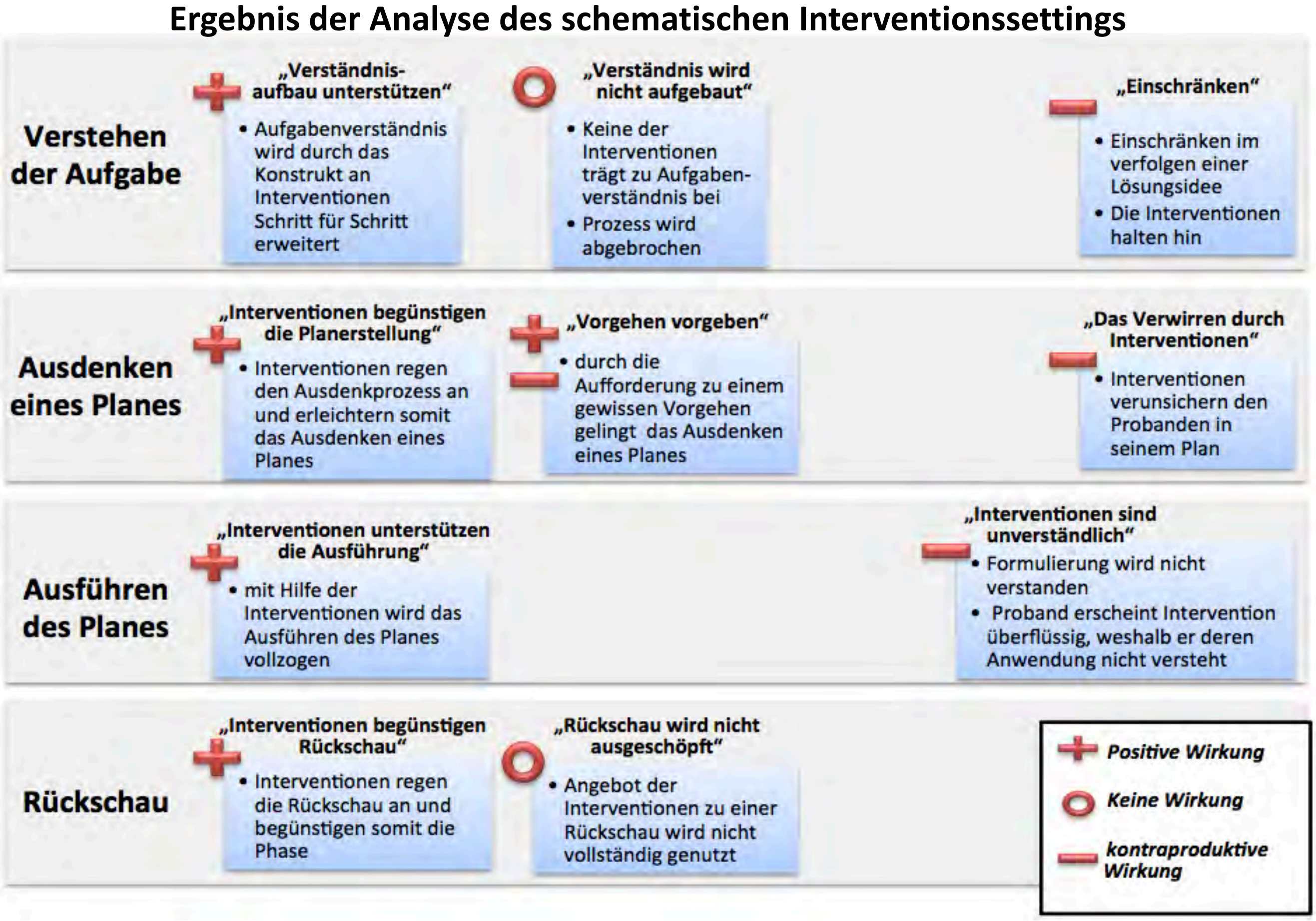
Forschungsfrage 2: Sind die Interventionen unterschiedlich förderlich?

Hier betrachteten wir vorrangig den Mittelwert der Differenz von Vortest und Nachtest: Die Kontrollgruppe erzielte bei jeweils 8 erreichbaren Punkten eine Verbesserung von 0,7 Punkten. Dieses ist vermutlich ein Beleg für eine unterschiedliche Aufgabenschwierigkeit (trotz der Item-Homogenität von 0,48). Bei der schematischen Versuchsgruppe gab es einen Zuwachs von 0,43 Punkten. Im klientenzentrierten Setting konnte sogar eine Verbesserung von 1,21 Punkten beobachtet werden. Daher kamen wir zu dem Schluss, dass beide Settings unterschiedlich förderlich wirkten, jedoch das klientenzentrierte Setting die Probanden beim Bearbeiten von problemhaltigen Textaufgaben effektiver unterstützte. Die Mittelwertdifferenzen sind allerdings aufgrund der geringen Stichprobengröße nicht signifikant.

5. Fazit und Diskussion

Eine optimale individuelle Interventionsstrategie für die Schule sollte die zu Tage getretenen Vorteile beider Settings vereinen: Der *schematische Plan* schafft ein Gerüst, an dem sich SuS orientieren können – zur Gewöhnung ist ein Beharren darauf durch die Lehrperson durchaus hilfreich, sofern die SuS dabei „mitgenommen“ werden. Hier kommt die Grundidee der *Klientenzentrierung* ins Spiel: Wird prozessbezogen interveniert, fällt es den SuS deutlich leichter, die Äußerungen des Beobachters zu verstehen, sie als Hilfe anzusehen und umzusetzen – wenn sie sich davon freimachen, dass eine Lehrerfrage schon ein „das ist falsch“ impliziert. Auf Fehlertypen basierende Intervention werden dagegen aufgrund ihrer hohen Aufgabenspezifität das Lösen problemhaltiger Textaufgaben nicht nachhaltig unterstützen – dieses Resultat ist ein zusätzlicher Anlass, die gegenwärtige schulische „Interventionskultur“ zu überdenken.

Ergebnis der Analyse des klientenzentrierten Interventionssettings



Literatur:

Bortz, J. & Döring, N. (2006): *Forschungsmethoden und Evaluation Human- und Sozialwissenschaftler*. 4. Auflage. Springer Medizin Verlag: Heidelberg.

Bruder, R. & Collet, C. (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Cornelsen Verlag Scriptor: Berlin.

Kelle, U. & Kluge, S. (2010): *Vom Einzelfall Zum Typus*. 2.Auflage. Verlag für Sozialwissenschaften.

Polya, G. (1949): *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*. 2. Neuauflage. Francke Verlag.

Rasch, R. (2001): *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Verlag Franzbecker: Hildesheim.

Rogers, C. R. (1973): *Die klient-bezogene Gesprächstherapie*. Kindler: München.

Sachse, R., Atrops, A., Wilke, F. & Maus, C. (1992): *Focusing*. Ein emotionszentriertes Psychotherapie-Verfahren. 1. Auflage. Verlag Hans Huber: Bern.

Weinberger, S. (2011): *Klientenzentrierte Gesprächsführung*. 13. Auflage. Juventa Verlag: Weinheim und München.

Witte, A. & Schulteis, A. (2012): *Entwicklung und Erprobung einer Interventionsstrategie beim Lösen von problemhaltigen Textaufgaben*. Unveröffentlichte Masterarbeit.

Zech, F. (1996): *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik. 8., völlig neu bearbeitete Auflage. Belz Verlag: Weinheim.

Andrea SCHULZ, Katja KOCH, Tanja JUNGMANN, Rostock

„Mathe ist überall?!" – Förderung der professionellen Responsivität pädagogischer Fachkräfte im Bereich Mathematik in Kindertageseinrichtungen

Mathematik ist bereits vor Schulbeginn ein wesentlicher Bestandteil kindlicher Aktivitäten (Ginsburg, Inoue & Seo, 1999) und in den meisten Bildungsplänen von Kindertageseinrichtungen fest integriert (Lorenz, 2012; vgl. Bildungskonzeption M-V, 2010).

Die aktuelle Literatur (u.a. Gasteiger, 2010; Grüßing, 2009) betont die Notwendigkeit der Professionalisierung pädagogischer Fachkräfte zur gezielteren alltagsintegrierten Förderung der mathematischen Basiskompetenzen der Kinder. Diese Forderung wird durch die Ergebnisse einer Studie von Peter-Koop et al. (2008) gestützt, nach der alltagsintegriert geförderte Kinder in ihren mathematischen Kompetenzen keine Unterschiede zu in Einzelsettings geförderten Kindern aufweisen.

Neben einer entsprechenden Schulung scheint zur Professionalisierung eine zusätzliche Begleitung der pädagogischen Fachkräfte im Alltag durch ein Coaching effektiv zu sein. Während es diesbezüglich im anglo-amerikanischen Sprachraum einige Forschungsarbeiten gibt (vgl. Überblick bei Gupta & Daniels, 2012), ist die Befundlage im deutschen Sprachraum relativ dünn.

Forschungsvorhaben

Im Rahmen des von der Universität Rostock im Auftrag des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern durchgeführten Projektes *KOMPASS* (<u>Komp</u>etenzen <u>a</u>lltagsintegriert <u>s</u>chützen und <u>s</u>tärken) wird ein Konzept zur alltagsintegrierten Förderung aller Kinder im Bereich der frühen mathematischen Bildung, den Bereichen Sprache/Literacy sowie emotional-soziale Entwicklung entwickelt, implementiert und evaluiert (vgl. Jungmann et al., 2012).

Zentrale Forschungsfragen beziehen sich auf den Einzeleffekt der Fortbildung im Vergleich zum Effekt der Kombination aus Fortbildung und pädagogischem Coaching a) auf die professionelle Kompetenz und Responsivität der Fachkräfte, b) auf die kindliche Entwicklung.

Es wurde ein Prä-Post-Design mit gestufter Intervention gewählt. Die Interventionsgruppe 1 (IG 1) erhält zusätzlich zur Fortbildung auch das pädagogische Coaching. Die Interventionsgruppe 2 (IG 2) wird lediglich fortgebildet.

Auf der Erzieherebene wird zur Erfassung der Kompetenzen das allgemeine Kompetenz-Modell von Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann, Pietsch (2011) zugrunde gelegt, welches die Handlungskompetenz der ErzieherInnen in Handlungsgrundlagen (Disposition), Handlungsbereitschaft und Handlungsvollzug (Performanz) unterteilt (s. Abb. 1). Besondere Beachtung findet die professionelle Responsivität als Qualitätsmerkmal pädagogischen Handelns (Sarimski, 2012).

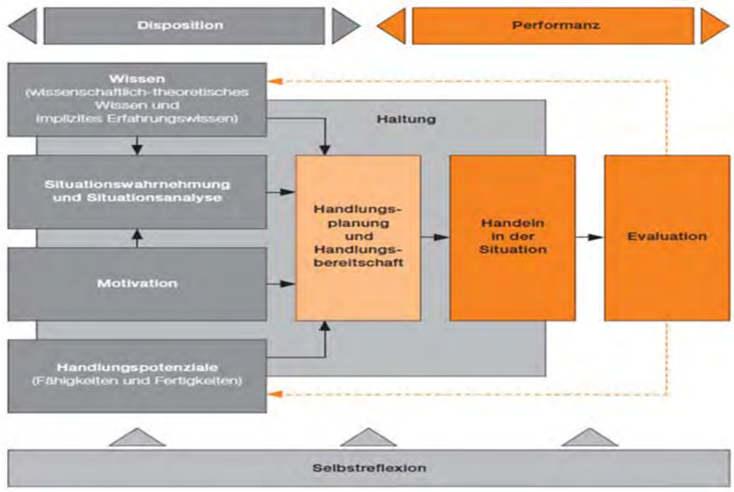


Abbildung 1: Allgemeines Kompetenz-Modell (Fröhlich-GildhoffNentwig-Gesemann, Pietsch, 2011).

Im Bereich der frühen mathematischen Bildung werden auf der Ebene der pädagogischen Fachkräfte (N=7) die Kompetenzen gemäß dem allgemeinen Kompetenz-Modell über Fragebögen, Beobachtungen sowie Reflexionsinterviews erhoben.

Auf der Kindebene (N=207) wird in Kooperation mit dem IPN in Kiel der Kieler Kindergartentest (KiKi, Grüßing et al., 2013) eingesetzt, welcher die mathematische Kompetenz der Kinder erfasst.

Die Inhalte der mathematischen Fortbildung sind die Vermittlung von theoriegeleitetem Wissen über allgemeine und inhaltliche Standards, die Vermittlung von Wissen über didaktische Prinzipien und Methoden, insbesondere lernmethodische Kompetenzen, der Umgang mit mathematischen Fehlern der Kinder, Fördermöglichkeiten in Alltagssituationen sowie Möglichkeiten der Beobachtung und Dokumentation. Dabei liegen die allgemeinen mathematischen Standards Argumentieren und Begründen, Kommunizieren, Problemlösen, Verbindungen herstellen und Darstellen sowie die inhaltlichen mathematischen Standards Muster und Strukturen, Raum und Form, Zahlen und Mengen, Größen und Messen sowie Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit zugrunde.

Erste Ergebnisse

Während das im Wissenstest erhobene mathematische Fachwissen der pädagogischen Fachkräfte vom Prä- zum Posttest signifikant zunimmt, schätzen die Fachkräfte ihr Wissen und ihre Handlungskompetenz selbst nicht als höher ein. Ein leichter Anstieg ist lediglich im selbsteingeschätzten Wissen über die kindliche Entwicklung zu verzeichnen.

Weiterhin wurden die ErzieherInnen gefragt, welche mathematischen Kompetenzen Kinder in der Kindertageseinrichtung erwerben sollten. Eine Zuordnung der Nennungen zu den fünf inhaltlichen mathematischen Standards weist zu beiden Messzeitpunkten eine deutliche Betonung des Bereichs Zahlen und Mengen auf. Die Bereiche Muster und Strukturen sowie Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit werden vor der Fortbildung gar nicht benannt, nach der Fortbildung hingegen von drei bzw. zwei der sieben Fachkräfte. Den Bereich Größen und Messen erachten vor der Fortbildung zwei Fachkräfte als relevant, nach der Fortbildung sechs. Dagegen wird der Bereich Raum und Form vor der Fortbildung von allen sieben ErzieherInnen benannt, nach der Fortbildung hingegen nur von sechs.

Die Zustimmung der ErzieherInnen zur Ko-Konstruktion mathematischer Inhalte nimmt im Prä-Post-Vergleich deutlich zu, eine zunehmende Tendenz zeigt sich ebenfalls hinsichtlich der Nutzung von Mathematik im Alltag der Kinder bis hin zur vollen Zustimmung aller sieben ErzieherInnen im Posttest. Die inhaltliche Beschränkung auf Zahlen und Formen findet schon vor der Fortbildung nur sehr geringe Zustimmung, nach der Fortbildung lehnen alle Fachkräfte diese Aussage ab.

Auf der Kindebene kann aktuell nur die Ausgangslage dargestellt werden. Da die vorliegende Stichprobe der Normierung des KiKi dient, ist kein Vergleich mit der Altersnorm möglich. Die Verteilung ist erwartungskonform linksschief, da der Test für die jüngeren Kinder noch zu schwer sein dürfte. Es besteht ein hochsignifikanter Zusammenhang zwischen der mathematischen Kompetenz und dem Alter der Kinder.

Ausblick

Im Jahr 2013 wird in der IG I ergänzend zur Fortbildung das pädagogische Coaching durchgeführt. Coaching ist definiert als individualisierte und situationsbezogene Unterstützung pädagogischer Fachkräfte in der Planung, Durchführung und Auswertung (Reflexion) ihres pädagogischen Handelns in Hinblick auf erfolgreiche Entwicklungs- und Lernprozesse der Kinder (Oelkers & Reusser, 2008, in Anlehnung an Staub, 2004).

Die Ziele des Coachings sind der Transfer der Fortbildungsinhalte, die Verknüpfung und Erweiterung von Wissens- und Handlungskompetenzen, insbesondere die Stärkung der professionellen Responsivität, das Wahrnehmen, Erkennen und Aufgreifen didaktischer Situationen, die erhöhte Sicherheit im Handeln sowie eine zunehmende Selbstreflexion der pädagogischen Fachkräfte.

Mit Ergebnissen des zweiten Posttests in der IG 1 sowie der Prä- und Posttests der IG 2, die nur die Fortbildung erhält, ist Anfang 2014 zu rechnen.

Literatur

Bildungskonzeption M-V für 0-bis 10-jährige Kinder (2010). Schwerin: Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern.

Fröhlich-Gildhoff, K., Nentwig-Gesemann, I. & Pietsch, S. (2011): Kompetenzorientierung in der Qualifizierung frühpädagogischer Fachkräfte. http://www.weiterbildungsinitiative.de/uploads/media/WiFF_ Expertise_Nr_19_Froehlich_Gildhoff_ua_Internet__PDF.pdf [Zugriff: 07.06.2012].

Gasteiger, H. (2010). Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Münster: Waxmann.

Ginsburg, H. P., Inoue, N. & Seo, K.-H. (1999). Young children doing mathematics. Observations of everyday activities. In: J. V. Copley (1999), Mathematics in the early years (pp. 88-99). Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

Grüßing, M., Heinze, A., Duchhardt, C., Ehmke, T., Knopp, E. & Neumann, I. (2013). KiKi – Kieler Kindergartentest Mathematik zur Erfassung mathematischer Kompetenz von vier- bis sechsjährigen Kindern im Vorschulalter. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.). Diagnostik mathematischer Kompetenzen (S. 67-80). Göttingen: Hogrefe.

Grüßing, M. (2009). Mathematische Kompetenzentwicklung zwischen Elementar- und Primarbereich: Zusammenfassung und Forschungsdesiderate. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.). Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht (S. 53-58). Münster: Waxmann.

Gupta, S. & Daniels, J. (2012). Coaching and professional development in early childhood classrooms: Current practices and recommendations for the future. NHSA Dialog: A Research-to-Practice Journal for the Early Childhood Field, 15:2, 206-220.

Jungmann, T., Koch, K., Schmidt, A., Schulz, A., Stockheim, D., Thomas, A., Tresp, T. & Etzien, M. (2012). Implementation und Evaluation eines Konzepts der alltagsintegrierten Förderung aller Kinder zur Prävention sonderpädagogischen Förderbedarfs. Zwischenbericht 2012. http://www.sopaed.uni-rostock.de/fileadmin/Isoheilp/KOMPASS/Zwischenbericht_2012.pdf [Zugriff: 03.03.2013].

Oelkers, J. & Reusser, K. (2008). Qualität entwickeln – Standards sichern – mit Differenzen umgehen. Bundesministerium für Bildung und Forschung, Bildungsforschung Band 27. http://www.bmbf.de/pub/bildungsforschung _band_siebenundzwanzig.pdf [Zugriff: 15.02.2013].

Peter-Koop, A., Grüßing, M. & Schmitman gen. Pothmann, A. (2008). Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten: Befunde zur vorschulischen Identifizierung und Förderung von potentiellen Risikokindern in Bezug auf das schulische Mathematiklernen. Empirische Bildung, 22 (2), 209-222.

Sarimski, K. (2012). Behinderte Kinder in inklusiven Kindertagesstätten. Stuttgart: Kohlhammer.

Stefan SCHUMACHER, Jürgen ROTH

Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung Grundvorstellungen im Schülerlabor erarbeiten

1. Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ der Universität Landau ist ein außerschulischer Lernort mit direktem Bildungsauftrag (Rasfeld/Scherer 2010). Hier stehen nach Jahrgangsstufen und Inhalt gegliederte Laborstationen zur Verfügung, in denen Schülerinnen und Schüler selbstständig Lehrplaninhalte erarbeiten können.

Das Ziel des Mathematik-Labors ist die Breitenförderung. Es sollen möglichst alle Schülerinnen und Schüler gefördert und für Mathematik begeistert werden. Ein Besuch im Mathematik-Labor erfolgt demnach immer im Klassenverband, wobei die Schüler/innen im Labor in Kleingruppen arbeiten. Die einzelnen Laborstationen werden dabei in drei Teilen bearbeitet, für die jeweils eine Doppelstunde à 90 Minuten zur Verfügung steht.

Einschlägige empirische Untersuchungen zeigen, dass der im Rahmen von Laborbesuchen erreichte Lernerfolg oft hinter den Erwartungen zurück bleibt (z.B. Rasfeld/Scherer 2010, Schmidt/Di Fuccia/Ralle 2011). Dies ist unter anderem auf die Tatsache zurückzuführen, dass Schülerlabore oft nur unzureichend mit dem Lernort Schule vernetzt werden. Aus diesem Grund enthält jede Laborstation des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ Vernetzungselemente, die eine adäquate Vor- und Nachbereitung im Unterricht unterstützen und so die Nachhaltigkeit des Lernerfolgs sichern sollen. Im Folgenden werden am Beispiel der Station „Mathematik und Kunst“ die Konzeption einer Laborstation vorgestellt und Vernetzungsmöglichkeiten mit dem schulischen Unterricht aufgezeigt.

2. Laborstation „Mathematik und Kunst“

An der Station „Mathematik und Kunst“ des Mathematik-Labors werden anhand von Kunstwerken der „konkreten Kunst“ folgende Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff und der Bruchrechnung selbstständig durch Schüler/innen in forschend-entdeckenden Lernprozessen erarbeitet:

- Teil eines Ganzen
- Teil mehrerer Ganzer
- Quasikardinalzahlaspekt
- Anschauliche Größenvergleiche
- Verfeinern von Brüchen
- Inhaltlich-anschauliche Addition von Brüchen

Um eigenständiges Entdecken zu ermöglichen, wurde ein anschaulicher Zugang über Flächenmodelle in Form von Kunstwerken der konkreten Kunst gewählt. Dies ist insofern legitim, als Künstler dieser Kunstrichtung, wie etwa Max Bill, der Auffassung sind, „es sei möglich, eine kunst weitgehend aufgrund einer mathematischen denkweise zu entwickeln." (Bill 1977) In der konkreten Kunst werden also mathematische Strukturen mit künstlerischen Mittel visualisiert.

Abb. 1: Max Bill:„progression in fünf quadraten" (Nachkonstruktion des Erstautors)

Das Kunstwerk „progression in fünf quadraten" von Max Bill besteht aus fünf übereinander angeordneten Quadrate, die nach unten hin immer feiner unterteilt werden. Dieser Sachverhalt wird in der ersten Doppelstunde der Laborarbeit genutzt um anhand der Struktur des Kunstwerks, erste Entdeckungen zu Bruchzahlen zu ermöglichen. Es wurden zu jedem eingesetzten Kunstwerk entsprechende „Kunstwerk-Puzzles" entworfen. So kann z. B. die Grundvorstellung „Teil eines Ganzen" durch das gleichmäßige Zerlegen in bzw. Auslegen mit entsprechenden Puzzleteilen mit einer Bedeutung, einer konkreten Handlung verknüpft werden. Durch das flexible Wechseln zwischen den verschiedenen Repräsentationen, soll die Bedeutung der Handlung des Auslegens über das Beschreiben dieser Handlung durch Schriftsprache und Skizzen zu einer Bedeutungszuweisung der mathematisch-symbolischen Bruchschreibweise führen.

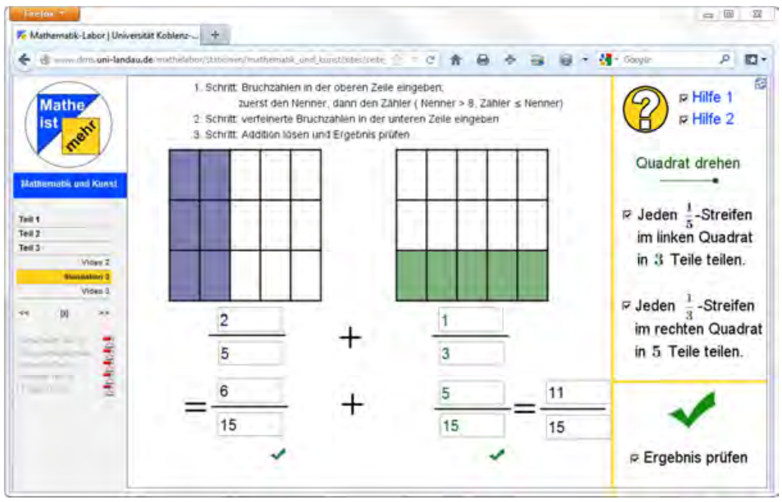


Abb. 2: Simulation zur Addition

Die im zweiten Stationsteil anschaulich problematisierte Addition wird im dritten Stationsteil losgelöst von der konkreten Kunst vertieft. Diese Vertiefung wird durch ein Instruktionsvideo eingeleitet. Dort wird die Idee präsentiert, eine gemeinsame Unterteilung für zwei unterschiedlich geteilte Quadrate zu finden, in dem die Unterteilungen der beiden Quadrate gegenseitig übertragen werden. Dieses Prinzip wenden die Schüler/innen im Anschluss auf neue Additionsprobleme an, die sie mit Hilfe von selbst erstellten entsprechenden Skizzen lösen. Im nächsten Schritt können sie Additionen mit größeren Nennern nach dem gleichen Prinzip anhand einer Computersimulation (vgl. Abb. 2) lösen. Entscheidend ist dabei, das inhaltliche Verständnis für die Vorgehensweise zu vertiefen. Deshalb ist die Simulation so gestaltet, dass bei jeder neuen Aufgabe das inhaltliche Lösungskonzept noch einmal abgearbeitet und damit der Wechsel zum syntaktischen Arbeiten hinausgezögert wird.

Zum Abschluss des dritten Stationsteil, können die Schüler/innen ihr bisher erworbenes Wissen über Bruchzahlen und die Bruchrechnung produktiv einsetzen um eigene Kunstwerke nach Gestaltungsprinzipien zu entwerfen. Dabei wird indirekt neues Wissen über Bruchzahlen generiert, sowie vorhandenes Wissen gefestigt. Als Grundlage dient hier eine „Kunstwerkreihe“ von Max Bill mit dem Titel „$8\left(2\frac{4}{4}\right) = 8$“. Diese Reihe besteht aus acht Kunstwerken, die jeweils aus zwei deckungsgleichen Rechtecken bestehen. Auf die beiden Rechtecke hat Max Bill je vier Farben gleichmäßig verteilt. Dieses Prinzip soll von den Schüler/innen durch das Verteilen von drei Farben auf zwei deckungsgleiche, regelmäßige Sechsecke übertragen werden. Zu jedem Kunstwerk, fertigen die Schüler/innen ein Poster an, auf dem neben dem Kunstwerk auch das zugrundeliegende mathematische Konzept dargestellt wird. So können die entstandenen Kunstwerke im Anschluss an den Laborbesuch im Rahmen einer Klassenzimmervernisage präsentiert werden. Die Gestaltung des Posters stellt eine für die Laborstation „Mathematik und Kunst“ besondere Form der Vernetzung der Lernorte dar. Weitere Vernetzungselemente werden im Folgenden vorgestellt.

3. Vernetzung der Lernorte

Es werden vielfältige Möglichkeiten zur Vernetzung des Lernorts Mathematik-Labor mit dem Lernort Schule genutzt. So werden die Lernvoraussetzungen sowie die durch den Laborbesuch angestrebten Lernziele im Vorfeld des Laborbesuchs mit den betreuenden Lehrkräften besprochen und zusätzlich durch ein entsprechendes Informationsdokument offengelegt. Einen weiteren Aspekt der Vernetzung bilden Hausaufgaben, die zu jedem der drei Stationsteile inhaltlich passend angeboten werden. Die Hausaufgaben werden am Ende jedes Stationsteils ausgeteilt und durch die Lehrkraft in einer Unterrichtsstunde zwischen den Laborbesuchen besprochen. Darüber hinaus erfolgt eine Vernetzung über die Nachbereitung des Laborbesuchs bzw. die Weiterführung der Laborarbeit im Unterricht. Die Schüler/innen nehmen aus der Laborarbeit ein gemeinsam geführtes „Gruppenergebnisheft“ mit, in dem zentrale, in der Kleingruppe erarbeitete Inhalte festgehalten werden. Dieses Heft kann von der betreuenden Lehrkraft gezielt zur Nachbereitung der Inhalte des Laborbesuchs genutzt werden. Zu einigen Laborstationen stehen Zusatzmaterialien wie z.B. „Exi-Bastelbögen“ (Legematerial auf der Basis eines regulären Sechsecks als dem Ganzen; vgl. Roth 2009) und dazu passende Aufgabenvorschläge zur Verfügung. Diese erlauben die strukturgleiche Weiterführung der Laborarbeit im Unterricht im Rahmen der Vertiefung und ggf. der Erarbeitung neuer Inhalte. Darüber hinaus werden den Lehrkräften die Ergebnisse von durchgeführten Leistungstests zur Verfügung gestellt, die sie für die Diagnose und gezielte Förderung nutzen können. Das Mathematik-Labor-Team trägt also durch die Bereitstellung von Materialien und Anregungen zur Vernetzung der Lernorte bei, während die konkrete Vernetzungsarbeit von der Mathematiklehrkraft der Klasse getragen wird.

4. Erste Empirische Ergebnisse

Die Laborstation Mathematik und Kunst wurde von insgesamt 127 Schüler/innen besucht und erprobt. Um vergleichende Informationen über die Wirksamkeit des Laborbesuchs zu erhalten wurden 42 Schüler/innen zeit- und inhaltsgleich wie gewohnt in der Schule unterrichtet. Die Untersuchung war nach dem Pre-/ Post-/ und Follow-up-Test Design aufgebaut. Die Ergebnisse des Pre- sowie des Posttests liegen bereits vor und zeigen, dass sich die Schüler/innen der Laborklassen und der Kontrollklassen hinsichtlich ihres erzielten Lernzuwachses nicht signifikant unterscheiden. Durch die Vernetzung der Lernorte und die gezielt angebahnten Wechsel der Repräsentationsebenen werden die Schüler/innen also in die Lage versetzt, eigenständig Lehrplaninhalte im Labor zu erarbeiten. Wie nachhaltig der durch das Durchlaufen einer Station des Schülerlabors erreichbare Lernerfolg ist, wird der Follow-Up Test zeigen, der sich gegenwärtig noch in der Auswertung befindet.

Sämtliche Materialien der Station könnten unter folgender Adresse heruntergeladen werden: www.mathe-labor.de/stationen/mathematik_und_kunst/

Literatur

Bill, M. (1977): die mathematische denkweise in der kunst unserer zeit. In: E. Hüttinger, M. Bill. Zürich. S. 105-116

Roth, J. (2009): Eine geometrische Lernumgebung -Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüche. In: Fritz-Stratmann, A.; Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I − Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Weinheim: Beltz Verlag, S. 186-200

Scherer, P; Rasfeld, P. (2010): Außerschulische Lernorte – Chancen und Möglichkeiten für den Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren 160, S. 4-10

Schmidt,I.; Di Fuccia, D. S.; Ralle, B. (2011): Außerschulische Lernstandorte- Erwartungen, Erfahrungen und Wirksamkeit aus der Sicht von Lehrkräften und Schulleitungen. In MNU 20112 Heft 64/6. S. 362-369

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Automatisierte algebraische Berechnungen an geometrischen Figuren

Einleitung

Die nunmehr ein Vierteljahrhundert währende Geschichte der für den Mathematikunterricht entwickelten interaktiven dynamischen Geometrie-Systeme (IDGS) beginnt 1988 mit der Weltpremiere des **Cabri géomètre** auf der 6. ICME in Budapest. Der durch den damaligen Prototyp Cabri géomètre vorgegebene Standard der Nutzer-Software-Interaktion und der Basisoptionen wurde von vielen nachfolgenden IDGSen mehr oder weniger übernommen.

Bereits 1991 werden Forderungen an die Erweiterung von IDGS aufgestellt, solche sind u. a. die Implementation eines Tabellenkalkulationssystems (TKS), eines Computeralgebrasystems (CAS) und einer Benutzersprache (vgl. Schumann 1991, S. 119/120). Ausgangspunkt dieser Forderungen war einerseits die Minimierung der Anzahl der vom Lerner bzw. von der Lehrkraft zu beherrschenden Computerwerkzeuge und andererseits die Erweiterung der mit einem IDGS zu bearbeitenden Probleme. Heute verfügt **Geogebra** 2.4 über ein zum System kompatibles TKS und CAS, letzteres verständlicherweise mit einem begrenzten Leistungsumfang – im Vergleich mit professionellen mathematischen Assistenzprogrammen. Das sehr differenzierte IDGS **Cinderella** 2 besitzt eine leistungsfähige Benutzersprache. Die inhaltliche Entwicklung von IDGSen ist aber noch längst nicht als abgeschlossen zu betrachten.

Ein herkömmliches IDGS kann im Allgemeinen nicht erklären, wie eine an einer interaktiv konstruierten geometrischen Figur messbare Größe von anderen Größen dieser Figur, z. B. von ihren Parametern abhängt. Kurz und bündig: Ein herkömmliches IDGS kann i. A. nicht zeigen, ***WIE*** WAS von WEM abhängt.

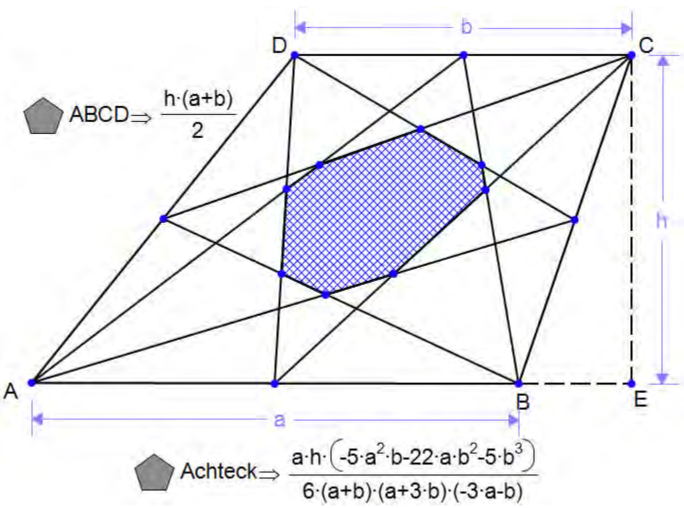


Abb. 1

Mit Methoden der „Automated Deduction in Geometry“ (ADG) ist es möglich, algebraische Berechnungen an solchen Figuren durchführen zu lassen. So kann eine Größe in Abhängigkeit von anderen Größen einer interaktiv konstruierten Figur algebraisch berechnet werden (Beispiel: Abb. 1). Das eröffnet eine neuartige computerunterstützte Verbindung der synthetischen Elementargeometrie zur Algebra. Ein anderer inhaltlicher Entwicklungsaspekt ist die Erweiterung und Vereinfachung der Zirkel- und Linealkonstruktionen. Das wird durch Festlegung von Figureneigenschaften mittels „Zwangsbedingungen“ (sog. constraints) erreicht. Soddy-Konfigurationen (Abb. 2) und auch andere Kreisberührungsfiguren sind recht einfach mit der Zwangsbedingung „tangential“ zu konstruieren. Hingegen sind die betreffenden Zirkel- und Linealkonstruktionen, nicht immer einfach.

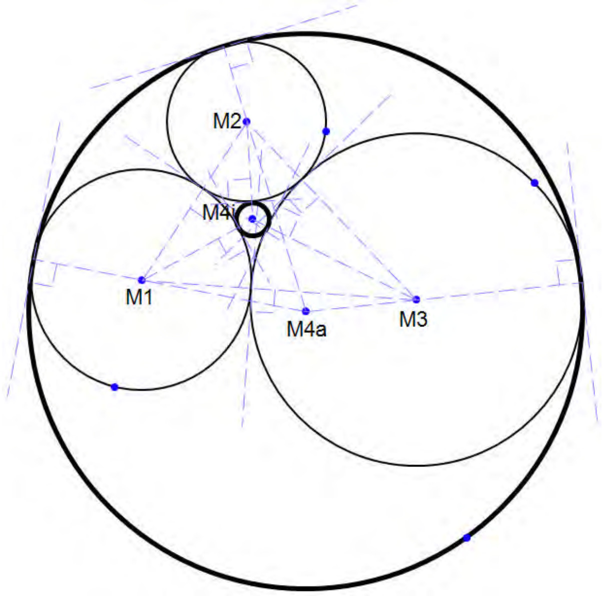


Abb. 2

Das System **Geometry Expressions** erfüllt beide inhaltlichen Erweiterungen (Kurzbezeichnung: „**GX**“, G steht für Geometrie und der Variablenname X für Algebra; Homepage: http://www.geometryexpressions.com/)

Beispiele

Mit dem für den Unterrichtseinsatz entwickelten dynamischen Systems GX der Version 3.1 werden im Folgenden nur drei Beispiele aus verschiedenen Gebieten der ebenen synthetischen Elementargeometrie, nämlich aus der Dreiecks- und Kreisgeometrie vorgestellt. Auf Beispiele aus der analytischen Geometrie muss hier aus Platzgründen verzichtet werden, also auch auf solche zu algebraischen Kurven.

Beispiel 1 (In- und Umkreisradius des Dreiecks)

In- und Umkreis des Dreiecks ABC kann man wie üblich konstruieren oder auch einfach mit den Zwangsbedingungen tangential bzw. oder inzident zu sein (Abb. 3). Um Gesetzmäßigkeiten zu erkennen lassen sich aus den berechneten Termen für r, R und dem Dreiecksinhalt neue Terme, z. B. Quotienten oder Produkte, bilden mit denen weitergerechnet werden kann.

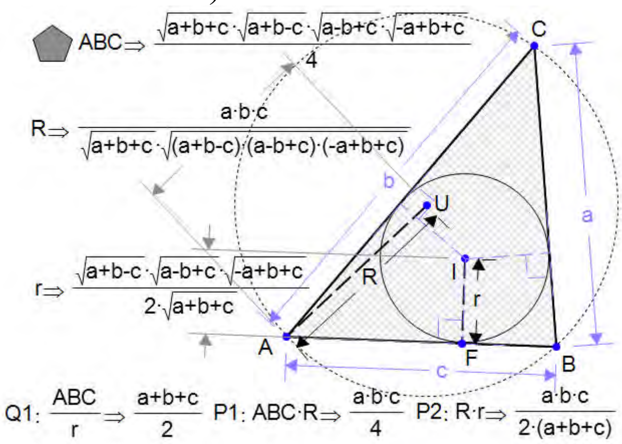


Abb. 3

Beispiel 2 (Figuren aus Ecktransversalen des Dreiecks)
Mit Hilfe des Satzes von Routh kann man Gesetzmäßigkeiten über die Umfänge und Inhalte von Vielecken, speziell von Dreiecken herleiten, welche durch Ecktransversalen des Dreiecks gebildet werden. Die Abbildung 4 zeigt die ersten zwei Figuren, jeweils mit den beiden „äußeren" Dreiecken DEF und UVW, die gebildet werden, wenn man die Schnittpunkte entsprechender Transversalen zu den Teilpunkten der Seiten bei deren Viertelung bzw. Sechstelung verbindet. Mittels unvollständiger Induktion findet man für die Inhalte dieser Dreiecke bei Teilung der Dreiecksseiten in 2k, k=2, 3,...) gleiche Teile: $|DEF| = 4|ABC|(k-1)^2/(2k+1)^2$, $|UVW| = 4|ABC|(k-1)^2/(4k-1)^2$.

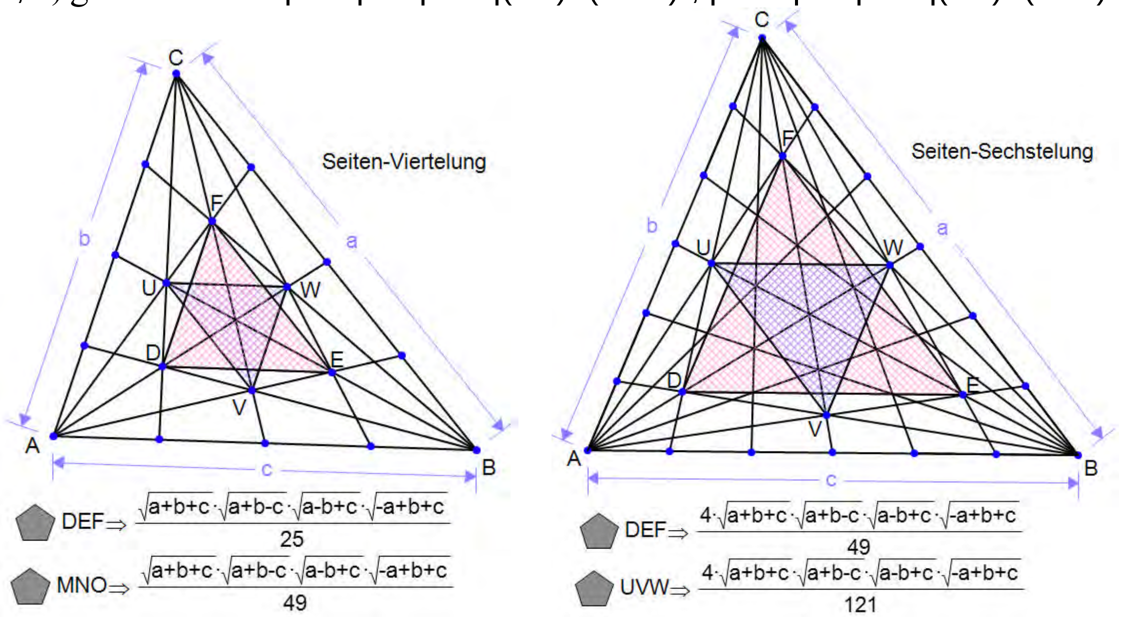


Abb. 4

Anmerkung: Ingmar Lehmann berichtet in den Beiträgen zum Mathematikunterricht 2010 („Entdeckungen im Innern eines Dreiecks – Schnittfiguren mit überraschenden Invarianten", S. 545-548) über Gesetzmäßigkeiten an solchen Vielecken; seine Ergebnisse ließen sich wohl einfacher mit GX gewinnen.

Beispiel 3 (Kreiskette im Arbelos)
Ein effektives Beispiel für die Kombination der Zwangsbedingung „tangential" mit der algebraischen Berechnungskomponente von GX ist die Konstruktion einer Kreiskette in der Arbelos-Figur und die Berechnung der betreffenden Kreisradien aus den gegebenen Ra-

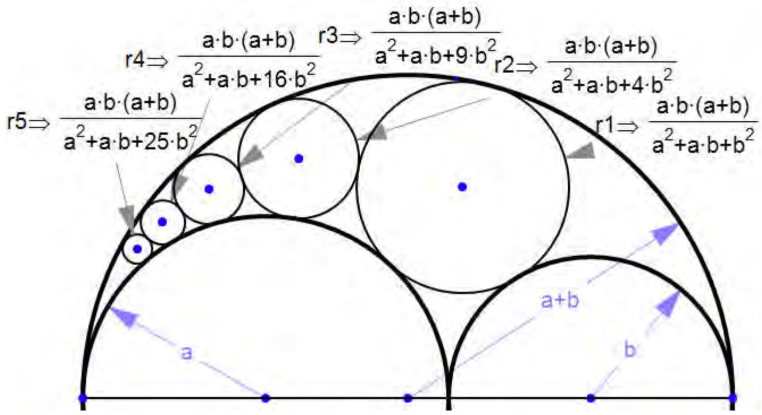


Abb. 5

dien, welche die Arbelos-Figur festlegen (Abb. 5). Leicht erkennt man mittels unvollständiger Induktion, dass

$r_n = ab(a+b)/(a^2+ab+n^2b^2)$, $n = 1, 2,\ldots$ sein muss.

Fazit

Die Bedeutung der automatisierten algebraischen Berechnungen im Verbund mit constraint-basierten Konstruktionen in **Geometry Expressions** (**GX**) gegenüber den Messungen an geometrischen Figuren in herkömmlichen IDGS besteht in der Angabe der Abhängigkeit der zu bestimmenden von den gegebenen Größen. Es eröffnen sich damit neue Möglichkeiten der Entdeckung geometrischer Gesetzmäßigkeiten. Dazu unterstützt das System die Anwendung heuristischer Methoden wie das (unvollständige) Induzieren und Analogisieren. Die Berechnungen führen oft auf relativ komplizierte Terme, die verstanden, interpretiert und verglichen werden müssen Für ein eventuell notwendige weitere Bearbeitung der Terme verfügt GX über Exportmöglichkeiten nach professionellen mathematischen Assistenzprogramme. – Die ausgegebenen Terme stellen aber Behauptungen dar. Wenn man diese nicht nur informell nutzen will, so liegen entsprechende Beweisprobleme vor, die im Sinne der Kognitionspsychologie als Interpolationsprobleme zu bezeichnen sind, denn der Beweis „interpoliert“ zwischen der bekannten Voraussetzung und der bekannten Behauptung.
Eine erfolgreiche Nutzung setzt notwendigerweise die Beantwortung folgender Frage voraus: Welche Größen reichen aus, um die gesuchten Größen zu berechnen? Das System hilft dem Nutzer beim Erkennen von Überbestimmungen; bei Unterbestimmungen verwendet das System automatisch Hilfsvariablen. – Ein Hauptproblem bei der Nutzung von GX ist die Verletzung der Erwartungskonformität, wenn nämlich der unterliegende Berechnungsalgorithmus kein oder nur ein „unbrauchbares“ Ergebnis liefert. Es liegt in der Natur der Sache, dass es keinen universellen algebraischen Berechungsalgorithmus geben kann, welcher quasi für alle geometrischen Figuren funktioniert. Der Einsatz von GX im Unterricht zur freien Exploration ist deshalb nicht ratsam. Es ist eine Vorauswahl von GX-geeigneten Aufgaben zu treffen; dies begünstigt aber den Aufgabenselektionismus. Ein anderes, nicht so gravierendes Problem ist das erwartungswidrige Verhalten von GX im Zugmodus, der sich auf eine dem naiven Nutzer nicht erschließende Weise verhält und auch nicht teilverhältnis-invariant ist.

Literatur

Laborde, J.-M. et al. (1988): Cabri géomètre. Grenoble: Université Joseph Fourier.
Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler+Teubner.
ppt-Präsentation zum Vortrag: http://www.mathe-schumann.de/geometrie-seite/SchumannGDM2013-secure.pdf

Inge SCHWANK, Osnabrück

Wenn Würfelspielen schwer fällt ... zur Bedeutung von Ereignissen für das Rechnenlernen – Vorstellung der Mathematischen Spielwelt ZARAO

1. Ausgangslage

Am Treffpunkt „Mathe-Magie“: Mathematische Frühförderung werden seit gut zehn Jahren Aktionen für Kinder zur Förderung und Forderung ihrer mathematischen Fähigkeiten durchgeführt. Regional am Bekanntesten ist die Zwergen-Mathe-Olympiade, die jährlich für die 3. Klassen der Grundschulen in Stadt und Landkreis Osnabrück angeboten wird (Knochenwefel 2001, Schwank 2008, 2012). In den letzten Jahren hinzugekommen ist ein verstärktes Engagement im Vorschulbereich. Im Spannungsverhältnis des Verhaltens von einerseits mathematisch interessierten und begabten Kindern und andererseits Kindern mit großen Schwierigkeiten beim Einstieg in die Welt des Operierens mit Zahlen konnten Ideen ausgeschärft und Mathematische Spielwelten entwickelt und erprobt werden, die Kinder im Aufbau geeigneter zahlbezogener Vorstellungen sowie bei der Entwicklung mathematisch-logischen Denkens unterstützen (Schwank 2010a,b, 2011a,b,c; Schmidt 2012; Brückel 2013).

2. Funktional-logisches versus prädikativ logisches Denken

Untersuchungen zur Bearbeitung von APM-Aufgaben (Raven 1965) und zum Umgang mit Dynamischen Labyrinthen (Cohors-Fresenborg 1976), die in Deutschland und Indonesien ihren Anfang nahmen, führten zur Unterscheidung zwischen funktional-logischem und prädikativ-logischem Denken (Schwank 2003, 2009). Ursprünglich war die Rede von funktionalen und prädikativen kognitiven Strukturen gewesen (Schwank 1996). Später zeigte sich, dass sich ein Defizit im funktional-logischen Denken nachteilig auf den Einstieg in das inhaltlich gehaltvolle Operieren mit Zahlen auswirken, eine besondere Befähigung zu diesem Denkstil dagegen zu besonders guten Leistungen führen kann (Schwank 2008). Dies war uns wichtige Veranlassung zur Entwicklung mehrerer Mathematischer Spielwelten, in denen Figuren als Handlungsträger eine prominente Rolle spielen (Schwank 2013).

3. Zahlenstrahl und Umgang mit der Zahl Null

In einer gegenstandsbezogenen Welt ist es schwierig, beim Vorwärtszählen die Zahl Null einzuführen (Schwank 2010c). Zunächst gibt es nichts z. B. auf dem Tisch, von was es nichts gibt, ist nicht zu sehen. Dann gibt es z. B.

einen Teller, dann zwei Teller, etc. Passend zu einer gegenstandsbezogenen Anknüpfung werden in Schulbüchern die Zahlen von Eins bis Zehn eingeführt und dazu die Elemente von vorgegebenen Mengen ausgezählt. Manchen Kindern fällt bei einem solchen Durchzählen die Unstimmigkeit auf, dass von eins zu zwei nur *einmal* weitergezählt wird und es dennoch schon *zwei* Dinge sind.

Ein damit einhergehendes Problem zeigt sich beim Verstehen des Zahlenstrahls (Abb. 1, 2). Werden Striche gezählt, ergibt sich eine andere Anzahl als wenn die Aktionen des Vorwärtszählens gezählt werden. Selbst bei Kindern, die an unserer Zwergen-Mathe-Olympiade teilnehmen, werden damit verbundene Probleme sichtbar (Abb. 3).

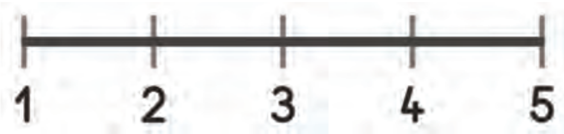


Abb. 1: „Zahlenstrahl“
Striche beginnend beim ersten Strich werden abgezählt.

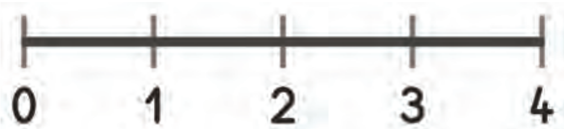


Abb. 2: „Zahlenstrahl“
Vorwärtsschritte beginnend bei Null, dem Start der Ereignisse, werden abgezählt.

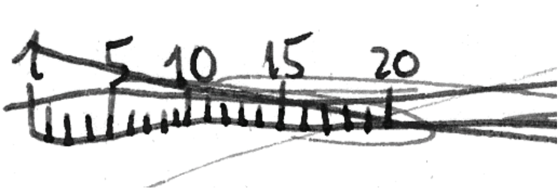


Abb. 3: Versuch der Benutzung eines Zahlenstrahls bei der Zwergen-Mathe-Olympiade für Drittklässler.

Im Vorschulbereich ist dieses Problem bekannt beim Würfelspielen. Einigen Kindern fällt es schwer, sich auf die Bewegungen der Hüpffiguren einzulassen, stattdessen zählen sie eine Anzahl an Feldern ab, die zur gewürfelten Augenzahl passt, dies gerne beginnend bei dem Feld auf dem ihre Hüpffigur aktuell steht. Im Anfangsunterricht gehört zu den bekannten Fehlern bei einfachen Additionsaufgaben, dass einige Kinder die Ausgangszahl mitzählen, also wirf z.B. 6+3 zu 6, 7, 8 und damit ergibt sich 6+3=8.

4. Mathematische Spielwelt ZARAO

ZARAO ist eine Mathematische Spielwelt (Abb. 4), in – der passend zur später zu erlernenden dezimalen Schreibweise von Zahlen – die Zahlen von Null bis Neun eingeführt werden. Dabei geht es eher um „Wie oft?“ statt um „Wie viele?“. Gezählt werden vorrangig die Hüpfbewegungen der Figuren. Manche Figuren bewegen sich auf den treppenförmig auf Seilen angeordneten Kugeln, andere Figuren bewegen sich auf dem davor liegenden

Weg. Dieser Weg enthält keine Markierungen, die zum Zählen Anlass geben könnten. Vielmehr gilt es sich an den Hüpfbewegungen und den dahinter liegenden Seilen / Kugeln zu orientieren. In einer Spielvariante kann ein Würfel benutzt werden, der mit der Hüpfrichtung nach oben / nach unten bzw. weiter weg vom Startplatz / näher zurück zum Startplatz und bestimmten Anzahlen, wie oft gehüpft werden soll, bemalt ist.

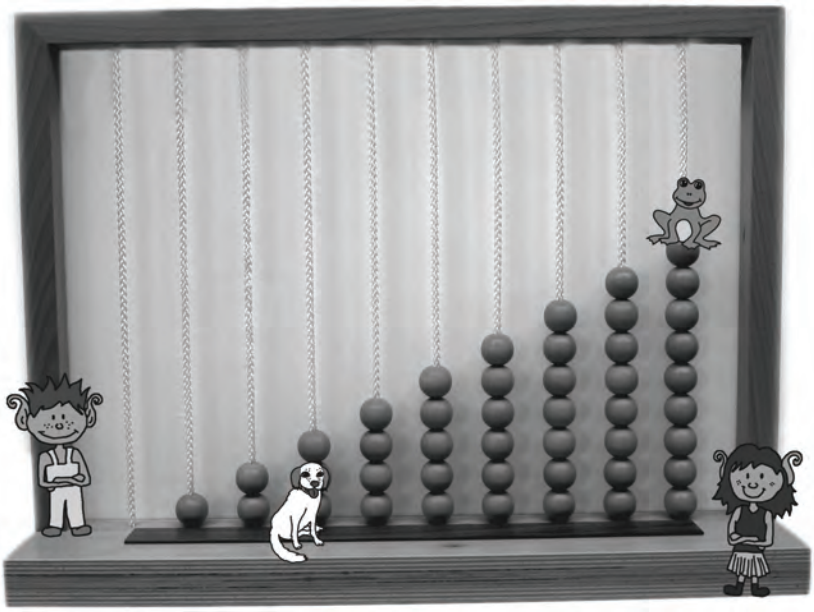


Abb. 4: Mathematische Spielwelt ZARAO. Die Kugeln sind von null bis neun Kugeln angeordnet. Der Frosch ist vom Startplatz aus neunmal gehüpft. Am Startplatz zu sein, bedeutet zunächst, noch keinen Hüpfer gemacht zu haben. Der Hund ist auf dem Weg dreimal vorwärts gehüpft. Eine Frage könnte lauten, wie oft der Frosch zurück hüpfen muss, damit er dem Hund z.B. zuwinken oder zu ihm einen Ball direkt nach unten werfen kann. Die Trolle Hüppi und Hüppa sind derzeit Zuschauer, können sich aber auch mit Hüpfern am Spiel beteiligen.

Wichtig ist, dass den Kindern weniger eine *Objekt-Sicht* als vielmehr eine *Prozess-Sicht* nahegelegt wird. »+1«, »-1« sind Vorgänge. Insofern spielen die Hüpfbewegungen der Spielfiguren die zentrale Rolle. Ausgehend von diesen beiden Aktionen des Vorwärts- und Zurückhüpfens können weitere Additions- und Subtraktionsaufgaben angebahnt werden. Als ikonische Darstellung bietet sich der bekannte Zahlenstrahl an (Schwank in Arbeit).

Literatur

Brückel, L. (2013): Förderung des arithmetischen Denkens von schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern. Münster: WTM.

Cohors-Fresenborg, E. (1976): Dynamische Labyrinthe. Didaktik der Mathematik. 1-21.

Knochenwefel, A. (): Zwergen-Mathe-Olympiade 2001. Umsetzung von Ideen zur mathematischen Frühförderung. Unveröffentlichte Staatsarbeit. Universität Osnabrück.

Raven, J. C. (1965): Advanced progressive matrices. Sets I and II. London: Lewis.

Schmidt, A. (2012): Initiierung eines aktionsgebundenen Zahlverständnisses – Eine empirische Studie mit 6-7-jährigen Vorschulkindern im Treffpunkt „Mathematische Frühförderung“ der Universität Osnabrück. Unveröffentlichte Master-Arbeit. Universität Osnabrück.

Schwank, I. (in Arbeit): ZARAO – Mathematische Spielwelt zur Zahlraumorientierung. Förderung eines ereignisgebundenen Zahlverständnisses für Vorschulkinder mit Nutzung eines Weges als unbeschrifteten Zahlenstrahl. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (in Arbeit): Mathematik von Anfang an richtig! Handreichungen für die Beschäftigung mit Erstarithmetik im Vorschulbereich. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2013): Einblicke in mathematische Spielwelten – Mathematisch-logisches Denken will erlernt werden. 英格博士教授：认识数学的游戏世界 – 数学的逻辑思维是可以学习的。(Deutsch-chinesischer Reader). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2012): Zwergen-Mathe-Olympiade 2001-2012. Aufgabenauswahl. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2011a): Mathematisches Grundverständnis: Denken will erlernt werden. In H. Keller (Hg.): Handbuch der Kleinkindforschung. 4. korrigierte, überarbeitete und erweiterte Auflage. 1154-1174. Bern: Huber.

Schwank, I. (2011b): Erlebniswelt Zahlen – Erstunterricht mit der Rechenwendeltreppe. Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2011c): Arithmetisches Denken pflegen. Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. 795-798. Münster: WTM.

Schwank, I. (2010a): Erlebniswelt Zahlen – Spielereien mit der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2010b): Zahlentheater – Spiele mit Holzfiguren zur Vorbereitung der Schulschrift (mit Anwendung am Zahlenstrahl). Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2010c): Vom Umgang mit dem Nichts als Zahl und anderen Ideen. In S. Kliemann (Hg.): Diagnostizieren und Fördern. 129-141. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Schwank, I. (2009): Mädchen und Jungen fördern – Kognitive Grundlagen kennen. klexer – Magazin für die Grundschule. Nr. 23. Juli 2009. 3-5. Cornelsen.

Schwank, I. (2008): Mathematiklernen: Die verkannte Bedeutung des sprachlosen Denkens. In S. Kliemann (Hg.): Diagnostizieren und Fördern in der Sekundarstufe I – Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen. 174-185. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank: ZDM-Themenheft "Zur Kognitiven Mathematik", Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 35(3), 70-78.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. ZDM-Analysenheft "Deutsche psychologische Forschung in der Mathematikdidaktik". Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 6, 168-183.

Björn SCHWARZ, Philip HERRMANN, Gabriele KAISER, Birgit RICHTER, Jens STRUCKMEIER, Hamburg

Ein Projekt zur Unterstützung angehender Mathematiklehrkräfte in der ersten Phase ihres Studiums – Erste Erfahrungen aus der Begleitung einführender fachmathematischer Lehrveranstaltungen

1. Übersicht über den Projektaufbau

Im Folgenden werden erste Erfahrungen vorgestellt aus dem Projekt „Lehramtsausbildung im Fach Mathematik nachhaltig verbessern“, einem gemeinsamen Teilprojekt der Fachbereiche Mathematik und Erziehungswissenschaft im Rahmen des aus Mitteln des „Qualitätspakts Lehre“ durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten Universitätskollegs der Universität Hamburg. Theoretischer Ausgangspunkt für die zugehörigen Projektaktivitäten ist dabei die langanhaltende empirisch basierte Kritik an der Wirksamkeit der Lehrerausbildung (für einen Überblick Blömeke, 2004), die im Rahmen des Projekts unter einer durchgehend mathematik- und mathematikdidaktikbezogenen Perspektive aufgegriffen wird. Nach wie vor konzeptuell bedeutend ist hierbei insbesondere die Kritik Felix Kleins an der „Doppelten Diskontinuität“ (Klein, 1908) der Mathematiklehrerausbildung, das heißt die Kritik an den fehlenden Bezügen zwischen Schul- und Hochschulmathematik, die einer zielgerichteten universitären Mathematiklehrerausbildung entgegenstehen. Das Projekt ist in diesem theoretischen Kontext dann insbesondere ausgerichtet auf eine Stärkung der erlebten Kompetenz der angehenden Mathematiklehrkräfte. Damit einhergehend wird eine nachhaltige Senkung der Abbruchquote in den ersten Semestern des Mathematiklehramtsstudiums angestrebt, die als diametral gegenläufig zu dem steigenden gesellschaftlichen Bedarf an gut ausgebildeten MINT-Lehrkräften begriffen wird. Das Teilprojekt befindet sich damit in einer Traditionslinie mit verschiedenen anderen Projekten zur Verbesserung der gymnasialen Mathematiklehramtsausbildung, etwa „*Mathematik Neu Denken*“ (Justus-Liebig-Universität Gießen, Universität Siegen, Projektleitung A. Beutelspacher, R. Danckwerts, G. Nickel) oder „*Mathematik besser verstehen*“ (Universität Duisburg-Essen, Projektleitung L. Hefendehl-Hebeker) und „*MINT-Lehrerbildung neu denken, Reform der Studieneingangsphase – Lehramt Mathematik*“ (Freie Universität Berlin, Projektleitung B. Lutz-Westphal). Außerdem greift das Teilprojekt zurück auf Erfahrungen und Vorarbeiten aus TEDS-Telekom (Buchholtz et al., 2011), einer in den Jahren 2008 bis 2012 durch die Deutsche Telekomstiftung geförderten Studie zur Evaluation dieser innovativer Konzepte zur Mathematiklehrerausbildung.

Das Teilprojekt ist grundlegend beschränkt auf die Ausbildung angehender Mathematiklehrerinnen und –lehrer, die eine Lehrbefähigung auch für die Sekundarstufe II anstreben, das heißt auf die Ausbildung zukünftiger Mathematiklehrkräfte in der gymnasialen Oberstufe allgemeinbildender oder berufsbildender Schulen.

2. Ergebnisse der Eingangsbefragung der Studierenden

Eine zentrale erste Maßnahme des Projekts war die Durchführung einer Befragung der Studierenden in den ersten zwei Wochen ihres Studiums (Oktober 2012) anhand eines Fragebogens mit Fragen zur Mathematik, Mathematikdidaktik und mathematikbezogenen beliefs. Ziel dieser Eingangsbefragung war eine Ermittlung der aktuellen Kompetenzen der Studierenden, um anschließend möglichst passgenaue Unterstützungsangebote entwickeln zu können. Daneben sollten die Testergebnisse als Ausgangspunkt für individuelle Einzelgespräche mit den Studierenden dienen, in denen die Studierenden insbesondere eine Gelegenheit zur Reflektion der Erfahrungen aus ihren ersten Studienwochen und eine Rückmeldung ihres aktuellen Leistungsstandes bekommen sollten. Insbesondere einhergehen sollte damit im Sinne der Projektziele auch eine affektiv-motivationale Unterstützung der Studierenden in der reflektiven Bewältigung der ersten Studienerfahrungen und möglicher damit verbundener Erlebnisse von Frustration. Daneben sollten die Gespräche den Studierenden Gelegenheit geben, ihre Wünsche nach Unterstützungsangeboten zu formulieren.

Im Folgenden werden erste Ergebnisse dieser Eingangsbefragung der Studierenden kurz vorgestellt. Die Stichprobe der befragten Studierenden bestand dabei faktisch aus der Gesamtheit der Studienanfängerinnen und –anfänger des Lehramtes für die Mathematik an der Oberstufe in diesem Jahrgang an der Universität Hamburg, genauer aus 51 Mathematiklehramtsstudierenden (27 männlich, 24 weiblich), von denen 41 ein Lehramt an der gymnasialen Oberstufe allgemeinbildender Schulen und 10 ein Lehramt an der Oberstufe berufsbildender Schulen anstrebten. Alle Studierenden nahmen an der ersten mathematischen Vorlesung im Mathematiklehramtsstudium für die Oberstufe, das heißt an der Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie I“, teil.

Ein zentrales Ergebnis der Befragung war die auffallend heterogene Ausgangslange der Studierenden, und zwar in zweifacher Sicht, nämlich sowohl bezogen auf notwendige Grundlagenkenntnisse aus der Schulmathematik als auch bezogen auf bereits bestehende Vorkenntnisse im Bereich der Linearen Algebra.

Im Hinblick auf grundlegende Kenntnisse der Schulmathematik, das heißt einen Wissensbereich, der üblicherweise in universitären Mathematikvorlesungen nicht wiederholt wird, der aber für das erfolgreiche Bestehen der entsprechenden Vorlesungen notwendig ist, zeigten sich dabei in der Stichprobe weit verbreitet gute bis sehr gute Kenntnisse. Dennoch gab es auch eine Gruppe von Studierenden, der bereits Fragen zu elementarer Schulmathematik Schwierigkeiten bereitete. So zeigten sich beispielsweise bei bis zu einem Viertel der befragten Studierenden Probleme im grundlegenden Umgang mit Brüchen. Aufgrund dieser Defizite bestand eines der ersten Projektangebote in einem E-Learning-Angebot zur Wiederholung zentraler schulmathematischer Grundlagen anhand einfacher Übungsaufgaben mit zugehörigen Lösungen. Weiterhin unterschieden sich die Studienanfängerinnen und –anfänger ebenfalls auch deutlich bezüglich ihrer Vorkenntnisse hinsichtlich elementarer vorlesungsrelevanter Konzepte zur Linearen Algebra. So konnte etwa ein Drittel der befragten Studierenden bereits mit Begriffen wie „Basis“ und „Lineare Unabhängigkeit“ umgehen und sogar zwei Drittel der Studierenden hatten zumindest grundlegende Vorstellungen zur graphischen Repräsentation von Vektoren. Es ist jedoch hervorzuheben, dass – im Gegensatz zum vorigen Bereich der Schulmathematik – diese Vorkenntnisse im Bereich der Linearen Algebra nicht notwendigerweise als hilfreich für die Teilnahme an der entsprechenden Vorlesung angesehen werden müssen. Vielmehr könnten diesbezüglich stark verankerte Konzepte aus der Schulmathematik auch hinderlich sein, da sie oftmals im Vergleich zu den allgemeinen Konzepten der Vorlesung eher Spezialfälle darstellen, die gerade umgekehrt das Verständnis allgemeinerer Konzepte behindern. Beispielsweise könnte die starke Verankerung der Vorstellung eines Vektors als „pfeilartiges“ Element des dreidimensionalen Anschauungsraumes den Aufbau einer angemessenen kognitiven Repräsentation des allgemeinen Konzeptes des Vektorraums verhindern (vgl. Malle, 2005).

3. Erste Projekterfahrungen

Abschließend werden im Folgenden noch kurz einige erste Projekterfahrungen und –angebote skizziert. Dabei ist zunächst festzuhalten, dass die Studierenden auch selber erwartungsgemäß den oben erwähnten Bruch zwischen Schulmathematik und Universitätsmathematik als zentrale Erfahrung und Herausforderung ihrer ersten Studienwochen benennen. Es ergibt sich daraus unmittelbar die wichtige Projektzielsetzung, die Studierenden bei der kognitiven wie auch affektiven Bewältigung dieser Erfahrung zu unterstützen. Generell zeigte sich in den ersten Projektwochen die Notwendigkeit, die Studierenden zur Erlangung der Projektziele nicht nur in kognitiver, sondern - im Einklang mit dem Verständnis von Kompetenz (Weinert, 2001) - auch in affektiv-motivationaler Hinsicht zu unterstützen. Beispielsweise scheint eine Unterstützung in der Studienreflexion hilfreich für die Studierenden in der Bewältigung der Studienanforderungen. Konkret kann eine entsprechende Unterstützung dabei zum Beispiel in der Ermutigung zur Einsicht bestehen, dass Irritationen über die ungewohnte Art der universitären Mathematik im Vergleich zur Schulmathematik „normal“ sind. Möglichkeiten, Studierende hinsichtlich dieser affektiv-motivationalen Aspekte in der ersten Phase des Studiums zu unterstützen, werden dabei im Projektkontext insbesondere auch unter der Perspektive der Nachhaltigkeit erprobt. Dabei deutet sich an, dass die Entwicklung von längerfristig nutzbaren Möglichkeiten zur verstärkten Förderung einer generell „bewährten“ Struktur des Lehramtsstudiums, nämlich der Vernetzung der Studierenden untereinander, einen positiven Beitrag zur Kompetenzentwicklung der Studierenden leisten könnte.

Weiterhin eingesetzt wurden im bisherigen Projektverlauf unter anderem eine Internetplattform, in der den Studierenden vorlesungsbegleitende und vorlesungsunabhängige Materialien (zum Beispiel die oben angeführten Aufgaben zur Schulmathematik) zur Verfügung gestellt wurden sowie eine Frage-und-Antwort-Plattform, in der die Studierenden vorlesungsbezogene Fragen formulieren konnten, die dann sowohl von den Studierenden untereinander wie auch von Projektmitarbeitenden beantwortet werden konnten.

Literatur

Blömeke, S. (2004): Empirische Befunde zur Wirksamkeit der Lehrerbildung. In S. Blömeke, P. Reinhold, G. Tulodziecki, J. Wildt (Hrsg.): Handbuch Lehrerbildung. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 59-91.

Buchholtz, N., Blömeke, S., Kaiser, G., König, J., Lehmann, R., Schwarz, B., Suhl, U. (2011): Entwicklung von Professionswissen im Lehramtsstudium: eine Längsschnittstudie an fünf deutschen Universitäten. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser, P. Bender (Hrsg.): Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung – Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik – Festschrift für Hans-Dieter Rinkens. Berlin: Lit Verlag, 201-214.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil 1: Arithmetik, Algebra, Analysis. Leipzig: Teubner.

Malle, G. (2005): Neue Wege in der Vektorgeometrie. In: mathematik lehren, 133, 8-14.

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.): Leistungsmessung in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz Verlag, 17-31.

Ulrich SCHWÄTZER, Dortmund

Zur Relevanz komplementbildender Strategien bei der Subtraktion im Tausenderraum

Für die Subtraktion existieren die Grundvorstellungen Wegnehmen und Ergänzen, letztere verstanden als Komplementbildung zwischen Minuend und Subtrahend. Dazu werden im Folgenden erste ausgewählte Befunde einer Studie zur Subtraktion im dritten Schuljahr dargelegt.

1. Ergänzen versus Komplementbildung

Ein Blick in gängige mathematikdidaktische Hand- und Lehrbücher (z.B. Krauthausen & Scherer, 2007; Padberg & Benz, 2011) zeigt eine kohärente Auffassung, wie die Grundrechenarten – hier im speziellen die Subtraktion – in der Grundschule zu thematisieren sind: Zunächst erfolgt eine breite Beschäftigung mit mentaler Arithmetik, vornehmlich in der Form des halbschriftlichen Rechnens, die verständige Einführung der schriftlichen Verfahren erfolgt erst am Ende des Lernprozesses. Für die Subtraktion gelten dabei fünf halbschriftliche Strategien als Standard, zu denen die Eigenproduktionen der Kinder im Sinne fortschreitender Mathematisierung kategorisiert werden können: Neben den Strategien Schrittweise und Stellenweise die als elaborierter geltenden Strategien Hilfsaufgabe, Vereinfachen (zusammen: Variieren) und Ergänzen. Während Variieren auf der Anwendung des Gesetzes der Konstanz der Differenz beruht, wird Ergänzen zumeist als Auffüllvorgang vom Minuenden zum Subtrahenden aufgefasst und erfolgt als einzige der fünf Strategien additiv. Ergänzen erfordert daher einen Wechsel der Grundvorstellung, derer zwei für die Subtraktion in der didaktischen Literatur existent sind: Wegnehmen (der Subtrahend wird vom Minuenden abgezogen) und Ergänzen (die Spanne zwischen Subtrahend und Minuend wird ermittelt). Damit ist ein Dilemma offenbar: „Ergänzen“ bezeichnet sowohl die in der Regel als schrittweise additives Auffüllen thematisierte halbschriftliche Strategie der Subtraktion, als auch die zugehörige Grundvorstellung, die aber wesentlich mehr umfassen kann, als das additive Auffüllen (s.u.) – zur Unterscheidung und zur inhaltlichen Erweiterung wird daher hier der Begriff Komplementbildung für diese Grundvorstellung verwendet.

Mathematisch betrachtet ist die Subtraktion die inverse Operation der Addition, zusätzlich kann die indirekte inverse Operation jedoch in zwei Formaten dargestellt werden (Campbell, 2008; vgl. Tab. 1). Auch mengentheoretisch lässt sich die Verwendung des Begriffs Komplement legitimieren: Seien A und B Mengen und A Teilmenge von B, dann gilt für das Komple-

Operation	*Beispiel*	*Grundvorstellung*	*Format*	*Kontext*
Direkte Subtraktion	624 – 293 = ___	Wegnehmen	Subtraktion	Wegnehmen
Indirekt mit dem Invers	293 + ___ = 624	Komplement-bildung	Addition	Auffüllen
	624 – ___ = 293		Subtraktion	Entleeren

Tab. 1: Operation und Format

ment $A^C \coloneqq B \backslash A = \{x{\in}B \mid x{\notin}A\}$, der Komplementbildungsprozess als solcher kann hier kontextuell sowohl durch Auffüllen von *A* zu *B* als auch durch Entleeren von *B* zu *A* erfolgen. Festzuhalten bleibt: Die Grundvorstellung Komplementbildung beinhaltet mehr als das schrittweise additive Auffüllen, wenn auch das subtraktive Entleeren bis jetzt wenig gebräuchlich ist.

*MA**		Grundvorstellung	*Wegnehmen*	*Komplementbildung*	
		Format	*Subtraktion*	*Addition*	*Subtraktion*
Strategie		Schrittweise	83-79=?? 83-70=13 13- 9= 4	79+??=83 79+ 1=80 80+ 3=83	83-??=79 83- 3=80 80- 1=79
		Stellenweise	83-79=?? 80-70=10 3- 9= -6	79+??=83 70+10=80 9- 6= 3	83-??=79 80-10=70 3+ 6= 9
	Variieren	Hilfsaufgabe	83-79=?? 83-80= 3 3+ 1= 4	79+??=83 80+ 3=83 3+ 1= 4	83-??=79 83-10=73 73+ 6=79
		Vereinfachen	83-79=?? 84-80= 4	79+??=83 80+ 4=84	83-??=79 84- 4=80

Tab. 2: Strategien in Matrixdarstellung,
*Mentale Arithmetik (nach Selter, Prediger, Nührenbörger & Hussmann 2012, modifiziert und ergänzt um das Subtraktionsformat)

Daher plädieren einige Autoren in aktuellen Texten (Peltenburg et al. 2011; Selter et al. 2012), bei den halbschriftlichen Strategien den Grundvorstellungswechsel und die Strategien als Matrix zu betrachten (vgl. Tab. 2). Auch wenn einige der in dieser Tabelle abgebildeten Strategievarianten, wie die Autoren zu Recht anmerken, sehr ungebräuchlich sind, so sind sie doch denkbar. Die klassische Strategie „Ergänzen“ mit schrittweise additivem Auffüllen deckt zumindest nur eine der acht theoretisch möglichen

Mentale Arithmetik: 707 Dokumente, davon mit mindestens einer Rechnung:							
Komplementbildend: 266				Wegnehmend: 495			
Add.format: 217	Sub.: 60						
Schr 237	St 2	Hi 26	V 3	Schr 272	Ste 162	Hi 102	Ver 192

Tab. 3: Verteilung (Strategien Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe, Vereinfachen)
Die Zahlen dieser Auswertung sind noch vorläufig, können sich ggf. noch leicht ändern.

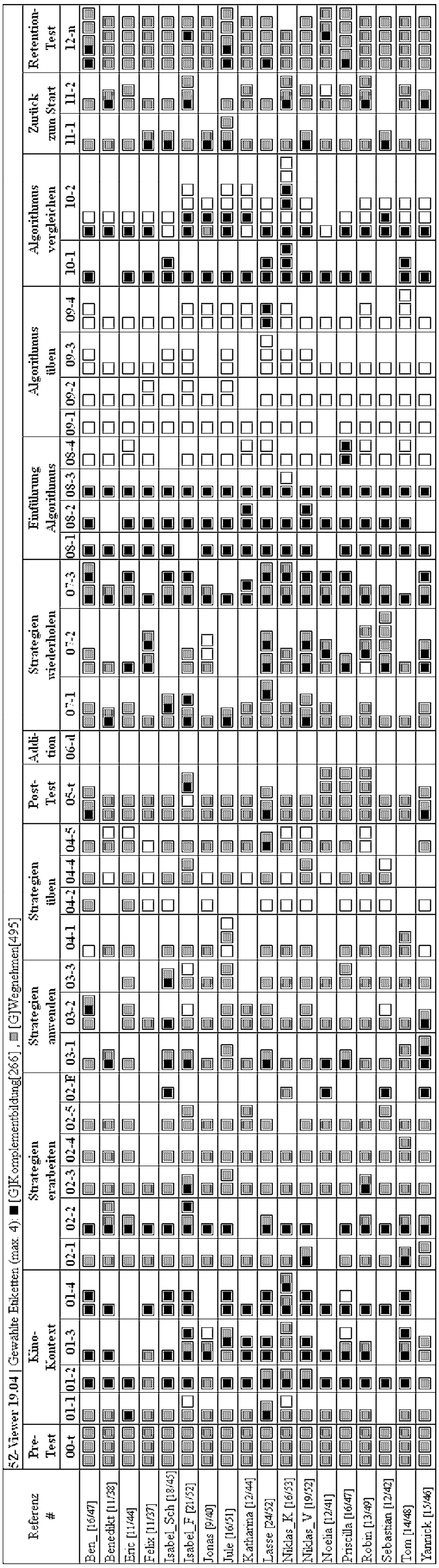


Abb. 1: Dokumente mit K- & W-Strategien

Varianten der Komplementbildung ab – oder anders herum betrachtet: Eine Strategie kann nun in drei Varianten ausgeprägt sein: subtraktiv wegnehmend, additiv und subtraktiv komplementbildend.

2. Studie zur Subtraktion

In einer Langzeitstudie wurden 36 Unterrichtsstunden (der gesamte Unterricht zur Subtraktion im zweiten Halbjahr eines dritten Schuljahres) mit Video aufgezeichnet und teiltranskribiert, und 856 Schülerdokumente aus diesen Stunden eingescannt und anschließend mit einer eigens dafür erstellten Software aufbereitet und analysiert. Die Unterrichtsblöcke folgten dem Prinzip der fortschreitenden Mathematisierung, das strategische Rechnen organisierte die Lehrerin nach der gängigen Lehr- und Handbuchphilosophie, „Ergänzen“ wurde als fünfte Rechenstrategie, nicht als Grundvorstellungswechsel thematisiert.

3. Befunde

In der Analyse soll unter anderem den Fragen nachgegangen werden, ob, wann, wie erfolgreich, und in welchen Varianten die Kinder komplementbildend rechneten, welche Faktoren wie die Aufgabenstellung, der Kontext, das Nutzen des Rechenstrichs, und weitere dabei Einfluss auf das Rechnen in der Grundvorstellung Komplementbildung haben.

Von den insgesamt 856 Schülerdokumenten (vgl. Tab. 3) enthalten 707 mindestens eine Rechnung in mentaler Arithmetik (halbschriftlich oder internalisiert), 273 eine schriftliche Rechnung. Von diesen 707 Dokumenten mit strategischem Rechnen enthalten wiederum

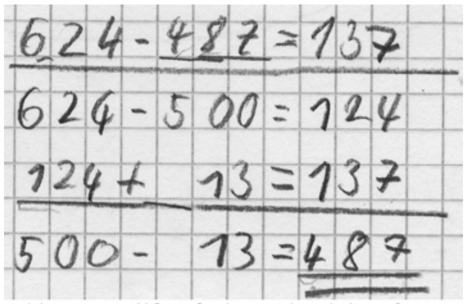


Abb. 2: K-Hilfsaufgabe, Subtraktionsformat

266 mindestens eine Rechnung in der Grundvorstellung Komplementbildung, 495 eine des Wegnehmens. Abb. 1 (Bildschirmfoto der Auswertungssoftware) zeigt dabei die schülerbezogene Verteilung dieser Dokumente über die Unterrichtsblöcke. Hierbei zeigte sich, dass das komplementbildende Rechnen in Clustern auftritt, dieses stark im explorativen Block und vor der Einführung der schriftlichen Subtraktion (hier zur Herleitung benutzt) vertreten ist, aber auch dazwischen und danach seinen Stellenwert behält.

Tabelle 3 zeigt weitere Verteilungen: Das Subtraktionsformat trat dabei von Anfang an auf Schülerdokumenten auf, ohne von außen angeregt worden oder vorher bekannt gewesen zu sein. Neben dem schrittweisen Rechnen (in dem „Ergänzen“ thematisiert wurde, ähnlich stark wie beim Wegnehmen) traten weitere Varianten komplementbildenden Rechnens auf, wenn auch wesentlich seltener als in der Grundvorstellung Wegnehmen.

4. Zur Diskussion

Es zeigen sich Indizien, dass eine Strategie „Ergänzen“ als schrittweises, additives Auffüllen die Strategievielfalt der in dieser Studie stark vertretenen Grundvorstellung Komplementbildung nicht umfasst. In der Zukunft könnte der Grundvorstellungswechsel bewusster angeregt und weitere als nur schrittweise Strategien auch dort thematisiert werden. Das Subtraktionsformat scheint zu existieren, komplementbildendes Rechnen könnte Kindern also in beiden Formaten möglich sein. Auf andere Befunde dieser Studie kann hier aus Platzgründen leider nicht weiter eingegangen werden.

Literatur

Campbell, J. (2008). Subtraction by addition. Memory & Cognition, 36(6), 1094-1102.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). Einführung in die Mathematikdidaktik. München: Elsevier Spektrum Akad. Verl.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung (4. erw., stark überarb. Aufl.). Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Peltenburg, M., Robitzsch, A. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2011). Special education students’ use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100 - A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*, 351–369.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hussmann, S. (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 389-408.

Hans-Dieter SILL, Rostock

Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Primarstufe

1. Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Neben seinem formalen Aspekt, der sich aus der axiomatischen Festlegung als ein Maß für bestimmte Mengen ergibt, hat der Wahrscheinlichkeitsbegriff zahlreiche inhaltliche Aspekte. Dazu gehören:

(1) Prozessaspekte (vgl. Sill 2010)

Wahrscheinlichkeiten bei realen Vorgängen (objektiver Aspekt)

- Wahrscheinlichkeiten geben den Grad der Möglichkeit des Eintretens von Ergebnissen in der Natur oder der Gesellschaft an.
- Wahrscheinlichkeiten werden durch das Denken des Subjektes, das den Vorgang betrachtet oder untersucht, nicht beeinflusst.
- Wahrscheinlichkeiten hängen von den Bedingungen des Vorgangs ab.

Wahrscheinlichkeiten bei Denkvorgängen (subjektiver Aspekt)

- Wahrscheinlichkeiten geben den Grad der Sicherheit der Ergebnisse von Denkvorgängen einer Person an, die als Aussagen (Hypothesen) über einen eingetretenen aber unbekannten Zustand geäußert werden.
- Die Wahrscheinlichkeit der geäußerten Aussagen hängt von den Kenntnissen der Person und den ihr bekannten Informationen über den Zustand ab.
- Die Wahrscheinlichkeit kann sich bei weiteren Informationen, die die Person erhält, ändern.

(2) Darstellungsaspekte

- Die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen können verglichen werden. Ein Ergebnis kann wahrscheinlicher oder genauso wahrscheinlich wie ein anderes sein. (komparativer Aspekt)
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses kann qualitativ in Worten angeben werden (wenig wahrscheinlich, sehr wahrscheinlich u.a.).
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses kann durch seine Chancen als ein Verhältnis von Möglichkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten angeben werden.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses kann als eine Zahl von 0 bis 1 oder in Prozent von 0 % bis 100 % angeben werden.

(3) Verwendungs- und Interpretationsaspekte

Eine Wahrscheinlichkeitsangabe kann verwendet (interpretiert) werden als

- Vorhersage zum künftigen Eintreten eines Ergebnisses,
- Ausdruck des Grades der Erwartung des Eintretens eines Ergebnisses vor dem Ablauf eines Vorgangs,
- Vorhersage der Häufigkeit eines Ergebnisses bei mehrmaligem Ablauf eines Vorgangs unter gleichen Bedingungen,
- Bewertung eines eingetretenen Ergebnisses nach einem Ablauf eines Vorgangs,
- Ausdruck des Grades der Sicherheit einer Person über ein eingetretenes aber unbekanntes Ergebnis.

Zu allen diesen Aspekten mit Ausnahme der Darstellung einer Wahrscheinlichkeit durch eine Zahl sollte und kann in der Primarstufe ein grundlegender Beitrag geleistet werden.

2. Phasen der Entwicklung des Begriffs in der Primarstufe

In der Primarstufe kann die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in folgenden Phasen erfolgen.

Klasse 1/2:

- Bewusstmachen der umgangssprachlichen Verwendungen der Wörter „wahrscheinlich“ und „Wahrscheinlichkeit“ sowie des Prognosecharakters von Wahrscheinlichkeitsaussagen
- Vergleichen der Wahrscheinlichkeiten zweier Ergebnisse, „A ist wahrscheinlicher als B“
- qualitative Schätzung der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch wörtliche Beschreibung und Darstellung auf einer Wahrscheinlichkeitsskala

Klasse 3/4:

- Festigung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch
    - o Ableiten von Prognosen aus statistischen Daten
    - o Aufgaben zum subjektiven Aspekt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (s. o.)
    - o Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten in Spielsituationen
- Betrachtungen zur Gleichwahrscheinlichkeit bei symmetrischen Objekten

- Angabe von Wahrscheinlichkeiten durch Chancen
- Experimente mit kleinen Stichproben zum Erleben der Streuung

Der Unterricht sollte durch Gestaltungsprinzipien gekennzeichnet sein, die in Kurtzmann/Sill 2012 dargelegt sind.

3. Bemerkungen zur aktuellen Situation in der Primarstufe

Seit dem KMK-Beschluss zu den Bildungsstandards für die Primarstufe im Jahre 2004, der Aussagen zu Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält, sind zahlreiche fachdidaktische Publikationen und Unterrichtsmaterialien entstanden. Diese enthalten viele geeignete Vorschläge und Möglichkeiten, den Schülerinnen und Schülern Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu vermitteln. Allerdings treten auch eine Reihe von Problemen auf, von denen im Folgenden einige kurz genannt werden sollen.

Es erfolgt bis auf sehr wenige Ausnahmen eine ausschließliche Beschränkung auf Vorgänge, bei denen Objekte geworfen, Glücksräder gedreht, Karten oder aus Behältern bzw. Beuteln Objekte gezogen werden. Damit im Zusammenhang stehen Probleme im Verständnis des Begriffs „Zufallsexperiment". Dieser Begriff, der kein notwendiger Bestandteil der mathematischen Theorie ist, wird bei seiner Verwendung in Fachbüchern mehr oder weniger explizit auf der theoretischen Ebene angesiedelt und damit als ein Modell für reale Vorgänge, also keineswegs nur für Glückspielsituationen, angesehen. Mit dieser Beschränkung wird den Schülerinnen und Schülern ein sehr einseitiges Bild von der Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vermittelt. Dabei besitzen die Begriffe „wahrscheinlich" und „Wahrscheinlichkeit" in Verbindung mit weiteren konkretisierenden Zusätzen ein sehr breites Anwendungsfeld im Alltag der Schülerinnen und Schüler. Es können damit z. B. sowohl Alltagserfahrungen als auch Kenntnisse zu naturwissenschaftlichen Zusammenhängen in verständlicher und geeigneter Weise ausgedrückt werden. Es können Wahrscheinlichkeitsaussagen aus statistischen Daten gewonnen oder Aussagen zu Ergebnissen von Vorgängen, die die eigene Person betreffen, stochastisch formuliert werden.

In vielen Fällen wird versucht, bereits Begrifflichkeiten und Probleme zu vermitteln bzw. zu diskutieren, die für Grundschüler noch gar nicht fassbar sind und auch die Lehrkräfte meist fachlich überfordern. Dabei treten dann auch gelegentlich fachliche Unkorrektheiten auf. Beispiele dafür sind:

- Die Wörter „sicher" und „unmöglich", die als Adverbien nicht zu mathematischen Fachsprache gehören, stehen oft viel zu sehr im Mittelpunkt und werden teilweise mit den Begriffen „wahr" und „falsch" gleichgesetzt.

- Es wird nicht oder nicht deutlich zwischen den Begriffen Chancen und Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unterschieden. Die Chancen (Odds) eines Ereignisses sind in der Mathematik das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses zur Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Der Wertebereich von Chancen ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Damit können Chancen nicht auf einer Wahrscheinlichkeitsskala veranschaulicht werden. Die Angabe von Chancen bietet im Falle einer diskreten Gleichverteilung eine geeignete Möglichkeit zur Quantifizierung einer Wahrscheinlichkeitsaussage.
- Es wird teilweise versucht, den Unterschied zwischen Ergebnissen und Ereignissen, die Unabhängigkeit von Ereignissen und auch die relative Häufigkeit zu thematisieren.
- Es wird versucht, die Gleichverteilung der Augenzahlen beim Würfeln oder das Gesetz der großen Zahlen experimentell nachzuweisen.
- Die zahlreichen Aspekte des Zufallsbegriffs werden selten und dann nur sehr einseitig betrachtet.
- Fast generell wird das Problem der Augensumme beim Werfen mit zwei Würfeln behandelt, das im Falle der Nichtunterscheidbarkeit der Würfel selbst Mathematikern Schwierigkeiten bereitet hat und sinnvollerweise als zweistufiger Vorgang unter Verwendung einer Zufallsgröße modelliert werden sollte.

4. Zusammenfassung

Die Bildungsstandards sind in sehr kurzer Zeit von einer kleinen Gruppe von Vertretern der Bundesländer entwickelt worden. Eine gründliche fachdidaktische Diskussion in Expertenkreisen oder gar eine unterrichtliche Erprobung neuer Inhalte fand nicht statt. Leider ist ein Aufgreifen vieler vorher entwickelter und erprobter Vorschläge in der Didaktik nicht zu erkennen. Analog zu den Elementen der Geometrie, die ebenfalls einen längeren Prozess ihrer Implementierung in der Primarstufe durchlaufen haben, sollte nun nach fast zehnjähriger Praxis eine Bilanzierung und Weiterentwicklung der Bildungsstandards zur Stochastik erfolgen.

Literatur

Kurtzmann, G., Sill, H.-D. (2012): Vorschläge zu Zielen und Inhalten stochastischer Bildung in der Primarstufe sowie in der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag

Sill, H. D. (2010): Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen. In: Stochastik in der Schule 30 2010 (Heft 3), S. 2-13.

Hans-Stefan SILLER, Regina BRUDER, Tina HASCHER, Torsten LINNEMANN, Jan STEINFELD, Martin SCHODL

Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II

Inhalts- und handlungsbezogene Kompetenzen sind, insbesondere vor dem Hintergrund von PISA und TIMSS ein zentraler Aspekt der fachdidaktischen Diskussion. Konsequenterweise soll, neben der Aufnahme in die Curricula, die Kompetenzorientierung auch in Prüfungssituationen soweit möglich berücksichtigt werden. Das Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung an österreichischen Schulen beruht auf inhaltlichen Kompetenzen – sog. Grundkompetenzen (vgl. bifie, 2012). Um eine Vergleichbarkeit der Prüfungsaufgaben in der Matura zu ermöglichen, ist ein Stufenmodell zu deren Einordnung erforderlich. Der aktuelle Stand eines neu entwickelten Stufenmodells insbesondere für handlungsbezogene Kompetenzen wird im Folgenden vor dem Hintergrund der standardisierten schriftlichen kompetenzorientierten Reifeprüfung in Österreich vorgestellt.

1. Das schriftliche Abitur

Der Ausgangspunkt – wie es inzwischen auch in anderen (wesentlich größeren) zentralen Überprüfungen üblich ist - ist das Individuum und dessen Rolle in einer hochdifferenzierten, arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft. Für die letzte Abschlussprüfung an Gymnasien wurde ein bildungstheoretischer Zugang gewählt (vgl. Meyer, 2012). Im Zentrum steht das Modell der „Höheren Allgemeinbildung“ nach Fischer (1999).

Große Bedeutung kommt dabei dem dialektischen Verhältnis von Verbindlichkeit und Freiraum für die Unterrichtsgestaltung zu. Inhaltliche Freiräume müssen eingeräumt werden, um auf der anderen Seite die Verbindlichkeit anderer Inhalte (ver-)stärken zu können.

2. Kompetenzorientierung und Prüfungen

Lehren, Lernen und Prüfen sind individuelle Prozesse, die eng miteinander verwoben sind: in Prüfungen soll gezeigt werden, was gelernt wurde und ob die (vorgegebenen) Lehrziele damit erreicht sind. Als prüfbar in einem Test erscheint jeweils der Performanzanteil einer Kompetenz. Dazu wurde eine Auflistung von sog. Grundkompetenzen (vgl. bifie, 2012) realisiert. Neben gültigen Curricula, Grundkompetenzkatalogen, fachlichen und/oder fachdidaktischen Aspekten müssen auch pädagogisch-didaktische Gegebenheiten berücksichtigt werden. Wünschenswert wäre hier eine „symbiotische Implementation“ (vgl. Meyer, 2012). Da dies aufgrund zeitlicher

Vorgaben (in der Regel) nicht leistbar sein wird, kommt der theoretischen Konstruktion eines Stufenmodells eine entscheidende Bedeutung zu (vgl. Meyer, 2007, S. 5): Ein Stufenmodell erfasst, wie eine voll entfaltete Kompetenz strukturiert ist bzw. aus welchen Teilen sie sich zusammensetzt. Ein Prozessmodell beschreibt, in welcher Reihenfolge Kompetenzen im Unterrichtsprozess auf- und ausgebaut werden können."

Für den Unterrichtsfortschritt ist dieses „Hilfsmittel" u.E. insbesondere, um den Lernprozess bei Schülerinnen und Schülern konsequent zu begleiten, notwendig.

3. Das Kompetenzstufenmodell

Das Denken in (Kompetenz-)Stufen ist im schulischen Alltag nichts ungewöhnliches (vgl. Kiper et al, 2003 oder Piaget, 1978). Für das vorliegende Kompetenzstufenmodell (vgl. Abb. 1) haben wir uns in der Entwicklung auf vier Stufen verständigt, die in analoger Weise zu Meyer (2007) identifizierbar sind:

- Ausführen einer Handlung durch unreflektiertes Nachvollziehen (Stufe 1)
- Ausführen einer Handlung nach Vorgabe (Stufe 2)
- Ausführen einer Handlung nach Einsicht (Stufe 3)
- Selbstständige Prozesssteuerung (Stufe 4)

Tätigkeitstheoretischer Hintergrund der fachdidaktischen Interpretation solcher zunächst pragmatisch gesetzter Stufen ist die jeweils in der aktuellen Lern- bzw. Prüfungsanforderung erfolgende Ausbildung von Orientierungsgrundlagen für Lösungshandlungen auf unterschiedlichem Niveau, vgl. u.a. Lompscher et al (1985). Stufe I korrespondiert dann mit einer sehr elementaren bzw. schematischen Musterorientierung, Stufe III erreicht eine sogenannte Feldorientierung, die sich z.B. auch darin zeigt, dass die Lernenden in der Lage sind eigene Beispiele zu generieren. Die Komplexität der Anforderungen (Mehrschrittigkeit) unterscheidet insbesondere Stufe II von Stufe I. Mit dem tätigkeitstheoretischen Ansatz wird deutlich, dass ein höheres Orientierungslevel (Stufe) nicht erreichen werden kann ohne das vorherige Level zu beherrschen. Dennoch kann von einer konkreten Aufgabenbearbeitung nicht auf das jeweilige Orientierungslevel bei einem Individuum geschlossen werden, da z.B. Automatisierungsprozesse aus Training ermöglichen, schwierig erscheinende Aufgaben auf dem Level von Musterorientierung zu bearbeiten. Hier wächst der Anspruch an geeignete Prüfungsaufgaben.

Das Kompetenzstufenmodell liegt bislang in einem Entwurf vor. Nach den behördlichen Vorgaben wurden die Kompetenzen *Operieren & Technologieeinsatz, Argumentieren & Kommunizieren, Interpretieren & Dokumentieren* und schließlich *Modellieren & Transferieren berücksichtigt.*

Bei *Argumentieren & Kommunizieren* wurden die Arbeiten von Bruder und Pinkernell (2011) angelehnt. Bei *Modellieren und Transferieren* diente zum Beispiel Bruder (2012), Böhm (im Druck) bzw. Götz und Siller (eingereicht). *Interpretieren & Dokumentieren* wurde durch Differenzenbildung aus den anderen Kompetenzen entwickelt.

Neu musste vor allem *Operieren & Technologieeinsatz* gedacht werden. Wie beispielsweise Drüke-Noe (2012) zeigt, werden bereits in frühen Klassenstufen komplexe Algorithmen verlangt. Für eine hohe Kompetenz ist es aber nicht nur notwendig, komplexe Algorithmen einzusetzen, sondern auch, sinnvolle Einsatzgebiete zu finden und gegebenenfalls verschiedene Algorithmen zu kombinieren. Beispielsweise kann es in einer Aufgabe zur Vektorgeometrie erforderlich sein, Algorithmen zum Schneiden von Geraden, Aufstellen von Kreisgleichungen und Lösen von quadratischen Gleichungen zu kombinieren, um zu einer Lösung zu kommen. Die Stufung zu *Operieren und Technologieeinsatz* ergibt sich damit wie folgt:

Stufe 1: Abarbeiten/Ausführen einer gegebenen bzw. vertrauten Vorschrift.

Stufe 2: Abarbeiten/Ausführen mehrschrittiger Vorschriften mit Rechnereinsatz und Nutzung von Kontrollmöglichkeiten

Stufe 3: Erkennen, ob eine bestimmte Vorschrift auf eine gegebene Situation passt, die Vorschrift passend machen und ausführen.

Stufe 4: Makros (aggregierte mathematische Vorschriften) entwickeln/bilden und bereits verfügbare Makros neu zusammenführen

4. Zusammenfassung bzw. Ausblick – oder doch ein Fazit

Durch die Einführung kompetenzorientierter Prüfungen, wird der Kompetenzorientierung des (Mathematik-)Unterrichts in logischer Konsequenz Rechnung getragen. Das darf allerdings keinesfalls zum Trugschluss führen, dass die Einteilung einer Kompetenz in mehrere Stufen dem schrittweisen Kompetenzerwerb gleichgesetzt wird.

Durch den Einsatz eines Kompetenzstufenmodells wird Lehrenden ein theoretisches Konstrukt zur Verfügung gestellt, auf Basis dessen sie die Handlungs- bzw. Reflexionskompetenz bei Lernenden analysieren können; zudem ergibt sich damit auch ein Werkzeug, dass sich für die valide Auswahl von Prüfungsaufgaben als sehr geeignet erweisen kann.

Der Mathematikunterricht soll daher so ausgerichtet werden, dass der Erwerb des Einsatz von verständigen Wissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten die mit dem erworbenen Wissen vernetzt werden in den Mittelpunkt gerückt werden.

Literatur

BIFIE (Hrsg.) (2012). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1442 [12.02.2013].

BIFIE (Hrsg.) (2013). Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung Reife- und Diplomprüfung: Grundlagen – Entwicklung –Implementierung, Jan. 2013

Bruder, R. (2012). Konsequenzen aus den Kompetenzen? Vortrag auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik am 06.03.2012 in Weingarten. http://www.math-learning.com/files/120306wg.pdf, 1.10.2012.

Böhm, U. (im Druck). Modellierungskompetenzen langfristige und kumulativ fördern – Tätigkeitstheoretische Analyse des mathematischen Modellierens als Lerngegenstand in der Sekundarstufe I. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Bruder, R & Pinkernell, G. (2011): Die richtigen Argumente finden. In: mathematik lehren 168, Friedrich Verlag, S. 2-7

Drüke-Noe (2012): Wer Kalküle kann, schafft eine Klassenarbeit. Stimmt das? Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM.

Fischer, R. (1999). Mathematik anthropologisch: Materialisierung und Systemhaftigkeit. In Dressel, G. & Rathmayr, B. (Hrsg.). Mensch – Gesellschaft – Wissenschaft. Versuch einer reflexiven historischen Anthropologie. Innsbruck: Studia. S. 153–168.

Götz, S.; Siller, H.-St. (eingereicht). Was heißt Kompetenzorientierung nach acht bzw. zwölf Jahren Mathematikunterricht. Journal für Lehrerinnen- und Lehrerbildung. Wien: Facultas.

Kiper, H.; Meyer, H.; Mischke, W.; Wester, F. (2004). Qualitätsentwicklung in Unterricht und Schule. Das Oldenburger Konzept. Oldenburg: diz.

Lompscher, J. et al. (1985). Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit. Berlin: Volk u. Wissen.

Meyer, H. (2007). Leitfaden Unterrichtsvorbereitung. Berlin: Cornelsen Scriptor

Meyer, H. (2012). Kompetenzorientierung allein macht noch keinen guten Unterricht. Handout zum Vortrag auf der didacta 2012.

Piaget, J. (1978): Das Weltbild des Kindes; München: dtv.

Kerstin SITTER, Landau

Geometrische Körper an inner- und außerschulischen Lernorten

Die Bedeutung des Geometrieunterrichts in der Grundschule ist heute unumstritten. Dies zeigt sich zum einen in den Bildungsstandards und zum anderen wurde das Thema in den letzten Jahren in zahlreichen Veröffentlichungen und Tagungen immer wieder betont und durch Ansätze in Schulbüchern an Lehrer/innen herangetragen (vgl. Franke, 2007, S. 5-15). Obwohl unsere Umwelt zahlreiche Gelegenheiten bietet, geometrische Körper zu entdecken und zu erkunden, werden geometrische Begriffe und Verfahren häufig ohne direkten Bezug zur realen Welt gebildet (vgl. u.a. Weigand & Wörler, 2010, S. 49).

Theoretischer Hintergrund

Das Nutzen und Einbinden außerschulischer Lernorte in den Unterricht hat in den letzten Jahren stark zugenommen. Der Reiz des besonderen Ortes, das forschende und selbstgesteuerte Lernen hat für Schüler/innen einen besonders positiven Effekt hinsichtlich Motivation und Lernerfolg (vgl. Scherer & Rasfeld, 2010, S. 4). Studien belegen jedoch, dass diese Effekte nur kurzfristig erhalten bleiben (vgl. u.a. Scharfenberg, 2005; Guderian, 2007). Die Inhalte an außerschulischen Lernorten sind meist nicht lehrplankompatibel und erfahren oft keine Vor- und Nachbereitung im Unterricht. Eine adäquate Vernetzung schulischen und außerschulischen Lernens fehlt. Zudem beschränken sich die Studien meist auf Schüler/innen der Sekundarstufe. Durch eine bessere Vernetzung schulischen und außerschulischen Lernens soll in unserem Projekt eine Optimierung der Nachhaltigkeit des Lernerfolgs sowie der Interessenentwicklung zu geometrischen Körpern bei Grundschulkindern erreicht werden. Eine erste Grundlage dafür sehen wir im Protokollieren in der außerschulischen Lernumgebung.

Der Begriff „Protokollieren“ bzw. “Protokoll“ taucht so im Primarbereich nicht bzw. nur bedingt auf. Hier stößt man vermehrt auf Bezeichnungen wie Lerntagebuch (Bartnitzky, 2004), Reisetagebuch (Gallin & Ruf, 1993 & 1998) oder ähnliches. In der Regel handelt es sich hierbei um Hefte, in die die Schüler/innen schriftliche Eintragungen sowohl zu inhaltlichen Fragestellungen des Unterrichts (auf der kognitiven Ebene) als auch zur Reflexion ihres eigenen Lernweges sowie -verhaltens (auf der metakognitiven Ebene) vornehmen (vgl. u.a. Bertold et al., 2003; Renkl et al., 2004; Rathgeb-Schnierer & Schütte, 2009; Gallin & Ruf, 1993 & 1998). Unter Protokollierfähigkeit verstehen wir in unserem Projekt die Kompetenz, das Wesentliche eines Erkenntnisprozesses zu erfassen sowie geeignet festzuhalten und darzustellen. Neben stichwortartig aufgeschriebenen Erkenntnissen können auch ausführliche Texte, Skizzen und tabellenartige Darstellungen enthalten sein. Die Aufzeichnungen haben dabei nicht nur reproduzierenden Charakter sondern erfordern auch produktive Fähigkeiten.

Lernpsychologische Studien bestätigen, dass das Schreiben zu einem besseren Erinnern führt (vgl. u.a. Anderson, 2001 zit. nach Haug, 2012, S. 50, 166). Außerdem werden durch das Verschriftlichen die neuen Lerninhalte mit vorhandenen Wissensstrukturen verknüpft und der Prozess des Denkens verlangsamt, was wiederum die Bewusstheit und die Verantwortung für das Geschriebene erhöht. Für das Protokollieren kann weiterhin angenommen werden, dass die Schüler/innen beim Verschriftlichen eigener Lernprozesse neue Lerninhalte tiefer durchdringen sowie einen besseren bzw. differenzierteren Blick auf wichtige mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge erreichen.

Auf die Entwicklung der Protokollierfähigkeit gehen allerdings die vorhandenen Studien nicht ein. Zudem gibt es bisher kein Ergebungsinstrument, das die Protokollierfähigkeit von Schüler/innen misst.

Zielsetzung und Fragestellung

Aus den theoretischen Überlegungen heraus ergeben sich folgende Zielsetzungen für die Studie:

Es soll untersucht werden, wie sich die Einbeziehung außerschulischer Lernorte und der Einsatz von Protokollen auf die Entwicklung nachhaltigen geometrischen Wissens von Viertklässlern auswirken.

Ein weiterer Schwerpunkt wird auf die Erfassung von grundlegenden Protokollierfähigkeiten bei Grundschulkindern sowie auf die Entwicklung eines geeigneten Messinstrumentes für Protokollierfähigkeit gelegt.

Design und Durchführung

Um die Wirksamkeit außerschulischer Lernumgebungen, die mit dem schulischen Lernen eng verknüpft sind, mit einem konventionellen Geometrieunterricht vergleichen zu können, wurde ein Treatment-Kontrollgruppen-Design (N=120) gewählt.

Die Experimentalgruppe 1 (EG 1) besuchte stets einen außerschulischen Lernort, der aus Lernumgebungen bestand, die das Kennenlernen geometrischer Körper und ihrer Eigenschaften in der Umwelt unterstützten. Als Lernort wurde die nahe Umgebung der Schule ausgewählt, die anhand gezielter Entdeckungen und Protokollen selbstständig erforscht wurde. Die Experimentalgruppe 2 (EG 2) blieb hingegen im Klassenzimmer und erweiterte hier ihr geometrisches Wissen und Können zu Körpern. Der Zugang zu geometrischen Körpern erfolgte ohne direkten Umweltbezug anhand von Abbildungen (in Anlehnung an Schulbücher) an Stationen im Klassenzimmer. Die einzelnen Arbeitsschritte waren allerdings identisch zur EG 1. Auch hier wurde protokolliert. Die Kontrollgruppe (KG) erweiterte ihr geometrisches Wissen und Können zu Körpern nach dem klassischen Unterrichtsstil (ohne außerschulischen Lernort, ohne Protokollieren). Inhaltlich sowie zeitlich war der Unterricht der KG an die EG angepasst.

Für die Experimentalgruppen wurde in Anlehnung an das Vier-Phasen-Modell nach Bezold (2009, S. 182 ff.) eine Unterrichtskonzeption gewählt, die sowohl Gleichaltrige voneinander lernen lässt als auch die Individualität berücksichtigt.

Zu Beginn fand stets eine Reflexionsphase zur vorangegangenen Stunde statt. Das hatte den Vorteil, dass die Reflexion auf der Basis der Protokolle der Kinder stattfinden konnte und somit zielgerichteter war. Dieser Phase folgte eine Initiierungsphase. Der neue „Forscherauftrag“ wurde vorgestellt, die Gruppen eingeteilt und weitere organisatorische Dinge besprochen. Anschließend ging es an das gemeinsame Erkunden geometrischer Körper. Während die EG 1 einen außerschulischen Lernort aufsuchte, geometrische Körper an und in Gebäuden entdeckte sowie erste Entdeckungen mit Hilfe des Skizzenblocks festhielt, blieb die EG 2 im Klassenzimmer und erweiterte ihr Wissen und Können zu geometrischen Körpern anhand von Abbildungen an Stationen. Zurück im Klassenzimmer bzw. am Sitzplatz stellte jedes Kind (EG 1 & EG 2) seine Entdeckungen im „Forscherheft“ dar.

Datenerhebung

Um sowohl fachliche Fähigkeiten als auch Fähigkeiten im Protokollieren erfassen zu können, wurde ein Pre-Post-Follow-up-Design gewählt. Zur Erfassung fachlicher Fähigkeiten zu geometrischen Körpern wurde ein Test herangezogen. Für das Erfassen der Protokollierfähigkeit wurde den Kindern ein kurzes Video gezeigt, das einen außerschulischen Lernort repräsentiert. Die Schüler/innen wurden aufgefordert, das Gesehene so zu protokollieren, dass sich ein anderes Kind die dargestellten Inhalte gut vorstellen kann.

Erste Gedanken zur Auswertung

Um mögliche Kategorien zur Auswertung der Videoprotokolle zu entwickeln, haben wir uns für eine induktive Vorgehensweise unter der Perspektive der Reproduzierbarkeit entschieden. In Anlehnung an einschlägige Literatur werden direkt aus dem Datenmaterial mögliche Kategorien abgeleitet, die die Protokollierfähigkeit von Schüler/innen abbilden. Nach bisherigen Erkenntnissen könnten die Protokolle nach verschiedenen Kriterien ausgewertet werden, z.B. der Vollständigkeit der protokollierten Objekte, der Darstellungsform oder auch der Qualität der Darstellungsform. Ein entsprechendes Auswertungssystem ist in Arbeit.

Die Auswertung fachlicher Fähigkeiten zu geometrischen Körpern steht noch aus.

Literatur

Bartnitzky, J. (2004). *Einsatz eines Lerntagebuchs in der Grundschule zur Förderung der Lern- und Leistungsmotivation: Eine Interventionsstudie.* Dissertation, Universität Dortmund.

Bertold, K./Nückles, M./Renkl, A. (2003). Fostering the application of learning strategie in writing learning protocols. In F. Schmalhofer/R. Young (Hrsg.). *Proceedings of the European Cognitive Science Conference 2003* (S. 373). Mahwah: Erlbaum.

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hamburg: Dr. Kovac.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (2. Auflage). Heidelberg: Spektrum.

Gallin, P./Ruf, U. (1993). Sprache und Mathematik in der Schule: Ein Bericht aus der Praxis. *Journal für Mathematikdidaktik*, 14, S. 3-33.

Gallin, P./Ruf, U. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik* (Band 1 und 2). Seelze-Velber: Kallmeyer.

Guderian, P. (2007). *Wirksamkeitsanalyse außerschulischer Lernorte: Der Einfluss mehrmaliger Besuche eines Schülerlabors auf die Entwicklung des Interesses an Physik.* Dissertation, Humboldt-Universität zu Berlin.

Haug, R. (2012). *Problemlösen lernen mit digitalen Medien: Förderung grundlegender Problemlösetechniken durch den Einsatz dynamischer Werkzeuge.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Rathgeb-Schnierer, E./Schütte, S. (Hrsg.). (2009). *Lerntagebücher im Mathematikunterricht: Wie Kinder in der Grundschule auf eigenen Wegen lernen.* München: Oldenbourg.

Renkl, A./Nückles, M./Schwonke, R./Bertold, K./Hauser, S. (2004). Lerntagebücher als Medium selbstgesteuerten Lernens: Theoretischer Hintergrund, empirische Befunde, praktische Entwicklungen. In A. Frey/R. Jäger/M. Wosnitza (Hrsg.). *Lernprozesse, Lernumgebung und Lerndiagnostik*, (S. 101-116). Landau: VEP.

Scharfenberg, F-J. (2005). *Experimenteller Biologieunterricht zu Aspekten der Gentechnik im Lernort Labor: empirische Untersuchung zu Akzeptanz, Wissenserwerb und Interesse.* Dissertation, Universität Bayreuth.

Scherer, P./Rasfeld, P. (2010). Außerschulische Lernorte: Chancen und Möglichkeiten für den Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, Heft 160, S. 4-10.

Weigand, H-G./Wörler, J. (2010). Die Stadt mit „geometrischen“ Augen sehen. *mathematik lehren*, Heft 160, S. 49-52.

Susanne SPIES, Siegen

Zum Bildungswert schöner Mathematik

„Dieser rein spekulative Aspekt des menschlichen Geistes, der in der Mathematik vornehmlich nach Gesetzmäßigkeiten und innermathematischer Ästhetik Ausschau hält […] darf bei den Überlegungen zur Bildung junger Menschen nicht vergessen werden.“ (Graumann 1993, S. 196)

Mit Blick auf die mathematische Wissenschaftspraxis ist diese Einschätzung Graumanns gut nachvollziehbar, sind doch ästhetische Werturteile über Beweise und Theoreme ein häufig anzutreffendes Phänomen. Dabei zeichnen sich Schönheitserfahrungen mit Mathematik durch eine spezifische Verbindung objektimmanenter Eigenschaften mit epistemischen und emotionalen Erlebnissen aus. Desweiteren stellt sich der Vergleich von Mathematik und Kunst als umfassende und tragfähige Beschreibung der Wissenschaftspraxis heraus. (Vgl. Spies, o.J.)

Im Folgenden sollen einzelne sich aus der mathematikästhetischen Perspektive ergebende Facetten der Mathematik im mathematikdidaktischen Bildungsdiskurs verortet werden, um so eine Antwort auf die Frage nach dem Potential des ästhetischen Charakters der Mathematik bezüglich des (Allgemein-)Bildungswerts anzunähern. Dazu werden zunächst jeweils exemplarisch Anknüpfungspunkte an einzelne Konzeptionen herausgestellt. In einem zweiten Schritt werden tatsächlich genutzte Chancen zusammengefasst und potentiell mögliche skizziert.

Erste Verortung in mathematikdidaktischen Bildungskonzepten

Eine Facette des Mathematik-Kunst-Vergleichs besteht im Ausweisen mathematischer Stile, welche wiederum *inhaltlich* in Beziehung zu Stilrichtungen der Kunstgeschichte gesetzt werden können. So wird etwa barocke von romantischer Mathematik unterschieden. Hier zeigt sich in besonderem Maße der Blick auf die Mathematik als Kulturleistung und ihre Beziehungen zu anderen Kunstformen. Ein Wissen um diese kulturelle Einbettung trägt sicher etwa zur „Stiftung kultureller Kohärenz“ und damit zu einer der von Heymann (1996) benannten Aufgaben allgemeinbildender Schulen bei.

Hinter dem Vergleich des schaffenden Mathematikers mit dem künstlerischen Genie steckt nicht nur die Annahme eines angeborenen Talentes, sondern auch und insbesondere die Betonung kreativer Handlungen im mathematischen Schaffensprozess. Der Mathematiker ist im Prozess der mathematischen Erfindung ebenso regelgebend wie der Maler oder Dichter. Diesen Aspekt der Mathematik greifen viele mathematikdidaktische Bildungskonzeptionen auf. So fordert etwa der Kernlehrplan für die Sekundarstufe I in NRW, dass die Mathematik als „kreatives und intellektuelles Handlungsfeld“ (vgl. Kernlehrplan SI, NRW, S. 11) erlebt werden soll. Winter nennt darüber hinaus als eine der drei Grunderfahrungen des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts, dass die Mathematik als „geistige Schöpfung eigener Art“ erfahren werden solle, und die Schülerinnen und Schüler erleben sollen, dass „Menschen imstande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen“ (Winter 1995, S. 39).

Die Charakteristika des mathematischen Schönheitsbegriffs (vgl. Spies, 2012) ergänzen das bisher dargestellte Spektrum der Anknüpfungspunkte der Mathematikästhetik im Bildungsdiskurs auf verschiedenen Ebenen:

Zum einen lässt die mathematische Schönheit Urteile über ein Stück Mathematik abseits von der Frage zu, ob es sich um einen korrekten Schluss oder ein außermathematisch anwendbares Werkzeug handelt. Wenn sich nun das Urteil etwa über eine mathematische Argumentation im Rahmen der „innermathematischen Reflexion“, wie sie etwa in der Folge von Skovsmose (1998) in verschiedene Ansätze zur mathematischen Bildung Eingang gefunden hat, an den Kriterien der Wissenschaftspraxis orientieren soll, müssten mathematisch-ästhetische Kriterien einbezogen werden. Ebenso können sie so Teil der von den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife geforderten Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ sein, zu der auch das „Bewerten gegebener mathematischer Aussagen“ (KMK 2012, S. 15) gehört.

Weiter verweist der subjektiv emotionale und epistemische Charakter mathematischer Schönheit auf eine durch mathematisch-ästhetische Erfahrungen angebahnte spezifische Beziehung zwischen Individuum und Gegenstand. Dies wiederum birgt nicht nur die Chance einer besonderen Motivation und zum Aufbau einer positiven Haltung gegenüber dem Fach, sondern auch zu Erfahrungen von Selbstwirksamkeit und dem Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten. Hier liegt die Möglichkeit des Beitrags zu bildungsrelevanten Bereichen, wie der „Stärkung des Schüler-Ichs“ (Heymann, 1996, S. 117ff.) oder dem „strand of mathematical profency“ den Kilpatrick und Swafford (2002) unter der Überschrift „Engaging“ ausführen (S. 14ff).

Zuletzt sei darauf hingewiesen, dass im mathematikästhetischen Werturteil die emotionale Wirksamkeit der Gegenstände einen zentralen Platz im fachinhaltlichen Diskurs bekommen und gerade die Beziehung zwischen Subjekt und mathematischem Gegenstand in den Vordergrund rückt. Damit ist ein Verweis auf das Moment der „Selbstreflexion“ gegeben, wie es z.B. Lengnink als eine „aus der Perspektive der Mündigkeit […] zentrale Reflexionsebene“ (Lengnink 2005, S. 30) und damit als bildungsrelevant auszeichnet.

Erste allgemeine Befunde

Die Befunde scheinen zunächst, das Bildungspotential schöner Mathematik deutlich zu belegen. Ein zweiter Blick in die exemplarisch aufgeführten Konzepte relativiert dies jedoch und lässt erahnen, warum trotz der scheinbar guten Passung, die ästhetischen Eigenschaften der Mathematik im Rahmen ihrer Didaktik so selten aufgenommen werden: *Die mathematikästhetische Perspektive wird von den Autoren selten berücksichtigt und insbesondere nur sehr selten explizit einbezogen.* Eine Ausnahme stellt dabei das eingangs zitierte Konzept Graumanns dar.

Von den oben aufgezeigten möglichen Anknüpfungspunkten werden in den untersuchten Konzepten i.d.R. nur die Chancen der Kreativität im Rahmen des mathematischen Problemlöseprozesses explizit aufgegriffen. Die Möglichkeiten des Mathematiker-Künstler-Vergleichs, wie etwa die Rolle des „wahrhaft ästhetischen Gefühls“ für die mathematische Erfindung (vgl. Poincaré 1914, S. 48), werden jedoch auch dabei nicht ausgeschöpft. Häufig wird ein eher intuitiver Kreativitätsbegriff zu Grunde gelegt und so das Beschreibungspotential des *künstlerischen* Geniebegriffs nicht genutzt.

Die mathematische Schönheit findet höchstens implizit Eingang in Konzepte mathematischer Bildung. So sind es beispielsweise gerade die Klassiker der Mathematikästhetik, wie etwa die „euklidschen“ Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ oder die Unendlichkeit der Primzahlmenge, die Winter für geeignete Anlässe seiner Grunderfahrungen hält (vgl. Winter 1995, S. 40). Dabei tragen die traditionell als Beispiele besonderer Schönheit angeführten Stücke der Mathematik insbesondere dazu bei, „mathematische Gegenstände und Sachverhalte […] als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“ (G 2) (ebd. S. 37). Hier scheint zumindest ein Gespür für das innermathematische Potential schöner Mathematik zu Grunde zu liegen.

Vergebenes Potential

Dass das Potential der Mathematik bezüglich eines möglichen Beitrags zur (Allgemein-)Bildung übersehen wird, wenn trotz offensichtlicher Passung der ästhetische Charakter der Mathematik im mathematikdidaktischen Bildungsdiskurs nicht bewusst aufgegriffen wird, macht der vertiefende Blick in zwei ausgewählte Konzeptionen deutlich:

So stellt Heymann fest, dass die Mathematik mit den sozialethischen und personenbezogenen Aufgaben allgemeinbildender Schulen „inhaltlich zunächst nichts zu schaffen habe“ (Heymann 1996, S. 249). Durch das Zusammenspiel emotionaler Erfahrungen und objektimmanenter Eigenschaften besteht im mathematischen Schönheitsurteil jedoch sehr wohl die Möglichkeit, auch und gerade durch mathematisch-ästhetische Erfahrungen auslösende mathematische *Inhalte* etwa zur „Stärkung des Schüler-Ichs" beizutragen, so dass m.E. aus mathematikästhetischer Perspektive der Einschätzung Heymanns widersprochen werden muss (vgl. auch Spies o.J., Kap. 9.3).

Als weitere Beispielgruppe können solche Ansätze herangezogen werden, die dem Reflektieren über Mathematik, über das Mathematiktreiben und über die individuelle Beziehung zur Mathematik eine Rolle im Bildungsprozess zusprechen. So liegt im (nachträglichen) Bewusstmachen ästhetischer Erfahrungen und insbesondere der darin spezifischen Art der Emotionen die Möglichkeit zu *differenzierter* „Reflexion über die Bedeutung des Gegenstandes Mathematik für die eigene Person" (Bauer 1990, S. 7) bzw. kürzer: zu *differenzierter* „Selbstreflexion" (Lengnink 2005, S. 30).

Die Beispiele zeigen, dass insbesondere in der im mathematikästhetischen Erlebnis spezifischen Beziehung von Mensch und Mathematik ein bisher vernachlässigtes Potential auch bezüglich des Bildungswertes von Mathematik liegt, das es weiter herauszuarbeiten gilt.

Literatur

Bauer, L. (1990): Mathematikunterricht und Reflexion. In: mathematik lehren 38, 6-9.

Graumann, G. (1993): Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule. In: Pädagogische Welt 5, 194-199.

Heymann, H.-W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim, Beltz.

Kilpatrick, J. u. Swafford, J. (Hrsg.) (2002): Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academy Press, Washington.

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. www.kmk.org

Lengnink, K. (2005): Mathematik reflektieren und beurteilen: Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In: Lengnink, K. u. Siebel, F. (Hrsg.): Mathematik präsentieren reflektieren beurteilen. Mühltal, 2005. 21-36.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder (Hrsg.): Kernlehrplan für Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen, 2004.

Poincaré, H. (1914): Wissenschaft und Methode, Darmstadt 1979. – unveränderter Nachdruck der ersten deutschsprachigen Ausgabe von 1914.

Skovsmose, O. (1998): Linking Mathamtics Education and Democracy. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 30, 6, 195-203.

Spies, S. (2012): Schön irrationa! – Irrational schön?. Ein klassischer Unterrichtsgegenstand aus mathematikästhetischer Perspektive. In: mathematica didactica 35, 5-24.

Spies, S. (o.J.): Ästhetische Erfahrung Mathematik. Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler. Dissertation (noch unveröffentlicht).

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft der Mathematik 61, 37-46.

Ute SPROESSER, Sebastian KUNTZE, Joachim Engel, Ludwigsburg

Einflussfaktoren auf Statistical Literacy – erste Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der 8. Realschulklasse

Kompetenzen im Bereich von Statistical Literacy werden nicht nur mit einem kritischen Verständnis statistischer Ergebnisse (Wallman, 1993) und Fähigkeiten des datenbezogenen Lesens (Curcio, 1987) in Zusammenhang gebracht, sondern schließen auch Aspekte des Modellierens mit ein: So sehen Wild und Pfannkuch (1997) eine enge Verbindung zwischen Modellierungsprozessen und Fähigkeiten des Umgangs mit Variabilität, die ein Kennzeichen einer hohen Kompetenz im Bereich von Statistical Literacy sind. Bezüglich des Spektrums vorkommender Kompetenzscores beobachtete Reading (2002), dass sich Unterschiede im statistischen Verständnis besonders klar in den Unterbereichen „Graphische Darstellungen" sowie „Manipulation von Daten durch Reduktion" abbilden lassen.

Aufbauend auf diese Überlegungen wurden die Aspekte des Modellierens und des Nutzens von Darstellungen beim Umgang mit Daten in dem Kompetenzkonstrukt „Nutzen von Darstellungen und Modellen in statistischen Kontexten" (Kuntze, Lindmeier, Reiss, 2008) zusammengefasst und in fünf Kompetenzniveaus anhand der Metapher des „datenbezogenen Lesens" beschrieben (Kuntze, i. Druck).

Datenbezogenes Lesen spielt aber nicht nur für das beschriebene Kompetenzkonstrukt eine Rolle. Der internationale PISA-Lesekompetenztest (Baumert et al., 2001) beinhaltet zu über 20% Aufgaben mit Bezug zu Diagrammen und Tabellen. PISA sieht Lesekompetenz als „eine grundlegende Form des kommunikativen Umgangs mit der Welt" (Baumert et al., 2001, S. 78), die demnach auch mathematische Darstellungen verwendet. Modellieren hat beim Lesen als einer (re)konstruktiven Aktivität ebenso wie bei Mathematical Literacy in PISA einen hohen Stellenwert. Angesichts einer solchen inhaltlichen Überlappung erscheint es nicht verwunderlich, dass Lesekompetenz hier deutlich mit Mathematikleistung zusammenhängt. Andere Lesefähigkeitstests wie etwa der LGVT (Schneider, Schlagmüller & Perleth, 2007) klammern Aktivitäten des mathematik- oder statistikbezogenen Modellierens demgegenüber eher aus. Kognitive Grundfähigkeiten zeigen in PISA (Baumert et al., 2001) einen Einfluss sowohl auf die Lesekompetenz als auch teilweise über diese vermittelt auf die Mathematikleistung. Dies erhöht die Konfundierung der drei Bereiche zusätzlich und macht Kausalaussagen nahezu unmöglich.

Für die Kompetenz des Nutzens von Darstellungen und Modellen in statistischen Kontexten ist von Interesse, wie diese Kompetenz mit möglichen Einflussfaktoren zusammenhängt. Eine solche Untersuchung von Zusammenhängen könnte einerseits einschätzen helfen, inwiefern das Kompetenzscore lediglich allgemeine kognitive Fähigkeiten oder etwa Lesekompetenz widerspiegelt oder inwiefern das Kompetenzkonstrukt empirisch „eigenständig“ ist; des Weiteren können auch Förderansätze im Bereich von Statistical Literacy gezielter ausgerichtet werden.

Diese Studie untersucht daher die Beziehung zwischen der Kompetenz Darstellungen und Modelle in statistischen Kontexten nutzen zu können und möglichen Einflussfaktoren. Dementsprechend stehen folgende Forschungsfragen im Mittelpunkt:

Wie hängen Lesekompetenz sowie verbale und nonverbale kognitive Fähigkeiten mit dem Kompetenzscore zusammen?

Welche weiteren Einflussfaktoren können als bedeutsam identifiziert werden?

Untersuchungsdesign

Die hier beschriebene Untersuchung bildet einen Teil des Projektes „ReVa-Stat“, einer auf Förderansätze für Statistical Literacy fokussierenden Interventionsstudie. Für die hier vorgestellte Teilstudie wurden in 25 achten Realschulklassen 90minütige schriftliche Schüler(innen)befragungen durchgeführt. Den Auswertungen liegen Daten von 260 Mädchen und 304 Jungen zwischen 12 und 16 Jahren (M=13,54, SD=0,66) zugrunde.

Das Testinstrument beinhaltete neben einem Kompetenztest zum Nutzen von Darstellungen und Modellen in statistischen Kontexten Tests zu Erfassung des Arbeitsgedächtnisses, von verbalen und nonverbalen kognitiven Fähigkeiten sowie einen Lesegeschwindigkeits- und -verständnistest. Als weitere Kontextvariablen wurden die letztjährigen Mathematik- und Deutschnoten, ebenso wie der sozioökonomische Status abgefragt.

Zur Erhebung kognitiver Fähigkeiten wurde auf die Subskalen V3B (Wortanalogien, Rel. = 0,81) und N2B (Figurenanalogien, Rel. = 0,9) des KFT 4-12R (Heller &Perleth, 2000) zurückgegriffen. Um den Zusammenhang mit rein textbezogener Lesekompetenz untersuchen zu können, wurde der im Rahmen von PISA 2000 entstandene LGVT (Schneider et al., 2007) verwendet. Dieser prüft Textverständnis direkt auf der Textebene sowie indirekt über die Lesegeschwindigkeit ab und klammert damit Aspekte mathematischen Modellierens sowie die Nutzung statistischer Darstellungen von Daten im Gegensatz zu PISA eher aus. Beispielitems aus den Begleitmanualen zu den KFT- und LGVT-Tests gibt Tabelle 1 wieder– die wirklichen LGVT-Items erfordern keine vergleichbaren elementaren Modellierungsschritte wie das (diesbezüglich atypische) Beispielitem im Manual.

Zusammenhänge zwischen dem Kompetenzscore und den genannten Einflussfaktoren wurden mittels Korrelationen und Regressionsanalysen untersucht.

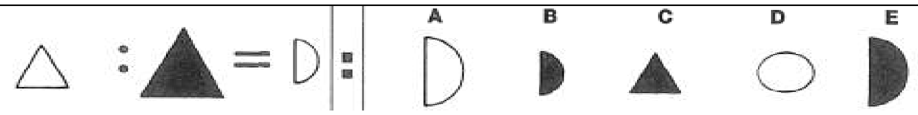
Testteil	*Beispielitem*
V3B	groß : riesig = klein : ? A Junge B erwachsen C winzig D wenig E mehr
N2B	
LGVT	Die Giraffe ist eines der größten Säugetiere auf der Welt, sie kann bis zu sechs [Zentimeter, Meter, Kilometer] groß werden.

Tabelle 1: Beispielitems (Heller & Perleth, 2000; Schneider et al., 2007)

Ergebnisse

Es zeigen sich signifikante Korrelationen ($\alpha < 0{,}001$) zwischen dem Kompetenzscore und den Variablen verbale und nonverbale kognitive Fähigkeiten, Leseverständnis, Mathe- und Deutschnote sowie dem sozioökonomischen Status. Auch der Zusammenhang zwischen dem Kompetenzscore und dem Arbeitsgedächtnis ist hochsignifikant ($\alpha < 0{,}01$), während die Lesegeschwindigkeit keinen messbaren Zusammenhang zeigt. In einer linearen Regression stellen sich verbale kognitive Fähigkeiten als stärkster Prädiktor für das Kompetenzscore heraus. Werden weitere Variablen ins Modell aufgenommen, so erweisen sich auch die Mathematiknote sowie die nonverbalen kognitiven Fähigkeiten als nennenswerte Einflussgrößen. Dagegen spielen der sozioökonomische Status und das Leseverstehen trotz hochsignifikanter Korrelationen eine untergeordnete Rolle. Die Variablen Arbeitsgedächtnis, Deutschnote und Lesegeschwindigkeit werden aufgrund der niedrigen Vorhersagekraft nicht im Modell berücksichtigt.

Diskussion

Die Zusammenhänge zwischen dem Kompetenzscore und kognitiven Fähigkeiten sowie der Lesefähigkeit bleiben hinter thematisch benachbarten PISA-Ergebnissen, liegen aber in Anbetracht der strukturellen und inhaltlichen Unterschiede der beiden Studien voll im erwarteten Bereich. Dabei erweist sich das rein textbezogene Leseverstehen als weniger bedeutsam für die Vorhersage statistikbezogener Kompetenz als verbale kognitive Fähigkeiten. Insbesondere zeigt sich in den mäßigen Zusammenhängen, dass die Kompetenz Darstellungen und Modelle in statistischen Kontexten zu nutzen ein eigenes, von den betrachteten Einflussfaktoren verschiedenes Konstrukt ist. Die Ergebnisse tragen so auch zur ergänzenden Validierung des Testinstruments bei. Für die Entwicklung von Lernumgebungen zur Förderung von Statistical Literacy geben die Ergebnisse vorsichtige Hinweise darauf, dass das Leseverstehen bei Aufgaben, wie sie im Test gestellt wurden, offenbar keine erfolgsbestimmende Variable war.

Förderhinweis

Ute Sproesser ist Mitglied des Kooperativen Promotionskollegs „Effektive Lehr-Lernarrangements" der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg und der Universität Tübingen, das vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg gefördert wird.

Diese Studie wurde außerdem mit Forschungsmitteln der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg unterstützt.

Literatur

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.J. & Weiß, M. (2001). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

Curcio, F.R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. Journal for research in mathematics education, 18 (5), 382 – 393.

Heller, A. K. & Perleth, C. (2000).KFT 4-12+R. Manual. Göttingen: Hogrefe.

Kuntze, S. (im Druck). Modellieren beim Nutzen von Darstellungen in statistischen Kontexten – hierarchische Beschreibung und Bedingungsvariablen eines Aspekts mathematischer Kompetenz. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), Mathematisches Modellieren in Schule und Hochschule. Wiesbaden: Springer.

Kuntze, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2008). „Daten und Zufall" als Leitidee für ein Kompetenzstufenmodell zum „Nutzen von Darstellungen und Modellen" als Teilkomponente von Statistical Literacy. Anregungen zum Stochastikunterricht, Bd. 4, 111-122. Hildesheim: Franzbecker.

Reading, C. (2002). Profile for statistical understanding. Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.

Schneider, W., Schlagmüller, M. & Ennemoser, M. (2007). LGVT 6-12. Manual. Göttingen: Hogrefe.

Wallman, K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching our Society. Journal of the American Statistical Association, 88(421), 1-8.

Watson, J.M. & Callingham, R.A (2003). Statistical literacy: a complex hierarchical construct. Statistics Education Research Journal 2, 3-46.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical inquiry. International Statistical Review, 67, 223-265.

Carolina STAIGER, Weingarten

Entwicklung und Erprobung von Feedbackkomponenten in der Bruchrechnung – Klasse 6

Im Rahmen einer qualitativen Studie wurden zu ausgewählten Aufgaben der Bruchrechnung Feedbackkomponenten (z. B. heuristische Hilfsmittel, Lösungsbeispiele) theoriebasiert entwickelt, die einen Lernenden bei Nichtbewältigung einer Aufgabe in seinem Lösungsprozess unterstützen sollen. Diese Feedbackkomponenten wurden in halbstandardisierten Einzelinterviews an 16 Sechstklässlern[1] einer Realschule erprobt und werden derzeit auf ihre tendenzielle Wirkungsweise analysiert.

1. Forschungskontext – Dynamisches Testen

Ein langfristiges Ziel ist es, ein dynamisches Testverfahren zu entwickeln, mit dem Lernpotentiale im Bereich der Bruchrechnung ermittelt werden können. Die Kernidee dieses alternativen Testverfahrens geht auf den Psychologen Wygotski (1964) und sein Konzept der Zone der nächsten Entwicklung zurück. Die Zone der nächsten Entwicklung wird bestimmt durch die Divergenz zwischen der Leistung, die ein Schüler allein ohne fremde Hilfe erzielen kann (Zone der aktuellen Entwicklung) und der Leistung, die er mit Unterstützung von fähigeren Peers oder Erwachsenen leisten kann. Für eine zuverlässige Diagnose des Entwicklungsniveaus eines Lernenden fordert Wygotski somit nicht allein die Bestimmung des Leistungsstands eines Lernenden durch gängige Statustests, sondern zudem auch die Ermittlung des Leistungspotentials eines Lernenden. Dieses Potential wird in dynamischen Testverfahren über den systematischen Einsatz von Feedback bei der Bearbeitung noch nicht behandelter Themengebiete (hier: Aufgaben zum Bruchzahlverständnis, die den Schülern noch unbekannt sind) hervorgerufen, welches beispielsweise (meta-)kognitive Hilfsstrategien beinhalten kann (Dörfler, Golke & Artelt, 2010). Die Abschätzung des Potentials erfolgt dabei über die Anzahl benötigter Hilfen bzw. Impulse und darüber, in welchem Ausmaß der Lernende die Anregungen für die Bearbeitung weiterer Aufgaben nutzen kann (Beckmann & Guthke, 1999).

Für die Entwicklung eines dynamischen Testverfahrens für den Bereich der Bruchrechnung müssen zunächst geeignete Feedbackkomponenten erarbeitet und erprobt werden, die Lösungsprozesse bei der Aufgabenbearbeitung

[1]Aufgrund der Vereinfachung u. besseren Lesbarkeit, wird auf die Nennung beider Geschlechter verzichtet u. nur die männliche Form benutzt, es sind jedoch stets beide Geschlechter gemeint.

anregen können und weiter auf ihre tendenzielle Wirkungsweise untersucht werden. Dabei soll eine qualitative Analyse der Schüler-Denkprozesse im Umgang mit den Feedbackkomponenten erfolgen.

2. Lösungsprozesse anregen durch Feedback

Für die hier geplante Forschungsarbeit steht das **Informative Tutorielle Feedback (ITF)** nach Narciss (2006) im Mittelpunkt. Kann ein Lernender eine Aufgabe allein nicht lösen, wird ein Feedbackalgorithmus eingesetzt – wobei Hilfen mit gestuftem Unterstützungsgrad angeboten werden – der eine bestimmte Anzahl von Lösungsversuchen zulässt – ohne gleich die richtige Lösung zu präsentieren. Somit hat der Lernende die Möglichkeit seine Fehler bei der jeweiligen Aufgabe selbständig zu korrigieren.

Neben dem **ITF** wird zudem nach jedem Lösungsversuch über die Korrektheit der Schülerantwort (richtig/falsch) informiert (**KR=Knowledge Of Result**) und auf der letzten Stufe die richtige Lösung (**KCR=Knowledge Of Correct Result**) und der Lösungsweg präsentiert sowie zur Selbsterklärung aufgefordert.

Basierend auf Erkenntnissen der Feedbackforschung, auf Grundlage der Auseinandersetzung mit Fehlerstrategien innerhalb der Bruchrechnung, (meta-)kognitiven Lernstrategien sowie in Anlehnung an das mathematikdidaktische Konzept der Grundvorstellungen wurde theoriegeleitet für jeden Aufgabentyp ein adäquater vierstufiger Feedbackalgorithmus erarbeitet. Dabei wurden weiter zwei Varianten entworfen. Die eine sieht u. a. Feedbackkomponenten auf zeichnerisch-ikonischer Ebene vor, die zweite beinhaltet Impulse rein auf der Vorstellungsebene. Aus Platzgründen wird hier nur die zeichnerisch-ikonische Variante beispielhaft dargestellt:

Dem Schüler wird zunächst eine Aufgabe mit spezifischem Anforderungsniveau vorgelegt, z. B.: „Gegeben ist ein Siebtel. Wie viel fehlt zu einem Ganzen?“ Insgesamt sind vier Lösungsversuche möglich und demnach vier Feedbackstufen zu jeder Aufgabe vorgesehen.

Kann der Lernende die Aufgabe beim ersten Versuch nicht allein lösen, so wird ihm auf *Stufe 1* einerseits mitgeteilt, dass seine Antwort falsch ist und andererseits nach dem ersten Aufgabentyp dazu aufgefordert die Aufgabenstellung zu erläutern: „…Erkläre mir in eigenen Worten, was du hier machen sollst.“ Bei Folgeaufgaben, deren Aufgabenstellung klar erscheint, wird er auf *Stufe 1* aufgefordert, einen erneuten Versuch vorzunehmen: „…Versuche es noch einmal.“ Dies greift die Empfehlung von VanLehn (2003) aus dem Bereich des *Tutoring* auf, nämlich Lernende anfangs bewusst auf Schwierigkeiten stoßen zu lassen, um so Denkprozesse stärker zu aktivieren. Der Schüler hat dabei die Chance, seine Antwort noch einmal zu überdenken und/oder eigene Fehler selbst zu entdecken. Folgt ein weiterer erfolgloser Versuch, wird er auf *Stufe 2* implizit angeregt sich eines heuristischen Hilfsmittels zu bedienen, z. B.: „Versuche ein Siebtel an einer beliebigen Figur darzustellen." Kann der Schüler die Anregung zur zeichnerischen Veranschaulichung nicht nutzen, so wird ihm auf *Stufe 3* ein Rechteck (Papierformat) vorgelegt: „…Ich gebe dir ein Rechteck vor. Versuche ein Siebtel an diesem Rechteck darzustellen." Diese Impulse dienen der Aktivierung bestehender Grundvorstellungen, die für den weiteren Lösungsprozess förderlich sein können. Können diese Anregungen nicht zur Lösung führen, so wird dem Schüler auf *Stufe 4* ein Lösungsbeispiel als Bild vorgelegt mit der Aufforderung zur Erläuterung, z. B.: „…Hier siehst du eine mögliche Lösung. Erkläre mit eigenen Worten, wie hier vorgegangen wurde." Je nach Erfolg der jeweiligen Feedbackkomponenten erhält der Lernende eine niveauangepasste Folgeaufgabe.

3. Untersuchungsdesign

Die Erprobung der Feedbackkomponenten fand im September 2012 statt. An der Untersuchung nahmen zwei sechste Klassen einer Realschule in Baden-Württemberg (n=46) teil. Zu Beginn wurde in beiden Klassen ein 45-minütiger Vortest zur Ermittlung des Vorwissens zum Bruchzahlverständnis durchgeführt. Dabei wurden zudem Kontextvariablen, wie z. B. das mathematische Selbstkonzept, Interesse und die Zielorientierung erhoben. Aufgrund der Testergebnisse wurden anschließend die Probanden (n=16) für die Erprobung der Feedbackkomponenten ausgewählt. Diese fand in halbstandardisierten Einzelinterviews statt unter Einsatz von Prozessinterventionen, wobei die Lernenden immer wieder aufgefordert wurden ihr Vorgehen und ihre Gedankengänge während und/oder nach der Aufgabenbearbeitung zu beschreiben. Den Lernenden wurden hier Parallelaufgaben zu Teilbereiche aus dem Vortest zur Bearbeitung gegeben. Zu der jeweiligen Aufgabe lag ein adäquater Feedbackalgorithmus vor.

Im Anschluss an die Interviews erhielt der jeweilige Lernende einen Nachtest zur Bearbeitung, der sich aus den zugehörigen Teilbereichen des Vortests zusammensetzte. Hierbei soll herausgefunden werden, ob die Schüler die Aufgabentypen, die sie im Vortest nicht lösen konnten, nach Einsatz der feedbackgestützten Aufgaben nun allein meistern können. Da durch das Feedback das Leistungspotential und keine Langzeitlerneffekte erfasst werden sollen, erfolgte der Nachtest unmittelbar nach der Interviewphase und beinhaltete die während der Intervention erprobten Teilbereiche. Zu Beginn des Nachtests wurden zudem u. a. Fragen zum subjektiv empfundenen Nutzen der Hilfen gestellt. Die Schüler, die nicht am Interview teilnahmen, dienten als Kontrollgruppe und wurden am Ende des Erhebungszeitraums lediglich einem Nachtest unterzogen, welcher sich aus den Aufgaben des Vortest zusammensetzte. Dadurch soll festgestellt werden, ob die Wiederholung des Vortests einen Effekt auf die Leistungsergebnisse bewirkt und eventuelle zwischenzeitliche Übungseffekte aufgedeckt werden.

Hinsichtlich der Auswertung der Interviewdaten werden im weiteren Verlauf der Arbeit folgende Forschungsfragen angegangen:

Können die entwickelten Feedbackkomponenten – bezüglich vorher nicht gelöster Aufgaben – Denkprozesse der Schüler anregen, die ein Voranschreiten im Lösungsprozess bewirken? Wenn ja, welche und wie äußert sich dies?

Welche Repräsentationsformen setzen die Schüler auf Vergabe der Feedbackkomponenten ein?

Übernehmen die Schüler die in den Feedbackkomponenten enthaltenen Hilfsstrategien und nutzen sie bei der weiteren Aufgabenbearbeitung?

Welche Schwierigkeiten lassen sich im Umgang mit den gegebenen Feedbackkomponenten herausstellen?

4. Ausblick

Im Zentrum des weiteren Arbeitsprozesses steht die qualitative Analyse der Lösungsprozesse der Schüler. Bisher wurden die videographierten Interviews regelgestützt transkribiert und die Testergebnisse exploriert. Zudem wurden Strukturbäume erstellt, die mögliche Kategorien für die qualitative Auswertung der Interviewdaten beinhalten und bei der Herausstellung von Schülerprofilen maßgeblich sein werden. Ein genaues Vorgehen hinsichtlich der Analyse auf eine tendenzielle Wirkungsweise der Feedbackkomponenten wird weiter ausgearbeitet und an anderer Stelle darüber berichtet.

Literatur

Beckmann, J. F. & Guthke, J. (1999): Psychodiagnostik des schlussfolgernden Denkens. Göttingen: Hogrefe.

Dörfler, T., Golke, S. & Artelt, C. (2010): Dynamisches Testen der Lesekompetenz: Theoretische Grundlagen, Konzeption und Testentwicklung. In: Klieme, E., Leutner, D. & Kenk, M. (Hrsg.): Kompetenzmodellierung. Zwischenbilanz des DFG-Schwerpunktprogramms und Perspektiven des Forschungsansatzes. Zeitschrift für Pädagogik, 56. Beiheft, 154-164.

Narciss, S. (2006): Informatives tutorielles Feedback. Münster: Waxmann.

VanLehn, K., Siler, S., Murray, R. C., Yamauchi, T., & Baggett, W. B. (2003): Why do only some events cause learning during human tutoring? Cognition and Instruction, 21 (3), 209-249.

Wygotski, L. S. (1964): Denken und Sprechen. Berlin: Akademie-Verlag.

Anke STEENPASS, Essen

Rahmungen von Grundschulkindern bei der Deutung von Anschauungsmitteln – Ergebnisse im Forschungsvorhaben KORA

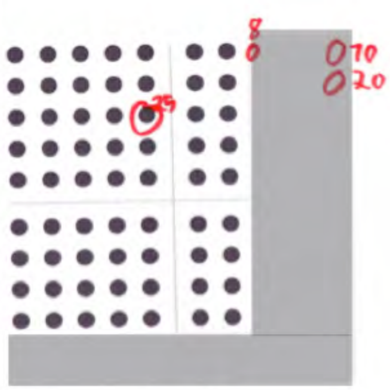


Abb. 1 63 Punkte

Grundschulkinder produzieren im Mathematikunterricht häufig verschiedene Deutungen von üblichen Anschauungsmitteln. Abb. 1 etwa zeigt Emils Einzeichnung der Addition „25+10+20+8“ in das Hunderterpunktefeld (HPF). Der Drittklässler kreist einzelne Punkte an eindeutigen Positionen ein und nimmt eine ordinale Deutungssicht ein. Aus einer kardinalen Deutungssicht heraus könnte ein Grundschulkind die einzelnen Summanden ebenso durch das Einkreisen einer Punktmenge darstellen. Daran wird deutlich, dass Anschauungsmittel je nach Deutungshintergrund unterschiedliche Bedeutung haben können. Steinbring betont, dass mathematische Zeichen nicht nur die Funktion haben, ein gegebenes mathematisches Objekt zu veranschaulichen, sondern ebenso ein *epistemologisches Erkenntniswerkzeug* sind, mit dessen Hilfe neue mathematische Beziehungen generiert werden können (Steinbring 2010). Basierend auf diesem Verständnis, sollten Grundschulkinder zunehmend lernen, Anschauungsmitteln flexibel und strukturorientiert als ein solches Erkenntniswerkzeug zu nutzen.

Deutung von Anschauungsmitteln als kulturelle Kompetenz

Wie Söbbeke (2005) in einer interpretativen Studie zur visuellen Strukturierungskompetenz von Grundschulkindern herausstellt, kann eine Unterrichtskultur, in der die Mehrdeutigkeit von mathematischen Darstellungen produktiv genutzt wird, Lernende in einer strukturorientierten und flexiblen Deutungskompetenz fördern. So sollten Schüler/innen erfahren, dass verschiedene Interpretationen erwünscht und erlaubt sind, um eine erste Idee der epistemologischen Funktion von Anschauungsmitteln entwickeln zu können.

Die Anthropologen und Entwicklungspsychologen Rakoczy, Tomasello und Striano stellen in der Arbeit „How children turn objects into symbols“ (2005) heraus, dass erst ein gemeinsamer kollektiver Hintergrund den notwendigen interpretativen Rahmen bereit stellt um erfolgreich symbolische Akte produzieren und interpretieren zu können: „Importantly the symbolizing process always assumes a collective background of shared rules and practices for symbol making and interpreting“ (Rakoczy, Striano, Tomasello 2005, S.92). Sie veranschaulichen dies an einem einfachen Beispiel: Ein blauer Tintenklecks auf einem Stück Papier kann Wasser symbolisieren, sofern es intendiert ist, jedoch nur vor dem Hintergrund einer gemeinsamen kulturellen Praxis des Umgangs mit Landkarten. Der symbolische Status von Objekten wird somit zu einer Angelegenheit der „joint construction" (ebd., S. 92). Im Forschungsvorhaben KORA (epistemologische **Ko**ntext- und **Ra**hmenanalyse) geht es nicht um die Deutung beliebiger, alltäglicher Objekte, sondern um die Deutung von komplexen mathematischen Symbolsystemen. Jedoch interpretieren Schüler/innen auch im Mathematikunterricht Diagramme vor dem Hintergrund einer gemeinsam erlernten sozialen Praxis. Emil etwa geht mit dem HPF in vertrauter Weise wie mit der Hundertertafel um, auf der die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 in eindeutiger Weise von oben links nach unten rechts angeordnet sind (Abb.1).

Symbolische Kontextelemente am Hunderterpunktefeld

Am HPF gibt es aus didaktischer, konstruktiver Sicht verschiedene Strukturelemente, die relevant sind für die Deutung des Diagramms. Zu nennen sind etwa der *Winkel*, einzelne zu zählende *Punkte*, lineare Elemente wie die *Reihen* und *Spalten*, aber auch flächige Elemente wie die vier Felder *„25er"*-, *„20er"*-, *„10er"*- und *„8er-Segment"* oder auch das komplette *Hunderterpunktefeld*. Für einen strukturorientierten Umgang sollten Grundschulkinder lernen, diese Strukturelemente – hier *Kontextelemente* genannt – zu nutzen. Jedoch zeigen bisherige Analysen, dass viele weitere Strukturdeutungen möglich sind (z.B. 2er oder 4er Substruktur). Insofern fungiert die erwähnte Aufzählung an relevanten Kontextelementen keineswegs als eine objektive und vollständige Liste, die an die Schüler/innen weitergegeben und von ihnen wie ein Algorithmus gelernt werden könnte. Vielmehr wird im Verständis dieses Vorhabens ein flexibler Umgang mit den Kontextelementen implizit in der Unterrichtskultur mitgelernt.

Rahmungsbasierte Deutungskompetenz

Ziel dieses Forschungsvorhabens ist es individuelle, kulturell erlernte Deutungssichten theoriebasiert, interpretativ zu rekonstruieren und im Konstrukt der „rahmungsbasierten Deutungskompetenz" systematisch aufeinander zu beziehen. Als Theorierahmen dient dazu das Konzept der **Rahmung** (Goffman 1974, Krummheuer 1992). Der Begriff Rahmung meint ein durch Sozialisation erlerntes Interpretationsschema, das zur Sinngebung einer sozialen Situation herangezogen wird. Laut Krummheuer ist auch das Deutungsergebnis eines Anschauungsmittels letztlich Ergebnis einer entsprechenden Rahmung (Krummheuer 1992, S. 188).

Methodisches Vorgehen

Die Datenerhebung erfolgte über 22 halbstandardisierte Prä- und Post-Interviews mit Schüler/innen einer dritten Klasse. Nach der Durchführung der Prä-Interviews wurde eine Intervention in Form einer Unterrichtseinheit von 10 Stunden à 45 min durchgeführt, deren Ziel die Förderung der „Visuellen Strukturierungskompetenz“ (Söbbeke 2005) war. Mit Rakoczy, Tomasello und Striano (2005) wird die Intervention explizit nicht als ein „Trainingsprogramm“ verstanden, sondern als eine Einführung in einen gemeinsam entwickelten „kollektiven Hintergrund“. Sie dient somit dazu eine notwendige Basis (Handlungspraxis und Verstehenshintergrund) zu schaffen, auf Grundlage derer die Kinder eine strukturorientierte, flexible Deutungskompetenz entwickeln können. Ziel der Intervention ist weiterhin die Anreicherung von Interpretationsmöglichkeiten. Das Beispiel „Emil“ (Abb. 1) zeigt, dass die Rahmung einerseits eine Sinngebung der Materialien überhaupt ermöglicht, gleichzeitig jedoch eine bestimmte Struktur innerhalb des Mediums vorgibt. Damit Emil die ordinal geprägte Struktur umdeuten kann, muss er seine „Hundertertafel-Rahmung“ erweitern und „modulieren“ (Goffman 1974). Solche Rahmenmodulationen werden laut Krummheuer durch ein produktives Austragen von „Rahmungsdifferenzen“ (Krummheuer 1992, S. 80f) begünstigt. Die Intervention zielt demnach weiterhin darauf ab, Rahmungsmodulationen zu initiieren, indem verschiedene Deutungsschemata hervorgebracht, offen gelegt und aufeinander bezogen werden (vgl. ebd., S. 82).

Erste Ergebnisse am Beispiel „Lars“

In den interpretativen Analysen wird zunächst herausgearbeitet, welche Kontextelemente von den Kindern zur Deutung herangezogen werden und in welcher Weise diese Elemente genutzt werden. Auf der Grundlage bisheriger Analysen können zwei grundsätzlich verschiedene Deutungsweisen festgehalten werden: Zum einen können Kinder die Kontextelemente so nutzen als seien es konkrete, *dingliche Objekte* in einer „Welt der Dinge“. In dieser Welt tragen die Elemente eine vom Betrachter unabhängige inhärente Bedeutung in sich. Eine solche Umgangsweise wird in diesem Vorhaben mit Söbbeke (2005) *„dinglich“* genannt. Eine andere Umgangsweise ist eine solche, bei der die Schüler/innen den Kontextelementen eine *theoretische* Bedeutung verleihen. In dieser „Welt der Beziehungen“ werden die Elemente zu *theoretischen Objekten*, die ausschließlich als Teilelement eines Systems und in Beziehung zu anderen Kontextelementen Bedeutung erhalten. Diese Umgangsweise wird mit Söbbeke (2005) *„relational“* genannt. Bisherige Analysen zeigen, dass auch bei der relationalen Umgangsweise Kontextelemente als konkrete Objekte genutzt werden können, denn konstruierte abstrakte Strukturen brauchen jeweils einen gegenständlichen Träger. Jedoch wird diesen konkreten Objekten gegenüber einer dinglichen Umgangsweise eine *theoretische* Bedeutung verliehen.

Am Beispiel „Lars“ wird dies deutlich: Lars arbeitet im Post-Interview am HPF und erklärt der Interviewleiterin wie er die Anzahl der Punkte in den vier Feldern ermittelt hat. Zum „8er-Segment“ erklärt er: „Hier *(zeigt auf das 8er-Segment)* weiß ich dass es das [8] ist, weil zwei mal vier ist acht. ... Wenn man hier *(zeigt auf das 10er-Segment)* die zehn hat und hier *(zeigt auf das 8er-Segment)* die acht, dann ist ja hier *(zeigt auf den Winkel unter dem 8er Segment)* nur noch eine Reihe abgedeckt, weil dann ist es ja auch zehn“. Lars nutzt das „8er-Segment“ in relationaler Weise, denn es wird zum einen zum Träger der Substruktur „zwei mal vier“, zum anderen wird es durch den Bezug zum „10er-Segment“ und als Teilelement des Gesamtsystems „Hunderterpunktefeld“ zu einem „veränderten Zehner“. Indem Lars auf das „8er-Segment“ zeigt, benennt er ein konkretes gegenständliches Objekt, verleiht diesem jedoch eine *theoretische* Bedeutung.

Auf der Grundlage bisheriger Analysen deuten sich bisher zwei Rahmentypen an, die zunächst *„systembezogener Rahmen“* und *„dingbezogener Rahmen“* genannt werden. Innerhalb eines systembezogenen Rahmens konstruiert das Kind Beziehungen und nutzt Kontextelemente als theoretische Objekte, die ihre Bedeutung als Teilelement eines Systems erhalten. Innerhalb eines dingbezogenen Rahmens nutzt das Kind die Kontextelemente als wären es konkrete dingliche Objekte mit inherenten Eigenschaften. Weiter konnte herausgearbeitet werden, dass Schüler/innen ihre Rahmungen vom Prä- zum Post-Interview aspekteweise zugunsten systembezogener Rahmungen modulieren.

Literatur

Goffman, E. (1974): Frame Analysis. New York: Harper & Row.

Krummheuer, G. (1992): Lernen mit »Format«. Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie. Diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Rakoczy, H., Tomasello, M. & Striano, T. (2005). How children turn objects into symbols: A cultural learning account. In Namy, L. (Hrsg.), Symbol use and symbolic representation. New York: Erlbaum, 67-97.

Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (2010): Basic characters of algebraic thinking: >Signs as descriptors< vs. >Signs as creators<. In Proceedings of CERME 6, Lyon France.

Martin STEIN, Münster

Online-Plattformen zum Üben im Fach Mathematik im deutsch- und englischsprachigen Raum – ein systematischer Vergleich

1. Das Eva-CBTM-Projekt

Bisher fehlt in der wissenschaftlichen Literatur zur Evaluation von online-basierter mathematischer Lern-Software ein fundiertes System, das insbesondere den Prozesscharakter mathematischen Arbeitens berücksichtigt. Das Eva-CBTM-Projekt (Evaluation of Computer Based Training Programs for Mathematics) geht systematisch daran, diese Lücke zu schließen. Hierfür werden Kataloge mit Punktwertungen für die Evaluation mathematischer Übungsprogramme entwickelt, die den spezifischen Anforderungen mathematischen Arbeitens und Übens und seiner Dynamik gerecht werden. Diese Kataloge werden in dieser Arbeit für eine Punktwertung der auf dem Markt befindlichen kommerziellen wie nicht-kommerziellen Systeme genutzt, die damit unter vielen Gesichtspunkten systematisch verglichen werden können.

2. Aspekte der Beurteilung von Software in Eva-CBTM

Schüler mit Problemen in Mathematik benötigen Rückmeldungen über ihren Bearbeitungserfolg und in den meisten Fällen Hilfe. Jede Übungs-Software benötigt somit ein

(1) *Bewertungssystem* sowie ein *Hilfesystem*. Beide Komponenten arbeiten in vielen Fällen eng zusammen, z.B. dann, wenn das Bewertungssystem einen Fehler erkennt und dann eine Hilfe anstößt. Auch wenn Übungs-Software in Hinsicht auf die internen Bewertungsabläufe für den Anwender eine *Blackbox* darstellt und die Arbeit des Bewertungssystems nur aus den Rückmeldungen des Systems an den Nutzer erschlossen werden kann, ist es doch sinnvoll, beide Komponenten getrennt zu beschreiben.

Ferner benötigen alle Systeme einen *Aufgabenpool*, der in irgendeiner Weise *anzuordnen und zu strukturieren* ist. Arbeiten Anwender an den Aufgaben und haben Erfolg oder Misserfolg, muss das System die nächste Aufgabe oder Aufgabensequenz zur Verfügung stellen. Hierbei nutzt es die Systemstruktur. Wir haben somit

(2) *Systemstruktur* und *Aufgaben-Auswahlsystem*

als weitere zu beurteilende Charakteristika eines CBTM-Systems.

Systeme unterscheiden sich auch erheblich in der Frage, in wie weit sie alle Entscheidungen selbst übernehmen oder diese dem Nutzer überlassen. Dies wird durch die

(3) Freiheitsgrade

gemessen.

Schließlich ist zu unterscheiden, wie vollständig der behandelte Stoff abgedeckt wird – ein System, das nur wenige Themen abdeckt, kann offensichtlich mehr Ressourcen auf eine möglichst ausgefeilte Erstellung seiner Komponenten legen als eines, das versucht, alle inhaltlichen Facetten abzudecken. Der Extremfall wäre der eines *Prototypen*, mit dem anhand einer einzelnen Aufgabe alle Raffinessen entwickelt werden, die im Idealfall eingesetzt werden könnten. Dieser Aspekt wird in der

(4) *thematischen Vollständigkeit* gemessen.

Die *thematische Vollständigkeit* wird bei der Evaluation eine besondere Rolle spielen. Hier wird ein Prozentwert für die mehr oder weniger vollständige Abdeckung des Stoffes ermittelt. Die Anwendung dieses Prozentwertes auf die vorher ermittelten einzelnen Punktwertungen der betrachteten Systeme ergibt die abschließende Evaluation der Systeme.

Das zu entwickelnde Punktwertungssystem soll bei der Vielzahl der mittlerweile erhältlichen Angebote an Übungsprogrammen einen möglichst objektiven Vergleich ermöglichen. Die üblichen Kriterien der *usability* und die üblichen Methoden einer qualitativen Evaluation werden in dieser Studie nicht behandelt – hierzu gibt es viele Kriterienkataloge, auf deren Grundlage eine qualitative Evaluation möglich ist. Das vorgelegte System kann allerdings dazu dienen, aus der Vielzahl der Angebote eine rational begründete *Vorauswahl* zu treffen

3. Ein Prozessmodell für das Zusammenspiel von Nutzer- und Systemaktivitäten

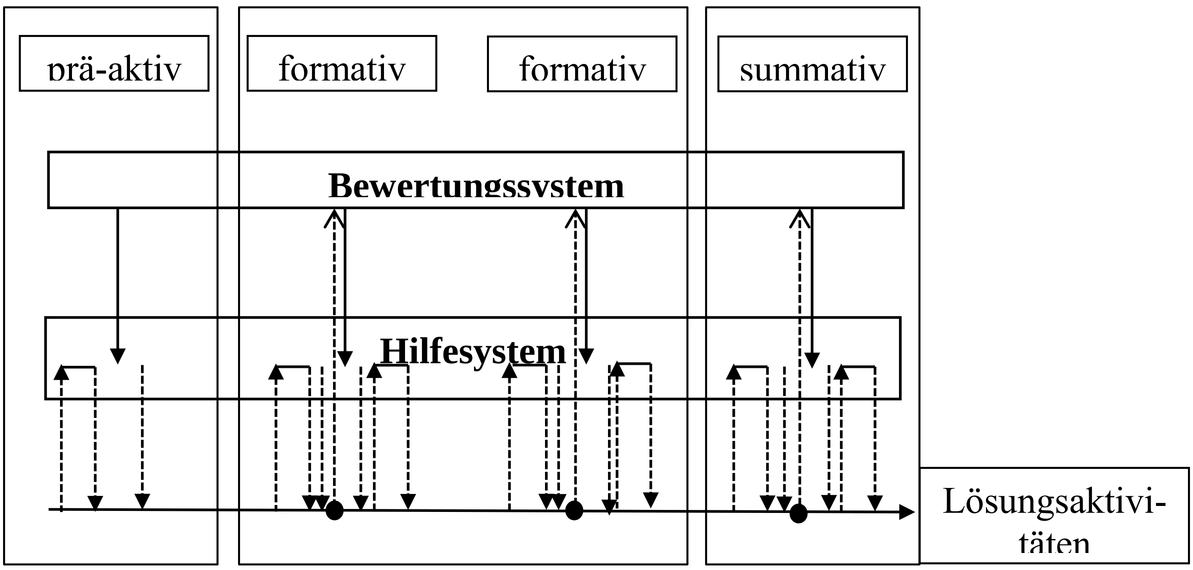
Die bestehenden Kriterienkataloge für die Beurteilung von Lern- und Übungs-Software haben eine globale und statische Sicht auf den Arbeitsprozess gemeinsam: sie fragen: „*Passt sich das System den Nutzeraktivtäten an?*“ „*Stellt das System ausreichende Hilfen bereit?*“ usw. Dabei bleibt unbeachtet, dass die denkbaren Antworten davon abhängen, an welchem Punkt des Bearbeitungsprozesses sich Nutzer und System befinden: so muss eine Hilfe, die vom System *vor* dem Beginn der Arbeit gegeben wird, notwendigerweise anders ausfallen als eine, die nach Abschluss der Arbeit erfolgt. Wird in einem Kriterienkatalog also global danach gefragt, ob das System genügend Hilfen zur Verfügung stellt, wird vom Beurteiler verlangt, dass er mehr oder weniger intuitiv eine zusammenfassende Sicht aller „Hilfeerlebnisse“ erstellt. Objektivierbar bzw. zuverlässig durch andere Beurteiler überprüfbar kann eine auf dieser Grundlage erfolgte Bewertung kaum sein. Für Eva-CBTM wurde deshalb ein Prozessmodell entwickelt, das berücksichtigt, dass die Arbeit der Übenden / Lernenden ein *Prozess* ist. Dabei verläuft der Arbeitsprozess längs einer Zeitachse, deren Beginn bei der Präsentation der Aufgabe liegt und deren Ende mit dem Drücken der Eingabe-Taste nach eingetragener Lösung, eines Lösungs-Buttons etc. markiert ist.

Die Bewertung der Lösungen sowie helfende Informationen können somit an drei Stellen ansetzen:

Prä-aktiv: Vor Beginn des Arbeitsprozesses – v*or* Beginn der Lösungsaktivitäten kann offensichtlich noch keine Nutzereingabe bewertet werden – *Hilfen* sind aber schon zu diesem Zeitpunkt möglich. Ebenso ist denkbar, dass das Bewertungssystem Informationen über frühere Nutzeraktivitäten – Erfolge und Misserfolge – bereit-stellt.

Formativ: Im Verlauf des Arbeitsprozesses – die Bewertung der Nutzeraktivitäten erfolgt auf Grund seiner Eingaben. Dieser zeitliche Verlauf unterliegt grundsätzlich jeglicher Lösungsaktivität – ob das System davon etwas „bemerkt“, ist ein zweiter Punkt. Soll das System über die Zwischenschritte einer Lösung informiert werden, muss es die Eingabe eben dieser Zwischenschritte ermöglichen. Nur in diesem Falle kann von einer formativen Bewertung / Hilfe gesprochen werden.

Summativ: Zum Abschluss des Arbeitsprozesses – dies ist die Standardform der Bewertung, die *jedes* Lehr- und Übungssystem beherrscht.



Hilfe ohne Anfrage,

Meldung des Bewertungssystems an das Hilfesystem,

Nutzer fordert Hilfe an und bekommt sie vom System,

● Nutzeraktivität,

Nutzeraktion wird an das Bewertungssystem gemeldet.

Dieses Modell kommt auf zwei Leveln zur Anwendung:

Mikro-Level: Die Bearbeitung einer einzelnen Aufgabe erfolgt grundsätzlich in mehreren Schritten. Wenn ein System entsprechend programmiert ist, kann es die einzelnen Schritte der Anwender erfassen und entsprechend reagieren.

Makro-Level: Übungssysteme stellen den Anwendern in aller Regel keine einzelnen Aufgaben, sondern Aufgabensequenzen zur Verfügung. Die Abfolge der Arbeit an diesen Aufgaben kann mit demselben Modell beschrieben werden.

Dabei ist zu berücksichtigen, dass gewisse Überschneidungen denkbar sind: so findet sich die *summative* Bewertung des Mikro-Levels als *formative* Bewertung des Makro-Levels wieder, denn der Abschluss einer einzelnen Aufgabe auf dem Mikro-Level ist ja ein einzelner „Punkt" auf dem Makro-Level, wenn man die Aufgabe als Teil einer Serie betrachtet.

4. Ergebnisse

Aufgrund der Platzbeschränkung kann können hier nur die Ergebnisse der fünf bestbewerteten Plattformen wiedergegeben werden. Eine vollständige Liste findet sich in Stein 2012 und Stein 2013.

	TV	G-BS	G-HS	G-SyS	G-AAS	G-FG	Summe
Khan Academy	0,44	15	52	13	17	26	124
IXL	0,69	21	55	21	28	3	128
Tenmarks	0,67	13	87	13	13	1	128
Mathegym	0,62	31	62	12	12	25	142
Bettermarks	0,65	65	164	26	65	46	367

Literatur

Stein, M. (2012): Eva-CBTM. 2nd enlarged edition. Münster: WTM-Verlag

Stein, M. (Hrsg.) (2013): Mathematik online. Münster: WTM-Verlag

Wilhelm STERNEMANN, Lüdinghausen

"Verhalten" von Ganzrationalen Funktionen - inhaltliche Denkanstöße zum Analysisunterricht

Der Anlass: Die "Untersuchung des Verhaltens einer ganzrationalen Funktionen für x→∞" ist eine Routineteil der leidigen Kurvendiskussionen. In manchen Schulbüchern der Stufe 10 EF wird sie schon vor der Ableitung behandelt. Bekanntlich soll der Schüler soll nur das Vorzeichen von f(x) für x→∞ auf dem Weg nach Unendlich angeben. $g(x) = a_n x^n$ vererbt sein "Verhalten" auf $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ und ist als "einfache" Potenzfunktion für den Schüler gut zu überblicken. Auch die Begründung für diese "Vererbung" ist im MU durch eine Zerlegung gut einsehbar: $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$ $= a_n x^n \cdot (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n \cdot x} + \ \ldots + \frac{a_1}{a_n \cdot x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n \cdot x^n})$, denn der zweite Faktor konvergiert gegen 1 und hat für x oberhalb einer Grenze G>0 positives Vorzeichen, so dass dann $g(x) = \ a_n\, x^n$ und $f(x)$ gleiches Vorzeichen haben.

Dies ist uralter Standart im MU und es wäre darüber kein Wort verloren worden, wenn in meinem Schulbuch nicht der Zusatz gestanden hätte: *„Die Funktionswerte von f(x) und g(x) = a_n x^n stimmen bei wachsendem x immer besser überein."*, was noch mit einer "gewagten" Wertetabelle untermauert wurde. Das hört sich so an, als ob z. B. f(x)=x^5+x^4 *bei wachsendem x immer besser mit* g(x)=x^5 *übereinstimmt*, trotz der Differenz f(x)–g(x)=x^4, mit der die Funktionswerte hochgradig auseinanderdriften. Unser spontanes Sprachempfinden meint hier offenbar nicht den vorliegenden mathematischen Sachverhalt, nämlich "f(x) / g(x) → 1, für x→∞".

Wir, Lehrer und Schüler, meinen im Sprachgebrauch der Schule mit "immer besser übereinstimmen", dass |f(x)–g(x)|→0, dass die Distanz der Werte verschwindet, was hier völlig falsch wäre. Der mathematische Sachverhalt würde in der Schulsprache lauten: Die Funktionen nähern sich anteilmäßig, prozentual an, aber nicht absolut. Die Distanz der Werte kann dabei auf dem Weg ins Unendliche erheblich auseinanderdriften. In der Fachmathematik wird so etwas mit der sog. Landau-Symbolik ausgedrückt: "f(x) = O(g(x)) für x → ∞". f(x) und g(x) heißen dann sogar oft "*asymptotisch gleich*". Dabei muss aber nichts gleich werden und die entscheidende Angabe, wohin sich x sich bewegt, wird nur oft aus dem Zusammenhang klar!

These: Ein solches Divergieren darf den Schülern nicht verschwiegen werden. Die Landau-Symbolik ist nützlich für Fachleute (Zahlentheorie, Informatik), aber für die Schule eher ungeeignet.

Im Folgenden geht es bei diesem althergebrachten Inhalt konstruktiv auf neue mathematische Entdeckungsreise.

Anregung 1: Zum "Verhalten im Unendlichen" von ganzrationalen Funktionen:

Im nebenstehenden Bild sind die Kurven $f(x) = x^5–3x^4–30x^3$ und $g(x) = x^5$ vertikal stark gestaucht mit Geogebra dargestellt. An den Termen ist abzulesen, dass die beiden Kurven in ihrem vertikalen Abstand mit x^4+10x^3 divergieren. Trotzdem sieht es so aus, als ob sich die Kurven immer weiter annähern? Wir drehen uns mal um 90° und fragen neu: Wie nah kommen sich die Kurven horizontal gemessen? (Siehe Abb.2).

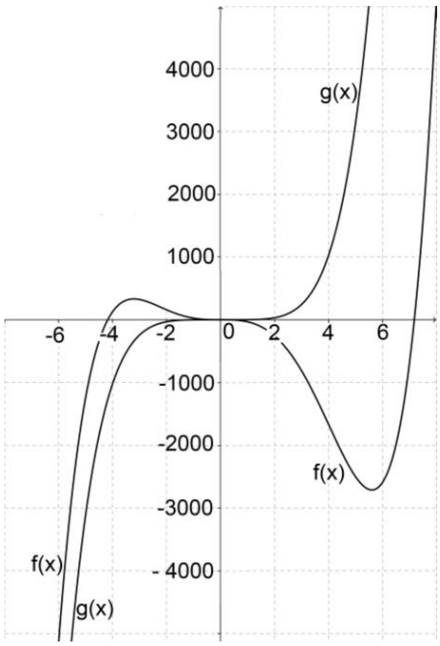


Abbildung 1

Rechnung: $g(x) = x^5$ ist als Potenzfunktion bequem umzukehren und x_2 als $g^{-1}(f(x_1))$ auszudrücken: $x_2 = (x_1^5 – 3\ x_1^4 – 30\ x_1^3\ )^{1/5}$.

Die Formel für den horizontalen Abstand lautet: $d(x_1) = x_1 – x_2 = x_1 – (x_1^5 – 3\ x_1^4 – 30\ x_1^3)^{1/5}$.

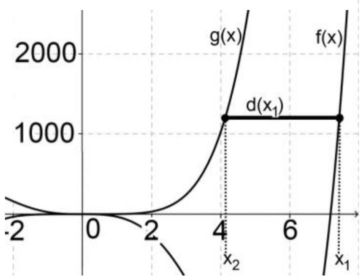


Abbildung 2

$d_\infty = \lim_{x\to\infty} d(x)$ ist ein Limes der Art "$\infty – \infty$" und von einem Schüler mit seinem Schulwissen nicht zu erraten oder gar analytisch zu ermitteln, wie das bei der Ableitung in einigen Fällen möglich war. Aber die Ausdrücke lassen sich bei CAS mit Limesfunktion eingeben und ausrechnen. Schon dadurch, dass die Limesbildung für die Schüler als eine nichttriviale Blackbox erfahren wird, gewinnt der Grenzwertbegriff eine echte intellektuell ehrliche Verstärkung.

Wie die Zuhörer im Vortrag gespannt waren, so werden auch Schüler neugierig auf das Ergebnis von sein, wenn die paradoxe Situation genügend deutlich gemacht wird. Auch erfahrene Mathematiker waren sich über das Ergebnis unsicher. Die am häufigsten gehörte Vermutung war $d_\infty = 0$. Das Ergebnis, welches DERIVE ausgab, war durchweg eine Überraschung: **d_∞ = 0,6 !** Jetzt ist spontan die mathematische Entdeckungslust geweckt worden. Man findet auch bei $x\to -\infty$ **$d_{-\infty}$ = 0,6 !** (Für die Schüler sind Schnittpunkte con g und f zu beachten! Man experimentiert mit den verschiedensten ganzrationalen Funktionen und verallgemeinerten Termen, die die CAS-Software noch akzeptiert, z.B. alle ganzrationalen Funktionen dritten Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $g(x) = ax^3$ ergibt sich: $d_\infty = \frac{-b}{3\,a}$ Bei denen 5ten Grades $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ und $g(x) = ax^5$. ergibt sich $d_\infty = \frac{-b}{5\,a}$. Für beliebige ganzrationale $f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$ und $g(x) = a_n x^n$ stößt man auf die überraschende finale Vermutung, dass $d_\infty = \frac{-a_{n-1}}{n\,a_n}$. Hier gerät allerdings die Software von DERIVE bis Mathematica an ihre Grenzen. Erst mit L'Hospital "von Hand" nachgerechnet - was der Lehrer heute auch den staunenden LK-Schülern leider nur als exotisches Stück Mathematik vorführen kann - ergibt sich der Beweis der Vermutung. Dieses schöne und verblüffende Ergebnis kann man mit den Schülern mit Gewinn reflektieren. Etwa: Das vollständig beschriebene Verhalten im Unendlichen wird nicht allein vom "höchsten" Summanden sondern von den zwei höchsten Summanden bestimmt. Erst wenn man die Potenzfunktion aus dem höchsten Summanden einer ganzrationalen Funktion horizontal um d_∞ verschiebt, $g^*(x) = a_n(x + \frac{-a_{n-1}}{n\,a_n})^n$, hat er eine wirkliche zu $f(x)$ asymptotische Lage. Als Bezeichnung bietet sich "horizontal-asymptotisch" an, wegen der betrachteten horizontalen Abstände an. Diese sind asymptotisch im alten Sinne bei den entsprechenden Armen der Umkehrfunktionen. u.s.w. Solche Betrachtungen lassen sich auf die Spezialfälle quadratische und kubische Funktionen anwenden und vieles mehr. Sie sind noch lange nicht an ihrem Ende.

Anregung 2: Als zweiter Fall von "Verhalten einer ganzrationalen Funktion" wurde in meinem Schulbuch das bei $x \to 0$ thematisiert.

Es besteht eine reizvolle Form von "Dualität":

$f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0$	
$x \to \infty$	**$x \to 0$**
Die „höchsten“ Summanden $a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1}$ bestimmen das „Verhalten“. „asymptotisch“ im weit. Sinn	Die „niedrigsten“ Summanden $a_1\,x + a_0$ bestimmen das „Verhalten“. „approximativ“ / „tangential“

Der Schüler kann im Bild für die Gerade $a_1\,x + a_0$ eine besondere Lage zur Kurve $f(x)$ entdecken, in dem man z.B. mit Funktionsplottern die Frage untersucht: Welche der Geraden durch $P(0|a_0)$ gibt das „Verhalten von f(x)“ im Punkt $P(0|a_0)$ am besten wieder? Hier stößt man auf den Begriff der Tangente als lineare Approximation, was auch mit Tabellenkalkulation untermauert werden kann. Ohne schon an Ableitung zu denken, begegnet man hier der Weierstraßschen Ableitungsauffassung nämlich $f(x) \approx$

$a_1 x + a_0 + \; x^2 q(x) = mx + f(0) + r(x)$ mit $\frac{r(x)}{x} \to 0 \;\; f\ddot{u}r\; x \to 0$. Eine Verallgemeinerung auf quadratische statt lineare Approximation ist als weiteres Experiment sehr interessant.

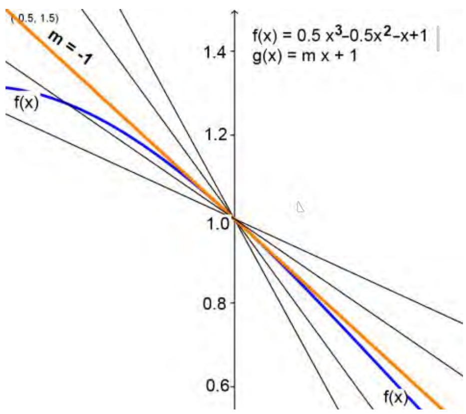


Abbildung 3

Auf den wenigen Seiten hier kann nur erwähnt werden, dass statt der Stelle x=0 jede beliebige Stelle x=a ebenso betrachtet werden kann. Man verschiebt f um a in Gegenrichtung f*(x) = f(x+a) und setzt dort x–a ein und hat einen Ausdruck wie bei einer Taylorentwicklung an einer beliebigen Stelle a. $f^*(x) = f(x+a) = \ldots \;\; = b_n\, x^n \,+\, b_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + b_1\, x \,+\, b_0$ und $f(x) = f^*(x-a) = b_n(x-a)^n + \ldots + b_1\,(x-a) + b_0$ ist die Verschiebungsform zum Verhalten an der Stelle x = a. Man kann nun auf andere simple Art den linearen Teil t(x) = $b_1(x-a) + b_0$ als Tangente berechnen.

Anregung 3: Bei der Herleitung der Ableitung von Exponentialfunktionen f(x) = a^x geht man im MU meist so vor, dass man nach f′(x) = f′(0)·a^x die **Beh:** $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = 1 \Leftrightarrow a = \lim_{k\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} =: e$ beweist. Da dies in sehr vielen Schulbüchern über den mathematisch anfechtbaren Schluss $a^h - 1 \approx h$ mit anschließendem $a^h \approx h$+1 und a ≈ $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ sei hier eine strengere Vorgehensweise vorgeschlagen, angelehnt an Mangoldt ..(1931).

Bew: $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = 1 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0}\frac{h}{a^h-1} = 1 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0}\frac{h\,\log_b a}{a^h-1} = \log_b a$

$\underset{(3)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0}\frac{h\,\log_b a}{a^h-1} = \log_b a \underset{(4)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0}\frac{\log_b(1+a^h-1)}{a^h-1} = \log_b a$

$\underset{(5)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{k\to 0}\frac{\log_b(1+k)}{k} = \log_b a \underset{(6)}{\Leftrightarrow} \lim_{k\to 0}\log_b(1+k)^{\frac{1}{k}} = \log_b a$

$\underset{(7)}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = a$ ■. Dabei wurde im Schritt (2) die Gleichung mit der Zahl $\log_b a$ multipliziert. Die Stetigkeit wurde lediglich von der Exponentialfunktion im Schritt (7) benutzt.

Literatur

Mangoldt u. Knopp (1931): Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I, S. 475.

Die Folien zum Vortrag: "www.mathe-fenster.de". : sternemann(ad)t-online.de

Hannes STOPPEL, Münster

Projektkurse in Mathematik im Rahmen eines Kooperationsprojekts von Schule und Hochschule

Die KMK hat 2003 Projektkurse und Seminarfächer für die Schulen in der Sekundarstufe II auf den Weg gebracht. Bisher bestehen aber an vielen Schulen Schwierigkeiten, solche Kurse auch für die MINT-Fächer erfolgreich zu etablieren. Im Rahmen eines Forschungsprojekts an der WWU Münster erhalten Schulen bei der Durchführung von Projektkursen Unterstützung. Hierdurch lassen sich auch weitere Brücken zwischen Schulen und Hochschulen schaffen. Im Zusammenhang mit dem bereits mehrfach mit Schülergruppen bearbeiteten Themenbeispiel „Chaostheorie und Mandelbrotmenge“ wird von Erfahrungen berichtet und die Einbettung in das Projekt erläutert.

1. Einleitung

Seit dem Jahr der Mathematik (2008) wird stärker als zuvor an der Verbesserung des Bildes der Mathematik in der Öffentlichkeit gearbeitet, was insbesondere bei Schülerinnen und Schülern das Bild der Mathematik geschehen soll. Hilfreich wäre es, ihnen aktuelle Anwendungen nahe zu bringen und ihnen die Entwicklung der Wissenschaft Mathematik in naher Vergangenheit zu zeigen. In den durch die Curricula der Sekundarstufe II festgelegten Inhalten sind keine konkreten Bezüge zu diesen Bereichen enthalten, so dass es offen bleibt, wie sich dies machen lässt.

In der KMK 2003 wurden Projektkurse (Seminarfächer in Niedersachsen) beschlossen. Diese sind der „Qualifikationsphase vorbehalten und können […] ab dem Schuljahr 2011/12 angeboten werden. Sie ermöglichen vertieftes wissenschaftspropädeutisches Arbeiten an thematischen Schwerpunkten und setzen von daher in der Einführungsphase erworbene Grundlagenkenntnisse sowie einen vorausgehenden oder begleitenden Fachunterricht in der Qualifikationsphase voraus“ (vgl. Ministerium und Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein Westfalen, 2010). In Nordrhein Westfalen umfassen Projektkurse zwei Wochenstunden über zwei aufeinander folgende Halbjahre in den Qualifikationsphasen Q1/Q2 der Sekundarstufe II.

2. Projektstruktur und Ablauf eines Kurses

An der Universität Münster werden ab dem Schuljahr 2013/2014 in Zusammenarbeit mit den Schulen Projektkurse mit den Themen *Chaostheorie*, *Universum & Kosmologie*, *Codierung und Kryptographie*, *Wegfinden und Navigation* und *Entropie von unterschiedlichen Blickpunkten* angeboten.

Diese Kurse sollen sich für Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Vorkenntnisse und Stärke sowie mit unterschiedlichem Interesse eignen. Hierbei sollen die Schülerinnen und Schüler aktuelle Anwendungen und Entwicklungen der Mathematik kennenlernen, indem sie neben dem Realitätsbezug auch einen fachlichen Einblick erhalten, damit sie für die Mathematik interessiert werden und sie gar als bereichernd erfahren. Weitere Ziele liegen darin, Schülerinnen und Schülern verschiedene Arbeitsformen der Mathematik zu vermitteln, anwenden zu lassen und einen Ausblick auf ein mögliches Mathematikstudium zu geben.

Nicht zuletzt aufgrund der Tatsache, dass eine Schule weit entfernt von der Universität sein kann und die An- und die Abreise für Schülerinnen und Schüler aufwendig wären, wird der Kurs auf die Schule und die Universität aufgeteilt. Bedenkt man, dass ein Schuljahr aus etwa neununddreißig Unterrichtswochen besteht, von denen ungefähr fünfunddreißig zeugnisrelevant sind, so existieren an die achtzig Unterrichtsstunden, von denen mit Rücksicht auf mögliche Ausfälle aufgrund von Feiertagen und Krankheit etwa sechzig möglichst gleichmäßig auf den zeugnisrelevanten Bereich des Schuljahres verteilt werden sollten. Bei der Durchführung eines Kurses sind Zyklen mit zwei Stationen geplant. Bei einer handelt es sich um eine Einarbeitung in Themenabschnitte und Erweiterungen der Inhalte in der Universität Münster. Diese Arbeitsphasen bestehen aus jeweils vier Unterrichtsstunden. Die übrige Unterrichtszeit des Projektkurses werden die Schülerinnen und Schüler innerhalb ihrer Schulen verbringen, in der sie bei freier Zeiteinteilung übrige Aufgaben zur Vertiefung und zur Erweiterung der Inhalte bearbeiten.

Die Schülerinnen und Schüler werden Ergebnisse ihrer Arbeitsphasen in unterschiedlicher Form notieren. Einerseits werden Mitschriften und Lösungen von Aufgaben schriftlich innerhalb benutzter Medien wie Heften oder Computer-Algebra-Systemen notiert. Andererseits werden die Schülerinnen und Schüler in den Arbeitsphasen außerhalb der Universität ein Lerntagebuch führen. Das Lerntagebuch wird nach einem in Nückles et al. (2010) formulierten Prinzip geführt, in dem Prompts vergleichsweise offen sind, so dass die Schülerinnen und Schüler nach Möglichkeit frei formulieren können.

Mithilfe der Arbeitsformen im Kurs, insbesondere außerhalb der Universität und in Verbindung mit dem Lerntagebuch, werden die Schülerinnen und Schüler in seinem Verlauf ihre Kompetenzen bei der Erstellung eines Arbeitsplans, Erfassung von Lernstrategien, eigenverantwortliches Lernen sowie Entwicklung und Umsetzung von Lernreflexion erhöhen (vgl. Metzig und Schuster, 2010).

Durch die praktischen Ergebnisse der Kurse sowie die Lerntagebücher sollen die zeitlichen Entwicklungen fachlicher und psychologischer Aspekte (beispielsweise Beliefs in Verbindung mit Ergebnissen von Arbeitsphasen und Arbeitsformen) auf Zusammenhänge untersucht werden. Aus den Ergebnissen sollen Möglichkeiten erfasst werden, mit deren Anwendungen sich in Schulen eine Steigerung des Interesses von Schülerinnen und Schülern für Mathematik erreichen lässt.

3. Kursverlauf angelehnt an einem Beispiel

Am Beispiel des Themas der Chaostheorie soll der Aufbau eines Projektkurses kurz beschrieben werden. Das Thema wurde zum Teil mehrfach in Differenzierungskursen (DK) der Jahrgangsstufe 10, AGs in der Schule sowie einem Kurs der Deutschen Schülerakademie (DSA) behandelt und im Verlauf der Zeit überarbeitet. In allen Gruppen wurden Arbeitsformen unterschiedlicher Niveaus angeboten. In den letzten AGs und im Kurs der DSA wurden die Aufgaben nach vorherigen Erfahrungen in drei Niveaustufen unterteilt und unterschiedliche mathematische Medien verwendet.

In den DKs wurden die Themen von Orbits reeller Funktionen untersucht. Neben der Untersuchung von Orbits inklusive Hintergründen lag eines der Ziele im Verständnis des Feigenbaum-Diagramms. In den AGs und der DSA wurden ferner Orbits komplexer Funktionen, die Julia-Mengen (JM) und die Mandelbrot-Menge (MM) inklusive einiger mathematischer Hintergründe behandelt. Zu den mathematischen Inhalten gehörten hierbei auch bestimmte Bereiche der Algebra, der komplexen Analysis, der Funktionentheorie und der Topologie (wie beispielsweise der Zusammenhang von JM). Ferner wurden auch Beweise analysiert, teilweise von den Teilnehmern selbst geführt (z.B. vollständige Induktion). Schnittstellen zu Anwendungen ergeben sich beispielsweise zu Physik, Medizin und Biologie.

4. Ziele des Forschungsprojekts

Ziele des Projekts liegen darin, zu untersuchen, wie sich Einstellungen der Schülerinnen und Schüler gegenüber der Mathematik verbessern lassen. In Verbindung hierzu sollen das Wissen und das Verständnis der mathematischen Inhalte und Hintergründe betrachtet werden. Eine Messung von Wissen und Verständnis lässt sich u. a. mithilfe der Skalierungen aus Zehavi und Mann (2005), Stoppel (2012) oder Adu-Gyamfi, Stiff und Bossé, (2012) betrachten.

Erforscht werden sollen zeitliche Entwicklungen von Beliefs der Schülerinnen und Schüler mithilfe der entwickelten Kursbausteine anhand von Lerntagebüchern, Interviews und Ergebnissen der Arbeitsphasen. Bei der

Skalierung der Beliefs wird beispielsweise auf die Skalierung nach Rolka, Rösken und Liljedahl (2006) zurückgegriffen. Hier wird zwischen den folgenden Beliefs unterschieden, die gut in einem Lerntagebuch sichtbar zu machen sind: 1. *Toolbox Aspekt:* Mathematik gesehen als eine Menge von Gesetzen, Formeln, …, 2. *System Aspekt:* Mathematik ist charakterisiert durch Logik, Beweise, exakte Definitionen, 3. *Process Aspekt:* Mathematik ist aufgefasst als konstruktiver Prozess, wo bestimmte Beziehungen zwischen Sätzen und Notizen eine Rolle spielen, 4. *Utility Aspekt (usefulness):* Nützlichkeit, Anwendung. Weitere Skalierungen von Beliefs finden sich auch in Stockton, J. C. (2010). Wenn möglich sollen Antworten auf die folgenden Fragen gefunden werden: Wie lässt sich mithilfe von Beliefs die Motivation der Schülerinnen und Schüler verändern? Was ergibt sich hiermit für Wissen/Verständnis der Schülerinnen und Schüler? Welche Zusammenhänge lassen sich zwischen Beliefs, den fachlichen Inhalten, den fachlichen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler sowie dem Verlauf der Reihe finden?

Literatur

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L., & Bossé, M. J. (2012). Lost in Translation: Examining Translation Associated With Mathematical Representations. *School science and mathematics*, *112*(3), 159–170.

Metzig, W., & Schuster, M. (2010). Lernen zu lernen: Lernstrategien wirkungsvoll einsetzen; (8th ed.). Berlin [u.a.]: Springer.

Ministerium und Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein Westfalen (2010). Rahmenbedingungen durch die „Verordnung über den Bildungsgang und die Abiturprüfung (APO-GOst)“. http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/projektkurse_sii/teil-a-vorgaben-und-rahmen/vorgaben-apo-gost/

Nückles, M., Hübner, S., Glogger, I., Holzäpfel, L., Schwonke, R., & Renkl, A. (2010). Selbstreguliert lernen durch Schreiben von Lerntagebüchern. In M. Gläser-Zikuda (Hrs.), Lerntagebuch und Portfolio aus empirischer Sicht (S. 35-51). Landau: Empirische Pädagogik e.V.

Rolka, K., Rösken, B., & Liljedahl, P. (2006). Challenging the Mathematical Beliefs of Preservice Elementary School Teachers. In J. Novatná, et al. (Eds.), Proceedings 30th Conference of the International Group for the PME (pp. 441-448). Prague: PME.

Stockton, J. C. (2010). A Study of the Relationship between Epistomological Beliefs and Self-Reulated Learning among Advanced Placement Calculus Students in the Context of Mathematical Problem Solving (Dissertation), Kennesaw State University. Retrieved from http://digitalcommons.kennesaw.edu/etd

Stoppel, H. (2012). Understanding Difficulties in Solving Exercises: Phasing solutions. *CULMS Newsletter, (6),* 18-31.

Zehavi, N., & Mann, G. (2005). Instrumented Techniques and Re_ective Thinking in Analytic Geometry. In: Sriraman, B. (Ed). The Montana Mathematics Enthusiast, Vol. 2, no. 2, (pp. 83-92). Calgary, Canada: University of Calgary.

Christine STREIT & Christof WEBER, PH Nordwestschweiz

Vignetten zur Erhebung von handlungsnahem, mathematik-spezifischem Wissen angehender Grundschullehrkräfte

Mit Studien wie COACTIV (Krauss et al. 2008) oder TEDS-M (Blömeke et al. 2010) ist das *Professionswissen* von Mathematiklehrkräften verstärkt in den Fokus des wissenschaftlich-mathematikdidaktischen Diskurses gerückt. Dahinter steht letztlich die Frage, was gute Lehrerinnen und Lehrer ausmacht. Es wird davon ausgegangen, dass innerhalb des Professionswissens – neben einem fundierten pädagogisch-psychologischen Wissen – das fachliche und fachdidaktische Wissen eine entscheidende Rolle spielen (Baumert & Kunter 2006). Darunter fällt unter anderem auch die *diagnostische Kompetenz*: Je kompetenter eine Lehrkraft hinsichtlich dieses Aspekts ist, desto qualitativ-hochstehender dürfte ihr Unterricht sein (Baumert & Kunter 2006, Blömeke et al. 2008, Helmke 2009). Allerdings bestehen große Unterschiede hinsichtlich der Auffassung darüber, was diagnostische Kompetenz ausmacht (von Aufschnaiter & Blömeke 2010).

Diagnose wird in der Unterrichtspraxis erst im Hinblick auf eine Handlung, eine fördernde Maßnahme der Lehrkraft bedeutsam. Dabei folgt aus einer guten Diagnose noch keine gute Förderung. Kurz, Förderung kann nicht einfach unter Diagnose subsumiert, sondern muss explizit genannt und untersucht werden – es geht um *Diagnose und Förderung* (Schrader & Helmke 1987). Da jede Diagnose von der intendierten Förderung beeinflusst wird, ist ihr Verhältnis kein kausales. Zudem kann sich Diagnose wie Förderung auf einzelne Kinder oder eine Gruppe von Kindern beziehen. Welches derart *handlungsnahe Wissen* (Riese & Reinhold 2010) aus den Bereichen der Diagnose und Förderung benötigen Mathematiklehrkräfte also?

Um zu klären, wie Lehramtsstudierenden (Grundschule) durch das Studium beim Aufbau derartigen Professionswissens unterstützt werden, soll dieses sichtbar gemacht und seine Veränderung im Studium erfasst werden, und zwar im Bereich der Arithmetik. Da diese Art des Professionswissens empirisch weit weniger unmittelbar zugänglich kann als etwa Faktenwissen, setzen wir *Vignetten* ein (Streit & Royar 2012). In diesem Beitrag werden der wissenschaftsgeschichtliche Hintergrund des Instruments und die Entwicklung eines Vignettentests zur Erfassung von handlungsnahem Wissen vorgestellt.[1]

[1] Unserer Forschungsgruppe gehören – neben den beiden Autoren – Franco Caluori und Christian Rüede (Pädagogische Hochschule FHNW / CH) sowie Andrea Peter-Koop (Universität Bielefeld / D) an.

1. Vignetten in der Forschung

Der Begriff der Vignette stammt aus der empirischen Sozialforschung („teilnehmende Beobachtung") des anglo-amerikanischen Sprachraums der 1950er-Jahre. Vignetten verbinden in gewissem Sinne Befragung und Experiment: Sie dienen als Stimuli, um Probanden in Interviews in einen gewünschten Kontext zu versetzen und zu erfahren, wie dieser Kontext ihre potentiellen Handlungen und individuellen Urteile beeinflusst. Trotz teilweise stark unterschiedlichen Ausprägungen ist Vignetten unabhängig von der Forschungsrichtig gemein, dass sie eine in sich abgeschlossene, reale bzw. fiktionale Szene wiedergeben, die intensiv, ohne weiteres auch irritierend sein kann, und zwar in Form kurzer und dennoch detailreicher Film- oder Textpassagen. (Schratz et al. 2012)

Aufgrund ihrer Stärken – die Situierung und gleichzeitige Distanznahme von der eigenen Biographie – werden Vignetten seit einigen Jahren auch in der Lehrerbildungsforschung eingesetzt, zum Beispiel zur Messung der Qualität von Lehrerinstruktionen an Berufsschulen (Oser et al. 2010) oder zur Erfassung professioneller Kompetenzen von Lehramtsstudierenden der Naturwissenschaften (Brovelli et al. 2012). Ähnlich wie diagnostische Kompetenz gerne auf Urteilsgenauigkeit verkürzt wird, thematisieren Vignetten in der Forschung bisher meist eine Diagnose in Form von Fehlererkennung. Einzelfördermaßnahmen oder Unterrichtsfortführung als eine Form der Förderung mehrerer Kinder werden kaum je angeregt (von Aufschnaiter & Blömeke 2010).[2]

2. Vignetten in unserem Projekt: Entwicklung eines Vignettentests

In einem Forschungsprojekt sollen folgende Fragen geklärt werden:

a) *Welches handlungsnahe, mathematikspezifische Wissen hinsichtlich der Diagnose und Förderung zeigen angehende Grundschullehrkräfte?*

b) *Wie verändert sich dieses Wissen im Laufe des Studiums?*

Zur Beantwortung dieser Fragen entwickeln wir – im Rahmen eines vorerst qualitativen, später quantitativen Forschungsdesigns – einen *Vignettentest*. Dabei wird in mehreren Schritten vorgegangen. Selbst wenn ein solches Vorgehen auch aufwändig ist, so ermöglicht es doch, dem Dilemma „Authentizität vs. statistische Auswertbarkeit" angemessen zu begegnen.

[2] Vereinzelt finden Vignetten auch in der *Ausbildung* Verwendung. So scheinen sie sich dafür zu eignen, Lehramtsstudierenden der Pädagogik unterschiedliche Unterrichtsstile zu vermitteln (Jeffries & Maeder 2004) oder Lernmomente von Kindern verstehend und einfühlend rekonstruieren zu können (Schratz et al. 2012).

In einem ersten Schritt haben wir einen Pool von Vignetten entwickelt. Alle Vignetten sind Text-, zum Teil auch Bildvignetten, die Lernmomente eines oder mehrerer Grundschulkinder wiedergeben: transkribierte Unterrichtsgespräche, Schülerdokumente oder -produktionen, Fotos von Schülermaterialien, die bei der Auseinandersetzung mit Aufgaben aus der Arithmetik der Grundschule entstanden sind. Jedem solchen Lernmoment ist eine Beschreibung der zugehörigen Unterrichtssituation vorangestellt, die Situierung. Abgeschlossen wird jede Vignette von zwei Fragegruppen: Die ersten Fragen verlangen, das Schülerdokument hinsichtlich der Denkwege und Vorstellungen des Kindes bzw. der Kinder zu interpretieren, die andere Fragegruppe zielt darauf, mögliche Maßnahmen, die vor dem Hintergrund der Diagnose ergriffen würden, zu entwickeln und beschreiben.

Unser Vignettenpool besteht also aus schriftlichen Vignetten, die offene Fragen sowohl zur Diagnose wie auch zur Förderung stellen. Dabei geht es in einem Teil der Vignetten um den Lernstand und die Maßnahmen bzgl. einzelner Kinder, in einem anderen Teil geht es um die Lernstände und die Maßnahmen bzgl. einer ganzen Lerngruppe oder Klasse (Tab. 1).

Handlungsnahes Wissen	**Fokus der Vignette: Individuelles Kind**	**Fokus der Vignette: Gruppe von Kindern**
Diagnose	Lernstand eines einzelnen Kindes in einem ausgewählten Lernbereich feststellen	Lernstände einer Gruppe von Kindern in ausgewählten Lernbereich feststellen
Förderung	Maßnahmen für das einzelne Kind entwickeln	Maßnahmen für die Gruppe von Kindern entwickeln

Tab. 1: Handlungsnahes Wissen im Bereich Diagnose und Förderung

Um sicherzustellen, dass unsere Vignetten nicht nur sozialwissenschaftliche Kriterien (Form: kurz und detailreich, Inhalt: eine entscheidende Szene) erfüllen, wurden sie von acht Experten (Mathematikdidaktikern und erfahrenen Praktikern) inhaltlich validiert. Dazu wurden die Experten in halbstandardisierten Interviews befragt, inwiefern die vorgeschlagenen Vignetten zentrale Gütekriterien erfüllen, nämlich die Authentizität und Typizität der eingefangenen Lernmomente, die Praxisnähe der Situierung sowie das Aktivierungspotential und Anforderungsprofil der Fragen (Atria et al. 2006, Seidel et al. 2010). Aus den für besonders „gut“ befundenen Vignetten wurden schließlich vier Vignetten ausgewählt, von denen zwei Vignetten auf individuelle Kinder und zwei Vignetten auf Gruppen von Kindern fokussieren.

Bis die endgültige Fassung des Vignettentests vorliegt, sind noch einige weitere Schritte notwendig. Als nächstes sollen die spezifisch mathematikbezogenen Aspekte handlungsnahen Wissens explizit gemacht und benannt werden. Dazu werden wir den Vignettenpool unterschiedlichen Experten – Diagnostikern der Sonderpädagogik und Psychologie, Mathematikdidaktikern, Fachmathematikern und „erfahrenen“ Praktikern – vorlegen: Was „sehen“ diese Experten in den Vignetten, und welche diagnosegeleiteten Maßnahmen schlagen sie vor? Weil die Antworten auf die Fragen vor dem Hintergrund der jeweiligen Expertise unterschiedlich ausfallen dürften, besteht begründete Hoffnung, damit erste Hinweise auf Konstituenten eines handlungsnahen Wissens zu erhalten, das mathematikspezifisch ist.

In einer Vorstudie wurde inhaltsanalytisch ein Kategoriensystem entwickelt, um die vorgeschlagenen Fördermaßnahmen zu analysieren. Dieses wird uns als Grundlage dienen, um mithilfe der skalierenden Strukturierung ein Testmanual zu entwickeln. Nachdem das Instrument hinsichtlich der argumentativen wie kriterialen Validität überprüft sein wird, kann es dann Lehramtsstudierenden an verschiedenen Hochschulen vorgelegt werden. Über diese Hauptstudie wird zu gegebenem Zeitpunkt zu berichten sein.

Literatur (Auswahl)

Atria, M., Strohmeier, D., Spiel, C. (2006). Der Einsatz von Vignetten in der Programmevaluation – Beispiele aus dem Anwendungsfeld „Gewalt in der Schule“. In U. Flick (Hrsg.), *Qualitative Evaluationsforschung*, Reinbek: Rowohlt, 233–249.

von Aufschnaiter, C. & Blömeke, S. (2010). Professionelle Kompetenz von (angehenden) Lehrkräften erfassen – Desiderata. In: *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaft*, 16, 361–367.

Brovelli, D., Bölsterli, K, Rehm, M., Wilhelm, M. (2012). Erfassen von professionellen Kompetenzen für den naturwissenschaftlichen Unterricht mittels Vignetten – eine Methodenetablierung. In: *Unterrichtswissenschaft* (eingereicht).

Jeffries, C. & Maeder, D. (2004): Using Vignettes to Build and Assess Teacher Understanding of Instructional Strategies. In: *The Professional Educator*, 27(1/2), 17–28.

Oser, F., Heinzer, S., Salzmann, P. (2010). Die Messung der Qualität von professionellen Kompetenzprofilen von Lehrpersonen mit Hilfe der Einschätzung von Filmvignetten. In: *Unterrichtswissenschaft*, 38(1), 5–28.

Riese, J. & Reinhold, P. (2010). Empirische Erkenntnisse zur Struktur professioneller Handlungskompetenz von angehenden Physiklehrkräften. In: *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaft,* 16, 167–187.

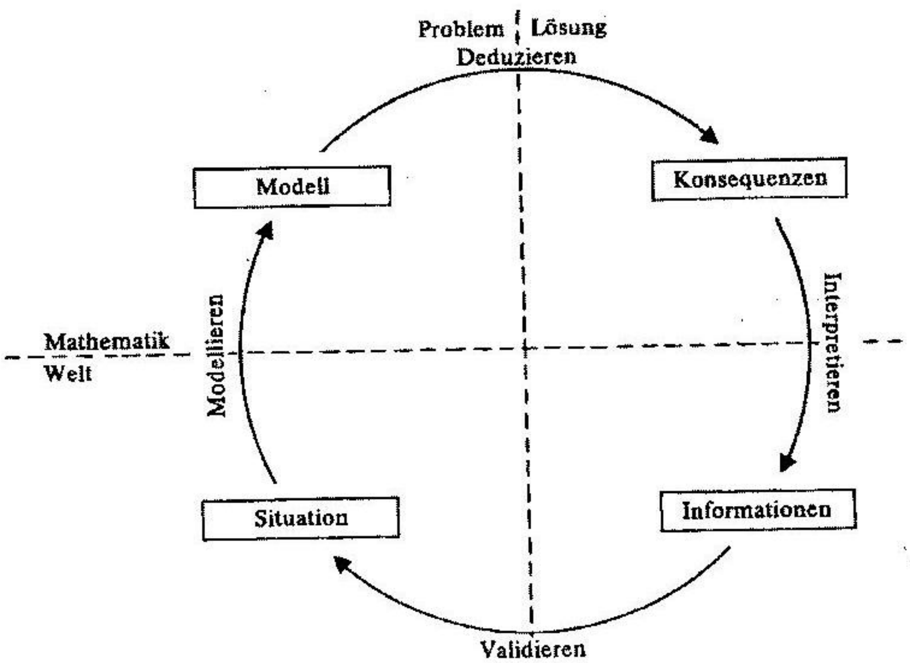
Schratz, M., Schwarz, J., Westfall-Greiter, T. (2012). *Lernen als bildende Erfahrung*. Innsbruck: Studienverlag.

Streit, C. & Royar, T. (2012). Förderung diagnostischer Kompetenz im Bereich Mathematik angehender Lehrpersonen in Vorschule und Unterstufe. In M. Ludwig, M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*. WTM-Verlag, 849–852.

Horst STRUVE, Köln

Ein Fallbeispiel zur Theorieentwicklung in der Mathematik: Die Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen

Wie wird mathematisches Wissen entwickelt? Ein in den letzten Jahren viel diskutierter Ansatz beschreibt den Prozess der Entwicklung von Mathematik mit Hilfe von Modellierungskreisläufen, etwa dem folgenden von H. Schupp:



Die zugrundliegende Vorstellung ist die eines Optimierungsprozesses: Ein mehrfaches Durchlaufen des Kreislaufes optimiert den mathematischen Ansatz. – In dem Vortrag wurde an einem Fallbeispiel untersucht, ob mit Hilfe eines solchen Kreislaufes auch die Entwicklung einer Theorie und nicht nur einzelner Anwendungen von solchen Theorien angemessen beschreibbar ist.

Das Beispiel stammt aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist heutzutage für viele Theorien grundlegend, beispielsweise für physikalische Theorien (kinetische Gastheorie), psychologische Theorien (Dissonanztheorie), mathematische Theorien (Kolmogoroff), ökonomische Theorie (Mikroökonomie) und normative Theorien (Entscheidungstheorien). Historischer Ursprung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs waren aber Probleme der Gerechtigkeit von Glücksspielen. - Die Entwicklung der *Theorie der Gerechtigkeit von Glückspielen* kann man als das Herstellen eines *reflective equilibrium*, eines Überlegungsgleichgewichtes beschreiben. Dieser Begriff stammt von J. Rawls (1971), der in seinem berühmten Werk *A Theory of Justice*, eine gerechte Gesellschaftsordnung diskutiert. Sein Ansatz ist in der Rechtsphilosophie aufgrund der umfassenden politischen und sozioökonomischen Überlegungen und ihres beispielhaften methodischen Vorgehens intensiv diskutiert worden.

Die geschichtliche Entwicklung der Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen lässt sich in drei Abschnitte unterteilen. Zunächst wurden zahlreiche mit bestimmten Glücksspielen zusammenhängende Probleme diskutiert. Sodann wurden Prinzipien einer Theorie formuliert, die auf die untersuchten Einzelprobleme anwendbar waren. Schließlich wurde ein Überlegungsgleichgewicht zwischen auf die Einzelprobleme sich beziehende Urteilen und den Prinzipien herausgearbeitet. – Insgesamt zeigt sich, dass für die Durchsetzung der heute allgemein akzeptierten Gerechtigkeitsvorstellung nicht Optimierungsprozesse i.S.v. von Modellierungskreisläufen wesentlich waren sondern Gründe der Theorieentwicklung, die nicht-inhaltlicher Art waren. – Im folgenden werden die genannten drei Phasen skizziert.

1. Diskussion von Einzelproblemen

Das Jahr 1654 gilt als das Geburtsjahr der Wahrscheinlichkeitstheorie, weil Fermat und Pascal in einem Briefwechsel übereinstimmend eine Lösung für ein Glücksspielproblem vorschlugen, das aus heutiger Sicht den modernen Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet. Das *Teilungsproblem* – auch *force majeure* und *problem of points* genannt lautet wie folgt:

Zwei Spieler, A und B, haben eine Reihe von Spielen verabredet, die jeweils nur mit dem Gewinn des einen oder des anderen enden können. Ein Remis ist nicht möglich. Wer zuerst k viele (k eine natürliche Zahl) Spiele gewonnen hat, erhält den von beiden zu gleichen Teilen geleisteten Einsatz E. Durch höhere Gewalt müssen die Spieler bei einem Stand von a:b für Spieler A gegen Spieler B die Partien abbrechen. Wie ist der Einsatz gerecht zu verteilen?

Viele bekannte Mathematiker haben sich mit diesem Problem beschäftigt, weil es als ein paradigmatisches Beispiel für eine zu entwickelnde Theorie galt. Bemerkenswert ist die Vielzahl von unterschiedlichen Lösungen, die vorgeschlagen wurden, bzgl. $k = 4$ und $a:b = 3:1$ etwa Pacioli (1494) 3:1, Cardano (1539) 6:1, Tartaglia (1556) 4:1, Fermat (1654) 7:1, Pascal (1654) 7:1, Leibniz (1678) 5:1.

Versucht man Begründungen für die vorgeschlagenen Lösungen zu rekonstruieren, so stellt man fest, dass aus inhaltlicher Sicht kaum eine Lösung vor einer anderen ausgezeichnet ist. Beispielhaft ist dies in Struve, H. & Struve, R. (1997) ausgeführt.

Neben force majeure wurde eine Reihe von weiteren Glücksspielen bzgl. ihrer Fairneß diskutiert. Diese betrafen die Augensummen von einem oder mehreren Würfeln, das Ziehen verschiedenfarbiger Kugeln aus Urnen (mit oder ohne Zurücklegen), das Auftreten vorgegebener Zahlen und Zahlenfolgen beim Lotterie- und Rencontréspiel und viele weitere.

2. Formulierung von Prinzipien

Bei der Behandlung zahlreicher verschiedener Einzelprobleme bildeten sich schließlich gewisse Prinzipien heraus, nach denen die Fairneß von Glücksspielen beurteilt wurde. Czuber (1898, S. 111) beschreibt die Auffassung der Mathematiker im 17. und 18. Jahrhundert folgendermaßen:

Es stand bei den genannten Geometern sowie bei ihren Nachfolgern in der Wahrscheinlichkeitslehre als Axiom fest, daß gleich mögliche Fälle gleich große Ansprüche auf die Spieleinlage begründen demjenigen, dem sie günstig sind; daraus ergab sich als Regel, daß die Spieleinlage zu teilen sei im Verhältnisse der Anzahlen der günstigen Fälle, welche jedem Spieler für die Realisirung des schließlichen Gewinnes zukommen.

Eine äquivalente Version des grundlegenden Prinzips wurde im 18. und 19. Jahrhundert wie folgt formuliert (Czuber, 1898, 111):

... der Begriff der mathematischen Hoffnung, der formal definirt wird als das Product einer zu erhoffenden Summe mit der Wahrscheinlichkeit, sie zu erlangen. Seine metaphysische Bedeutung wäre nach der vorgeführten Deduction dahin zu formulieren, die mathematische Hoffnung bedeute den Anteil der auf dem Spiel stehenden Summe, welcher demjenigen, der sie mit der bezeichneten Wahrscheinlichkeit erwartet, gebührte, wenn von der Entscheidung durch das Los oder den Zufall abgesehen würde.

Statt von "mathematischer Hoffnung" spricht man heute von "Erwartungswert". In moderner Terminologie lautet daher das von Czuber formulierte Prinzip: Eine gerechte Verteilung hat entsprechend den Erwartungswerten zu geschehen.

3. Herausbildung eines Überlegungsgleichgewichtes

Mit dem Begriff des Überlegungsgleichgewichtes bezeichnet Rawls das Ende eines Prozesses, in dem bzgl. einer normativen Theorie einerseits die Einzelurteile den Prinzipien angepasst werden und andererseits die Prinzipien im Hinblick auf konkrete Einzelurteile präzisiert und revidiert werden. Dieser Prozess lässt sich in der historischen Entwicklung der Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen nachzeichnen.

Ein prominentes Beispiel hierfür ist die Diskussion um das Problem *force majeure*. Die Fermat-Pascalsche Lösung setzte sich nicht deshalb durch, weil sie inhaltlich angemessener war, sondern weil sie besser zu den aufgestellten Prinzipien passte. Weitere Beispielsind das *problème des dés* - Was ist der gerechte Einsatz zweier Spieler, die zwei Würfel solange werfen bis zum erstenmal die augensumme 9 bzw. 10 erscheint? - und das *Problem des doppelten Münzwurfs* - Was ist der gerechte Einsatz zweier Spieler, die zweimal eine Münze werfen und um das Auftreten der von "Wappen" spielen? Zu beiden Problemen vertraten berühmte Mathematiker unterschiedliche Auffassungen.

Für eine ausführliche Darstellung der Theorie und der damit verbundenen Probleme sei auf Burscheid, H.J. & Struve, H. (2010) verwiesen. Insbesondere zeigt die Geschichte, dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit keine vor Aufstellung der Theorie gegebene Bedeutung hatte, sondern erst durch die Theorie eine Bedeutung erhielt – nämlich eine mit physikalistischer Akzentuierung. Begriffe solcher Art nennt man *theoretische Begriffe*. Eine strukturalistische Darstellung der Theorie der Gerechtigkeit von Glücksspielen findet man in Burscheid, H. & Struve (2000), in der auch die Problematik theoretischer Begriffe berücksichtigt wird.

Literatur

Burscheid, H.J. & Struve (2000): The Theory of Stochastic Fairness. In: Balzer et al.: Structuralist Knowledge Representation. Amsterdam, 69-98

Burscheid, H.J. & Struve, H. (2001): Zur Entwicklung und Rechtfertigung normativer Theorien – das Beispiel der Gerechtigkeit von Glücksspielen. Dialectica 55, S. 259-281

Burscheid, H.J. & Struve, H. (2010): Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Hildesheim

Czuber, E. (1898): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen - In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. VII (Leipzig)

Rawls, J. (1971): A Theory of Justice. Cambridge (Mass.)

Struve, H. & Struve, R. (1997): Leibniz als Wahrscheinlichkeitstheoretiker. Studia Leibnitiana XXIX, 112-122

Kinga SZŰCS, Matthias MÜLLER, Jena

Schwierigkeiten beim Einsatz digitaler Werkzeuge als Reaktion auf bilinguale Unterschiede

In Thüringen wurde 2011 der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht ab der 9. Klasse verbindlich eingeführt. Die meistverbreiteten digitalen Werkzeuge wie z.B. das CAS-Handheld TI-Nspire CX werden im englischen Sprachraum entwickelt und weitestgehend ohne Übersetzung des Befehlskatalogs bzw. ohne Anpassung an die deutsche mathematische Kultur in Thüringer Schulen eingesetzt. Bei Hospitationen wurden allerdings vom Autor im Klassenraum bei Schülern Schwierigkeiten beobachtet, die auf Unterschiede im mathematischen Arbeiten zwischen dem englischen und deutschen Sprachraum zurückzuführen sind. Überdies wurden weitere Diskrepanzen zwischen der in Deutschland üblichen Schulmathematik einerseits und mathematischen Traditionen im englischen Sprachraum andererseits beim eigenen Einsatz von CAS zunächst auf einer intuitiven Ebene aufgedeckt. Folgende Beispiele sollen dies erläutern:

Dem deutschen Dezimalkomma entspricht ein Dezimalpunkt beim CAS, Vektoren und Matrizen werden in Deutschland in runde Klammern gesetzt, während das CAS eckige Klammern verwendet. Das in Deutschland übliche Grundintervall bei trigonometrischen Funktionen ist [0; 2π], dahingegen wird im englischen Sprachraum teilweise [-π, π] bevorzugt. Dadurch gibt das CAS beispielsweise für arcsin(-0.5)=–π/6 an, während im deutschen Klassenraum hierfür 11π/6 berechnet wird. In der deutschen Schulmathematik gilt für alle Wurzelfunktionen die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen als Definitionsbereich, das CAS unterscheidet zwischen geraden und ungeraden Wurzelexponenten. Bei ungeraden Wurzelexponenten können auch die Wurzeln aus negativen Zahlen gezogen werden.

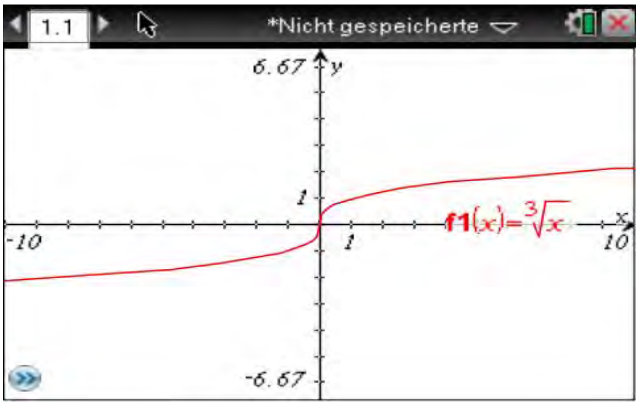


Abbildung 1: Screenshot des TI-Nspire CX – Anzeige des Graphs der Funktion $f(x)=\sqrt[3]{x}$

Diese Erfahrungen gaben Anlass, weitere Unterschiede in der mathematischen Tradition – insbesondere in der mathematischen Fachsprache – im deutsch-englischen Kontext exemplarisch aber systematisch zu ermitteln, die beim Einsatz von CAS zu Verstehensschwierigkeiten führen können.

1. Theoretisches Modell: Kulturabhängigkeit der Mathematik

Die oben genannten Erfahrungen implizieren, auf Theorien Bezug zu nehmen, die insbesondere die Kulturabhängigkeit der Mathematik betonen. Auch wenn es in der Mathematikdidaktik Meinungen gibt, die die Universalität und dadurch die Sprach- und Kulturunabhängigkeit der Mathematik aussprechen (siehe z.B. Rolka, 2004), teilen die Autoren des vorliegenden Beitrags die Meinung von Barwell, nämlich dass „doing mathematics is different in different languages“ (Barwell, 2003). Insbesondere schließen sich die Autoren der differenzierten Behauptung von Novotná&Moraová an, dass je komplizierter die Mathematik wird, die man betreibt, desto weniger spielen dabei sprachliche Probleme eine Rolle. Von dieser Behauptung ausgehend wird die Hypothese formuliert, dass sich auf der Ebene der Schulmathematik noch zahlreiche Unterschiede im deutsch-englischen Kontext finden lassen.

2. Praktisches Modell: Leitfadeninterviews zur Ermittlung von kulturbedingten Unterschieden in der Mathematik

Da bisher kein entsprechendes Datenmaterial vorliegt – zumindest den Autoren bis zum Zeitpunkt des Beitrages nicht bekannt – wurden im Rahmen einer explorativen Studie Expertenbefragungen in Form von Leitfadeninterviews durchgeführt. Die Probanden wurden nach zwei Kriterien ausgewählt: Sie sollten die Mathematik von einem hohen Standpunkt aus reflektieren können und in beiden Fachsprachen (in der deutschen und in der englischen) sowie mathematischen Traditionen gleichermaßen bewandert sein. Die Auswertung erfolgte mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse basierend auf der Grounded Theory (Glaser, Strauss, 2008).

Im ersten Anlauf wurde je ein Professor an der Friedrich-Schiller-Universität Jena (Juli 2012) und an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (Januar 2013) in einem etwa einstündigen Interview befragt. Bei der Kodierung wurden zunächst alle Textstellen in den Transkriptionen markiert, die sich auf mathematische Unterschiede im deutsch-englischen Kontext beziehen. Diese konnten u.U. auch die Verneinung der Existenz solcher Unterschiede beinhalten. Die relevanten Textstellen wurden zu Kategorien zusammengefasst, je nachdem, welcher Aspekt des Unterschieds zum Ausdruck kommt. Alle Auswertungsschritte wurden von zwei Ratern simultan durchgeführt. Um die Validität zu erhöhen, verständigten sie sich immer wieder über das induktive Kategoriensystem. Insgesamt konnten sechs Kategorien aufgestellt werden: kulturelle Unterschiede, Unterschiede im Fach, Unterschiede in der Notation, Unterschiede in der einen Sprache, Unterschiede zwischen zwei Fachsprachen/ Übersetzungsproblematik und Unterschiede beim CAS-Einsatz. Folgendes Beispiel soll die Vorgehensweise näher beleuchten: *„Also bei einer disjunkten Vereinigung die Leute hier wollen ein, kann ich vielleicht einfach malen? Disjunkte Vereinigung [schreibt]. Gut. Das ist einfach ein Produktzeichen auf dem Kopf. Und natürlich der andere ist der rechte Winkel [schreibt].“* (Testperson 1). Diese Textstelle wurde der Kategorie „Unterschiede in der Notation“ zugeordnet. Ein weiteres Beispiel: *„In der Topologie ist mir auch eingefallen, weil ich das manchmal falsch übersetze, also zurückübersetze, Umgebung sagt man im Deutschen und das heißt dann im Englischen neighbourhood. Ich habe das manchmal falsch zurück übersetzt mit Nachbarschaft oder so.“* (Testperson 2). Diese Textstelle wurde in die Kategorie „Unterschiede zwischen zwei Sprachen/Übersetzungsproblematik“ aufgenommen.

3. Ergebnisse

Es konnten insgesamt 34 relevanten Textstellen bei Testperson 1 bzw. 31 Textstellen bei Testperson 2 identifiziert werden. Etwa die Hälfte der identifizierten Textstellen – 17 bei Testperson 1 bzw. 15 bei Testperson 2 – ist aus Sicht der Autoren auch für die Schulmathematik relevant. Von diesen 32 Textstellen beinhalten zwölf in direkter oder indirekter Form – etwa durch den Verweis auf die Einheitlichkeit der Mathematik – die Verneinung solcher Unterschiede. Wegen Wiederholungen, unkonkreter Formulierungen und Überlappungen konnten letztendlich 13 Unterschiede ermittelt werden. Hiervon einige Beispiele: Beide Testpersonen erwähnen, dass das Wort *´Körper´* im Deutschen in der Umgangssprache etwas anderes bedeutet als in der Mathematik und sogar in der Mathematik doppeldeutig ist: Körper als eine geometrische Figur und Körper als eine algebraische Struktur. Testperson 1 betont, dass die beiden mathematischen Bedeutungen im Englischen unterschiedlich zum Ausdruck gebracht werden, nämlich durch *´body´* bzw. durch *´field´*. Testperson 2 weist auf ein Übersetzungsproblem hin: Da das englische Wort *´field´* in der umgangssprachlichen Bedeutung die deutsche Entsprechung ´Feld´ hat, kann dies dazu führen, dass man irrtümlicherweise für den algebraischen Körper im Deutschen *´Feld´* verwendet. Eine ähnliche Situation wird in der oben zitierten Textstelle mit *´Umgebung´* - *´neighbourhood´* und *´Nachbarschaft´* dargestellt, an einer anderen Textstelle geht es analog um *´Folge´*- *´sequence´* und *´Sequenz´*. Testperson 1 weist auf die unterschiedliche Verwendung von ln und log bei logarithmischen Funktionen hin.

4. Diskussion

Die vorliegenden Ergebnisse bestätigen die zum Ausgangspunkt gewählte Theorie, dass mit zunehmender Komplexität der Mathematik die Abnahme der sprachlichen Unterschiede einhergeht. Die Autoren schlagen aber vor diese Hypothese geringfügig zu modifizieren und formulieren die Annahme, dass bei offenen Forschungsproblemen keine einheitlichen Bezeichnungen existieren und auf dieser Ebene der Mathematik die sprachlichen Unterschiede wieder zunehmen. Auch wenn aus Platzgründen hier nicht alle ermittelten schulrelevanten Unterschiede beschrieben werden konnten, sollten diese die Grundlage für einen sprach- und kultursensiblen deutsch-englischen bilingualen Mathematikunterricht liefern. Leider konnten wenig neue Unterschiede ermittelt werden, die auch beim CAS-Einsatz eine Rolle spielen können, ein konkretes Beispiel hierfür wäre die oben genannte Verwendung von ln und log. Ein Grund hierfür könnte sein, dass es tatsächlich keine oder kaum einige weitere solche Unterschiede gibt. Ein weiterer Grund kann eventuell an der ungeeigneten Methode (Auswahl der Zielpersonen, Methode des Leitfadeninterviews) liegen.

5. Ausblick

Es sei an dieser Stelle betont, dass hier aus der laufenden Untersuchung heraus berichtet wurde. Es sind weitere Schritte in Planung um die hier vorgestellten Beobachtungen weiter zu erforschen. So ist z.B. die Durchführung und Auswertung von noch zwei weiteren Interviews geplant bzw. in einem zweiten Schritt die Zusammenstellung eines Fragebogens für Lehrkräfte und Schüler, die in Thüringen mit CAS arbeiten, anhand des erhoben Datenmaterials. Überdies wird langfristig das Ziel verfolgt, Empfehlungen für den CAS-Einsatz zu formulieren, die auf kulturelle und sprachliche Unterschiede Bezug nehmen.

Literatur

Barwell, R. (2003): Linguistic Discrimination: An Issue for Research in Mathematics Education. In For the Learning of Mathematics 23/2, 37.43.

Glaser, B., Strauss, A. (2008): Grounded Theory. Strategien qualitativer Forschung. Bern: Huber.

Novotná, J., Moraová, H. (2005): Cultural and linguistic problems in the use of authentic textbooks when teaching mathematics in a foreign language. In Zeitschrift für Didaktik der Mathematik 37/2, 109-115.

Rolka, K. (2004): Barrieren für den Einsatz einer Fremdsprache im Mathematikunterricht. In: Heinze, A./Kuntze, S. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, Hildesheim: Franzbecker, 473-476.

Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (2011): Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife. Mathematik.

Kathrin TALHOFF, Münster

Besonderheiten mathematischer begabter Kinder im Vorschulalter

1. Problemlage

Das Einsetzen der Begabungsentwicklung spätestens ab der Geburt sowie die Notwendigkeit einer frühen Diagnostik wird in der aktuellen Forschung mehrheitlich akzeptiert (vgl. z.B. Stapf 2010; Käpnick & Fuchs 2009; Perleth 2001). Dennoch zeigt sich ein deutliches Forschungsdesiderat in Bezug auf die Kennzeichnung von Merkmalen mathematischer Begabungen sowie bzgl. der Förderung von (mathematischen) Begabungen im Elementarbereich.

2. Theoretische Grundlagen

Seit mehr als zwanzig Jahren gibt es bereits Untersuchungen zu begabten Kindern im Vorschulalter (vgl. Roedell et al. 1989; Urban 1990; Stapf 2010). Eine eigene theoretisch-analytische Untersuchung aktueller Begabungsliteratur ergab 29 Merkmalskennzeichnungen bzw. Beschreibungen, die jedoch alle bereichsunspezifisch und an klassischen Intelligenzkonzepten orientiert sind. Demzufolge werden mathematische Fähigkeiten als Bestandteil hoher allgemein intellektueller Fähigkeiten erfasst. Exemplarisch wird eine Merkmalskennzeichnung von Stapf vorgestellt, die folgende Merkmale begabter Vorschulkinder annimmt:

- *Gute Beobachtungsgenauigkeit*
- *Überragende Lern- und Begriffsleistungen*
- *Erkennen von Strukturen und regeln*
- *Außergewöhnliche Gedächtnisleistungen*
- *Schneller (früher) Spracherwerb*
- *Intensive (freiwillige) Beschäftigung mit Symbolen*
- *Hohes Konzentrationsvermögen*
- *Hohe Sensibilität*
- *Gefühl der Andersartigkeit*
- *Eigenwilligkeit im Sinne der Selbststeuerung*
- *Abneigung gegen physische Auseinandersetzung*

Abb. 1: Merkmalsliste für begabte Kinder im Vorschulalter (vgl. Stapf 2010, S. 102)

Die Merkmalskennzeichnungen bzw. Beschreibungen zur vorschulischen Begabung wurden in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. F. Käpnick und Prof. Dr. M. Fuchs hinsichtlich unserer Grundpositionen zum Begabungsbegriff (Komplexität, Bereichsspezifik, Ganzheitlichkeit, Dynamik; vgl. Fuchs

2006) analysiert. Auf Basis dieser theoretisch-analytischen Herangehensweise entstand nachfolgende kategoriale Einteilung:

- Erstindikatoren, diese sind nicht unbedingt notwendig für eine mathematische Begabung im Vorschulalter, werden jedoch meist zuerst in der Diagnostik erkannt und können deshalb wichtige Indikatoren für die Erkennung einer mathematischen Begabung sein. Zudem können sie zur Kennzeichnung der individuellen Ausprägung einer mathematischen Begabung beitragen.
- Begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften, die notwendige „flankierende“ Persönlichkeitsqualitäten zur Entwicklung einer individuell geprägten mathematischen Begabung darstellen.
- Mathematikspezifische Begabungsmerkmale.

Diesen drei Kategorien lassen sich beispielhaft folgende Merkmale zuordnen, die ebenfalls auf theoretisch-analytischer Basis generiert wurden und von uns als wesentlich für eine mathematische Begabung im Vorschulalter erachtet werden.

Erstindikatoren: *Frühreife/vorzeitiges Erreichen von Meilensteinen in der kindlichen Entwicklung.*

Begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften: *Hohe Gedächtnisfähigkeiten.* Diese beziehen sich insbesondere auf mathematische Sachverhalte, implizieren jedoch auch weitere nicht mathematische Bereiche. Die Kinder können sich z.B. sehr gut Texte, Lieder, Gedichte u.a.m. merken.

Mathematikspezifische Begabungsmerkmale: S*ehr früh ausgeprägte Zahl- und Rechenkompetenzen.* Die Kinder sind bereits sehr früh in der Lage zu zählen, erschließen sich z.B. eigenständig Zahlenräume sowie Rechenoperationen.

Durch empirische Untersuchungen werden diese möglichen Besonderheiten überprüft und tiefergehend erkundet.

3. Erste Ergebnisse der empirischen Untersuchungen

Die ersten Untersuchungen erfolgten bereits mittels qualitativer Forschungsmethoden. Es wurden retrospektive Fallstudien angelegt, die auf halbstandardisierten Leitfadeninterviews mit den Eltern mathematisch begabter Kinder und Jugendlicher im Alter von neun bis 15 Jahren basieren. Mit den Interviews wird die vorschulische (mathematische) Entwicklung der Probanden erfasst. Die nachfolgenden Beispiele aus den retrospektiven Fallstudien sollen die auf theoretisch-analytischer Basis generierten Besonderheiten mathematisch begabter Kinder im Vorschulalter exemplarisch belegen.

Erstindikatoren: Frühreife/vorzeitiges Erreichen von Meilensteinen

Finn	*„Als er drei war, da war ich mit ihm einkaufen und er sah das Schild und fragt, was heißt das. Ich sag ‚EDEKA'. Und dann fragte er, warum schreibt man dann nicht ein E, ein D und ein K? Das heißt doch auch EDEKA. - Da war er drei."*
Greta	*„Also die hat die Wörter in sich aufgesaugt, sehr schnell behalten können und hat sich schon ziemlich gut auch ausgedrückt. Also dieses eine Beispiel fällt mir ein, dass sie halt, wo sie gerade sprechen konnte, mit ca. zwei, sagte, ‚Ah, das Flugzeug hat einen Kondensstreifen hinter sich.' Dass sie wirklich solche Wörter dann einfach schon gesagt hat."*

Tab. 1: Zitate aus den retrospektiven Fallstudien zu Finn und Greta.

Begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften: Hohe Gedächtnisfähigkeiten

Linus	*„Dann kam die WM, das war ja vor zwei Jahren, da war er vier. Da hat er dann alles auswendig gelernt, weil wir so ein riesen Plakat hatten. Und da hat Papa das immer eingetragen und da standen immer schön die Uhrzeit und das Datum drunter. Und dann saß er [Linus] davor und hat gemurmelt und es auswendig gelernt. Wir haben ihn da nicht drauf gebracht. Das hat er von selbst gemacht."*
Janek	*„Er hat mit 1 ½ Jahren schon Märchen erzählt. Wort für Wort. Wenn etwas falsch war, dann sagte er: „Nee, das müsste hier so sein." Also wenn ich das zweite Mal gelesen habe, habe ich schon ein Spiel gemacht. Einige Wörter geändert und dann sagte er: „Nee, das muss hier ein anderes Wort sein"."*

Tab. 2: Zitate aus den retrospektiven Fallstudien zu Linus und Janek (vgl. Elting 2012).

Mathematikspezifische Begabungsmerkmale: Früh ausgeprägte Zahl- und Rechenkompetenzen

Janek	*„So mit zwei/drei Jahren. Sobald er aus dem Haus ging und dann kam eine bekannte Hausnummer, Buslinie, mit Zahlen. Das war so seins. Er konnte schon mit sechs alles schon rechnen und wir mussten ihm Aufgaben stellen zum Rechnen im Kopf. Ab 1 ½ Jahren hat er selber Zahlen gelernt. Mit den Hausnummern. Konnte dann schon mit drei Jahren alle Zahlen und dann später rechnen. In der ersten Klasse konnte er schon bis 100 rechnen.*

	Plus-Minus-Aufgaben. Und im Kopf. Wenn wir spazieren waren und dann hat er gefragt: ‚Mama, stellst du mir Aufgaben?' Das machte Spaß."
Linus	*„Also war er 1 ½, ich hatte so ein Schwangerschaftstagebuch und da waren die Zahlen ganz groß. Und er hat immer wieder dieses Buch genommen und immer wieder: ‚Da da.' Und immer wieder und ich: ‚Das ist eine eins.' Und er: ‚Aahh!' und er hat mich angestrahlt und dann hat er weitergeblättert: ‚Da da.' ‚Eine zwei.' Und so richtig mit blinkenden freudigen glücklichen Augen hat er mich angestrahlt. Immer wieder dieses Buch rumgeschleppt und dann irgendwann habe ich gesagt: ‚Zeig mal Papa' und dann hat er immer wieder: ‚Eins, da drei, da vier' und das konnte er bis neun alle Zahlen. Und da war er 1 ½ Jahre alt. Also er konnte erst zählen und hat dann durch dieses Buch die Zahlen kennen gelernt. Und dann hat er nachher auch immer alles gezählt. Alles. Das war das Schönste."*

Tab. 3: Zitate aus den retrospektiven Fallstudien zu Linus und Janek (vgl. Elting 2012).

4. Fazit und Ausblick

Die ersten empirischen Ergebnisse ermöglichen einen exemplarischen Beleg für die theoretisch-analytischen Besonderheiten mathematisch begabter Kinder im Vorschulalter. In weiteren Einzelfallstudien zu Vorschulkindern und retrospektiven Fallstudien gilt es, die Besonderheiten weiter zu kennzeichnen bzw. zu überprüfen, um letztlich zu einer umfassenden Kennzeichnung mathematischer Begabungen im Vorschulalter zu gelangen.

Literatur

Elting, S. (2012): Elternbefragungen zur individuellen Entwicklung frühkindlicher mathematischer Begabungen. Unveröffentlichte Masterarbeit der WWU Münster.

Fuchs, M. (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Münster: Lit.

Käpnick, F.; Fuchs, M. (2009): Mathe für kleine Asse 3/4, Band 2. Berlin: Cornelsen.

Perleth, Ch. (2001): Follow-up-Untersuchungen zur Münchner Hochbegabungsstudie. In K. A. Heller (Hrsg.): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter. Göttingen: Hogrefe, S. 357-446.

Roedell, W. C. & al. (2000): Hochbegabung in der Kindheit. Besonders begabte Kinder im Vor- und Grundschulalter (2. Auflage). Heidelberg: Asanger.

Stapf, A.(2010): Hochbegabte Kinder. Persönlichkeit, Entwicklung, Förderung (2. Auflage). München: Beck.

Urban, K. K. (1990): Besonders begabte Kinder im Vorschulalter. Heidelberg: HVA/Edition Schindel.

Julia TELLER, Bärbel BARZEL, Timo LEUDERS, Freiburg

Förderung Diagnostischer Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern im Bereich Funktionales Denken: Eine Interventionsstudie

In der Lehrerausbildung und Schulpraxis wurde Diagnose lange als Randthema wahrgenommen, obwohl es sich um ein ganz zentrales Aufgabengebiet aller Lehrkräfte in Primar- und Sekundarstufe handelt. In unterschiedlichsten Situationen inner- und außerhalb des Unterrichts beurteilen Lehrkräfte die aktuellen Lernstände ihrer Schülerinnen und Schüler. Im vorliegenden Projekt wird eine Fortbildungskonzeption entwickelt, erprobt und im Rahmen einer Interventionsstudie auf ihre Wirksamkeit in Bezug auf die Förderung Diagnostischer Kompetenzen untersucht.

Theoretischer Rahmen

Nach Anders, Kunter, Brunner, Krauss, und Baumert (2010) ist *Diagnosekompetenz* eine Voraussetzung für einen, an den individuellen Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler orientierten Unterricht. Nachdem die KMK (2004) in den Standards für Lehrerbildung die Diagnosekompetenz bei Lehrkräften als wichtigen Kompetenzbereich benannt hat, folgten zahlreiche Large-Scale-Studien wie COACTIV, MT21 und TEDS-M, die bei (angehenden) Mathematiklehrkräften nicht hinreichend ausgebildete diagnostische Kompetenzen nachweisen konnten (vgl. u.a. Krauss & Brunner, 2012). Diese Ausgangslage führt zu einem Handlungsbedarf bezüglich adäquater Fort- und Ausbildungsangebote für Lehrkräfte (vgl. Brunner et al., 2011).

Lehrkräfte führen Diagnosen als informelle Einschätzungen sowohl spontan im Unterricht als auch bewusst und kriterienorientiert durch wie beim Einsatz von Diagnoseaufgaben. Dabei müssen Lehrkräfte in der Lage sein, Aufgabenanforderungen angemessen einzuschätzen und Aufgaben in Bezug auf ihr Diagnosepotential zu optimieren (vgl. Brunner et al., 2011). Da Aufgaben im Mathematikunterricht eine tragende Rolle spielen, ist es sinnvoll, in einer Fortbildung zu Diagnose die Aufmerksamkeit von Lehrkräften auf schwierigkeitsgenerierende und diagnostische Merkmale von Aufgaben zu lenken, um ihnen Kriterien und Merkmale einer Diagnose mit Hilfe adäquater Aufgaben im Unterricht nahe zu bringen (vgl. Hußmann, Leuders, & Prediger, 2007).

Konzeption der Fortbildung

Im nationalen und internationalen Bereich gibt es erste unterrichtsbegleitende Fortbildungsansätze zum Ausbau Diagnostischer Kompetenzen. Diese Fortbildungen befassen sich in unterschiedlichen Ausführungen mit Schülerfehlvorstellungen und Diagnoseaufgaben, die für die Diagnose im Mathematikunterricht relevante Aspekte darstellen. Die in diesem Projektrahmen entwickelte Fortbildung führt diese beiden Komponenten zusammen (vgl. Russel, O'Dwyer, & Myranda, 2009; Fischer & Sjuts, 2011).

Die dreitägige Intervention verläuft über einen Zeitraum von 6 Wochen, umfasst insgesamt 10 ½ Stunden und beinhaltet an jedem Termin sowohl fachdidaktische als auch diagnostische Bausteine (vgl. Praetorius, Lipowsky, & Karst, 2011). Systematisch werden hierbei folgende Aspekte zum Thema Funktionen im Mathematikunterricht thematisiert:

- Typische Schülerschwierigkeiten und -fehler;
- Mögliche Ursprünge dieser Problemfelder;
- Funktionales Denken – bestehend aus den Grundvorstellungen Zuordnungs-, Kovariations- und Objektaspekt;
- Zentrale Konzepte zum Funktionsbegriff, wie Eindeutigkeit und Steigung.

In Bezug auf Diagnose werden Wissen zum Diagnoseprozess, typische Diagnosefallen und -tendenzen sowie der Umgang mit Diagnoseergebnissen (Auswertung, Rückmeldung und Förderung) vermittelt. Die „Vertiefung des fachdidaktischen und diagnostischen Professionswissens" in Anwendungs- und Reflexionsphasen stellt nach Lipowsky und Rzejak (2012: 5) ein Kriterium nachhaltiger Fortbildungen dar.

Die Konzeption der Fortbildung folgt darüber hinaus dem Vorschlag von Helmke und Kollegen (2004), die zeigen konnten, dass sich folgender Zyklus zur Förderung der Diagnosekompetenz eignet. Vor der Durchführung eines Tests prognostizieren die Lehrkräfte Lösungswahrscheinlichkeiten und potentielle Schwierigkeiten der einzelnen Aufgaben. Nach der Testdurchführung vergleichen die Lehrkräfte die tatsächliche Schülerleistung mit der vorher getroffenen Prognose und analysieren eventuelle Diskrepanzen.

Als Intervention wird eine schulartübergreifende, unterrichtsbegleitende Fortbildungsreihe zum Thema Funktionen durchgeführt mit dem Ziel die Diagnostischen Kompetenzen von Mathematiklehrkräften der Klasse 7 und 8 (N=26; männlich: 9) zu fördern. Im Detail wird untersucht, inwiefern sich die Kompetenzen im Bereich der Aufgaben- und Schülerbeurteilung auf der Basis der Fortbildungsteilnahme im Themengebiet Funktionales Denken verändern.

Im Rahmen der Interventionsstudie wurde ein Kontrollgruppendesign gewählt, um die Frage zu untersuchen welche Einflüsse die Rückmeldungen zu Testergebnissen der eigenen Schülerinnen und Schüler haben hinsichtlich der Fähigkeit Schülerlernstände adäquat zu beurteilen (vgl. Helmke et al., 2004). In Abbildung 1 wird verdeutlicht, dass sich infolgedessen Experimental- und Kontrollgruppe in Bezug auf den Rückmelde-Zyklus unterscheiden (siehe *Schülertest* und *Rückmeldung* in Abb. 1).

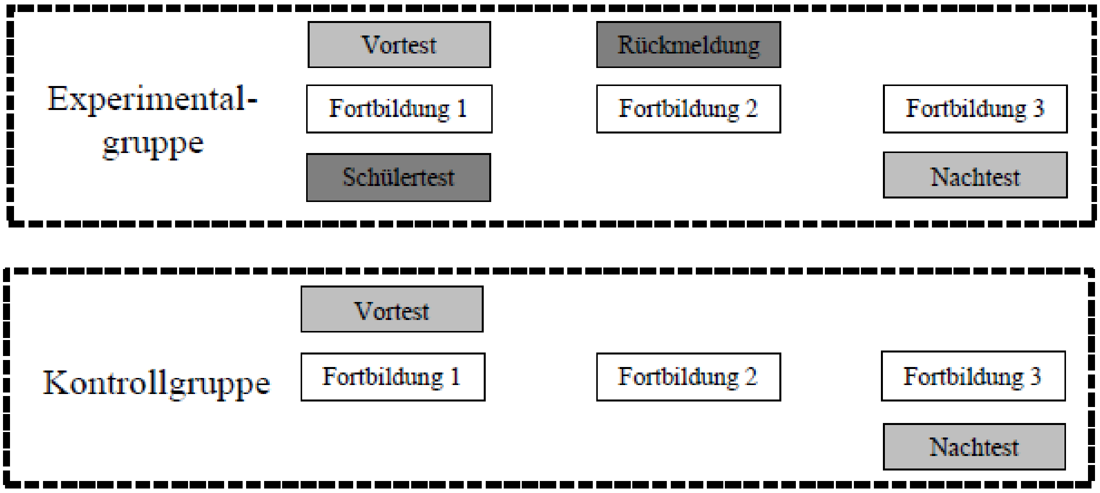


Abbildung 1: Studiendesign

Die Diagnostischen Kompetenzen im Bereich Aufgaben- und Lernstandsbeurteilung werden durch einen Vor- und Nachtest mit Hilfe eines Onlinefragebogens erhoben. Interessant ist hierbei, inwiefern sich der Inhalt, die Art und der Umfang der Lehrerurteile verändern. Je genauer und akkurater diese Urteile ausfallen, desto höher sind die Diagnostischen Kompetenzen anzusehen (vgl. Anders et al., 2010). Zu den Diagnoseurteilen wird im Onlinefragebogen um eine Begründung gebeten, um einen umfassenden Einblick in das Lehrerdenken zu erhalten. Ein Expertenrating stellt den validen Beurteilungsrahmen der offenen Itembearbeitung sicher. Durch eine Varianzanalyse wird untersucht, ob potentielle Unterschiede zwischen den zwei Gruppen der Zugehörigkeit zur Experimentalgruppe zugeschrieben werden können.

Stand des Projektes und Ausblick

Nach der quantitativen Datenauswertung wird die Fortbildungsreihe in Bezug auf die Förderung der Diagnostischen Kompetenzen optimiert. Zudem werden die Lehrerrückmeldungen aus dem Onlinefragebogen miteinbezogen, um die Fortbildungsreihe und deren Umsetzung in einem Handbuch zu veröffentlichen. Diese soll als Vorlage zur Durchführung weiterer Fortbildungen im Fach Mathematik und damit zur Ausweitung des Stichprobenumfangs dienen.

Literatur

Anders, Y., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2010): Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften und ihre Auswirkungen auf die Leistungen ihrer Schülerinnen und Schüler. In E. Moser & al. (Hrsg.): Psychologie in Erziehung und Unterricht. München, Basel: Ernst Reinhardt, 157-193.

Brunner, M., Anders, Y., Hachfeld, A., & Krauss, S. (2011): Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter & al. (Hrsg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann, 215-234.

Fischer, A., & Sjuts, J. (2011): Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz im Fach Mathematik - Ergebnisse eines Modellprojekts zur Verzahnung der Lehrerausbildungsphasen. In: SEMINAR - Lehrerbildung und Schule, 4. Hohengehren: Schneider, 31-47.

Helmke, A., Hosenfeld, I., & Schrader, F. (2004): Vergleichsarbeiten als Instrument zur Verbesserung der Diagnosekompetenz von Lehrkräften. In R. Arnold & C. Griese (Hrsg.): Schulleitung und Schulentwicklung. Hohengehren: Schneider, 119-144.

Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (2007): Schülerleistungen verstehen - Diagnose im Alltag. In PM – Praxis der Mathematik in der Schule, 15/ 49.Jg, 1-8.

Krauss, S., & Brunner, M. (2012): Schnelles Beurteilen von Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrer/innen. In R. Biehler & al. (Hrsg.): Journal für Mathematik Didaktik, 05/2012: 32-2. Heidelberg: Springer, 233-251.

Lipowsky, F., & Rzejak, D. (2012): Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen wirksamer Lehrerfortbildungen. In: Reform der Lehrerbildung. Schulpädagogik heute, 5/ 3.Jg., Immenhausen: Prolog, 1-17.

Praetorius, A., Lipowsky, F., & Karst, K. (2012): Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: Aktueller Forschungsstand, unterrichtspraktische Umsetzbarkeit und Bedeutung für den Unterricht. In A. Ittel, & R. Lazarides (Hrsg.): Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 115-146.

Russell, M., O'Dwyer, L., & Myranda, H. (2009): Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study. In: Behavior Research Methods 2009, 41 (2), New York: Springer, 414-424.

Sandra THOM

Bruchrechnung – Easy going?!?

Bereits in der Grundschule und teils schon davor werden zentrale Grundvorstellungen zur Bruchrechnung angebahnt: Zeigen viele Kinder bereits vor der Einschulung Fähigkeiten zur Zahlzerlegung durch Anzeigen von Zahlen mit Fingern zweier Hände, wird dies in der Grundschule systematisiert und vertieft über die Arbeit mit Split-Boxen, Zerlegungshäusern etc. Würfelexperimente zur Wahrscheinlichkeit können nicht nur diese Teil-Ganzes-Vorstellung vertiefen, sondern bieten auch bei Darstellung und Interpretation der Ergebnisse in Tabellenform die Möglichkeit zur Nutzung der Bruchschreibweise. Bei der Arbeit mit Größen können Grundvorstellung der Division von Brüchen als Messen („Aufteilen") durch konkretes Ausmessen von Längen oder auch Umfüllen von Volumina aufgebaut werden („Wie oft passt ¼ Liter in 1 ¼ Liter hinein?", „Wie oft kann ich mit einem halben Meter langen Stab diese Raumlänge von 6m auslegen?").

In den ersten beiden Jahren der Sekundarstufe wird die gemeine Bruchrechnung schließlich systematisch eingeführt und beansprucht zu Recht viel Raum im Unterricht. Zugleich bereitet sie vielen Schülern nicht nur auf Grund fehlender arithmetischer Kompetenzen noch aus der Grundschulzeit massive Probleme. Häufige Ursache für Probleme beim Erlernen der Bruchrechnung ist ein durch verfrühtes Kalkül geprägter Unterricht, der die Ausbildung anschaulicher und materialbasierter Vorstellungen zu den Brüchen, das *Be-Greifen*, zu wenig beachtet.

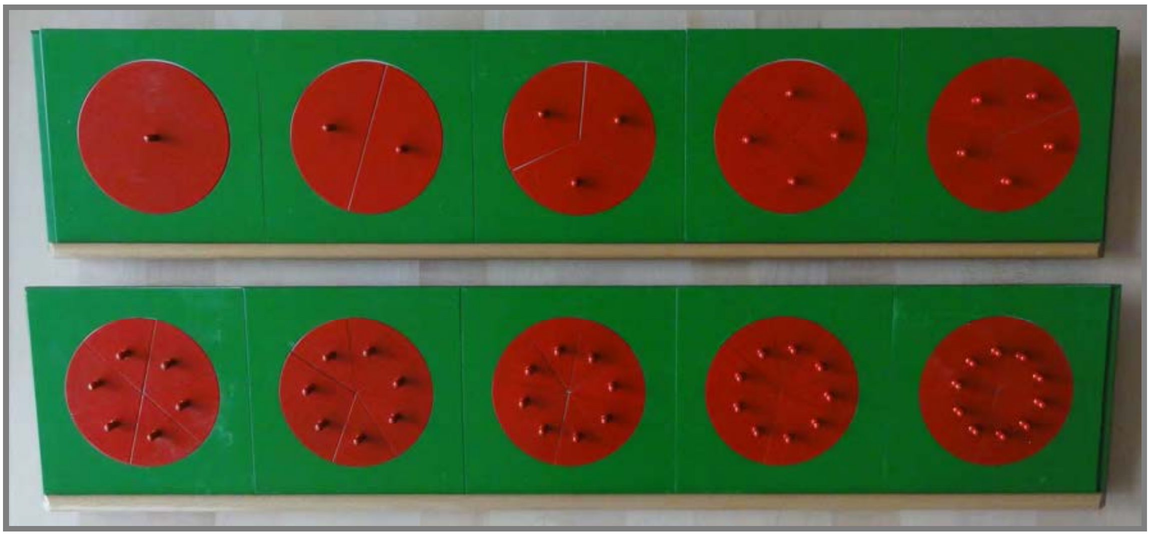


Abbildung 1: Metallene Bruchrechenkreise

Eine Möglichkeit zum Einstieg in einen systematischen Bruchrechenunterricht bietet die aus der Montessori-Pädagogik bekannte Metaphorik der

„Familie der Brüche“, die mit Hilfe der Metallenen Bruchrechenkreise über Nutzung des quasikardinalen Zahlaspekts insbesondere Verständnis bei einen speziellen Grundvorstellungsumbruch von den natürlichen zu den rationalen Zahlen möglich macht.

Die Metaphorik der „Familie der Brüche“ beruht dabei auf dem analogen Denken als Teil mathematischen Denkens, die „Familie der Brüche“ dient als analoges Bild für Teilbarkeiten und Vielfache. Dabei sollte die Metaphorik der „Familie“ nicht überstrapaziert werden – für die Ausbildung einiger Grundvorstellungen zu den Brüchen und erstes Operieren („Vergröbern/Verfeinern“, Addition/Subtraktion über Ergänzen und Vergleichen) hat sie sich jedoch in Erprobungen als äußerst tragfähig erwiesen.

Nach der Benennung der „Familien“ („Das ist die Familie der Halben.“) werden systematisch, beginnend bei den halben, immer die Anzahl der Teile des Bruchkreises genannt („Sie hat zwei Mitglieder.“), ebenso wie die Bezeichnung für jeden einzelnen Teil („Jedes Mitglied heißt ½.“). Zugleich mit der Benennung jedes Bruchteils werden die symbolischen Bezeichnungen auf jeden einzelnen Bruchrechenkreisteil gelegt. Bei den Dritteln, spätestens den Vierteln werden der oder die Schüler in die Einführung mit einbezogen. („Das ist die Familie der Drittel. Sie hat wie viele Mitglieder?“ Und jedes Mitglied heißt …?“) Die Schüler benennen die Bruchteile, schreiben ihre „Namen“ auf vorbereitete Kärtchen und legen sie auf die Metallenen Bruchteile auf. In der Regel durchschauen die Schüler das Muster sehr schnell und setzen es selbstständig fort, sie greifen den Fragen der Lehrkraft häufig sogar vor. Die Benennung des Ganzen – der 1 – erfolgt zuletzt ohne weitere Erläuterungen durch die Lehrkraft: Folgen die Schüler bisherigen Benennungen, wird das Ganze meist von einem Schüler selbstständig 1/1 benannt, andere ergänzen jedoch: „1“.

Welche impliziten Vorstellungen gewinnen die Schüler hierbei? Zunehmend dauert es *länger*, bis die Beschriftungen der Bruchteile einer „Bruchfamilie“ erstellt und aufgelegt sind – die Bruchkreise haben immer *mehr* und *gleich große* Teile, je größer die Zahl im Nenner wird. Die Teile werden zugleich immer kleiner, und bei den Zehnteln benötigen die Schüler schon ein wenig Fingerspitzengefühl, um das Kärtchen auf nur einen einzelnen Bruchteil zu legen. Es entsteht ein Bild, bei dem immer mehr Kärtchen auf den immer kleiner werdenden Bruchteilen liegen, so dass immer mehr Bruchteile „das Ganze“ (den Kreis) teilen. Die Erfahrung des Beschriftens und Belegens *in Verbindung mit* dem einprägsamen Bild am Abschluss bildet eine Vorstellung in den Köpfen der Kinder: Der Weg dorthin als theoretische Abstraktion, als Erfahrung einer Handlung, die später lediglich aus dem Gedächtnis als Ablauf rekonstruiert werden kann, wird *zu-*

sammen mit dem Bild des Ergebnisses der Handlung (Abb. 2) als Form empirischer Abstraktion gespeichert. Die Bruchrechenkreise mit den aufgelegten Kärtchen sollten daher eine Weile sichtbar in der Klasse ausgelegt werden. Eine solche mehrschichtige Vorstellung dient als Grundlage für weiteres Arbeiten und kann sowohl von den Schülern als auch von der Lehrkraft im Laufe des späteren Lernprozesses immer wieder für Modellierungen oder zur verstehenden und selbstständigen Korrektur eventueller Fehler herangezogen werden.

Abbildung 2: Die Bruchteile werden kleiner, dafür aber mehr!

Nach dieser Einführung beginnt die Arbeit mit den Kreisen: „Ich verrate Dir ein Geheimnis – Brüche können miteinander verwandt sein."

Durch das Herausnehmen eines Halben aus seinem Einsatz wird dort der Platz frei. „Brüche sind miteinander verwandt, wenn wir einen Bruchteil <u>ganz genau</u> ausfüllen können <u>nur</u> mit Teilen <u>einer</u> anderen Familie." Über systematisches Probieren – erst mit Dritteln, dann Vierteln – können „Verwandtschaften" gefunden werden, zuerst gemeinsam, schließlich in selbstständiger Arbeit durch die Schüler. Die Nutzung der symbolischen Sprech- und Schreibweise sollte für den intermodalen Transfer die Arbeit auf enaktiver Ebene begleiten (Abb. 3); die Schüler sollen ihre Ergebnisse beispielsweise in einem kleinen Heft sichern. Auf diese Weise entsteht eine Dokumentation der Teiler bzw. Vielfachen der ersten „Bruchfamilien", die als Basis für selbstständiges Entdecken und *einsichtiges* Formulieren der Regeln für Teilbarkeit als Grundlage für Verfeinern und Vergröbern („Erweitern" und „Kürzen") für alle weiteren Operationen mit den Brüchen dienen kann. Die Begrenztheit des Kreismodells auf wenige mögliche hiermit zu lösende Aufgaben, die nur geringen Möglichkeiten, durch Konstruktion Vorstellungen zu entwickeln wie es z.B. beim Falten von Tangrams oder beim Spannen von Figuren auf dem Geobrett möglich ist, sowie die Notwendigkeit der Ausbildung abstrakter Vorstellungen macht die Nutzung weiterer Repräsentanten für einen intramodalen Transfer schließlich zwingend erforderlich. Für die Arbeit mit Lernmaterialien genügt die Bereitstellung von Anschauungsmaterial nicht; Schüler benötigen zielführende einführende und sichernde, problem- und handlungsorientierte, operative und produktive Aufgaben zum Umgang mit dem Material.

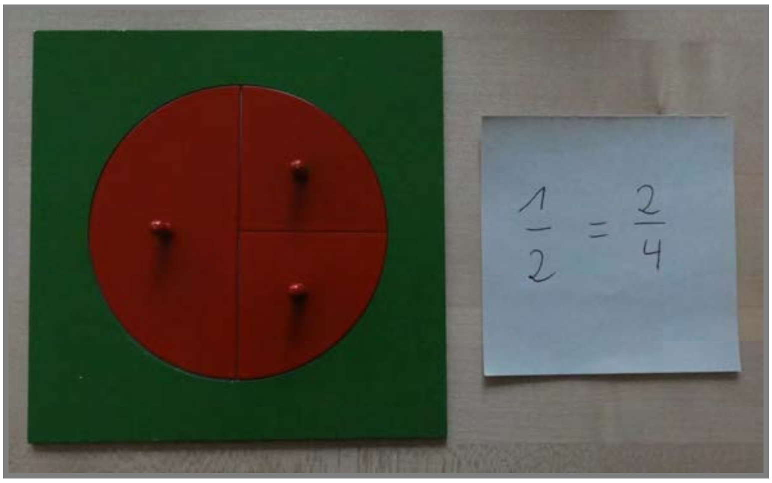


Abbildung 3: Das Ausfüllen des Halben mit Vierteln

Die meisten von Schülern als schwer lernbar, nicht zu verstehende und auf Seiten der Lehrer kaum zu vermittelnde Operationen lassen sich auf vergleichsweise einfache, aber durchdachte Handlungen an konkretem Material und wenige in der Regel die Handlung lediglich benennende Worte reduzieren – auch und gerade als nonverbale „Erklärungen" sind sie zentral für die Ausbildung reichhaltiger individueller Schülervorstellungen. Die Ausbildung solcher Vorstellungen zu den Brüchen ist die Basis für verständnisvolles Anwenden und Grundlage für weiteres Lernen im Sinne genetischen Unterrichts.

Literatur

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerfortbildung und Lehrerausbildung, 4. Auflage, Heidelberg: Spektrum.

Peschek, W. (1989): Abstraktion und Verallgemeinerung im mathematischen Lernprozess, in: JMD, 10, 211-285.

Rüede, C. (2009): Wenn das Unausgesprochene regelnd wirkt – eine theoretische und empirische Arbeit zum Impliziten, in: JMD, 30, 93-120.

Thom, S. (2010): Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris, Hildesheim: Franzbecker.

Christoph TILL, Ludwigsburg

Vorstellungen von Grundschulkindern zu „Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit“

Was stellen sich Kinder unter „Risiko“ vor? Können Grundschulkinder die Mathematik nutzen, um bessere Entscheidungen unter Unsicherheit zu treffen? Im Artikel wird aufgezeigt, wie dieses spannende Themenfeld in die bestehende Stochastik der Primarstufe integriert werden kann. Es wird eine Studie vorgestellt, die empirische Belege für die Sinnhaftigkeit der Auseinandersetzung mit diesem Thema hervorbringen soll. Zunächst richten wir aber den Blick auf das Feld, in welchem der Themenkomplex „Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit“ beheimatet ist:

1. „Risiko“ und „Entscheidungen unter Unsicherheit“

Man spricht von einem „Risiko“, wenn in einer unsicheren Situation mindestens ein Ereignis mit einem Verlust an Ressourcen (Geld, Zeit, Gesundheit, etc.) verbunden ist. Ob es nun um die Frage nach der richtigen Anlagestrategie, der Notwendigkeit von Schutzimpfungen, der Gefahr der Kernenergie oder der Flugsicherheit bei einem Transatlantikflug geht, Risiken und Unsicherheiten umgeben uns in Beruf und Alltag. Sie bewegen unsere Gemüter und sind daher emotional geladene Begrifflichkeiten. Faktoren, die unsere Risikowahrnehmung und –Einschätzung prägen, sind die Umgebung, in der wir aufwachsen, das persönliche und soziale Umfeld, in dem wir uns bewegen sowie bisherige Erfahrungen in der eigenen Biographie. Demnach ist es nicht verwunderlich, dass verschiedene Personen die gleiche riskante Situation unterschiedlich einschätzen und Entscheidungen treffen, die schlussendlich zu unterschiedlichen Konsequenzen führen. Panikmache oder notwendige Sicherheitsvorkehrung stehen sich gegenüber und werfen die Frage nach einem „objektiven Risiko“ auf. Objektiv kann in diesem Fall nur bedeuten, dass an die Stelle einer affektiven Wahrnehmung einer Risikosituation, eine Einschätzung der Gefahr tritt, die auf empirischen Zahlen und Fakten beruht. Diese „Objektivierung“ erscheint dann nicht nur legitim, sondern darüber hinaus sogar notwendig. Ziel jeder Art von Risikokommunikation sollte sein, jegliche Verzerrung in Form von Unterschätzung bedrohlicher Risiken auf der einen Seite und Überschätzung harmloser Gefahren auf der anderen Seite zu minimieren. Innumeratentum in Kombination mit schwierig zu interpretierenden Statistiken in den Medien können diese verzerrte Risikoeinschätzung verstärken.

2. Harding Zentrum für Risikokompetenz

Kognitionspsychologen am Harding Zentrum für Risikokompetenz (MPI für Bildungsforschung Berlin) beschäftigen sich mit den Ursachen und Auswirkungen dieser verzerrten Risikowahrnehmung bei der menschlichen Entscheidungsfindung in Situationen der Unsicherheit. Der Grundtenor ihrer wissenschaftlicher Befunde ist die Notwendigkeit einer verbesserten Risikokommunikation zwischen Expertem und Laien in vielen Bereichen der Aufklärungsarbeit. Daten als rationale Entscheidungsgrundlage fehlen, werden in Form von Statistiken verfälscht dargestellt oder werden sinngemäß dargestellt, sind aber dann oft schwer zu interpretieren. Dieser Missstand ist besonders gravierend, wenn es um medizinische Risiken geht. Wissenschaftliche Befunde zeigen, dass in vielen Fällen sowohl der Patient als auch der behandelnde Arzt, Risiken für eine Operationen oder Nebenwirkungen eines Medikaments über- oder unterschätzen. Diese Defizite bezüglich einer adäquaten Risikoeinschätzung können schwerwiegende Folgen für beide Seiten haben, sowohl für die Ärzte, als auch für die Patienten (Gigerenzer, 2002). Neben Vorschlägen für eine transparentere Darstellung von Daten in Umweltfragen, Wirtschaft und vor allem der medizinischen Aufklärung sprechen sich die Forscher des Harding Zentrums daher für eine frühe Förderung von „Risk Literacy“ aus. Kinder sollen früh Kompetenzen für den Umgang mit Unsicherheiten und Risiken erlernen, um im Leben bessere und überlegtere Entscheidungen treffen zu können. Hierzu gehört vor allem die Erkenntnis, dass es in vielen Situationen der Unsicherheit, die Daten sind, die dem Menschen helfen können, die „richtigen“ Entscheidungen zu treffen. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass diese vor dem Hintergrund der Risikosituation sinngemäß interpretiert werden können. Der Stochastikunterricht der Grundschule kann dafür den passenden Rahmen bieten.

3. „Risiko“ als Schulstoff

Der Stochastikunterricht der Grundschule ist in die Bereiche „Daten“, „Häufigkeit“ und „Wahrscheinlichkeit“ gegliedert (KMK, 2004). Diese Bereiche sind eng miteinander verzahnt und sollten daher nicht unabhängig voneinander unterrichtet werden: *Wahrscheinlichkeiten* helfen, Ergebnisse von Zufallsvorgängen vorherzusagen. Beim Wiederholen desselben Zufallsexperiments können dann die gewonnenen *Daten* in Form von absoluten oder relativen *Häufigkeiten* kommuniziert werden. Schülerinnen und Schüler sollten im Laufe ihrer Grundschulzeit lernen, Häufigkeitstabellen und Diagramme zu erstellen, lesen und interpretieren und Gewinnchancen bei verschiedenen Zufallsvorgängen einschätzen (KMK, 2004). An dieser Stelle bietet es sich an, diese Inhalte zu erweitern, indem der Zufallsbegriff im

Unterricht stärker aus Sicht von „Risikosituationen“ und „Entscheidungsproblemen“ betrachtet wird. Der persönliche Bezug eines jeden Kindes zum Risikobegriff bietet neben der inhaltlichen Auseinandersetzung mit den zugrunde liegenden mathematischen und stochastischen Konzepten, Raum für spannende Diskussionen. Persönliche Präferenzen und mathematische Begründungen müssen in den Entscheidungsprozess integriert werden. Inhaltliche Bereiche bei der stochastischen Auseinandersetzung mit „Risiko“ sind: Risikoreduktion und Risikoerhöhung, Entscheidungsprobleme (sicherer niedriger Gewinn oder unsicherer hoher Gewinn), Vergleichen von Häufigkeiten in „Verlustsituationen“, Proportionsvergleiche und bedingte Proportionen. Die folgende Aufgabe kann als Anlass dienen, im Unterricht über Risiko und Sicherheit zu diskutieren.

„Wir spielen ein Spiel: Du bekommst entweder 5 € sicher. Oder wir werfen eine Münze: Kommt Kopf bekommst du 20 €, kommt Zahl bekommst du leider nichts. Wie entscheidest du dich?“

Diese erste Begegnung mit dem Konzept des Erwartungswerts ist spannend und kann erweitert werden, indem man die gleiche Frage zu einer leicht veränderten Situation stellt: Entweder wirft man die Münze nun 10 Mal oder man entscheidet sich für die sicheren 50 €. Unterschiedliche Betrachtungen des „Entscheidungsproblems“ sollten dann dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit erkennen, die Mathematik als Werkzeug für die „Lösung“ des Entscheidungsproblems heranzuziehen.

4. Studie zur Förderung stochastischer Konzepte zu „Risiko“

In einer Interventionsstudie in zwölf vierten Grundschulklassen soll der Einfluss eines Trainings auf die Entwicklung elementarer inhalts- und prozessorientierter Kompetenzen zu verschiedenen mathematischen und stochastischen Konzepten zu „Risiko“ untersucht werden. Ziel der Studie ist es, die Effektivität einer Lernumgebung zu messen und deren Wirkung auf die genannten Kompetenzen zu erfassen. Vor der Intervention wird ein Vortest durchgeführt, um Aussagen über das bereits vorhandene Wissen zu den zu untersuchenden Konzepten treffen zu können. Es schließt ein vierstündiges Training und ein Nachtest an, in welchem das Gelernte abgefragt werden soll. Langzeiteffekte bezüglich des Wissenszuwachses werden anhand eines Nachhaltigkeitstests nach etwa drei Monaten festgestellt. Die Stichprobe besteht aus 250 Schülerinnen und Schülern im Alter zwischen acht und zehn Jahren aus insgesamt sechs Grundschulen im Umkreis von Ludwigsburg.

5. Ausblick

Durch die Ergebnisse erhoffen wir uns, ein genaueres Bild zu erhalten, welche außerschulische Erfahrungen und Intuitionen Schülerinnen und Schüler zum Risikobegriff und Entscheidungen unter Unsicherheit mit in die Schule bringen. Wir möchten Hinweise erhalten, welche Teile unseres vorgeschlagenen Themenkomplexes die bestehende Grundschulstochastik bereichern könnten. Dafür richten wir den Blick darauf, in welchen stochastischen Bereichen sich durch die Intervention die höchsten Lernzuwächse einstellen. Zu diesen gehören unserer Meinung nach Inhalte, zu denen Kinder bereits vorschulische Intuitionen besitzen und Inhalte, die die Schülerinnen und Schüler als besonders spannend erleben. Um diese erste Begegnung mit „Risiko" und „Entscheidungen unter Unsicherheit" zu vertiefen, sollten im Sinne des Spiralcurriculums in höheren Jahrgangsstufen diese Inhalte von einer phänomenologischen und informellen Ebene auf eine formalere Ebene gehoben und mit weiterem Inhalt gefüllt werden.

Literatur

Gigerenzer, G. (2002). Reckoning with risk. London: Penguin Books Ltd.

Harding Zentrum für Risikokompetenz (MPI für Bildungsforschung Berlin) *http://www.mpib-berlin.mpg.de/de/forschung/harding-zentrum [25.03.2013]*

Kahneman, D. & Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An analysis of decision under risk. In: Econometrica (47), 263-291.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. *http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf [25.03.2013]*

Kurz-Milcke, E., Gigerenzer, G. & Martignon, L. (2011). Risiken durchschauen: Grafische und analoge Werkzeuge. In: Stochastik in der Schule. (31), 8-16.

Martignon, L. & Krauss, S. (2009). Hands-On Activities for Fourth Graders: A Tool Box for Decision-Making and Reckoning with Risk. In: International Electronic Journal of Mathematics Education, 4; 3, 227-258.

Stephanie TRUMP, Andreas BOROWSKI, Aachen

Die Anwendung von Mathematik in Physik

1. Einleitung

Mathematik ist ein wesentliches Werkzeug beim Umgang mit der Physik, da vertiefte mathematische Kenntnisse und Kompetenzen benötigt werden. Dies spiegeln auch nationale (EPA Physik) sowie internationale (AAAS) Schulstandards wieder. Eine Ausdifferenzierung der mathematischen Anforderungen in der Physik findet sich jedoch nicht. Die Notwendigkeit einer Ausformulierung wird durch den Forschungsstand aber angeregt. Empirische Studien (u.a. TIMSS III, 2000) zeigen, dass es SchülerInnen an mathematischem Grundwissen (Inhalte, Fähigkeiten, …) bzw. Grundverständnis schon in Bezug auf einfache Sachverhalte im Umgang mit Mathematik fehlt (vgl. Malle, o.J.). Probleme bei der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik, also bei der Mathematisierung und Interpretation der Ergebnisse, kommen hinzu (u.a. Pospiech & Uhden, 2013). Die für den Physikunterricht notwendige Mathematikkompetenz scheint durch die Mathematik nur eingeschränkt vermittelt zu werden (Horn, 2011).
Derzeit ist aufgrund fehlender empirischer Untersuchungen nicht bekannt, welche Mathematik im Detail im Physikunterricht, speziell in der Sekundarstufe II, benötigt bzw. vermittelt wird. Auch sind die Übersetzungsprozesse zwischen Mathematik und Physik nur wenig untersucht. Hier setzt dieses Projekt an.

2. Theoretischer Ansatz & Forschungsfragen

But using math in science (and particularly in physics) is not just doing math. It has a different purpose – representing meaning about physical systems rather than expressing abstract relationships – and it even has a distinct semiotics – the way meaning is put into symbols – from pure mathematics. It almost seems that the "language" of mathematics we use in physics is not the same as the one taught by mathematicians. There are many notable differences. (Redish, 2005, S.1).

Hinweise dafür liefert auch eine Studie von Hudson und McIntire (1977). Sie konnten zeigen, dass gute mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten keinen Erfolg in Physik garantieren, jedoch schlechte einen mangelnden Erfolg zur Folge haben (Uhden, 2012). Die erfolgreiche Anwendung von Mathematik in Physik verlangt also mehr als nur ein mathematisches Verständnis. Sie stellt somit lediglich eine notwendige und keine hinreichende Voraussetzung für das Physiklernen dar (ebd., Sherin, 2001), sodass von einem eigenen Dialekt der Sprache Mathematik in Physik gesprochen wer-

den kann (Redish, 2005).
Hierauf aufbauend sowie nach einer theoretischen Analyse der Modellierung physikalischer Probleme (Trump & Borowski, 2012; i.A. an Blum & Leiß, 2005), wird davon ausgegangen, dass die Übersetzungen zwischen Mathematik und Physik nur dann zum Erfolg führen, wenn neben dem mathematischen Verständnis auch physikalisches Verständnis bzw. konzeptuelles physikalisches Wissen vorliegt und diese miteinander vernetzt sind. Unter konzeptuellem physikalischen Wissen wird dabei Strategiewissen, Anwendungswissen, Wissen um Beziehungen zu anderen Begriffen, Interpretationen und Vorstellungen zu einem Begriff gefasst.
Dies bedeutet, dass ein mathematisches Verständnis mit einem physikalischen Verständnis einhergehen muss. Weil den Problemsituationen der Physik ebenfalls Gesetze, Regeln und Konzepte zugrunde liegen, die bei den Übersetzungen berücksichtigt werden müssen und den Verlauf beeinflussen (vgl. auch u. a. Sherin, 2001; Uhden & Pospiech, 2013).
Das mathematische Verständnis lässt sich dabei mittels des Grundvorstellungskonzept der Mathematik (vom Hofe, 1995) modellieren. Dieses geht davon aus, dass Grundvorstellungen (GV) als Vermittler zwischen Realität, Mathematik und dem Individuum notwendig sind, und die Basis für eine flexible Modellierfähigkeit bilden. Für die Physik wird dieses Konzept aufgrund des Vorangegangenen adaptiert.
Die in der Physik notwendigen Vorstellungen werden als physikalisch-mathematische Grundvorstellungen (GV*) bezeichnet und sollen das konzeptuell-mathematische Verständnis von Physik (vgl. Uhden & Pospiech, 2013) beschreiben. Es handelt sich bei GV* um den Kern des Problems betreffende, genauer notwendige, Vorstellungen über die Passung (Anwendbarkeit und Ähnlichkeit) zwischen Physik und Mathematik um ein physikalisch Problem mit Mathematik zu lösen. Es sind besonders wichtige Vorstellungen, die mit einem bestimmten physikalischen Inhalt in Bezug auf dessen Mathematisierung bzw. einem mathematischen Inhalt hinsichtlich seiner Physikalisierung verbunden werden sollen. Unter Physikalisierung wird dabei die Fähigkeit verstanden, die vorliegende mathematische Darstellungsweise in ein physikalisches Modell zu überführen (i.A. an Buschhüter & Borowski, in Vorb.). Es wird davon ausgegangen, dass GV*, analog zu den GV der Mathematik, die Basis für eine flexible Modellierfähigkeit physikalischer Probleme bilden.
In Anlehnung an Prediger (2009) und vom Hofe (1995) wird in diesem Projekt folgende Arbeitsdefinition für das Konzept GV* verwendet:

Um die Übersetzungen „Mathematisieren“ und „Physikalisieren“ bewerkstelligen zu können, muss sowohl die lokale Bedeutung des mathematischen Konzepts als auch die des physikalischen Konzepts aktiviert werden kön-

nen, die zu der Struktur der Situation passt. Diese lokale Bedeutung wird als physikalisch-mathematische Grundvorstellung (GV) bezeichnet.*

Im Rahmen dieser Arbeit stehen daher die folgende Fragen im Fokus:

F1: Welche mathematischen Inhalte werden im Lösungsprozess benötigt?
F2: Welche GV müssen zum Lösen von Physikaufgaben der Sekundarstufe II beherrscht werden?
F3: Wie lassen sich GV* in Abhängigkeit der GV und des physikalischen Inhalts charakterisieren?
F4: Stellen GV* einen Prädiktor für die Aufgabenschwierigkeit dar?

3. Stichprobe und Design

Zur Bestimmung der notwendigen Mathematik werden manualbasiert Aufgaben (N > 600) dreier ausgewählter Physikschulbücher der Sekundarstufe II (NRW) sowie Abituraufgaben der letzten drei Jahre (NRW, Thüringen) untersucht. Das für eine systematische und objektive Analyse entwickelte Manual orientiert sich dabei an der Struktur einer Sprache (Buchstaben, Vokabeln, Grammatik). Es analysiert somit unter anderem die vorkommenden mathematischen Zeichen (Symbole, Operatoren, Zahlentypen), Darstellungen und Begriffen sowie deren Verwendung und die zugrundeliegenden Gesetze, Regeln und Definitionen. Die Analyse der Übersetzungsprozesse zwischen Mathematik und Physik und die Charakterisierung der GV* geschieht mittels einer Think-Aloud Studie. Dabei werden N = 25 Expertenlösungen bezüglich einer das Konstrukt GV* abbildenden Abituraufgabe manualbasiert untersucht.

4. Erste Ergebnisse

Das Manual zur Bestimmung der vorkommenden mathematischen Inhalte zeigt gute bis perfekte Interraterübereinstimmung ($\kappa = [0.74\text{-}1]$). Erste Ergebnisse der Analyse von Physikschulbuchaufgaben der Sekundarstufe II (N = 343) lassen erkennen, dass die notwendigen mathematischen Inhalte zum Lösen der Aufgaben primär aus der Sekundarstufe I stammen. Zudem setzen nach Musterlösung nur 18 % der Physikschulbuchaufgaben keine Mathematik voraus. Ein ähnliches Ergebnis konnten Schoppmeier et al. (2012) auch für Physikabituraufgabe verschiedener Bundesländer zeigen. Diese Ergebnisse weisen darauf hin, dass die Schulphysik der Sekundarstufe II mit einem einfachen mathematischen Repertoire auskommt. Es kann also vermutet werden, dass die für die Hochschule relevanten Themen fachspezifisch kaum eingeübt werden. Des Weiteren spiegeln diese Ergebnisse, die besondere Stellung der Mathematik in Physik wieder.

Literatur

American Association for the Advancement of Science [AAAS] (2009): The Nature of Mathematics. New York: Oxford University Press.

Blum, W. & Leiß D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der “Tanken”-Aufgabe. Mathematik lehren (Heft 158), 128, S. 18-21.

Buschhüter, D.; Borowski, A. (in Vorb.): GDCP Jahrestagung 2013, München.

Hofe, R. vom (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Horn, M. E.; Wolfgang, J. (2011): Geometrische Algebra in höheren Dimensionen. PhyDid B - Didaktik der Physik - Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2011. http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/viewDownloadInterstitial/281/400 (Stand 3/2013).

Hudson, M. T; McIntire, W. R (1977): Correlation between mathematical skills and success in physics. In: American Journal of Physics 45 (5), S. 470–471.

Malle, G. (o.J.): Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotienten. http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1999%20Band%2030/Malle1999.pdf (Stand 3/2013).

Prediger, S. (2009): „Aber wie sag ich es mathematisch?“ – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittler Beschreibung von Welt. In: D. Höttecke, Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Dresden 2009. Berlin: Lit., S. 6 – 20.

Schoppmeier, F.; Borowski, A.; Fischer, H. (2011): Entwicklung eines Kompetenzmodells der Sekundarstufe II. In: Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht. In: D. Höttecke, Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Oldenburg 2011. Berlin: Lit Verlag, S. 518-520.

Redish, E. (2005): Problem Solving and the Use of Math in Physics Courses: Beitrag präsentiert auf der "World View on Physics Education 2005", Delhi. Retrieved from http://www.ptec.org/items/detail.cfm?ID=3706 (Stand 3/2013).

Sherin, B. L. (2001): How students understand physics equations. In: Cognition and Instruction vol. 19, Nr.4, S.479-541.

Uhden, O. (2012): Mathematisches Denken im Physikunterricht – Theorieentwicklung und Problemanalyse. Berlin: Logos Verlag, S. 28-74.

Uhden, O.; Pospiech, G. (2013): Die physikalische Bedeutung der mathematischen Beschreibung. Anregungen und Aufgaben für einen neuen Umgang mit der Mathematik. In: Praxis der Naturwissenschaften 62 (2), S. 13-22.Liebe Vortragende bei der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 04.03.-08.03.2013 in Münster.

TIMSS III (1995): http://www.timss.mpg.de/Nationale_Befunde/Ergebnisse_zu_den_Fachleistungen.htm#Faehigkeitsniveaus_im_Mathematik-_und_Physikunterricht (Stand 3/2013).

Trump, S.; Borowski, A. (2012): Mathematikkompetenz beim Lösen von Physikaufgaben. PhyDid B - Didaktik der Physik - Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung 2012. http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/360 (Stand 3/2013).

Philipp ULLMANN, Frankfurt

„Situated learning“ in der Mathematikdidaktik: eine hochschuldidaktische Perspektive?

Die Mathematikdidaktik stellt gegenwärtig eine Fülle an Theorien und empirischen Evidenzen bereit, um das Lernen und Lehren von Mathematik immer besser zu verstehen. Und doch: Die Klagen über die real existierende Lehrpraxis reißen nicht ab. Zu wenig Mathematik werde gelernt, oder besser: verstanden, zu wenig Fachdidaktik werde gelernt, oder besser: im Unterricht umgesetzt. Stellt man diesem Befund das – seit Jahrzehnten andauernde – redliche Bemühen um „guten Unterricht“ gegenüber, scheint es durchaus der Mathematikdidaktik immanente Schwierigkeiten zu geben, die dem Blick von Innen nicht ohne weiteres zugänglich sind.

Situated learning bietet eine – aus der Kulturanthropologie stammende – theoretische Außenperspektive, die es erlaubt, genau diese Schwierigkeiten in den Blick zu nehmen.[1] Dabei weist der Begriff der *situatedness* weit über die Vorstellung hinaus, Mathematik-Lernen sei ein (relativ klar abgrenzbarer) Prozess, der in Raum und Zeit sowie in unterschiedliche gesellschaftliche und kulturelle Praxen eingebettet ist (vgl. Lave & Wenger 1991, S. 32-34).[2] Ausgangspunkt ist vielmehr die *community of practice*[3] und deren soziale Reproduktion, während Lernen – als ein Aspekt des Reproduktionsprozesses – zum nachgeordneten Phänomen wird.

[1] Die Klassiker sind Lave (1988) sowie Lave & Wenger (1991); zur Theorieentwicklung vgl. Kirshner & Whitson (1997) sowie Robbins & Aydede (2009); zur mathematikdidaktischen Rezeption vgl. Watson (1998) sowie Watson & Winbourne (2008).

[2] Was auf diesem engen Raum nur durch die Schlagworte *embodiment*, *embedding* und *extension* angedeutet werden kann (vgl. Robbins & Aydede 2009, S. 3-10).

[3] Weil eine kurze und prägnante Übersetzung irreführende Assoziationen nahe legen würde, behalte ich den englischen Ausdruck als *terminus technicus* bei. Lave & Wenger (1991, S. 97 f.) präzisieren ihr Begriffsverständnis folgendermaßen: „Mit der Verwendung des Begriffs *community* implizieren wir keine Ur-Entität etwa in Form einer gemeinsamen Kultur. Wir gehen davon aus, dass Zugehörige unterschiedliche Interessen verfolgen, auf vielfältige Weise zu Aktivitäten beitragen und verschiedene Ansichten haben. Nach unserer Auffassung beinhaltet die Zugehörigkeit zu einer *community of practice* [Hervorhebung im Original; P.U.] eine Teilnahme auf mehrfacher Ebene. Ebenso wenig impliziert der Begriff *community* notwendig die gleichzeitige Anwesenheit, eine wohl bestimmte, klar identifizierbare Gruppe oder sozial sichtbare Grenzen. Er impliziert aber die Teilnahme an einem System von Aktivitäten, bei der die Teilnehmer ein gemeinsames Grundverständnis davon haben, was sie tun und was das für ihr Leben und ihre *communities* bedeutet.“

Kultur des Erwerbens vs. Praxis des Verstehens

Dieser Perspektivwechsel führt zunächst zu einer anderen Einschätzung von Mathematik. Mathematik wird traditionell als ein Korpus abstrakten, logisch-formalen und vor allem kontextfreien Wissens imaginiert, der um seiner selbst Willen erforscht und in geeigneten Kontexten angewendet werden kann. Mathematik-*Lernen* ist dann der kognitive Prozess, dieses Wissen zu erwerben, dessen Was, Wie und Warum wiederum Gegenstand professionellen didaktischen Handlungswissens ist; dieses Verständnis von Lernen bezeichnet Lave (1997) als „Kultur des Erwerbens“. Dem hält sie die „Praxis des Verstehens“ entgegen; dieser Sichtweise stellt sich Mathematik als Praxis des Mathematik-*Treibens* dar, zu deren Selbstverständnis es gehört, ihre Produkte als möglichst abstraktes und entkontextualisiertes Wissen logisch-formal darzustellen und mögliche Spuren des Entstehungskontextes zu tilgen.[4] Die Teilnahme an dieser Praxis beinhaltet gleichsam beiläufig ein fortwährendes Lernen, sowohl seitens der vollwertigen Zugehörigen, als auch seitens derer, die es erst noch werden wollen.

Unter diesem Blickwinkel erfährt die didaktische Situation an Schule und Hochschule eine neue Bestimmung. Wo Schule als institutionalisierter Ort der „Kultur des Erwerbens“ Lernprozesse moderiert, wird das *Lern*curriculum des Mathematik-Treibens zum didaktisch aufbereiteten, durch Lehrende vermittelten *Lehr*curriculum des Mathematik-Lernens: Aus *learning to talk* wird *learning from talk*, aus *talking within* wird *talking about* (vgl. Lave & Wenger 1991, S. 107-109).

Schulischer Mathematikunterricht als *community of practice*

Damit bietet die Theorie des *situated learning* eine plausible Deutung der eingangs benannten allfälligen Klagen. Schule ist demnach kein Ort des praktischen Mathematik-Treibens, sondern des didaktisch vermittelten Mathematik-Lernens; statt Mathematikern stehen (Mathematik-)Lehrer im Klassenraum, und diese didaktische Rahmung hat ihren Preis.

Wenn Schüler etwa in der Algebra lernen, symbolische Notationssysteme syntaktisch korrekt aber semantisch leer zu handhaben, oder – anders gesagt – lernen, Unverstandenes oberflächlich richtig aussehen zu lassen, dann (auch) deshalb, weil es in der Schule „zunächst darum geht, ein kompetenter Schüler zu werden, und das hat unter Umständen wenig mit Mathematik-Treiben zu tun. Stattdessen geht es beispielsweise darum zu lernen, wie man Lehrer-Fragen heil übersteht, oder zu lernen, wie man mit dem

[4] Vgl. die in der Wissenschaftstheorie übliche Unterscheidung von Entdeckungs- und Begründungszusammenhang.

Verhalten des Mitschülers hinter sich umgeht, oder zu lernen, wie man mit möglichst geringem Aufwand möglichst schlau wirkt." (Watson & Winbourne (2008), S. 5)

Und wenn Schüler geometrische Problemstellungen durch naives Ausprobieren angehen, ohne vorher einen Plan zu machen, ohne das Problem überhaupt verstanden zu haben und ohne jegliches Beweisbedürfnis, dann (auch) deshalb, weil sie im Unterricht gelernt haben, „dass Aufgaben in weniger als 2 Minuten zu lösen sind, und wenn sie ein Problem nicht innerhalb von 10 Minuten lösen können, glauben sie, dass sie es überhaupt nicht schaffen. Sie glauben, dass Mathematik etwas ist, das entgegengenommen und nicht entdeckt wird, und das es sich dabei um einen Wissenskorpus handelt anstatt einer Form der Aktivität, der Argumentation und des sozialen Diskurses." (Lave 1997, S. 29)

Ähnlich problematisch steht es mit dem Verhältnis von Mathematik und ihrer Anwendung in Alltag und Beruf. „Sachkundige Didaktiker erwarten nicht mehr, dass die an den Einzelfall angepasste, informelle, ökonomisch funktionelle Mathematik auf der Arbeit und außerhalb der Schule durch einfachen Transfer – gleich welcher Richtung – mit der formalen Schulmathematik in Beziehung tritt. Inzwischen ist deutlich geworden, dass Anwendung von Mathematik als ein hochkomplexer, sozial zu entwickelnder Prozess zu sehen ist, der notwendig durch physische, symbolische und diskursive Werkzeuge vermittelt werden muss." (Watson & Winbourne (2008), S. 8)

Pointiert formuliert macht die Theorie des *situated learning* also drei prinzipielle Schwierigkeiten im Kontext des schulischen Mathematikunterrichts aus. Erstens: In der Schule lernt man nicht, Mathematik zu betreiben, sondern ein guter Schüler zu sein. Zweitens: Die meisten Schüler verfolgen dieses Ziel nur „auf Zeit", weil sie weder ewig Schüler bleiben noch Mathematiklehrer werden wollen. Drittens: Was als Schulmathematik verhandelt wird, steht weder mit Fachmathematik noch mit Alltagsmathematik in einem unmittelbaren Zusammenhang. Diese Verschiebungen vom Lern- zum Lehrcurriculum sind ein Artefakt der didaktischen Rahmung; Mathematik wird gewissermaßen als Attitüde des Schüler-Seins erlebt, die dem „wahren Leben danach" schadlos weichen kann.

Akademische Mathematikdidaktik als *community of practice*

Dieser Befund lässt sich teilweise auf die universitäre Lehramtsausbildung übertragen. Auch hier lernt man zuvorderst und „auf Zeit", ein guter Student zu sein, weil die meisten Lehramtsstudierenden nicht an der Universität forschen sondern an einer Schule unterrichten wollen. So birgt das Unbehagen vieler Studierenden gegenüber der universitären Praxis – sowohl der fachmathematischen als auch der mathematikdidaktischen – einen legitimen Kern. Wissenschaftliches Arbeiten von Mathematikern oder Mathematikdidaktikern und professionelles Handlungswissen von Mathematiklehrern sind eben zweierlei, und deren Vermittlung ist keine einfache Frage des Transfers. Felix Kleins berühmtes Diktum von der doppelten Diskontinuität, also der Kluft zwischen dem Lernen von Schulmathematik und dem Lehramtsstudium einerseits und der Kluft zwischen dem Lehramtsstudium und dem Lehren von Schulmathematik andererseits, ist vor diesem Hintergrund nicht nur eine didaktische Herausforderung, sondern der didaktischen Situation zuallererst geschuldet.

Und doch: Die Praxisfelder der universitären und schulischen Lehre überschneiden sich in einem zentralen Punkt; beide Male geht es um das Lehren von Mathematik und um mathematisch bereicherte Lebenspraxis. Damit aber rückt die Lehrtätigkeit der Hochschuldozenten in den Fokus. Was „gute Lehre“ ist – und das heißt an der Hochschule (auch): wissenschaftlich informierte und informierende Lehre –, wird immer wieder aufs Neue in der alltäglichen Praxis aktualisiert. Dabei schlägt sich der wesentliche Lehr- und Lernerfolg nicht im Zuwachs fachmathematischen und mathematikdidaktischen Wissens nieder, sondern in der akademischen Prägung von Lehr-Persönlichkeiten, die jeden Tag besser verstehen, was es bedeutet, Teil der *community of practice* der Mathematik-Lehrenden zu sein.

Literatur

Kirshner, D. & Whitson, J. (Hrsg.) (1997): Situated Cognition. Social, Semiotic, and Psychological Perspectives. Mahwah: Erlbaum.

Lave, J. (1997): The Culture of Acquisition and the Practice of Understanding. In: Kirshner & Whitson (Hrsg.): Situated Cognition. S. 17-35.

Lave, J. (1988): Cognition in Practice. Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life. Cambridge: Cambridge University.

Lave, J. & Wenger, E. (1991): Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation. Cambridge: Cambridge University.

Robbins, P. & Aydede, M. (Hrsg.) (2009): The Cambridge Handbook of Situated Cognition. Cambridge: Cambridge University.

Watson, A. (Hg.) (1998): Situated Cognition and the Learning of Mathematics. Oxford: University of Oxford.

Watson, A. & Winbourne, P. (Hrsg.) (2008): New Directions for Situated Cognition in Mathematics Education. New York: Springer.

Christian VAN RANDENBORGH, Würzburg

Zeichengeräte erforschen – Modellieren erleben

Einleitung

Die Entwicklung des Menschen, seiner Kultur und Denkweisen hängt aufs Engste mit der Erfindung von Werkzeugen zusammen.

„Man´s use of mind is dependent upon his ability to develop and use »tools« or »instruments« or »technologies« that make it possible for him to express and amplify his powers.“ [J.S. BRUNER, 1971, S. 24]

In der Mathematik und für den Mathematikunterricht wurden immer wieder Werkzeuge erfunden und verwendet. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf Zeichengeräte und gehen der Frage nach, welche Bedeutung historische Geräte für den heutigen Mathematikunterricht haben können. Wie kann ein Zeichengerät eingesetzt werden und was und wie können Schüler dabei lernen?

J.S. BRUNER formuliert mit Blick auf den Mathematikunterricht: „We would suggest that learning mathematics reflects a good deal about intellectual development. It begins with instrumental activity, a kind of definition of things by doing them.“ ([2], S. 68) Ein Beispiel für eine solche »instrumentale Aktivität« ist das Arbeiten mit einem Zeichengerät. Eine neue, weiterführende Perspektive ergibt sich, wenn ein Zeichengerät als *Ideenkonglomerat* unterschiedlicher Ideen, wie z.B. der mechanischen oder der mathematischen Idee, verstanden wird (Genaueres dazu: [3]).

In einer empirischen Studie wurde der Einsatz des Parabelzirkels von FRANS VAN SCHOOTEN (1615 – 1660) und des Pantographen von CHRISTOPH SCHEINER (1573 – 1650) im Mathematikunterricht untersucht. Den Schülern standen zur Erforschung einerseits reale Nachbauten und andererseits digitale Simulationen (mit GeoGebra) zur Verfügung. Die Ergebnisse wurden im Rahmen der Instrumentellen Genese und der Semiotischen Vermittlung analysiert und interpretiert. Aus den hierbei festgestellten Prozessen und Ergebnissen wurde das Modell der *Instrumentellen Wissensaneignung* entwickelt (zum Begriff siehe: [4]).

Der Einsatz von Zeichengeräten im Unterricht

Beim Einsatz von Zeichengeräten, wie dem Parabelzirkel oder dem Pantographen, stehen die mechanische und die mathematische Idee im Vordergrund. Durch das Aufdecken dieser Ideen des Ideenkonglomerats und ihres Zusammenhangs gelangen Schüler zu der im Zeichengerät verborgenen Mathematik. In unserer Studie konnten bestimmte Beschäftigungsphasen der Schüler festgestellt werden. Bei der Entwicklung vom Artefakt hin zum Instrument der Wissensvermittlung traten jeweils spezifische Zeichen auf, die sich verschiedenen Zeichenebenen oder Zeichenkategorien zuordnen ließen. So konnte zwischen Artefakt-, Schlüssel-, Instrument- und Mathematikzeichen unterschieden werden (vgl. auch [4], [1]). In diesem Prozess der *Instrumentellen Wissensaneignung* gelangten die Schüler durch Trägerzeichen von der einen Zeichenebene zur nächsten. Dieser Weg – beginnend mit den Artefaktzeichen, vermittelt über die Trägerzeichen und entlang der unterschiedlichen Zeichenkategorien hin zu den Mathematikzeichen – bildet die stattfindende Verständnisentwicklung ab. Dabei gibt es auch immer wieder Rückbezüge zu den vorherigen Zeichenebenen. So entsteht aus dem Artfakt ein Instrument der Wissensvermittlung. Derartige Prozesse konnten bei unterschiedlichen Zeichengeräten und insbesondere auch bei realen und digitalen Zeichengeräten festgestellt werden (zu Gemeinsamkeiten und Unterschieden siehe [3]). Dabei spielte die Untersuchung von Grenzen und Zwängen oder von Möglichkeiten und Veränderungsmöglichkeiten eine entscheidende Rolle. So konnten sowohl beim Parabelzirkel als auch beim Pantographen sowie sowohl bei digitalen als auch bei realen Modellen im Wesentlichen drei Instrumentalisationstypen festgestellt werden. Beim ersten Typ spielte das Betrachten, Aufdecken und Erklären von Grenzen und Zwängen des Geräts die entscheidende, die Erforschung bestimmende, Rolle. Vertreter des zweiten Typs interessierten sich besonders für Möglichkeiten und Veränderungsmöglichkeiten des jeweiligen Geräts. Dieses war ihre Leitperspektive. Beim dritten Typ konnte keine Dominanz des einen oder anderen Blickwinkels festgestellt werden.

Die Konsequenzen für die zugrundegelegten Modelle der Instrumentellen Genese und der Semiotischen Vermittlung, die sich aus diesen Untersuchungsergebnissen ergeben, sollen im Folgenden kurz umrissen werden.

Konsequenzen für das Modell der Instrumentellen Genese

Bei dem in unserer Studie beobachteten und erforschten wechselseitigen Beeinflussungsprozess der Instrumentellen Genese ließ sich feststellen, dass die Instrumentation die erste Richtung der Instrumentellen Genese ist. Die inhärenten Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten des Artefakts (Zeichengerät) bestimmten die Tätigkeit des Subjekts (Schülers). Auf der Seite des Subjekts wurde die Erforschung des Geräts von seinem Vorwissen, seinen Fähigkeiten und Fertigkeiten bestimmt. Dabei konnte je nach Instrumentalisationstyp der Blickwinkel bzw. die Leitperspektive für die Untersuchung des Geräts einerseits die Erforschung von Zwängen und Grenzen oder anderseits ein Veränderungsdenken sein.

In diesem Prozess der Instrumentellen Genese spielten insbesondere die Trägerzeichen eine wichtige und weiterführende Rolle. Die sich hier entwickelnden Erklärungsideen machten es möglich, dass aus dem Artefakt ein Instrument der Wissensvermittlung für die Schüler werden konnte. Die Bedeutung der Trägerzeichen hat auch Konsequenzen für das Modell der Semiotischen Vermittlung.

Konsequenzen für das Modell der Semiotischen Vermittlung

Bereits PEIRCE schrieb den Zeichen u.a. eine Vermittlungsfunktion zwischen Subjekt und Objekt zu. Für ihn sind Zeichen Mittel der Erkenntnis. Dieser Grundgedanke lässt sich mit Hilfe der Trägerzeichen noch genauer formulieren. Diese sind es, die zwischen Objekt und Interpretanten vermitteln. Sie führen die Verständnisentwicklung des Schülers voran (vgl. [4]). Diese zentrale Funktion soll nun anhand von zwei mathematik-didaktischen Bedeutungsaspekten verdeutlicht werden.

Bedeutungsaspekt 1: Repräsentationsmodi

Betrachten wir noch einmal die oben bereits erwähnte Auffassung von BRUNER, dass das Mathematiklernen mit einer »instrumentalen Aktivität« anfängt. Dort heißt es dann weiter: „Such operations become represented and summarized in the form of particular images.“ ([2], S. 68) Hier scheinen mir ganz deutlich die Trägerzeichen und insgesamt die Entwicklung von den Artefaktzeichen hin zu den Mathematikzeichen angesprochen zu sein. Geht man nun von den drei Repräsentationsmodi nach BRUNER aus und berücksichtigt, dass es letztlich darum geht, alle drei zu beherrschen, so sind die Übergänge zwischen den einzelnen Ebenen besonders wichtig. Der enaktiven Ebene lassen sich die Artefaktzeichen zuordnen. Die Schlüsselzeichen gehören dann zur ikonischen Ebene. Der symbolischen Ebene sind die Instrument- und Mathematikzeichen zuzurechnen. Der Übergang von der einen zur anderen Ebene wird durch die Trägerzeichen ermöglicht.

Bedeutungsaspekt 2: Modellieren

Legt man den Modellierungskreislauf von SCHUPP (1988) zu Grunde, kann man einerseits sagen, dass die Artefaktzeichen in den Bereich Situation (reale Welt) gehören. Man gelangt über die Schlüsselzeichen zu dem mathematischen Modell (mathematische Welt), zu dem die Instrumentzeichen gehören. Dabei stellen die Schlüsselzeichen den Übergang von realer Welt in die Mathematik dar. In den Bereich

„Konsequenzen“ des Schupp´schen Modellierungskreislaufs sind die Mathematikzeichen einzuordnen. Nun war bei der Untersuchung von Zeichengeräten im Mathematikunterricht deutlich erkennbar, dass es hier weniger einen Kreislauf als vielmehr einen Modellierungs*ablauf* gibt. Dabei finden zwischen den einzelnen Elementen (Situation-Modell, Modell-Konsequenzen etc.) immer schon Kreisläufe oder vielleicht besser Wechselwirkungen statt. Das „Mathematisieren“ ist geprägt durch das Aufdecken von Zwängen, Grenzen und Möglichkeiten. Dadurch gelangen die Schüler von der Situation zum mathematischen Modell. Auch hier kann dann bereits „Validieren“ stattfinden, indem Veränderungsmöglichkeiten realisiert werden. Interessant ist ferner der Übergang mathematisches Modell – Konsequenzen. Hier geht es zentral um die Untersuchung von inhärenten Zwängen des Geräts. Durch das Erklären der inhärenten Zwänge gelangen die Schüler in den Bereich Konsequenzen. Indem sie die Zwänge dann zum Begründen des mathematischen Modells nutzen, gelangen sie von dem Bereich „Konsequenzen“ wieder in den Bereich „mathematisches Modell“. In den Bereich der realen Welt gelangen die Schüler dann wieder durch eine Vernetzung des neu gefundenen Wissens mit dem vorhandenen (Vor-)Wissen. Ist dieser Modellierungsablauf der Instrumentellen Wissensaneignung soweit fortgeschritten, ist das historische Zeichengerät (Artefakt) nun zu einem Instrument der Wissensvermittlung geworden. Wird der Prozess von den Schülern reflektiert, stellen sie eine (erneute) Verbindung zur Ausgangssituation her. Werden außerdem noch Veränderungen am Zeichengerät vorgenommen, beginnt ein neuer Modellierungsablauf.

Literatur

[1]Bartolini Bussi, M.G. / Mariotti, M.A. (2008): Semiotic meditation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective; in: L. Englisch (Hrsg.): Handbook of international research in mathematics education, New York ²2008, S. 746-783

[2]Bruner, J.S. (1971): Toward a Theory of Instruction, Cambridge ⁵1971 (1. Auflage 1966)

[3]van Randenborgh, Chr. (2012): Parabelzirkel real und digital. Wissensaneignung durch Modelle und Simulationen; in: Mathematik lehren 174, S. 11-14

[4]van Randenborgh, Chr. (2012): Instrumentelle Wissensaneignung im Mathematikunterricht; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Bd. 2, S. 893-896

[5]Schupp, H. (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen; in:
Der Mathematikunterricht 34 (6) 1988, S. 5–16

Emese VARGYAS, Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz?

Zu Problemlösen und Begriffsentwicklung stellen wir die Entwicklung einer Lernumgebung für eine Veranstaltung in Fachdidaktik Geometrie vor. Im Zentrum steht das Verhältnis zwischen allgemeinen Methoden der Darstellung und Vermittlung geometrischer Inhalte und ihrer inhaltlichen Durchdringung. Mit Methoden meinen wir sowohl pädagogische als auch mathematische Aspekte einbeziehende Herangehensweisen wie Wahl und Wechsel der Darstellungsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch), Nutzung von Strukturierungshilfen (z.B. Farben, Symbolik, Anordnung, didaktische Sequenzierung), stoffdidaktische problemorientierte Vorgehensweisen (z.B. Zurückführen auf eine bekannte Aufgabe, Spezialisierung, Verallgemeinerung, Suche nach Invarianten, Variation, Vorwärts-Rückwärtsarbeiten) und stoffdidaktisch begriffsentwicklungsorientierte Sichtweisen (z.B. abbildungsgeometrische und euklidische Sichtweisen).

In vier Vorlesungen und 4 Übungen wurden diese Methoden am Beispiel folgender Satzgruppen erklärt und angewandt:

- Winkelsumme im Dreieck, Basiswinkelsatz
- Satz des Thales, Satz vom Umfangswinkel, Sehnen-Tangenten-Satz
- Sehnensatz, Sekantensatz, Sekanten-Tangenten-Satz
- Umkreis von Drei- und Vierecken, verschiedene Definitionen von Sehnenvierecken
- Satz des Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz
- Quadrieren von Flächen, Kongruenzabbildungen, flächenerhaltende Abbildungen (Scherungen)

In den Übungen wurden Variationen zu ausgewählten Themen in Form von Lernstationen und die Entwicklung eines Themas aus vorgegebenen Variationen (z.B. verschiedene Kontextualisierungen, Darstellungsebenen, Objektgenesen) unter Anleitung erarbeitet. In zwei abschließenden Übungen einschließlich einer Woche Vorbereitungszeit erarbeiteten die Studenten in kleinen Gruppen Variationen zum Thema Sehnensatz.

Der Sehnensatz steht in enger Beziehung zu Zusammenhängen im Sehnenviereck, im rechtwinkligen Dreieck, zu Ähnlichkeit am Kreis, dem geometrischen Wurzelziehen und dem Satz vom Umfangswinkel. Das Thema gab daher die Möglichkeit, die im Vorfeld betrachteten inhaltlichen Zusammenhänge aus der Perspektive des Sehnensatzes zu entwickeln.

Alle Gruppen erarbeiteten interessante Variationen, vor allem in Form verschiedener Darstellungsebenen des Sehnensatzes und arithmetischer (Wertetabellen und Nachmessen) und geometrischer experimenteller Einstiege mit DGS. Entgegen unserer Erwartung waren alle Variationen aus pädagogischer oder allgemein mathematikdidaktischer Perspektive entwickelt worden. Fragestellungen, die aus der inhaltlichen Auseinandersetzung mit dem Sehnensatz resultieren, wie Variation der Daten und des Beweises, geometrische Interpretation der Produkte, Umkehrung der Aussage wurden in den Gruppen nicht diskutiert und konnten auf Nachfrage nicht beantwortet werden.

Freudenthal zitiert in einem etwas anderen Kontext eine Anzeige eines französischen Provinzblattes: Ein Schwimmlehrer gesucht, der selber schwimmen kann (Freudenthal, 1973). Es schien, dass unsere Schwimmübungen nur uns selbst ins Wasser gezwungen, die Studenten aber am Beckenrand in aktiver Beobachterposition belassen hatten. Methodische Untersuchungen und Beschäftigung mit der Vermittlung des Sehnensatzes hatten nicht zwangsläufig zur Auseinandersetzung mit den im Sehnensatz formulierten mathematischen Zusammenhängen geführt.

Für die mathematische problemorientierte Erarbeitung des Sehnensatzes (Nassübung) erwies sich eine klassische stoffdidaktische Herangehensweise als nützlich: Die Formulierung eines guten mathematischen Problems.

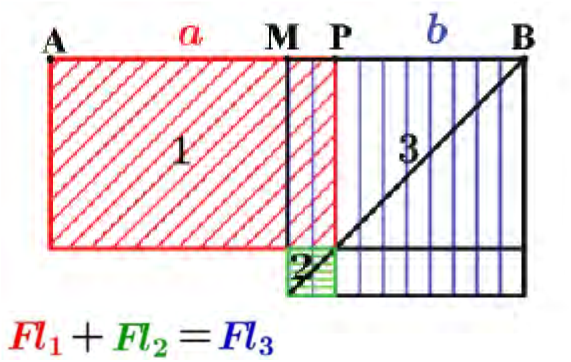
Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz?

Die Formulierung des Sehnensatzes ist eine Aussage über die Gleichheit der Produkte der Sehnenabschnitte zweier sich schneidender Sehnen eines Kreises. Der Beweis wird meistens durch den Nachweis der Ähnlichkeit der durch die Sehnenabschnitte gebildeten Dreiecke geführt, da diese Methode leicht auf die Situation variierter Schnittpunkte beim Sekantensatz und beim Sekanten-Tangenten-Satz übertragen werden kann.

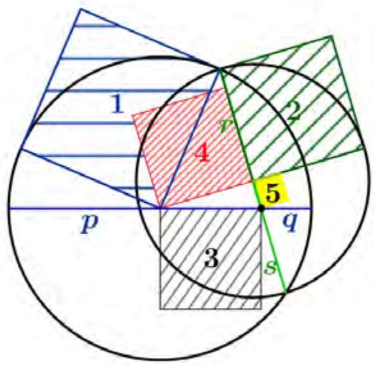
Für den Ähnlichkeitsbeweis ist die algebraische Umformung der Gleichheit der Produkte der Längen der Sehnenabschnitte in eine Gleichheit ihrer Verhältnisse notwendig. Eine analoge Verfahrensweise ist den Studenten für die Ähnlichkeitsbeweise zur Satzgruppe des Pythagoras bekannt. In der Geometrie werden Produkte von Streckenlängen als Flächen interpretiert. Für den Satz des Pythagoras und die Kathetensätze führen die Interpretationen als Flächen zu anschaulichen Beweisen durch Scherung und Kongruenzaussagen. Die Frage nach einer Beweisführung des Sehnensatzes durch Interpretation der Produkte als Flächen ist also durchaus nachvollziehbar.

Euklids Elemente inspirieren einen Lösungsansatz

Ein eigener Beweis des Sehnensatzes durch Flächengleichheit der durch die Sehnenabschnitte gebildeten Rechtecke ist anspruchsvoll, wie der interessierte Leser selbst erfahren kann. Der Sehnensatz wird in Euklids Elementen Buch 3 Satz 35 bewiesen (Fitzpatrick, 2007). Als Hilfestellung stellten wir unseren Studierenden Auszüge aus den entsprechenden Büchern zur Verfügung.



Wesentlich für den Beweis des Sehnensatzes durch Flächengleichheit ist Satz 5 aus Buch 2, welchen unsere Studenten im Kontext des Quadrierens ohne Verweis bereits gesehen hatten. Die Erarbeitung des Euklidischen Beweises anhand historischer Quellen mit der Zielstellung Antwort auf eine aktuelle Fragestellung zu finden, eröffnet neben der historischen eine handlungs- und durch mathematische Probleme motivierte Perspektive. Die aus historischer Sicht unwissenschaftliche Umformulierung des Euklidischen Beweises in moderne Notation gibt den Studierenden die Möglichkeit, vom sorgfältigen Nachvollziehen zu individuellem Verständnis zu kommen:

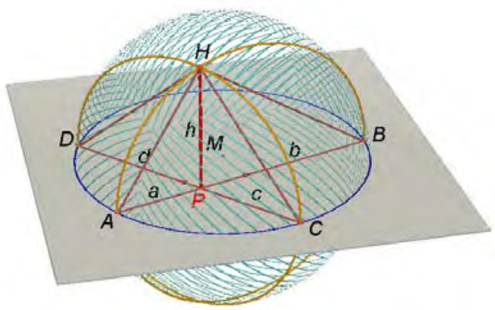


$$Fl_1 + Fl_2 = Fl_3 \Rightarrow a \cdot b + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Die Verwendung von Visualisierungen z.B. mit dynamischer Geometrie ermöglicht einprägsame kompakte Darstellungen der Beweisidee des Sehnensatzes (Abb.rechts).

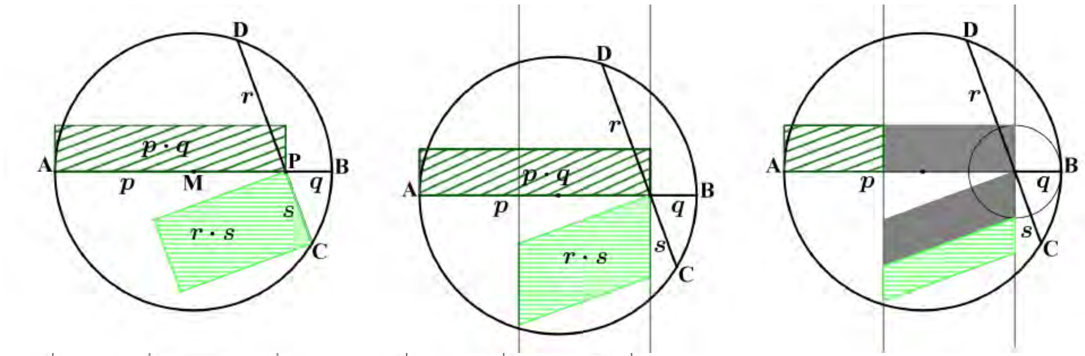
Andere Quellen der Inspiration für Lösungsansätze

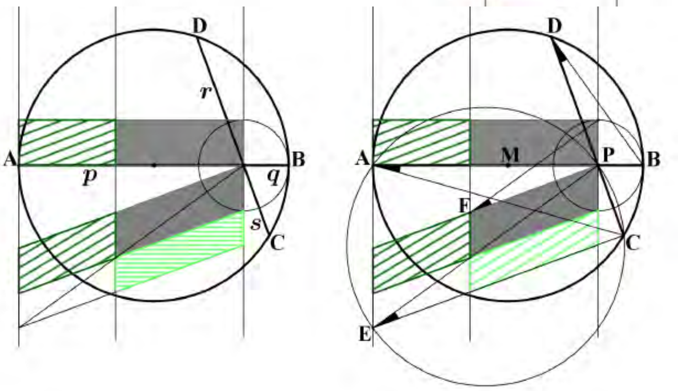
Nachdenken über den Beweis (EE, Buch 3, Satz 35) und Zusammenhänge der Beweisführung über Flächengleichheit und Ähnlichkeit beim Satz des Pythagoras rücken den Höhensatz und Scherungsbeweise ins Blickfeld. Einen schönen Beweis unter Nutzung der dritten Dimension entwickelte Heinrich Bubeck (1994). Beweise für den Sekantensatz und den Sekanten-Tangenten-Satz aus dieser Perspektive



folgten, u.a. von Neubrand (1994), Pickert (1995) und Dirnböck (1995). Der experimentelle Zugang unter Verwendung von Capri 3D von Heinz Schumann (2005, siehe auch vorherige Abb.) ist sehr inspirierend und führt zu neuen Variationen des Themas Sehnensatz.

Die Ausformulierung des in den folgenden Skizzen dargestellten Scherungsbeweises überlassen wir dem interessierten Leser.





Theorien und Methoden des Lehrens und Lernens sind ein wesentlicher und spannender Teil unseres Fachgebiets. Nicht weniger wichtig für unser eigenes Lernen und Lehren ist unsere mathematische Entwicklung. Lassen wir zum Metapher des Schwimmens noch einen anderen Klassiker der Didaktik zu Worte kommen: Wer Schwimmen lernen will, muss ins Wasser gehen und wer Aufgaben lösen lernen will, muss Aufgaben lösen (Polya, 1966).

Literatur

Bubeck, H. (1994): Ein räumlicher Beweis des Sehnensatzes. In: PM 6/36, 254-255.

Dirnböck, H. (1995): Ein räumlicher Beweis des Sekantensatzes des Kreises. In: PM 4/37, 177-178.

Fitzpatrick, R. (2007) Euclids Elements, Fitzpatrick.

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Klett, 152.

Neubrand, M. (1994): Ergänzung zum Beitrag von Heinrich Bubeck: "Ein räumlicher Beweis des Sehnensatzes“. In: PM 6/36, 255 - 256.

Pickert G. (1995): Zum räumlichen Beweis des Sekantensatzes. In: PM 3/37, 102.

Pólya, G.(1966): Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren, Basel: Birkhäuser, Vorwort.

Schumann, H. (2005): Sätze über Kreise raumgeometrisch beweisen. Online-Ergänzung zu PM 47/6.

Ingrida VEILANDE, Riga

On mathematical problems with elements of the game of chess

Introduction. Classes of mathematical circles must be built creatively to encourage the interest and imagination of students, to introduce them to the variety of problem-solving techniques, and to unleash children's imagination. The classes may focus on unusual, exciting problems, whose themes must not be limited by the curriculum. Compiling a selection of problems is the core question not only for teachers of mathematical circles, but also for mathematics teachers of compulsory education and specialists who organize mathematical Olympiads. Mathematical chess problems, as part of the field of recreational mathematics, stay in the centre of interests of mathematicians and puzzlers for many years. Colorful ideas from this field can be implemented by composition of various mathematical tasks.

Mathematical chess problems. The most popular topics here are placement of chess pieces, piece tours and permutations. The placement problems consider the independent dispositions of chess peaces or so-called domination problems. One of the famous examples is the eight Queens problem pronounced by Max Bezzel in 1848 (Gardner, 1968). Thorold Gosset proved the additional property of 12 basic eight Queens dispositions in 1914: it is not possible to combine all these dispositions for every square of board to be occupied by a Queen. The most popular problem is the Knight's tour puzzle. Only by computer calculations was it possible to find the number of all closed Knight's tours on the traditional chess board. The number of undirected tours is 13 267 364 410 532 (McKay, 1997). William Beverley found the semi-magic knight tournament in 1848, and only some years ago was the non-existence of the magic tour proved (Weisstein, 2003). Mathematicians are interested in relations of Knight's tour with regular graphs, prime numbers, Pick's theorem, calculations of areas, coloring problems. Form the huge collection of mathematical chess problems and open questions it is preferable to adapt ideas for composing "paper and pencil" problems according to the above-mentioned reasons.

Problem creation strategies. There are two eventual directions in the composition of mathematical problems: transformation and generation. To the first, more constructive direction relates simplification, reformulation and translation. Simplification is useful for formulating the introductory problem of some new topic, taking a special case of a more general problem. Reformulation allows to change the context of the problem and to consider the given conditions from different aspects. For demonstration of problem-solving strategies, some reasonable mathematical results could be "translated" in terms of elementary mathematics. Such problem posing techniques as “What if not...” are suitable for students to master the skills of analyzing, interpreting, reasoning, hypothesizing, questioning and experimenting:

„*...The user lists each attribute of a situation, whether a theorem, a piece of equipment or a method of presentations, and negates one attribute at a time to generate a new mathematical situation to be explored.”* (Small, 1993)

The problem-generation process is more creative. Only by research work and problem solution, experimentation, and generalization do a number of questions arise that specify additional fields of investigation. New mathematical problems can be re-formulated from the achieved results as a co-product of research activities.

Components of the problem. A combinatory problem with chess elements has three main components:

- Domain: game board or field and their properties;
- Objects: static or active chess pieces (or other objects) with their properties;
- Interactions: mutual interaction between objects or between an object and the board.

The disposition described poses a conflict situation or rouses a sequence of questions. On this ground a mathematical problem can be formulated.

The puzzlers are interested in many additional problem concepts that are derived from the rules of traditional chess. They use not only rectangular boards of arbitrary size but also domains of different type, e.g. orthogonal lattice, plane triangulation, hexagonal plane, three-dimensional or multi-dimensional action fields. For example, the existence problem of Knight’s tour on a rectangular board of arbitrary size is solved. Many complementary modified pieces stay in the range of interests, such as simple leapers Camel, Antelope, Zebra, or combined pieces, e.g. Amazon that is a combination of Knight and Queen. Different initial positions, given conditions, mutual interactions between objects and their properties initiate various mathematical tasks: calculation of the number of combinations, determination of the winning strategy, detection of extreme elements, proving problems of existence.

Construction of problems. Changing and combining the three above mentioned components offer unlimited opportunities for problem-posing. This possibility is useful for every teacher who wants to improve his or her classes. The teacher can find or construct problems of combinatory theory, graph theory, geometry, and vector algebra. It is possible to formulate problems by supplementing chess pieces with additional properties, for example:

Problem 1. All the squares of the chess board are colored green. Knight can erase the color from a rectangle sized 3x2 with his move. What is the minimum number of the Knight's moves to erase all squares on the board?

Different tasks can be constructed and general solutions can be obtained by placement of chess pieces on an unbounded board. Problems can be constructed using the Cartesian plane of integers:

Problem 2. Write the equation of a straight line that has the same direction as a particular Knight's move.

Problem 3. Create an algorithm for a symmetric Bishop's path with respect to the origin of plane.

Problem 4. Calculate the shortest Knight's path between any two given points and calculate the number of such paths.

Another way is the construction of such mathematical problems that use some well-known reasoning methods to find the solution. Such option is useful for students to master the method of invariants, the method of the extreme element, mathematical induction, the pigeonhole principle or other methods:

Problem 5. *Invariant method*. A hexagonal game board is tiled into 37 regular unit hexagons. The figure is a connection of two or more unit hexagons. Find such minimal figure that is not possible to completely cover the board (except the central hexagon) without overlapping these figures.

Problem 6. *Composition of circles*. All the Knight's moves on the hexagonal game board are defined. Construct a set of symmetrical circles so that they can be arranged in the Knight's path on the given game board.

Problem 7. *Pigeonhole principle*. Game board is an equilateral triangle that consists of 64 unit triangles. The pawn can move from one triangle to the next triangle by passing the common vertex in the move if non-adjacent edges of triangles are parallel. Calculate the maximum number of pawns that can be placed on the board so that no two of them attack each other.

Idea of solution. There are 4 independent sub-structures on the board according to the given conditions. If two pawns are placed on triangles of different structures they can't attack each other. There are 3 mutually symmetrical structures and one other:

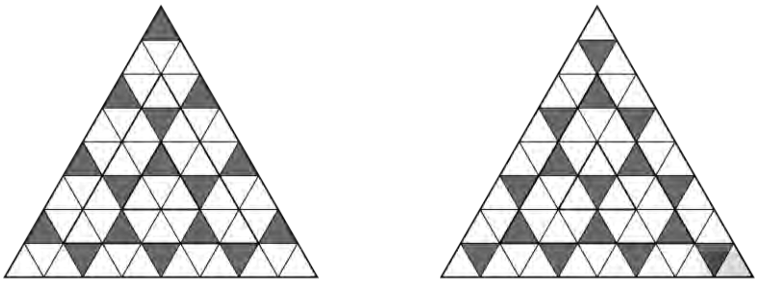


Figure 1. Different structures of pawns' moves.

The classification of triangles into separate structures and evaluation by the pigeonhole principle lead to the optimum number of pawns that can be placed on the board.

Significant tasks of education today are the representation of real-life problems and applications of mathematics. The interpretation of numerical, algebraic or other theoretical results are included in the lists of skills that students have to acquire. "Write a story about the given numerical expression!" is an initial challenge for students of younger grades. The challenge for older students as well as teachers could be the creation of a mathematical problem based on a story or a fairytale, for example:

"Once upon a time there lived one very suspicious Queen…"

<u>Problem 8.</u> The Queen is placed on a chess board. What is the minimal number of Knights so that every square could be attacked by a Knight in one or two moves, except the squares attacked by the Queen and except the squares occupied by pieces?

Conclusions. Books, journals, and internet resources offer a tremendous amount of manifold mathematical chess problems that can inspire every teacher or puzzler. Considering that there is no definite universal recipe for mathematical problem creation, the main way to construct mathematical problems is the research of various structures with various properties and various conditions using fantasy, imagination, inspiration, curiosity, experience, knowledge, courage, persistence, patience, and insight.

Literature

Gardner, M. (1968) The Eight Queens and Other Chessboard Diversions. Unexpected Hangings, and Other Mathematical Diversions. Simon and Schuster, New York.

McKay, B.D. (1997) Knight's tours of an 8x8 chessboard. URL: http://cs.anu.edu.au/~bdm/papers/knights.pdf, revisited on March, 2013.

Small, M. (1993) Creating Number Problems, in Problem Posing: Reflections and Applications, edited by Braun, S.I., Walter, M.I. Lawrence Erlbaum Associates, USA.

Weisstein, E. W. (2003) There Are No Magic Knight's Tours on the Chessboard. URL: http://mathworld.wolfram.com/news/2003-08-06/magictours/, revisited on March, 2013.

Christine PLICHT, Markus VOGEL, Christoph RANDLER, Heidelberg

Diagramme im Biologieunterricht – Wie gehen Kinder damit um?

Diagramme finden als grafische Aufbereitungen von Statistiken in Schule und Alltag Verwendung. Das Forschungsprojekt SRUMaBio untersucht Diagramme im Schnittbereich der Didaktiken von Mathematik und Biologie. Für das Verständnis von Diagrammen werden der Zweck, der Kontext und das Vorwissen dazu, sowie die Darstellungsweise bedeutsam. In diesem Beitrag wird der Forschungsansatz des Projektes skizziert und die Ergebnisse der bisher durchgeführten diagnostischen Interviewstudien dargelegt. Die Interviewanalysen dienen der Hypothesengenerierung für nachfolgende quantitative Studien, die im Ausblick umrissen werden.

1. Motivation

Diagramme sind im Alltag, aber auch im Schulunterricht ein unverzichtbares Mittel um Zusammenhänge und Strukturen aufzuzeigen. Diagramme lesen und erstellen zu können ist ein Gegenstandsbereich des Mathematikunterrichts. Dabei wird häufig insbesondere auf syntaktische Voraussetzungen und Notwendigkeiten eingegangen, die sich im Unterricht in Fragen konkretisieren wie z.B.: Was gehört zu einem Diagramm dazu? Wie können Daten abgelesen, Datentrends ermittelt und verglichen sowie Schlussfolgerungen begründet festgemacht werden? Was ist bei der Eigenkonstruktion von Diagrammen zu beachten? Allerdings werden Diagramme auch in anderen Unterrichtsfächern, z.B. der Biologie, als Instrument zur Visualisierung von Daten und kontextabhängigen Zusammenhängen verwendet. Um aus einem Diagramm Verallgemeinerungen abzuleiten, Vorhersagen zu treffen oder Trends zu identifizieren, müssen die Informationen aus dem Diagramm in Bezug zu dem Kontext der Situation gesetzt werden (Friel, Curcio & Briel, 2001). Entsprechend konsequent fordern curriculare Vorgaben (z.B. KMK, 2005), dass der verständige Umgang mit Diagrammen Teil des Biologieunterrichts sein muss. Ziel des interdisziplinären Forschungsprojektes SRUMaBio der Pädagogischen Hochschule Heidelberg ist es zu analysieren, wie die Lesekompetenz von Diagrammen mit Blick auf die Adressaten und den Zweck im Unterrichtssetting des Faches Biologie gefördert werden kann.

2. Forschungsstand und Vorarbeiten

Diagrammen dienen dem Wissenserwerb (Schnotz, 2008). Sie beinhalten nicht nur strukturspezifische Informationen von Datenpunkten und Datentrends, sondern auch kontextspezifische Informationen, die den Datenhintergrund repräsentieren. Darauf basiert das Datenlesemodell von Curcio (1987). Sie beschreibt in einem Stufenmodell, dass beim *Lesen* von Daten nicht nur Datenpunkte abgelesen werden, sondern auch *zwischen* diesen gelesen wird, um Trends aufzuzeigen und Punkte zu vergleichen. Eine weitere Stufe, die den Kontext berücksichtigt, bezeichnet das Lesen *über* die Daten *hinaus*, um weitergehende Prognosen anstellen zu können. Ergänzt wird dieses Modell um eine vierte Stufe, das Lesen *hinter* den Daten (Shaughnessy, 2007). Dabei werden Informationen berücksichtigt, die den konkreten Datenbestand kontextuell einrahmen, wie z.B. die Art der Datenerhebung oder vorhandene vergleichbare Datenpools.

Gerade die letzten beiden Stufen sind eng verwurzelt mit der Anwendung und dem Kontext des Diagrammes. Diese zweigeteilte Sichtweise,

- zum einen der strukturelle Fokus auf die Thematik und die sie repräsentierende Datenmasse,
- zum anderen der kontextuelle Fokus auf den Datenhintergrund,

lässt sich auf Diagramme in Biologiebüchern übertragen. Auf diesem Hintergrund wurden im Rahmen des Projekts Diagramme in den bundesweit gängig verwendeten Biologiebuchlehrwerken gesichtet und auf dem Hintergrund dieser Zweiteilung kategorisiert. Die Kategorisierung erfolgte auf der Basis von zyklischen, interdisziplinären Inhalts- und Strukturanalysen der jeweiligen didaktischen Intention im Schulbuchzusammenhang eines Diagramms von Problemstellung, Adressatenkreis (Vorwissen und Grafikkompetenz) und Zweck (vgl. Eichler & Vogel, 2013, S. 32).

Damit lässt sich folgendes Analyseinstrument ableiten, das sich zum einen theoriegleitet aus der o.g. Zusammenschau von in der scientific community als grundlegend anerkannten Arbeiten im Bereich der Stochastikdidaktik ergibt. Zum anderen synthetisiert sich dieses Analyseinstrument empirisch aus der Sichtung von unterrichtsrelevantem Diagrammmaterial.

Leseprozess	*Fokus*	*Fach*
Lesen der Daten	Strukturfokussierende	Mathematik
Lesen zwischen den Daten	Diagramme	
Lesen über die Daten hinaus	Kontextfokussierende	
Lesen hinter den Daten	Diagramme	Biologie

Damit wurde eine praxisvalide Analysegrundlage für relevantes Biologielehrmaterial geschaffen. Zur Operationalisierung dessen, was unter Diagrammkompetenz im Biologieunterricht zu verstehen ist, kann auf Lachmayer (2008) zurückgegriffen werden. Ihr Kompetenzmodell fokussiert explizit auf den Umgang mit Säulen- oder Liniendiagrammen. Das Projekt SRUMaBio knüpft hier an und weitet den Blick auf weitere Diagrammformen, die im Biologieunterricht vorkommen (Kattmann, 2006).

3. Forschungsziel

Im vorliegenden Forschungsprojekt werden Diagramme, die im Biologieunterricht eingesetzt werden, unabhängig von ihrer Diagrammform betrachtet, um so den Einfluss des Kontextes zu untersuchen und Schlüsse für eine geeignete Verwendung, angepasst an Adressaten und Unterrichtssetting, zu ziehen. Um für nachfolgende Unterrichtsimplementationsstudien begründet Hypothesen generieren zu können, stellt sich als Forschungsfrage für vorgeordnete Interviewstudien: Wie gehen Kinder spontan (unabhängig von der Anwendung im Unterricht) mit typischen Diagrammen aus Biologiebüchern um?

4. Forschungsmethodik, pilotierende empirische Befunde

Um Antworten auf vorgenannte Forschungsfrage zu finden, wurde eine erste Interviewstudie mit insgesamt zehn Schülerpaaren durchgeführt, die in offenen Interviews je drei bis vier Diagramme lesen und beschreiben sollten. Die Kinder waren 10-12 Jahre alte Gymnasial- oder Realschüler. Die Interviews wurden videografiert und anschließend transkribiert. Die Transkripte wurden nach der Grounded Theory Methodologie ausgewertet, um Hypothesen zu generieren, die das Leseverständnis betreffen. Bei der Auswertung wurden Einflussgrößen identifiziert, die beim Lesen von Diagrammen mit biologischem Kontext eine Rolle spielen.

Bei den (noch nicht abgeschlossenen) Analysen wurden bisher drei relevante Faktoren aus den Daten herausgearbeitet, die auf das Lesen und weiteres Verständnis wirken.

- Die *Gestaltung* des Diagramms spielt eine entscheidende Rolle. Gerade bei Diagrammen, die aus Schulbüchern entnommen wurden, ist auffällig, dass sie z.B. häufig mit Grafiken illustriert sind. Hier haben die bisherigen Analysen übereinstimmend gezeigt, dass diese Grafiken die Blick- und Interpretationsrichtung der Kinder in nicht unwesentlicher Weise beeinflussen.
- Bei der genaueren Betrachtung der Herangehensweise von Kindern, hat sich gezeigt, dass auch das *Vorwissen und die Vorstellungen* zu der dargestellten Thematik die Erfassung des Diagramms beeinflussen. Das kann dazu führen, dass die vorgelegten Daten ihren (möglicherweise falschen) Vorstellungen angepasst werden und auch das Vorwissen genutzt wird, um die Daten zu erklären.

- Ein weiterer Faktor, der eng mit dem vorherigen zusammenhängt, ist der *Bezug zur (eigenen) Lebenswelt*. Die Daten werden von den Kindern anhand ihrer eigenen Erfahrungen überprüft, kritisiert oder angepasst. Damit gelingt es ihnen Aussagen (nicht notwendigerweise richtige) zu treffen, die über die Daten hinausgehen.

Die Analysen machten zudem deutlich, dass der Diagrammkontext wesentlich auf diese Faktoren einwirkt. Daraus erschließt sich, dass sie beeinflusst werden können, je nachdem wo (Situation, Problemstellung), wann (Vorwissen) und wie ein Diagramm (Zweck) eingesetzt wird. Die Interviewanalysen erhärten: Diagramme stehen nicht für sich, sondern für einen situativen Kontext, den sie repräsentieren und von dem maßgeblich abhängt, wie sie gelesen und verstanden werden können.

5. Ausblick

Da sich diese erste Studie außerhalb des Unterrichtskontextes in einem „künstlichen“ Rahmen stattfand, ist es Ziel des Projektes SRUMaBio weitere Untersuchungen im Rahmen von Interventionsstudien im konkreten Biologieunterricht durchzuführen. Dabei sollen die genannten Faktoren genauer untersucht werden und dadurch Möglichkeiten zur Verbesserung der Verwendung von Diagrammen im Unterricht aufgezeigt werden.

Literatur

Curcio, F. R. (1987). Comprehensions of mathematical relationships expressed in graphs. Journal for Research in Mathematics Education, 18, 382-393.

Eicher, A. & Vogel, M. (2013). Die Leitidee Daten und Zufall. Wiesbaden: Vieweg+Teubner (2., akt. Auflage).

Friel, S. N., Curcio F.R., Bright G. W., (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehensions and Instructional Implications. Journal for Research in Mathematics Education Vol. 32, No. 2 (Mar., 2001), pp. 124-158

Kattmann, U. (2006). Diagramme. In H. Gropengießer & U. Kattmann (Eds.), Fachdidaktik Biologie. Die Biologiedidaktik begründet von Dieter Eschenhagen, Ulrich Kattmann und Dieter Rodi, pp. 340-356

KMK (Kultusministerkonferenz) (2005). Bildungsstandards im Fach Biologie für den Mittleren Schulabschluss: Beschluss vom 16.12.2004. München: Wolters Kluwer.

Lachmayer, S. (2008) Entwicklung und Überprüfung eines Strukturmodells der Diagrammkompetenz für den Biologieunterricht. Dissertationsschrift. http://eldiss.uni-kiel.de/macau/receive/dissertation_diss_00003041 [15.03.13]

Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Multimedia. Unterrichtswissenschaft, 29, 292-318.

Shaughnessy, M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 957-1010.

Rose VOGEL, Julia ZERLIK, Frankfurt am Main

„Bilder des Alltags“ – mathematisch und mathematikdidaktisch gedeutet

Ausgangspunkt der hier vorgestellten Analyse sind „inszenierte Bilder des Alltags“, die von Studierenden im Rahmen ihres Grundschullehramts gestaltet werden (vgl. Vogel 2012). Die von Lehramtsstudierenden in Szene gesetzten „Bilder des Alltags“ werden dazu genutzt, deren mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen zu rekonstruieren. Mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen wird hier als Grundlage professionellen fachdidaktischen Handelns betrachtet (vgl. Baumert & Kunter 2006). Die Analyse von studentischen Arbeitsprodukten wird hier als ein ergänzendes, qualitativ orientiertes Verfahren erprobt (vgl. Vogel 2012), in Ergänzung zu standardisierten Erhebungen mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens von Lehramtsstudierenden, die in Studien wie z.B. TEDS-M 2008 genutzt werden (Blömeke, Kaiser & Lehmann 2010).

1. „Bilder des Alltags“ – Arbeitsaufträge für die Studierenden

Die für die Analyse ausgewählten „Bilder des Alltags“ werden von den Studierenden im Rahmen ihrer Portfolioarbeit (Vogel & Schneider 2012) in verschiedenen mathematikdidaktischen Seminaren (im Hauptstudium) in Szene gesetzt. Die von den Studierenden entwickelten Inszenierungen werden durch unterschiedliche Arbeitsaufträge motiviert (vgl. Vogel 2012). Den hier vorgestellten Analysen zugrundeliegende Text- und Bildmaterial wird von Studierenden im Kontext folgender Arbeitsaufträge erstellt:

Arbeitsauftrag 1 (Material von 15 Studierenden)
Es soll ein Foto einer Alltagssituation, eines Alltagsgegenstands erstellt werden, das dazu genutzt werden kann, einen mathematischen Auseinandersetzungsprozess bei Lernenden anzuregen. Entlang ausgewählter Fragen soll der mathematikdidaktische Gehalt des Fotos beschrieben werden. Aspekte, die in den Fragen initiiert werden, sind: Foto als Lernanlass, Foto als Unterstützung für den mathematischen Lernprozess, multimodale Potentiale des so inszenierten Lernanlasses.

Arbeitsauftrag 2 (Material von 43 Studierenden)
Der Arbeitsauftrag 1 wird hier um die Aufforderung erweitert, mathematische Potentiale des Fotos herauszuarbeiten. Damit fordert dieser Arbeitsauftrag die Studierenden dazu auf, mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen in der Bearbeitung zum Ausdruck zu bringen.

2. „Bilder des Alltags“ – Analyse des Bildmaterials

Die erste Sichtung des Datenmaterials zeigt, dass die Studierenden vor allem Bilder aus den Bereichen „Gebäude“ und „Essen und Trinken“ favorisieren. Etwa die Hälfte der Fotos zeigt ein Motiv aus einem dieser beiden Gebiete.

Ordnet man die Fotos den fünf mathematischen Bereichen aus den Bildungsstandards zu, zeigt sich folgendes Bild: „Zahlen und Operationen“ (20 Nennungen), „Raum und Form“ (13 Nennungen) und „Größen und Messen“ (9 Nennungen). Die Bereiche „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit“ sowie „Muster und Strukturen“ wurden nahezu gar nicht ausgewählt. Hingegen haben 12 Studierende mögliche Aufgabenstellungen formuliert, die verschiedenen mathematischen Bereichen zuzuordnen sind.

3. Analyse des Textmaterials

Das von den Studierenden generierte Textmaterial wird mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2007) ausgewertet. Es wird die Technik der „induktiven Kategorienbildung“ (ebd., S. 75) verwendet. Induktiv werden aus dem vorhandenen Textmaterial „in einem Verallgemeinerungsprozeß“ (ebd., S. 75) Kategorien gebildet und abschließend gruppiert. Als „Selektionskriterium“ bzw. „Thema der Kategorienbildung“ werden die mathematischen und mathematikdidaktischen Ausdeutungen der Bilder gewählt (ebd., S. 76). Entlang des „Prozeßmodells induktiver Kategorienbildung“ nach Mayring (2007, S. 75) wird zunächst 20% des Materials genutzt, um Kategorien herauszuarbeiten. Diese werden nach einer Überarbeitung für die endgültige Analyse der 58 Texte genutzt. Die beiden Teilaufträge des Arbeitsauftrags werden getrennt analysiert. Es gibt Kategorien, die sowohl im mathematischen als auch im mathematikdidaktischen Teilauftrag identifiziert werden können (M und D) und Kategorien, die nur in einem Teilauftrag vorkommen (D oder M).

Es werden folgende Kategorien herausgearbeitet (gruppiert):
Orientierung am Arbeitsauftrag: M01/D01: Aufgabe im Bild, M02/D02: Zuordnung zu einem mathematischen Bereich, M03/D03: Zuordnung zu den Bildungsstandards, Kompetenzbeschreibungen
Kinder als Lernende: M05/D05: Aufbau mathematischer und allgemeiner Lernkompetenz der Kinder, M06/D06: Vorwissen der Kinder, M07/D07: Lebenswelt der Kinder, D08: Lerndifferenzierung
Mathematische und mathematikdidaktische Erklärungen: M08/D09: mathematische Erklärungen mit alltagsweltlicher Orientierung, M09/D10: mathematische Erklärungen mit Orientierung an der Schulmathematik, M10/D11: mathematische Erklärungen mit Orientierung an Wissensele-

menten aus den Grundveranstaltungen des Lehramtsstudiums, M11/D12: mathematikdidaktische Erklärungen an mathematikdidaktischen Modellen orientiert.
mediale Aspekte: D13: Einsatz von Arbeitsmaterialien, M12/D14: Einsatz von Medien, D15: Nennung multimodaler Aspekte
methodische Überlegungen: D16: methodisches Vorgehen in Bezug auf die Unterrichtsorganisation, D19: methodisches Vorgehen auf das Individuum bezogen, D17: antizipierte/geplante Schülerinnen- und Schüleraktivitäten, D18: antizipiertes/geplantes Verhalten der Lehrperson
Sonstiges: M15/D20.

4. Ergebnisse

In der Präsentation der Ergebnisse soll ein besonderer Fokus auf die vier Kategorien der mathematischen und mathematikdidaktischen Erklärungen gelegt werden, da diese in besonderer Weise Aufschluss über das mathematische und mathematikdidaktische Wissen der Studierenden geben.

Ergebnisse aus der Analyse des mathematischen Teilauftrags
In der Analyse des mathematischen Teilauftrags werden 589 Textstellen kodiert. Den Kategorien zu den mathematischen Erklärungen konnten insgesamt 221 Textstellen zugeordnet werden. Die mathematischen Erklärungen der Studierenden orientieren sich vor allem an alltagsmathematischen und schulmathematischen Erklärungsmodellen (M08: 100 Nennungen, M09: 104 Nennungen) und weniger an mathematischen Modellen (M10: 17 Nennungen). Außerdem gibt es in diesem mathematisch orientierten Teilauftrag 22 Textstellen, in denen die Studierenden mathematikdidaktische Ausdeutungen des Bildmaterials vornehmen.

Sehr häufig lässt sich auch die Kategorie „Einsatz von Medien“ (M12: 65 Nennungen) in den Texten identifizieren. Hier wird vor allem auf das ausgewählte Bild Bezug genommen und dessen Ausgestaltung und Funktion für den Lernanlass beschrieben. Die Nennung anderer Medien und das Herausarbeiten deren Relevanz für den Lernprozess werden in dieser Kategorie ebenfalls erfasst.

Ergebnisse aus der Analyse des mathematikdidaktischen Teilauftrags (vgl. Abb. 1)
In der Analyse des mathematikdidaktischen Teilauftrags werden insgesamt 1738 Textstellen kodiert. Davon können 58 Kodierungen der Kategorie D12/M11 „mathematikdidaktische Erklärungen an mathematikdidaktischen Modellen orientiert“ zugeordnet werden. Weitere Schwerpunkte der Studierenden liegen auf Ausführungen der medialen Ausgestaltung des Lern-

anlasses (insgesamt 546 Nennungen) und methodischen Überlegungen (383 Nennungen).

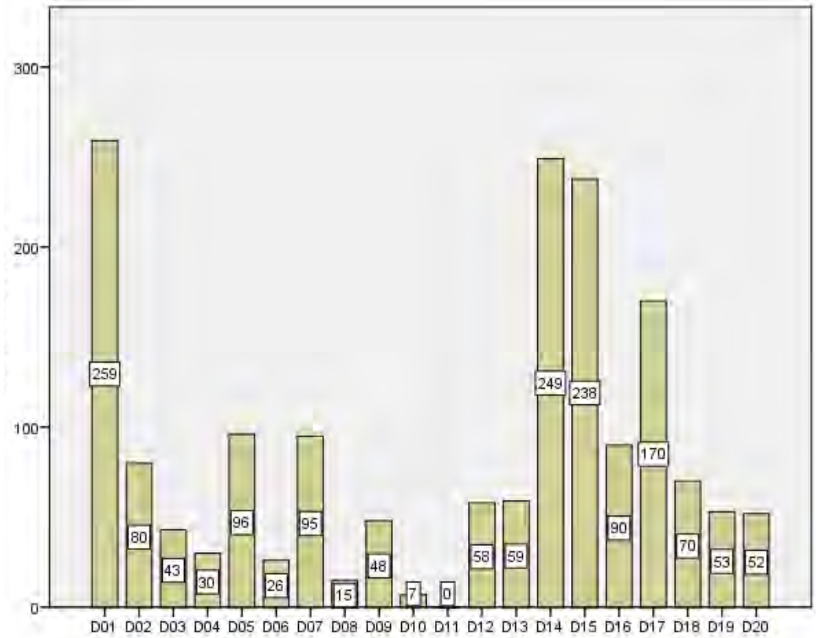


Abb. 1 Häufigkeiten der Kategorien für den mathematikdidaktischen Teilauftrag

Insgesamt zeigt sich, dass Studierende während der Bearbeitung eines solchen Arbeitsauftrags in ihren mathematischen Ausdeutungen eher auf ihre mathematischen Alltagserfahrungen zurückgreifen und ihre mathematische Schulsozialisation wirksam wird. Mathematikdidaktische Begründungszusammenhänge werden für die Gestaltung von mathematischen Lernanlässen seltener genutzt als methodische. Erste Erklärungsversuche könnte an der Vielfalt, Dichte, Gestalt und Kürze eines Grundschullehramtsstudiengangs ansetzen.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006): Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9, 469-520.

Blömeke, S, Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Mayring (2007): Qualitative Inhaltsanalyse. 9. Auflage. Weinheim: Beltz.

Vogel, R. (2012). Mathematisches und mathematikdidaktisches (Handlungs-) Wissen in inszenierten Bildern des Alltags zum Ausdruck gebracht. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Bd. 2. Online: http://www.mathematik.-uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/BzMU2012_Tagungsband_Internet_Band2.pdf [13-03-20]. Münster: WTM, 905-908.

Vogel, R. & Schneider, A.-K. (2012): Portfolioarbeit angehender Grundschullehrerinnen und –lehrer im Fach Mathematik. In M. Zimmermann, Ch. Bescherer & Ch. Spannagel (Hrsg.), Mathematik lehren in der Hochschule – didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen. Hildesheim: Franzbecker, 133-142.

Sebastian VOGEL, Kay ACHMETLI, Janina KRAWITZ, Werner BLUM, Kassel

VELM-8 – Ein Projekt zur Verbesserung der Effektivität der Lernstandserhebungen Mathematik Klasse 8

Im vorliegenden Beitrag soll die Ausgangslage für das aktuelle Projekt VELM-8 („Verbesserung der Effektivität der Lernstandserhebungen Mathematik Klasse 8“) beschrieben und soll dieses Projekt vorgestellt werden.

Wozu Lernstandserhebungen?

2003 wurden die Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss beschlossen. Das Ziel nationaler Bildungsstandards ist laut Klieme u.a. (2003) eine Orientierung über verbindlichen Kompetenzerwartungen sowie die Ermöglichung der Evaluation von Kompetenzentwicklungen und so die Förderung der Qualitätsentwicklung im Unterricht. Für Evaluationen werden *Lernstandserhebungen* (LSE) eingesetzt (missverständlich mitunter auch „Vergleichsarbeiten“ genannt). Die Ziele von LSE sind weniger die Kontrolle als vielmehr eine Orientierung für die Lehrkräfte und die Diagnose der Kompetenzentwicklung, die zu gezielter Förderung und Unterrichtsentwicklung genutzt werden sollte. Dabei sind die LSE eingebettet in den Prozess der Qualitätsentwicklung und Standardsicherung, wie er in der Gesamtstrategie der KMK zum Bildungsmonitoring (2006) festgelegt ist.

Die Aufgaben der LSE müssen von den Lehrkräften in einer 0/1-Unterscheidung kodiert werden. Aus diesen Ergebnissen werden üblicherweise kriteriale (d.h. am Kompetenzstufenmodell orientierte) oder sozialvergleichende Rückmeldungen für die einzelne Lehrkraft erstellt. Die sozial-vergleichende Rückmeldung ermöglicht „faire“ Vergleiche mit Klassen bzw. Schulen mit ähnlichen sozialen Rahmenbedingungen. Allerdings sind die zur Verfügung gestellten Rückmeldungen so zu grob, um ausreichend Aufschluss über sinnvolle Schwerpunkte für den zukünftigen Unterricht oder die individuelle Förderung einzelner Schüler/innen zu bieten. Somit ist es zwingend erforderlich, dass die LSE auch *inhaltlich* ausgewertet werden und dann eine inhaltliche Rückmeldung durch die Lehrkraft erfolgt.

Gelingensbedingungen von Lernstandserhebungen

Die konzeptionellen Ziele der LSE beinhalten den Anstoß einer Schul- und Unterrichtsentwicklung sowie die Anregung einer verstärkten individuellen Förderung. Diese Ziele sind allerdings mit bestimmten Gelingensbedingungen verknüpft. Die Lehrkräfte führen die LSE selbstständig durch und kodieren ihre Schülerlösungen anhand eines Manuals. Daher ist eine hohe

Akzeptanz auf Seiten der Lehrkräfte enorm wichtig. Maier (2008) fand jedoch lediglich eine indifferente Haltung bzgl. der Akzeptanz. Des Weiteren berichten Lehrkräfte von einer hohen zeitlichen Belastung durch die Korrektur der LSE. Daher ist die *Praktikabilität,* also die Balance zwischen Aufwand und Ertrag, ebenfalls wichtig. Die Adressaten der Rückmeldungen sind nicht nur die einzelnen Lehrkräfte, sondern auch Fachkonferenzen. Hier ist eine gute *Zusammenarbeit im Kollegium* nötig, um gemeinsam Maßnahmen zu finden, diese umzusetzen und anschließend zu reflektieren. Um die individuellen Rückmeldungen für Schülerinnen und Schüler erstellen zu können und so individuelle Förderungen zu ermöglichen, ist auf Seiten der Lehrkräfte *diagnostische Kompetenz* erforderlich. Deutlich wird dies auch an den Daten von Kühle und Peek (2007), die u.a. eine signifikante Korrelation (p<.01) von .17 zwischen der schülerbezogenen Reflexion der LSE-Ergebnisse und dem Ziel die LSE zur Förderung zu nutzen. Damit Lehrkräfte korrekte Schlüsse aus den Ergebnisrückmeldungen für den eigenen Unterricht ziehen können, sind demzufolge *Interpretationshilfen* wichtig und sinnvoll.

Um die genannten Gelingensbedingungen zu erfüllen, ist ein *Fortbildungs- und Beratungsangebot* zwingend notwendig und Ansatzpunkt für Interventionen. (Peek u.a., 2006; Bonsen u.a., 2006)

Das Projekt VELM-8

Dem hohen Potential der LSE auf den Ebenen der Schul- und Unterrichtsentwicklung steht eine eher indifferente Haltung der Lehrkräfte gegenüber (Maier, 2008). Darüber hinaus werden die vorhandenen didaktischen Materialien nur von einem kleinen Teil der Lehrkräfte genutzt.

Dies zu verändern ist das zentrale Ziel des Projekts VELM-8, welches in Kooperation der Universität Kassel, dem Hessischen Kultusministerium, der MNU (Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts), dem Projekt KUMN (Kompetenzorientiert Unterrichten in Mathematik und Naturwissenschaften) und dem Institut für Qualitätsentwicklung Hessen durchgeführt wird.

Weitere Teilziele sind die Weiterbildung von Lehrkräften in Diagnose und Feedback, das Aufzeigen von Entwicklungs- und Nutzungsmöglichkeiten der LSE sowie von Ansatzpunkten für individuelle Förderung.

Zu Beginn des Projekts richtete sich eine Auftaktveranstaltung an interessierte Lehrkräfte aus dem nordhessischen Raum. Dabei wurde neben einem Überblick über das Projekt ein erster Einblick in die bevorstehende Arbeit gegeben. Nach einer Bewerbungsphase wurden 21 Lehrkräfte (23 Klassen aus 6 Schulen) als Projektgruppe und 13 Lehrkräfte als Kontrollgruppe ausgewählt. Für alle Projektgruppenmitglieder werden im laufenden Schuljahr 2012/2013 vier Fortbildungen angeboten. Die Kontrollgruppenmitglieder erhalten nach Abschluss der Projektphase (Juni 2013) eine Kompaktfortbildung zu den Inhalten der vier Projektgruppenfortbildungen.

Der zentrale Inhalt der ersten Fortbildung (September) waren die Theorie des Problemlösens mit heuristischen Strategien und Hilfsmitteln sowie der zugehörige „Lösungsplan“ nach Polya (1967). Den Lehrkräften wurde am Ende der ersten Fortbildung Material zur Verfügung gestellt, welches sie im eigenen Unterricht einsetzen sollten. Diese „Hausaufgabe“ schloss thematisch an die Theorie des Problemlösens an und sollte den Lehrkräften die Möglichkeit einer ersten Diagnose anhand von authentischen LSE-Aufgaben bieten.

In der zweiten Fortbildung (Januar) wurden nach einem kurzen Input zu Diagnose, Rückmeldung und Unterrichtsqualität aufbauend auf den Ergebnissen der Hausaufgabe innerhalb von Kleingruppen und in Kooperation mit den Fortbildnern Unterrichtsstunden bzw. -einheiten entwickelt. Nach den aktuellen LSE (Ende Februar) stellt eine dritte Fortbildung (März) die Arbeit am konkreten und aktuellen Material der LSE im Mittelpunkt. Zusätzlich wird der Umgang mit den Ergebnisrückmeldungen, welche die Lehrkräfte spätestens zehn Wochen nach der LSE erhalten, thematisiert. Ein Ziel der dritten Fortbildung ist es, auf Grundlage ausgewählter Schülerlösungen und der dazugehörigen Diagnose eine konkrete und umsetzbare Unterrichtsstunde zu planen. Hierbei wird zur besseren Passung in bildungsganghomogenen Gruppen an ausgewählten Aufgaben der LSE 2013 gearbeitet. Einzelne der entwickelten Stunden sollen videographiert werden. Im Mai wird abschließend die vierte Fortbildung für die Projektgruppe folgen. Dabei sollen die Nutzung und der Umgang mit den Ergebnissen der LSE auf Fach- und auf Schulkonferenzebene angesprochen werden.

Zur Evaluation des Projekts

Im Vor- und Nachtest werden die Einstellungen der Lehrkräfte zu den LSE in sechs Skalen (allgemeine Akzeptanz, selektionsdiagnostischer Nutzen, Hinweise für zukünftige Unterrichtsgestaltung, Lehrplanadäquatheit der LSE, förderdiagnostischer Nuten, LSE als Belastung) nach Maier (2008) erhoben. Im Vortest wiesen die Skalen ausreichende bis gute Reliabilitäten auf ($.69 \leq \alpha \leq .88$). Die in unserer Stichprobe gefundenen Mittelwerte weichen signifikant von Maiers Werten ab. Diese Abweichungen sind in allen Skalen in die wünschenswerte Richtung zu verzeichnen. Wie erwartet und bei Maier gefunden, bestehen zwischen der Skala „LSE als Belastung“ und allen restlichen Skalen signifikant negative Korrelationen. Auffällig ist, dass der Großteil der teilnehmenden Lehrkräfte (61%) vorher noch nie an den LSE teilgenommen hat. Eine Erklärung dafür ist, dass die LSE erst seit dem Schuljahr 2008/2009 bundesweit durchgeführt wird. Außerdem ist die LSE an bestimmte Jahrgangsstufen gebunden. Da es sich bei der Projektphase um ein komplettes Schuljahr handelt und so mögliche Effekte nicht auf das Treatment zurückgeführt werden können, ist geplant, die Kompaktfortbildung für die Kontrollgruppe durch die LSE-Fragebögen zu flankieren.

Neben den Einstellungen zu den LSE werden – ebenfalls als Selbsteinschätzung der Lehrkräfte – ausgewählte Skalen zur Unterrichtsqualität nach COACTIV (vgl. Baumert u.a., 2008) genutzt. Um Effekte auf die Schülerleistung messen zu können, werden in Vor- und Nachtest LSE früherer Jahre eingesetzt.

Literatur

Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Kunter, M., Löwen, K., Neubrand, M. & Tsai, Y.-M. (2008). Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz (COACTIV), Dokumentation der Erhebungsinstrumente. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Bonsen, M., Büchter, A. & Peek, R. (2006). Datengestützte Schul- und Unterrichtsentwicklung. In: *Jahrbuch der Schulentwicklung*, 14, 125–148. Weinheim.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Bonn, Berlin: Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF).

Kühle, B. & Peek, R. (2007) Lernstandserhebungen in Nordrhein-Westfalen. Evaluationsbefunde zur Rezeption und zum Umgang mit Ergebnisrückmeldungen in Schulen. *Empirische Pädagogik*, 21(4), 428-447.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2006). Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring. Verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2006/2006_08_01-Gesamtstrategie-Bildungsmonitoring.pdf [08.03.2013]

Maier, U. (2008). Rezeption und Nutzung von Vergleichsarbeiten aus der Perspektive von Lehrkräften. *Zeitschrift für Pädagogik*, 54(1), 95–117.

Peek, R., Pallack, A., Dobbelstein, P., Fleischer, J. & Leutner, D. (2006). Lernstandserhebungen 2004 in Nordrhein-Westfalen – zentrale Testergebnisse und Perspektiven für die Schul- und Unterrichtsentwicklung. In: F. Eder, A. Gastager & F. Hofmann (Hrsg.), *Qualität durch Standards* (S. 219-233). Münster: Waxmann.

Polya, G. (1967). Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme (2. Auflage). Bern und München: Francke.

Jörg VOIGT, Münster

Eine Alternative zum Modellierungskreislauf

1. Einleitung

Folgendes Beispiel aus den Studien zur Straßen- bzw. Alltagsmathematik dient zur Orientierung der weiteren Ausführungen. Ein zwölfjähriges Kind verkauft auf der Straße Kokosnüsse und wird von einem Forscher befragt, der sich als Kunde ausgibt:

„Customer: How much is one coconut?

M: 35.

Customer: I'd like ten. How much is that?

M: (Pause) Three will be 105; with three more, that will be 210.
(Pause) I need four more. That is … (pause) 315 …
I think it is 350.

This problem can be mathematically represented in several ways: 35x10 is a good representation of the question posed by the interviewer. The subject's answer is better represented by 105+105+105+35, which implies that 35x10 was solved by the subject as (3x35)+(3x35)+(3x35)+35." (Carraher, Carraher & Schliemann 1985, 23)

Die AutorInnen sind in ihrer Studie an Lösungsquoten und Rechenwegen interessiert. In ihrer Interpretation der Einkaufssituation modellieren sie die Äußerungen des Kindes, indem sie mathematische Terme angeben. Hat das Kind modelliert? Auch eine andere Interpretation ist möglich. Das Kind weiß den Preis von drei Kokosnüssen; während das Kind mental drei weitere Kokosnüsse hinzunimmt, berechnet es den Zwischenpreis „210"; es vergleicht mental die bisherige Menge von Kokosnüssen mit der Zielmenge von zehn Kokosnüssen, mit dem Ergebnis, dass noch vier Kokosnüsse fehlen, usw. Gemäß dieser Interpretation denkt das Kind an einzelne Sachverhalte und an Preise als Eigenschaften der Sachverhalte, und rechnet parallel zum mentalen Operieren mit Kokosnüssen. Sehen wir als Mathematikexperten in die Tätigkeiten von Kindern ein mathematisches Modell hinein, das beim Kind mental nicht existiert? Als Experten denken wir eher an Größen bzw. (Maß-)Zahlen und verstehen die einzelnen Sachverhalte nur als Repräsentanten, während das Kind an einzelne Sachverhalte denken mag, und die Größen bzw. (Maß-)Zahlen nur als deren Eigenschaften versteht.

2. Kritik am Modellierungskreislauf

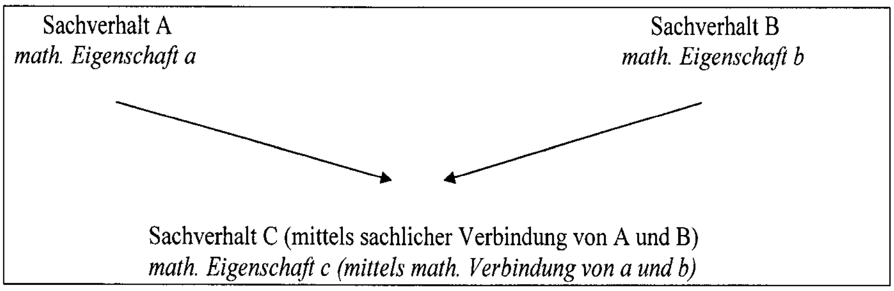
Gemeinsam ist den Varianten des Modellierungskreislaufes die Trennung zwischen der Realität und der Mathematik. Der Lernende deute zunächst die Aufgabenstellung als eine reale Situation. Später gehe er in den Bereich der Mathematik über, bis er mit einem mathematischen Resultat wieder in den Bereich der Realität wechsele (s. z. B. Blum & Leiß 2005).

Empirische Studien belegen, dass Lernende in ihren tatsächlichen Bearbeitungen von „Modellierungsaufgaben“ noch vor dem Erreichen des mathematischen Resultates vielfältige Beziehungen zwischen der Realität und der Mathematik berücksichtigen (z. B. Peter-Koop 2003, Riebel 2010, Borromeo Ferri 2011). Diese Studien gehen in ihren Erweiterungen des Kreislaufschemas und in ihrer Kritik an dem Schema weiter von der Trennung zwischen Realität und Mathematik aus. Der Bereich zwischen Realität und Mathematik bleibt ein „weißer Fleck“, der nur Übergänge darstellen läßt.

Andere empirische Studien zum Modellieren stellen die Trennung zwischen Realität und Mathematik grundsätzlicher in Frage (z. B. Schwarzkopf 2007, Meyer & Voigt 2010). Hier sei nur die „Realsituation“ problematisiert. Das oben erwähnte Kind befindet sich beim Verkauf von Kokosnüssen in einer echten Realsituation. Dagegen besitzt der Mathematikunterricht seine eigene Realität. Selbst wenn Schüler eine Klassenfahrt planen, müssen sie nicht mit ihrem Taschengeld dafür gerade stehen, wenn sie sich bei den Kosten verrechnen. In der Schule gilt nicht der Ernst des Lebens wie auf der Straße – aus guten Gründen. Die Schüler können davon ausgehen, dass es um das Lernen (des Anwendens) von Mathematik geht.

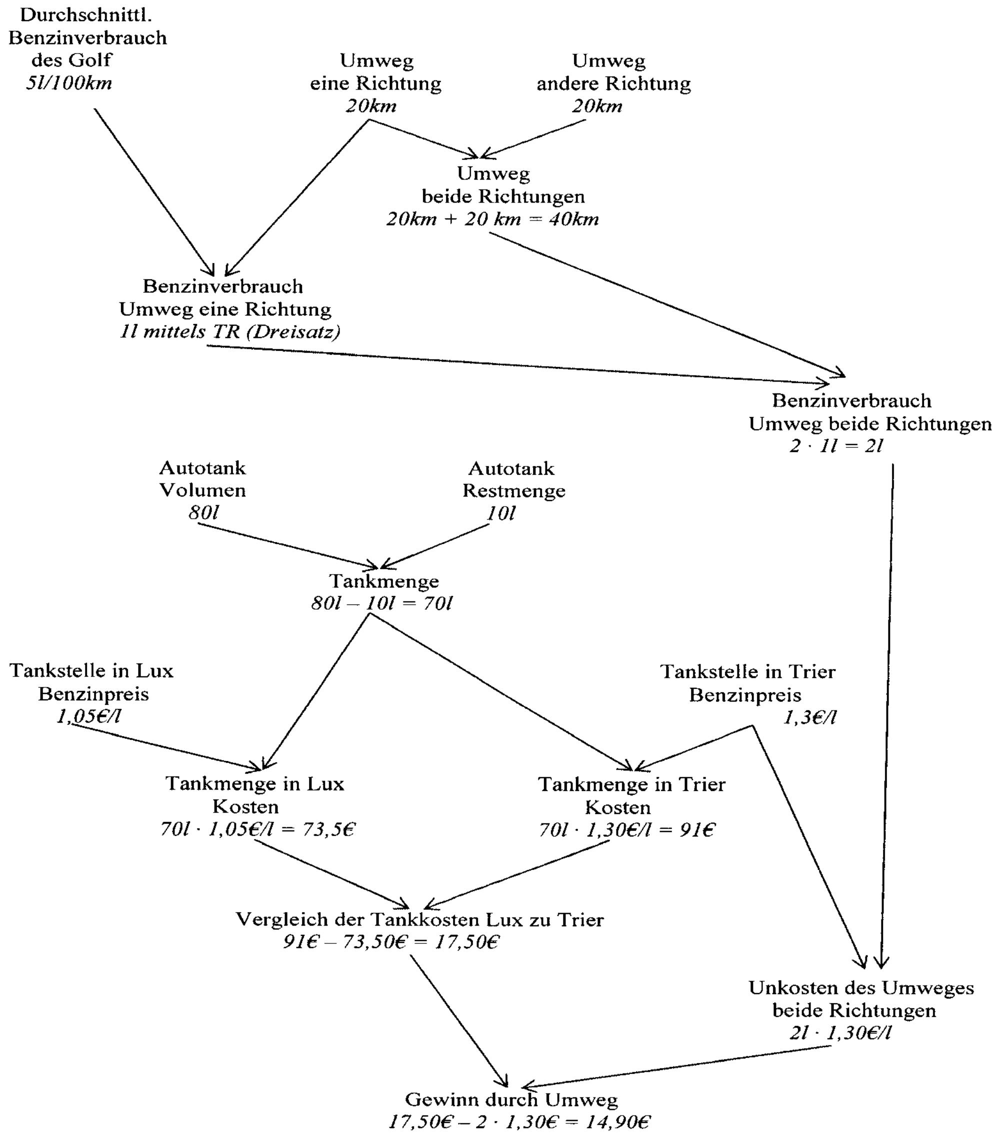
3. Alternative Rekonstruktion von Modellierungsprozessen

M. Meyer, A. Söhling und ich interviewten Lernende aus dem Bereich der SEK I, während sie „Modellierungsaufgaben“ bearbeiteten. Anhand der Transkripte ließen sich die Lösungswege auf eine alternative, schlichtere Weise rekonstruieren. Dabei sind die einzelnen Sachverhalte direkt mit Größen verbunden. Ebenso sind die sachlichen Beziehungen zwischen den Sachverhalten direkt mit den mathematischen Operationen verbunden. Das einzelne Element dieser Rekonstruktion stellt folgende Abbildung dar:



Zur Konkretisierung dient hier ein Lösungsweg zur Tanken-Aufgabe: „Herr Stein wohnt in Trier, 20km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Er fährt mit seinem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,05€, im Gegensatz zu 1,30€ in Trier. Lohnt sich die Fahrt für Herrn Stein? Begründe deine Antwort." (CD-Rom zu Blum u.a. 2006)

Der Schüler (9. Klasse, Gymnasium) löst die Aufgabe wie folgt. Der zeitliche Verlauf entspricht der Leserichtung (Transkript beim Autor erhältlich):



Diese Art der Rekonstruktion von Lösungswegen ist erst dann zu modifizieren, wenn der Lernende auf rein mathematische Weise ein Objekt konstruiert, das für Ihn zunächst nicht als ein Sachverhalt repräsentiert ist oder das als ein solcher in dem Sachzusammenhang nicht repräsentierbar ist.

4. Fazit

Diese Trennung von Realität und Mathematik und die Folge von Schritten im Modellierungskreislauf bilden ein Artefakt. Auch die normative Funktion des Kreislaufes ist fraglich. Soll man beispielsweise die Modellierungskompetenz als Summe von Einzelkompetenzen (entsprechend den einzelnen Schritten aus dem Kreislaufschema) ansehen oder eher als Koordination von Kompetenzen in jedem Schritt nach obigem Schema? Und von welcher Art ist die mathematische Kompetenz?

Das Theoriedefizit zum Bereich des Modellierens ist nicht leicht zu beheben, weil mit der Frage nach dem Verhältnis von Realität und Mathematik philosophische Fragen aufgeworfen werden (s. Burscheid & Struve 2009). Diese Fragen stellen sich, wenn man mit „Modellierungsaufgaben" auf Realitätsbezüge der Mathematik und zugleich auf die Trennung von Realität und Mathematik Wert legen will.

Literatur

Blum, W., Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. In: mathematik lehren, 128, 18-21.

Blum, W., Drüke-Noe, Ch., Hartung, R., Köller, O. (Eds.) (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen.

Burscheid, H.J., Struve, H. (2009): Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung.Hildesheim: Franzbecker.

Borromeo Ferri, R. (2011): Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens - Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Carraher, T.N., Carraher, D.W., Schliemann, A.D. (1985): Mathematics in the streets and in schools. In: British Journal of Developmental Psychology, 3, 21-29.

Meyer, M., Voigt, J. (2010): Rationale Modellierungsprozesse. In: B. Brandt, M. Fetzer, M. Schütte (Eds.): Auf den Spuren interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. Münster: Waxmann, 117-148.

Peter-Koop, A. (2003): „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?" Modellierungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Aufgaben in Kleingruppen. In: S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Eds.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg: Mildenberger, 111-130.

Riebel, J. (2010): Modellierungskompetenzen beim mathematischen Problemlösen. Inventarisierung von Modellierungsprozessen beim Lösen mathematischer Textaufgaben und Entwicklung eines diagnostischen Instrumentariums. Dissertation, Universität Koblenz-Landau, Fachbereich Psychologie, Landau.

Schwarzkopf, R. (2007). Elementares Modellieren in der Grundschule. In: A. Büchter u.a. (Eds.): Realitätsnaher Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 95-105.

Bodo v. PAPE, Oldenburg

Erinnerungen und Gedanken eines „Nebenstrecklers“ – 25 Jahre Einsatz für Tabellenkalkulation im MU

1. PISA 2012

Bezugspunkt meines Rückblicks ist eine Erklärung von Kaye Stacey auf der ICME 2012 in Seoul:

> “Doing mathematics with the assistance of a computer is now part of mathematical literacy.”
> “Using mathematical tools is an additional FMC”
> (→ Fundamental Mathematical Capability #7)

Die Begründung erscheint plausibel: “Computers are now so commonly used in the workplace and in everyday life that a level of competency in mathematical literacy in the 21st century includes using computers.” Dazu heißt es: “PISA 2012 represents only a starting point. Items requiring use of specific mathematically-able software (e.g. to program a spreadsheet, or use a generic tool to plot a graph) have not been used at this early stage.”

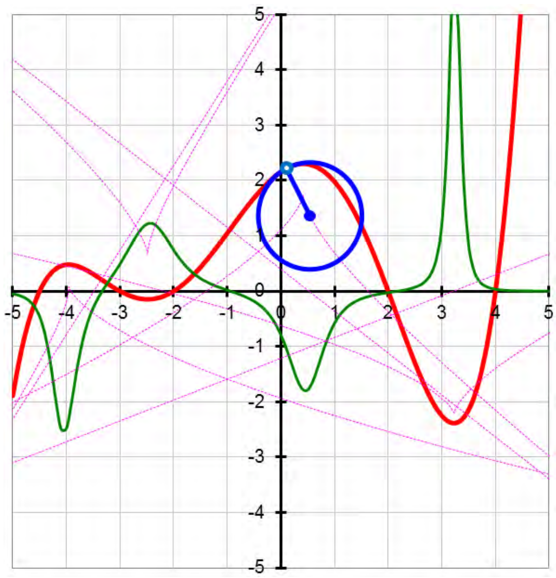
2. Die frühen Jahre

Den ersten kommerziell erfolgreichen Mikrocomputer hat im Jahr 1977 die Firma Apple auf den Markt gebracht, den legendären Apple II. Insbesondere die TBK VisiCalc sorgte dafür, dass Apple die junge PC-Industrie dominierte. Die Weiterentwicklung 1-2-3 von Lotus konnte komplexere Rechenmodelle ausführen. Mit ihr verdrängte der IBM-PC die Konkurrenz aus den Büros. 1987 brachte Microsoft Multiplan für Windows auf den Markt. Als sein Nachfolger setzte sich Excel durch, insbesondere ab 1992 mit dem ersten Erscheinen einer Office-CD mit Excel 3.0. Für die Schule stand damals parallel dazu das Programm ASEASYAS zur Verfügung, ein „Senkrechtstarter des Jahres 1988“. Es überzeugte durch seinen günstigen Preis und eine komfortable Makroprogrammierung.

Erste eigene Einsätze zur TBK ergaben sich im Rahmen der Lehrerfortbildung. Bei den Aufgabenstellungen orientierte man sich noch sehr an der Informatik, etwa mit Modellierungen von Populationsentwicklungen (Ausbreitung einer Seuche, Wachstum mit Vergiftung).

In einem Heft von mathematik lehren (Nr. 24, Hrsg. E. Lehmann) wurden 1987 Perspektiven für den MU aufgezeigt anhand einer Reihe von Beispielen. Auf einer Tagung des AK MUI in Wolfenbüttel 1991 wurde ein Konzept vorgestellt, das abzielte auf einen Wandel des Bildes von Mathematik in der Schule, eine Umorientierung hin auf ein „Mathematical Engineering“. Dazu hieß es: „Das Rechenblatt ist gerade nicht für die Schule geschaffen ist, sondern für einen Gebrauch im beruflichen oder privaten Alltag.“ Das wurde als besondere Stärke dieses Ansatzes herausgestellt. Zudem wurde festgehalten: „Die Reichweite geschlossener Lösungen bei realen Problemstellungen ist sehr eng begrenzt.“ Und: „Was den Anwender interessiert, sind letztlich nur hinreichend genaue numerische Werte.“ So drängte sich bereits damals – noch vor dem Hype von Anwendungsorientierung, „Mathematik im Leben“ und Modellieren – die Frage auf: „Wozu heute noch Formelmanipulationssysteme?“ Noch tiefer in die gleiche Kerbe hatte schon vorher Rüdeger Baumann geschlagen mit seinem Plädoyer für eine „völlige Neukonzeption der Analysis: Alle praktisch vorkommenden Aufgaben lassen sich mit Computern, also diskret lösen. Wozu dann noch die klassischen kontinuierlichen Begriffsbildungen?“

3. Stimmen aus der Fachdidaktik



Der Trend der Schulmathematik in den frühen 90er-Jahren brachte E. Lehmann auf den Punkt: „Die wichtigste Anwendersoftware für einen allgemeinbildenden MU sind Funktionenplotter.“ (1992) Für den Einsatz der TBK legt man nahe: „Buchhaltung und Lagerhaltung“ und „Modellierung von Betriebsabläufen und Verwaltungsabläufen im Mathematikunterricht“ (Tietze 1996). Mit Hilfe von CAS wie DERIVE dagegen erschließt sich „ein Gebiet, das vielfältiges Experimentieren und anschauungsbezogenes Fragen erlaubt.“ (Vgl.: In Bewegung mit Excel)

Ab 2001 kommen dann auch einzelne Voten für die TBK im MU, etwa G. Wittmann („Lebens- und Berufsvorbereitung“, „neue Inhalte“, „Veränderung der Unterrichtskultur“) und H.-G. Weigand („TKP sind die – gerade im deutschsprachigen Raum – noch am meisten unterschätzten Programme für den Mathematikunterricht.“) Nur: „Geometrie mit Excel“ – das konnte man sich gar nicht vorstellen: „Die Verwendung einer TBK eignet sich nicht oder nur sehr eingeschränkt in den Bereichen der Darstellenden bzw. Analytischen Geometrie“ (Henning / Keune 2000)

4. Einsatz im Unterricht

Für mich allerdings war die „Analytische Geometrie“ der Bereich, in dem sich die TBK im MU zu allererst aufgedrängt hatte. Die Aufgabenstellungen kulminierten immer wieder im Lösen eines Gleichungssystems. Das Lösungsschema lässt sich natürlich 1:1 umsetzen auf die TBK. Nachdem es einmal umgesetzt war, konnte man sich beschränken auf das Aufstellen von Gleichungssystemen. Dies Paket überzeugte auch die Schüler. In anderem Rahmen wurde das System dann ausgebaut zu einer Datei, in der nach Eingabe der Ausgangsgrößen – Punkte, Geraden, Ebenen – alle auftretenden Fragestellungen – bis hin zu winkelhalbierenden Ebenen – automatisch beantwortet wurden. Das gelingt noch allein auf der Ebene der Zellen. Wesentlich einfacher, eleganter und übersichtlicher aber wird es, wenn man Grundfunktionen – etwa für die Koeffizienten der HNF der Gleichung einer Ebene durch 3 Punkte – als Funktionsmakros ablegt.

Schließlich wurde ein Kurs erprobt und bereitgestellt für das Projekt SINUS: „Analytische Geometrie – effizient mit Excel“. Anders als beim klassischen Curriculum standen hier Körper und ihre Darstellungen im Raum im Vordergrund (später auch 3D!). In einem letzten Kurs (2004) wurden über Laufmakros Bewegungen und Drehungen im Raum erzeugt. Die Klausuraufgabe beschränkte sich auf reine Programmieraufgabe dazu.

Zu allererst hatte sich die TBK allerdings in der Stochastik eingeschlichen, zunächst mit Simulationen zur Absicherung von Rechnungen oder zur Veranschaulichung von Verfahrensweisen. Die Entwicklung ging so weit, dass schließlich Klausuren und Abi-Aufgaben am Rechner abgearbeitet wurden.

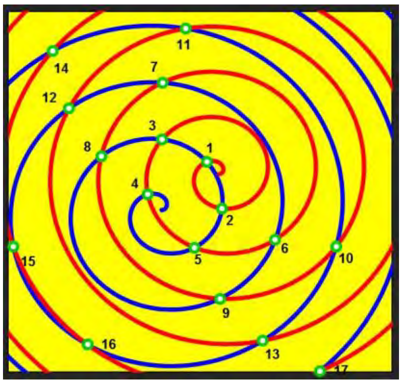
5. Der Lauf der Dinge

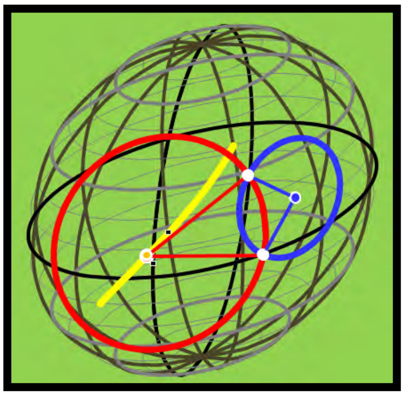
In Niedersachsen verdrängten vor 10 Jahren die CAS-Rechner alle andere NT aus dem MU, seit 2006 abgesichert durch Vorgaben für das Zentralabitur. Dass mit diesen Rechnern dem algebraischen Strang der Rücken gestärkt wurde – und das im Kontext einer Ausrichtung auf Anwendungen! – frappiert dennoch. Zum Ärgernis wird dieser Ansatz für mich aber dadurch, dass hier zwei Welten miteinander vermengt wurden: Die kleine Welt der Formeln und des Stetigen und Exakten und die grenzenlose Welt der Zahlen, der Näherungen und der Algorithmen: Extremstellen bestimmt man weiterhin über das Nullsetzen der Ableitung. Ist das algebraisch nicht möglich, dann ruft man einfach die numerische Lösung ab. Wie praktisch doch diese kleinen Dinger sind! Nur: Eine algebraische Null und eine numerische Null, das die haben eigentlich gar nichts miteinander gemein!

Die TBK beschränkt sich auf das Operieren mit Zahlen. Die Exaktheit übersteigt dabei die Grenzen des Sinnvollen bei weitem. Das Defizit in puncto „Exakt symbolisch rechnen & arbeiten“ wird von den Protagonisten der CAS-Rechner konsequent gegen die TBK ausgespielt. An anderer Stelle lehnt man sich dann aber sehr weit in die entgegengesetzte Richtung aus dem Fenster: „Ein Term: Bisweilen – viel seltener als es der Mathematikunterricht suggeriert – lässt sich ein Zusammenhang auch symbolisch-algebraisch als Funktionsterm darstellen.“ Dies Diktum von B. Barzel u.a. wird in der Expertise für einen CAS-Einsatz schmerzlich vermißt!

6. Über den Unterricht hinaus

Im Rahmen zweier Seminare an der Uni Oldenburg ergab sich die Möglichkeit, eine Neukonzeption der Analysis im Sinne von R. Baumann zu erproben. Im Focus standen dabei Aufgabenstellungen, bei denen die algebraischen Vorgehensweisen nicht zum Ziel führen. Daraus resultiert eine Reihe von Vorträgen unter dem Titel „‘Geht nicht‘ gibt´s nicht!“ – zuletzt auf der GdM-Tagung in München 2010. Die Excel-Toolbox für die Analysis ist – so zeigt sich – besonders handlich: 5 Funktionsmakros reichen aus, um den Bereich umfassend abzudecken.





Eine analoge Toolbox für die Geometrie der Ebene, des Raumes und der Kugel ist im Laufe der Jahre angewachsen auf über 80 Funktionsmakros (Konstruktionen, Maßbestimmungen, Abbildungen, Projektionen). Eine Bewährungsprobe bestanden hat sie bei Vorträgen zum Geometrischen Modellieren (u.a. GdM Weingarten 2012).

Interessant für die Geometrie ist Excel insbesondere dadurch, dass es algorithmische Lösungen (einfache Suchroutinen) ermöglicht für Probleme, bei denen die aktuellen Standardtools wie GEOGEBRA versagen.

Meine Botschaft an die Schüler und an die Kollegen lautet:
Mit Excel kommst du weiter!

**Excel ist nicht nur das mathematische Standardwerkzeug im Leben.
Excel deckt auch im Rahmen der Schulmathematik alle Bereiche ab.**

Meine Ergebnisse sind abrufbar unter: http://excelecke.wordpress.com

Sieglinde WAASMAIER

Heterogenität bei der Einführung neuer Inhalte nutzen

1. Ausgangslage

In der pädagogischen Diskussion wird der Begriff der „Heterogenität“ als Synonym verwendet für die Unterschiedlichkeit der Schülerinnen und Schüler (v. d. Groeben, A. 2003, S. 6f.), die für Lehrkräfte eine große Herausforderung darstellt (Prediger, S. 2004, S. 86). Die unterschiedlichen Leistungsmöglichkeiten, individuellen Denkwege, Vorgehensweisen, Interessen und Darstellungen sollen im Unterricht nicht nur zugelassen, sondern gefördert werden (Hengartner, E./Hirt, U./Wälti, B. 2008, S. 14). Allerdings bedeutet Heterogenität für den Unterricht nicht nur eine Schwierigkeit, mit der Lehrpersonen umgehen müssen, sondern auch eine große Chance, von der man profitieren kann (Prediger, S. 2004, S. 86).

Nach der konstruktivistischen Auffassung von Lernen bauen Lernende ihr Wissen aktiv auf, durch geistige Verarbeitung von Wahrnehmungen und Erfahrungen, in Abhängigkeit von vorhandenem Wissen, von bestehenden mentalen Strukturen und von erworbenen Überzeugungen (Hefendehl-Hebecker, L. 2004, S. 46). Lernen ist im Sinne des genetischen Prinzips immer ein Weiterlernen; deshalb sollte existierendes Wissen immer aufgegriffen werden. Standortbestimmungen dienen dazu, bereits erworbene Kenntnisse und Fähigkeiten im Rahmen eines Unterrichtsthemas zu ermitteln, denn individuelle Leistungsstände, Vorerfahrungen und Denkweisen sind für den Lernprozess wesentlich (Krauthausen, G./Scherer, P. 2006, S. 165). Für die Lehrpersonen ist es unerlässlich zu wissen, welche Modelle und intuitiven Theorien zum jeweiligen Stoff in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler vorherrschen (Hasselhorn, C./Mähler, M. 1998, S. 13f.).

Lehrende neigen eher dazu, Vorkenntnisse und Leistungsfähigkeit der Lernenden zu unterschätzen. Um Lernen effektiv zu gestalten, sind die individuellen oder informellen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler ernst zu nehmen und als hilfreicher und effektiver Ausgangspunkt für den weiteren Lernprozess nutzbar zu machen. Die tägliche Unterrichtsgestaltung ist deshalb stärker und bewusster als bislang oft geschehen an den tatsächlichen Vorerfahrungen der Lernenden auszurichten (Krauthausen, G. /Scherer, P. 2006, S. 166 f.).

Vielfach setzen differenzierende Lernangebote, nicht mit Beginn eines neuen Themengebietes an, sondern erst später im Ablauf der Sequenz, nachdem erste Lerneinheiten dazu stattgefunden haben.

Unter diesen Aspekten stellt sich die Frage, wie Unterricht konzipiert sein kann, damit Lernen für alle Schülerinnen und Schüler möglich ist und wie die Unterschiedlichkeit der Lernenden im Unterricht bei der Einführung neuer Inhalte produktiv genutzt werden kann.

2. Ergebnisse aus dem Unterrichtsprojekt

Im Rahmen des Projektes „Aktiv-entdeckendes, metakognitives Lernen im Mathematikunterricht der Hauptschule", das sich über mehr als zwei Schuljahre in den Jahrgangsstufen 7 bis 9 erstreckte, konnte in Fallstudien die Wirksamkeit des Unterrichts nachgewiesen werden, der die Heterogenität der Lernenden bereits bei der Einführung neuer Themengebiete in das Zentrum der Unterrichtsgestaltung stellt. Mithilfe quantitativer und qualitativer Forschungsmethoden ließ sich die Entwicklung der Kompetenzen der Lernenden nachweisen:

- Alle Schülerinnen und Schüler erzielten im Jahreszeugnis der 8. und 9. Klasse im Fach Mathematik die Note „ausreichend".
- In den zentralen Jahrgangsstufenarbeiten/VERA erreichten die Lernenden weit überdurchschnittliche Ergebnisse.
- Sowohl leistungsschwache als auch leistungsstarke Schülerinnen und Schüler wurden gefördert.
- In den zentralen Abschlussprüfungen zum Qualifizierenden Hauptschulabschluss erreichten alle Lernenden die Note „ausreichend", 50% der Schülerinnen und Schüler erzielten die Noten „gut" und „sehr gut".
- Alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen wurden gefördert.
- Selbst-, Sozial- und Methodenkompetenz konnten sich weiterentwickeln. (Waasmaier, S. 2009, S. 300 - 326)

Die im Anschluss an das Projekt nach dem gleichen Konzept unterrichtete Klasse erreichte bezüglich der Kompetenzentwicklung im Turnus 7. bis 9. Jahrgangsstufe ähnliche Ergebnisse.

3. Konzeption des Unterrichts

Das aus dem Dissertationsprojekt abgeleitete Unterrichtskonzept gliedert die Unterrichtseinheit zur Einführung neuer Inhalte in vier Phasen: Kopfrechenphase, Erarbeitungsphase, Reflexionsphase und Rückmeldungsphase.

- In der von den Schülerinnen und Schülern selbst gestalteten Kopfrechenphase wiederholen diese das Basiswissen, wobei alle bis zum aktuellen Zeitpunkt bekannten Inhalte in Form relativ einfacher Aufgaben bearbeitet werden.

- Die Erarbeitungsphase beginnt mit der Inszenierung der Lernumgebung. Die Lehrperson lässt die Arbeitsblätter austeilen und stellt die benötigten Materialien sowie den Ablauf vor. Im Anschluss daran arbeiten die Schülerinnen und Schüler in der Ich-Du-Wir-Form (Gallin, P./Ruf, U. 1998). Zunächst setzt sich jeder Lernende selbstständig mit den Aufträgen auseinander, aktiviert das Vorwissen, entwickelt eigene Vorstellungen und Ideen, gelangt selbstständig zu neuen Erkenntnissen und hält alles schriftlich fest. In dieser Phase herrscht absolute Ruhe. In der sich anschließenden Du-Phase kommt es zum Austausch mit dem Lernpartner, wobei die Schülerinnen und Schüler eigene Ideen vorstellen, andere Ideen kennenlernen, Ergebnisse ordnen und systematisieren sowie Schwierigkeiten formulieren. Die Wir-Phase dient dazu, die in Gruppen zusammengestellten Ergebnisse zu präsentieren. Verschiedene Herangehensweisen und der unterschiedlich erarbeitete gemeinsame mathematische Kern wird herausgestellt, wobei die Lehrkraft moderiert und eventuell auf Fachbegriffe verweist.
- Die Reflexionsphase dient der Rückschau auf den Lernprozess. Die Lernenden formulieren mit eigenen Worten die neu gewonnenen Erkenntnisse, schreiben über ihren Lernerfolg und über ihre Schwierigkeiten. Satzanfänge dienen anfangs als Formulierungshilfen.
- Die Rückmeldungsphase übernimmt die Lehrperson, indem sie die eingesammelten Dokumente schriftlich kommentiert. Die von den Schülerinnen und Schülern verfassten Einträge können auch unter den Lernenden ausgetauscht werden. Dadurch erhalten sie Einblick in die Arbeit ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler.

4. Konzeption von Lernumgebungen für die Erarbeitungsphase

Die Aufträge für die Erarbeitungsphase sind so gestaltet, dass beim ersten Auftrag alle Lernenden ohne Hilfe beginnen können und ihr Vorwissen aktivieren. Die weiteren Aufgaben leiten die Lernenden dazu an, mit den bereitgestellten Materialien schrittweise neue Erkenntnisse zu gewinnen und das neu Erworbene anzuwenden. Alle Aufträge fordern die Lernenden auf, ihre Ideen und Gedanken schriftlich festzuhalten, um den Lernprozess zu dokumentieren und nachzuvollziehen.

5. Vorteile des Unterrichtskonzepts

Die unterschiedlichen Vorstellungen der Lernenden dienen als Ausgangspunkt zur Erarbeitung neuer Inhalte und das Vorwissen wird einbezogen.

Den Schülerinnen und Schülern wird bewusst, dass das eigene Wissen im Lernprozess von Bedeutung ist und gewinnbringend im Unterricht eingebracht werden kann, was sich positiv auf das Selbstkonzept auswirkt. Die Formulierung der Erkenntnis mit eigenen Worten ermöglicht, dass die Lernenden keine vorgefertigten Merksätze verständnislos übernehmen, dass Begriffsbildung verständnisorientiert erfolgt.

Durch die Phase der individuellen Arbeit erhält die Lehrperson von Schülerinnen und Schülern ein sehr differenziertes Bild bezüglich ihrer Vorkenntnisse und ihres Lernprozesses. Die Vielfalt der Schülerlösungen stellt hierbei keine Belastung, vielmehr eine Bereicherung dar, weil die unterschiedlichen Schülervorstellungen sichtbar werden und sich gewinnbringend für die Lerngruppe auswirken. Es entfällt der Druck, für jeden Lernenden ein passendes Lernpaket bereitstellen zu müssen, weil Lernumgebungen natürliche Differenzierung ermöglichen. Da die Lehrperson als Lernbegleiter und Moderator fungiert, ist diese Form des Unterrichts eine Entlastung.

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Phasen der absoluten Ruhe, entwickeln in der Du- bzw. in der Wir-Phase Respekt vor der Arbeit anderer und eine positive Fehlerkultur. Durch die zunächst individuelle Auseinandersetzung mit der Sache, durch den sich anschließenden Austausch in verschiedenen Sozialformen und durch die Reflexion erreicht man eine hohe kognitive Aktivierung der Lernenden während des gesamten Verlaufs der Unterrichtseinheit.

Literatur

Gallin, P.; Ruf, U. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule.

v. d. Groeben, A. (2003): Lernen in heterogenen Gruppen. In: Pädagogik 9/2003, 6-9.

Hasselhorn, M.; Mähler, C. (1998): Wissen, das auf Wissen baut: Entwicklungspsychologische Erkenntnisse zum Wissenserwerb und zum Erschließen von Wirklichkeit im Grundschulalter. In: www.wl-lang.de/Lehren%20und%20Lernen%20heute/Wissen,-%20das%20auf%20Wissen%20baut.pdf Download: 01.02.2013

Hefendehl-Hebeker, L. (2004): Selbstgesteuertes Lernen im Dialog. In: MU, Heft 3, 45-51.

Hengartner, E.; Hirt, U.; Wälti, B. (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht.

Hirt, U.; Wälti, B. (2008): Lernumgebungen im Mathematikunterricht.

Krauthausen, G.; Scherer, P. (2006): Einführung in die Mathematikdidaktik.

Prediger, S. (2004): „Darf man denn das so rechnen?“ In: Friedrich Jahresheft, 86-89.

Waasmaier, S. (2009): Aktiv-entdeckendes, metakognitives Lernen im Mathematikunterricht der Hauptschule. Entwicklung und Förderung fachbezogener und fachübergreifender Kompetenzen im Rahmen eines Unterrichtsprojektes in der 7. und 8. Jahrgangsstufe.

Gerd WALTHER, Brigitte DOERING, Claudia FISCHER, Kiel

Aufgabenauswahl, -analyse und -variation. Welche kompetenzfördernden Merkmale von Mathematikaufgaben nutzen Lehrkräfte in einem Professionalisierungsprogramm an Grundschulen?

Vorbemerkung

Aufgaben spielen für das Lehren und Lernen im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle (Christiansen & Walther 1986, Bruder 2006, Clarke et al. 2009). Was Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit Aufgaben lernen und wie sie es lernen, hängt von den Aufgaben und vom Umgang der Akteure damit ab. Bevor sie Aufgaben im Unterricht einsetzt, nimmt die Lehrkraft in einer zielgesteuerten Vorbereitungs- und Entscheidungsphase eine Auswahl der Aufgabe(n) vor (Boston & Smith 2011). Die vorliegende Untersuchung fand im Programm *SINUS an Grundschulen* statt, einem bundesweiten Professionalisierungsprogramm für Lehrkräfte. Alle Schulen, die an diesem Programm teilnehmen, haben sich mit den beiden Basismodulen „Gute Aufgaben" (Walther 2004) und „Entdecken, Erforschen, Erklären" (Selter 2004) befasst. Außerdem ist seit 2009 die Implementierung der Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK 2005) ein thematischer Schwerpunkt des Programms.

Forschungsfragen

Der explorativ angelegten Studie lagen folgende Fragen zugrunde: Welche Ziele leiten die Auswahl von Aufgaben? Welches Potenzial für kognitive Aktivierung (Neubrand et al. 2011) in Form inhaltlich mathematischer und prozessbezogener Lerngelegenheiten sehen Lehrkräfte in der gewählten Aufgabe? Wie schätzen sie in einer reflexiven Phase das Erreichen der gesetzten Ziele ein? Wie variieren Lehrkräfte ggf. die gewählte Aufgabe?

Stichprobe

Die Untersuchung wurde im Frühsommer 2012 in 41 SINUS-Schulen aus vier Bundesländern durchgeführt. Die Teilnahme an der Studie war freiwillig. Eingereicht wurden 83 Aufgaben mit bearbeiteten Fragebögen. Die Aufgaben bezogen sich auf alle vier Jahrgangsstufen. Die Klassenstufen 1/2 und 3/4 waren zu gleichen Teilen vertreten.

Instrument und Methode

Die beteiligten Lehrkräfte wählten zwischen dem 15. April und dem 15. Mai 2012 eine (1) Aufgabe in einer Art Momentaufnahme aus, analysierten sie und gaben die inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen

an, die sie mit dieser Aufgabe aufbauen wollten. Nach dem Unterricht reflektierten sie die Arbeit mit der Aufgabe und variierten sie gegebenenfalls. Dafür nutzten sie einen für diese Studie entwickelten und kollegial validierten Fragebogen. Dieser enthält ein multiple-choice-Item und mehrere offene Items, in die Freitexte eingetragen werden. Zur Unterstützung der Einschätzung lag den Lehrkräften das Raster der inhaltlichen bzw. prozessbezogenen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards vor.
(http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material-aus-SGS/Analysebogen-fuer-Mathestudie-2012.pdf)

Ergebnisse

Forschungsfrage: Welche Ziele leiten die Auswahl von Aufgaben?

Kategorie		**Häufigkeit**
Didaktische Überlegungen:		
Curriculare Verortung	(z.B. Lehrplan, Wochenplan)	23
Didaktisches Ziel	(z.B. Einführung, Wiederholung)	23
Entwicklungsaspekt (Verknüpfen mit Vorwissen, Finden von Rechenvorteilen)		42
Motivation der Kinder	(z.B. Aufgabe aus der Lebenswelt)	10
Methodische Überlegungen:		
Arbeits- und Sozialform	(z.B. Teamarbeit schulen, Partnerarbeit)	12
Keine Angaben		5

Tab. 1: Häufigkeit der Begründungen der Aufgabenauswahl
(absolute Häufigkeiten. Mehrfachnennungen möglich. N=83)

Der Entwicklungsaspekt wird am häufigsten und deutlich häufiger genannt als jeder der vier anderen Auswahlgründe. Es fällt auf, dass Sozialform und Motivation eine vergleichsweise geringe Rolle spielen.

Forschungsfrage: Welches Potenzial für kognitive Aktivierung in Form inhaltlich mathematischer und prozessbezogener Lerngelegenheiten sehen Lehrkräfte in der gewählten Aufgabe?

Die Zuordnung zu den inhaltsbezogenen Kompetenzen zeigt:

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Gesamt N=83**	**Jahrgang 1/2 n=41**	**Jahrgang 3/4 n=42**
Zahlen & Operationen I-1	50	24	26
Raum & Form I-2	20	9	11
Muster & Strukturen I-3	54	25	29
Größen & Messen I-4	5	2	3
Daten & Häufigkeiten I-5	6	3	3

Tab. 2: Häufigkeit der Zuordnung zu den inhaltsbezogenen Kompetenzen
(Mehrfachnennungen möglich)

Die Verteilung der Zuordnungen ist in den Klassenstufen 1/2 und 3/4 nahezu gleich. *Zahlen & Operationen* zusammen mit *Muster & Strukturen* werden am häufigsten genannt, *Raum & Form* deutlich weniger. Das passt zu der beklagten Nebenrolle der Geometrie in der Grundschule.

Die Zuordnung zu den allgemeinen Kompetenzen ergibt folgendes Bild:

Allgemeine Kompetenzen	**Gesamt N=83**	**Jahrgang 1/2 n=41**	**Jahrgang 3/4 n=42**
Technische Grundfertigkeiten A-0	39	19	20
Problemlösen A-1	58	29	29
Kommunizieren A-2	63	30	33
Argumentieren A-3	56	28	28
Modellieren A-4	7	4	3
Darstellen A-5	41	27	14

Tab. 3: Häufigkeit der Zuordnung zu den allgemeinen Kompetenzen (Mehrfachnennungen möglich)

Kommunizieren, Problemlösen und *Argumentieren* werden in beiden Jahrgangsstufen am häufigsten genannt. Das Modellieren kommt am seltensten vor. Denkbar wäre ein Zusammenhang zur geringen Zahl der Nennungen bei *Größen & Messen*. Der Kompetenz des *Darstellens* messen Lehrkräfte in den Jahrgangsstufen 1/2 ein deutlich größeres Gewicht bei als in den Jahrgangsstufen 3/4.

Forschungsfrage: Wie schätzen Lehrkräfte in einer reflexiven Phase das Erreichen der gesetzten Ziele ein?

Bei der Aufgabenreflexion fällt besonders auf, dass Aussagen über die Zielerreichung ausnahmslos auf das kognitive Potenzial der Aufgaben bezogen wurden, nicht aber auf die Begründung für die Wahl der Aufgabe. Zwischen dem formulierten und dem erreichten Ziel sind sowohl bei den inhaltsbezogenen als auch bei den allgemeinen Kompetenzen deutliche Diskrepanzen. Besonders auffällig ist die Diskrepanz bei der Kompetenz „Darstellen“. Hier stellt sich die Frage, ob Lehrkräfte Darstellungsformen eher als methodisches Hilfsmittel im Blick haben und weniger als Aufgabe einer Kompetenzentwicklung bei den Kindern.

Forschungsfrage: Wie variieren Lehrkräfte ggf. die gewählte Aufgabe?

Zu fast 70 der 83 eingereichten Aufgaben entwickelten Lehrkräfte eine Aufgabenvariation. Die Variationen beziehen sich zu gleichen Teilen auf die inhaltlichen und die prozessbezogenen Kompetenzen. Als Begründung wurde zum Beispiel *Differenzierung oder Rechenmuster erkennen* genannt.

Zusammenfassung und Ausblick

Auffällig ist, dass bei der Frage nach dem Ziel der Aufgabenauswahl eher „pädagogisch" argumentiert wird und keine der Lehrkräfte direkt den Bezug zur kognitiven Aktivierung in Form inhaltlich mathematischer und prozessbezogener Lerngelegenheiten herstellt.

Können Effekte – und wenn ja, welche – im professionellen Handeln bei den SINUS-Lehrkräften gezeigt werden? Um Aussagen dazu machen zu können, wird im Frühjahr dieses Jahres die Studie mit einer Kontrollgruppe durchgeführt. Lehrkräfte, die nicht am Programm *SINUS an Grundschulen* teilgenommen haben, reichen Aufgaben ein, die untersucht werden.

Literatur

Boston, M. D. & Smith, M. S. (2011): A „task-centric" approach to professional development: enhancing and sustaining mathematics teachers' ability to implement cognitively challenging mathematical tasks. In: ZDM 43 (6/7) p. 965-977.

Bruder, R. (2006): Erläuterungen zu Modul 1 - Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht.

http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/module/modul_1weiterentwicklung_der_aufgabenkultur.htm (12.02.2013).

Christiansen, B., Walther, G. (1986): Task and activity. In: B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Clarke, B., Grevholm, B., Millman, R. (Edts.) (2009): Tasks in Primary Mathematics Teacher Education. New York: Springer.

KMK- Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. München: Wolters Kluwer.

Neubrand, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W. & Löwen, K. (2011): Aufgaben im COAKTIV-Projekt: Einblicke in das Potenzial für kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In M. Kunter et al (Hrsg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COAKTIV. Münster: Waxmann, 115-132.

Selter, Ch. (2004): Erforschen, Entdecken und Erklären im Mathematikunterricht der Grundschule: Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten.

http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/M2.pdf

Walther, G. (2004): Gute Aufgaben.

http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/Mathe1.pdf

Johannes WARNECKE, Greven

Lernumgebungen im Förderunterricht

Am Gymnasium Augustinianum in Greven arbeiten wir seit einigen Jahren mit dem „Mathematikbuch" (Klett), das auf das Schweizer Zahlenbuch bzw. mathbuch zurückgeht und sich insbesondere durch die Arbeit mit Lernumgebungen und deren Anordnung im Spiralcurriculum sowie die konsequente Nutzung von Handlungsmodellen wie z.B. dem Rechteckmodell auszeichnet.

In Folgenden möchte ich für den Förderunterricht der Klasse 7 entwickelte Lernumgebungen („Förderumgebungen") zur Aufarbeitung von Grundvorstellungen skizzieren und dabei erläutern, welche Bedeutung die o.g. Elemente des Buches bei im Hinblick auf den Förderunterricht haben. Die beiden Förderumgebungen „Würfelgebäude und Zahlenfolgen" und „mal mit dem Malkreuz rechnen" können unter

http://warn3ecke.de/index_files/inhalt/Malkreuze.pdf bzw.

http://warn3ecke.de/index_files/inhalt/Wuerfelgebaeude.pdf

heruntergeladen werden. Diese beiden Lernumgebungen wurden zwar für den Einsatz im Förderunterricht in der Jahrgangsstufe 7 entwickelt (daher „Förderumgebung"), können aber auch für die gezielte individuelle Förderung als Ergänzung zum regulären Unterricht verwendet werden (Ergänzungsstunden, Hausaufgaben etc.).

1. Zum Konzept des Förderunterrichts

Der Förderunterricht Mathematik an unserer Schule zielt darauf ab in der Erprobungsstufe (5 und 6) und evtl. in der Grundschule entstandene Defizite im „Basisstoff" (vgl. Moser Opitz / Schmassmann 2005, S. 5) aufzuarbeiten, sodass ein erfolgreiches Weiterlernen im regulären Mathematikunterricht wieder möglich wird. Dazu wird insbesondere versucht, den für die Jahrgangsstufe 7 (und folgende Jahrgangsstufen) relevanten Basisstoff zu verknüpfen mit aktuellen Unterrichtsinhalten. Eine z.T. von Schülerinnen und Schülern oder Eltern erwartete Nachbesprechung des regulären Unterrichts oder eine Hausaufgabenhilfe findet bewusst nicht statt. Die Auswahl der Schülerinnen und Schüler für den Förderunterricht erfolgt über Beobachtungen der Fachlehrkräfte über den Zeitraum der Erprobungsstufe sowie anhand der Ergebnisse einer Parallelarbeit am Ende der Jahrgangsstufe 6. Für die Entwicklung der Förderumgebungen war über die Begleitbände zum Mathematikbuch hinaus vor allem der Heilpädagogische Kommentar von Moser Opitz und Schmassmann (2005) sowie Fritz / Ricken (2009) sehr hilfreich.

2. Förderumgebungen im Zusammenhang des Spiralcurriculums

Ein wesentliches Merkmal des Mathematikbuches ist das Spiralprinzip, das es Schülerinnen und Schülern ermöglicht, sich Kompetenzen in wohldosierten Schritten anzueignen, statt alles auf einen Schlag leisten zu müssen, was insbesondere für lernschwächere Schüler sehr entscheidend ist. Lehrpersonen können dies zur Förderung nutzen, indem sie mithilfe des Abschnitts „Einordnen“ im Begleitbandkommentar zu jeder Lernumgebung sukzessive den Lernweg durch das Mathematikbuch zurückverfolgen und so Aufgaben zur Übung oder Aufbereitung der Grundlagen finden. Die Förderumgebung „Würfelgebäude und Zahlenfolgen“ ist ein Beispiel dafür, wie das Spiralcurriculum des Mathematikbuches für die Entwicklung einer Lernumgebung im Förderunterricht genutzt werden kann. Sie behandelt geometrische und arithmetische/algebraische Grundlagen der Lernumgebung „x-beliebig“ aus dem Mathematikbuch (Klasse 7), in der es um die Entwicklung eines angemessenen Variablenverständnisses geht. In der Förderumgebung werden dazu wesentliche Schritte des Lernweges aus den Klassen 5 und 6 aufgegriffen, indem zunächst Lernumgebungen des Mathematikbuches 5 und 6 identifiziert wurden, in denen Basisstoff für die Lernumgebung „x-beliebig“ behandelt wird (vgl. die folgende Übersicht).

Voraussetzungen MB 5

30 Zahlenrätsel
- Variablenbegriff (Gegenstandsaspekt)
- Grundoperationen, Fachbegriffe

35 Körper aus Würfeln
- isometrische Darstellung
- Würfelgebäude

Voraussetzungen MB 6

13 Zahlenmauern
- Gesetzmäßigkeiten, Zahlenmuster

14 Wie geht es weiter
- Zahlen- und Figurenfolgen
- (einfache) Zählstrategien
- Tabellen

32 Würfelgebäude
- isometrische Darstellung, Schrägbilder
- Baupläne
- Gesetzmäßigkeiten
- Tabellen

Anschließend wurden mithilfe der in der vorangegangenen Übersicht genannten Lernumgebungen und mithilfe des Heilpädagogischen Kommentars die Förderschwerpunkte der Förderumgebung bestimmt, wie sie in der folgenden Tabelle dargestellt sind (die Nummern beziehen sich auf die Aufgaben der Förderumgebung).

Kompetenzerwartung »x-beliebig«	**Förderansätze »Würfelgebäude und Malkreuze«**
Zu Folgen von Würfelgebäuden mithilfe geeigneter Zählstrategien passende Terme ermitteln.	• **(1)**: Würfelgebäude in mehreren Perspektiven isometrisch darstellen • **(2,3)**: Muster von Gebäudefolgen erkennen und fortsetzen • **(4,5)**: Muster von Zahlenfolgen erkennen und fortsetzen • **(4,5)**: Anzahlen in Tabellen erfassen • **(6)**: Zahlenfolgen zu Gebäudefolgen in Tabellen erfassen • **(6)**: Zahlenmuster von Gebäudefolgen beschreiben • **(7)**: Fachbegriffe verstehen und anwenden

2. Förderumgebungen und Modellvorstellungen

Die Förderumgebung „mal mit dem Malkreuz rechnen“ wurde zur Unterstützung der Lernumgebung „minus mal minus“ aus dem Mathematikbuch 7 entwickelt, lässt sich aber ebenso zur Vorbereitung auf die Lernumgebung „Produkte“ verwenden; denn in beiden Lernumgebungen wird bei der Erarbeitung der Multiplikation von Termen auf das Malkreuz bzw. Rechteckmodell zurückgegriffen, das die Schülerinnen und Schüler seit der Grundschule in vielen Zusammenhängen kennen und anzuwenden gelernt haben. Das Modell beruht darauf, dass sich das Produkt zweier Zahlen als Flächeninhalt eines Rechtecks mit den entsprechenden Seitenlängen interpretieren lässt. Durch Zerlegung der Seitenlängen eines Rechtecks wird so die Umformung von Produkten von Summen in Summen von Teilprodukten erarbeitet. Neben der sicheren Handhabung des Modells ist daher vor allem ein solides Verständnis des Zusammenhangs zwischen Produkt und Flächeninhalt Ziel der Förderumgebung. Sie greift dazu wesentliche Entwicklungsschritte auf, indem sie mit der Arbeit mit dem 400er-Feld beginnt und dann weiter auf das Rechteckmodell (Skizzen) und schließlich auf das Malkreuz abstrahiert, bei dem zwar noch die Produkte zu den einzelnen Teilflächen vorkommen, nicht aber mehr die Flächen selbst dargestellt werden. Im Folgenden sind die Förderansätze der Förderumgebung dargestellt (die Nummern beziehen sich wieder auf die Aufgaben der Förderumgebung).

Grundvorstellung zum Malkreuz/ Rechteckmodell	**Förderansätze »mal mit dem Malkreuz rechnen«**
Produkt zweier Längen entspricht Rechteckflächeninhalt Produkt zweier Summen entspricht Flächeninhalt zusammengesetzter Rechtecke	• **(1):** Produkte zweier Zahlen mit dem Vierhunderterfeld darstellen und berechnen • **(2,3,4):** Produkte mit Rechteckskizzen darstellen und berechnen, verschiedene Einteilungen vergleichen, Eigenschaften des Modells bewusst machen • **(5,8):** Klammerterme mit dem Malkreuz berechnen, Eigenschaften des Malkreuzes bewusst machen • **(6,7):** Modelle auf Multiplikation negativer Zahlen übertragen

3. Schlussbemerkungen

Lernumgebungen lassen sich (auch) im Förderunterricht sinnvoll einsetzen wegen ihrer bewussten Reduktion des Stoffes auf wesentliche Grundlagen (Basisstoff), wegen der gezielte Verwendung bzw. Förderung von immer wiederkehrenden Modellen und wegen der Förderung der selbstständigen Auseinandersetzung mit Grundvorstellungen.

Das Konzept des »Mathematikbuches« unterstützt den Einsatz und die Entwicklung von Lernumgebungen im Förderunterricht zunächst einmal durch sein didaktischen Konzept, durch das Lernen in Lernumgebungen und deren Anordnung im Spiralcurriculum sowie durch langes Verbleiben im Anschaulichen und die konsequente Verwendung anschaulicher Modelle.

Literatur

Affolter, W. u.a.: Das Mathematikbuch. Ausgabe N, bestehend aus: Lernumgebungen, Arbeitsheft und Begleitband für die Klassen 5 bis 9, Stuttgart 2008 bis 2011.

Fritz, A./ Schmidt, S. (Hrsg): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim und Basel 2009.

Moser Opitz, E./ Schmassmann, M.: Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 5 + 6. Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten. Zug 2005.

Thomas WASSONG, Paderborn

Was sollten Mathematik-Fortbildner über das Thema statistische Verteilungen in der Sekundarstufe I wissen? – Anwendung eines Modells zum Professionswissen im Rahmen einer DZLM-Multiplikatorenqualifizierung

Im Schuljahr 2012/2013 hat das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) eine Qualifizierung für Multiplikatoren in Nordrhein-Westfalen durchgeführt (vgl. Biehler, Kuzle, Oesterhaus & Wassong 2013). Im ersten Halbjahr stand das Thema „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht aus inhaltsbezogener Perspektive – am Beispiel der Stochastik“ auf dem Programm. Dieser Beitrag wird anhand eines Themas aus der Qualifizierung die Ziele dieser verdeutlichen. Dabei wird zunächst ein theoretischer Rahmen aufgezeigt, der im zweiten Schritt anhand des genannten Themas konkretisiert wird.

Das zugrunde gelegte Professionswissensmodell

Für die Gestaltung der Qualifizierung lag ein Modell zum Professionswissen von Lehrkräften (Wassong & Biehler 2010) zugrunde. Es basiert auf dem Modell zum Professionswissen von Shulman (1986, 1987). Die durch Shulman eingeführten Kategorien Content Knowledge (CK) und Pedagogical Content Knowledge (PCK) werden durch das Modell des Mathematical Knowledge for Teaching von Deborah Loewenberg Ball und ihrem Team an der Universität von Michigan (z.B. Ball, Thames & Phelps 2008) verfeinert. Dabei wurde die Wissenskategorie CK mit den drei Unterkategorien Common Content Knowledge (CCK), Special Content Knowledge (SCK) und Knowledge at the Mathematical Horizon (HK) verfeinert. Die Wissenskategorie PCK wurde in die Kategorien Knowledge of Curriculum (KC), Knowledge of Content and Teaching (KCT) und Knowledge of Content and Students (KCS) unterteilt. Zudem werden die Ideen von Niess (2005) sowie Mishra & Koehler (2006) zur Berücksichtigung von Medien (insbesondere Umgang mit Fach-Medien (TCK) und fachdidaktischer Einsatz von Medien (TPCK)) aufgenommen.

Zur besseren Übersicht wurden im Rahmen der Qualifizierung die acht beschriebenen Kategorien in vier Bereichen strukturiert: (1) Allgemeines und schulorientiertes *Fachwissen* (CCK, SCK), (2) *Curriculares Wissen* in fachlicher und fachdidaktischer Hinsicht (HK, KC), (3) Lern- und Lehrorientiertes *fachdidaktisches Wissen* (KCS, KCT) sowie (4) *Medienorientiertes* fachliches und fachdidaktisches *Wissen* (TCK, TPCK).

Konkretisierung des Professionswissensmodells am Beispiel „Daten repräsentieren, zusammenfassen und interpretieren“

Das Thema „Daten repräsentieren, zusammenfassen und interpretieren“, welches hier beispielhaft vertieft werden soll, bestand im Wesentlichen aus zwei Inputs zu „Grafischen Darstellungen“ und „Analyse von Verteilungen: Verteilungsformen, Mittelwerte und Streuung“ ergänzt durch eine praktische Übung zur Vertiefung der Werkzeugkompetenz. Die Inputs bestanden jeweils aus einem ein- bis zweistündigen Vortrag zum Thema, in denen die einzelnen Wissensbereiche schulpraxisnah behandelt wurden. Die praktischen Übungen wurden jeweils zu Beginn eines Präsenztreffens durchgeführt, so dass die Themen der vorherigen Treffen wiederholt und vertieft werden konnten. Im Rahmen der Qualifizierung wurden zunächst Excel und Fathom als digitale Werkzeuge eingeführt. Nach der zweiten Sitzung wurde auf Wunsch der Teilnehmenden ausschließlich Fathom als Werkzeug eingesetzt. Der Grund für diese Wahl war neben einer Reduzierung der Anforderung vor allem ein gewisser Überdruss gegenüber Excel und die starke Neugier auf eine neue, intuitivere Werkzeugsoftware.

Grafische Darstellungen

Unter dem Aspekt Fachwissen wurden zum Thema „Grafische Darstellungen“ unterschiedliche Darstellungsformen für kategoriale Merkmale (Strichliste, Kreisdiagramm sowie Säulen- und Balkendiagramm) und für numerische Merkmale (Punktdiagramm, Stängel-Blatt-Diagramm und Histogramm) definiert und voneinander abgegrenzt (insbesondere Säulendiagramm und Histogramm). Auch die Zwecke grafischer Darstellungen (Kommunikation, Argumentation, Reduktion) wurden aufgezeigt (Curriculares Wissen). Der Fokus des Inputs lag jedoch in der Entwicklung von einzelnen Diagrammtypen im Rahmen des fachdidaktischen Wissens. Hier wurde insbesondere das Säulendiagramm thematisiert, welches in seiner Begriffsentwicklung von einem enaktiven, über einen ikonischen zu einem abstrakten Zugang gezeigt wurde. (vgl. Wagner 2006 oder Stein & Neubert 2012) Des Weiteren wurden die Anforderungsniveaus beim Lesen von Grafiken thematisiert: Read the Data, Read between the Data, Read beyond the Data. (Curcio 1989) Das medienorientierte Wissen beschränkte sich auf das Erzeugen der einzelnen grafischen Darstellungen in Fathom.

Verteilungen, Mittelwerte und Streuung

Im zweiten Themenbereich wurde neben den Eigenschaften einer Verteilung (Symmetrie und Modalität) vor allem die Definition einzelner Kennwerte (arithmetisches Mittel, Median, Quartile, Spannweite, Interquartilsabstand) sowie des Boxplots behandelt. Weitere Aspekte im Rahmen des Fachwissens waren der Unterschied vom Mittelwert (arithmetisches Mittel) und Zentralwert (Median). Ein weiterer Schwerpunkt war die Definition des Medians in unterschiedlichen Schulbüchern. Hier zeigen sich insbesondere auf die Fallunterscheidung bei der Berechnung erhebliche Unterschiede. Auch die Berechnung des ersten Quartils als „Viertel“-Wert oder als Median der unteren Hälfte wurde thematisiert. Das fachdidaktische Wissen konzentrierte sich auf drei Aspekte: (1) Typische Fehler von Lernenden in Bezug auf Mittelwert (z.B. Berücksichtigung von fehlenden Werte und Null-Werten), Median (z.B. Exakte Trennung der unteren 50% von den oberen 50%) sowie dem Boxplot, (2) Grundvorstellungen des Mittelwerts (Ausgleichseigenschaft, Gleichverteilungseigenschaft, Schwerpunkteigenschaft) und (3) Enaktive Zugänge zum Median und zum Boxplot („lebendige Statistik“). Unter dem Aspekt curriculares Wissen wurden unterschiedliche Zugänge bspw. zum arithmetischen Mittel in Schulbüchern behandelt. Insbesondere wurde auf das Aufgreifen der Grundvorstellungen beim arithmetischen Mittel in den unterschiedlichen Schulbüchern eingegangen. Neben dem Erstellen von Boxplots und dem Berechnen von Kennwerten wurden interaktive Fathom-Lernumgebungen zu den Grundvorstellungen des Mittelwerts sowie zum Verhalten vom Mittelwert und Zentralwert gegenüber Ausreißern behandelt. (Medienorientiertes Wissen)

Fazit

Im Rahmen einer ausführlichen Feedbackrunde am letzten Treffen in Modul 1 wurde das fachliche Update durch die Inputs gelobt. Zudem wurde die Motivation einzelner Begriffe wie Median und Boxplot für den Unterricht hervorgehoben. Dies wurde in den Schulbüchern und anderen Materialien, die die Lehrkräfte zur Vorbereitung nutzen, nicht ausreichend thematisiert. Auch war die aufgezeigte Entwicklung einzelner Begriffe, wie für Säulendiagramme oben beschrieben, vielen Lehrkräften eine Bereicherung, die teilweise direkt im Unterricht umgesetzt wurde. Nachbesserung bedarf es bzgl. schulpraktischer Aspekte. Die Rückmeldungen zeigten den großen Wunsch nach weiteren, ganz konkreten Unterrichtsmaterialien in Form von klassenraum-kompatiblen Arbeitsaufträgen. Eine tiefergehende Evaluation der Qualifizierung durch eine ausführliche Interviewstudie wird derzeit vom Autor durchgeführt. Die ersten Ergebnisse werden in der geplanten Wiederholung der Qualifizierung berücksichtigt werden.

Literatur

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

Biehler, R., Kuzle, A., Oesterhaus, J. & Wassong, T. (2013). Stochastikfortbildner fortbilden: ein projektorientiertes Konzept zur Multiplikatorenqualifikation. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. WTM: Münster.

Frances R. Curcio. (2010). Developing Data-graph Comprehension in Grades K-8. Australian Primary Mathematics Classroom (3rd ed.). Reston, Virgina: NTCM.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. Teachers College Record, 108(6), 1017–1054.

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. Teaching and Teacher Education, 21(5), 509–523.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational researcher, 15(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard educational review, 57(1), 1–23.

Stein, A., & Neubert, B. (2012). Daten erfassen und darstellen in der Grundschule – eine Darstellung aus Theorie und Praxis. Stochastik in der Schule, 32(3), 2–7.

Wagner, A. (2006). Entwicklung und Förderung von Datenkompetenz in den Klassen 1-6. In R. Biehler (Hrsg.), Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik, Bd. 3. Kassel: Universität Kassel.

Wassong, T. & Biehler, R. (2010). A model for teacher knowledge as a basis for online courses for professional development of statistics education. In Reading, C. (Hrsg.). Proceedings of ICoTS 8, Ljubljana, Juli 2010. Voorburg: IASE (CD-ROM).

Nobuki WATANABE, Kyoto Univ. of Education, JAPAN

RTMaC Lesson Study of Mathematics Education in Japan

Now, there are many problems on teaching mathematics in school. So, many teachers must improve their teaching. But it is difficult for them to do it, because they don't know various methods and theories. Therefore we have tried to teach public schools teachers RTMaC (Right Teaching Mathematics Cycle) Lesson Study. So, we would like to present this current year's our practice in this paper.

1. Introduction

Today many teachers are very busy to handle many chores except teaching for children in Japan. Therefore they hardly take part in study meetings undertaken outside a school. So, they study about teaching mathematics in their schools by themselves. The study is named Lesson Study of a school in Japan. But, the study has not very well, because children's mathematics achievement has not improved. The reason is as follows. Many teachers want to study only teaching methods, because they believe school textbooks. Therefore they don't study essential (correct) contents of mathematics (mathematical knowledge for teaching) in school textbooks. And they don't study children's cognition concerning the contents too.

We can notice the next contents from above situation, too. Teachers need to make a teaching plan when they teach mathematics. The teaching plan mainly consists of a view of teaching materials, children, and teaching and so on. Few teachers can write correct contents of a view of teaching materials and children, because they have not understood essential contents of mathematics and they don't research children's cognition. Therefore they usually write only general stats and their experiences without studying.

Strictly speaking, teachers must understand essential contents of mathematics and children's cognition when they teach mathematics, because they must change children's cognition from native cognition to correct cognition. But many teachers can not notice above contents, because they think that they have only to teach only new knowledge in school textbooks.

Therefore, we think that they must get the ability by RTMaC Lesson Study.

2. RTMaC Lesson Study

RTMaC (Right Teaching Mathematics Cycle) is Fig.1. The cycle is as follows. 1st step is that teachers create a "Cognition Test". 2nd step is that they do it for children and analyze the result. 3rd step is that they make teaching contents and teach children it. 4th step is that they analyze the result. And they improve them.

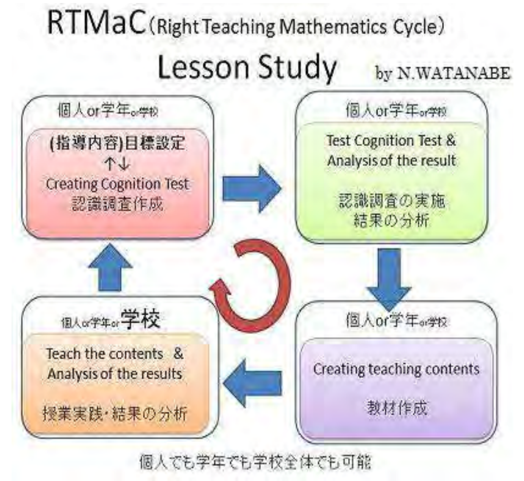


Fig. 1 RTMaC Lesson Study

Strong points of this study are as follows. They can study essential contents of mathematics and children's cognition for teaching contents of mathematics, when they create a cognition test and they get results of it. Furthermore, all teachers in a school can do it together. And both only one teacher and some group of teachers can do it too. So each elementary, junior high and high school teachers can do it.

3. Cognition Test

We think that creating a "Cognition Test" is very effective for the study. The test is as follows. For example, when teachers will teach a unit of "A" (A is weight, length, number, fraction, and so on), they need to grasp children's cognition for A. So, they must create a test to clear the cognition. Then the test consists of essence of mathematics contents of A. So the test will clear children's native cognition for A.

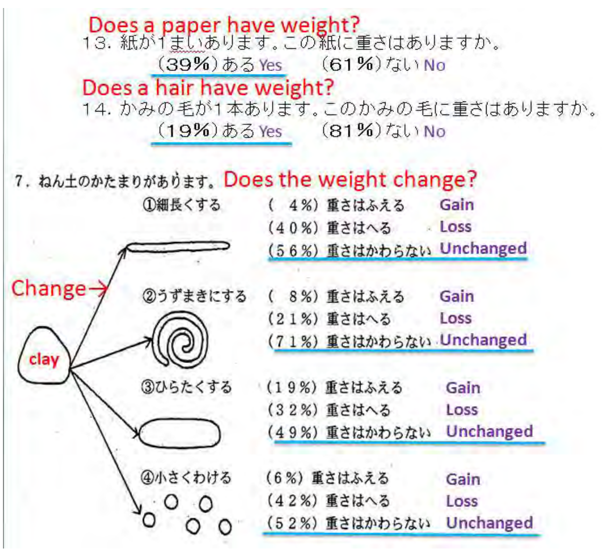


Fig.2: A Cognition Test of Weight

Therefore the test is different from a review test. If they do the test for children, they can grasp real children's cognition. Fig.2 is a sample of a cognition test and the result. The content is "weight" for 3rd grade.

But, we think that many teachers cannot create the test. The reason is those teachers have not grasped essential contents of mathematics.

We think if teachers can create the test, they have understood essential contents of mathematics. Furthermore, they can catch children's cognition if they will do the test. Therefore they need to create cognition tests and they need to do the test.

4. Practical side of RTMaC Lesson Study

So, we tried the lesson study for two public elementary schools in this current year 2012.

4-1. Public elementary schools

The study was done at Kusunoki elementary school (Osaka, Japan) and Kujokodo elementary school (Kyoto, Japan). There were 3 demonstration lessons in Kusunoki elementary school. And, there were 7 demonstration lessons in Kujokodo elementary school.

We investigated their impressions after their lessons by a questionnaire. Their impressions of teachers and a principal about the lesson study are as follows.

[Teacher's comments]

<u>For teaching contents</u>; "I found that we need to study to create a cognition test." "I became to study teaching contents in detail before I teach them." "I became to study essential contents of mathematics for teaching."

<u>For children</u>; "I have become to be able to grasp children's stumbling based on objective data through the test now. I was determining them by my images and experiences until now." "I noticed that we had been able to grasp children's cognition. So our images were different from children's cognition too much."

<u>For teaching;</u> "I can plan our teaching plan easily because I understand children's cognition by a test." "I became to be able to change the contents of school textbooks because I could grasp children's cognition."

[A principal's comment]

“Professional attitude of the teacher has changed. Some teacher started the study on their own initiative at another unit and the other subjects.”

It is cleared that next points by the comments. Teachers have become to study essential contents of mathematics for teaching before they teach it. They have become to be able to grasp children’s cognition. And they have become to be able to plan their teaching plan based on correct mathematics and children’s cognition. So they could understand necessity to study it.

And, some teachers tried to do a post-test after their teaching to clear changes of children’s cognition in the 4step on RTMaC Lesson Study. The post-test is almost same the cognition test (pre-test). So, we can notice that children's mathematics achievement has been improving gradually (Fig.3).

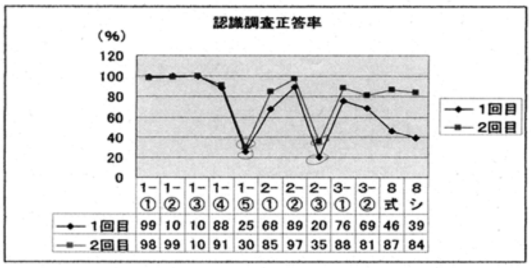


Fig.3 Comparison of pre-test and post-test

Therefore it is cleared that the study is very useful for teachers.

5. Conclusion

It is cleared that RTMaC Lesson Study is worth for teachers. The points are as follows. Teachers have been to be able to teach mathematics based on essential contents of mathematics and children’s cognition. So their teaching attitude and thinking has changed well. Furthermore children's mathematics achievement has been improving gradually.

Acknowledgment

This work was supported by KAKENHI 2370095

Literature

WATANABE Nobuki, Gensyokukyoin no sansusidouryoku no kouzyou wo mezashite –Ninshikichousa wo ikashita kyouzaikenkyu no kounaikenshu wo toushite- , Mathematics Education Society of Japan, *Journal of Mathematics Education Society of Japan,* Vol.49 /No.1・2, 17-31, 2009.3 (渡邉伸樹，現職教員の算数指導力の向上を目指して－認識調査を活かした教材研究の校内研修を通して－，数学教育学会「数学教育学会誌」Vol.49 /No.1・2，17-31，2009.3)

Sabine WEIDENEDER, Stefan UFER, München

Die Auswahl von Aufgaben und deren Begründung in der Unterrichtsplanung von Mathematik-Lehrkräften

Aufgaben spielen eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht und dessen Vorbereitung. In der TIMSS Video Studie konnte gezeigt werden, dass Schülerinnen und Schüler 80% ihrer Zeit im Mathematikunterricht mit der Bearbeitung von Aufgaben verbringen (Hiebert et al., 2003). Wir sehen Aufgaben als eine Aufforderung zur gezielten Bearbeitung eines eingegrenzten mathematischen Themas (nach Neubrand, 2002). Interviewstudien (Bromme, 1981) legen nahe, dass sich Mathematiklehrkräfte bei ihrer Unterrichtsplanung stark auf die Auswahl von Aufgaben und die Antizipation der Aufgabenbearbeitung konzentrieren.

Baumert und Kollegen (2010) stellten einen direkten Zusammenhang zwischen der Qualität der Aufgaben, insbesondere ihrem Potential zur kognitiven Aktivierung, und dem Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler fest. Somit wird die Auswahl von Aufgaben als zentraler Aspekt der professionellen Kompetenz einer Lehrkraft gesehen (Schmidt et al., 2007). Die Forschung zu Unterrichtsqualität liefert uns erste Kriterien für eine adäquate Aufgabenauswahl und Implementierung. Wir beziehen uns hierbei auf zwei Grunddimensionen der Unterrichtsqualität (Klieme et al., 2001): Schülerorientierung und kognitive Aktivierung. Trotz der bedeutenden Forschung zu professioneller Kompetenz und Wissen von Mathematiklehrkräften (vgl. Lindmeier, 2011), ist unklar zu welchem Ausmaß sich Lehrkräfte auf diese Kriterien beziehen, oder ob ihre Aufgabenauswahl von anderen Kriterien bestimmt wird. Die hier berichtete explorative Laborstudie sollte klären, welche Begründungen Lehrkräfte für ihre Aufgabenauswahl in der Unterrichtsplanung angeben und inwiefern dabei auf das Potential der Aufgaben und Qualitätsmerkmale von Unterricht Bezug genommen wird.

1. Interviewstudie

In den halbstrukturierten, videografierten Interviews planten 17 Lehrkräfte der Sekundarstufe eine Unterrichtseinheit, wobei der Fokus auf der Auswahl von Aufgaben lag. Dazu wurden den Lehrkräften eine grobe Charakterisierung der Lerngruppe und ein genaues Lernziel der zu planenden Unterrichtseinheit (Erlangen eines fundierten Verständnisses der *Addition ungleichnamiger Brüche*) vorgegeben. Für die Planung konnte das eigene Schulbuch und ein Aufgabenpool bestehend aus 18 Aufgaben verwendet werden. Die fachdidaktische Qualifikation der Lehrkräfte wurde bei der Auswahl gezielt variiert: Acht Lehrkräfte verfügten über besondere Erfahrungen im Unterrichten von Mathematik *(ZQ)*. Sie sind oder waren für die Lehre für Mathematikdidaktik zuständig, arbeiteten bei der Lehrplanerstellung mit oder waren Fachbetreuer an der Schule mit langjähriger Unterrichtserfahrung. Die restlichen neun Lehrkräfte waren reguläre Lehrkräfte, welche über keine der genannten Zusatzqualifikationen verfügten (*RQ*).

Für jede der 143 von den 17 Lehrkräften gewählten Aufgaben wurde das *Potential der kognitiven Aktivierung* nach fünf Kategorien eines von Jordan und Kollegen (2008) entwickelten Klassifikationsschemas für Aufgaben (Aufgabentyp, mathematisches Argumentieren, inner- und außermathematische Modellierung, Gebrauch mathematischer Darstellungen), sowie vier zusätzlichen eigenentwickelten Kategorien (Aktivierung von Vorwissen, Herstellen kognitiver Konflikte, Möglichkeit für Schätzen, operatives Üben) kodiert. Die *Begründungen der Aufgabenauswahl* wurden mit Hilfe eines detaillierten, selbstentwickelten Kodierungsschemas kodiert, wobei zwischen Begründungen, die sich auf Schülerorientierung und kognitive Aktivierung bezogen und weiteren Begründungsarten differenziert wurde.

2. Erste Ergebnisse der Studie

Wie in der Studie von Jordan et al. (2008) zeigte sich für beide Gruppen (ZQ und RQ) ein ähnlich geringes mittleres Aufgabenpotential.

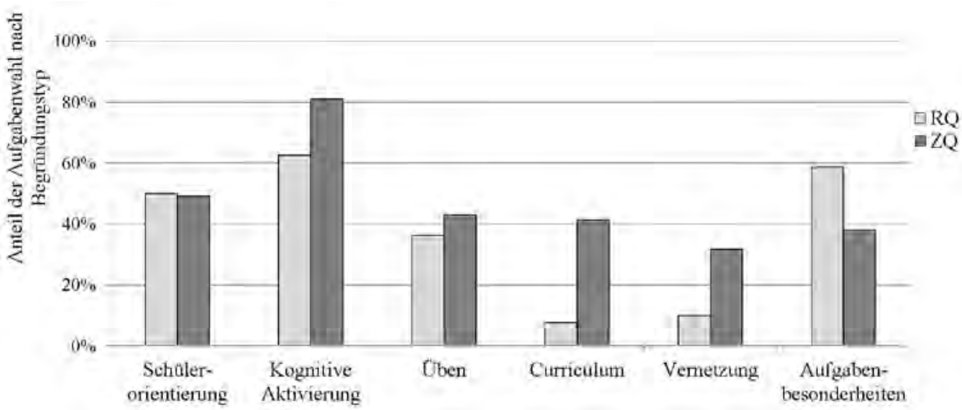


Abbildung 1: Gründe für die Aufgabenauswahl

Abbildung 1 zeigt für die beiden Gruppen den Anteil der Aufgabenauswahl nach Begründungstyp. Lehrkräfte begründeten ihre Aufgabenauswahl in über 50% der Fälle mit zentralen Aspekten der Unterrichtsqualität, wie der *kognitiven Aktivierung* und der *Schülerorientierung*.

In einigen Fällen bezogen sich Lehrkräfte auf Unterrichtsmerkmale, die nicht in Verbindung mit den a-priori definierten Kategorien standen. Diese weiteren Begründungstypen konnten explorativ in die folgenden Dimensionen gruppiert werden: *Üben*, *Curriculum*, *Vernetzung* und *Aufgabenbesonderheit*.

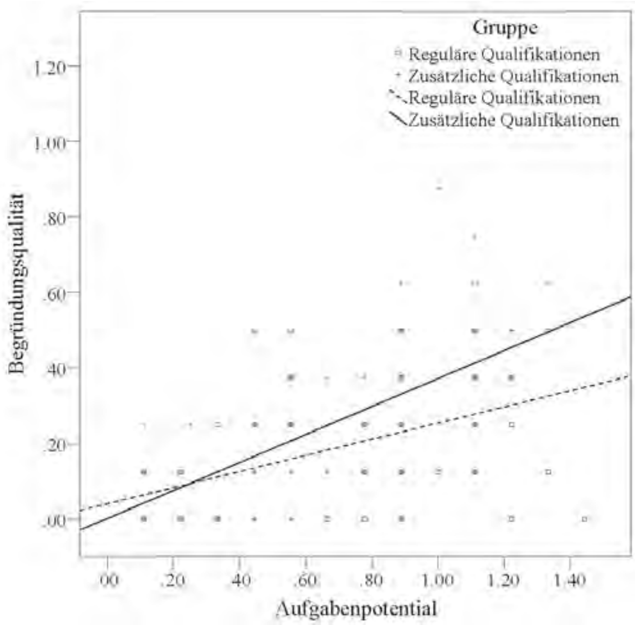


Abbildung 2: Begründungsqualität und Aufgabenpotential für die Aufgabenauswahl beider Lehrkraft-Gruppen

Für Begründungen, die sich auf eine der neun Subkategorien der Dimension *kognitive Aktivierung* bezogen, wurde auch die Begründungsqualität kodiert. In folgender Analyse sind die Begründungsqualität und das Aufgabenpotential über die neun Subkategorien für jede Aufgabenauswahl gemittelt. Die Qualität der Begründungen korrelierte signifikant mit dem Aufgabenpotential**.** Wie das Punktdiagramm in Abbildung 2 zeigt, gaben die beiden Gruppen für Aufgaben mit niedrigerem Potential weniger elaborierte Begründungen an. Mit steigendem Aufgabenpotential nimmt die mittlere Qualität der Begründungen bei der ZQ Gruppe mehr zu als die der RQ Gruppe.

3. Diskussion

In den Begründungen der Lehrkräfte konnten eindeutige Spuren von Aspekten für Unterrichtsqualität festgestellt werden. Außerdem zeigten Lehrkräfte unterschiedlicher Qualifikationen spezifische Muster in den zur Begründung herangezogenen Argumenten. Lehrkräfte mit zusätzlichen Qualifikationen begründeten ihre Aufgabenwahl signifikant häufiger als Lehrkräfte mit regulären Qualifikationen mit den Aspekten *kognitive Aktivierung*, *Vernetzung* und Zielklarheit (*Curriculum*). Diese drei Kategorien beschreiben stärker Aspekte von Unterricht, die kognitive Lerngelegenheiten unterstützen. Fast gleich oft beziehen sich beide Gruppen auf die Punkte *Schülerorientierung* und Ziele von Übungsaufgaben.

Inwieweit Lehrkräfte bei der Begründung ihrer Aufgabenauswahl tiefer auf das kognitive Aktivierungspotential eingehen, scheint vom Aufgabenpotential und von der Qualifikation der Lehrkraft abzuhängen. Für Aufgaben mit einem niedrigen Potential, wie zum Beispiel einfache Trainingsaufgaben, liegt die Vermutung nahe, dass ausführliche Begründungen eher schwierig zu finden sind. Es ist plausibel, dass die Implementierung von Aufgaben mit einem höheren Aufgabenpotential, welches zum Beispiel Aufgaben mit kognitiven Konflikten oder mehreren Lösungsmöglichkeiten sind, mindestens ein gewisses Bewusstsein für das Aufgabenpotential erfordert. Somit wäre es problematisch, wenn Lehrkräfte der RQ Gruppe nicht nur in der ausführlicheren Beschreibung dieser Aspekte scheitern, sondern ihnen diese bei der Auswahl nicht bewusst sind.

Die durchgeführte explorative Studie erlaubt keine endgültigen Schlussfolgerungen in diesem Forschungsgebiet. Somit kann nicht eindeutig geklärt werden, ob die oben genannten Unterschiede in der Tat Indikatoren für ein unterschiedliches Bewusstsein von Unterrichtsqualität sind. Dennoch deuten sich spezifische Profile besonders in Bereichen an, die für kognitive Lerngelegenheiten relevant sind, wie zum Beispiel kognitive Aktivierung, Vernetzung und Zielklarheit. Dies unterstreicht die Bedeutung der genannten Bereiche für die Lehrerkompetenzforschung und, wenn sich dieses Muster bestätigt, für die Konzeptualisierung von Lehrerausbildung und Fortbildungen.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A.,… (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133–180.

Bromme, R. (1981). *Das Denken von Lehrern bei der Unterrichtsvorbereitung: Eine empirische Untersuchung zu kognitiven Prozessen von Mathematiklehrern*. Basel: Beltz.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: NCES.

Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1: "Aufgabenkultur" und Unterrichtsgestaltung im internationalen Vergleich. In E. Klieme & J. Baumert (Hrsg.), *TIMSS- Impulse für Schule und Unterricht* (S. 43-57). Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and measuring knowledge and competencies of teachers: A threefold domain-specific structure model for mathematics*. Münster: Waxmann.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M. & Brunner, M. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, 29 (2), 83–107.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Schmidt, W. H., Tatto, M. T., Bankov, K., Blömeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., et al. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries. Mathematics teaching in the 21st century (MT21).* East Lansing: Center for Research in Mathematics and Science Education, Michigan State University.

Julia WEINSHEIMER, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

Diagnosekompetenz von Grundschullehrkräften erfassen – Einblicke in die Entwicklung eines Erhebungsinstruments

Die diagnostischen Fähigkeiten von Lehrerinnen und Lehrern rücken – nicht nur in Deutschland – zunehmend in den „Fokus der Wissenschaft“ (Lorenz & Artelt 2011). Auch in der Bildungspolitik gewinnt die Diagnosekompetenz von Lehrkräften vermehrt an Bedeutung. Mit ein Grund dafür mag das nicht besonders gute Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler im Rahmen der PISA-Studie 2000 in verschiedenen Fächern sein. So wurden im Anschluss Forderungen nach vermehrter Aus- und Fortbildung bezüglich Diagnose- und Förderkompetenz von Lehrkräften laut. In diesem Kontext steht die Erwartung, dass eine „verbesserte Diagnosekompetenz der Lehrkräfte zu einer Besserung bei den Lernleistungen der Schülerinnen und Schüler“ führt (Kretschmann 2004, 180).

Doch wodurch zeichnet sich diagnostische Kompetenz überhaupt aus? Was sind Aspekte, die Aussagen über diagnostische Fähigkeiten von Lehrkräften zulassen? Wie können sie erfasst und validiert werden? Lassen sich schließlich verschiedene „Kompetenzprofile“ differenzieren? Zeigen sich Unterschiede zwischen Novizen und Experten hinsichtlich ihrer diagnostischen Fähigkeiten beziehungsweise lassen sich Veränderungen und Entwicklungen der Diagnosekompetenz sichtbar machen? Diese Fragestellungen sollen in einem Forschungsvorhaben geklärt werden, in dessen Rahmen ein Instrument entwickelt, validiert und erprobt wird, mit dem sich diagnostische Fähigkeiten von Lehrkräften im Fach Mathematik – bezogen auf den Bereich Arithmetik in Klasse 1/2 – erfassen lassen. Das Vorgehen gliedert sich in einen dreiphasigen Prozess:

- die theoretische Klärung
- die Entwicklung des Instruments
- die Erprobung des Instruments

Theoretische Klärung (Phase 1)

Nach heutigem Stand der Forschung wird vorwiegend die Ansicht vertreten, dass diagnostische Kompetenz nicht universal ausgeprägt ist, sondern dass es sich um bereichsspezifisch ausgeprägte diagnostische Fähigkeiten handelt (u.a. Spinath 2005). Somit bleibt zunächst zu klären, was die Indikatoren für diagnostische Fähigkeiten im Bereiche der (Grundschul-) Mathematik sind. Neben Ergebnissen aus der aktuellen Forschung lassen sich hierzu speziell auch Erkenntnisse zur Entwicklung mathematischer Lernprozesse sowie gängige Diagnostikinstrumente heranziehen.

Entwicklung des Instruments (Phase 2)

Der theoretischen Klärung schließt sich die Entwicklung des Instruments an, welche sich in zwei gleichzeitig ablaufende Prozesse gliedert: Im Bottom-up-Prozess wird auf der Basis der theoretischen Überlegungen zunächst ein (vorläufiges) Instrument zur Erfassung diagnostischer Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften konzipiert. Der Bereichsspezifität diagnostischer Fähigkeiten soll vor allem durch die Instrument-Entwicklung mittels qualitativer Methoden Rechnung getragen werden. In einem zirkulären Prozess werden die Items des Instruments zunehmend weiterentwickelt und verbessert, was durch regelmäßigen Austausch mit verschiedenen Personengruppen (Mathematikdidaktikern, Lehrkräften sowie Studierenden) ermöglicht wird. Im gleichzeitig ablaufenden Top-down-Prozess formulieren zunächst verschiedene Experten (Mathematikdidaktiker unterschiedlicher Hochschulen) Indikatoren für diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften im Bereich Arithmetik in der Primarstufe. Hierfür bildet das Modell diagnostischer Fähigkeiten der COACTIV-Studie die Grundlage (vgl. Abb.1), das auf das Projekt bezogen modifiziert wurde: Zu den vier Kompetenzfacetten „Wissen über mathematisches Denken von Schülern“ (1), „Wissen über mathematische Aufgaben“ (2), „Wissen über Lernprozesse [im Bereich Arithmetik in der Primarstufe]“ (3) und „Wissen um Leistungsbewertung“ (4) formulieren die Experten Indikatoren für diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. Die Ergänzung der Kompetenzfacette „Wissen über Lernprozesse“ soll der Annahme gerecht werden, dass vor allem im Bereich der Arithmetik auch stoffdidaktisches Wissen und Wissen über die entsprechenden Entwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern im Primarbereich von besonderer Relevanz sind.

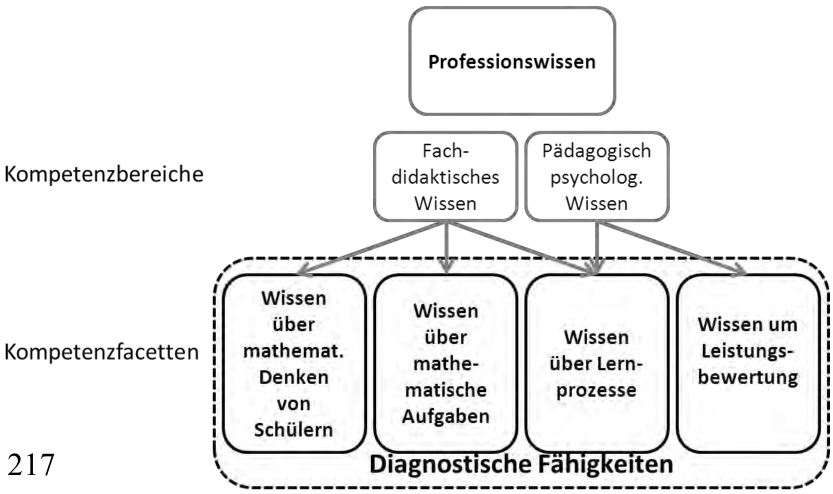


Abbildung 1: modifiziert nach Brunner et al. 2011, S. 217

Anschließend werden alle formulierten Indikatoren durch Experten mit Hilfe einer dreistufigen Skala gewichtet. Eine abschließende Validierungsphase führt beide Prozesse zusammen. Dabei werden die verschiedenen Items zum einen hinsichtlich ihrer Vollständigkeit bezüglich der Experten-Indikatoren überprüft und gegebenenfalls ergänzt; zum anderen beurteilen die Experten, ob die generierten Items die formulierten Indikatoren für diagnostische Fähigkeiten adäquat und valide widerspiegeln.

Das Instrument soll unterrichtsrelevante Aspekte beinhalten. Dazu gehören die Einschätzung von Schülerlösungen und Lernsituationen. Um diese beiden Bereiche abzudecken, werden neben (vorwiegend) offenen Fragen zur Einschätzung von Mathematikaufgaben und Lernständen auch (Original-) Schülerlösungen sowie Videovignetten mit ausgewählten Lernsituationen1 eingesetzt. Die Einschätzung der Kinderhandlungen, aber auch die Beurteilung des beobachtbaren Lehrerhandelns soll schließlich Rückschlüsse bezüglich der jeweiligen diagnostischen Fähigkeiten ermöglichen. Zugleich wird hierbei der Annahme Rechnung getragen, dass Kompetenzen von Lehrkräften auf unterschiedliche Weisen fachspezifisch zugänglich gemacht werden können: Während in der aktuellen Forschung zum einen aus der Erfassung fachspezifischen Wissens (meist differenziert in fachwissenschaftliche und fachdidaktische Komponenten) Rückschlüsse auf Lehrerprofessionalität und -kognitionen gezogen werden, zielen andere Ansätze auf die Erfassung fachspezifischer Kompetenz – basierend auf professionellen Anforderungen des Lehrberufs – ab, um somit Aussagen hinsichtlich handlungsorientierter Fähigkeiten der Lehrkräfte abzuleiten (Lindmeier et al. 2013). Im Rahmen diagnostischer Anforderungen müssen Lehrkräfte in ihrem Unterrichtsalltag beispielsweise schnell und adäquat Schüleräußerungen analysieren und beurteilen können, um entsprechend spontan angemessen im Unterrichtsprozess reagieren zu können. Lindmeier et al. (2013) sprechen in diesem Zusammenhang von „aktionsbezogener Kompetenz" – welche sie von der „reflexiven Kompetenz" abgrenzen. Auch eine reflexive Komponente kommt bei der Beurteilung diagnostischer Fähigkeiten von Lehrkräften zum Tragen, wenn Lehrerinnen und Lehrer beispielsweise im Zuge der Unterrichtsvorbereitung passende mathematische Aufgaben auswählen, die sie hinsichtlich ihres Aufgabenpotentials adäquat einschätzen müssen. Bei der Entwicklung des Instruments zur Erfassung diagnostischer Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften sollen diese Aspekte entsprechend berücksichtigt werden: Mit Hilfe einer „animierten Fragenpräsentation"

[1] Die videographierten Lernsituationen werden aus diagnostischen Gesprächen oder Förderungen ausgewählt, die im Rahmen der Beratungsstelle für Kinder mit Lernschwierigkeiten in Mathematik durchgeführt wurden. Homepage der Beratungsstelle der Pädagogischen Hochschule Weingarten: www.ph-weingarten.de/lernschwierigkeiten_mathematik/lernschwierigkeiten_mathematik_startseite

werden die jeweiligen Items den Probanden zeitgleich und mit vorgegebenem Zeitlimit präsentiert. Items, die auf einen schnellen Wissensabruf und somit auf Spontaneität der Antwort abzielen (vergleichbar der „aktionsbezogenen Kompetenz" nach Lindmeier et al. 2013), sind hierbei mit einem engen Zeitlimit versehen. Für die Beantwortung von Items, die verstärkt reflexive Komponenten (vergleichbar der „reflexiven Kompetenz" nach Lindmeier et al. 2013) im Blick haben, ist dagegen die zur Verfügung stehende Zeit weniger stark reglementiert. Zur Bestimmung der individuellen diagnostischen Fähigkeiten der jeweiligen Probanden erfolgt abschließend ein Vergleich mit einer Qualitätsnorm, die aus Expertenantworten abgeleitet wird.

Erprobung des Instruments (Phase 3)

Abschließend wird das (weiter-)entwickelte Instrument im Rahmen einer Fortbildungsreihe2 für Mathematiklehrkräfte erprobt. Diese bezieht sich auf die Förderung und Diagnose von Lernprozessen in der ersten Klasse und erstreckt sich über den Zeitraum eines Schuljahrs. Das Instrument wird zu Beginn und am Ende der Fortbildung bei allen 30 Teilnehmerinnen eingesetzt und abschließend evaluiert.

Literatur

Brunner, M.; Anders, Y.; Hachfeld, A.; Krauss, St. (2011): Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In: M. Kunter; J. Baumert; W. Blum; U. Klusmann; St. Krauss; M. Neubrand (Hrsg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften, Münster/New York/München/Berlin: Waxmann, 215-234.

Kretschmann, R. (2004). Pädagnostik – zur Förderung der Diagnosekompetenz von Lehrerinnen und Lehrern. In: H. Bartnitzky & A. Speck-Hamdan (Hrsg.): Pädagogische Leistungskultur: Leistungen der Kinder wahrnehmen – würdigen – fördern. Beiträge zur Reform der Grundschule, Band 118. Frankfurt/Main: Arbeitskreis Grundschule, 180-215.

Lindmeier, A.; Heinze, A.; Reiss, K. (2013): Eine Machbarkeitsstudie zur Operationalisierung aktionsbezogener Kompetenz von Mathematiklehrkräften mit videobasierten Maßen. Journal für Mathematik-Didaktik, 34, 99-119.

Lorenz, Ch., Artelt, C. (2009): Fachspezifität und Stabilität diagnostischer Kompetenz von Grundschullehrkräften in den Fächern Deutsch und Mathematik. Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 23 (3-4), 211-222.

Spinath, B. (2005): Akkuratheit der Einschätzung von Schülermerkmalen durch Lehrer und das Konstrukt der diagnostischen Kompetenz. Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 19 (1/2), 85-95.

[2] Das Projekt wird finanziell gefördert von der Akademie für innovative Bildung und Management Heilbronn Franken gemeinnützige GmbH.

Lena WESSEL, Dortmund

Sprache und Vorstellungen parallel entwickeln – Wirkungen einer fach- und sprachintegrierten Förderung für sprachlich schwache Lernende

Hintergrund und methodologische Einordnung des Projekts

In diesem (vom BMBF im Rahmen des Forschungsschwerpunktes „Empirische Fundierung der Fachdidaktiken“ geförderten) Entwicklungsforschungsprojekt ist ein fach- und sprachintegriertes Förderkonzept für sprachlich und mathematisch schwache Lernende entwickelt und empirisch erforscht worden. Das Forschungsdesign als Prä-Post-Kontrollgruppen-Interventionsstudie und die quantitativen Ergebnisse zur hohen Wirksamkeit der Förderung sind in Wessel & Prediger (2012) beschrieben. Zur Beantwortung der qualitativen Forschungsfragen nach den genaueren Wirkungen im Lernprozess wurde als methodischer Zugang die fachdidaktische Entwicklungsforschung gewählt (vgl. Prediger et al. 2012).

Grundlage bei der Entwicklung der Materialien zur Förderung eines verstehensorientierten Anteilskonzepts war der Ansatz der Darstellungsvernetzung (vgl. Prediger & Wessel 2011) kombiniert mit Design-Prinzipien aus der Sprachdidaktik, u.a. das Schaffen reichhaltiger Kommunikationssituationen (hier konkret durch operatives Variieren beim Darstellungsvernetzen, Duval 2006) und Elemente des Scaffolding (vgl. Hammond & Gibbons 2005). Gezieltes Bereitstellen sprachlicher Mittel beim Scaffolding erfordert jedoch die Spezifikation, welche Mittel tatsächlich erforderlich sind. Der Beitrag gibt Einblick in die diesbezügliche Teilstudie.

Forschungsfragen der Teilstudie

Auf Entwicklungsebene sind die Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstands *„für das Anteilskonzept benötigte sprachliche Mittel*“ und die Formulierung von Design-Prinzipien von Interesse; auf Forschungsebene ist das Ziel des Projekts die Entwicklung lokaler Theorien zu gegenstandsspezifischen Lernprozessen über Hürden und Verläufe sowie zu gegenstandsspezifischen Lehrprozessen über Bedingungen und Wirkungsweisen. Für den mathematikdidaktischen Lerngegenstand „Anteile und Brüche“ sind diese Strukturierungen bereits gut abgesichert.

Für die sprachlichen Mittel bedeutet dies konkret die Beantwortung folgender ausspezifizierter Forschungsfragen, zu deren Beantwortung in diesem Beitrag Ausschnitte vorgestellt werden:

1. Über welche sprachlichen Mittel sollten Lernende zur Konzeptentwicklung des Anteilsbegriffs verfügen?
2. Welche sprachlichen Mittel nutzen Lernende zum Ausdruck ihrer Anteilsvorstellungen und wie entwickeln sich diese im Prozess?

Beschreibung des Vorgehens bei der Analyse

Für die qualitative Analyse wurden auf Basis der quantitativen Daten Fokusszenen aus der sechsstündigen Förderung und Fokuspaare ausgewählt. Die Lernprozesse dieser Paare bei der Arbeit mit den ausgewählten Materialien aus der Lernumgebung „Duploaufgaben“ (siehe Abb. 1) wurden zunächst sequenzanalytisch interpretiert.

Im Anschluss fanden eine mathematikdidaktische und eine sprachliche Analyse statt. Ziel der sprachlichen Analysen war die Rekonstruktion der für den Konzeptaufbau vom Anteil benötigten sprachlichen Mittel. Dazu fand eine Analyse der transkribierten Lernprozesse auf Wort- und Satzebene statt. Vorgegangen wurde dabei kategorienentwickelnd, ausgehend von theoretisch bestimmten Anfangskategorien und auf Basis der sequenzanalytischen Rekonstruktion der mathematikdidaktischen Analyse. Teil dieser qualitativen Analyse war u.a. eine Sprachinventarisierung, die im Folgenden genauer dargestellt werden soll. Als letzter Schritt wurden die Zusammenhänge zwischen Design-Elementen und Wirkungen herausgearbeitet.

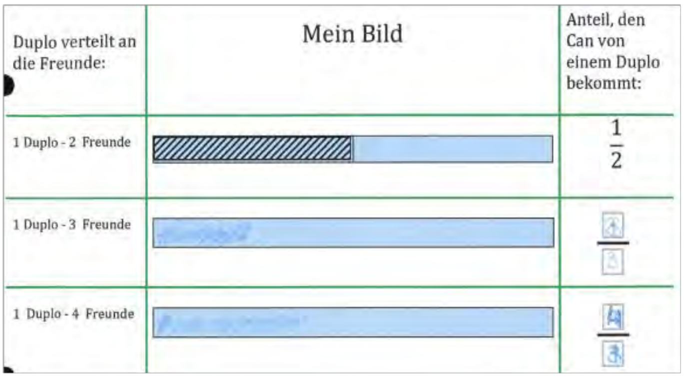


Abb. 1: Bearbeitung der Schülerin Nadja zur Duploaufgabe

Für die Sprachinventarisierung wurde zunächst ein Sprachvorbild als Erwartungshorizont aus den empirischen Daten ausgewählt. Dieses Vorgehen lässt sich dadurch begründen, dass ein Erwartungshorizont auf Basis tatsächlich beobachteter Sprachhandlungen erfolgreich kommunizierender Lernender formuliert werden sollte, um so eine möglichst realistische Einschätzung der erwartbaren Lernendenleistungen zu erhalten. Die Äußerungen des Sprachvorbilds wurden auf Wort-, Satz- und Deixisebene inventarisiert. Auf Basis der Inventarisierung des Sprachvorbilds wurden Kategorien entwickelt, die auf die Inventarisierungen weiterer Lernenden im Zuge von Fallvergleichen und Fallkontrastierungen angewendet wurden. Am Schluss erfolgte eine Rückbindung an die mathematikdidaktische Analyse.

Einblick in Ergebnisse der sprachlichen Analyse auf Satzebene

Zur Darstellung der präskriptiven Ebene und Beantwortung der 1. Forschungsfrage soll zunächst ein auf Satzebene fokussierter Blick auf das Sprachvorbild (Jasmin) genommen werden.Der Transkriptauszug beginnt, nachdem Jasmin alle gesuchten Anteile in die Aufgabe aus Abb. 1 korrekt eingezeichnet und notiert hat (FL =Abkürzung für Förderlehrer).

FL	Ok Jasmin´ Erklär mal, wie bist du vorgegangen´
Jasmin	Ich hab in die, *(zeigt auf den zweiten Bruchstreifen)* in diese Reihe *(führt mit dem Stift über den Bruchstreifen)* in diese hier *(Schaut zur Interviewerin)* drei Striche rein gemalt, gleichmäßige, also dass drei Spalten gleichmäßig sind, und dann einen davon ausgemalt, und das sind dann 1/3´ /

In ihrer Beschreibung formuliert Jasmin die Relation zwischen Teil und Ganzem, indem sie beschreibt, dass sie das Ganze zunächst in drei „Spalten“ geteilt „und dann einen davon ausgemalt [hat]“. Jasmin verwendet zu diesem Zeitpunkt also das Präpositionaladverb „davon“ zum Ausdruck der Relationen.

Zur Beantwortung der 2. Forschungsfrage wurden Lernendenäußerungen zu einem vergleichbaren Zeitpunkt im Lernprozess mit dem Sprachvorbild kontrastiert. Am Beispiel der Schülerin Nadja sollen im Folgenden die sprachlichen Mittel und ihre Entwicklung im Prozess nachgezeichnet werden. Im Anschluss an die Bearbeitung der Duploaufgabe formuliert die Schülerin Nadja die folgende Beschreibung:

FL	Erklär mal, was, was du da gemacht hast.
Nadja	Bei einem Duplo und drei Freunden da habe ich 3/3. Weil für drei Freunde und ein Duplo, dann soll ich das in drei Teile packen so.
FL	Mmh, und du solltest ja sagen welchen Anteil Can von dem einen Duplo kriegt.
Nadja	Ja, er kriegt so viel *(zeigt auf angemalten Abschnitt im Bruchstreifen)* und dann die Freunde noch *(zeigt auf Rest des Streifens)*.

Nadja hat als Bruch „3/3“ für die Situation „1 Duplo – 3 Freunde“ notiert und fokussiert in ihrer Begründung „weil für drei Freunde und ein Duplo, dann soll ich das in drei Teile packen so“ zwar auf die Einteilung des Ganzen in drei Teile, setzt diese aber nicht zu einer Bezugsgröße in Beziehung. Nachdem der Förderlehrer auf Cans Anteil „von dem einen Duplo“ fokussiert und damit die Präposition „von“ als implizites Sprachangebot macht, antwortet Nadja auf deiktischer Ebene und zeigt den entsprechenden Anteil am Bild mit der sprachlichen Begleitung „er kriegt so viel“. Hier fokussiert Nadja wiederum den Teil, den das Aufgabenkind Can bekommt, sowie die Teile, die für die Freunde übrig bleiben. Es bleibt an dieser Stelle unklar, ob sich bei Nadja noch ein relationales Anteilskonzept entwickeln muss oder ob sie an sprachliche Grenzen zum Ausdruck von Relationen stößt.

Im Verlauf des Prozesses sind bei Nadja Entwicklungen zu beobachten. Zu einem späteren Zeitpunkt, nachdem Nadjas Partnerin ebenfalls mithilfe des Präpositionaladverbs „davon“ die Beziehung zwischen Teil und Ganzem ausdrückt und der Interviewer explizit nachfragt, „wovon“ das Aufgabenkind Can den Anteil 1/3 bekomme, bezieht auch Nadja in ihrer Antwort „von 3 Stücken“ das Ganze ein. Außerdem verknüpft sie eine erneute deiktische Antwort mit dem korrekten Anteil 1/3, d.h. gleichzeitig zur sprachlichen Präzisierung entwickelt sich auch ihr Anteilsbegriff mit der Deutung von 1/3 als „1 von 3“ weiter.

Fazit

Die kurzen Analyseeinblicke zeigen, dass Lernende in ihrem Sprachrepertoire auf Satzebene über Präpositionen zum Herstellen von Beziehungen verfügen sollten. Mit Blick auf das Fallbeispiel von Nadja wird zudem deutlich, dass eine getrennte Betrachtung von Sprach- und Vorstellungsentwicklung nicht sinnvoll zu sein scheint, da diese Prozesse häufig (unterstützt von Handlungen auf deiktischer Ebene) parallel verlaufen und einander bedingen (vgl. Prediger 2013). Aus diesem Grund sollten Sprachmittel parallel zur Konzeptentwicklung angeboten und ihre Entwicklung durch explizite Sprachangebote unterstützt werden. Dazu bieten der Umgang mit Darstellungen und der Gebrauch deiktischer Mittel Potential.

Literatur

Duval, R. (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 61, 103-131.

Hammond, J. & Gibbons, P. (2005) Putting scaffolding to work: The contribution of scaffolding in articulating ESL education. *Prospect*, *20* (1), 6-30.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011): Darstellen – Deuten - Darstellungen vernetzen. (Vollständige Quellenangabe zu finden in Wessel, L. & Prediger S. (2012))

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012): Lehr-Lernprozesse initiieren und erfoschen - Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht 65(8), 452–457.

Prediger, S. (2013): Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen – Mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In: Becker-Mrotzek, M. et al. (Hrsg.): Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen. Münster: Waxmann, 167-183.

Wessel, L. & Prediger, S. (2012): Fach- und sprachintegrierte Förderung für mehrsprachige Lernende am Beispiel von Anteilen und Brüchen. In: Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht, 933-936.

Kirsten WINKEL, Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Darstellen, Argumentieren, Reflektieren und der Nutzen von Metakognition – Eine Teilstudie des Projekts La viDa-M

Mathematische Objekte sind nicht direkt zugänglich. Um sich mit ihnen zu befassen, bleibt sowohl Mathematik-Experten wie auch Mathematik-Lernenden nichts anderes übrig als geeignete Darstellungen für sie zu finden. So kann es keinen Mathematikunterricht geben, der sich nicht mit Darstellungen befasst. Dabei umfasst der Begriff Darstellung mehr als nur *bildliche* und *handelnde* Veranschaulichungen: Auch eine *symbolische* Äußerung oder Notation des Schülers kann eine Darstellung eines mathematischen Sachverhalt sein. Für jeden mathematischen Sachverhalt gibt es geeignetere und ungeeignetere Darstellungen, aber es gibt keine Darstellung, die alle Facetten eines noch so einfachen mathematischen Objekts vollständig oder selbsterklärend zum Ausdruck bringt. Auf der einen Seite spielt daher die Kompetenz, flexibel mit verschiedenen Darstellungen umgehen zu können, eine Schlüsselrolle beim Verstehen von Mathematik (z. B. Duval 2006, Sjuts 2002). Diese Schlüsselrolle spiegelt sich ebenso in den KMK-Bildungsstandards wieder: Hier wird „Mathematische Darstellungen verwenden“ als eine der sechs „allgemeinen mathematischen Kompetenzen“ aufgeführt (KMK 2004). Auf der anderen Seite sind Darstellungswechsel häufig eine Verständnishürde beim Mathematiklernen (Ainsworth 2006): Es gibt nicht wenige Schüler und sogar Mathematikstudierende, die sich im Umgang mit Darstellungen schwer tun.

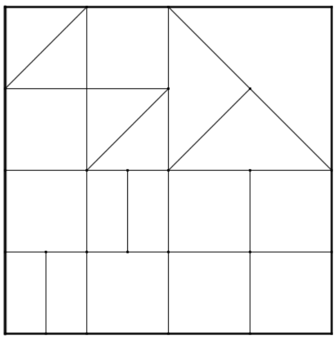
Im Unterricht werden - häufig stillschweigend - unterschiedliche Darstellungen desselben mathematischen Sachverhalts nebeneinander verwendet. Nicht selten wird zwischen diesen Darstellungen mit großer Selbstverständlichkeit hin und her gesprungen, ohne die Zusammenhänge zu thematisieren oder sich möglicher Verständnishürden für leistungsschwächere Schüler bewusst zu sein. Um jedoch eine Grundlage für tieferes Verstehen und für die Entwicklung tragfähiger mathematischer Vorstellungen in den Köpfen der Schüler zu schaffen, müssen genau diese Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungen für ein und dasselbe bewusst trainiert werden (Sjuts 2002, Kuhnke 2011). Rau, Aleven & Rummel (2009) konnten zudem über ein kontrolliertes Experiment zur Bruchrechnung zeigen, dass die Schüler mehr lernten, wenn sie multiple bildliche Darstellungen statt nur einer einzigen bildlichen Darstellung einsetzten, insbesondere dann, wenn die Schüler zum Argumentieren und Reflektieren darüber, wie die grafischen mit den symbolischen Darstellungen zusammenhängen, herausgefordert wurden.

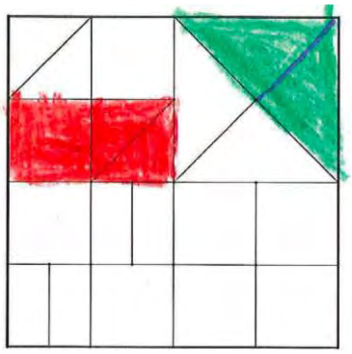
Sobald es gelingt, dass Schülerinnen und Schüler über die Zusammenhänge zwischen verschiedene Darstellungen nachdenken und diese reflektieren, dabei ggf. Fehler, Unstimmigkeiten oder Fehlvorstellungen ausfindig machen, werden zudem metakognitive Kompetenzen der Schüler angeregt: Die Schüler planen, überwachen und reflektieren ihre Denk- und Verstehensprozesse zu mathematischen Darstellungen (Sjuts 2002, Cohors-Fresenborg & Kaune 2007, Winkel 2012). Derartige metakognitive Kompetenzen wiederum haben nachweislich einen starken Einfluss auf den mathematischen Lernerfolg (z.B. Schneider & Artelt 2010). In der sehr groß angelegten Metastudie „Visible Learning“ konnte dieser starke Effekt von Metakognition - auch über das Fach Mathematik hinaus – auf breiter empirischer Basis klar bestätigt werden (Hattie 2009). Der große „Hebel“, den ein gezieltes Training von Darstellungswechseln und von metakognitiven Kompetenzen auf den mathematischen Lernerfolg hat, sollte in der Schulpraxis bewusst eingesetzt werden (z. B. Winkel 2013).

Genau hier setzt das Forschungsprojekt La viDa-M (Lernen anregen mit vielfältigen Darstellungen im Mathematikunterricht, gefördert durch Forschungsmittel der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg) (s. Dreher, Winkel & Kuntze, in diesem Band) an. Im Rahmen der ersten Phase des Projekts werden u. a. Schülerkompetenzen von 675 Sechstklässlern (aus 10 Gymnasien) beim Umgang mit vielfältigen Darstellungen von Brüchen sowie beim Argumentieren und Reflektieren über diese Darstellungen mehrebenenanalytisch untersucht (s. a. Dreher, Kuntze & Winkel, in diesem Band). Komplementär zur Testauswertung standen auch Validierungsfragen im Vordergrund. Die nachfolgenden exemplarischen Ausführungen fokussieren daher auf die folgende Forschungsfrage: *Wie zeigen sich die Kompetenzen Darstellen und Argumentieren in schriftlichen Schülerlösungen und welche Rolle spielt Metakognition bei gezielten Darstellungswechseln?*

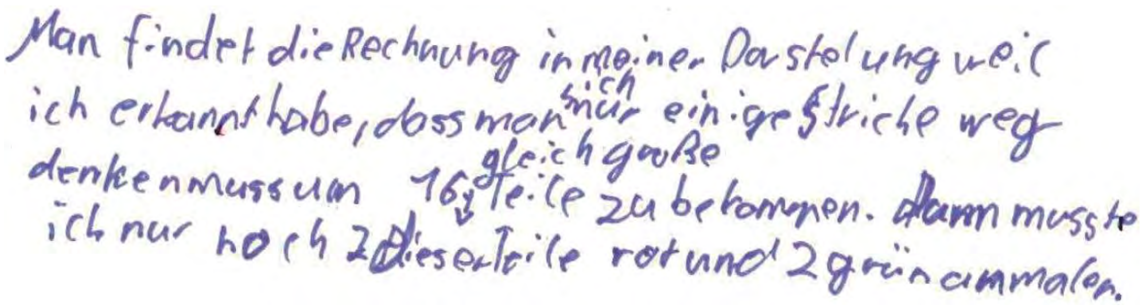
Im Folgenden wird hierzu ein qualitativ-interpretativer Einblick in die Lösung eines Schülers gegeben:

Eine Aufgabe im Kompetenztest für die Schüler war es, im nebenstehenden Quadrat zunähst mit zwei farbigen Stiften so viele Teile auszumalen, dass „ $\frac{2}{16}+\frac{2}{16}$ “ dargestellt wird, und anschließend die Zusammenhänge zwischen ihrer eigenen ikonischen Darstellung und der gegebenen formalen Darstellung zu erläutern.





Die Teilflächen, die der Schüler in der nebenstehenden grafischen Darstellung farbig auswählt, entsprechen zusammen mit der vorgegebenen Einteilung des Gesamtquadrats zunächst noch nicht den geforderten Sechzehnteln aus der formalen Darstellung. Der Schüler erkennt das offenbar und passt seine grafische Darstellung genau an die formale Darstellung $\frac{2}{16}+\frac{2}{16}$ an: Aus $\frac{1}{8}$ macht er durch Hinzufügen einer neuen Unterteilungslinie in der grünen Fläche $\frac{2}{16}$ und aus $\frac{2}{32}$ macht er durch kräftiges Übermalen einer bestehenden Linie das zweite Sechzehntel seiner roten Fläche. Bereits ohne eine verbale Äußerung des Schülers werden erste Rückschlüsse auf seine guten Kompetenzen im Bereich des Darstellens von Brüchen möglich.


Man findet die Rechnung in meiner Darstelung weil ich erkannt habe, dass man sich nur einige Striche weg denken muss um 16 gleich große Teile zu bekommen. dann musste ich nur noch 2 dieser Teile rot und 2 grün anmalen.

Die anschließende Erklärung erfordert keine neuen inhaltsspezifischen Kompetenzen vom Schüler, sondern zielt lediglich darauf ab, dass der Schüler Überlegungen und Argumentationen über Zusammenhänge zwischen den beiden Darstellungen darlegt. Nicht nur in dieser Schülerlösung, sondern in fast allen erfolgreichen Schülerlösungen fällt auf, dass dabei häufig metakognitive Aktivitäten mit im Spiel sind. An der zuvor zitierten Schülerargumentation lässt sich das gut veranschaulichen, indem in die metakognitiven Aktivitäten Planung, Monitoring und Reflexion (in Anlehnung an Cohors-Fresenborg & Kaune 2007) farblich hevorgehoben werden:

> „Man findet die Rechnung in meiner Darstellung, weil ich erkannt habe, dass man sich nur einige Striche weg denken muss um 16 gleich große Teile zu bekommen. Dann musste ich nur noch 2 dieser Teile rot und 2 grün anmalen.“

Im Begründungsteil seiner Aussage reflektiert der Schüler über das, was er bei seiner zuvor durchgeführten Anpassung der Unterteilungen in der grafischen Darstellung „erkannt“ hat. Seine Schreibweise mit dem (offenbar nachträglich) eingeschobenen „gleich große“ lässt vermuten, dass er sich beim Argumentieren oder beim Notieren selbst überwacht hat. Metakognitive Aktivitäten wie Reflektieren scheinen nützlich, um die Gemeinsamkeiten zwischen zwei konkreten Darstellungen zu abstrahieren. Guckt ein

Schüler sich beim Lösen der Aufgabe zudem „selbst über die Schulter", entspricht das einer Monitoring-Aktivität. Sie hilft ihm, Fehler, Unstimmigkeiten oder Ungenauigkeiten in seiner „Übersetzung" oder seiner Argumentation zu finden.

Die hier vorgestellte Aufgabe wurde insgesamt von weniger als 10% der 675 Gymnasiasten aus Klasse 6 vollständig gelöst. Damit zählt diese Aufgabe zu den schwierigsten Aufgaben des Kompetenztests. Als schwierigkeitsgenerierende Faktoren für die in der Aufgabe geforderten Darstellungswechsel und Erklärungen konnten in der qualitativen Analyse von Antworten der Lernenden das Darstellen, das Argumentieren und die dabei erforderliche Nutzung von Metakognition bestätigt werden.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16, 183–198.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Hattie, J. (2009). Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement. New York: Routledge.

Kuhnke, K. (2011). Vorgehensweisen von Zweitklässlern beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen von Zahlen und Operationen. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 503-506.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. [10.01.2013, http://www.kmk.org/].

Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. ZDM Mathematics Education 2/2010, S. 149-161.

Sjuts, J. (2002). Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. Eine Fallstudie zur Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Journal für Mathematikdidaktik 2/2002, S. 106-128.

Rau, M., Aleven, V. & Rummel, N. (2009). I Intelligent Tutoring Systems with Multiple Representations and Self-Explanation Prompts Support Learning of Fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi, & B. du Boulay (Eds.), Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education (pp. 441-448). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Winkel (2012). Entwicklungsmechanismen von Metakognition im mathematischen Unterrichtsdiskurs der Grundschule. Ein designbasierter Unterrichtsversuch über vier Schuljahre. München: Dissertationsverlag Dr. Hut.

Winkel (2013, im Druck). Darstellungswechsel trainieren von Anfang an – Ein Schlüssel zum Verstehen von Mathematik. Erscheint in: Grundschulunterricht Mathematik 3/2013, 30-33.

Kathrin WINTER, Münster

Diagnostisches Potential von Online-Self-Assessments - Möglichkeiten und Umsetzung

Abstract

Das Angebot internetbasierter Self-Assessments zu verschiedenen Themenbereichen der Mathematik und für verschiedene Zielgruppen nimmt stetig zu: Self-Assessments für Schüler, Studienanfänger, Berufseinsteiger etc. Prinzipiell sollen viele davon konkrete Rückmeldungen über die eigenen mathematischen Kompetenzen geben, liefern häufig jedoch nur Lösungsquoten ohne Bezugnahme auf inhaltliche Aspekte. Im Rahmen dieses Beitrags wird das Prinzip des diagnostischen Potentials mathematischer Testitems vorgestellt und aufgezeigt, welche Möglichkeiten dieses bietet und wie diese aktuell umgesetzt werden.

1 Einleitung

Der Stellenwert des Internets steigt auch im Bereich der schulischen und der beruflichen Ausbildung. Auf immer mehr Internetplattformen werden insbesondere Schülern allgemeinbildender Schulen sowie deren Lehrkräften und Eltern Möglichkeiten zur Diagnose und Förderung in verschiedenen mathematischen Bereichen angeboten.

Tests, die im Internet durchgeführt und direkt online ausgewertet werden können, werden auch als „Online-Tests", „Online-Assessments" oder „e-Assessments" bezeichnet. Online- oder e-Assessments werden häufig verwendet, um Probanden zu testen, ob bzw. inwieweit sie über die für bestimmte Zielsetzungen (wie z. B. Berufe oder Studiengänge) vorausgesetzten Kompetenzen verfügen (vgl. www.mathe-meister.de 2011). Diese Verfahren müssen allerdings gegen solche Testverfahren abgegrenzt werden, die der Verifizierung des Lernerfolgs dienen, d. h. solche, die den Erfolg nach Abschluss bspw. von Lerneinheiten feststellen. Diese Testverfahren werden nachfolgend in Anlehnung an Schaffert unter dem Begriff „computergestützte Prüfungen" gefasst (vgl. Schaffert 2004, S. 4ff).

Internetbasierte Selbsttests, die vorrangig der Überprüfung der eigenen Kompetenzen dienen, z.B. als Zugangsvoraussetzung für bestimmte Berufsfelder oder Studiengänge, und die *online bearbeitet* und *online ausgewertet* werden, werden nachfolgend unter den Termini „Online-Selbsttests" bzw. „Online-Self-Assessments" gefasst. Analog zu „online" seien die Begriffe „internetbasiert" bzw. „onlinebasiert" genannt. Diese Tests sind es, die im Rahmen dieses und der Beiträge von Sauer und Neugebauer von Interesse sind (vgl. Sauer 2013, Neugebauer 2013).

Online-Self-Assessments sollen theoretisch diagnostisch aussagekräftige Rückmeldungen zum Leistungsstand der sich testenden Person geben. Sind Online-Self-Assessments theoretisch so konstruiert, dass sie die Möglichkeit für eine solche Diagnostik bieten, fasse ich diese unter dem Begriff *diagnostisches Potential* zusammen. In diesem Beitrag werden bestehende Mathematik Online-Self-Assessments für unterschiedliche Zielgruppen hinsichtlich ihres diagnostischen Potentials analysiert, das diese theoretisch beinhalten und praktisch nutzen oder nicht nutzen. Dabei setzt sich das diagnostische Potential eines Tests aus dem diagnostischen Potential der einzelnen Items zusammen. Für ein einzelnes Item ist das diagnostische Potential wie folgt definiert: „Das diagnostische Potential eines Items insgesamt oder der dazugehörigen Distraktoren im Einzelnen beschreibt, ob es geeignet ist, auf Basis dieses Items bzw. der Distraktoren detaillierte diagnostische […] Aussagen zu den Kompetenzen einer Person bzgl. des durch dieses Item repräsentierten Anforderungsprofils zu ermöglichen.“ (Winter 2011, S. 227)

2 Diagnostisches Potential: Theoretische Möglichkeiten und praktische Umsetzung

Hinsichtlich des diagnostischen Potentials sowie fehleranalytischer Aspekte werden die Selbsttestportale daraufhin analysiert, in welchem Rahmen fehleranalytische Rückmeldungen erfolgen. Neben dieser konkret-praktischen Ebene wird untersucht, welches diagnostische Potential gegebene Antwortformate *theoretisch* bieten würden. Hierzu werden u. a. Kenntnisse aus bereits bestehenden fehleranalytischen Untersuchungen der Mathematikdidaktik (und Psychologie) herangezogen, auf die im Detail bei Winter (2011, S. 34ff) eingegangen wird. Es wird bspw. bei der Analyse berücksichtigt, inwiefern gegebene Antwortauswahlen auf typische Fehlermuster zurückzuführen sind oder sich aus der Logik der Fehleranalyse herleiten lassen. Nachfolgend wird dies an einem Item eines Mathematik-Online-Self-Assessments der FH Jena exemplarisch erörtert.

Bei einigen Aufgaben des Tests der FH Jena können mögliche typische Fehler unter den Item-Distraktoren identifiziert werden. Theoretisch ist also ein diagnostisches Potential in eingeschränktem Maße vorhanden. So sind zum Beispiel bei Aufgabe 6 als mögliche Lösungen der Gleichung $(w^2-9)\cdot w=0$ drei Antwortvorgaben gegeben, die sich im Rahmen einer rationalen Aufgabenanalyse als potentielle Fehlermuster identifizieren lassen. Die korrekt angegebene Lösung $w = 0 \vee w = \pm 3$ könnte bspw. durch dieses Lösungsverfahren ermittelt werden:

$$(w^2-9)\cdot w=0$$
$$w_1=0 \quad \vee \quad w^2-9=0$$
$$w_1=0 \quad \vee \quad w_{2/3}=0\pm\sqrt{(0)^2+9}$$
$$w_1=0 \quad \vee \quad w_{2/3}=\pm 3$$

Das diagnostische Potential der drei fehlerhaften Antwortvorgaben lässt sich fehleranalytisch wie folgt ableiten:

- (1) $w = 0 \vee w = 3$ oder (2) $w = 0 \vee w = -3$: Diese Lösungen könnten angekreuzt werden, wenn der Proband das Lösungsverfahren (s. o.) korrekt aber nicht vollständig anwenden würde. Dieses Vorgehen lässt sich z. B. auf ein ungenügendes Wurzelverständnis zurückführen.
- (3) $w = 0, w = 9$: Diese Lösung könnte durch das Separieren der in der vorgegebenen Gleichung enthaltenen konkreten Zahlen erlangt werden, was zum Beispiel durch eine Nichtkenntnis des anzuwendenden Lösungsverfahrens hervorgerufen werden könnte. Der Proband könnte in diesem Fall einfach die angegebenen, konkreten Zahlen als Lösungen der Gleichung übernehmen (vgl. u. a. Weimer 1929, Gerster 1982, Padberg 2009, zusammengefasst bei Winter 2011, S. 46, Tabelle 4).

3 Zusammenfassung

Die vorgestellten internetbasierten Selbsttests zur Mathematik weisen weder eine Fehleranalyse noch konkrete diagnostische Hinweise zu den defizitären Bereichen auf. Die hier exemplarisch erörterten Selbsttests stehen stellvertretend für die meisten frei über das Internet zugänglichen, deutschsprachigen Mathematik-Selbsttests mit internetbasiertes Auswertung der Testergebnisse. Die Analyse der in den verschiedenen Portalen aufgeführten Antwortauswahlen zeigt jedoch, dass zumindest teilweise bei einigen Aufgaben und Antworten theoretisch ein diagnostisches Potential vorhanden ist, welches im Sinne einer konkreteren Defizitanalyse und sogar Fehleranalyse genutzt werden könnte.

Eine ausführliche Vorstellung der Programm-Analysen u. a. mit Betrachtung der Zielgruppenorientierung, Aufgabenformate und Feedbacks sowie umfassender Itemanalysen zum diagnostischen Potential findet sich bei Winter (2013).

Literatur

Davis, R. B., Jockusch, E., McKnight, C. C. (1978): Cognitive Processes in Learning Algebra. In: Journal of Children's Mathematical Behaviour, Vol. 2 (1), S. 10-320.

Gerster, H.-D. (1982): Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Herder, Freiburg, Basel, Wien.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden.

Neugebauer, Ch. (2013): Mathematische Kompetenzen in Online-Self- Assessments – Grundlagen oder spezifische Anforderungen? In diesem Band.

Sauer, K. (2013): Online-Self-Assessments für Studieninteressierte – Ein strukturierter Vergleich. In diesem Band.

Scitec.fh-jena.de (2009): Selbsttest Mathematik: Interaktiver Online-Mathe-Test. Quelle: http://www.scitec.fh-jena.de/de/fachbereich /mathetest, Copyright Fachbereich SciTec der FH Jena, Letzte Aktualisierung der Site 16.11.2006, Letzter Aufruf: 13.01.2013.

Weimer, H. (1929): Psychologie der Fehler. Leipzig.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse – Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. Münster, WTM-Verlag.

Winter (2013): Online-Self-Assessments zur Mathematik: Zielgruppen, Aufgabentypen und diagnostisches Potential. In: Stein, M.: Mathematik Online. WTM-Verlag, Münster.

Erich Ch. WITTMANN, Dortmund

Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art

Heinrich Winter in Freundschaft gewidmet

In einer Stellungnahme zu einer Kritik des Autors an den VERA-Tests haben Kristina Reiss u.a. festgestellt: "Herr Wittmann vertritt eine Richtung, von der sich weite Teile der deutschen Mathematikdidaktik verabschiedet haben." In dieser Aussage wird eine Überlegenheit der „empirischen Wende“ der Mathematikdidaktik postuliert, für die es nach Auffassung des Autors keinen sachlichen Grund gibt: Anknüpfend an die „Stoffdidaktik“ hat sich in den letzten Jahrzehnten eine „Mathematikdidaktik vom Fach aus“ entwickelt, von der die Unterrichtsentwicklung und die Lehrerbildung weiterhin getragen werden. Das Projekt „mathe 2000“ ist hierfür ein Beispiel (WITTMANN 2012). Diese „Mathematikdidaktik vom Fach aus“ ist keineswegs eine „Didaktik am grünen Tisch“, wie von der traditionellen Stoffdidaktik mit einem gewissen Recht behauptet werden konnte, sondern ist auf eigene Weise empirisch untermauert. Dies soll im vorliegenden Beitrag gezeigt werden: In den drei ersten Abschnitten wird an zentralen Themen der Grundschuldidaktik die Leistungsfähigkeit der heute vorherrschenden, auf importierten Theorien und Methoden beruhenden Richtung mit der Leistungsfähigkeit der mathematisch fundierten Richtung der Mathematikdidaktik verglichen. Im vierten Abschnitt wird die *strukturgenetische didaktische Analyse* beschrieben, die sich als Forschungsmethode der mathematisch fundierten Mathematikdidaktik herausgebildet hat.

1. Einführung der Multiplikation

In der angelsächsischen Didaktik ist das Erlernen des Einmaleins Malreihe für Malreihe tief verankert. Die Multiplikation wird dort sogar als „repeated addition“ definiert. In den letzten Jahren hat in England und den USA eine intensive Diskussion darüber stattgefunden, was die Multiplikation wirklich ist. In diesen Kontext gehört die empirische Untersuchung von PARK & NUNES (2001), in der zwei Hypothesen der Begriffsbildung bei der Multiplikation verglichen wurden: die Begründung der Multiplikation als „repeated addition“ bzw. als „schema of correspondences“. Als Ergebnis wird festgestellt, dass auf „repeated addition“ nur als Rechenverfahren, nicht als Grundlage der Multiplikation zurückgegriffen werden sollte.

Aus der Sicht der Mathematikdidaktik vom Fach aus stellt sich die Situation wie folgt dar: In seiner operativen Rechendidaktik definierte Arnold

Fricke die Multiplikation zwar als verkürzte Addition. Die Berechnung der Einmaleinsergebnisse erfolgte aber nicht als „repeated addition“, sondern mit Hilfe der Rechengesetze ausgehend von den leichten Kernaufgaben (FRICKE 1970). Bei seiner Forderung nach „algebraischer Durchdringung der Arithmetik“ hat Heinrich Winter den Vorschlag gemacht, die Multiplikation auf rechteckige Punktfelder zu gründen (WINTER 1984). Dies führte zu einem weiteren signifikanten Fortschritt, da sich mit Punktfeldern *alle* Rechengesetze der Multiplikation operativ begründen lassen.

Folgerung aus dem Vergleich: Was die Multiplikation ist und wie sie im Unterricht behandelt werden soll, kann nicht mit den empirischen Methoden der Psychologie entschieden werden, sondern nur vom Fach aus.

2. Die Hundertertafel

Die Hundertertafel ist ein seit Jahrhunderten bewährtes Darstellungsmittel der Zahlen von 1 bis 100. Daher ist es überraschend, dass sie und Unterrichtswerke, in denen sie verwendet wird, in jüngster Zeit kritisiert werden. Die Kritik geht von den angeblich durch die Kognitionspsychologie und Hirnforschung empirisch belegten Behauptungen aus, die Zahlen seien im Gehirn als Längen repräsentiert, der kardinale Aspekt sei neben dem ordinalen Aspekt zu vernachlässigen und Addition und Subtraktion seien mit dem Vor- und Zurückrücken auf der Zahlenreihe zu identifizieren (LORENZ 2005). Es ist offenkundig, dass die Hundertertafel nicht in dieses Konzept passt. Dies spricht aber keineswegs gegen dieses Darstellungsmittel. In WITTMANN & MÜLLER 2012 (S. 20 - 21) wird die Hundertertafel in Verbindung mit dem Hunderterfeld in mathematisch wohl begründeter Weise benutzt um das *Stellenwertprinzip* zu untermauern und die Oehlsche Balken- /Punktdarstellung für Zehner und Einer herzuleiten, die für die „algebraische“ Begründung der Addition und Subtraktion tragend ist. Im Tausenderraum dienen Tausenderbuch und Tausenderfeld analog dazu, um den Hunderter als weitere Zahleneinheit darzustellen und zu Zehnern und Einern in Beziehung zu setzen. Die Hundertertafel und das Tausenderbuch sind darüber hinaus auch optimal geeignet um die Menge der Zahlen von 1 bis 100 bzw. von 1 bis 1000 übersichtlich darzustellen und um zahlentheoretisch wichtige Beziehungen zwischen Zahlen zu verdeutlichen.

Folgerungen aus dem Vergleich: Ob die Hundertertafel in einem didaktischen Konzept sinnvoll ist oder nicht, kann nur unter Berücksichtigung der Struktur des Faches entschieden werden. Die Reduktion des Zahlbegriffs auf den ordinalen Aspekt steht im eklatanten Widerspruch zur mathematischen Praxis und stellt didaktische Konzepte, die darauf setzen, in Frage.

3. Design einer Lernumgebung zur produktiven Übung der Addition

Bei den beiden ersten Beispielen ging es nur um begriffliche Bausteine für das Lehren und Lernen bestimmter Themen. Das dritte Beispiel führt mitten in den Kernbereich der Didaktik. Der natürliche Weg um Lernende zum Erwerb mathematischen Wissens und mathematischer Fähigkeiten anzuleiten besteht darin, ihnen substanzielle Lernumgebungen anzubieten, in denen sie mathematisch aktiv werden können. Das Üben spielt dabei eine Schlüsselrolle. Heinrich Winter ist das Konzept des „produktiven Übens" zu verdanken, das die gleichzeitige Förderung inhaltlicher und allgemeiner Lernziele („Kompetenzen") beinhaltet (WINTER 1984).

Bei der Neubearbeitung eines Unterrichtswerks stellte sich die Aufgabe eine substanzielle Lernumgebung zur produktiven Übung der schriftlichen Addition zu konstruieren. Es ist a priori klar, dass dabei importierte Theorien und Methoden völlig versagen. Man kommt nur zu einer Lösung, wenn man sich an das Fach hält. Für die Entwicklung der Lernumgebung (s. WITTMANN & MÜLLER 2012, S. 85, 120-121) musste die Elementarmathematik nach Mustern durchforstet werden, die bei der schriftlichen Addition auftreten. Dann war zu prüfen, ob die Voraussetzungen der Kinder am Ende des 3. Schuljahrs ausreichen um die intendierte Aufgabenstellung zu verstehen, die angeregten Operationen auszuführen, die zu beobachtenden Muster zu erkennen, zu beschreiben und mit Hilfe der Lehrperson anhand vertrauter Arbeitsmittel zu begründen. Schließlich war die Lernumgebung auch noch curricular einzuordnen.

4. Die strukturgenetische didaktische Analyse

Die bei den Beispielen angewandte Forschungsmethode ist eine Weiterentwicklung der Stoffdidaktik. Da sie sich anders als die traditionelle Stoffdidaktik nicht auf die logische Analyse des Stoffes beschränkt, sondern ausdrücklich auch *Prozesse* einbezieht, möchte ich sie als *strukturgenetische didaktische Analyse* bezeichnen. Die Beispiele zeigen, dass sich diese Methode an Fakten hält: an die mathematische Praxis bei der Erforschung, Beschreibung und Begründung von Mustern, an die Lernvoraussetzungen der Kinder, an die Zielsetzungen des Unterrichts und an das Curriculum. Das alles ist *empirisches Material*. Daher ist die strukturgenetische Analyse eine *empirische* Methode. Sie darf wegen ihrer Ursprünglichkeit mit Recht als empirische Forschung *„erster Art"* bezeichnet werden. Zu behaupten, nur die üblichen empirischen Forschungen, die ich als empirische Forschungen „zweiter Art" bezeichne, würden „empirisch abgesicherte Modelle" für das Lehren und Lernen liefern, zeugt von Unkenntnis der wahren Verhältnisse.

Strukturgenetische didaktische Analysen sind aus folgenden Gründen für die Mathematikdidaktik von primärer Bedeutung und daher unverzichtbar:

- Sie gründen auf der *mathematischen Praxis* der jeweiligen Stufe.
- Sie fördern ein aktives Verhältnis zum *lebendigen Fach.*
- Sie sind *konstruktiv*.
- Sie sind *für das Unterrichten handlungsleitend*, da sie die im Fach „eingefrorenen didaktischen Momente“ (HEINTEL 1978), d.h. die im wohlverstandenen Fach enthaltene *natürliche Theorie des Lehrens und Lernens*, zur Geltung bringen.
- Ihre Ergebnisse sind in der Lehrerbildung im Gegensatz zu vielen Ergebnissen der „Forschungsdidaktik“ *in verständlicher Weise kommunizierbar*. Die Rückmeldungen aus der Praxis sprechen hier eine deutliche Sprache.

Als Musterbeispiele strukturgenetischer didaktischer Analysen sind WHEELER 1963, FREUDENTHAL 1983 und das Gesamtwerk von Heinrich Winter, insbesondere WINTER 1987, zu nennen. An ihnen muss sich die Mathematikdidaktik orientieren um nicht weiter in ein von der Praxis entferntes selbstreferentielles System zu degenerieren.

Literatur

Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel

Fricke, A. (1968): Operative Lernprinzipien. In: Fricke, A. & Besuden, H. (1970): Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart: Klett, 79 - 116

Heintel, P. (1978): Modellbildung in der Fachdidaktik. Klagenfurt: Carinthia

Lorenz, J.H. (2009): Grundlagen der Förderung und Therapie. In: von Aster, M. & Lorenz. J.H. (Hg.): Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht, 165 - 177

Park, J.H., Nunes, T. (2001): The Development of the Concept of Multiplication. Cognitive Development 16, 763 – 773

Wheeler, D. (ed.) (1967): Notes on Primary Mathematics. London: CUP (deutsch: Modelle für den Mathematikunterricht der Grundschule. Stuttgart: Klett 1970)

Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens. mathematik lehren H.2, 4 – 11

Winter, H. (1987): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Vieweg

Wittmann, E.Ch. (2012): Das Projekt „mathe 2000“: Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In: Müller, G.N., Selter, Ch. & Wittmann, E.Ch. (Hg.): Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben. Stuttgart: Klett, 263 – 279

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2012): Das Zahlenbuch, Band 2. Stuttgart: Klett

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2013): Das Zahlenbuch, Band 3. Stuttgart: Klett

Ingo WITZKE, Siegen

Zur Übergangsproblematik im Fach Mathematik.

Eine Auswertung von Einschätzungen Lehramtsstudierender der Universität zu Köln und der Universität Siegen lässt die Vermutung zu, dass der Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik im Rahmen eines fundamentalen Auffassungswechsels erlebt wird. Im folgenden Beitrag werden erste Ergebnisse der Auswertung offener Fragebögen, theoretische Grundlagen sowie eine daraus resultierende Konzeption einer mathematikdidaktischen Begleitveranstaltung vorgestellt.

1. Motivation: Fragebögen

Anschließend an eine Auswertung von offenen Fragebögen an der Universität zu Köln im vergangenen Jahr wurden zu Beginn diesen Jahres auch Studierende der Universität Siegen bzgl. ihrer retrospektiven Sicht auf den gemeinhin als schwierig bezeichneten Übergang (vgl. Henn et al. 2010) von der Schule in die Hochschule im Fach Mathematik befragt.

Auch wenn die Ergebnisse einer systematischen Inhaltsanalyse noch ausstehen, zeigt eine erste Durchsicht ein ähnliches Bild wie in Köln: Die Problematik des Übergangs - es wurden ca. 120 Lehramtsstudierende mit dem Hauptfach Mathematik befragt - wird zu einem nicht unbedeutenden Teil im Sinne einer „Andersartigkeit“ von Hochschulmathematik im Vergleich zur Schulmathematik beschrieben. Diese Andersartigkeit wird von den Studierenden exemplifiziert an Begriffen wie *Anschaulichkeit*, *Anwendungsbezug*, *Alltagsbezug*, *Realitätsnähe*, *Beweisführung*, *formaler Strenge* oder *axiomatischem Aufbau*.

Als ein vorläufiges Resultat der Befragung - unter Heranziehung von Forschungsarbeiten die Ähnliches beschreiben (u.a. Grünwald et al. 2004, Hefendehl-Hebeker 2010, Heinze & Rach 2013) - lässt sich festhalten, dass Studierende klar zwischen Schule und Hochschule bzgl. der vermittelten *Auffassungen von Mathematik* unterscheiden. Schoenfeld spricht in diesem Zusammenhang von *orientations, worldviews, dispositions*, *beliefs*, *values, tastes*, *preferences* und dem Begriff des *beliefsystems* (Schoenfeld 2011, S. 29) die wesentlich unser Handeln (gerade in mathematischen) Problemlösesituationen determinieren. Ausgangspunkt für die weitere Forschungsarbeit zur Thematik der Übergangsproblematik ist daher die Rekonstruktion und Gegenüberstellung von in Schule und Hochschule vermittelten Auffassungen von Mathematik aus Schulbüchern, Lehrbüchern und Skripten - unter der Prämisse eines konstruktivistischen Erkenntnismodells für mathematisches Wissen nach Heinrich Bauersfeld.

2. Verschiedene Mathematikauffassungen in Schule und Hochschule

Autoren einschlägiger Lehrbücher von Anfängervorlesungen lassen explizit (d.h. in Motivationskapiteln) sowie implizit (d.h. in der Darstellungsweise mathematischer Inhalte) häufig erkennen, dass sie eine *formale Mathematikauffassung* zu vermitteln suchen, die sich ideengeschichtlich an der formalistischen Mathematikauffassung von David Hilbert orientiert. So heißt es darin z. B., dass „[…] man all das zunächst als unnatürlich, unmenschlich und unvollziehbar [empfindet] was die Mathematik ausmacht“ was im Sinne einer „Helle und Schärfe der Begriffsbildung“, „Strenge der Beweise“ oder „abstrakten Natur der mathematischen Objekte“ näher beschrieben wird (Heuser 2009, 17. Aufl., S. 12).

Ganz anders stellt sich die Situation in Schulbüchern dar. Hier wird in weiten Teilen, gerade auch im Sinne der didaktischen Forderungen nach realitätsnahen Anwendungsbezügen, sowie des Arbeitens mit Anschauungsmitteln, eine *empirisch-gegenständliche Auffassung* von Mathematik vermittelt (Burscheid & Struve 2010). Diese zeichnet sich dadurch aus, dass Mathematik in der Schule in weiten Teilen reale Gegenstandsbereiche beschreibt (reale Zufallsexperimente in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bruchrechnung mit „Tortenmodellen“, Geometrie mit Zeichenblattfiguren, Analytische Geometrie mit „Vektorpfeilen“, Analysis mit Kurven…) und ihr Wahrheitsbegriff dadurch an gegenständlicher Überprüfbarkeit (in der Empirie) ausgerichtet ist. Der Prozess des Begründens ist bezogen auf eine *empirisch-gegenständliche Auffassung* von Mathematik dabei ein zweischrittiger: Während die Wissenssicherung (d.h. dass ein Sachverhalt gilt) häufig beispielgebunden und experimentell erfolgt, werden erst zum Zweck der Wissenserklärung (d.h. warum ein Sachverhalt gilt) logische Ableitungen verwendet. Dieses durch die ontologische Bindung der schulischen Mathematik bedingte Vorgehen unterscheidet sich wesentlich von der Art und Weise des Begründens in Hochschultexten, wo letztendlich ausschließlich formal-deduktive Ableitungen den strengen Beweiskriterien einer modernen Mathematik über abstrakte Entitäten genügen können.

Beide Auffassungen von Mathematik, *empirisch-gegenständliche* wie *formal-mathematische* unterscheiden sich - bei ihnen beiden innenwohnenden gleichen *Tätigkeiten* (Arbeit mit mentalen Repräsentationen, deduktives Schließen, Umgang mit einem symbolischem Kalkül…) - erheblich voneinander bzgl. der Natur ihrer Objekte, Begriffe oder ihres Wahrheitsbegriffes. Historische Fallstudien zur Entstehung mathematischen Wissens sowie der Vergleich mit klassischen Wegen zur Erkenntnisgewinnung in den Naturwissenschaften können in diesem Zusammenhang belegen (Witzke 2009), dass eine *empirisch-gegenständliche Mathematikauffassung,* vermittelt im *erklärenden* anschauungsgeleiteten Mathematikunterricht, eine tragfähige Grundlage für die Entwicklung mathematischen Wissens in der Schule darstellt (Witzke 2012). In Hinblick auf die Ausbildung typischer mathematischer *Tätigkeiten* kann sie zudem als ein wichtiges Fundament für weiterführende Konstruktion mathematischen Wissens im abstrakten *formal-mathematischen* Sinne in der Hochschule dienen.

Essenz der vorgestellten Überlegungen stellt aber die These dar, dass sich Schul- und Hochschulmathematik, begründet in ihren unterschiedlichen Zielsetzungen, bzgl. der vermittelten Auffassungen fundamental voneinander unterscheiden. Hier erscheint der von Sierpinska geprägte Begriff der epistemologischen Hürde eine den Sachverhalt treffende Beschreibung zu liefern (Sierpinska 1992).

3. Konzeption für eine mathematikdidaktische Begleitveranstaltung

Die beschriebene theoretische Grundlage ist ein Ausgangspunkt für die Konzeption einer mathematikdidaktischen Lehrveranstaltung, die begleitend zur fachmathematischen Lehramtsausbildung in Köln angedacht ist und Impulse des Siegener Projektes „Mathematik Neu Denken" aufnimmt. Ihr erklärtes Ziel ist eine explizite Bewusstmachung von Auffassungsunterschieden in ihrer erkenntnistheoretischen Dimension. Der Ansatz baut dabei auf den guten Erfahrungen mit expliziten Ansätzen diese Thematik betreffend aus den Naturwissenschaftsdidaktiken („Nature of Science") sowie mathematikdidaktischen Ansätzen zu Metakognition und Reflektion auf. Ziel ist es Transparenz über Auffassungsunterschiede herzustellen, v. a. durch eine Untersuchung mathematischer Fragestellungen an denen sich der oben angedeutete Auffassungswechsel in der Geschichte der Mathematik vollzogen hat. Da sich die Veranstaltung ausdrücklich an Lehramtsstudierende richtet, ist mit Blick auf ihr Berufsziel zudem die Adäquatheit verschiedener Auffassungen in verschiedenen Kontexten zu diskutieren.

Konkret unterteilt sich die Lehrveranstaltung dabei in vier Phasen: (I) *Sensibilisierung für die Frage nach Auffassungen von Mathematik*, durch A) Selbstreflektion/Diskussion, B) Arbeit mit empirischem Datenmaterial und theoretisch einordnenden Ansätzen sowie C) Gegenüberstellung von Methodenkapiteln und Inhalten von Lehrbüchern aus Schule, Hochschule und Geschichte der Mathematik. In Phase (II) folgt dann die *historische Einbettung am Fallbeispiel der Entwicklung der Geometrie* von Euklid über die projektiven Geometrien hin zu den nicht-euklidischen Geometrien und der damit einhergehenden Frage um die Grundlagen von Mathematik. In Phase (III) ist eine Diskussion über den *Charakter moderner formaler Mathematik* am Fallbeispiel der Grundlagen der Geometrie von Hilbert geplant. Dazu gehören die Entwicklungsumstände wie das Werk selber; hier kann gewinnbringend diskutiert werden, was es bedeutet wenn Hilbert ansetzt „Wir denken drei Systeme von Dingen“ oder „Zwischen“ als dreistellige Relation axiomatisch definiert. In der abschließenden Phase (IV) *Reflektion und Zusammenfassung* sollen dann Zielsetzung, Aufgabe und Charakter moderner formaler Mathematik aus verschiedenen Blickwinkeln besprochen werden. Hierbei soll mit Hilfe von wissenschaftstheoretischen und -philosophischen (z.B. Davis et al. 1995) sowie modernen Lehrbüchern eine kritische Auseinandersetzung z. B. über die Rolle der Anschauung im modernen mathematischen Arbeiten ermöglicht werden.

Insgesamt zeichnet den hier geschilderten Ansatz aus, dass er die Problematik des Übergangs als epistemologische Hürde erkennen, verstehen und einordnen lassen will. Das Begleitseminar kann, so die Quintessenz aus den theoretischen Überlegungen, den Übergang in sich nicht erleichtern; die sich stellende Auffassungshürde liegt in der Natur der Sache. Es kann aber, so die Hoffnung der Verantwortlichen, eine Hilfestellung durch Identifikation, Verständnis und Diskussion bieten.

Literatur

Davis, P., Hersh, R., Marchiotto, E., (1995): The Mathematical Experience, Study Edition, Boston: Birkhäuser.

Grünwald, N., Kossow, A., Sauerbier, G. , & Klymchuk, S. (2004): Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus internationaler und deutscher Sicht. Global Journal of Engineering Education, 8, 283-294.

Hefendehl-Hebeker, L., Ableitinger, C., & Herrmann, A. (2010): Mathematik Besser Verstehen, In: Beiträge zum Mathematikunterricht, I, S. 93-94.

Heinze, A., Rach, S. (2013): Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? In: Journal für Mathematik-Didaktik, 34 (1), S. 121-147.

Henn, H.-W., Bruder, R., Elschenbroich, J., Greefrath, G., Kramer, J., Pinkernell, G. (2010): Schnittstelle Schule-Hochschule, In: Beiträge zum Mathematikunterricht, I, S. 75-82.

Heuser, H. (2009): Lehrbuch der Analysis, 17. durchgesehene Auflage, Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Schoenfeld, A., (2011): How We Think, In: Studies in mathematical thinking and learning, New York: Routeledge.

Sierpinska, A., (1992): On understanding the notion of function, in G. Harel and E. Dubinsky (Hrsg.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, Mathematical Association of America, United States (MAA), S. 25-58.

Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik, Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Witzke, I. (2012): Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht?, In: Beiträge zum Mathematikunterricht, II, S. 949-952.

Bernd WOLLRING, Kassel

Rich Assessment Tasks – Aufgaben und Lernumgebungen mit weitem Differenzierungs- und Bewertungsraum

Die Diskussion von Schülerbearbeitungen (Eigenproduktionen) als Bestandteil der mathematikdidaktischen Ausbildung von Grundschullehrkräften ist in der Literatur weiträumig ausgewiesen. Meilensteine auf diesem Weg sind die Ausführungen von Selter (1994), Spiegel und Selter (1997) und Hengartner (1999). Die ersten beiden Autoren betonen einen explorativen Aspekt und legen eine differenzierte Topografie von Schülerbearbeitungen vor. Hengartner weist darüber hinaus, er beschreibt das Durchführen solcher Analysen als Element der Lehrerbildung. Hier erscheint nach Wissen des Autors erstmalig systematisch dargestellt die Rolle explorativer fachdidaktischer Diagnostik in der Lehrerbildung durch Beteiligen von Studierenden an den Analysen. Ausbildungselemente dieser Art sind derzeit in vielen Konzepten der Lehrerbildung in Mathematik zu finden. Eine zeitgemäße Ausformung findet sich etwa im Projekt KIRA.

Parallel dazu ist im Rahmen der Vergleichsarbeiten (VERA) umfangreiches Material entstanden. Die in den bundesweiten Vergleichsarbeiten verwendeten Aufgaben sind im Kompetenzmodell der KMK-Bildungsstandards nahezu eindeutig zu verorten. Neben quantitativen Rückmeldungen erscheinen auch qualitative didaktische Kommentare für die Lehrkräfte. Bislang nicht vertreten sind dagegen qualitative Rückmeldungen mit Schülerbearbeitungen zu diesen Aufgaben. Die Frage entsteht, ob Rückmeldungen zu den Aufgaben der Vergleichsarbeiten über die quantitative Struktur und die qualitativen didaktischen Kommentare hinaus so anzureichern sind, dass sie zu einem Element „handlungsleitender Diagnostik“ in der Lehrerbildung und zu einer Unterstützung für Lehrkräfte werden können.

Einen Weg dazu findet der Autor in einem Text eines australischen Autorenteams unter Leitung von Doug Clarke (Clarke et al., 2006), der Aufgaben, Eigenproduktionen und Bewertungen dazu auf eine Art und Weise referiert, welche das spezifische Aufgabendesign und die Systematik der Bewertung für Lehrkräfte derart transparent werden lässt, dass dieses Konzept sich nach Auffassung des Autors in der Lehrerbildung nicht nur als Anregung zum Aufgabendesign, sondern auch als Anregung für eine konstruktivistisch konzipierte Diagnostik bis hin zur Beurteilung eignet.

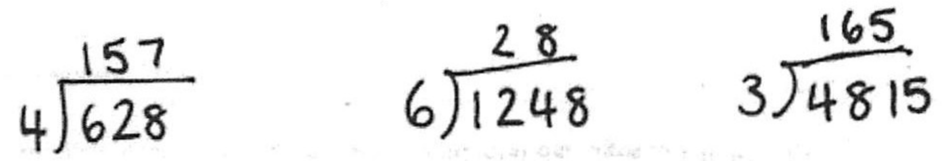
Dokumentiert sind 41 Aufgaben mit Schülerbearbeitungen, konzipiert für Schüler vom Kindergarten bis hin zur Jahrgangsstufe 9, dabei jeweils:

- Die Aufgabe für Schüler, dazu eine Bewertungsrichtlinie mit 5 aufgabenübergreifenden Bewertungsstufen, zu jeder Bewertungsstufe aufgabenspezifische Kriterien
- Schülerbearbeitungen zu jeder Aufgabe, dazu jeweils Indikatoren, die aufzeigen, in welche der fünf Bewertungsstufen die Bearbeitung fällt

Die fünf Bewertungsstufen sind für alle Aufgaben identisch und verweisen in ihrer Bezeichnung auf eine konstruktivistische Grundposition, die eine kompetenzorientierte Beurteilung anstrebt. Die Skala ist vergleichbar zu der von Reiss et al. (Reiss et al., 2006). Die Aufgaben sind so ausgelegt, dass Schülerbearbeitungen auf allen Bewertungsstufen zu erwarten sind. Solche Aufgaben bezeichnet der Autor als *„Aufgaben mit weitem Differenzierungs- und Bewertungsraum"*, ein Übersetzungsversuch der knappen Kennzeichnung *„Rich Assessment Tasks"*, den das Team von Doug Clarke verwendet. Zu jeder Aufgabe sind mehrere Schülerbearbeitungen dokumentiert, versehen mit Indikatoren, die das Einordnen der Aufgabe in eine der Bewertungsstufen begründen.

Hier wird aus Platzgründen nur ein Beispiel aus dieser Sammlung referiert, das in besonderer Weise Anliegen kompetenzorientierter Diagnostik und sozialen Lernens als Elemente von Unterrichtskultur verdeutlicht.

Hilf Bert dividieren (Helping Bert divide). *Dies sind drei Divisionen unseres Freundes Bert (notiert in seiner australischen Schreibweise):*



Dazu die Aufgabe für Schüler (der Jahrgangsstufe 6): *Bert hat Aufgaben zum Dividieren bearbeitet. 1) Ist die Antwort richtig, so hake sie ab, wenn nicht, notiere die richtige Antwort. 2) Schreibe einen Rat auf, den du Bert geben würdest. 3) Schreibe eine Frage auf, von der du meinst, dass Bert sie noch richtig beantwortet, und die Antwort dazu. 4) Schreibe einige Fragen auf, von denen du meinst, dass Bert sie falsch beantworten könnte. Notiere beides, die Antworten, die Bert vielleicht gibt, und die korrekten Antworten.*

Bewertet werden die Schülerbearbeitungen der Jahrgangsstufe 6 dazu mit folgender *Bewertungsskala (scoring rubric)*. Fett notiert sind die aufgabenübergreifenden Stufen, kursiv notiert die aufgabenspezifischen Kriterien:

1 Geringer Fortschritt. *Ein gewisses Verständnis zum „kurzen" Divisionsverfahren (schriftliche Division in der kurzen australischen Notierung).*

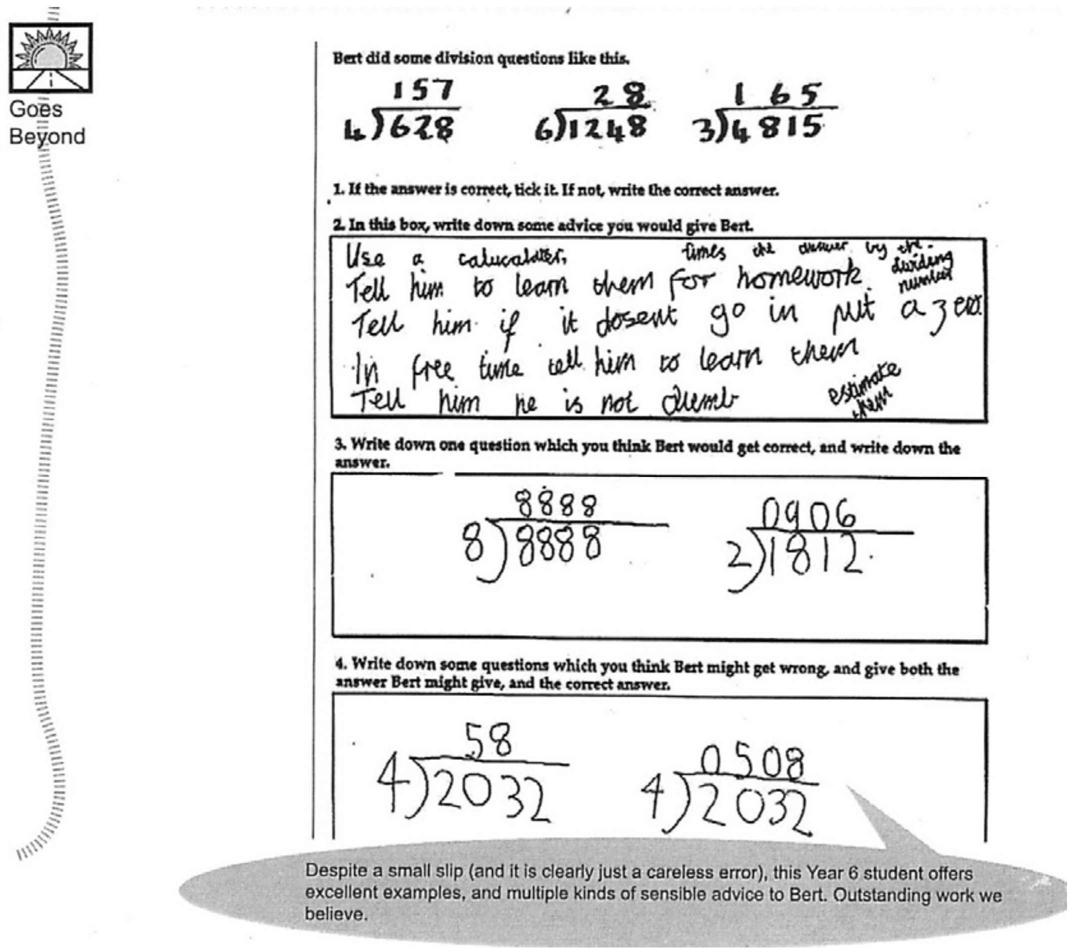
2 Deutliche Entwicklung. *Angegeben ist, welche Antworten von Bert richtig sind, aber die Hinweise sind kaum brauchbar und zeigen nur geringes Verstehen von Berts Fehlern.*

3 Substanzielle Entwicklung. *Zeigt ein Verstehen von Berts Fehlern, aber die Hinweise oder die selbst gewählten Beispiele zeigen gewisse Mängel.*

4 Aufgabe erfüllt. *Bietet sensible Hilfestellung an. Löst die Aufgaben mathematisch korrekt, wählt Beispiele, die zentrale Ideen deutlich illustrieren.*

5 Weitergeführt. *S. zeigt beachtliche Einsicht zur Division, bietet mehrere sinnvolle Ansätze, etwa Überschlagen und Multiplizieren zum Überprüfen.*

Dieses Beispiel ist von herausragender Qualität und Bedeutung. Die Aufgabe fordert vom Schüler mathematische und diagnostische Kompetenzen ein. Sie fragt nach der „kognitiven Reichweite“ der dargestellten (fiktiven oder realen) Lösung und dazu nach Impulsen zur Unterstützung.



Diese Aufgabe lässt sich unverändert auch in der Ausbildung von Studierenden einsetzen. Sie bietet einen weiten Differenzierungsspielraum: Es lassen sich „Bespiele von Bert“ aus verschiedenen Jahrgangsstufen einfügen, auch solche, die nicht nur aus der Arithmetik stammen. Dargestellt ist ein geradezu klassisches Aufgabenformat zur fachdidaktischen Diagnostik. Problematisch bleibt allerdings, schwer zu vermeiden bei diesem Aufgabenformat, dass die diagnostische Basis, aus der Folgerungen zu ziehen sind, schmal ist: Die hier verwendeten Dokumente sind eher Produktdokumente und nur schwer als Prozessdokumente wahrzunehmen. Dieses Problem ist aber mit Hilfe passender Eigenproduktionen zu beheben.

In der fachdidaktischen diagnostischen Ausbildung von Studierenden lassen sich *Rich Assessment Tasks* nach unseren bisherigen Erfahrungen erfolgreich einsetzen, wenngleich eine großräumige systematische Analyse dazu noch ansteht. Dabei kann das Zusammenspiel der Schülerbearbeitungen und des Bewertungssystems auf zwei Wegen in die fachdidaktische diagnostische Ausbildung eingebunden werden:

Top-down. Bei diesem Vorgehen werden die fünf aufgabenübergreifenden Bewertungsstufen mit den aufgabenspezifischen Kriterien vorgegeben, dazu Schülerbearbeitungen ohne Kennzeichnung der Bewertung und der Indikatoren dazu. Die Aufgabe besteht darin, die Bearbeitungen begründet zu bewerten und das Zustandekommen der Stufen und ihrer Kriterien zu reflektieren. Arbeitsziele sind hier die Sensibilisierung und der Erfahrungsgewinn im Umgehen mit gegebenen Bewertungskriterien.

Bottom-up. Bei diesem Vorgehen werden die fünf aufgabenübergreifenden Bewertungsstufen ohne die aufgabenspezifischen Kriterien vorgegeben, dazu mehrere Schülerbearbeitungen ohne Bewertung und ohne Indikatoren. Die Aufgabe besteht darin, aus und zu den Beispielen ein Bewertungssystem zu entwickeln, also aufgabenspezifische Kriterien zu den Bewertungsstufen und qualitative Indikatoren dazu in den Schülerbearbeitungen zu finden. Diese Analyse startet meist mit dem Arrangieren der Schülerbearbeitungen auf einer Mind Map. Arbeitsziel ist hier das Entwickeln und Vereinbaren eines Bewertungssystems im Konsens der Bewertenden.

Literatur

Clarke, Doug; Downton, A.; Knight, R. & Lewis, G. (2006): Mathematics Assessment for Learning: Rich Tasks and Work Samples. Mathematics Teaching and Learning Centre, Australian Catholic University (Melbourne).

Hengartner, E. (1999): Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege. Zug: Klett & Balmer 1999.

Reiss, K.; Heinze, A. & Pekrun, R. (2007): Mathematische Kompetenz und ihre Entwicklung in der Grundschule, ZfE 10, Sonderheft 8/2007, 107-127.

Selter, Ch. (1994): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

Selter, Ch., Spiegel, H. (1997): Wie Kinder rechnen. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag GmbH.

Jan F. WÖRLER, Würzburg

Modellieren von Kunstwerken: ein anderer Modellierungskreislauf

„Das male ich Ihnen auch, das kann ja jeder!“ – ein Neuntklässler, der mir eben noch geholfen hat, die Videokameras in seinem Klassenzimmer aufzubauen, zeigt sich von dem Kunstwerk vorne an der Tafel wenig beeindruckt. „Ein paar bunte Quadrate sind doch keine Kunst!“ Als ich ihm den Preis nenne, den solche Kunstwerke auf Auktionen bringen, zieht er anerkennend die Augenbrauen hoch, setzt sich zurück in seine Gruppe und beginnt zu rätseln. „Finde heraus, was sich an Mathematik in diesem Bild verbirgt“, so lautet der knappe Arbeitsauftrag, den die Lernenden zu dem Kunstwerk bekommen haben.

Kunstwerke im Mathematikunterricht analysieren?

Der Schüler hat recht: Viele Werke der ‚Konkreten Kunst‘ sehen auf den ersten Blick einfach aus; oft gibt es nur wenige, klare Farben in den Bildern dieser Kunstgattung, starke Kontraste, die als geometrische Formen auf die Bildfläche gesetzt sind (s. Wörler 2009).

Auch das zu Grunde liegende theoretische Konzept ist klar formuliert: Die Werke sollen von den Künstlern exakt vorausgeplant sein und sich dabei aus nachvollziehbaren, logischen Regeln aufbauen (van Doesburg 1930). Auf dieser Basis verarbeiten Künstlerinnen und Künstler bis heute immer neue Bezüge zu mathematischen Themen, wie etwa einfache Zahlenfolgen, aber auch fraktale Geometrie oder Stochastik (s. Lauter & Weigand 2007).

Diese Forderungen machen die Werke der Konkreten Kunst für den Mathematikunterricht interessant: Das Aufdecken des bildbestimmenden Regelwerks, die Suche nach Mustern und logischen Zusammenhängen in einem Bild erfordert mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten. Die Schülerinnen und Schüler müssen dabei abstrahieren und generalisieren, relevante Größen und Zusammenhänge herausarbeiten. Sie rechnen, messen, falten Bildteile aufeinander, diskutieren und argumentieren, prüfen und verwerfen Hypothesen – und legen so schrittweise die Struktur und die Elemente frei, die der Künstler im Werk verarbeitet hat.

Derartige Vorgehensweisen treten in ähnlicher Form beim Problemlösen wie auch beim mathematischen Modellieren auf, was folgende Fragen aufwirft: Können Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe Werke der Konkreten Kuns analysieren? Und wenn ja: Wie gestaltet sich der Prozess der mathematischen Analyse eines Kunstwerkes?

Empirische Untersuchung – Ergebnisse

In einer explorativen Feldstudie wurde untersucht, wie Lernende mathematische Strukturen in Konkreten Kunstwerken (wieder-)entdecken und isolieren. Dazu wurden Kleingruppen von 5–6 SchülerInnen der Sek. I bei der mathematischen Analyse von Kunstwerken videografiert (s. Wörler 2012).

In den empirischen Daten zeigt sich, dass die Lernenden iterativ vorgehen: Schrittweise arbeiten sie die einzelnen bildbestimmenden Einflussgrößen heraus. In aller Regel wird dabei von einem Mitglied der Kleingruppe eine Vermutung aufgestellt („Die Quadrate im Bild könnten immer doppelt so groß sein!"), woraufhin Teile der Gruppe diese Hypothese überprüfen; dazu werden direkt am Bild bzw. in der Arbeitsvorlage Argumente für und wider diese Hypothese gesucht – und häufig auch gefunden.

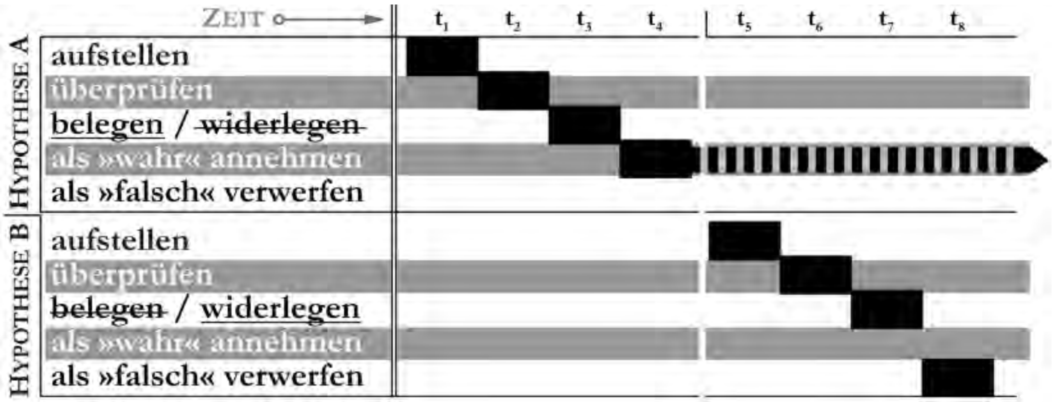


Abb. 1 – Idealtypische Mikrostruktur des Analyseprozesses: Verschiedene Hypothesen werden aufgestellt, überprüft und verworfen oder angenommen

Im zeitlichen Verlauf des Analyseprozesses treten folgende Phasen auf: (1) Hypothese aufstellen, (2) Hypothese überprüfen, (3) Hypothese belegen bzw. widerlegen und (4) Hypothese als „wahr" annehmen bzw. als "falsch" verwerfen (vgl. Abb. 1).

Auf diese Weise formen sich im Laufe der Analyse einzelne Annahmen und mit ihnen verbundene Einflussfaktoren als „wahr", d. h. als zum vorliegenden Kunstwerk passend aus. Da jedes Kunstwerk mehrere logische Regeln enthält, wird in erneuten Durchläufen (*Iterationen*) nach weiteren Einflussfaktoren und Strukturzusammenhängen gesucht – es entsteht eine Art Kreislauf (vgl. Abb. 2).

Die Hypothesen, die am Ende des Analyseprozesses von der Gruppe als „wahr" angenommen worden sind, bilden in toto eine mathematische Beschreibung des Kunstwerkes. Gruppen, die eine größere Anzahl von Einflussfaktoren gefunden haben als andere, liefern demnach eine exaktere bzw. passendere Darstellung der Struktur und der Elemente des Werkes.

Problemlösen als Wechsel von Hypothese und Experiment

Ein Kunstwerk hinsichtlich seines mathematischen Gehaltes zu untersuchen, stellt für die meisten Betrachter eine Problemsituation im Sinne von Greefrath (2010, 35) dar: Anfangs- und Zielzustand derartiger Aufgaben, sowie die Mittel und Methoden der Analyse sind unklar. Es bleibt nur, sich mit Vermutungen dem Werk zu nähern und, etwa durch Messen, Rechnen, Zählen oder Nachkonstruktion, Belege zu suchen.

Es entspricht dem SDDS-Modell („scientific discovery as dual search“) von Klahr & Dunbar (1988), Problemlösen als Prozess des Wechsels zwischen Hypothesengenerierung und experimenteller Überprüfung aufzufassen. Die Autoren unterscheiden darin einen *Hypothesenraum*, der während des Problemlöseprozesses entwickelte Hypothesen umfasst, vom *Experimentraum*, der Methoden zum Überprüfen der Hypothesen beinhaltet (ebd., 32ff). Eine Hypothese wird dieser Theorie nach entworfen, durch Experimente überprüft und ggf. so lange modifiziert und erneut getestet, bis sie das Problem zu lösen scheint.

Während das SDDS-Modell die Mikrostruktur zu beschreiben vermag, also wie Schülerinnen und Schüler ein einzelnes Bildelement finden, können die in der Makrostruktur beobachteten Iterationsschleifen zur schrittweisen Verbesserung der Bildbeschreibung durch einen Bezug zum Modellieren besser gefasst werden.

Iterativer Prozess des Modellierens

Fernab des Schulunterrichts ist „mathematisches Modellieren“ seit Langem eines der klassischen Anwendungsgebiete von Mathematik; jegliche Computersimulation eines dynamischen Systems etwa setzt ein mathematisches Modell voraus, das das System zu beschreiben vermag (vgl. Krüger 1974; Bossel 1989/1992). Daneben existieren verschiedene Richtungen des pädagogischen Modellierens (s. Borromeo Ferri 2011, 9ff), die auf Modellierungsprozesse im Umfeld des Schulunterrichts fokussieren.

Obwohl die Sichtweisen auf ‚Modellieren‘ also unterschiedlich sind, weisen sie dennoch Überschneidungsbereiche auf, aus denen zwei *Charakteristika des Modellierens* hervortreten:

- Ein Ziel des Modellierens ist es, die **Struktur** der vorliegenden Situation und **Einflussgrößen** herauszuarbeiten und zu beschreiben.
- Modellieren ist ein **iterativer** Prozess, bei dem das gefundene Modell in jedem Schritt an die Fragestellung oder Situation angepasst wird.

Die letztgenannte Eigenschaft äußert sich in Modellierungs*kreisläufen* (vgl. etwa Blum 1996) und wird in einigen Darstellungen des Modellierungsprozesses explizit als Rückkopplungsschleife verzeichnet (vgl. etwa Bossel 1989. S. 13). Im Unterschied zum ‚klassischen' Modellieren sind Elemente und Struktur des Modells vom Künstler weitestgehend vorgegeben, müssen also „nur" entdeckt und beschrieben werden. Das ‚mathematische Arbeiten' (Blum 1996) entfällt hier weitgehend, kann sich aber in Form der Variation/Simulation an die Analyse anschließen (s. Wörler 2009).

Die Analyse von Kunstwerken weist demnach Charakteristika des Problemlösens und des mathematischen Modellierens auf und kann als Vorstufe oder Übungssituation für ‚klassisches' Modellieren dienen.

Der Neuntklässler hat 30 Minuten geknobelt, sich mit seinem Nachbarn beraten, Hilfslinien und Notizen durchkreuzen sein Arbeitsblatt. Dass es um Kunst geht, haben die beiden längst vergessen. „Wir haben die Lösung!", ruft plötzlich einer, „1-2-3-4-5, da steckt ein System dahinter!" – die bunten Quadrate scheinen doch mehr Geheimnisse in sich zu tragen, als manche zunächst glauben.

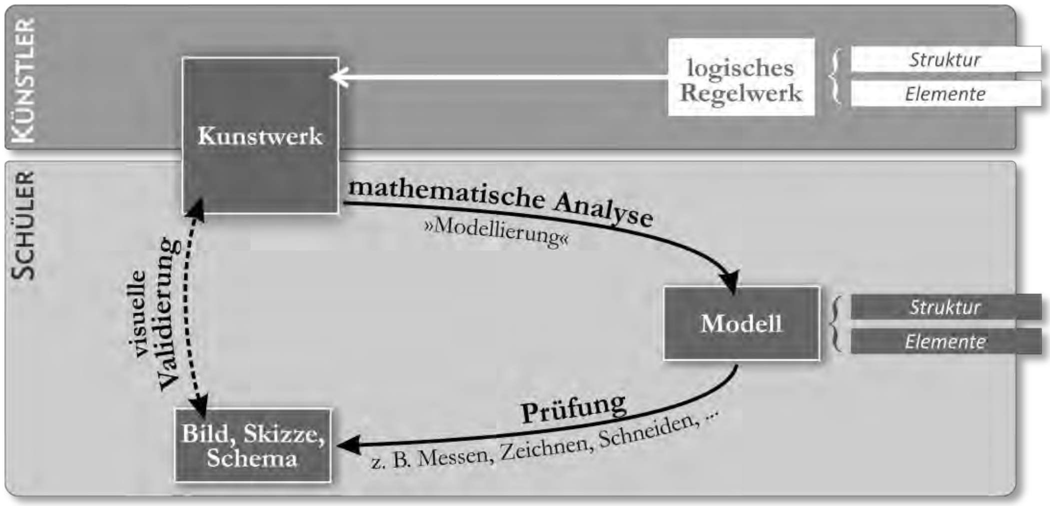


Abb. 2 – Makrostruktur: Durch die mathematische Analyse finden die SchülerInnen nach und nach Struktur und bildbestimmende Elemente eines Kunstwerks.

Literatur

Bossel, H. (1989): Simulation dynamischer Systeme. Braunschweig : Vieweg.

Klahr, D; Dunbar, K. (1988): Dual Space Search During Scientific Reasoning. In: Cognitive Science, 12, 1–48.

Krüger, S. (1974): Simulation. Berlin: De Gruyter.

Wörler, J. (2009): Folgen in der Konkreten Kunst. Gesetzmäßigkeiten erkennen und fortsetzen. In: mathematik lehren, 157, 20–29.

Wörler, J. (2012): Analyse und Simulation von Kunstwerken: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. In: Ludwig, M.; Kleine, M.: BzMu 2012, 953–956.

Deborah WÖRNER, Nürnberg

Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriff im Mathematikunterricht – eine empirische Untersuchung

„Unendlich“ bildet einen zentralen Begriff weltanschaulichen und speziell mathematischen Interesses. Der vorliegende Beitrag geht der Frage nach, in wieweit Mathematikunterricht Einfluss auf Vorstellungen zu Unendlich nimmt und ein vertieftes mathematisches Verständnis zu dem Begriff ausbildet. Insgesamt wurden hierzu 228 Schülerinnen und Schüler und 135 Lehrerinnen und Lehrer[1] befragt. Die Ergebnisse der vorgestellten Studie dienen dabei als Grundlage für die Entwicklung eines Konzepts zur konzeptionellen Umsetzung des Themas im Unterricht.

Forschungsstand

Die Fachmathematik einigt sich derzeit auf zwei Sichtweisen des Begriffs: ein aktuales Verständnis von „unendlichen Mengen nach dem Vorbild der Mengenlehre Cantors und [ein potentielles Verständnis] in den Begriffen und Methoden der Analysis“ (MARX, 2013).

Die mathematikdidaktische Forschung greift diese beiden Ansätze auf. Neben konkreten Vorschlägen zur Umsetzung spezifischer Inhalte im Unterricht (TSAMIR, 2001; SCHIMMÖLLER, 2012) wird hierbei das Augenmerk vor allem auf die vorhandenen Vorstellungen von Schülern und Studenten zum Unendlichkeitsbegriff gelegt. Eine Vielzahl an sowohl qualitativen, wie auch quantitativen Studien zeigen dabei Erkenntnisse zu kognitiven Strukturen, stellen spezifische Schülervorstellungen vor und werten erste Interventionen aus (z.B. FISCHBEIN, TSAMIR & HESS, 1979; TSAMIR,1999; MARX, 2011).

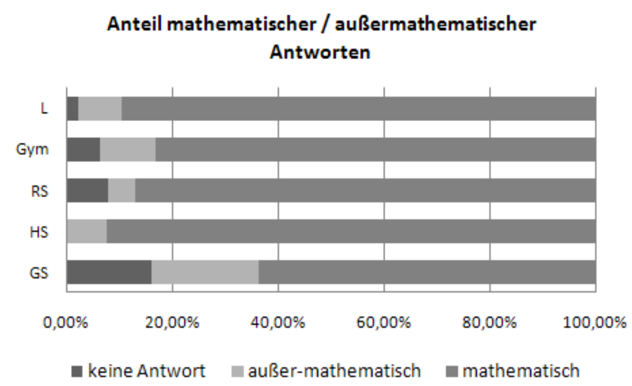
Die vorgestellten Ansätze rechtfertigen die Generierung der Hypothese, dass sich schulischer Mathematikunterricht nicht wesentlich auf die Ausbildung des Unendlichkeitsbegriffs auswirkt bzw. die Ausbildung eines mathematischen Verständnisses nicht angestrebt wird. Entsprechend soll im Folgenden die Hypothese überprüft werden, dass Grundschüler, Hauptschüler, Realschüler, Abiturienten und Lehrer sich in ihrem Verständnis vom Unendlichkeitsbegriff nicht unterscheiden.

---

[1] Zur besseren Verständlichkeit wird im Folgenden auf eine Unterscheidung der Geschlechter verzichtet.

Auswertung

Mit Hilfe der nahe liegenden Frage „Was verstehst Du unter Unendlich?" sollte, anders als in der bisherigen Literatur, weniger eine subtile Aufarbeitung von Vorstellungen einzelner Schüler im Zentrum der Betrachtung stehen, als vielmehr ein Querschnitt durch alle Altersstufen und Schularten zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs ermittelt werden. Es wurde deshalb in einem ersten Schritt der Frage nachgegangen, ob im Laufe der Schulzeit bzw. mit zunehmendem Alter eine Tendenz von anfänglich außermathematischen Vorstellungen hin zu innermathematischen Vorstellungen unter Schülern zu beobachten ist. Dazu wurden die angetroffenen Antworten nach außermathematischen Vorstellungen, wie „das Universum" oder „der liebe Gott", mathematischen Antworten, wie z.B. „unendlich bedeutet alle Zahlen die es gibt von - & + & die 0"; „die größte Zahl" oder „∞" und der Kategorie keine Antwort unterschieden. Hierzu ergibt sich folgendes Bild:



	keine Antwort	**außer – mathe-matisch**	**mathe-matisch**
GS	16,22%	20,27%	63,51%
HS	0%	7,69%	92,31%
RS	7,89%	5,26%	86,85%
Gym	6,49%	10,39%	83,12%
L	2,22%	8,15%	89,63%

Abb. 1

In der Grundschule kennen bereits rund 80% der Schüler den Begriff Unendlich und immerhin ca. 60% verbinden ihn mit einem mathematischen Kontext. Dieser Anteil an Schülern steigt im Laufe der folgenden Schuljahre auf bis zu 90% an. Es lässt sich diesbezüglich ein signifikanter Unterschied zwischen den befragten Abschlussschülern der verschiedenen Schularten und den Antworten der befragten Grundschüler nachweisen. Außerhalb der Grundschule, unabhängig von der mathematischen Ausbildung und dem Alter, lassen sowohl die Antworten von Schülern als auch die Antworten von Lehrern auf eine fast durchweg mathematische Vorstellung zu Unendlich schließen, was vermutlich auf den Einfluss des Mathematikunterrichts zurückzuführen ist.
In einem zweiten Versuch, alters – bzw. schultypabhängige Unterschiede speziell im Verständnis des Begriffs nachzuweisen, orientieren wir uns am „Stufenmodell des Begriffsverständnisses nach Vollrath". Hier beschränken wir uns auf die Analyse der innermathematischen Antworten der einzelnen Probandengruppen, um nachzuweisen, ob sich Entwicklungen von

der ersten hin zur letzten Verständnisstufe beobachten lassen. Eine entsprechend modifizierte Version des Vollrath´schen Modells (DÖTSCHEL, 2011) legt folgende Stufen des Begriffsverständnisses nahe:

- Intuitiv-inhaltliche Stufe: „Zahl ohne Ende“; „1,2,3,4,…“; „das Symbol ∞“; „das Universum“; usw.
- Integriert-formale Stufe: „nicht abzählbare Menge“; „1 zu 1 Zuordnung zu den natürlichen Zahlen“; „Es gibt genauso viele Bruchzahlen, wie natürliche Zahlen, nämlich unendlich viele“; usw.
- Kritische Stufe: Aussagen zur Axiomatik; Kontinuumshypothese; usw.

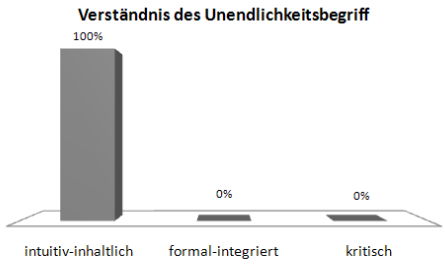


Abb. 2

Bei der Auswertung der Antworten zeigt sich, dass alle anzutreffenden Antworten durchweg auf einer intuitiv-inhaltlichem Stufe einzuordnen sind. Keiner der befragten Schüler oder Lehrer gibt Aussagen, die auf ein vertieft mathematisches Verständnis schließen lassen. Beispiele, wie „unter dem Begriff versteht man, dass eine Zahl immer weiter geht und immer länger ist“ sind sowohl für Grundschüler, wie auch Gymnasiasten und Lehrer typisch. Das Ergebnis spiegelt wider, dass Unendlich zwar präsent ist, aber nicht im Unterricht thematisiert wird.[2]

Einzig eine Unterscheidung der intuitiven Vorstellungen nach den Kategorien aktual und potentiell Unendlich, wie es in der Literatur vorzufinden ist (z.B. FISCHBEIN, TIROSH & HESS, 1979; TALL, 2001), scheint erfolgsversprechend, um einen Unterschied bzw. eine alters- und ausbildungsabhängige Entwicklung nachzuweisen. In Anlehnung an Weigand wird diese Unterscheidung aufgegriffen und die beiden Begriffe statisch und dynamisch verwendet (WEIGAND, 1993).

Eine typische Antwort für eine statische Vorstellung, ist dabei z.B. „die letzte Zahl“ während „viele und immer einer mehr“ als Beispiel für eine dynamische Vorstellung steht.

Die nebenstehende Grafik zeigt, dass mit zunehmen-

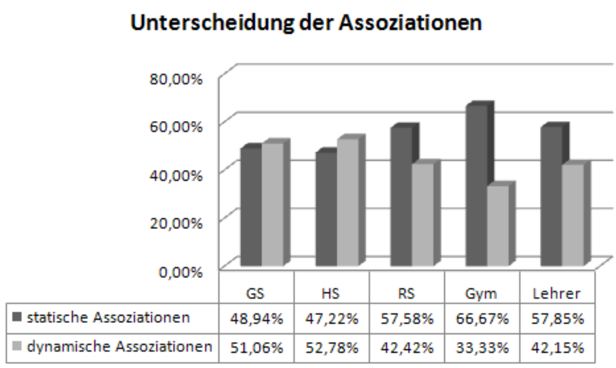


Abb. 3

[2] Entsprechendes zeigt auch eine Schulbuch- und Lehrplananalyse, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

dem Alter eine Tendenz hin zu statischen Antworten zu beobachten ist. Angefangen von einem fast ausgewogenen Verhältnis in der GS und der HS, wächst der Anteil derer, die eine statische Vorstellung mit dem Unendlichkeitsbegriff verknüpfen bis auf knapp 2/3 der befragten Gymnasiasten an. Trotzdem bildet sich aber auch an dieser Stelle kein signifikanter Unterschied zwischen den Befragten aus. D.h. ein Unterschied auf Grund unterschiedlicher mathematischer Ausbildung zwischen den Probandengruppen ist nicht nachzuweisen und mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass sowohl Grundschüler, als auch Absolventen, als auch Lehrer aus der selben Grundpopulation stammen.

Zusammenfassung

Die Ergebnisse der Untersuchung deuten darauf hin, dass sich die Hypothese „Schüler und Lehrer – egal welcher Schulart und Ausbildungsrichtung – unterscheiden sich *nicht* im Verständnis bzgl. des Unendlichkeitsbegriffs" nicht ablehnen lässt. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit den verschiedenen interpretativen Ansätzen und entsprechenden qualitativen Studien aus dem Ausland (z.B. FISCHBEIN, TIROSH & HESS, 1979; TSAMIR, 1999 oder MORENO & WALDEGG, 1999). Es stellt sich für einen zukünftigen Mathematikunterricht die Frage, inwieweit er sich mit dieser Situation zufrieden gibt oder anstrebt, den mathematisch zentralen Unendlichkeitsbegriff Cantors stärker (bzw. überhaupt) im Unterricht zu thematisieren. Im Rahmen einer Dissertation werden von der Autorin hierzu Konzeptionsvorschläge zu jahrgangsübergreifenden langfristig angelegten Lehrgängen zum Unendlichkeitsbegriff entwickelt.

Literatur

Dötschel, D. (2011): Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht. In: BZMU,

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979): The intuition of infinity. In: Educational Studies in Mathematics 10, 3 - 40.

Marx, A. (2013): Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen – In: Journal der Mathematik - Didaktik. Münster: Springer, 73 – 98.

Marx, A. (2011): Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Schimmöller, T. (2012): In: Lengnink, K., Nickel, G., Rathgeb, M. (Hrsg.) (2011) Mathematik verstehen. Wiesbaden: Vieweg + Täubner, 179 – 188.

Tsamir, P. (1999): The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. In: Educational Studies in Mathematics. Vol. 38, (1999). Münster: Springer, 209 - 234.

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: Educational Studies in Mathematics. Vol.12, (1981). Münster: Springer, 151-169.

Vollrath, W. (1983): Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Moreno, L. E. & Waldegg, G. (1991): The conceptual evolution of actual mathematical infinity. In: Educational Studies in Mathematics. Vol.22, (1991). Münster: Springer, 211-231.

Seval YETIS, Matthias LUDWIG, Frankfurt am Main

Diagnose und individuelle Förderung: Ergebnisse einer Vorstudie zum Thema Achsenspiegelung und Achsensymmetrie

Gegenwärtige Diagnose- und Fördermaterialien legen ihren Schwerpunkt auf Arithmetik. Geometrie ist nur schwach vertreten. Es fehlen geeignete Diagnose- und Fördermaterialien für die Sekundarstufe I. Ziel des vorgestellten Dissertationsprojektes ist die Entwicklung eines Interviewleitfadens, mit dem Schülerschwierigkeiten mit Achsenspiegelung und Achsensymmetrie diagnostiziert und individuell gefördert werden können. Im Folgenden werden die Ergebnisse einer ersten Vorstudie präsentiert.

1. Achsenspiegelung und Achsensymmetrie

Laut Kerncurriculum für die Primarstufe wird Achsensymmetrie als Abbildung eingeführt und achsensymmetrische Eigenschaften von Figuren thematisiert. Am Ende der Primarstufe sollen Schüler symmetrische Figuren anhand ihrer Eigenschaften erkennen, Symmetrieachsen finden und (achsen-)symmetrische Muster selbst erzeugen können. Spiegelungen kommen meist nur in solchen Fällen vor, in denen das Objekt direkt an der Spiegelachse liegt und zu einer symmetrischen Figur ergänzt werden soll. Das Wort *abbilden* kennen die Grundschüler nur im Zusammenhang mit Vergrößern und Verkleinern. Es bleibt offen, ob die Achsenspiegelung als Abbildung erfahren wird oder nur als das Erzeugen eines symmetrischen Musters. Die Weiterentwicklung, die Schüler bezüglich dieser Themen von der Primarstufe zur Sekundarstufe machen, liegt darin, dass sie nun Verknüpfungen zwischen den Begriffen (wie z.B. zwischen Symmetrie und Kongruenz) begründen, sowie für das Lösen von Problemen nutzen können.

Hoyles und Healy (1997) berichten, dass den Schülern Spiegelungen an vertikalen und horizontalen Achsen leichter fallen als an schrägen Achsen. Bell (1993) stellt in ihrer Studie fest, dass für Schüler horizontal ausgerichtete Urbilder vertikal ausgerichtete Bilder haben (und umgekehrt) oder dass horizontale/vertikale Urbilder auch horizontale/vertikale Bilder besitzen. Küchemann (1993) nennt als mögliche Faktoren, die die Bearbeitung von Spiegelungsaufgaben beeinflussen, u.a. die (Nicht-)Existenz eines Kororasters, die Neigung der Achse und die Neigung des Urbildes zur Achse.

2. Fischbeins Theorie der figural concepts

Fischbein nennt drei Kategorien von mentalen Objekten: das *concept* (eine abstrakte, allgemeine, ideale Repräsentation), das *image* (eine räumlich, sensorische Repräsentation) und das *figural concept*. Die *figural concepts* besitzen zwei Klassen von Eigenschaften gleichzeitig. Sie sind zeitgleich *image* und *concept*. Die figuralen Aspekte ermöglichen das mentale Ausführen von Operationen mithilfe von praktischen Erfahrungen (wie verschieben, schneiden und klappen). Die konzeptuellen Aspekte kontrollieren das logische Denken und die adäquate Ausführung dieser Operationen. *Concept* und *Image* interagieren im Laufe einer mentalen Aktivität; sie sind aber grundsätzlich inkompatibel. Idealerweise sollte das konzeptuelle System die Bedeutung, die Beziehungen und die Eigenschaften der *figural concepts* kontrollieren. Schülerschwierigkeiten im geometrischen Denken können laut Fischbein (1993) auf einen Konflikt zwischen diesen beiden Aspekten zurückgeführt werden.

3. Vorstudie: Design und Stichprobe

Ziel des Dissertationsprojektes ist die Entwicklung aufgabenorientierter Interviewleitfäden, mit der die *figural concepts* der Schüler diagnostiziert werden sollen. Mit den Interviews soll der Bruch zwischen den figuralen und konzeptuellen Aspekten der Achsenspiegelung bei Schülern identifiziert und schließlich die Interaktion zwischen diesen Aspekten gefördert werden. Um geeignete Aufgaben für die Interviews zu finden und aufgabenspezifische Schülerschwierigkeiten zu lokalisieren, wurde eine Vorstudie in Form eines schriftlichen Tests mit 195 Sechstklässlern aus drei Gymnasien durchgeführt. Dieser umfasst sechs Aufgaben mit insgesamt 16 Items. Die ersten beiden Aufgaben des Tests sollten aufzeigen, welche Schülerkenntnisse zur Achsensymmetrie zum Testzeitpunkt vorlagen. Bei der Testauswertung lag der Schwerpunkt auf den Aufgaben 3 bis 6 zur Achsenspiegelung, die dem CSMS-Projekt (Küchemann, 1993) entliehen wurden. Die Aufgaben 3 und 6 erforderten das Zeichnen des Spiegelbildes einer gegebenen Figur; die Aufgaben 4 und 5 (siehe Abb. 1) Begründungen mit formalen Aspekten der Achsenspiegelung. Die Items der Aufgaben 3 und 6 unterteilt Küchemann (1993) in zwei Typen, die sich in Bezug auf die Strategien unterscheiden, die die Schüler zum korrekten Bearbeiten verwenden. Bei Typ A-Items liegt eine vertikale oder horizontale Achse vor oder das Urbild ist ein Punkt; bei Typ B-Items ist eine schräge Achse vorzufinden und das Urbild ist ein Strich oder eine Fahne. Typ B-Items sind schwieriger einzustufen als Typ A-Items, da bei Typ A-Items nur eine Schräge zu beachten ist (die des Urbildes zur Achse oder die der Achse zur Horizontalen), bei Typ B-Items müssen zwei Schrägen beachtet werden.

4. Ergebnisse und Interpretation

Die Ergebnisse des schriftlichen Tests wurden durch zwei Rater nach Item-Typ und Lösungshäufigkeiten der korrekten Schülerbearbeitungen sortiert, sodass eine Stufung nach Schwierigkeitsgrad möglich wurde. Die Stufung der Rater korreliert mit einem Interrater-Reliabilitätswert von κ=0.90. Nach einem t-Test (p>0.86) besteht zwischen Küchemanns (1980) und unseren Ergebnissen (2012) statistisch gesehen kein Unterschied.

Der Test lässt vermuten, dass der Abstandsaspekt das konzeptuelle Wissen der Schüler zur Achsenspiegelung dominiert. Dies zeigt u.a. Aufgabe 5. Sie wurde als richtig bewertet, wenn B als Bildpunkt *gewählt* wurde – unabhängig von der Begründungsweise. 78% der Schüler haben B als Bildpunkt von A gewählt, 9% haben sich für D entschieden. Interessant sind die Begründungen für die Wahl der Punkte. Der Abstandsaspekt alleine wurde in 52% der Schülerbearbeitungen genannt. 11% rechtfertigten ihre Wahl nur mit der Orthogonalität. Die korrekte Begründung mit Benennung der beiden Aspekte Abstand und Orthogonalität kam lediglich in 8% aller Schülerbearbeitungen vor. Die Ursache für die Dominanz des Abstandsbegriffs kann in der Verwendung des Geodreiecks im Zusammenhang mit Aufgaben zur Achsenspiegelung und Achsensymmetrie liegen. Schließlich muss bei einer Achsenspiegelung unter Verwendung des Geodreiecks die Mittellinie (Symmetrieachse) auf der Spiegelachse positioniert und so nur der Abstand vom Urbild zur Achse bestimmt und zum Bild übertragen werden.

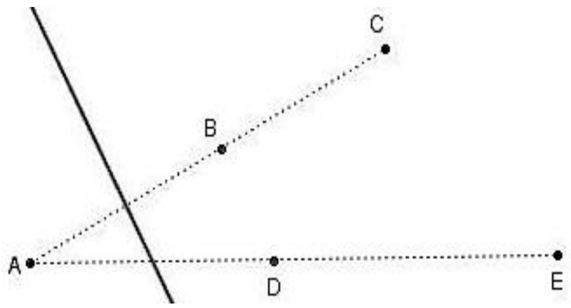


Abbildung 2: Aufgabe 5

Um die Rolle des Geodreiecks näher zu untersuchen, wurde ein Probeinterview mit einer Fünftklässlerin durchgeführt. Hier wurde deutlich, dass das Geodreieck zwar korrekt verwendet wird, aber was hinter der Positionierung des Geodreiecks liegt, ist der Schülerin unklar. Die Schülerin sollte ein Drachen an einer schrägen Achse freihändig spiegeln (siehe Abb. 2). Sie zeichnete das Spiegelbild, als würde sie die Schräge der Spiegelachse ignorieren und stattdessen sich eine imaginäre vertikale Achse (*IVA*) vorstellen. Eine Fehlstrategie, die wir in unserer Studie als *IVA* bezeichnen und als den *dominierenden figuralen Aspekt* der Achsenspiegelung (vgl. Fischbein, 1993) vermuten. Als die Schülerin ihre Lösung mit einem Geodreieck überprüfen sollte, stellte sie ihren Fehler fest und konnte innerhalb weniger Sekunden das korrekte Spiegelbild produzieren.

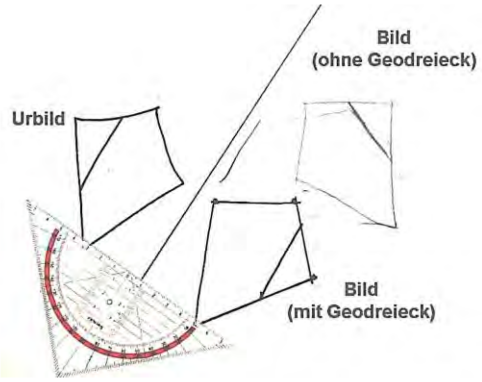


Abbildung 1: Fehlstrategie 'Imaginäre vertikale Achse'

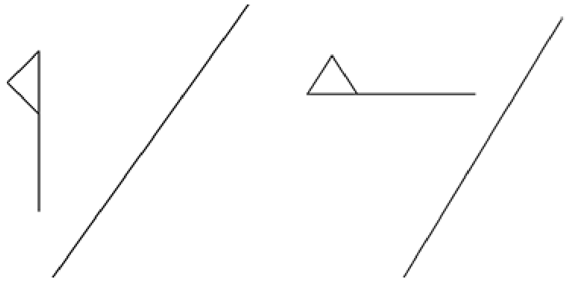


Abbildung 3: Item 3.7 (li); Item 6.1 (re)

Die Ergebnisse der Aufgaben 3 und 6 werfen ebenfalls die Frage nach der Rolle des Geodreiecks bei der Internalisierung der Achsenspiegelung auf. Im Pretest wurde das Geodreieck nur für Aufgabe 6 als Hilfsmittel zugelassen. Sonst mussten Spiegelungen freihändig durchgeführt werden. Beim Vergleich der Ergebnisse der Items 3.7 und 6.1 (siehe Abb. 3) lässt sich folgendes feststellen: erstens, der prozentuale Anteil an fehlerhaften Schülerbearbeitungen ist bei beiden Items nahezu gleich; und zweitens, die fehlerhaften Bearbeitungen in 3.7 enthalten 21% IVA, in 6.1 sogar 47% – trotz der Verwendung des Geodreiecks in 6.1. Insgesamt kam die Fehlstrategie IVA bei 45% aller Schülerbearbeitungen mehr als einmal vor. Auch ein Vergleich zwei weiterer Items der Aufgaben 3 und 6 lässt Auffälligkeiten erkennen: Sowohl der Anteil an richtigen Antworten als auch der Anteil an den Fehlertypen Horizontal- bzw. Vertikalverschiebung und IVA ist praktisch gleich – trotz Verwendung des Geodreiecks in Aufgabe 6.

5. Forschungsfragen und Ausblick

Die beschriebenen Ergebnisse werfen folgende Fragen auf: Können Schülerfehlvorstellungen und -strategien bei Aufgaben zur Achsenspiegelung auf einen Konflikt zwischen figuralen und konzeptuellen Aspekten zurückgeführt werden? Wenn ja, durch welche Fördermaßnahmen kann man dem entgegenwirken? Ist die Strategie der *imaginären vertikalen Achse* wirklich der kontrollierende figurale Aspekt der Achsenspiegelung? Welche Rolle spielt das Geodreieck bei der Internalisierung der Achsenspiegelung? Verlangsamt das Geodreieck oder verhindert es sogar die Entwicklung der Interaktion zwischen den figuralen und konzeptuellen Aspekten der Achsenspiegelung, indem es die Kinder allzu viel assistiert? Diese Fragen sollen in individuellen Interviews mit Sechstklässlern geklärt werden.

Literatur

Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. In: Educational Studies in Mathematics, 24, 115-137.

Fischbein, E. (1993): The theory of figural concepts. In: Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162.

Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. In: International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2(1), 27-59.

Küchemann, D. K. (1993). Reflections and rotations. In K. Hart: Children's' understanding of mathematics 11-16. London: John Murray, 137-157.

Marc ZIMMERMANN, Christine BESCHERER, Ludwigsburg

Was ist gute Hochschullehre in Mathematik?

In den letzten Jahren gewinnt die fachspezifische Hochschuldidaktik immer mehr an Bedeutung. Insbesondere in Mathematik stellt man sich die Frage, inwieweit die mathematische Hochschullehre geändert oder verbessert werden kann und muss, um die traditionell hohen Studienabbrecherquoten in Mathematik zu reduzieren. Deshalb wurden in den letzten Jahren in vielen Projekten Angebote und Konzepte entwickelt, die die Lehre verbessern sollen. Unter anderem wurde der Förderschwerpunkt „Zukunftswerkstatt Hochschullehre“ vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) ausgeschrieben.

Wie aber kann nun objektiv beurteilt und entschieden werden, welche Maßnahmen und Innovationen die Lehre wirklich verbessern, oder ob diese sich evtl. negativ auswirken. Kriterien und Standards wurden für eine „gute Hochschullehre“ noch nicht entwickelt. Ebenso gibt es auch keine Kriterien, anhand derer die entwickelten Konzepte und Angebote gemessen und bewertet werden können um eine Verbesserung der Entwicklungen zu attestieren. Die Messung von „guter Hochschullehre“ ist also noch ein offenes Forschungsfeld.

Im folgenden Beitrag wird die Problematik in Bezug auf gute Hochschullehre erläutert. Dabei geht es nicht um die Erfassung von Qualität von gesamten Studiengängen, sondern wie die Qualität einzelner Lehrveranstaltungen erfasst werden kann. Dazu werden verschiedene Instrumente bzw. Verfahren, die aktuell zur Evaluation und zur Erhebung von Qualität von Hochschullehre verwendet werden, dargestellt. Darauf aufbauend wird das Maß der (mathematischen) Selbstwirksamkeitserwartung für die Qualität von Hochschullehre zur Diskussion gestellt.

1. Was ist „gute“ Hochschullehre und wie wird diese erfasst?

Universitäten und Hochschulen werden in der Gesellschaft als „Stätten hochwertiger Ausbildung und Forschung“ (BMBF, 2013) gesehen, ein Ort in dem also gleichermaßen geforscht und gelehrt wird. Ein Ziel des Staates ist dabei die „Steigerung der Leistungs- und Wettbewerbsfähig in Forschung und Lehre“ (ebd.) der Hochschulen.

Mit dieser Steigerung der Qualität von Forschung und Lehre ist jedoch auch immer die Messung dieser bzw. einer Steigerung verbunden. Ohne geeignete Verfahren oder Instrumente eine Zunahme zu messen, kann auch nicht eine Steigerung festgestellt werden. So wird zum Beispiel die Qualität der Forschung an vielen Hochschulen über das Volumen eingeworbener

Drittmittel eines Institutes oder Lehrstuhles sowie über Publikationsindizes gemessen. Solche (relativ) objektive Kriterien sind zur Messung der Qualität von Lehre jedoch nicht vorhanden.

Zwar gibt es die einen oder anderen Kenngrößen und Verfahren, die „gute Lehre“ in der Hochschule auszeichnen sollen, diese sind aber auch nicht unumstritten. Externe Verfahren wie die Akkreditierung von Studiengängen, Absolventenbefragungen oder Betreuungsverhältnisse (Studierende pro Hochschullehrer) können nur Aussagen über einen gesamten Studiengang treffen, nicht aber im Hinblick auf eine Lehrveranstaltung oder Person. Solche Verfahren können nicht zur Beurteilung guter Lehre einer einzelnen Lehrveranstaltung herangezogen werden. Im Gegensatz dazu stehen die hochschulinternen Evaluationen, die in regelmäßigen Abständen durchgeführt werden. Meistens müssen hierzu die Studierenden einen Fragebogen mit mehreren Items ausfüllen. Allerdings sind diese Items sehr allgemein gehalten, so dass besondere Konzeptionen und auch fachspezifische Veranstaltungen nicht berücksichtigt werden. Auch kann davon ausgegangen werden, dass Pflichtveranstaltungen gerade zum Studienbeginn generell schlechter bewertet werden als Veranstaltungen im Hauptstudium, die aus Interesse besucht werden. Die Ergebnisse sagen also auch nur bedingt etwas über die Qualität der Lehre einer Veranstaltung aus. Ebenso kritisch müssen die Lehrpreise, die von Hochschulen aber auch hochschulübergreifend vergeben werden, betrachtet werden. Dieses sollen besonders gute Lehrveranstaltungen oder Konzeptionen auszeichnen, die Kriterien sind aber vielerorts unklar. Zudem hängen die Gewinner meistens davon ab, wie die Zusammensetzung der jeweiligen Jury ist.

Zusammenfassend liegt das Problem bei der Erhebung und Messung der Qualität von Hochschullehre, dass es kaum oder keine objektiven Kriterien guter Lehre in der Hochschule gibt. Die Hochschulrektorenkonferenz versuchte 2008 gute Lehre folgendermaßen zu definieren: „’Gute’ Lehre besteht darin, das eigenständige Lernen der Studierenden zu ermöglichen und zu unterstützen. In diesem Sinne ist gute Lehre heute studierendenzentriert. Lehre hingegen, die sich als reine Wissensvermittlung begreift und die aktive Verarbeitung des Wissens durch die Studierenden vernachlässigt, verschenkt einen Großteil ihrer möglichen Wirkung. Die Gestaltung der Lernumgebung durch die Lehrenden macht den Unterschied zwischen guter und weniger guter Lehre aus.“ (HRK, 2008). Die ableitbaren Kriterien guter Lehre ähneln dabei den sieben Prinzipien guten Lehrens von Chickering und Gamson (1987). Diese Kriterien sind jedoch nur schwer greifbar noch (objektiv) messbar, vielmehr können dieses eher als Voraussetzungen für gute Lehre gesehen werden. Zum Beispiel kann ein Dozent / eine Dozentin in den Veranstaltungen durch diverse Methoden die Studierenden aktivieren und aktives Lernen fördern, ob dies aber alle Studierenden in einem vollen Hörsaal auch machen, ist damit nicht gewährleistet. Auch kann die Lehrperson die Studierenden unterstützen und Rückmeldungen geben, ist diese aber nicht adäquat und individuell auf den jeweiligen Studierenden bezogen, bringt diese Unterstützung nicht viel.

2. Mathematische Selbstwirksamkeit als Maß guter Hochschullehre?

Den bisher vorgestellten Verfahren zur Feststellung der Qualität von Lehre an der Hochschule liegt vor allem das Problem der schwer greifbaren und subjektiven Kriterien guter Lehre zugrunde. Je nachdem welcher Lehr-Lern-Auffassung der eigenen Lehre zugrunde liegen, wird auch „gute Lehre“ unterschiedlich verstanden. Deshalb soll in diesem Beitrag das Maß der Selbstwirksamkeitserwartung (SWE) als eine von der Lehrperson und dem Lehrstil unabhängige Variable vorgestellt und in die Diskussion eingebracht werden.

Die SWE ist ein psychometrisches Datum, das „die subjektive Gewissheit [einer Person beschreibt], neue oder schwierige Anforderungssituationen auf Grund eigener Fähigkeiten [erfolgreich] bewältigen zu können“ (Schwarzer & Jerusalem, 2002, S.35). Es geht auf Albert Bandura (1977) zurück und hat laut aktueller Forschung ein hohen Einfluss auf den Studienerfolg (Blömeke, 2013; Robbins et al. 2004; vgl. Abbildung 1).

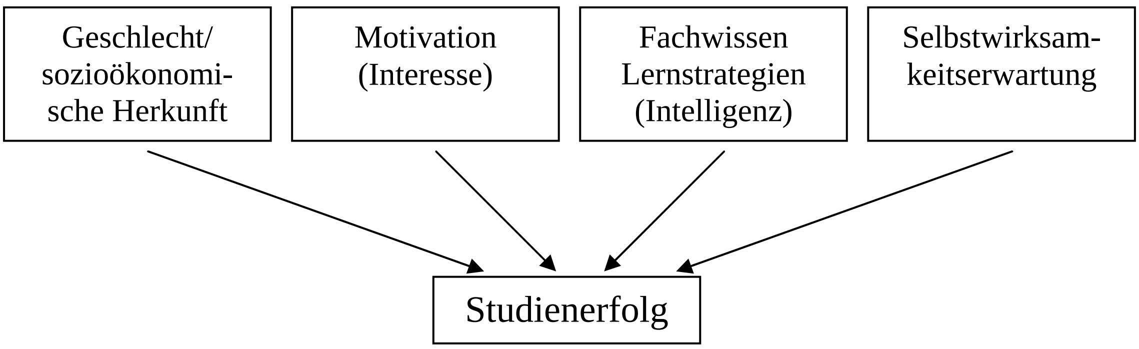


Abbildung 1: Einflüsse auf den Studienerfolg (nach Blömeke, 2013)

Sowohl das Geschlecht als auch die sozioökonomische Herkunft der Studierenden kann durch die Hochschule nur bedingt beeinflusst werden. Ebenso kann man die Motivation und das Interesse der Studierenden an einem Fach oder Studiengang an der Hochschule kaum ändern. Zwar kann die Motivation bei der einen oder anderen Lehrveranstaltung höher oder niedriger, ein stetiges Interesse wird aber nur in seltenen Fällen geweckt. Im Gegensatz dazu kann die Hochschule das Fachwissen (Intelligenz) der Studierenden steigern und tut dies im Allgemeinen auch durch entsprechende Veranstaltungen in Studiengang. Ebenso kann und soll die Hochschule die SWE der Studierenden durch entsprechende Lehr- Lern - Arrangements und Konzeptionen stärken.

Im Allgemeinen ist die SWE immer inhalts- und fachspezifisch (Pajares & Miller, 1995). SWE muss also immer angelehnt an das jeweilige Fach und den Inhalten gemessen werden. Demzufolge muss für jedes Fach ein entsprechendes Testinstument vorliegen. Für die Mathematik gibt es bereits einige Fragebögen (vgl. Zimmermann, Bescherer & Spannagel, 2011).

4. Fazit

In diesem Beitrag wurde die SWE als Maß für gute Hochschullehre vorgestellt und zur Diskussion gestellt. Mit Sicherheit reicht dieses Maß alleine nicht aus, um die Qualität einer Lehrveranstaltung zu messen. Zumindest sollte aber durch jede (gute) Lehrveranstaltung die SWE der Studierenden zunehmen. Demzufolge kann die Seigerung der SWE als notwendige Bedingung guter Lehre angesehen werden.

Literatur

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy*. *The exercise of control*. New York: Freeman.

Blömeke, S., (2013). *Der Übergang von der Schule in die Hochschule – Empirische Erkenntnisse zur Aufnahme eines (Mathematik–) Studiums sowie zur Bedeutung individueller und institutioneller Faktoren für die Kompetenzentwicklung*. Vortrag auf der 2. KHDM – Arbeitstagung „Mathematik im Übergang Schule/ Hochschule und im ersten Studienjahr". 20. – 23.02.2013, Paderborn.

BMBF – Bundesministerium für Bildung und Forschung (2013). *Hochschule*. http://www.bmbf.de/de/655.php [19.3.2013].

Chickering, A. & Gamson, Z. (1987). Seven principles for good practice in undergraduate education. *American Association of Higher Education Bulletin 39*(7), pp.3-7.

HRK – Hochschulrektorenkonferenz (2008). *Für eine Reform der Lehre in den Hochschulen (3. Mitgliederversammlung der HRK am 22.04.2008)*. http://www.hrk-bologna.de/109_4298.php?datum=3.+Mitgliederversammlung+am+22.+April+2008 [20.3.2013].

Pajares, F., & Miller, M. D. (1995). Mathematics Self-Efficacy and Mathematics Performances: The Need for Specificity of Assessment. *Journal of Counseling Psychology, 42*(2), 190-198

Robbins, S. et al. (2004): Do Psychosocial and Study Skill Factors Predict College Outcomes?. *Psychological Bulletin, 130*(2), 261–288.

Schwarzer, R. & Jerusalem, M. (2002). Das Konzept der Selbstwirksamkeit. *Zeitschrift für Pädagogik, 44.Beiheft*, S.28-53.

Zimmermann, M., Bescherer, C. & Spannagel, C. (2011). *A questionnaire for surveying mathematics self-efficacy expectations of Prospective teachers*. Tagungsband der CERME 7. Rzezsow, Polen.

Larissa ZWETZSCHLER, Dortmund

Von der Ergebnisgleichheit zur Einsetzungsgleichheit – Rekonstruktion von Vorstellungsentwicklungsprozessen zur Gleichwertigkeit von Termen

Verständnishürden und Fehlvorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen und zum Gleichheitszeichen, wie beispielsweise die Aufgabe-Ergebnis-Deutung, sind aus zahlreichen Studien bekannt und immer noch aktuell (Kieran 2007). Neben diesen Anforderungen sind die Lernenden mit grundlegenden algebraischen Konzepten, wie den Variablen und Termen, konfrontiert, die häufig nur partiell verstanden wurden und dadurch die Komplexität des Themas Gleichwertigkeit von Termen für Lernende erhöhen (Malle 1993). Eine systematische Erforschung der Vorstellungsentwicklung in lernförderlichen Lernumgebungen steht allerdings noch aus. Welche individuellen Vorstellungen zur Gleichwertigkeit haben die Lernenden, und inwiefern können diese weiterentwickelt werden? Welche Elemente des Lehr- und Lernarrangements sind lernförderlich und welche begrenzen den Lernprozess, und inwiefern kann ein prototypisches Design entwickelt werden, das einen Lernprozess ermöglicht?

Die Beforschung und (Weiter-)Entwicklung des Lehr- und Lernarrangements fand im Rahmen der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung in fünf iterativ verschränkten Zyklen statt (Prediger & Zwetzschler 2013). Hier werden empirische Beispiele aus dem 2. Zyklus vorgestellt.

1. Design des Lehr- und Lernarrangements – Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes

Wie ein Lernweg zum Vorstellungsaufbau zur Gleichwertigkeit von Termen durch die Nutzung von geometrischen Darstellungen aussehen kann, wird in theoretischen, nicht empirisch überprüften, Lernwegskonstruktionen bereits seit langer Zeit beschrieben (z.B. Wellstein 1978, Mason et al. 1985). Zentral ist dabei die Idee einer überprüfbaren und somit für den Lernenden nachvollziehbaren Gleichwertigkeit von Termen dadurch, dass unterschiedliche Terme das gleiche Objekt beschreiben können (empirisch für Funktionen statt Flächen beschrieben durch Kieran & Sfard 1999, für eingesetzte Zahlen Pilet 2012). In dieser Studie ist die Nutzung zweier Objekte zur Interpretation der Gleichwertigkeit leitend: Neben einem durch geometrische Figuren gestützten Verständnis, der Beschreibungsgleichheit (Prediger 2009, in Anlehnung an Malle 1993) wird die Referenz auf die Einsetzung aller (bzw. praktisch nur vieler) Zahlen, die Einsetzungsgleichheit (Prediger 2009 nach Malle 1993) als zweite inhaltliche Vorstellung angeboten. Realisiert wurde das Lehr- und Lernarrangement im KOSIMA-Projekt (konkret in der Erprobungsversion eines Schulbuchkapitels Prediger, Zwetzschler & Schmidt 2011), das die oben beschriebenen inhaltlichen Vorstellungen aufbaut und anschließend nach dem Prinzip der Fortschreitenden Schematisierung (Treffers 1987) zum Kalkül, den algebraischen Termumformungen, überführt.

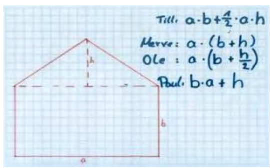
2. Analysemodell: Theoretische Fokussierung durch Vergnauds analytische Konstrukte

Analytische Konstrukte aus Vergnauds (1996) Theorie der konzeptuellen Felder wurden zur methodisch abgesicherten Rekonstruktion der hinter sichtbaren Handlungen und Äußerungen liegenden Vorstellungen genutzt. Dazu wurden Vergnauds Theoreme-in-Aktion (durch ||..|| gekennzeichnet) adaptiert, um die dahinter liegenden Konzepte-in-Aktion (durch <…> gekennzeichnet) zu rekonstruieren, und die individuelle Vorstellungsentwicklung der Lernenden erfassen zu können (zur genaueren Beschreibung: Zwetzschler & Prediger 2013).

3. Empirische Einblicke: Herausforderungen bei der Vorstellungsentwicklung zur Gleichwertigkeit

Der folgende empirische Ausschnitt eines Lernenden (Christian, Klasse 9, Gesamtschule) aus Zyklus 2a ist exemplarisch für eine zentrale Herausforderung im Lernprozess analysierter Lernender.

(I) Welche Kinder berechnen den gleichen Flächeninhalt?



(II) Setze in die Tabelle unterschiedliche Werte für die Variablen ein. Was fällt dir auf?

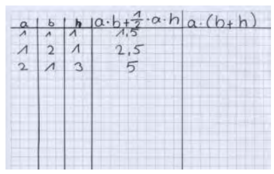


Abb. 1

Nachdem das Interviewpaar in Aufgabe (I) (Abb. 1) die Terme auf die Graphik bezogen hatte, bekommen sie Aufgabe (II). Christian ist durch die unterschiedlichen Zahlen zunächst irritiert und zeigt nach der Erklärung der Interviewerin, dass es unterschiedliche Beispiele seien, ein Situationsverständnis, das sich bei vielen Lernenden als eine zentrale Herausforderung gezeigt hat. Christian stellt fest:

15	C	Achso also ist das jetzt nicht von dem Gleichen, also von dem alles den gleichen äh von dem hier? *[zeigt auf die Graphik]*
16	I	Was willst du denn ähm machen, wenns von dem hier sein soll? *[zeigt auf die Graphik]*
(…)		
18	C	a · b die *[zeigt auf a und b in der Tabelle]* und dann a · h durch 2 *[zeigt auf h in der Tabelle]*, ich mein das von dem hier *[zeigt auf die Graphik]*

Der Lernende unterscheidet in dieser Situation zwischen Termen, in die man die gegebenen Zahlen einsetzen kann und der Berechnung der Graphik aus Aufgabe (I). Für ihn scheinen die eingesetzten, konkreten Werte in keiner Verbindung zur Graphik zu stehen, da er die Variablen in dieser vermutlich ausschließlich als Namen der Kanten und in keiner allgemeinen Repräsentation verstanden hat. Diese zwei konkurrierenden Perspektiven werden in der Analyse durch die dahinter liegenden Konzepte rekonstruiert. Christians Verständnis der Terme, in die man Werte einsetzen kann (schwarze Perspektive Abb.2), ist geleitet durch sein implizites Theorem-in-Aktion ||Um bei zwei richtigen Termen die gleichen Ergebnisse zu erhalten, kann ich unterschiedliche Werte einsetzen||. Durch dieses Verständnis des Lernenden lässt sich sein dafür aktiviertes Verständnis der Variablen, des Terms und sein latentes Konzept der Gleichwertigkeit rekonstruieren. Er versteht den <Term als allgemeine Berechnungsvorschrift>, in den man unterschiedliche Werte einsetzen kann. Dies realisiert sich in seinen Konzepten-in-Aktion: der <Variablen als Einsetzungsaspekt> und der <Variablen als Unbestimmte> (T15 und folgende, nicht abgedruckte Turns). Dadurch ist Christian in der Lage Terme durch Ergebnisse eingesetzter Werte aufeinander zu beziehen. Was sich in seinem Konzept <Gleichwertige Terme als Einsetzungsgleich> zeigt (Abb. 2). Gleichzeitig scheint der Lernende in T15 den Bezug zur Graphik aus (I) zwar über die gegebenen Terme, nicht aber über die eingesetzten Werte herstellen zu können (graue Perspektive Abb.2). Durch das implizit genutzte Theorem-in-Aktion in T18 ||Um die Terme der Graphik zuzuordnen, überlege ich inwiefern sie den Flächeninhalt berechnen||, steht für ihn die Graphik weiterhin in Beziehung mit den Termen. Die in dieser Verbindung genutzten Konzepte der <Graphik als konkrete Zeichnung> und der <Variablen als Namen der Kanten>, ermöglichen ihm zwar ein Verständnis der <Terme als konkret Beschreibungsgleich>, stehen allerdings als unvereinbare Perspektive (der schwarzen Perspektive Abb.2) dem Verständnis der Terme als etwas allgemeines, in das man Werte einsetzen kann, gegenüber.

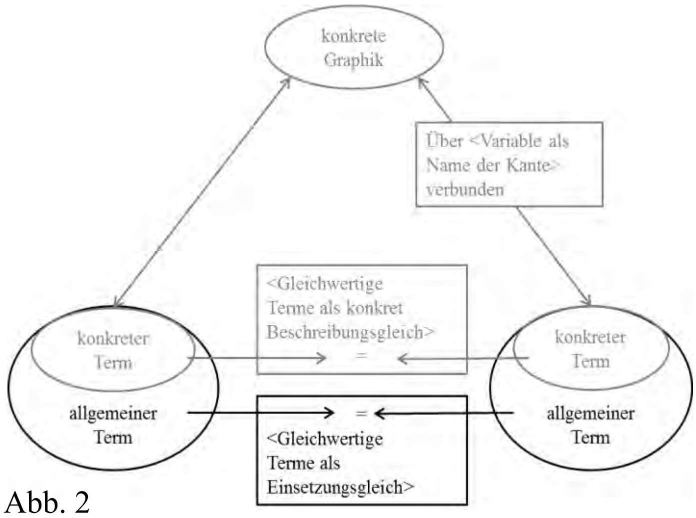


Abb. 2

Die Dimension des Allgemeinheitsverständnisses, das sich hier limitierend auf den Verständnisprozess zur Gleichwertigkeit in seinen einzelnen Elemente (Term, Graphik und Variablen) und deren Verbindung auswirkt, ist eine zentrale Herausforderung im Lernprozess.

4. Konsequenzen für den Entwicklungs- und Forschungsprozess

Der systematische Aufbau eines Allgemeinheitsverständnisses wurde Ausgangspunkt für Designveränderungen. Es wurden Lerngelegenheiten geschaffen und weiter entwickelt zum systematischen und vernetzten Aufbau eines allgemeinen Einsetzungsverständnisses. Zudem bietet das Allgemeinheitsverständnis ein Erklärungsansatz in der Beschreibung von Vorstellungsentwicklungsprozessen zur Gleichwertigkeit von Termen.

Literatur

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. In: Lester, F. K. (Hrsg.), *Second Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning*. (S. 707-762). Information Age Publishing: Greenwich, CT.

Kieran, C. & Sfard, A. (1999). The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(1), 1- 17.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig et al.: Vieweg.

Mason, J. et al. (1985). *Routes to / Roots of Algebra*. Milton Keynes: University Press.

Pilet, J. (2012). Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une platforme en ligne et évaluation. Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot Paris 7.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor. Kalkül In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 213-234). Beltz: Weinheim.

Prediger, S., Zwetzschler, L., & Schmidt, U. (2011). Preise des Fensterbauers – Flächenberechnungen automatisieren und Terme vergleichen. Erprobungsversion eines Schulbuchkapitels. In: Leuders, T., Prediger, S., Hußmann, S., & Barzel, B. (Hrsg.), *Mathewerkstatt 8*. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S. & Zwetzschler, L. (2013, in Vorb.). Topic-specific design research with a focus on learning processes. In: T. Plomp & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research: Introduction and Illustrative Cases* (Arbeitstitel).

Treffers, A. (1987). Integrated column arithmetic according to progressive schematisation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 125–145.

Vergnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. In L. P. Steffe & P. Nesher (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 219-239). Erlbaum: Mahwah.

Wellstein, H. (1978): Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen. In: Didaktik der Mathematik 6(1), 54-64.

Zwetzschler, L. & Prediger, S. (2013, im Druck). Conceptual obstacles for understanding the equivalence of expressions – A case study. In B. Ubuz et al. (Hrsg.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8), Antalya 2013.

Teil 3: Posterbeiträge

Henrike ALLMENDINGER, Siegen

Felix Klein und das Prinzip der Veranschaulichung – Zur Rolle der Anschauung in der Lehrerbildung

Felix Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* ist eine Vorlesungsreihe, die sich an fortgeschrittene Mathematikstudenten richtet mit dem Ziel, die viel beklagte doppelte Diskontinuität zu überwinden. Zur Entwicklung des höheren Standpunkts trägt bei, dass Klein unterschiedliche Perspektiven einnimmt – eine fachmathematische, eine mathematikhistorische, eine quasi mathematikdidaktische und eine mathematikphilosophische. Zum anderen wird der höhere Standpunkt durch Prinzipien der Vermittlung mathematischer Inhalte konstituiert, die sich als zentral für die Vorlesungskonzeption identifizieren lassen: die *innermathematische Vernetzung*, das *Prinzip der Veranschaulichung*, die *Anwendungsorientierung* und das *genetische Prinzip* (vgl. Allmendinger und Spies (2013)).

Besonders im Hinblick auf die späteren beruflichen Anforderungen räumt Klein dem Prinzip der Veranschaulichung einen großen Stellenwert ein:

„*Der Lehrer muss sozusagen ein wenig* Diplomat *sein, er muß auf die seelischen Vorgänge im Knaben Rücksicht nehmen, um sein Interesse packen zu können, und das wird ihm nur gelingen wenn er die Dinge in* anschaulich faßbarer Form *darbietet.*“ (Klein 1908, S. 4)

Dieses Kleinsche Prinzip soll hier anhand eines typischen Beispiels der Vorlesung charakterisiert werden. Klein thematisiert (regelmäßige) Kettenbrüche. Jede positive reelle Zahl ω lässt sich folgendermaßen als Kettenbruch darstellen:

$$\omega = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \cdots}}, \qquad n_0, n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}.$$

Bei rationalem ω ist die Folge der n_i endlich; bei irrationalen Zahlen hingegen ist die Kettenbruchentwicklung „unbegrenzt fortsetzbar“ (Klein 1908, S. 46). Die Brüche, die entstehen, wenn man die Kette nach endlich vielen Schritten abbricht, ergeben besonders gute Näherungswerte:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0},\ n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1},\ n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2},\ \ \ldots$$

Unter allen Brüchen, deren Nenner nicht größer als q_r ist, liefert $\frac{p_r}{q_r}$ die beste Approximation von ω (vgl. Klein 1908, S. 46f). Zunächst verdeutlicht Klein dies am Beispiel der Kettenbruchentwicklung von π. Diese Art der Veranschaulichung mit Hilfe von prototypischen Beispielen – ohne den Anspruch, die Allgemeingültigkeit abzubilden – nutzt Klein an vielen Stellen. Insbesondere zeigt sich daran, dass Klein den Begriff der Anschauung über geometrische Darstellungen hinausgehend versteht:

„[...] muß man doch auch bei abstraktester Formulierung mit den Symbolen, mit denen man operiert, stets noch eine gewisse Anschauung verknüpfen, schon um sie nur immer wiedererkennen zu können, und sei es auch, daß man bloß an das Aussehen der Buchstaben denkt.“ (Klein 1908, S. 15)

Als weiteres Veranschaulichungsmittel zieht Klein eine geometrische Deutung heran: Man denke sich den ersten Quadranten eines Koordinatensystems mit einer Markierung an jeder Stelle mit ganzzahligen Koordinaten, einem sogenannten Punktegitter. Klein betrachtet nun statt der positiven reellen Zahl ω die Ursprungsgerade mit Steigung ω, die er als „Leitstrahl“ bezeichnet.

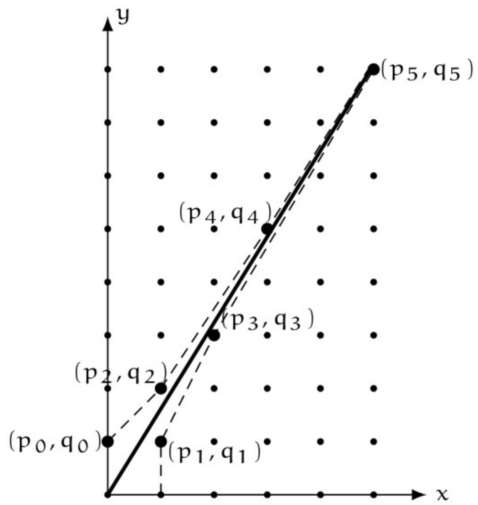


Abbildung 1: (Klein 1908, S. 48)

Das Punktegitter vergleicht Klein mit dem Anblick des Sternenhimmels, genauer der Milchstraße, und will durch diese Metapher hervorheben, wie bemerkenswert es ist, dass der Leitstrahl einer irrationalen Zahl keinen einzigen Punkt des Gitters trifft (vgl. Klein 1908, S. 48f). Dieser metaphorische Vergleich leistet damit mehr, als die geometrische Darstellung (vgl. Abb. 1) alleine, welche die dem Sachverhalt innewohnende Unendlichkeit nur andeuten kann.

In dieser geometrischen und metaphorisch ergänzten Deutung lässt sich nun eine Beziehung zu der Kettenbruchentwicklung herstellen, die Klein wieder mit Hilfe alltäglicher Assoziationen formuliert:

„Denken wir uns in alle ganzzahligen Punkte Stifte oder Stecknadeln gesteckt [...] und umschlingen wir den Stifthaufen rechts und links des ω-Strahls mit je einem Faden, den wir straff anziehen, so sind die Ecken der entstehenden, die beiden Punkthaufen begrenzenden, konvexen Fadenpolygone gerade unsere Punkte (p_r, q_r), welche die Zähler und Nenner der sukzessiven reduzierten Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von ω zu Koordinaten haben, und zwar gehören zu dem linken Polygon die Näherungsbrüche mit geradem, zu dem rechten die mit ungeradem Index.“ (Klein 1908, S. 48)

Die geometrische Auslegung des Sachverhalts stellt dabei anschaulich dar, wie die gute Approximation von ω durch die Näherungswerte der Kettenbruchentwicklung erfolgt; die Rechenmethode, die der Kettenbruchentwicklung zugrunde liegt, wird naturgemäß nicht abgebildet.

Damit zeigen sich drei Facetten des Kleinschen Prinzips der Veranschaulichung mit jeweils unterschiedlicher Bedeutung für die Erfassung einer Sachlage: Anschauung anhand von *prototypischen Beispielen*, Anschauung durch *geometrische Deutung* und Anschauung mit Hilfe von *Metaphern*. Klein bemüht sich darüber hinaus (und an anderer Stelle) auch um eine von Anschauung geleitete Begriffsbildung und um anschauliche Beweise von Theoremen, die in weiten Teilen über den von ihm als elementarmathematisch bezeichneten Inhalt hinausgehen. Insgesamt verfolgt er damit das Ziel, den Dingen ein „ganz elementares, leicht faßliches Aussehen“ (Klein 1908, S. 241) zu geben.

Vor diesem Hintergrund lässt sich hinterfragen, inwiefern Felix Klein tatsächlich *Elementarmathematik von einem höheren Standpunkte aus* lehrt. Folgt man Kirsch, der das „Zugänglich-machen durch Wechseln des Mediums der Repräsentation“ (Kirsch 1977, S. 97) als einen zentralen Aspekt des Vereinfachens ansieht, muss m.E. die Kleinsche Vorlesungsreihe an vielen Stellen eher als *höhere Mathematik von einem elementaren Standpunkte aus* verstanden werden. Klein verfälscht dabei selbstverständlich die Inhalte nicht durch die von ihm gewählte anschauliche Darstellung und behält so die von Kirsch geforderte „Vollwertigkeit der Darstellungsmedien“ (Kirsch 1977, S. 99) bei.

Darüber hinaus wirkt aus heutiger Sicht die stark von Metaphern getragene Sprache der Vorlesung eher alltagssprachlich. Sie grenzt sich damit von der heute an Universitäten durch fachmathematisches Vokabular geprägten Sprache ab und scheint dadurch zugänglicher bzw. elementarer, da sie an die Erfahrungswelt der Lernenden anknüpft. Inwieweit eine solche Gegenüberstellung der Alltags- und Fachsprache als von Klein bewusst eingesetztes Veranschaulichungsmittel angesehen werden kann oder dem zu Kleins Zeit üblichen Sprachduktus geschuldet ist, bleibt noch zu klären.

Abschließend lassen sich aber auch umgekehrt einige Argumente für die Entwicklung eines *höheren Standpunktes zur Elementarmathematik* mit Hilfe des Prinzips der Veranschaulichung benennen, die somit Kleins Vorlesungstitel in gewissem Sinne rechtfertigen: Gerade durch die elementarisierte Darstellung hochschulmathematischer Inhalte wird eine Verbindung zur Schulmathematik offengelegt. Weiter wird durch verschiedene Repräsentationen und (insbesondere anschaulich-geometrische) Darstellungen ein beweglicher und facettenreicher Umgang mit Mathematik geschult, der als Element eines höheren Standpunktes, wie ihn beispielsweise Beutelspacher et al. (2011) propagieren, verstanden werden kann. Schließlich kann Veranschaulichung zur Reflexion und einem „tieferen Verständnis" eines bekannten Gegenstands führen, indem sie nach Kirsch neue Zugänge „auf der jeweils geeigneten Stufe der Repräsentation" (Kirsch 1977, S. 99) ermöglichen.

Literatur

Allmendinger, H., Spies, S. (2013): „Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt" – Das Zwischenstück in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* als Stilgeschichte und Kleinsches Programm . In: Rathgeb, M., Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G., Krömer, R.: Mathematik als Prozess. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011): Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Kirsch, A. (1977): Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: Didaktik der Mathematik, 5 (2), 87 – 101.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band I: Arithmetik, Algebra und Analysis. Berlin: Springer.

Meta Miriam BÖNNIGER, Udo KÄSER, Bonn

Wie entwickelt sich die Fähigkeit des Kopfrechnens? Eine längsschnittliche Analyse bei Schülerinnen und Schülern des vierten Schuljahres

Überprüfung und Vergleich schulischer Leistungen sind zur Zeit in Deutschland und vielen anderen Ländern aktuell. In der TIMSS-Studie 2011 lagen die mathematischen Leistungen deutscher Viertklässler im oberen Drittel der internationalen Rangreihe. Die Kinder zeigten aber relative Schwächen im Bereich Arithmetik. Arithmetische Fertigkeiten wie Kopfrechenfähigkeiten zählen aber zu mathematischen Grundkompetenzen und werden sowohl im Alltag als auch in der Schule immer wieder benötigt. Die vorliegende Studie untersucht daher die Kopfrechenfähigkeit bei Kindern von der Mitte bis zum Ende der vierten Klasse. Dabei sollen mögliche Prädiktoren für die Leistung beim Lösen von Kopfrechenaufgaben und ihrer Entwicklung identifiziert werden.

Methode

26 Mädchen und 28 Jungen der vierten Klasse wurden zu drei Messzeitpunkten untersucht. Abb. 1 stellt das Design der Studie dar.

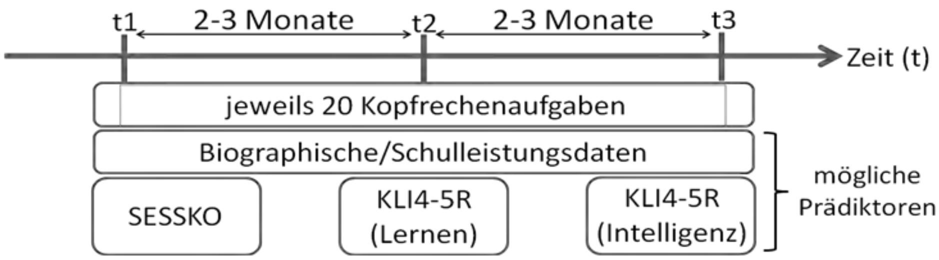


Abbildung 1. Design und erhobene Instrumente der Studie

Zu allen drei Messzeitpunkten wurden den Probanden in Einzeltestung 20 Kopfrechenaufgaben (2 Additions-, 3 Subtraktions-, 9 Multiplikations- und 6 Divisionsaufgaben) unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades gestellt, die mit der Methode des „lauten Denkens“ gelöst werden sollten. Weiterhin wurden auch jeweils in Einzeltestungen biographische und Schulleistungsdaten ebenso wie das schulische Selbstkonzept via SESSKO sowie die Lern- und Intelligenzleistung via KLI4-5R als mögliche Prädiktoren der Kopfrechenfähigkeit erfasst.

Ergebnisse

Insgesamt lässt sich eine deutliche Verbesserung der Kopfrechenleistung im Verlauf des vierten Schuljahrs beobachten (vgl. Abb. 2).

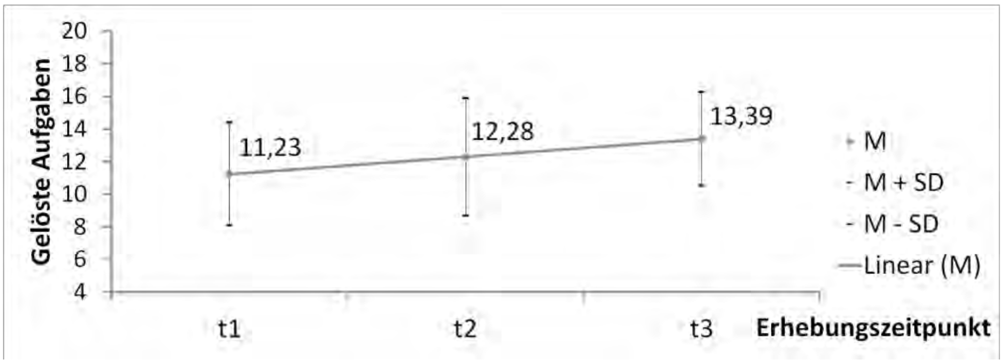


Abbildung 2. Durchschnittliche Rechenleistung über alle drei Zeitpunkte

Die stärksten Verbesserungen zeigen sich bei Subtraktion (von 56,5% auf 75,3%) und Division (von 39,6% auf 63,9%). Als signifikanter Prädiktor erweist sich für die Leistung zu t_1 der Subtest „Zahlenumwandeln" des Lernteils vom KLI4-5R (β=0,335; $T_{(52)}$=2,560; p=0,013; R^2=0,112), für t_2 und t_3 der Subtest „Rechenaufgaben" des Intelligenzteils vom KLI4-5R (β=0,386; T_{52}=3,016; p=0,004; R^2=0,149 bzw. β=0,423; T_{52}=3,369; p=0,001; R^2=0,179). Für den Entwicklungsverlauf ist die Anfangsleistung ein signifikanter Prädiktor ($F_{(2, 51)}$=4,377; p=0,018; $\eta_p{}^2$=0,147).

Diskussion

Im Mittel zeigt sich eine Verbesserung der Kopfrechenleistung im vierten Schuljahr. Jedoch fällt die mittlere Lösungshäufigkeit am Ende des vierten Schuljahrs vor dem Hintergrund der curricularen Anforderungen (Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW, 2008) unzureichend aus. Der replizierte Befund, dass vor allem hohes Vorwissen den Lernfortschritt in mathematischen Leistungen begünstigt (Stern, 2004), unterstreicht die Wichtigkeit mathematischer Frühförderung. In der Grundschule sollte daher noch mehr Wert auf Übungen zum Kopfrechnen und zur Strategieverwendung gelegt werden (Gasteiger & Paluka-Grahm, 2013).

Literatur

Gasteiger, H. & Paluka-Grahm, S. (2013). Strategieverwendung bei Einmaleinsaufgaben – Ergebnisse einer explorativen Interviewstudie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34*, 1-20.

Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (Hrsg.) (2008). *Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes NRW.* Zugriff am 28.07.2012 unter http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/ lehrplaene_download/grundschule/grs_faecher.pdf.

Stern, E. (2004). *Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen. Tätigkeitsbericht des Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin.* Zugriff am 27.11.2012 unter http://www.mpg.de/858105/pdf.pdf.

Anika DREHER, Kirsten WINKEL, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Lernen anregen mit vielfältigen Darstellungen im Mathematikunterricht – Das Projekt La viDa-M

Vielfältige Darstellungen zu nutzen ist nicht nur einer von sechs Kompetenzbereichen der KMK-Bildungsstandards für den Mathematikunterricht, sondern stellt eine Schlüsselfähigkeit beim Aufbau eines flexibel nutzbaren mathematischen Begriffsverständnisses dar (Duval, 2006; Kuntze, 2013). Dies liegt daran, dass mathematische Objekte nur über Darstellungen zugänglich werden. Verschiedene Darstellungen betonen dabei meist unterschiedliche Aspekte des jeweiligen mathematischen Objekts, woraus sich die Bedeutung des Nutzens vielfältiger Darstellungen und damit des Wechselns zwischen diesen Darstellungen ergibt. Im Projekt La viDa–M (Dreher, Kuntze & Winkel, 2012) sollen daher Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in diesem Bereich untersucht werden. Diese Kompetenzen werden inhaltsbereichsspezifisch untersucht, indem auf das Nutzen von Darstellungen für Brüche fokussiert wird.

Die Kompetenz, zwischen Darstellungen in diesem Bereich wechseln zu können, Darstellungswechsel beurteilen und bezogen auf Darstellungen und den Wechsel zwischen ihnen argumentieren zu können, soll im Projekt La viDa–M in einer mehrebenenanalytischen Herangehensweise auch mit dem professionellen Wissen von Lehrkräften in Zusammenhang gebracht werden. Hierfür wird auf ein Modell professionellen Wissens (Kuntze, 2012) aufgebaut, das eine Einordnung relevanter Komponenten von Professionswissen auch im Spektrum zwischen übergreifendem und inhaltsbereichsspezifischem Wissen bzw. Sichtweisen erlaubt. Bezüglich professionellen Wissens zum Nutzens vielfältiger Darstellungen konnte im Projekt La viDa–M an Ergebnisse von Vorarbeiten (z.B. Dreher & Kuntze, 2012, Dreher, Kuntze & Lerman 2012; Dreher & Kuntze, akzeptiert; Dreher, Nowinska & Kuntze, eingereicht) angeknüpft werden.

Im Mittelpunkt der ersten Projektphase von La viDa–M stehen Fragestellungen zur Kompetenz von Lernenden und zum Einfluss professionellen Wissens von Lehrkräften auf die Kompetenzentwicklung. Bereits vorhandene erprobte Befragungsinstrumente für Lehrkräfte wurden hierfür durch neu entwickelte Fragebögen und Tests für Schüler(innen) ergänzt, um eine mehrebenenanalytisch auswertbare empirische Studie durchführen zu können. Als Variablen auf Individualebene werden neben den Scores eines Kompetenztests Sichtweisen der Schülerinnen und Schüler einbezogen. Auf der Klassenebene fokussiert die Studie auf Merkmale des Unterrichts aus Sicht von Schülerinnen und Schülern sowie von Lehrkräften, auf

Schulleistung (Klassenebene) und auf professionelles Wissen und Sichtweisen der Mathematiklehrkräfte. Erste Ergebnisse aus einer Pilotstudie und der Hauptuntersuchung der ersten Projektphase liegen bereits vor und werden im Rahmen einer moderierten Sektion vorgestellt.

Ausblick

Die zweite Projektphase wird sich auf die Erprobung der Wirksamkeit von Förderkonzepten zum Nutzen vielfältiger Darstellungen konzentrieren und auf die gewonnenen Erkenntnisse aufbauen. Derzeit werden schüler(innen)zentrierte Unterrichtsmaterialien als Grundlage von Förderkonzepten entwickelt. Diese Lernumgebungen werden dann mit den in der ersten Projektphase entwickelten Instrumenten evaluiert.

Im Bereich der Untersuchung professionellen Wissens von angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften werden Forschungsarbeiten aus La viDa–M auch in einem aktuell bewilligten Projekt zur darstellungsbezogenen Analysekompetenz fortgeführt. Dieses Projekt ist Teil eines kooperativen Promotionskollegs an den Pädagogischen Hochschulen Heidelberg und Ludwigsburg.

Literatur

Dreher, A., Kuntze, S., & Lerman, S. (2012). Pre-service teachers' views on using multiple representations in mathematics classrooms – an inter-cultural study. In Tso,T. Y. (Ed.). Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2 (pp. 211-218). Taipei, Taiwan: PME.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2012). Pre-service teachers' views about pictorial representations in tasks 12th International Congress on Mathematical Education. [8 July – 15 July, 2012]. Topic Study Group 27 (pp. 5705-5713). Seoul, Korea COEX.

Dreher, A. & Kuntze, S. (akzeptiert). Pre-service and in-service teachers' views on the learning potential of tasks – Does specific content knowledge matter? CERME 2013.

Dreher, A., Nowinska, E. & Kuntze, S. (eingereicht). Awareness of dealing with multiple representations in the mathematics classroom – a study with teachers in Poland and Germany. PME 2013.

Dreher, A., Winkel, K. & Kuntze, S. (2012). Encouraging Learning with Multiple Representations in the Mathematics Classroom. In Tso, T. Y. (Ed.). Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1 (p. 231). Taipei, Taiwan: PME.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61, 103–131.

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: global, content domain-related and situation-specific components. Educational Studies in Mathematics, 79(2), 273-292.

Kuntze, S. (2013). Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In Wagner, A. et al. (Hrsg.). In J. Sprenger, A. Wagner, M. Zimmermann (Hrsg.). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen (S. 17-34). Wiesbaden: Springer.

Martin Erik HORN, Berlin

Eine Einführung in unterschiedliche Darstellungen der Pauli-Algebra: Konzeption eines Lehrbuchs

Mit Hilfe der Geometrischen Algebra können mathematische und physikalische Modellierungen strukturell übersichtlich und konzeptuell anschaulich dargestellt und verstanden werden. Insbesondere nicht-kommutative Beziehungen lassen sind didaktisch nachvollziehbar und erstaunlich einfach beschreiben. Die Geometrische Algebra wird deshalb von Didaktikern wie David Hestenes (2003) als universelle mathematische Sprache verstanden, die die derzeit vorwiegend genutzte Standarddarstellung der Linearen Algebra ergänzen kann oder sogar ersetzen sollte.

Die Aufarbeitung der Geometrischen Algebra für den schulischen und hochschulischen Bereich sollte somit ein vordringliches Ziel der Mathematik- und Physikdidaktiken sein. Ein deutschsprachiges Lehrbuch zur Geometrischen Algebra fehlte allerdings bisher. Diese liefert nun das unter www.bookboon.com/de veröffentlichte Lehrbuch (Horn 2012b), das in die Geometrische Algebra des dreidimensionalen Raumes auf Grundlage der Pauli-Algebra einführt.

1. Multi-Modaler Zugang

Eine der wesentlichen didaktischen Stärken der Geometrischen Algebra besteht darin, geometrischen und algebraischen Beschreibungen einen gemeinsamen Rahmen zu geben: Algebraische Zusammenhänge können direkt in geometrische Beziehungen übersetzt werden. Und umgekehrt können geometrische Sachverhalte problemlos und eindeutig in algebraischer Form dargestellt werden. Dieser Gleichklang zwischen Geometrie und Algebra fördert und erleichtert die Analyse komplexer Fragestellungen.

Unterstützt wird dieser konzeptuelle Gleichklang durch die Möglichkeit, unterschiedlichen Zugangsweisen zu folgen. So kann ein Zugang über einen algebraischen Weg für Lernende mit abstrakt-symbolischer Vorprägung erfolgen, indem ein Einstieg über die Algebra der Pauli-Matrizen (Horn 2012b, Kap. 2) gewählt wird. Alternativ dazu können Lernende mit visuell-geometrischer Vorprägung einen Einstieg über die Geometrie der Pauli-Algebra (Horn 2012b, Kap. 3) erlangen. Die Erarbeitung der Matrizendarstellung von Kap. 2 kann dann zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen.

2. Kernpunkte der Geometrischen Algebra

Pauli-Matrizen repräsentieren Basisvektoren der dreidimensionalen, Euklidischen Welt, in der wir näherungsweise unter Vernachlässigung relativistischer Effekte leben. Gleichzeitig repräsentieren Pauli-Matrizen Basis-Reflexionen, also Generatoren von Spiegelungen, in dieser Welt. Die Algebra der Pauli-Matrizen bildet somit den konzeptuellen Kern einer Geometrischen Algebra des Dreidimensionalen. Dieser inhaltlichen Schwerpunktsetzung folgt auch die Konzeption des Lehrbuchs mit der Diskussion geometrischer Operanden (Horn 2012b, Kap. 3) und geometrischer Operatoren (Horn 2012b, Kap. 4).

3. Darstellungen der Pauli-Algebra

Bei der konzeptuellen Gestaltung des Buches wurde besonderen Wert darauf gelegt, Verknüpfungen und Verbindungen zu anderen Algebren offenzulegen und zu hinterfragen. Die Algebra komplexer Zahlen und die reelle Quaternionenalgebra sind als Subalgebren in der Pauli-Algebra enthalten.

Darüber hinaus ist die Pauli-Algebra zur Paravektor-Algebra und zur komplexen Quaternionenalgebra isomorph. Insbesondere dieser letzte Sachverhalt wird ausführlich dargestellt und in zahlreichen Beispielaufgaben aufgearbeitet. In diesem Kontext werden die quaternionischen Basiseinheiten ***i***, ***j*** und ***k*** als orientierte Einheitsflächenstücke $\sigma_y\sigma_z$, $\sigma_z\sigma_x$ und $-\sigma_x\sigma_y$ (Horn 2012b, Kap. 5) gedeutet.

Darüber hinaus ist es ein historischer Zufall, dass Pauli-Matrizen heute vorwiegend als (2 x 2)-Matrizen dargestellt werden. Deshalb wird im letzten Teil des Buches (Horn 2012b, Kap. 6) eine alternative Darstellung der Pauli-Algebra durch S_3-Permuationsmatrizen eingeführt. Diese Darstellung hat auch erkenntnistheoretisch einige Relevanz, da sie als eine Mathematik ohne negative Basisgrößen (Horn 2012a) interpretiert werden kann.

4. Zielgruppen

Hauptsächliche Zielgruppe dieses Buches sind Lernende und Lehrende auf Hochschulniveau der Anfangssemester, die einen sowohl anschaulichen wie auch grundlegenden Einstieg in die Geometrische Algebra suchen. Sie werden durch zahlreiche Aufgaben und Musterlösungen bei der eigenständigen Erarbeitung der fachlichen Inhalte unterstützt.

Literatur

Hestenes, D. (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. American Journal of Physics. 71 (2), 104-121.

Horn, M. E. (2012a): Die Geometrische Algebra der (3 x 3)-Matrizen. In: M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM, 393-396.

Horn, M. E. (2012b): Pauli-Algebra und S_3-Permutationsalgebra. Eine algebraische und geometrische Einführung. Ventus Publishing ApS, URL: http://bookboon.com/de/studium/mathematik/pauli-algebra-und-s3-permutationsalgebra [29. Okt. 2012].

Frank HELLMICH, Fabian HOYA, Paderborn

Implizite Theorien von der Veränderbarkeit eigener Fähigkeiten bei Kindern im Mathematikunterricht der Grundschule – Ergebnisse aus einer empirischen Studie

Implizite Fähigkeitstheorien stellen wichtige Voraussetzungen für Lernprozesse im Mathematikunterricht dar. So wird beispielsweise vermutet, dass implizite Fähigkeitstheorien die Lern- und Leistungsmotivation beim Mathematiklernen beeinflussen und sich entsprechend auf Kompetenzerwerbsprozesse auswirken. Im Rahmen des vorliegenden Beitrags werden implizite Fähigkeitstheorien im Zusammenhang mit der Lern- und Leistungsmotivation bei Kindern am Ende der Grundschulzeit betrachtet. Die Befunde geben Hinweise darauf, dass dynamisch ausgeprägte Fähigkeitstheorien eng mit der intrinsischen Motivation zusammenhängen.

1. Theoretischer und empirischer Hintergrund

Unter impliziten Fähigkeitstheorien von Kindern werden Überzeugungen in Hinblick auf die Veränderbarkeit eigener Fähigkeiten verstanden. Verfügt ein Kind über eine dynamische Fähigkeitstheorie, so geht es von der Annahme der Veränderbarkeit der eigenen Fähigkeiten durch eigenes Zutun aus. Zeigt ein Kind hingegen eine statische Fähigkeitstheorie, so werden Fähigkeiten als weitgehend unveränderlich betrachtet (vgl. Dweck, 2000). Effekte von impliziten Fähigkeitstheorien werden insbesondere in Hinblick auf die Lern- und Leistungsmotivation bei Kindern im Grundschulalter berichtet: Im Detail wird dabei angenommen, dass Kinder, deren implizite Überzeugungen in Bezug auf die Veränderbarkeit eigener Fähigkeiten statisch ausgeprägt sind, in der Regel Lernsituationen ohne Herausforderungscharakter wählen, eine niedrige Erwartungshaltung haben, wenig ausdauernd lernen und insgesamt eher leistungsmotiviert agieren. Bei Kindern mit dynamischen Überzeugungen ist hingegen wahrnehmbar, dass sie Lernsituationen mit Herausforderungscharakter auswählen. Beim Lernen sind diese Kinder optimistisch, lernmotiviert und zuversichtlich in Hinblick auf das Erreichen der Lernziele (vgl. Dweck, 2000). Wenn Zusammenhänge zwischen impliziten Fähigkeitstheorien und Motivationen bei Kindern in Mathematik auch theoretisch plausibel erscheinen, so fehlen doch Studien zur Überprüfung dieser Vermutungen. Im Rahmen unserer Studie wird angenommen, dass sich ein positiver signifikanter Zusammenhang zwischen dynamischen Fähigkeitstheorien von Kindern und ihrer Lernmotivation im Unterrichtsfach Mathematik nachweisen lässt; umgekehrt wird ein positiver signifikanter Zusammenhang zwischen statischen Fähigkeitstheorien von Kindern und ihrer Leistungsmotivation in Mathematik erwartet.

2. Empirische Untersuchung: Stichprobe, Methode und Ergebnisse

In der Studie wurden insgesamt N=593 Kinder (272 Mädchen und 321 Jungen) aus dem dritten (306 Kinder) und dem vierten Schuljahr (287 Kinder) aus niedersächsischen Grundschulen befragt. Vorgelegt wurden ihnen im Rahmen eines Fragebogens zwei Skalen zur Erfassung ihrer impliziten Fähigkeitstheorien: Skala „Dynamische Fähigkeitstheorie“ (8 Items; α=.73; *M*=4,43; *SD*=0,57; z.B.: „Wenn ich in Mathe einen Fehler gemacht habe, versuche ich mich zu verbessern.“) und Skala „Statische Fähigkeitstheorie“ (8 Items; α=.79; *M*=1,32; *SD*=0,52; z.B.: „Wenn ich in Mathe einen Fehler mache, gebe ich auf.“). Zusätzlich beantworteten die Kinder Fragen zu ihrer Lernmotivation (9 Items; α=.89; *M*=4,25; *SD*=0,77; z.B.: „Für Mathe lerne ich, weil ich alles gerne verstehen möchte.“) und ihrer Leistungsmotivation (8 Items; α=.88; *M*=3,47; *SD*=1,01; z.B.: „In Mathe strenge ich mich an, weil ich für gute Noten belohnt werde.“).

Auf der Grundlage der Ergebnisse kann von einer engen Korrelation zwischen einer dynamisch konnotierten impliziten Fähigkeitstheorie und der Lernmotivation bei den befragten Kindern ausgegangen werden (r=.63; p≤.01): Kinder, die von der Veränderbarkeit ihrer eigenen mathematischen Fähigkeiten überzeugt sind, sind demnach intrinsisch motivierter als Kinder, die ihre Fähigkeiten durch eigenes Zutun für weitaus weniger beeinflussbar halten. Entgegen der theoretischen Annahme liegt aber kein signifikanter Zusammenhang zwischen dem Vorhandensein einer statischen Fähigkeitstheorie und der Leistungsmotivation bei den Kindern vor (r=-.07; p=n.s.).

3. Zusammenfassung und Diskussion

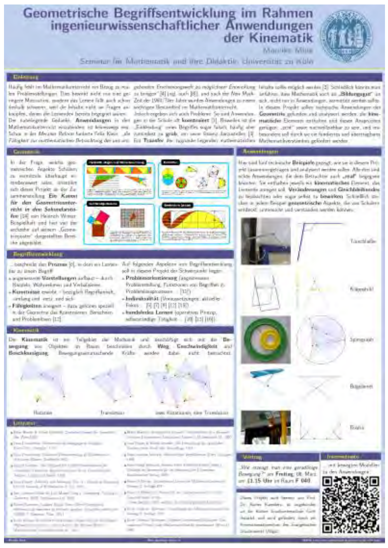
Betrachtet man die Ergebnisse aus der Studie im Detail, so wird deutlich, dass ein Großteil der befragten Kinder seine mathematischen Fähigkeiten als veränderbar einschätzt. Damit zeigt sich, dass die Kinder in der Regel in der zweiten Hälfte der Grundschulzeit über gute persönliche Ressourcen verfügen, um auf den weiterführenden Schulen weiterlernen zu können. Die berichteten Befunde geben weiter Hinweise auf einen engen Zusammenhang zwischen impliziten Fähigkeitstheorien und der Lernmotivation der Kinder. Konkrete Ursache-Wirkungsmechanismen müssten in Bezug auf die Entwicklung dieser beiden Konstrukte im Rahmen von Langzeitstudien in den Blick genommen werden.

Literatur

Dweck, C. S. (2000): Self-Theories. Their role in motivation, personality, and development. Lillington, NC: Edwards Brothers.

Mareike MINK, Köln

Geometrische Begriffsentwicklung im Rahmen ingenieurwissenschaftlicher Anwendungen der Kinematik



Das Poster zeigt Aspekte eines gleichnamigen Promotionsprojektes. Nach einer kurzen Einleitung wird in vier Bereichen *Geometrie*, *Begriffsentwicklung*, *Kinematik* und *Anwendungen* dargelegt, wie diese jeweils in das Projekt eingebracht werden sollen.

1. Einleitung

Häufig fehlt im Mathematikunterricht ein Bezug zu realen Problemstellungen. Dies bewirkt nicht nur eine geringere Motivation, sondern das Lernen fällt auch schon deshalb schwerer, weil die Inhalte nicht an Fragen anknüpfen, denen die Lernenden bereits begegnet wären.

Die naheliegende Forderung nach Einbindung von Anwendungen in den Mathematikunterricht wurde schon von Felix Klein in der *Meraner Reform* erhoben (Gutzmer 1908), und nach der *New Math*-Zeit wurde diese mehr und mehr umgesetzt.

Jedoch ergeben sich auch Probleme. So sind Anwendungen in der Schule oft konstruiert (Bender Schreiber 1985). Bisweilen ist die „Einkleidung“ eines Begriffes sogar falsch, häufig aber zumindest zu grob, um seine Essenz darzustellen (Freudenthal 1983). Ein Transfer der zugrunde liegenden mathematischen Inhalte sollte möglich werden (Freudenthal 1973). Schließlich könnte man anführen, dass Mathematik auch als „Bildungsgut“ an sich, nicht nur in Anwendungen, vermittelt werden sollte.

In diesem Projekt sollen technische Anwendungen der Geometrie gefunden und analysiert werden, die kinematische Elemente enthalten und diesen Ansprüchen genügen: „echt“ sowie nachvollziehbar zu sein, und insbesondere soll durch sie ein fundiertes und übertragbares Mathematikverständnis gefördert werden.

2. Geometrie

In der Frage, welche geometrischen Aspekte Schülern zu vermitteln überhaupt erstrebenswert wäre, orientiert sich dieses Projekt an der Zusammenstellung *Ein Kanon für den Geometrieunterricht in den Sekundarstufen* von Heinrich Winter. Beispielhaft sind vier der sechzehn auf seinem „Geometrieposter“ dargestellten Bereiche abgebildet.

3. Begriffsentwicklung

... meint den Prozess, in dem ein Lernender zu einem Begriff Vorstellungen aufbaut, Kenntnisse erwirbt und sich Fähigkeiten aneignet (Weigand et al. 2009). Auf folgenden Aspekten von Begriffsentwicklung liegt in diesem Projekt der Schwerpunkt: *Problemorientierung* (angemessene Problemstellung, Funktionen von Begriffen in Problemlöseprozessen ... (Vollrath 1984)), *Individualität* (Voraussetzungen, Fokus ... (Hewitt 2001, Wittmann 1981), *handelndes Lernen* (operatives Prinzip, selbstständige Tätigkeit ... (Piaget Inhelder 1993, Winter 1997, Wittmann 1985)).

4. Kinematik

… beschäftigt sich als Teil der Mechanik mit der Bewegung von Objekten im Raum, beschrieben durch Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

5. Anwendungen

Hier sind fünf technische Beispiele aus dem Projekt gezeigt: Türschließer, Klappstuhl, Spirograph, Bügelbrett, Bustür. Alle sind „echte“ Anwendungen und enthalten ein kinematisches Element sowie geometrische Aspekte, die von Lernenden untersucht und verstanden werden können.

Literatur

Bender, P., Schreiber, A. (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien: öbv.

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart: Klett-Cotta.

Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Kluwer.

Gutzmer, A. (1908): Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht. Leipzig und Berlin: Teubner.

Hewitt, D. (2001): Arbitrary and Necessary: Part 3 – Educating Awareness. In: For the Learning of Mathematics, 21 (2).

Piaget, J. & Inhelder, B. (1993, Neuauflage): Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. München: dtv.

Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begrifflehrens. Stuttgart: Klett.

Weigand, H.-G. et al. (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Winter, H. (1997[2]): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Vieweg.

Winter, H.: Ein Kanon für den Geometrieunterricht in den Sekundarstufen. http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/geometrieposter/.

Wittmann, E. (1985): Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: mathematik lehren, 11, 7 – 11.

Wittmann, E. (1981[6]): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Wiesbaden: Vieweg.

Gabriele MOLL, München

Mathematische Begründungsaufgaben in Vergleichsarbeiten der Grundschule: Ein Dissertationsprojekt

1. Hintergrund und Ziele

Im Rahmen von Vergleichsarbeiten in den dritten Klassen der Grundschule (VERA-3) werden jährlich fachbezogene Kompetenzen, die in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (2004) formuliert sind, überprüft. Die Testaufgaben sind dabei unterschiedlich gestaltet: Es gibt Aufgaben im Multiple-Choice Format, solche, die Kurzantworten erfordern, aber auch Aufgaben mit offenem Antwortformat, bei denen Erklärungen und Begründungen verlangt sind.

Aus empirisch entwickelten Kompetenzstufenmodellen (Reiss et al., 2012) geht hervor, dass Testaufgaben, in denen eine Begründung gefordert wird, eher geringe Lösungshäufigkeiten aufweisen. Unklar ist allerdings bislang, ob dies vor allem am Erfordernis einer Begründung liegt, oder ob diese Aufgaben weitere Merkmale haben, die Schwierigkeiten bei ihrer Bearbeitung generieren. Außerdem weisen Cohors-Fresenborg et al. (2004) darauf hin, dass im Bezug auf schwierigkeitsgenerierende Merkmale bislang hauptsächlich die Aufgaben selbst, nicht aber die tatsächlichen Lösungsprozesse der Schülerinnen und Schüler untersucht wurden.

Forschungsfragen sind daher:

1. Welche Merkmale haben die untersuchten Aufgaben, die Schwierigkeiten bei der Bearbeitung generieren könnten?
2. Gibt es bestimmte Ergebnisformate bei Testaufgaben, die eine höhere Lösungshäufigkeit erwarten lassen als andere?
3. Gibt es typische Strategien, die zu fehlerhaften bzw. zu korrekten Lösungen der Aufgaben führen.

2. Studiendesign

Zur Beantwortung der Forschungsfragen werden 40 Aufgaben mit offenem Antwortformat aus den VERA-3 Pilotierungen der Jahre 2010 bis 2012 untersucht. Jede der untersuchten Aufgaben wurde von mindestens 260 Schülerinnen und Schülern einer repräsentativen Stichprobe bearbeitet.

Zunächst werden die Aufgaben mittels eines Schemas klassifiziert, das sich im Wesentlichen auf das Klassifikationsschema aus dem Projekt COACTIV stützt (vgl. Jordan et al., 2006). Durch diese Einordnung sollen schwierigkeitsgenerierende Merkmale identifiziert werden.

Im weiteren Verlauf des Dissertationsprojektes soll dann anhand konkreter schriftlicher Lösungen ein Raster zur Analyse der Strategien von Schülerinnen und Schülern induktiv entwickelt werden. Zur Unterstützung dieses Entwicklungsprozesses sind Interviews mit Grundschülerinnen und Grundschülern zur Exploration geplant. Anhand des entwickelten Rasters können die Strategien, die in den Pilotierungsdaten zu finden sind, letztlich quantitativ ausgewertet werden.

3. Vermutungen

Besonders im Rahmen von PISA (Programme for International Student Assessment) wurde die Sprache als schwierigkeitsgenerierender Faktor bereits untersucht. Dabei geht es vornehmlich um das Verständnis von Sprache als Informationsträger in der Aufgabenstellung. Die Schwierigkeiten beim Bearbeiten von Begründungsaufgaben bei VERA-3 lassen sich jedoch vermutlich eher dem Bereich der Ergebnisrepräsentation, konkret dem Eigenständigen Formulieren einer Begründung, zuordnen.

Eine weitere Annahme ist, dass speziell das Begründen als Teilkomponente des mathematischen Argumentierens den Schülerinnen und Schülern Probleme bereitet. Offene Aufgabenstellungen, die nach einer Erklärung oder einer Beschreibung des eigenen Vorgehens fragen, müssten somit eher richtig gelöst werden als mathematische Begründungaufgaben im engeren Sinne.

Im Zusammenhang mit dem Argumentieren steht eine dritte Vermutung. Es wird angenommen, dass Aufgaben, bei denen erst eine Vermutung aufgestellt und diese dann begründet werden muss, weniger häufig gelöst werden als solche, bei denen eine gegebene Annahme begründet werden muss.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J., & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S.109-144). Wiesbaden: VS-Verlag.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M., & Kunter, M. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

KMK – Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.*

Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A., & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme, & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S.72-84). Münster: Waxmann.

Angela SCHMITZ, Freiburg

Visualisierung im Mathematikunterricht: Welche Repräsentationen sehen Lehrpersonen als nützlich an?

Ziel des Forschungsprojektes ist zu untersuchen, wie Lehrkräfte graphische Repräsentationen im Mathematikunterricht einsetzen und ihre Auswahl begründen.

1. Theoretischer Hintergrund

Graphische Repräsentationen sind eine anerkannte Strategie, um mathematische Objekte zu veranschaulichen (z.B. Presmeg 2006). Dabei gilt die Flexibilität im Wechsel zwischen Repräsentationen, z. B. zwischen Text und Graphik oder zwischen mehreren Graphiken, als wesentlich für mathematisches Verstehen (Duval 2006).

Andere Forschungsergebnisse zeigen, dass multiple externe Repräsentationen das Lernen vielfältig unterstützen. Jedoch können sie den Lernerfolg auch mindern: Eine wesentliche Schwierigkeit besteht darin, dass Lernende Beziehungen zwischen Repräsentationen nicht erkennen (Ainsworth 1999).

In diesem Zusammenhang ist bisher wenig untersucht, wie sich der aus mathematik-didaktischer Sicht wichtige Einsatz graphischer Repräsentationen tatsächlich im Unterricht gestaltet und welche Kriterien für Lehrpersonen handlungsleitend sind (Calderhead 1996, Presmeg 2006).

2. Fragestellung

Im Forschungsvorhaben wird untersucht, wie Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer der Sekundarstufe graphische Repräsentationen im Unterricht einsetzen und ihre Auswahl begründen. Im Zentrum der Fragestellung stehen dabei die Einstellungen der Lehrpersonen zum Nutzen der Repräsentationen.

Analysiert werden soll insbesondere, wie graphische Repräsentationen aus Sicht der Lehrkräfte Lehr- und Lernprozesse in Mathematik unterstützen und inwiefern sich bei Einsatz und Begründung Unterschiede in Hinblick auf beispielsweise Themengebiet oder Schulform zeigen.

3. Design

Die qualitativ angelegte Studie basiert auf halbstrukturierten Interviews mit zehn bis fünfzehn Lehrpersonen. Die Auswahl berücksichtigt unterschiedliche Erfahrungen und Schulformen.

Stimuli in den Interviews sind Repräsentationen aus Bruchrechnen, Algebra, Funktionen und Analysis, die nach theoretischen Ansätzen kategorisiert werden.

So können einzelne graphische Repräsentationen z.B. nach Art des Bildes differenziert werden (vgl. Schnotz 2011): „Realistische Bilder" (z.B. Foto, Strichzeichnung) ähneln einer dargestellten Realität. „Analogiebilder" zeigen einen Sachverhalt, der zum Gemeinten in einer Analogiebeziehung steht. Sie helfen, Wissen aus dem abgebildeten in den zu lernenden Bereich zu übertragen. „Logische Bilder" (z.B. Diagramm, Funktionsgraph) haben keine Ähnlichkeit mit dem Gemeinten und veranschaulichen abstrakte Sachverhalte. In der Mathematik nehmen vor allem logische Bilder eine zentrale Rolle ein.

In einem anderen theoretischen Bezugssystem für multiple externe Repräsentationen unterscheidet Ainsworth (1999) die Funktionen „ergänzen", „belegen" und „vertieftes Verständnis erzeugen". Für den mathematischen Lernprozess sind darin vor allem die Unterkategorien von letzterer relevant, die sie in „abstrahieren" „verallgemeinern", „Beziehungen herstellen" unterscheidet.

Begleitet werden die Interviews durch Fragebögen sowie Unterrichtsbeobachtung bei ausgewählten Lehrkräften. Die Auswertung soll im Sinne der Grounded Theory erfolgen (Glaser & Strauss 1967).

Die Ergebnisse der Studie sollen zu einem Verständnis des methodisch-didaktischen Handelns der Lehrpersonen beitragen und so die Erkenntnislücke zwischen den theoretischen Anforderungen an den Einsatz von graphischen Repräsentationen im Mathematikunterricht und dem Wissen über die praktische Nutzung verkleinern.

Literatur

Ainsworth, S. (1999): The functions of multiple representations. In: Computers and Education, 33, 131 - 152.

Calderhead, J. (1996): Teachers: Beliefs and knowledge. In Berliner (Hrsg.): Handbook of educational psychology. New York: Macmillan, 709 - 725.

Duval (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61(1-2), 103 - 131.

Glaser, B., Strauss, A. (1967): The discovery of grounded theory. Chicago: Aldine.

Presmeg, N. (2006): Research on visualization in learning and teaching mathematics. Emergence from psychology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.): Handbook of research on the psychology of mathematics education. Rotterdam: Sense Publishers, 205 - 235.

Schnotz, W. (2011): Pädagogische Psychologie. Kompakt. Weinheim: Beltz.

Julia STEMMER, Dorothea BUSSMANN, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

Spielintegrierte Mathematische Frühförderung (SpiMaF)

Das Projekt SpiMaF ist ein von der IBH gefördertes Kooperationsprojekt verschiedener Einrichtungen[1]. Ziel des Projekts ist die Entwicklung und Erprobung von Regelspielen zur mathematischen Frühförderung. Die Laufzeit errechnet sich von Januar 2012 bis März 2014.

Theoretischer Hintergrund

Die frühe mathematische Bildung gewann in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung. Verschiedene Studien haben sich mit Fragen zur Gestaltung mathematischer Lerngelegenheiten beschäftigt (z. B. Gasteiger 2010; Schuler 2013). Schuler (2013) gibt einen Überblick über verschiedene Ansätze zur frühen mathematischen Bildung und teilt diese in die Kategorien lehrgangsorientierte Förderprogramme, punktuell einsetzbare Materialien und alltagsintegrative Ansätze ein. Im vorgestellten Projekt findet die mathematische Frühförderung anhand von Spielen statt, somit lässt es sich dem Ansatz der punktuell einsetzbaren Materialien zuordnen.

Forschungsinteressen und Fragestellungen

Im Rahmen dieses Projekts wird aufbauend auf ein Vorgängerprojekt (Rechsteiner, Hauser, Vogt 2012) ein Set von 20 Spielen mit Handreichung zur arithmetischen Frühförderung theoriebasiert entwickelt und in je zehn Kitas über ein halbes Jahr in Deutschland, Österreich und der Schweiz empirisch erprobt. Folgenden Fragen wird dabei nachgegangen:

- Welches mathematische Potential steckt in den Spielen?
- Welche mathematischen Aktivitäten zeigen die Kinder beim Spielen der einzelnen Spiele?
- Wie unterstützen die Erzieherinnen aus mathematischer Sicht einzelne Kinder beim Spielen?
- Finden mathematische Interaktionen zwischen den Kindern statt und wie ist deren Qualität zu beurteilen?
- Wie müssen die Spiele und die Handreichung weiterentwickelt werden, um praxistauglich zu sein?

[1] Projektdurchführende Einrichtungen sind die Pädagogischen Hochschulen Weingarten (D) und St. Gallen (CH), die Universität Zürich (CH), das Kindergarteninspektorat Vorarlberg (A) sowie die Bundesanstalt für Kindergartenpädagogik St. Josef (A).

Spielentwicklung

Innerhalb der frühen mathematischen Bildung kommt dem Erwerb des Zahlbegriffs eine zentrale Bedeutung zu (vgl. Krajewski 2003). Die im Rahmen des Projekts entwickelten Spiele sind auf den Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“ ausgerichtet. Speziell hier wird frühe Förderung als sehr wichtig erachtet (Wittmann 2006), da Kompetenzen in diesem Bereich zentrale Voraussetzungen für schulisches Lernen darstellen (Krajewski & Schneider 2006). Parallel zur Spielentwicklung wurde theoriebasiert ein Kriterienkatalog zur Analyse des mathematischen Potentials der Spiele erstellt (Schuler 2013, Rathgeb-Schnierer 2012). Dieser wurde zur Auswahl der 20 eingesetzten Spiele in den Kitas sowie zur Auswahl der zwölf Spiele für die Videografie eingesetzt. Zusätzlich wird er in der Datenanalyse Verwendung finden, um das mathematische Potential der Spiele zu bestimmen.

Die entwickelten Spiele regen Grunderfahrungen wie das Vergleichen von Mengen, das Aufsagen der Zahlwortreihe, das Aufbauen und Untersuchen der Zahlenreihenfolge, das Bestimmen von Anzahlen durch Abzählen von Dingen oder durch simultanes oder quasi-simultanes Erfassen von Anzahlen in Würfelbildern und anderen Zahlbildern, das Zuordnen verschiedener (An)Zahldarstellungen, das Zerlegen und Zusammensetzen von Mengen von Dingen, das Kennenlernen von Zahlbeziehungen und Zahleigenschaften sowie das erste Rechnen an.

Literatur

Gasteiger, H. (2010). Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 3. Münster: Waxmann.

Krajewski, K. (2003). Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. In Psychologie in Erziehung und Unterricht 53. München / Basel: Ernst Reinhardt, 246-262.

Rathgeb-Schnierer, E. (2012). Mathematische Bildung. In D. Kucharz (Hrsg.). Elementarbildung. Bachelor / Master. Weinheim; Basel: Beltz, 50-85.

Schuler, S. (2013). Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs. Münster: Waxmann.

Rechsteiner, K., Hauser, B. & Vogt, F. (2012). Förderung der mathematischen Vorläuferfertigkeiten im Kindergarten: Spiel oder Training? In Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik. Band 2. Münster: WTM, 677-680.

Wittmann, E. Ch. (2006). Mathematische Bildung. In: Fried, L. & Roux, S. (Hrsg.). Handbuch der Pädagogik der frühen Kindheit. Weinheim: Beltz, 205-211.

Nina STURM, Landau

Wie knacke ich das Problem? Zeichnen, auflisten, tabellieren oder einfach nur rechnen...

Eine aktuelle Studie (Hohn, 2012) zeigt, dass im Mathematikunterricht stufenübergreifend problemhaltige Textaufgaben nur unzufrieden stellend gelöst werden. Sie stellen für die Lernenden eine Herausforderung dar, weil sie vom Gewohnten abweichen und auf den ersten Blick unlösbar scheinen. Die Hürde, den Sachzusammenhang aus der Textform zu lösen und in ein lösungsunterstützendes Medium zu überführen, muss überwunden werden (Charles & Lester, 1982). Aus psychologischer Sicht kann die Verwendung externer Repräsentationsformen das Arbeitsgedächtnis entlasten und Kapazitäten für individuelle, kreative Denkprozesse schaffen (Schnotz, Baadte, Müller, & Rasch, 2010).

In dem noch laufenden Forschungsprojekt liegt der Fokus auf dem Selbstgenerieren von Darstellungsformen als Lösungsunterstützung. Basis der Untersuchung stellen problemhaltige Textaufgaben für die Grundschule (Rasch, 2008) dar, welche in ein Training eingebettet sind. Es wird untersucht, ob die Förderung der Repräsentationskompetenz und/oder der Austausch unter Gleichaltrigen eine Verbesserung der Problemlösekompetenz und/oder eine Steigerung des Lösungserfolgs bedingen.

Methode und Design

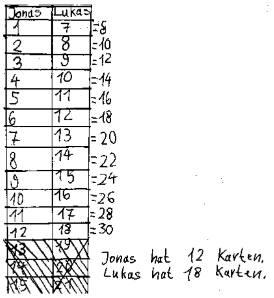
Der Untersuchung liegt ein Prä-Post-Test-Kontrollgruppen-Design mit drei Experimental- und einer Kontrollgruppe zugrunde. Sie folgt einem 2x2x3 Längsschnittdesign mit den unabhängigen Variablen: Training (ja vs. nein), Austausch unter Gleichaltrigen (ja vs. nein) und Zeit (vorher vs. nachher). Die daraus resultierenden, experimentellen Bedingungen

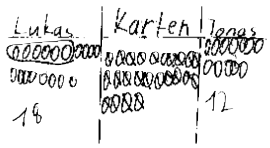
(a) Training und Austausch
(b) nur Training
(c) nur Austausch
(d) weder Austausch noch Training

werden in realen Umgebungen, dem Mathematikunterricht von dritten Klassen, realisiert und deren Effekte auf die abhängigen Variablen, Problemlösekompetenz und Lösungserfolg bestimmt. Der Mathematikunterricht orientiert sich an dem Unterrichtskonzept „ICH-DU-WIR“ von Gallin & Ruf (1995). Die Lernenden bearbeiten eine problemhaltige Textaufgabe pro Woche über einen Trainingszeitraum von 12 Wochen. Ihre Lösungsprozesse halten sie jeweils in Lerntagbüchern fest.

Erste Ergebnisse der Vorstudie

In der Vorstudie wurden die experimentellen Bedingungen (a) und (b) in zwei vierten Klassen erprobt. Exemplarisch an der Vergleichsaufgabe „Lukas und Jonas haben zusammen 30 Yu-Gi-Oh-Karten. Lukas hat 6 mehr als Jonas. Wie viele Karten hat Lukas? Wie viele Jonas?“ werden drei Schülerlösungen vorgestellt:





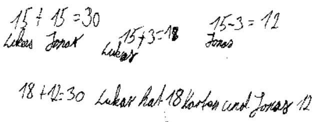


TABELLE
höchstes Niveau:
zielführende Verwendung als Wertetabelle, Strukturierungshilfe und Darstellungsmöglichkeit absolvierter Suchprozesse

ZEICHNUNG
höchstes Niveau:
zielführende, ikonische und symbolische Darstellung gegebener Daten, Zusammenhänge und Bedingungen

RECHNUNG
höchstes Niveau:
zur Aufgabenstellung passende und zielführende Rechnungen

Die selbstgenerierten Schülerdarstellungen wurden genutzt, um eine Skala zur Kategorisierung der Repräsentationsformen zu entwickeln. Aus der Analyse der Schülerlösungen gehen folgende Kategorien hervor: Tabelle, Zeichnung, Liste, Rechnung und begründender Text. Als Basis zur Erfassung der Problemlösekompetenz wird die „Analytic Scoring Scale“ von Charles, Lester & O’Daffer (1987, S. 30) adaptiert angewendet.

Literatur

Charles, R., & Lester, F. K. (1982). *Teaching Problem Solving: What, Why and How*. Palo Alto, CA: Dale Seymore.

Charles, R., Lester, F. K., & O’Daffer, P. G. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hohn, K. (2012). *Gegeben, Gesucht, Lösung? Selbstgenerierte Repräsentationen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben.* Dissertation, Universität Koblenz-Landau. Verfügbar unter http://d-nb.info/1028021070/34.

Rasch, R. (2003/2008). *42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren.* Seelze: Kallmeyer.

Ruf, U., & Gallin, P. (1995). *Sprache und Mathematik. Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab*. Zürich: Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depicitive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. De Corte, T. de Jong, & J. Elen (Hg.), *Use of representations in reasoning and problem solving* (S. 11-35). London: Routledge.

Teil 4: Arbeitskreise

Astrid BRINKMANN, Münster, Thomas BORYS, Karlsruhe

Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“

Im Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der GDM, gegründet 2009, wird eine altbekannte und zentrale Forderung an das Lernen von Mathematik neu betrachtet: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voreinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

Die Sitzung des Arbeitskreises auf der GDM-Tagung 2013 wurde durch einen Bericht von Astrid Brinkmann zu den Aktivitäten des Arbeitskreises eröffnet. Dabei hat Regina Bruder zur 5. Tagung des Arbeitskreises einschließlich Lehrerfortbildung in Darmstadt eingeladen.

Es folgten zwei Vorträge von Winfried Müller und Matthias Brandl zu geplanten Artikeln der Schriftenreihe „*Mathe vernetzt*“.

Wir geben im Folgenden Kurzfassungen zu den Tagungsordnungspunkten eins, zwei und vier; der Beitrag zum TOP 3 wurde von *Winfried Müller* verfasst.

Top 1. Astrid Brinkmann: Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“

Die Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (Verlag Aulis) ist eine Publikation des GDM-Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“. Herausgeberin der Reihe ist Astrid Brinkmann. Nachdem Anfang 2011 der erste Band der Reihe erschienen ist, wurde nun auch der dritte Band pünktlich vor der Didacta fertiggestellt. Die Herausgeber des dritten Bandes sind Matthias Brandl, Astrid Brinkmann und Michael Bürker.

Die Schriftenreihe richtet sich an Mathematiklehrende an Schulen. Die einzelnen Artikel sind daher so aufbereitet, dass Lehrende sie möglichst unmittelbar und gewinnbringend in ihrem Unterricht einsetzen können. Ein Materialband mit kopierfähigen Unterrichtsmaterialien zu den Beiträgen in Band 1–3 ist im Druck.

Wir möchten ausdrücklich auch Nicht-Mitglieder unseres Arbeitskreises ermuntern, uns passende Beiträge für die Schriftenreihe einzureichen! (An: astrid.brinkmann@math-edu.de)

Top 2. Regina Bruder:
Einladung zur 5. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung an der Universität Darmstadt, 03. – 04. Mai 2013

Die fünfte Tagung des Arbeitskreises wird von Regina Bruder organisiert. Das Tagungsprogramm und weitere Informationen zur Tagung werden auf der Homepage (siehe: http://www.math-edu.de) veröffentlicht.

Top 3. Winfried Müller:
„Schöne Dreiecke, Mittelwerte und mehr"

Zu den bekannten Pythagoräischen Tripeln, die rechtwinklige Dreiecke liefern (s. z. B. [3]), gibt es zwei weitere „*schöne*" Dreiecke, d. h. Dreiecke, für die die *Seitenlängen ganzzahlig* sind *und ein Winkel* im Gradmaß ebenfalls. Beispiele: Das Grundtripel [ggT(x,y,z) = 1] (x;y;z) = (5;8;7) liefert ein Dreieck mit einem 60°-Winkel gegenüber z, das (abgeleitete) (6;10;14) eines mit 120°. Dahinter steckt der Kosinus-Satz in der Form $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ wegen cos(60°) = 0,5 bzw. cos(120°) = -0,5.

Versuchen wir weitere solche Dreiecke zu finden (z. B. mit Tabellenkalkulation), so erhalten wir für 60°, also für $z^2 = x^2 + y^2 - xy$ bzw. für 120°, also $z^2 = x^2 + y^2 + xy$ und jeweils Grundtripeln $(x;y;z) \in \mathbb{N}^3$ die Tabellen (links 60°, rechts 120°, beschränkt auf Werte < 100):

x	y	z	x	y	z
3	8	7	5	8	7
7	15	13	8	15	13
5	21	19	16	21	19
11	35	31	24	35	31
7	40	37	33	40	37
13	48	43	35	48	43
16	55	49	39	55	49
9	65	61	56	65	61
32	77	67	45	77	67
17	80	73	63	80	73
40	91	79	51	99	79
11	96	91	85	96	91
19	99	91	80	99	91

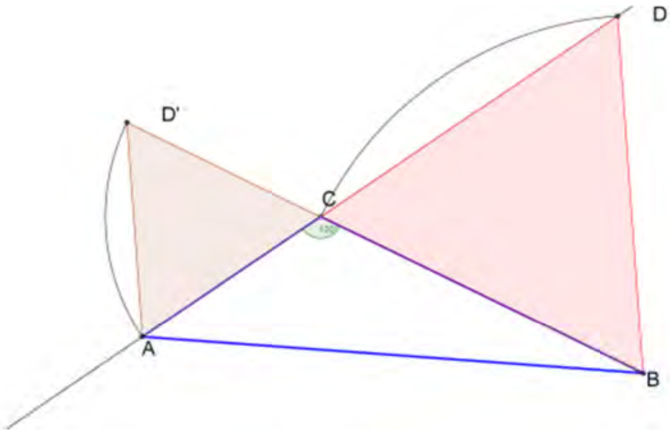
x	y	z
3	5	7
7	8	13
5	16	19
11	24	31
7	33	37
13	35	43
16	39	49
9	56	61
32	45	67
17	63	73
40	51	79
11	85	91
19	80	91

Der Zusammenhang ist offensichtlich und lässt sich *algebraisch* formulieren durch

$$x^2 + y^2 - xy = z^2 \Leftrightarrow (y - x)^2 + x^2 + (y - x)\cdot x = z^2$$

Erinnern wir uns der *geometrischen* Herkunft der Tripel, so erhalten wir die nachstehende Figur, die die Existenz zweier 60°- Lösungen zu einer mit

120° demonstriert, natürlich nicht nur für ganzzahlige Seitenlängen. Die Vernetzung von Geometrie, Algebra und Arithmetik bzw. Zahlentheorie bei unserem Thema wird plastisch!



Der nächste logische Schritt müsste nun sein die Lösung der zwei (!) Gleichungen $x^2 + y^2 \pm xy = z^2$ mit $(x;y;z) \in \mathbb{N}^3$. Grundsätzlich sind dies Gleichungen vom PELLschen Typ, deren Lösung mittels Kettenbruchmethode zu leisten wäre [3].

Gottseidank hat P. Gallin in [4] durch elementare Überlegungen zeigen können, dass alle schönen 120°-Dreiecke (also mit $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ und $\gamma = 120°$) sich darstellen lassen durch

$$a = n(2m + n) \quad \text{und} \quad b = m(3m + 2n) \quad \text{mit } (m;n) \in \mathbb{N}^2 \text{ und } \mathrm{ggT}(m,n) = 1.$$

(Dass sich das „richtige“ z^2 für die dritte Dreiecksseite $c = \sqrt{z^2}$ ergibt, ist leicht nachzurechnen). Wir kommen also um die aufwändige Kettenbruchmethode herum!

Nach obigen Überlegungen über den Zusammenhang der 120°- und 60°-Lösungen erhalten wir damit zwei Erzeugungsformeln für die schönen 60°-Dreiecke (also mit $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ und $\gamma = 60°$):

(i) $(a =)\ x = 2mn + n^2$ und $(a + b =)\ y = 4mn + n^2 + 3m^2$

bzw.

(ii) $(a + b =)\ x = 4mn + n^2 + 3m^2$ und $(b =)\ y = 2mn + 3m^2$, $(m;n) \in \mathbb{N}^2$ und $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.

Weitere schöne Dreiecke, d. h. für $\gamma \neq 60°/90°/120°$ sind übrigens nicht mehr zu erwarten wegen der Transzendenz der Kosinus-Funktion; wir können aber unsere Ergebnisse für Vierecke gut verwenden: So sind im Viereck ABCD mit der Diagonalen $\overline{AC} = 13(\text{cm})$ z. B. möglich

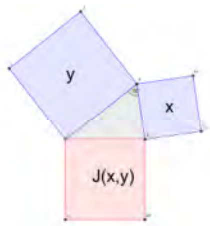
1. $a = 5$, $b = 12$, $c = 8$ und $d = 7$ mit $\beta = 90°$ und $\delta = 120°$,
2. $a = 7$, $b = c = 15$, $d = 8$ mit $\beta = 60° = \delta$,

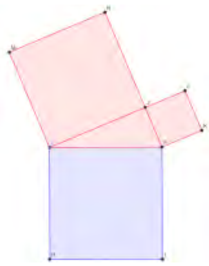
3. a = d = 7 und b = c = 15 und β = 60° = δ (Drachen!),
4. a = d = 7, b = 15 und c = 8, β = 60°, δ = 120°.

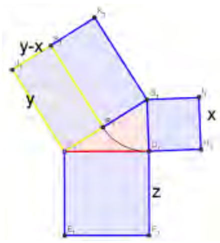
Diese 4. Variante zeigt, dass durch passende Dreieckskombinationen von 60°- und 120°-Dreiecken aus den beiden Tabellen „schöne" Sehnenvierecke konstruierbar sind. Ebenso besitzt das gleichschenklige Trapez ABDD´ einen Umkreis, das durch Hinzufügung der Strecke $\overline{DD'}$ aus obiger Figur entsteht, und für das alle Seiten und die Diagonalen „auf Wunsch" ganzzahlig sind!

Schließlich gibt es eine überraschende Vernetzung mit dem Thema Mittelwerte:

Zu den bekannten Mittelwerten arithmetisch, geometrisch und harmonisch hat JAHNKE kürzlich (s. [2]) ein weiteres hinzugefügt: $J(x,y) := x + y - \sqrt{xy}$. Dies können wir nun mittels der 60°-Dreiecke visualisieren; ebenso reizvoll ist damit die Visualisierung der Abweichung vom „Pythagoras" ([1]):







Literatur:

[1] Baptist, P. (2000): Pythagoras und kein Ende? Leipzig.

[2] Herget, Jahnke, Kroll (2011): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Berlin.

[3] Scheid, H. (2003): Zahlentheorie, 3. Auflage, Heidelberg.

[4] Gallin, P. (2005): 51 weitere Mathematikaufgaben, Zürich/Köln.

TOP 4. Brandl, Matthias
„Die zwei- und dreidimensionale Schlagkraft der Mittelungleichung"

Eine elementare Alternative zur Ableitung findet sich in der Mittelungleichung. Mit ihr lassen sich diverse Extremwertprobleme sowohl in einer wie auch in mehreren Dimensionen elementar lösen. Gleichzeitig ergeben sich schöne Einsichten in den inhaltlichen Vernetzungsbereich zwischen Geometrie und Algebra.

Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. München: Aulis Verlag. http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Katja EILERTS, Potsdam, Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, Nürtingen

Arbeitskreis HochschulMathematikDidaktik

Die Sitzung des Arbeitskreises in Münster bestand aus zwei Teilen. Zum einen berichtete Cornelia Niederdrenk-Felgner über den „Mindestanforderungskatalog Mathematik“, der 2012 von der cosh-Arbeitsgruppe (Kooperation Schule – Hochschule) in Baden-Württemberg verabschiedet wurde. Weiter wurde ausgehend von den reichhaltigen Ideen, die im Rahmen der am 7./8.12.2012 in Nürtingen durchgeführten Zukunftswerkstatt entwickelt wurden, über das weitere Vorgehen zur Entwicklung einer „Empfehlung der GDM zur Hochschulmathematikdidaktik“ und weitere Kooperationsmöglichkeiten diskutiert.

1. Mindestanforderungskatalog Mathematik

Die cosh-Arbeitsgruppe setzt sich aus Mathematik-Lehrenden an baden-württembergischen Hochschulen und Lehrerinnen und Lehrern von beruflichen Gymnasien und Beruflichen Schulen zusammen. Die Kooperation besteht inzwischen seit ca. 11 Jahre, und die Beteiligten setzen sich vor allem mit der Frage auseinander, wie der Übergangs von der Schule in die Hochschule im Bereich Mathematik verbessert werden kann. Dazu wurden in der Vergangenheit verschiedene Projekte initiiert – beispielsweise zur Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf die Mathematik, die für das Studium eines wirtschafts-, informations-, ingenieurs- oder naturwissenschaftlichen Faches vorausgesetzt wird. Darüber hinaus werden in der Gruppe immer wieder die mathematischen Inhalte diskutiert, die in den Schulen behandelt bzw. in den Hochschulen vorausgesetzt werden. Daraus entstand im Rahmen der Jahrestagung im Frühjahr 2013 die erste Idee, Aufgaben zu sammeln, die den Kenntnisstand beschreiben, den Studienanfänger/innen in Mathematik aus Sicht der Schule haben können bzw. aus Sicht der Hochschule haben sollten. Mit dem Katalog dieser Aufgaben sollte somit die Schnittstelle in Mathematik zwischen Schule und Hochschule analysiert und auf der Ebene der Aufgaben differenziert beschrieben werden. Der Katalog sollte auf einer breiten Basis entwickelt werde. Dazu wurde eine Arbeitstagung konzipiert und durchgeführt, an der Professor/innen von Hochschulen für Angewandte Wissenschaften und Universitäten sowie Lehrer/innen der beruflichen und allgemeinbildenden Gymnasien und der Berufskollegs in Baden-Württemberg teilnahmen.

Neben allgemeiner mathematischer Kompetenzen („Probleme lösen“, „systematisch Vorgehen“, „Plausibilitätsüberlegungen anstellen“, „mathematisch kommunizieren und argumentieren“), die sich teilweise von denen der KMK unterscheiden, werden die mathematischen Inhaltsbereiche „elementare Algebra“, „Analysis“ und „lineare Algebra/analytische Geometrie“ beschrieben. Ergänzt werden diese Beschreibungen durch einen Anhang mit fast 80 Beispielaufgaben, auf die in den einzelnen Beschreibungen verwiesen wird.

Zum in der Schule erst in den letzten Jahren etablierten Bereich „Stochastik“ werden von Seiten der Hochschulen keine Kenntnisse vorausgesetzt, wenngleich „aber im Sinne der Allgemeinbildung begrüßt wird, dass statistische sowie wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen in der Schule vermittelt werden“. (cosh, 2013, S. 10)

Bei der Entwicklung des Katalogs wurden deutlich die unterschiedlichen Bildungsaufträge von Schule und Hochschule herausgestellt, die einer der Hauptgründe für die Übergangsproblematik im Bereich Mathematik sind. Dieses Zitat aus dem Vorwort fasst dies sehr passend zusammen:

„In der Hochschule wird Mathematik häufig zielgerichtet als Werkzeug und Sprache zur Lösung von komplexen berufsrelevanten Problemen eingesetzt. In der Schule steht der allgemeinbildende Charakter des Mathematikunterrichts im Vordergrund. Kompetenzen wie Argumentieren, Problemlösen oder Modellieren haben in den letzten Jahren im Mathematikunterricht ein deutlich größeres Gewicht erhalten. Die Schule soll nicht nur auf ein Ingenieurstudium vorbereiten.

Durch die Hochschulreife erhalten SchülerInnen die formale Berechtigung, alle Fächer an Hochschulen studieren zu können. Offensichtlich beherrschen aber nicht alle die in der Schule vermittelten mathematischen Inhalte und Kompetenzen mit der Sicherheit, die für das Studium eines wirtschafts- ,informations-, ingenieurs- oder naturwissenschaftlichen Faches (im Folgenden mit WiMINT bezeichnet) erforderlich ist. Es darf aber bei einem Studienanfänger erwartet werden, dass er diese Lücken in eigener Verantwortung schließen kann. Dabei soll er von Schulen und Hochschulen unterstützt werden. Darüber hinaus setzt die Hochschulseite in den WiMINT-Studiengängen Kenntnisse und Fertigkeiten voraus, die nicht in den Bildungsplänen der Gymnasien und Berufskollegs in Baden-Württemberg abgebildet sind. Nach unserer Einschätzung ändern auch die beschlossenen bundesweiten Bildungsstandards nichts an dieser Diskrepanz.“ (cosh, 2013, S. 1f)

„Der Katalog macht deutlich, dass die Anforderungen an der Schnittstelle Schule-Hochschule in großen Bereichen aufeinander abgestimmt sind. Die dort auftretenden Schwierigkeiten der Studienanfänger können durch Vertiefungs- und Übungsangebote weitgehend aufgefangen werden. Die Analyse zeigt aber auch eine systematische Diskrepanz, die es aufzulösen gilt.“ (cosh, 2013, S. 2f)

Hier ist die Politik gefragt. Von ihr wird gefordert, entsprechende Rahmenbedingungen zu schaffen, die das strukturelle Schnittstellenproblem beheben können.

Der am 1. Februar 2013 verabschiedete Katalog ist online unter der URL http://www.hochschuldidaktik.net/documents_public/mak20130201.pdf zu finden.

Der Mindestanforderungskatalog ist bundesweit auf großes Interesse gestoßen. Er kann Lehrenden sowohl an Schulen und als auch an Hochschulen zur Orientierung dienen. Interessierte an einem WiMINT-Studium klärt er über die Anforderungen auf und kann die Vorbereitung auf das Studium unterstützen.

Insgesamt legt dieser Katalog Zeugnis ab über den Erfolg der konstruktiven und nachahmenswerten Kooperation zwischen Lehrenden an Schulen und Hochschulen, die gemeinsam und im Konsens bestrebt sind, die Schnittstelle in Mathematik zwischen Schule und Hochschule zu glätten.

2. Weiteres Vorgehen zur Stärkung der Hochschulmathematikdidaktik

Im zweiten Teil der Sitzung wurde über die Ergebnisse der Zukunftswerkstatt zur Hochschulmathematikdidaktik berichtet, die im Rahmen der Herbsttagung Anfang Dezember 2012 in Nürtingen durchgeführt wurde.

Wie in der Methode der Zukunftswerkstatt vorgegeben wurden die beiden Tage in drei Phasen (Kritik-, Phantasie- und Verwirklichungsphase) aufgeteilt. Außerdem ergaben sich anhand der beiden vorgeschlagenen Hauptthemen: „Welche Mathematik brauchen Nicht-Mathematiker?“ bzw. „Mathematikdidaktik-Veranstaltungen sinnvoll gestalten“ und den spezifischen Interessen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer zwei Gruppen, die sich in den Präsentationsphasen immer wieder gegenseitig über ihren jeweiligen Diskussionsstand informierten.

Aufgrund der Zusammensetzung der Arbeitsgruppe befasste sich die 2. Gruppe weniger mit Mathematikdidaktikveranstaltungen sondern mit Mathematikveranstaltungen allgemein.

Wie sich in den beiden Tagen herausstellte, gibt es zwar sehr viele Ideen, Initiativen und Projekte, die jedoch noch wenig koordiniert sind und eher von der Initiative Einzelner abhängen.

Handlungsbedarf besteht jedoch sowohl auf lokaler Ebene an den Hochschulen an sich wie auf Länder- oder Bundesebene. Diese Einschätzung wurde im Februar 2013 noch durch die hohe Teilnehmerzahl sowie die vielen Diskussionen bestätigt, die im Rahmen der 2. Arbeitstagung „Mathematik im Übergang Schule/ Hochschule und im ersten Studienjahr" am Kompetenzzentrum Hochschulmathematikdidaktik an der Universität Paderborn (Informationen unter http://www.khdm.de/, Zugriff 14.4.2013) stattfanden.

Die kommende Herbsttagung 2013 wird voraussichtlich an der Universität Münster oder an der Universität Essen stattfinden.

Aktuelle Informationen dazu finden sich in Madipedia unter http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Hochschulmathematikdidaktik.

Literatur

cosh (2013): Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschulen Baden-Württemberg für ein Studium von MINT oder Wirtschaftsfächern (WiMINT). Online unter http://www.hochschuldidaktik.net/documents_public/mak20130201.pdf, Zugriffsdatum 14.4.2013

Teil 5: Sektionen

Rolf BIEHLER, Paderborn

Sektion: „DZLM-Mathematik-Multiplikatorenqualifikation Sek. I“

Eine der Programmlinien des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) besteht in der Weiterqualifikation von „Multiplikatoren“, d.h. solcher Lehrkräfte, die selber bereits Mathematiklehrkräfte fortbilden. Eine der ersten Maßnahmen in dieser Programmlinie war ein Kurs für Mitglieder der regionalen Kompetenzteams in NRW, der sich über das gesamte Schuljahr 2012/13 erstreckte. In der Sektion wurden die Konzeption des Kurses sowie im ersten Schulhalbjahr gemachte Erfahrungen vor dem Hintergrund theoretischer Konzepte zur Fortbildungsdidaktik und zur Gestaltung nachhaltiger Mathematiklehrerfortbildungen vorgestellt.

Die Vorträge im Rahmen der Sektion waren:

- *Rösken-Winter, Bettina & Kramer, Jürg*
  Lehrerfortbildungen als berufsbegleitende Erwachsenenbildung – Einfluss von Vorwissen und Auswirkungen auf die Praxis
- *Biehler, Rolf; Kuzle, Ana; Oesterhaus, Janina & Wassong, Thomas*
  „Stochastikfortbildner fortbilden: ein projektorientiertes Konzept zur Multiplikatorenqualifikation“
- *Wassong, Thomas*
  Was sollten Mathematik-Fortbildner über das Thema statistische Verteilungen in der Sek. I wissen? – Anwendung eines Modells zum Professionswissen im Rahmen einer DZLM-Multiplikatorenqualifizierung
- *Kuzle, Ana; Biehler, Rolf; Oesterhaus, Janina & Wassong, Thomas*
  Praxisorientierte Fortbildungsdidaktik am Beispiel der Planung und Durchführung einer Stochastikfortbildung

Der erste Vortrag von Bettina Rösken-Winter und Jürg Kramer stellte das Projekt DZLM vor, welches als Kooperation der Humboldt-Universität zu Berlin, der Freien Universität Berlin und der Deutschen Universität für Weiterbildung in Berlin mit den Universitäten in Bochum, Dortmund, Duisburg-Essen, Paderborn und der PH Freiburg, initiiert und durch die Deutsche Telekom Stiftung gefördert wird. Das DZLM entwickelt und bietet Fortbildungs- und Weiterbildungskurse für Lehrkräfte im Fach Mathematik von der Grundschule bis zum Abitur, auch unter Berücksichtigung eines inklusiven Unterrichts, an. Eine entscheidende Variable für die Wirksamkeit von Fortbildungen ist das Ansetzen an den Vorerfahrungen und dem Vorwissen der Teilnehmenden. Ausgehend vom Kompetenzrahmen und den Gestaltungsprinzipien, nach denen die Angebote des DZLM konzipiert werden, wurde vorgestellt, welche Kompetenzen insbesondere Multiplikatoren benötigen, um diesem Anspruch gerecht werden zu können und wie sie darauf vorbereitet werden, entsprechend ihre Fortbildungen zu gestalten. Insbesondere am Beispiel der Qualifizierung der Multiplikatoren in NRW wird aufgezeigt, welche Chancen das Fortbildungskonzept bietet.

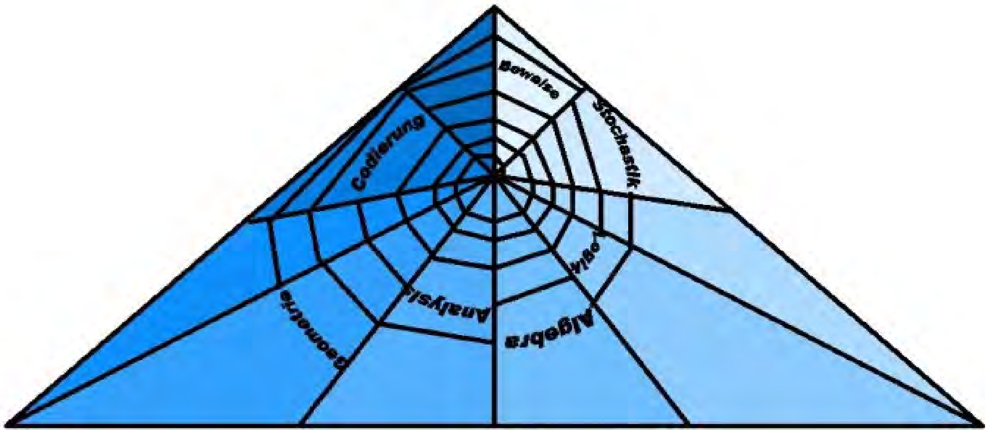
Der zweite Vortrag von Rolf Biehler, Ana Kuzle, Janina Oesterhaus und Thomas Wassong stellte das DZLM-Qualifizierungsangebot für Mathematik Moderatoren aus NRW für die Sekundarstufe I vor, welches im Schuljahr 2012/13 durgeführt wurde. Im ersten Halbjahr wurde im Rahmen des Modul 1 „Kompetenzorientierter MU aus inhaltsbezogener Perspektive – am Beispiel der Stochastik“ das Thema Datenanalyse behandelt. Im Vortrag wurden die Projektstränge ,,Eigene Datenerhebung/-analyse”, ,,Aufgabenentwicklung zu interessanten Datensätzen” sowie ,,Konzeption und Durchführung einer Fortbildung” vorgestellt und in das Gesamtkonzept des Moduls eingebettet.

Thomas Wassong befasste sich mit dem Thema „Datenanalyse in der Sekundarstufe I“, welches im Rahmen der Maßnahme “Kompetenzorientierter MU aus inhaltsbezogener Perspektive – am Beispiel der Stochastik“ behandelt wurde. Im Vortrag wurde anhand der dort verwendeten Materialien und Aufgaben zum Thema „Beschreibung einer Verteilung“ die Anwendung eines Modells zum Professionswissen für die Planung und Durchführung einer solchen Qualifizierung verdeutlicht. Dabei wurde auch der Erwerb technischen und mediendidaktischen Professionswissens thematisiert.

Die Sektion schloss mit einem Vortrag von Ana Kuzle, Rolf Biehler, Janina Oesterhaus und Thomas Wassong, der sich mit der Frage befasste, wie Moderatoren unterstützt werden können, eigene Fortbildungen zu computergestützter Datenanalyse in der Schule zu konzipieren, durchzuführen und zu reflektieren. Diesbezüglich wurden in unserer Moderatorenqualifizierung neben fachlichen und fachdidaktischen Kompetenzen auch explizit fortbildungsdidaktische Elemente vermittelt, die zur Professionalisierung der Moderatoren beitragen sollen. Im Vortrag wurde unser Konzept von Fortbildungsdidaktik und -methodik praxisorientiert am Beispiel der Planung und Durchführung einer Stochastikfortbildung thematisiert.

Astrid BRINKMANN, Münster, Thomas BORYS, Karlsruhe

Sektion: „Vernetzungen im Mathematikunterricht“



Die Sektion „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ befasst sich mit dem Anliegen des gleichnamigen GDM-Arbeitskreises inner- und außermathematische Beziehungen zwischen den in der Schule üblicherweise zu unterrichtenden Teilgebieten aufzuzeigen und methodische Umsetzungsmöglichkeiten für den Unterricht bereitzustellen.

Die Vorträge im Rahmen der Sektion sind:

1) ***Borys, Thomas und Brinkmann, Astrid***
   „Strukturiertes und vernetzendes Lehren und Lernen mit Maps“

   Der Vortrag befasst sich mit Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Map-Formen, die sich in besonderer Weise zum strukturierten und vernetzenden Lehren und Lernen im Mathematikunterricht eignen. Lässt man Schülerinnen und Schüler auf klassische Weise Maps zu einem Thema erstellen, können individuell sehr unterschiedliche Darstellungen entstehen. Oft kommt es der Lehrperson jedoch darauf an, dass die Schülerin und Schüler ganz bestimmte Inhalte mit ihren Vernetzungen betrachten. Für solch eine inhaltliche Eingrenzung wurden mehrere methodische Vorgehensweisen mit Beispielen für den Unterricht vorgestellt.

2) ***Ableitinger, Christoph***
   Problemlösen am Billardtisch

Eine Billardkugel wird angestoßen, rollt über den Tisch, wird an den Banden reflektiert und fällt schließlich – im besten Fall – in eine der Taschen. Im Vortrag wird ein vereinfachtes Modell des Billards vorgestellt, das die Möglichkeit eröffnet, Problemlösen in den Sekundarstufen auf unterschiedlichen Niveaus zu trainieren. Auf dem Weg zur Lösung der zentralen Frage „In welche Tasche fällt die Kugel?“ ergeben sich interessante Vernetzungen mathematischer Inhalte und Beweistechniken.

3) ***Motzer, Renate***

   Magische Quadrate von der 1.Klasse bis zu Linearen Algebra

   Magische Quadrate sind ein ansprechender Unterrichtsinhalt. Man kann sie selbst an der Universität als Vektorraummodell untersuchen. Schon wenn man in der Grundschule magischen Quadrate untersucht und erstellt, werden oft Eigenschaften eines Vektorraums benutzt. Sich dieses bewusst zu machen, ist einer der Gründe, warum es sich lohnt, diesen Vektorraum genauer zu untersuchen. Auch mit dem Bereich Geometrie (Symmetrieabbildungen eines Quadrats) kann vernetzt werden. Geraden, Kreise und Dreiecke: Vorschläge zur Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft

4) ***Brandl, Matthias***

   Das isoperimetrische Problem für Dreiecke

   Während sich das isoperimetrische Problem für Rechtecke in der Regel in Schulbüchern der Sekundarstufe finden lässt, taucht dessen Pendant für Dreiecke nicht auf. Vorgestellt wird ein aufbereiteter elementarer Weg basierend auf Haag (2003), der algebraische und geometrische Aspekte auf schöne Weise verknüpft und so „unterwegs“ zu vielen (elementar)mathematischen Einsichten verhilft. Stichworte: Optimierung, Gelenkviereck, Satz von Pythagoras, Dreiecksungleichung, Drehstreckung, Sehnenvierecke, Satz von Ptolemäus, DGS, CAS, Satz von Brahmagupta, Satz von Heron, Mittelungleichung.

Ausführliche Artikel zu den Vorträgen sind in der Schriftenreihe „***Mathe vernetzt*** – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (Reihenherausgeberin: Astrid Brinkmann, Aulis Verlag) zu finden.

Link: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Mit vielfältigen Repräsentationen umgehen können

Für den Aufbau mathematischer Kompetenz ist es besonders wichtig, Verknüpfungen zwischen Repräsentationen mathematischer Objekte zu erkennen und zwischen Repräsentationen wechseln zu können (Duval, 2006; Lesh, Post & Behr, 1987; Ainsworth, 2006; Kuntze, 2013). Damit Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern in diesem Bereich gezielt unterstützt werden, brauchen nicht zuletzt auch Mathematiklehrkräfte spezifisches professionelles Wissen.

Darüber hinaus sind Erkenntnisse über Lernumgebungen von großem Interesse, in denen das Wechseln zwischen und das Verknüpfen von Repräsentationen trainiert wird. Zur Evaluation solcher Lernumgebungen können nicht nur Ergebnisse von Tests, sondern auch Daten aus dem Arbeitsprozess herangezogen werden.

Schließlich dürfte es beim Umgang mit vielfältigen Repräsentationen auch auf Reflexion, Planung und Monitoring ankommen. Dies legt die Vermutung nahe, dass metakognitive Strategien eine Schlüsselrolle beim Kompetenzaufbau spielen und Problemlösungsprozesse unterstützen.

In allen diesen Bereichen gibt es bislang noch keine befriedigende empirische Erkenntnisbasis. Die hier vorgestellte moderierte Sektion betrachtet daher einerseits Kompetenzen von Lernenden im Umgang mit vielfältigen Repräsentationen, insbesondere auch mit Blick auf Lernumgebungen und bezüglich metakognitiver Strategienutzung, andererseits spezifisches auf das Nutzen von Repräsentationen gerichtetes professionelles Wissen von Mathematiklehrkräften.

Eine recht breite Perspektive bietet der Vortrag von Anika Dreher, Sebastian Kuntze und Kirsten Winkel, bei dem Kompetenzen von Lernenden mit professionellem Wissen von Mathematiklehrkräften empirisch verknüpft werden. Die vorgestellten Ergebnisse aus dem Projekt La viDa–M zeigen nicht nur, dass ein theoriegeleitet konzipiertes Kompetenzmodell empirisch mit einer hierarchischen Fähigkeitsdimension beschrieben werden kann. Verknüpfungen mit unterrichtsbezogenen Sichtweisen von Lehrkräften weisen darüber hinaus Zusammenhänge mit den Kompetenzmittelwerten der von den Lehrkräften unterrichteten Klassen auf.

Der Vortrag von Kirsten Winkel, Anika Dreher und Sebastian Kuntze knüpft mit dem Fokus auf Schülerinnen und Schüler an diese Ergebnisse an und vertieft den Bereich der Nutzung von Metakognition insbesondere bei Aktivitäten des Darstellens, Argumentierens und Reflektierens. Anhand der vorgestellten Ergebnisse zu qualitativen Analysen von Antworten von Schülerinnen und Schülern auf Aufgaben im Bereich der Bruchrechnung wird deutlich, dass die Nutzung metakognitiver Strategien für die Lernenden und erfolgreiche Lösungen von großer Bedeutung sein kann.

Andreas Bauer betont in seinem Vortrag ebenfalls die Seite der Lernenden, wenn diese in Lernumgebungen mit multiplen externen Repräsentationen arbeiten. Dabei wird als ein wesentliches zusätzliches Merkmal betrachtet, ob Repräsentationen dynamisch sind oder nicht. Diese Studie knüpft an einen wichtigen Forschungsstrang an und kann durch ihren fachdidaktischen Fokus ebenfalls einen wichtigen Beitrag zur Generierung unterrichtspraxisrelevanten Wissens leisten.

Sebastian Kuntze und Anika Dreher stellen schließlich Ergebnisse zu Sichtweisen von Mathematiklehrkräften vor, die die Bedeutung des Umgangs mit vielfältigen Repräsentationen auch in Vergleich zu anderen Merkmalen und Unterrichtszielen einschätzen sollten. Entsprechend der zu erwartenden Komplexität dieses Themas zeigen die Ergebnisse, die dem Projekt ABCmaths entstammen (www.abcmaths.net) ein je nach Befragungsformat abweichendes Bild. Offenbar wurde die Bedeutung des Umgangs mit vielfältigen Repräsentationen nicht immer als groß angesehen und oft im Vergleich zu anderen Aspekten nahezu vernachlässigt.

Insgesamt ist festzuhalten, dass der Umgang mit vielfältigen Repräsentationen nicht nur großes Potential für begriffliches und metakognitives Lernen im Mathematikunterricht bietet, sondern dass die Förderung diesbezüglicher Kompetenzen eine echte Herausforderung darstellt. Gerade im Hinblick auf konkrete einzelne Inhaltsbereiche sollten Lehrkräfte über professionelles fachdidaktisches Wissen verfügen und die Bedeutung des Umgehens mit vielfältigen Repräsentationen wahrnehmen. Dies dürfte eine wichtige Grundlage für die Gestaltung von Lernanlässen im Unterricht sein.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16, 183–198.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Kuntze, S. (2013). Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In Wagner, A. et al. (Hrsg.). In J. Sprenger, A. Wagner, M. Zimmermann (Hrsg.). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen (S. 17-34). Wiesbaden: Springer.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Thomas GAWLICK, Hannover

Problem, Barriere und Heurismen - Hannoveraner Studien zum Problemlösen

Mit Vollrath (1992, S. 127) verstehen wir Problem als „Aufgabe, die dem Bearbeiter beim Lösen eine Barriere entgegenstellt“. Das kann man so verstehen, dass anders als bei Routineaufgaben keine Methoden zu ihrer Bewältigung verfügbar sind (Dörner 1976, S. 10). Genauere Barrieren-Kriterien finden sich in der Literatur indes nicht. Ein Leitziel der Hannoveraner Arbeitsgruppe ist daher, Problemlöseprozesse durch ihre Struktur zu charakterisieren. Hierfür werden verfeinerte Analysemethoden entwickelt. Die ersten Sektionsbeiträge stellen dazu drei verschiedene Zugänge vor:

Lange definiert Barriere als eine Stelle im Prozess, wo Routineschemata zum Lösen nicht verfügbar sind bzw. nicht angewendet werden und untersucht barrierespezifische Kooperationsarten in Fünftklässler-Bearbeitungsprozessen des Projekts MALU mit Qualitativer Inhaltsanalyse.

Rott untersucht diese Prozesse mittels Episodeneinteilung nach Schoenfeld (1985). Mit einer engen Konzeptualisierung von „reiner Routine“ (dass sofort ein Verfahren zur Lösung der gestellten Aufgabe bekannt ist und angewendet wird) lässt sich auch Problemlösen eingrenzen, wenn man es als Komplement der reinen Routine auffasst – denn reine Routine kann Rott durch das ausschließliche Vorkommen der Episoden Planung und Implementation (sowie evtl. einer „Routine-Verifikation“) charakterisieren. Im Beitrag werden typische Prozessverläufe beschrieben und ein Modell zu ihrer Beschreibung vorgestellt, das auch Metakognition umfasst.

Aus beiden Beiträgen wird deutlich, dass die Unterscheidung Problem-Routine nicht leicht trennscharf durchzuführen ist. Polya (1980) betont ihre schulpraktische Relevanz und postuliert: „Die Nichtroutineaufgabe kann vieles, die Routineaufgabe dagegen kann praktisch nichts zur geistigen Entwicklung des Schülers beitragen. Die Grenzlinie zwischen beiden Arten von Aufgaben mag nicht besonders scharf sein; aber die Extremfälle sind klar erkennbar.“ Lässt sich diese auf andere Weise noch besser erfassen?

Gawlick schlägt dazu eine Dreigliederung von Bearbeitungsprozessen vor: Reines Routinehandeln lässt sich mit Piaget als Assimilation in ein Schema auffassen und das Anpassen vorhandener Routinen an eine neue Situation als Akkommodation eines Schemas. Jenseits dessen findet dann genuines Problemlösen statt. Ein Begriff für den Aufbau neuer Schemata scheint allerdings bei Piaget zu fehlen - hierfür wird der Terminus Akquisition vorgeschlagen. Er benennt einen wichtigen „Beitrag zur geistigen Entwicklung“. Auch Polyas „unscharfe Grenzlinie“ wird deutlicher: Sie verläuft zwischen Routine- und problemhafter Akkommodation.

Die epistemische Struktur sensu Dörner (1976) enthält die zur Aufgabenlösung nötigen Schemata. Falls sie fehlen oder die Aufgabe nicht in sie assimiliert werden kann, tritt die heuristische Struktur auf den Plan. Diese enthält eine Bibliothek von Heurismen, wie sie für die Mathematik etwa von Polya (1949) konkretisiert wurde. Das bekannte Problemlöseschema von Polya kann man als Makroheurismus auffassen, dessen Einsatz den Problemlöseerfolg erhöhen soll. Ist dies auch tatsächlich der Fall? Solchen Fragen widmen sich die folgenden Beiträge:

Schulteis, Witte und *Gawlick* berichten über eine Interventionsstudie hierzu: Fünftklässler wurden auf zwei Arten beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben unterstützt – zum einen mit Hilfe eines aus der Literatur (u.a. Polya) destillierten Problemlöseschemas, zum anderen mit einem an der klientenzentrierten Gesprächsführung orientierten Gesprächsleitfaden. Es werden differentielle Effekte dieser Interventionen aufgezeigt. (Beispiele aus der Studie illustrierten zuvor auch Gawlicks dreigliedrige Konzeption.)

Dem systematischen Aufbau der heuristischen Struktur dient das Hannoveraner Projekt HeuRekAP (**Heu**ristische **Rek**onstruktion von **A**ufgaben zum **P**roblemlösen), vgl. Gawlick et al. (2012), insbesondere durch ein langfristiges heuristisches Training in zwei Varianten. *Brockmann-Behnsen* zeigt in einem unterrichtspraktischen Beitrag zum Lehrertag zwei methodische Hilfsmittel des Trainings: Zwei-Tore-Regel und Zwei-Spalten-Beweis.

Inwieweit beruht der ebenda nachgewiesene Trainingserfolg auf vergrößerter heuristischer Kompetenz? Dies wird derzeit an Bearbeitungsprozessen der TIMSS-Aufgabe K10 untersucht. Es wird sich zeigen, ob das trichotome Modell (Assimilation – Akkommodation – Akquisition) hierbei eine größere Erklärungskraft entfaltet als das dichotome (Routine vs. Problem).

Literatur

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, Stattgart: Kohlhammer.

Gawlick et al. (2012). Hannoveraner Studien zum Problemlösen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.

Pólya, G. (1980). Wie lehren wir Problemlösen? *Mathematiklehrer, 1*, 3–5.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press.

Shallice, T. (1982). Specific impairments of planning. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci, 298*(1089), 199-209.

Vollrath, H.-J. (1992). Zur Rolle des Begriffs im Problemlöseprozeß des Beweisens. *Mathematische Semesterberichte 39*, 127–136.

Jürgen ROTH, Landau

Vernetzung schulischer und außerschulischer Lernorte

Ein wesentliches Potential außerschulischer Lernorte besteht in der Möglichkeit, dass Schüler/innen die Mathematik in einem anregenden Umfeld mit neuen Augen wahrnehmen und entdecken. Studien belegen, dass eine nachhaltige Motivations- und Leistungssteigerung nur durch intensive Vernetzung mit dem schulischen Unterricht gelingen kann (vgl. etwa Schmidt et al. 2011). Am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau läuft gegenwärtig ein interdisziplinäres durch das Land Rheinland-Pfalz gefördertes Forschungsprojekt, in dem Fachdidaktiker/innen (Mathematik, Chemie, Geografie), Pädagog/inn/en und Psycholog/inn/en zusammenarbeiten. Hier werden verschiedene Ansätze zur Vernetzung schulischen und außerschulischen Lernens empirisch untersucht. Die Voraussetzungen zur Umsetzung eines solchen Forschungsprogramms sind am Campus Landau besonders gut. Neben einer Reihe von institutionalisierten außerschulischen Lernorten, wie etwa die Nawi-Werkstatt (Naturwissenschaften) und das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“, existiert hier mit der CampusSchule ein Netzwerk von mit der Universität verbundenen Schulen, die an der forschungsbasierten Weiterentwicklung von Unterricht interessiert sind und mit denen über die Schuladministration verankerte Kooperationsvereinbarungen getroffen wurden.

Wesentlich für die Vernetzung schulischer und außerschulischer Lernorte ist das Arbeiten am selben Thema an beiden Standorten. Dies kann gelingen, wenn – wie in diesem Projekt – am außerschulischen Lernort lehrplankonform gearbeitet und diese Arbeit im Unterricht intensiv vor- und nachbereitet wird. Gerade für selbständig-entdeckende Erarbeitungsphasen, wie sie für das Lernen an außerschulischen Lernorten charakteristisch sind, ist es wesentlich, dass Ergebnisse und Prozesse in geeigneter Weise festgehalten werden. Im Rahmen dieses Projektes werden die Schüler/innen explizit über entsprechende Arbeitsaufträge zum Darstellen (Protokollieren) ihrer Lernprozesse und -ergebnisse aufgefordert. Dies soll zunächst zu einer Steigerung der kognitiven Aktivierung der Schüler/innen und damit der mentalen Verarbeitung der Arbeitsprozesse führen. Darüber hinaus sind selbstgenerierte Darstellungen eine Voraussetzung dafür, dass die Arbeitsergebnisse im Anschluss reflektiert werden können sowie für weitere Lern- und Problemlöseprozesse nutzbar sind. Über alle Teilprojekt hinweg wird deshalb die Darstellungskompetenz von Schüler/innen anhand der von ihnen erstellten Forscherhefte erfasst und die Entwicklung eines auf Videoitems beruhenden domänenübergreifenden Erhebungsinstruments für die entsprechende Kompetenz vorangetrieben.

In der Sektion werden verschiedene Teilprojekte dieser Forschungsinitiative vorgestellt und diskutiert:

Jürgen Roth und Rolf Oechsler fassen den Begriff „forschend Lernen“ als Arbeitsweise bzw. Arbeitshaltung von Schüler/innen, die für das selbständig-entdeckende Arbeiten in Schülerlaboren und anderen außerschulischen Lernorten charakteristisch ist. Als einen von mehreren Aspekten, die dabei wesentlich sind, stellen sie das selbständige Darstellen von Lernprozessen und -ergebnissen durch die Schüler/innen heraus. Erst auf der Grundlage der so erstellten Forscherhefte lassen sich Arbeitsergebnisse geeignet reflektieren.

Stefan Schumacher und Jürgen Roth beschreiben die Schülerlaborstation „Mathematik und Kunst“ des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ in Landau. Anhand von Puzzles auf der Grundlage von Kunstwerken der konkreten Kunst erarbeiten sich Schüler/innen dort selbständig Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und der Bruchrechnung. Aspekte der Vernetzung mit dem schulischen Unterricht werden diskutiert und berichtet, dass Schüler/innen in dieser Laborlernumgebung selbständig-entdeckenden denselben Lernzuwachs erreichen, wie solche, die in derselben Zeit lehrerzentriert unterrichtet werden.

Kerstin Sitter berichtet über einen besonderen Vernetzungsansatz im Geometrieunterricht der Grundschule. Hier werden geometrische Körper in der nahen Umgebung der Schule als außerschulischem Lernort von den Schüler/inne/n gezielt entdeckt, erkundet und in Skizzenblocks dokumentiert. Im Unterricht stellt jedes Kind anschließend seine Ergebnisse im Forscherheft dar. Anhand dieser Schülerdokumente werden Eigenschaften der geometrischen Körper gemeinsam im Plenum reflektiert.

Matthias Größler beschreibt ein Projekt, das an der Schnittstelle zwischen Geografie und Mathematik angesiedelt ist. Konkret werden Inhalte der räumlichen Orientierung sowohl aus geometrischer als auch aus geografischer Perspektive betrachtet und der Beitrag von GPS-Systemen auf mobilen Endgeräten auf die Entwicklung entsprechender Fähigkeiten untersucht. Auch hier wird das Arbeiten im Gelände (außerschulischer Lernort) mit dem Unterricht im Klassenverband über die von den Schüler/innen angefertigten Protokolle vernetzt.

Literatur

Schmidt, I., Di Fuccia, D. S., Ralle, B. (2011): Außerschulische Lernstandorte − Erwartungen, Erfahrungen und Wirkungen aus der Sicht von Lehrkräften und Schulleitungen. In MNU 64/6, 362-369.

Petra SCHERER, Essen, Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg, Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund

Entwicklungsprojekte und Aktivitäten der DZLM-Abteilung ›Inklusion und Risikoschüler‹

1 Einleitende Informationen zum DZLM

Das DZLM ist ein Verbundprojekt von acht Universitäten, gefördert von der Deutschen Telekom Stiftung. Strukturell ist das DZLM in Fachabteilungen gegliedert, einerseits nach Schulstufen, andererseits gibt es übergreifende Fachabteilungen: Multiplikatoren- und weitere Fortbildungsprogramme, Informations- und Kommunikationsinfrastruktur, Evaluation und Begleitforschung sowie die Abteilung für Inklusion und Risikoschüler. Das DZLM will bundesweit Fortbildungsangebote für verschiedene Adressaten entwickeln und anbieten – für Multiplikatoren, für fachfremd unterrichtende Lehrpersonen, für Lehrpersonen (die im Fach Mathematik ausgebildet sind) sowie Materialangebote auf der DZLM-Plattform (vgl. dzlm.de).

Gestaltungsprinzipien der Angebote sind die Folgenden:

Kompetenzorientierung als Vorbedingung zur didaktischen und organisatorischen Gestaltung von Fortbildungen, um Nachhaltigkeit und Tiefenwirksamkeit zu realisieren (z. B. Lipowsky/Rzejat 2012).

Teilnehmerorientierung, um die heterogenen Voraussetzungen der Teilnehmenden zielgerichtet aufzugreifen und bedarfsorientiert weiter zu entwickeln (z. B. Krainer 1998).

Anregung zur Kooperation, u. a. in Professionellen Lerngemeinschaften (z. B. Scherer et al. 2004), um eine nachhaltigere Zusammenarbeit anzuregen.

Fallorientierung mit Bezug auf Alltagssituationen aus Unterricht bzw. Fortbildung als Ausgangspunkt und Anwendungsfeld (z. B. Markovitz/Smith 2008).

Methodenvielfalt, etwa in Form von Präsenzphasen, Selbststudium, kollaborativem Arbeiten und E-Learningphasen zur Vernetzung von Input-, Erprobungs- und Reflexionsphasen.

Reflexionsförderung, dabei Anregung zur gemeinsamen Reflexion und Selbstreflexion über behandelte Themen sowie über die eigene Unterrichtspraxis (z. B. Scherer/Steinbring 2006).

Die Fortbildungsangebote des DZLM umfassen vielfältige Themenfelder und übergeordnete Themenkategorien: Mathematik mit Blick auf Fachwissenschaft und Fachdidaktik (TK 1), Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht (TK 2), Mathematische Lehr- und Lernprozesse (TK 3) und Fortbildungsmanagement und -didaktik (TK 4).

2 Abteilung ›Inklusion und Risikoschüler‹

2.1 Inhaltliche Ausrichtung

Die Abteilung konzentriert sich auf TK 3, aber mit denkbaren Verzahnungen zu anderen Themenkategorien – implizit oder auch explizit in konkreten Maßnahmen. Begonnen wurde mit der Modulentwicklung zu den folgenden Themenfeldern:

- *Modul 1:* Lernschwierigkeiten und Lernschwächen im Mathematikunterricht – Risikoschüler
- *Modul 2:* Diagnostische Methoden im Mathematikunterricht und Folgerungen für Förderung und Unterricht
- *Modul 3:* Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht

Modul 1 besteht aus folgenden Themen (exemplarisch ausdifferenziert):

- Theoretische und begriffliche Grundlagen (z. B. theoretische Grundlagen zu Rechenschwäche, Risikoschülern, auch unter Einbezug der Nachbardisziplinen, bspw. Sonderpädagogik)
- Inner- und außerschulische Förder- und Therapieangebote (u. a. Konzepte für individuelle Förderung, inklusive/exklusive Förderung; auch Beratungsfunktion für Eltern, Kollegium, Team-Teaching etc.)
- Risikoschüler am Schulanfang (z. B. fehlende Vorläuferfertigkeiten, Zahlbegriffsentwicklung)
- Inhaltliche Analyse typischer Schwierigkeitsbereiche im MU der GS
- Umgang mit Lernschwierigkeiten/Arithmetik (Analyse & Reflexion von Fallbeispielen, z. B. Bedeutung und Funktionen von Arbeits- & Anschauungsmitteln, Aufbau von Grundvorstellungen, Stellenwertverständnis, Sprachförderung im Mathematikunterricht)
- Umgang mit Lernschwierigkeiten/Geometrie (s. o. Analyse/Reflexion)
- Umgang mit Lernschwierigkeiten/Sachrechnen (s. o. Analyse/Reflexion)
- Risikoschüler im Übergang Grundschule – SI (z. B. Bedeutung von Basiskompetenzen)

Für *Modul 2* sind folgende Themen geplant:

- Diagnostische Methoden – Überblick
- Quantitative Methoden (u. a. Einführung in quantitative sowie standardisierte und nicht standardisierte Verfahren; kritische Reflexion diagnostischer Methoden und diagnostischer Überprüfungen)
- Qualitative Methoden

- Unterrichtsnahe Diagnosemethoden (Fehleranalyse; Analyse schriftlicher Schülerdokumente; Fallbeispiele)
- Diagnostische Gespräche im Unterricht (Fallbeispiele)
- Durchführung, Auswertung & Reflexion ausgewählter quantitativer Verfahren (Eigenerprobung)
- Durchführung, Auswertung & Reflexion ausgewählter qualitativer Verfahren (Eigenerprobung)
- Kombination von Methoden: Durchführung, Auswertung & Reflexion (Eigenerprobung)

Modul 3 wird von Scherer et al. (in diesem Band) ausdifferenziert.

Abhängig von den Adressaten werden für eine konkrete Maßnahme weitere Themenkategorien additiv oder integrativ hinzugenommen: Bei Durchführung einer Multiplikatorenmaßnahme etwa sind Elemente der Weiterbildungsdidaktik enthalten. Abhängig vom jeweiligen Umfang der Maßnahme kann ein spezielles Thema zeitlich und inhaltlich variiert werden. Die Module in der Abteilung ›Inklusion und Risikoschüler‹ werden im ersten Schritt schwerpunktmäßig für die Grundschule entwickelt. Sie sollen in einem weiteren Schritt für die Sekundarstufe I adaptiert werden.

2.2 Bisherige konkrete Fortbildungsangebote

In der Abteilung ›Inklusion und Risikoschüler‹ sind bislang verschiedene Fortbildungsangebote entwickelt und durchgeführt worden bzw. konkret geplant. Für den Adressatenkreis der Fachlehrpersonen oder auch Multiplikatoren sind dies einerseits spezifisch für das DZLM geplante Veranstaltungen (Fortbildungstage, mehrteilige schulinterne Fortbildungen oder Multiplikatorenmaßnahmen, siehe auch Scherer et al. in diesem Band). Andererseits beteiligt sich das DZLM auch an Veranstaltungen anderer Organisatoren, (z. B. im Rahmen des Programms SINUS an Grundschulen oder hochschulinterne Veranstaltungsreihen oder -tagungen).

2.3 Begleitforschung

Im Sinne der Begleitforschung stellt eine der DZLM-Programmlinien die Einrichtung, Unterstützung und Begleitung Professioneller Lerngemeinschaften (PLGs) dar. Durch die langfristige Zusammenarbeit in PLGs zur kollegialen fachbezogenen Unterrichtsentwicklung sollen die Kooperations- und (Selbst-)Reflexionsfähigkeiten von Lehrkräften gefördert werden, um nachhaltig eine Weiterentwicklung ihres Unterrichts zu erreichen. Die Aktivitäten des DZLM richten sich inhaltlich vor allem auf die Unterstützung von zwei Formen von PLGs: kollegiale Hospitation (incl. Reflexion des eigenen Mathematikunterrichts) und kollegiale Konzeptentwicklung.

Die Abteilung ›Inklusion und Risikoschüler‹ startet derzeit ein Projekt zur Einrichtung PLGs zum inklusiven Mathematikunterricht, einem bildungspolitisch aktuellen Thema für alle Schulstufen und Schulformen. Die Realisierung eines inklusiven Unterrichts erfordert fundierte konzeptionelle Überlegungen, und im Rahmen des Projekts sollen Schulen aus fachdidaktischer Perspektive unterstützt werden. Geplant sind PLGs mit Lehrpersonen der Grund- und Förderschule (Gruppengröße 4 bis 6), die im inklusiven Unterricht tätig sind. Bis Ende 2013 werden gemeinsame Sitzungen stattfinden zur Planung und Reflexion des (alltäglichen) Mathematikunterrichts hinsichtlich zentraler Aspekte der Gestaltung Gemeinsamen Mathematikunterrichts (bspw. Lehrerhandeln, Schüler-Lehrer-Interaktion). Das Ziel ist ein vertieftes Verständnis der Lern- und Unterrichtsprozesse im inklusiven Mathematikunterricht. Als Ergebnis können Materialien (bspw. Unterrichtsentwürfe) entstehen, die von anderen Lehrpersonen genutzt werden können. Diese Form kollegialer fachbezogener Unterrichtsentwicklung stellt eine spezifische Adaption des Konzepts der Lesson Studies dar (vgl. Scherer et al. 2004).

Für weitere Forschungs- und Fortbildungsaktivitäten bestehen daneben weitere Forschungskooperationen.

3 Schlussbemerkungen

Das DZLM wird in Zukunft bundesweit ausgebaut und möchte in Kooperation mit Ländern und Landesinstituten geeignete Fortbildungsmaßnahmen entwickeln und anbieten. Die Vision ist, nachhaltige strukturelle Veränderungen der Fortbildungssituation für Mathematiklehrkräfte zu erreichen.

Literatur

Krainer, K. (1998). Some considerations on problems and perspectives of mathematics teacher in-service education. In C. Alsina, et al. (Eds.), The 8th International Congress on Mathematical Education (ICME 8). (pp. 303-321). Sevilla, Spain: S.A.E.M.

Lipowsky, F./Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lerner - Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen effektiver Lehrerfortbildungen. Schulpädagogik heute, 5(3), 1-17.

Markovitz, Z. & Smith, M. (2008). Cases as Tools in Mathematics Teacher Education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (pp. 39-64). Rotterdam: Sense Publishers.

Scherer, P./Steinbring, H. (2006). Noticing Children's Learning Processes – Teachers Jointly Reflect Their Own Classroom Interaction for Improving Mathematics Teaching. Journal for Mathematics Teacher Education, 9(2), 157-185.

Scherer, P./Söbbeke, E./Steinbring, H. (2004). Praxisleitfaden zur kooperativen Reflexion des eigenen Mathematikunterrichts. Arbeiten aus dem Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld. Occasional Paper(189).

Martin STEIN, Münster

Sektion: Mathematik Online

Schnelle Internetverbindungen, leistungsfähige Browser und die Möglichkeit, mathematische Formeln schnell, komfortabel und korrekt in Online-Systeme einzustellen, haben zu einer deutlichen Ausweitung des Angebots mathematischer Inhalte im Internet geführt. Die Sektion beschäftigt sich mit diesem neuen Angebot unter verschiedenen Perspektiven.

R. Gunesch erklärt, wie Mathematik-Vorlesungen auf Tafel, nicht nur Powerpoint) sinnvoll und zuverlässig aufgezeichnet und bereitgestellt werden können, warum das sinnvoll ist, wie es den Vorlesungserfolg verbessert, was genau die Anforderungen sind (personell, technisch, organisatorisch), welche Optionen es gibt (Streaming / Download, Zugang für alle / nur für die eigenen Studierenden, Formate, usw.). Auf der Grundlage konkreter Erfahrungen aus mehreren Semestern Praxis an verschiedenen Universitäten gibt er konkrete Tipps für Lehrende.

E. Niehaus berichtet über Multiple-Choice-Klausuren. Sie werden im Allgemeinen nicht als geeignete Prüfungsform für fachmathematische Beweise betrachtet. Die Komplexität logischer Strukturen und die Möglichkeit, unterschiedliche Beweiswege und Begründungen zu wählen, machen ferner eine algorithmische Überprüfung von Beweisen schwierig. Ziel ist es, in Anlehnung an Beweispuzzle für Online-Prüfungsumgebungen die Grenzen und Chancen von Beweisen in elektronischen Klausuren an dem Beispiel einer fachwissenschaftlichen Veranstaltung in der Lehramtsausbildung zu beleuchten und allgemeinere fachdidaktische Schlussfolgerungen für elektronische Klausuren mit Beweisen zu ziehen.

Weltweit gibt es mehr als 60 deutsch- und englischsprachige Plattformen zum Üben von Mathematik. Im Projekt Eva-CBTM (Evaluation of Computer Based Platforms for Training Mathematics) wurden diejenigen Plattformen evaluiert, die den Stoff der Sekundarstufe I im Wesentlichen abdecken. Der Vortrag von M. Stein stellt die Systematik und die Ergebnisse der abgeschlossenen Evaluation vor.

Drei Vorträge behandelten Self-Assessment-Tests in Mathematik. Chr. Neugebauer untersucht Self-Assessment-Tests in Mathematik für Schülerinnen und Schüler, die an einem Psychologie-Studium interessiert sind.

Warum gerade im Bereich der Mathematik der Übergang von der Schule in das Studium mit großen Hürden verbunden ist, soll in diesem Vortrag durch eine genauere Betrachtung der in der Schule vermittelten bzw. den im Studium für das Fach Psychologie, einem Mathematik-affinen Fach –

benötigten mathematischen Kompetenzen dargestellt werden. Dabei werden die in den Online-Self-Assessments verlangten mathematischen Kompetenzen als Maß für die im Studium benötigten mathematischen Kompetenzen herangezogen.

K. Sauer stellt einen einheitlichen Merkmalkatalog vor, mit dem ein Vergleich existierender Online-Self-Assessments an Hochschulen in NRW durchgeführt wird.

K. Winter stellt das Prinzip des diagnostischen Potentials mathematischer Testitems vor und zeigt auf, welche Möglichkeiten dieses bietet und wie diese aktuell umgesetzt werden.