Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 - Inhaltsverzeichnis

Hauptvorträge

Moderierte Sektionen

ROECKERATH, Christina
Aktuelle Forschung im Klassenzimmer: Modellierung und Simulation von Populationsentwicklungen

GÖTTLICH, Simone & BRACKE, Martin
Eine Modellierungsaufgabe zum Thema: „Munterer Partnertausch beim Marienkäfer“

Rolf BIEHLER
Studien zum Einsatz von eLearning für das Lernen von Mathematik

FISCHER, Pascal Rolf
E-Learning zwischen Schule und Universität? Ergebnisse einer empirischen Studie zum Einsatz einer E-Variante mathematischer Brückenkurse

POLUSHKINA, Svetlana
Selbstreguliert Modellieren lernen mit einer E-Lernumgebung für Schüler/innen: Kompetenzförderung durch Lernunterstützungen

WASSNER, Christoph
E-Learning in der Unterrichtspraxis

Claudia BÖTTINGER
Analyse und Reflexion mathematischer Kommunikationsprozesse im Unterricht - Besonderheiten mathematischer Deutungen

STEINBRING, Heinz
Ist es möglich mathematische Bedeutungen zu kommunizieren? - Epistemologische Analyse interaktiver Wissenskonstruktionen

NÜHRENBÖRGER, Marcus
Diskursives Lernen im Mathematikunterricht - Interaktive Wissenskonstruktionsprozesse von und mit Kindern im jahrgangsgemischten Anfangsunterricht

SÖBBEKE, Elke
Welche Faktoren beeinflussen eine strukturorientiert relationale Deutung von Anschauungsmitteln? - Ansätze zur Erhebung möglicher Rahmungen bei der Interpretation von Anschauungsmitteln in der Grundschule

Claudia BÖTTINGER
Analyse und Reflexion mathematischer Kommunikationsprozesse im Unterricht - Besonderheiten mathematischer Reflexion

BRÄUNING, Kerstin
Kollegiale Reflexionen von Mathematiklehrkräften der Grundschule - In welcher Form kommunizieren die Lehrerinnen miteinander über mathematisches Wissen?

Elmar COHORS-FRESENBORG
Wertschätzen und Praktizieren von Monitoring und diskursiver Unterrichtskultur - Ein Erklärungsversuch für Erfolg mathematischen Lernens und Lehrens

COHORS-FRESENBORG, Elmar
Zum Zusammenhang des Wertschätzens und Praktizierens von Monitoring-Aktivitäten mit mathematischer Leistung

GRETZMANN, Eva Maria
Klassifizierung von Monitoring-Aktivitäten und Diskursivität im Unterrichtsdiskurs

NOWINSKA, Edyta
Monitoring-Aktivitäten als Hilfe zur Erhöhung der Nachhaltigkeit bei mathematischen Lernprozessen

Astrid FISCHER & Lisa HEFENDEHL-HEBEKER
Algebraisches Denken zwischen Einzelfall und Struktur

BERLIN, Tatjana
Unterrichtsvorschlag zur Einführung von Variablen im 5. Schuljahr

BERTALAN, Dagmar
Die Professoren-Studenten-Aufgabe im Unterricht

FISCHER, Astrid
Vereinfachen von Termen: Imitation von Handlungsroutinen oder gedankliches Durchdringen von Zusammenhängen?

GERHARD, Sandra
Variablen im geometrischen Kontext

FISCHER, Astrid & HEFENDEHL-HEBEKER, Lisa
Zur algebraspezifischen Ausprägung mathematischer Denkhandlungen

Thomas GAWLICK
Empirische Untersuchungen zur Interaktion beim Problemlösen

GAWLICK, Thomas
Quantitative Methoden zum Prozessvergleich

KÖSTER, Dennis
Ein Kategorienschema zur Analyse von Aussagen im MU

LANGE, Diemut
Auswahl von Aufgaben für eine explorative Studie zum Problemlösen

Gert KADUNZ
Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik
HUTH, Melanie
Redebegleitende Gestik in mathematischen Kindergesprächen
SCHMIDT-THIEME, Barbara
Erklären als fachspezifische Kompetenz in fächerübergreifender Perspektive
KADUNZ, Gert
Diagramm und Algorithmus

Christa KAUNE
Das Telekom-Projekt „Mathematik Gut Unterrichten“
GRIEP, Mathilde
„Vermischte Kopfübungen“ als Anlass für Monitoring und Reflexion
KRAMER, Silke
Diagnose metakognitiver Aktivitäten - Trainingsmaßnahmen für Mathematiklehrkräfte
KAUNE, Christa
Analyse von Mathematikunterricht hinsichtlich des Einsatzes von metakognitiven Aktivitäten und Identifikation spezieller Unterrichtsskripts

Sebastian KUNTZE & Barbara DROLLINGER-VETTER
Videobasierte empirische Studien zum Erklären, Argumentieren und Verstehen im Mathematikunterricht
DROLLINGER-VETTER, Barbara
„Verstehenselemente" im Mathematikunterricht
WAGNER, Anke & WÖRN, Claudia
Erklärend handeln - handelnd erklären
KUNTZE, Sebastian
Herausforderungen videobasierter empirischer Forschung zum Argumentieren und Erklären im Mathematikunterricht im Hinblick auf die Qualität von Lerngelegenheiten

Dominik LEISS; Kristina REISS; Stanislaw SCHUKAJLOW & Luzia ZÖTTL

Empirische Leistungsuntersuchungen im Kompetenzbereich Modellieren

LEISS, Dominik; BÜRGERMEISTER, Anika; HARKS, Birgit; KLIEME, Eckhard; RAKOCZY, Katrin & BLUM, Werner

Consequences of Classroom Assessment – Vorstellung des Projekts CoCa

ZÖTTL, Lucia & REISS, Kristina

Lösungsbeispiele zum Einstieg in das Modellieren – Erste Ergebnisse aus KOMMA

BLUM, Werner; SCHUKAJLOW, Stanislaw; LEISS, Dominik & MESSNER, Rudolf

Selbständigkeitsorientierter Mathematikunterricht im ganzen Klassenverband? Einige Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt

Matthias LUDWIG & Reinhard OLDENBURG

Raumgeometrie Lernen: Die Bedeutung realer und mentaler Modelle von Körpern und deren Konstruktion

OLDENBURG, Reinhard

Vorstellungen von Konfigurationen und Raumgeometrischen Konstruktionen

LUIG, Karsten & STRÄSSER, Rudolf

Förderung ausgewählter Aspekte der Raumvorstellung mit dynamischer Geometriesoftware

HATTERMANN, Mathias

Der Zugmodus in 3D-Dynamischen Geometriesystemen

STEINWANDEL, Jürgen & LUDWIG, Matthias

Die Strukturerfassung regulärer und halbregulärer Körper. Ein Vergleich von 3D-Computersimulation, Bild und Realmodell

PROBST, Brigitte & STRÄSSER, Rudolf

Tauglichkeitstest schulgeeigneter 3D-Programme an Aufgaben zur räumlichen Geometrie

Laura MARTIGNON

Mathematik und Gender

BLUNCK, Andrea

GenderMathematik - ein Projekt zur Verbesserung der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik

MOTZER, Renate
„Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugungen zu erzwingen.“ – Was denken Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse über das Zitat von Fermat?
JUNGWIRTH, Helga
Computer und Geschlecht - eine hochaktuelle Frage für Unterricht und LehrerInnenbildung in Mathematik

Michael MEYER
Begriffsbildung im Mathematikunterricht
MEYER, Michael
Sprachspiele im Mathematikunterricht
HUSSMANN, Stephan & SCHACHT, Florian
Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen

Michael MEYER & Marcus SCHÜTTE
Theorieentwicklung in der Interpretativen Unterrichtsforschung
BRANDT, Birgit
Kollektives Problemlösen - eine partizipationstheoretische Perspektive
MEYER, Michael
Die Erarbeitung mathematischer Zusammenhänge - Analyse von Schulbüchern
SCHÜTTE, Marcus
Sprachliche Gestaltung von Lehr-Lern Prozessen im Grundschulmathematikunterricht
BIKNER-AHSBAHS, Angelika
Interessenlage und Erkenntniszugang

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER
Heterogenität als Herausforderung und Chance für das Mathematiklernen in der Primarstufe
RASCH, Renate
Heterogenität beim Bearbeiten von Textaufgaben
WÄLTI, Beat
Lernprozesse begleiten, Produkte der Kinder beurteilen
RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth & RECHSTEINER-MERZ, Charlotte
Gemeinsam, aber nicht im Gleichschritt - eine Konzeption für das Mathematiklernen in der jahrgangsgemischten Eingangsstufe

Martin WINTER
Förderung mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung in Kindergärten: Eine Initiative "von unten"

WINTER, Martin
Mathematisch-naturwissenschaftliche Projekte in Kindergärten: Evaluation einer Elterninitiative

TEUTENBERG, Merle
Schlussfolgerndes Denken im Kindergarten handlungsorientiert entwickeln und fördern

Einzelvorträge

ALBERS, Reimund
Mathematik Neu Beginnen - Neue Wege in der Grundschullehrerinnenausbildung

AMBRUS, Gabriella & VANSCÓ, Oedön
Modellierungs- und Anwendungsaufgaben im Unterricht und in der Lehreraus- und -fortbildung: Wirkungen eines Lehrerfortbildungskurses auf die Teilnehmer

ANZENHOFER, Stefanie
Musikalische Graphen im fächerübergreifenden Mathematik- und Musikunterricht

ATANASYAN, Sergey
Additional geometrical disciplines in preparation of the teachers of mathematics

BECKMANN, Astrid
Fächerübergreifender Unterricht zwischen Mathematik und Biologie - Ernährungskreis, Ähnlichkeit und Allometrie

BENÖLKEN, Ralf
Mathematisch begabte Mädchen im Grundschulalter

BESCHERER, Christine & SPANNAGEL, Christian
Kognitive Meisterlehre beim Mathematiklernen

BEUTELSPACHER, Albrecht
Das Mini-Mathematikum in Gießen

BÖHM, Ulrich
Ein online-Lehrerfortbildungskurs zum mathematischen Modellieren

BÖNIG, Dagmar; RÖBBELING, Neele & TIMM, Gundel
Erprobung und Evaluation einer Lernumgebung zur Kombinatorik in Klasse 1 / 2

BOROVCNIK, Manfred
Am Schnittpunkt von empirischer Forschung und Unterricht in elementarer Wahrscheinlichkeit

BORYS, Thomas
Codierungen im Spiegel der fundamentalen Ideen der Mathematik

BORYS, Thomas & STELLFELDT, Christian
Computer und Codierung - Selbsteinschätzungen und Kenntnisse von Studienanfängerinnen und -anfängern

BRANDL, Matthias
Lernumgebungen zur Begabtenförderung am Gymnasium

BRAUN, Thorsten & NIEHAUS, Engelbert
Maxima4School: Chancen und Grenzen der OpenSource-Computeralgebrasysteme im Unterricht

BRENNER, Hans-Joachim
Das Elementarisierungs- und Trivialisierungsproblem im Mathematikunterricht

BRINKMANN, Astrid
Die schönsten Mathematikaufgaben - Ein Projekt zum Jahr der Mathematik 2008

BRUDER, Regina; LEUDERS, Timo & WIRTZ, Markus
Ein diagnostisches Kompetenzstrukturmodell für ein heuristisches Arbeiten mit Repräsentationen von Funktionen und seine empirische Überprüfung

BUCHHOLTZ, Nils & SCHWARZ, Björn
Vergleich des mathematischen und fachdidaktischen Wissens zum Thema "Argumentieren und Beweisen" von Lehramtsstudierenden in Deutschland, Hongkong und Australien

BÜRKER, Michael
Die Finanzkrise als Impuls für mathematikdidaktische Überlegungen

CHAHIN, Rami; PENG, Bei; REALE, Roberto & RÜHLING, Felix
Mathematische Prinzipien hinter den musikalischen Kompositionen für die Eröffnung der Tagung

COLLET, Christina
Welche Effekte können mit Lehrerfortbildungen zum Problemlösen im Mathematikunterricht erzielt werden?

DRÜKE-NOE, Christina
Ein prüfender Blick auf (kompetenzorientierte?) Klassenarbeiten

EICHLER, Andreas & FÖRSTER, Frank
Verrat! - Stochastische Modellbildung bei einem merkwürdigen Brettspiel

EISENMANN, Petr
Ein Beitrag zur Entwicklung funktionalen Denkens der Studenten
ELSCHENBROICH, Hans-Jürgen
Das methodische Dreieck: Medien - Methoden - Kompetenzen
ENGEL, Joachim
Komplexe Zahlen als Vermittler zwischen Geometrie und Algebra in der Lehrerausbildung
EPKENHANS, Martin
Computeralgebra- ein Werkzeug aus der Mathematik für die Mathematik- Entwicklung einer Leitidee für den Unterricht
FLACHSMEYER, Jürgen
Orimathe: Zum Zusammenwirken von Origami und Mathematik
GÄCHTER, Albert
Der Albtraum eines Mathematikers - und seine Folgen
GEERING, Peter
Sicher rechnen
GERRITZEN, Lothar
Zwanzigeins statt einundzwanzig - Zur Geschichte und Didaktik der verdrehten Zahlsprechweisen
GIRNAT, Boris
Geometrische Weltbilder in der Sekundarstufe I- Eine Klassifikation aus Lehrersicht
GÖTZ, Stefan & MAASS, Jürgen
Bildungsstandards in Österreich - Chance, Risiko oder Sturm im Wasserglas?
GRADNITZER, Theresa
Mathematikbezogene Beliefs von Eltern
GRAUMANN, Günter
Der vierdimensionale Würfel - ein Bindeglied zwischen anschaulicher und mehrdimensionaler Geometrie
GRIESHOP, Gabriele
Das Projekt "Schulbuch KO“ - Schulbuchaufgaben kompetenzorientiert einsetzen
GRIGORAS, Roxana & HALVERSCHEID, Stefan
Mathematisieren ohne Zahlen – eine Fallstudie
HAFNER, Thomas
Proportionalität und Prozentrechnung - längsschnittliche Entwicklung elementarer Modellierungskompetenzen

HAHN, Heike & MÖLLER, Regina
Zum frühen Verständnis des Stellenwertprinzips
HASLAUER, Martina
Rechenschwächen - Aspekte eines fördernden und zeitgemäßen Unterrichts in Sekundarstufe I
HAUG, Reinhold
Erfolgreiches Lernen mit Modellierungswerkzeugen
HEINZE, Dana
Getting started well: The training "VorMath"as a tool to improve mathematical precursor skills and mathematical thinking before school
HEITZER, Johanna
Vom Lotfällen bis zum JPEG-Format – Eine zentrale mathematische Idee und ihre Anwendungen
HELLMIG, Lutz
Zum Verhältnis von Inhalt und Form von Lehrerfortbildung - eine Falldiskussion
HERGET, Wilfried & PABST, Markus
Modellieren und Argumentieren im Team - Erfahrungen mit der Cornelsen Mathe-Meisterschaft
HESS, Kurt
Aufbau einer mathematischen Strategiebewusstheit in der Eingangsstufe
HISCHER, Horst
Was sind und sollen Vernetzungen?
HOCHMUTH, Reinhard & JORDAN, Alexander
Modellierungskompetenzen von Lehramtsstudierenden im Kontext funktionaler Fragestellungen unter Berücksichtigung von Intelligenz und Volition
HÖFER, Thilo
Funktionales Denken fördern: Was, wann und wie fordern die Bildungsstandards verschiedener Bundesländer?
VOM HOFE, Rudolf & HAFNER, Thomas
Zum Problem von Mindeststandards und der sogenannten Risikogruppe
HOFFART, Eva
Zum diagnostischen Potential von Aufgaben in Orientierungsarbeiten - Rationale und empirische Aufgabenanalyse
HOFFKAMP, Andrea
Dynamisierter Repräsentationstransfer und Metavariation - ein Ansatz zur Förderung funktionalen Denkens durch Computereinsatz

HOLZÄPFEL, Lars; GLOGGER, Inga; SCHWONKE, Rolf; NÜCKLES, Matthias & RENKL, Alexander
Lerntagebücher im Mathematikunterricht: Diagnose und Förderung von Lernstrategien

HUMENBERGER, Hans
Das PageRank-System von Google - eine aktuelle Anwendung im Mathematikunterricht

INGELMANN, Maria
Evaluation einer Unterrichtskonzeption für einen CAS-gestützten MU in der Sekundarstufe I

JAHNKE, Thomas
Kritik empirischer Unvernunft – zur sogenannten Empirischen Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik

JUSKOWIAK, Steffen; ALEXY, Christoph & HEINRICH, Frank
„Audioreflexion“ als eine mögliche Maßnahme zur Förderung der Problemlösefähigkeit

JUST, Carolin
Zur Verbesserung der Mathematiklehrerausbildung. Erprobte Ideen und abgeleitete Überlegungen.

KASUBA, Romualdas
Wie viele Wörter braucht man, um einen mathematischen Inhalt zum Ausdruck zu bringen?

KAUFMANN, Stefan-Harald
Die Bedeutung des Parameterbegriffs für den Mathematikunterricht - Wissenschaftsorientiertes Übel oder didaktische Notwendigkeit?

KINNER, Jörg Erik
Kognitive Strukturen mathematisch begabter Kinder

KLIEMANN, Sabine
Die Welt durch die mathematische Brille betrachtet - ein Forder-Förder-Projekt in der 6. Jahrgangsstufe

KORTENKAMP, Ulrich & ROLKA, Katrin
"Der Boxplot ist nur von einzelnen Werten abhängig" - Dateninterpretation durch Computereinsatz schulen

KREBS, Mathias & LUDWIG, Matthias
Erste Erfahrungen beim Mathematiklernen mit Wikis

KRÜGER, Katja
Modellbildungen kritisch einschätzen – Wie lange reichen die Erdgasreserven?

KRUMSDORF, Julian
Beispielgebundenes Beweisen
KUHNKE-LERCH, Isabell & BRUDER, Regina
Kompetenzmessung in der Lehrerausbildung - Eine Studie zur Beurteilung von Unterrichtsentwürfen
LAAKMANN, Heinz
Lernprozessstudie zum flexiblen Umgang mit Darstellungsformen bei der Begriffsbildung, am Beispiel der linearen Funktionen im rechnerunterstützten Mathematikunterricht
LACE, Gunta
Vorstellungen, Überzeugungen, Erwartungen und Anforderungen der Sekundarstufenlehrer/innen in Lettland
LACK, Claudia
Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr
LADEL, Silke
Multiple externe Repräsentationen (MERs) - Gestaltungsprinzipien und deren Umsetzung bei Software für den Anfangsunterricht Mathematik
LEHMANN, Ingmar
Fibonacci-Zahlen in Bildender Kunst und Literatur
LILITAKIS, Georg
Untersuchung zum Studienverlauf des Fachs Mathematik für das Lehramt an Grundschulen an der Universität Kassel
LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Helmut
Der Einsatz von Kurzfilmen als Einstieg in Experimentier- und Explorationsphasen
LÜKEN, Miriam
Muster und Strukturen - Bedeutung für den Schulanfang?!
MAXARA, Carmen
Simulationskompetenzen und stochastische Kompetenzen - Ergebnisse einer explorativen Fallstudie
MERSCHMEYER-BRÜWER, Carla
Die Bedeutung von geometrischen und arithmetischen Vorstellungen für das Mathematiklernen von Grundschulkindern
MEYER, Marco & NIEHAUS, Engelbert
Geographie und Mathematik: Räumliche Logik in Geoinformationssystemen
MÜLLER, Winfried
Entdeckungen am Billard – Ein Unterrichtsprojekt

NESTLE, Fritz
World of Warcraft und Mathematik - Vergleiche
NEUBERT, Bernd
Daten erfassen und darstellen von Daten in der Grundschule – Versuch einer Konzeption
OBERSTEINER, Andreas
Können neurowissenschaftliche Methoden dazu beitragen, den Zusammenhang zwischen räumlichem Vorstellungsvermögen und Mathematikleistung zu klären?
PALLACK, Andreas
Mathematikunterricht kooperativ entwickeln - das Beispiel SINUS.NRW
VON PAPE, Bodo
Voronoi-Parkette – Eine Schnittstelle zwischen gesundem Menschenverstand und subtiler Mathematik
PHILIPP, Kathleen; MATT, Dominik & LEUDERS, Timo
Experimentelles Denken - Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen
PICHER, Franz
Beschreibung von Änderungen
PINKERNELL, Guido
Konsequente Technologieorientierung am Beispiel Funktionalen Denkens
PRÖMMEL, Andreas & BIEHLER, Rolf
Instruktionale Unterstützung selbständigen Lernens in der gymnasialen Oberstufe beim Einstieg in die Stochastik
RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth & WESSOLOWSKI, Silvia
Diagnose und Förderung - ein zentraler Baustein der Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und -lehrern im Primarbereich
REIBOLD, Julia & BRUDER, Regina
MABIKOM - ein Projekt zur binnendifferenzierenden Unterrichtsgestaltung in der Sekundarstufe I
REZAT, Sebastian
Das Mathematikbuch im Unterricht - Wohl oder Übel?
ROPPELT, Alexander
Alles vergessen nach dem Abitur? Ein Vergleich der mathematischen Grundkompetenzen von Studierenden und Schülern
RÜEDE, Christian & WEBER, Christof
Keine Diagnose ohne Auseinandersetzung mit Form, Inhalt und Hintergrund von Schülertexten

SAFUANOV, Ildar
Design of a system of teaching elements of group theory
SCHÄFER, Ingolf & EINHAUS, Erik
Förderung zu Beginn der gymnasialen Oberstufe im Rahmen einer Selbstlerneinheit zu quadratischen Gleichungen
SCHARLACH, Christine
Mathematik-Didaktik für Tutor/-innen (und WMs) - ein Projekt an der TU Berlin
SCHERER, Petra
Diagnose ausgewählter Aspekte des Dezimalsystems bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern
SCHINK, Andrea
„Und was ist jetzt das Ganze?!" - Vom Umgang mit der Bezugsgröße bei Brüchen
SCHLÖGLMANN, Wolfgang
Zur Bedeutung von Begriffen und Konzepten in der mathematikdidaktischen Forschung
SCHMAILZL, Susanne & KUNTZE, Sebastian
Situationsbezogene und übergreifende Überzeugungen von Mathematiklehrkräften zum Lernen an Fehlern und zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch
SCHUKAJLOW, Stanislaw; LEISS, Dominik; BLUM, Werner; MESSNER, Rudolf & PEKRUN, Reinhard
Einstellungen und Überzeugungen von Lernenden zu Mathematikaufgaben mit und ohne Realitätsbezug
SCHULZ, Andreas
Führen Bildungsstandards zu Unterrichtsentwicklung? Ausgewählte Ergebnisse einer Studie im Mixed-Method-Design
SCHUMANN, Heinz
Räumliches Analogisieren ebener Geometrie
SCHWEIGER, Fritz
Ordnen – eine fundamentale Idee
SIEBEL, Franziska
Wie reagiert der Schulbuchmarkt auf Jahrgangsmischung?
SJUITS, Johann
Bewältigung statt Vermeidung: Förderdiagnostik zur sprachlogischen Komplexität

SOMMER, Norbert
Der Mathematikunterricht aus Sicht der Unterrichtseinsichtnahmen der Schulinspektion
SPANNAGEL, Christian & BESCHERER, Christine
Didaktische Entwurfsmuster für technologieunterstützte Mathematikübungen
STANJA, Judith
Repräsentationen stochastischer Inhalte in der Primarstufe
STEIN, Martin & WINTER, Kathrin
Das Projekt Mathe-Meister: Strukturen & Konzeption
SZÜCS, Kinga
Problemlösen in der wirtschaftsmathematischen Ausbildung
TESCH, Maike & DUCHHARDT, Christoph
Erhebungen mathematischer Kompetenz im Nationalen Bildungspanel
THOM, Sandra
Montessori und die „Alten Chinesen“ oder Über historisch-genetischen Mathematikunterricht bei Montessori am Beispiel des Großen Multiplikationsbrettes
TICHÁ, Marie
Die Aufgabenbildung als Motivation zur Entwicklung der mathematischen Grundbildung
TSCHACHER, Karel
Das W-Seminar – Ein Angebot in der Oberstufe des G8 in Bayern
UFER, Stefan & LORENZ, Elisabeth
Wahr oder falsch? Der Umgang mit Vermutungen als mathematische Kompetenz
ULLMANN, Philipp
Klio geht zur Schule. Vom Ruhm der Geschichte im Mathematikunterricht
VANCSÓ, Oedön
Analyse der Veränderungen im MU fokussiert auf den früheren und heutigen Abituraufgaben
VEILANDE, Ingrida
Das Schubfachprinzip bei den Lösungen der kombinatorischen Aufgaben in den Mathematikolympiaden
VOHNS, Andreas
Was fängt man mit dem Wissen um fundamentale Ideen in der (AHS)-Oberstufe an?

VOLLSTEDT, Maike
„After I do more exercise, I won't feel scared anymore“ - Sinnkonstruktionen einer Hongkonger Schülerin aus einer kulturellen Perspektive

VORHÖLTER, Katrin
Zur Rolle von Modellierungsaufgaben bei der Sinnkonstruktion von Schülerinnen und Schülern

WAGNER, Ralf & NIEHAUS, Engelbert
Verbindung von Tabellenkalkulation, Dynamischer Geometriesoftware und Geographischen Informationssystemen zur Visualisierung von glatten Wegen im mathematischen Umweltlabor

WARTHA, Sebastian
Rechenstörungen jenseits der Grundschule

WEISS-PIDSTRYGACH, Ysette
Lerne, zu sagen was man meint

WILLE, Annika
Von Schülerinnen und Schülern erdachte Dialoge im Kontext der Zahlbereichserweiterungen in Klasse 5

WÖRLER, Jan
Konkrete Kunst: Mathematik in Bildern finden und dynamisch erforschen

ZELL, Simon
Mathematical literacy

Workshops

MEIER, Stefanie
Modellieren im Mathematikunterricht – Aufgaben und Erfahrungen aus einem Comenius-Netzwerk (DQME II)

NESTLE, Fritz
Lernkontrollen für Mathematik im Internet

SCHARLACH, Christine
Einführung in die geschlechtergerechte (Hochschul-) Lehre

Michael NEUBRAND, Oldenburg

Vorwort zum Oldenburger Band „Beiträge zum Mathematikunterricht 2009“

Die Carl von Ossietzky Universität in Oldenburg hat die "43. Tagung für Didaktik der Mathematik" gern ausgerichtet, ist sie doch aufgrund ihrer Geschichte der kritischen wissenschaftlichen Begleitung gesellschaftlicher Entwicklungen besonders verpflichtet und versteht sie sich von daher als Universität, welche auch die Aufgabe der Lehrerausbildung explizit zu ihren Kernbereichen zählt. Die außergewöhnlich hohe Zahl von über 400 Teilnehmerinnen und Teilnehmern zeigt, dass Oldenburg als geeigneter Ort für unsere Tagung offenbar angenommen wurde.

Eine Jahrestagung wie diese ist immer auch Spiegelbild der aktuellen Entwicklungen unserer Disziplin, der Mathematikdidaktik. Sie lebt vom wissenschaftlichen Engagement der Teilnehmerinnen und Teilnehmer – manifestiert in den Sektionsvorträgen – und profitiert von der Qualität des Rahmens, den die Veranstalter aufspannen – sichtbar durch die Einladungen an die Hauptvortragenden und erkennbar im sozialen Umfeld, innerhalb dessen die Tagung platziert wird.

Wissenschaftliche Impulse werden zunächst durch die Hauptvorträge gesetzt. Mehrere Gedanken beeinflussten die Auswahl der Hauptvortragenden:

- Die Entwicklung der Mathematikdidaktik in den letzten Jahren kann man wohl vor allem als eine vermehrte Zuwendung zur Kernaufgabe des "Lehrens" kennzeichnen.
- Alle Weiterentwicklungen des Mathematikunterrichts benötigen eine solide theoretische Basis, und dennoch ist der Praxisbezug Orientierung und Messlatte.
- Der Inhalt selbst, in unserem Falle also die Mathematik, ist eine entscheidende Kategorie im mathematikdidaktischen Denken.
- Und schließlich profitieren wir stets auch vom "Blick nach draußen".

Die Hauptvorträge nehmen jeweils mehrere dieser Grundideen in unterschiedlichen Akzentuierungen auf. Deborah Loewenberg Ball und Hyman Bass diskutieren die Frage, welches mathematische Wissen Lehrerinnen und Lehrer brauchen und sehen dabei gerade den fachspezifischen "mathematischen Horizont" als eine der notwendigen Wissenskategorien an. Regina Bruder widmet sich der Aufgabe, langfristige Forschungsprojekte in der Mathematikdidaktik zu realisieren, zeigt auf die Praxisrelevanz und verweist dennoch auf die theoretischen Grundorientierungen. Susanne Prediger stellt die vielfältigen Theorien der Mathematikdidaktik in den Mittelpunkt und bezieht sie andererseits auf das zentrale Praxisfeld der Textaufgaben. Gerade aus der allgemeineren psychologischen Perspektive ergibt sich die zentrale Rolle inhaltspezifischen "intelligenten Wissens" für die Entwicklung von "Können", wie Elsbeth Stern herausarbeitet. Bereits dieser Vortrag ist zudem ein "Blick nach draußen". Unter diversen Blickwinkeln sieht man indes mehr: Rainer Kaenders blickt in die Niederlande und zeigt Tendenzen, die sich vermutlich auch hierzulande bald abzeichnen könnten. Die drei Oldenburger Naturwissenschaftsdidaktiker Corinna Hößle, Ilka Parchmann und Michael Komorek stellen Projekte zum Kontextbezug des naturwissenschaftlichen Unterrichts vor und verbinden dabei praktische Unterrichtsentwicklung mit fachdidaktischer Forschung.

In über 200 Vorträgen haben die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Tagung entscheidend zum wissenschaftlichen Programm der Tagung beigetragen. Charakteristisch sind zwei Elemente: In großer Zahl wie selten zuvor haben jüngere Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler vorgetragen. Das hängt mit der erhöhten Präsenz projektbezogener Forschung in der Mathematikdidaktik zusammen. Unsere Tagung zeichnet sich daher vor allem durch unmittelbare forschungsbezogene Aktualität aus. Die Doktorandinnen und Doktoranden haben sich zudem durch eigene Treffen ein Forum des gegenseitigen Austauschs geschaffen. Zugenommen gegenüber früheren Tagungen hat auch die Akzeptanz von "moderierten Sektionen". Durch thematische Zusammenhänge kommen trotz des Staccatos der Kurzvorträge auch größere gedankliche Einheiten zustande. Diese bilden sich auch in diesem Tagungsband ab, indem die Vorträge in den moderierten Sektionen nach einer Einleitung der Moderatoren zusammenhängend abgedruckt werden.

Mit fast 1000 Seiten gibt dieser Band der "Beiträge zum Mathematikunterricht" somit ein umfassendes Bild des Standes und der Entwicklungstendenzen der Mathematikdidaktik in Deutschland (und darüber hinaus – denn auch die Beteiligung ausländischer Gäste war erfreulich hoch: 2 Hauptvorträge und mehr als 10 Einzelvorträge, die nicht aus den traditionell mit der GDM verbundenen deutschsprachigen Ländern kommen, wurden gehalten).

Hans-Georg WEIGAND, 1. Vorsitzender der GDM

Eröffnungsrede zur 43. Jahrestagung für Didaktik der Mathematik

Sehr geehrter Herr Ministerialdirigent,
sehr geehrter Herr Vize-Präsident,
liebe Kolleginnen und Kollegen von fern und nah,
meine sehr geehrten Damen und Herren,

Ich freue mich sehr, dass ich die 43. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik im Namen der GDM hier in Oldenburg eröffnen darf. Nach 1984 Ist es die zweite Jahrestagung, die in Oldenburg stattfindet.

Der Dank der GDM gilt zunächst allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern hier in Oldenburg, für die Organisation dieser Tagung, für die Ausarbeitung des sozialen Programms und für die Zusammenstellung des wissenschaftlichen Programms.

Wenn ich die Themen und Kurzfassungen der diesjährigen Hauptvorträge ansehe und richtig antizipiere, so denke ich, dass sich bereits in der Auswahl dieser Vorträge derzeit aktuelle Aspekte der Mathematikdidaktik widerspiegeln,

- Diese sehe ich zum einen – in den Vorträgen von Deborah Ball und Hyman Bass sowie von Elsbeth Stern – in denen wieder verstärkt die Bedeutung des Inhaltlichen, die Bedeutung der Inhalte der Mathematik für die Mathematikdidaktik herausgestellt wird.
- Zum Zweiten sehe ich diese Aspekte im Vortrag von Regina Bruder, in der Bedeutung langfristiger empirischer Untersuchungen im Vergleich zu kurzfristigen Unterrichtsprojekten.
- Zum Dritten ist für mich – in den Vorträgen von Corinna Hößle, Ilka Pachmann, Michael Komorek und Rainer Kaenders – der Blick in Nachbargebiete wichtig. Nachbargebiete in doppelter Bedeutung, einmal in das Nachbargebiet Naturwissenschaften und zum anderen das geographische Nachbargebiet, hier die Niederlande.
- Schließlich und zum Vierten wird in dem Vortrag von Susanne Prediger auf die zunehmende Bedeutung theoriebezogener fachdidaktischer Forschung hingewiesen, Theorie ans Werkzeuge und Instrumente in der Mathematikdidaktik.

Ich freue mich auf diese Vorträge, aber natürlich auch auf die zahlreichen Sektionsvorträge, die wieder einmal die Variationsbreite der Themen der Mathematikdidaktik aufzeigen.

Unsere Jahrestagung ist aber auch stets der Ort, an dem **bildungspolitische Entwicklungen** des letzten Jahres reflektiert und in Beziehung zur Mathematikdidaktik gesehen werden können. Ich möchte – angesichts der mir von den Organisatoren vorgegebenen Zeit – nur auf zwei Punkte eingehen, die mich im letzten Jahr bewegt, geärgert, aber auch erfreut haben.

- Lehre und Lehrerbildung an den Universitäten
- Schule und die Kritik an der Schule

1. Lehre und Lehrerbildung

In der Süddeutschen Zeitung vom 29. Januar 2009 schrieb Alex Rühle, Journalist der SZ:

> „Man hat den Eindruck, dass Bologna, Exzellenzinitiative oder BA/MA ... die ganzen Reformen über die Universitäten wie Naturkatastrophen kommen, ausnahmslos alle finden es schrecklich oder absurd, keiner kann was dafür, niemand verweigert sich.“ (SZ 29. Jan. 09, S. 11)

Es ist richtig, dass viele von uns derzeit Tage, Wochen und Monate für Strukturpläne, Modulhandbücher und Teilmodulbeschreibungen aufwenden. Bei allen organisatorischen Strukturarbeiten darf aber die für uns eigentlich wichtige inhaltliche Seite der Bildung, Ausbildung, Lehrerbildung nicht vergessen werden: Es gilt die organisatorische Neugestaltung als eine Chance für eine inhaltliche Verbesserung der Ausbildung zu nutzen.

Man mag sich (wie einst Kant) fragen: „“Wie kultiviere ich die Freiheit bei dem Zwange?“ oder man mag sich auch – im Humboldtschen Sinne - nach einer „Lehre und Wissenschaft in Einsamkeit und Freiheit“ sehnen.

Wir – die Mathematikdidaktik – dürfen und können uns natürlich aktuellen Entwicklungen nicht verweigern, wir müssen vielmehr sie als Chance für Neuentwicklungen sehen. Man muss keine Standards mögen und mag insbesondere den gerade von der KMK verabschiedeten Standards für die Lehrerbildung kritisch gegenüberstehen. Es war aber richtig und wichtig, dass wir - die GDM - in Zusammenarbeit mit der DMV und dem MNU die Chance ergriffen hat, und eigene Empfehlung zu diesen Standards für die Lehrerbildung herausgegeben hat. Darin wird der Aspekt betont, den wir als zentral für die zukünftige Entwicklung der Lehrerbildung ansehen, nämlich das Inhaltliche wieder stärker zu betonen, uns – wieder einmal - der Ziele – Sie können auch Kompetenzen sagen – bewusst werden, die es in einzelnen Veranstaltungen im Rahmen der Lehrerbildung zu erreichen gilt.

Dabei ist EINES – neben Inhalten, Kompetenzen, Fachwissen, Projekten und Drittmitteleinwerbung - unverzichtbar – und das steht nicht in den

Standards - das ist das Engagement von uns Lehrerenden, die Überzeugung von der Wichtigkeit unserer Inhalte und der stete Blick auf diejenigen, für die wir das alles tun, der Blick auf die Schülerinnen und Schülern.

Ich erlaube mir, da wir hier in Oldenburg sind und ich diesen Ort aus eigener Erfahrung etwas kenne, zwei Kollegen zu erwähnen, die für mich in besonderer Weise dieses Engagement verkörpert haben, zwei Kollegen, die es geschafft haben, ihre eigene Begeisterung für das Fach auf die Studierende zu übertragen, die von dem, was sie in Lehrbucharbeit, in Veranstaltungen, in Ausstellungen und in der Gestaltung von Lehr- und Lernwerkstätten getan haben, stets überzeugt waren, stets mit dem Herzen bei der Sache waren – unabhängig von der Frage nach Drittelmittelfähigkeit. Sie dienten mir als Vorbild und ich denke, sie können auch vielen jüngeren Nachwuchswissenschaftlern als Vorbild dienen. Beide Kollegen sind längst pensioniert, haben sich aber über ihre Pensionierung hinaus – einem Fall 15 Jahre - noch aktiv in der Ausbildung engagiert und sie sind auch hier in die Organisation dieser Tagung eingebunden. Ich erlaube mir also, Sie als Beispiel für Engagement und Beherztheit besonders zu erwähnen. Herzlichen Dank Herr Besuden und herzlicher Dank Herr Sprockhoff.

2. Schule und Schulkritik

Wohlwissend, dass Schulkritik so alt ist wie die Schule selbst und Schulkritik zeitlos ist, so ist die gegenwärtige Kritik an der Schule, insbesondere am Mathematikunterricht, - für mich – doch beachtenswert und häufig ärgerlich.

Wieder ein Beispiel aus der SZ vom 15. 1. 2009

> Dort hält Prof. Heiko Knospe vom Institut für Nachrichtentechnik der Fachhochschule Köln seine Studenten für katastrophal schlecht in Mathematik. „Nur etwa ein Fünftel der Erstsemester hat ausreichende Vorkenntnisse.“ Die Gründe liegen für Prof. Knospe darin, dass formale, symbolische und abstrakte Element nur noch eine untergeordnete Rolle spielen und stattdessen praktische Beispiel in den Vordergrund gerückt werden. Darüber mag man ja diskutieren. Der Lösungsvorschlag von Herrn Knospe ist aber dann doch bemerkenswert: „Man sollte (im Unterricht) schon mal ein Beispiel bringen, aber das Abstrakte muss wieder stärker betont werden.“

Das Ärgerliche ist für mich nicht die Kritik, es sind fast immer die vermeintlichen Lösungsvorschläge.

Das zweite Beispiel verpackt Schulkritik in einen Film. Der Film „Die Klasse“ von Laurent Cantet, Gewinner der Goldenen Palme der Filmfestspiele von Cannes 2008 und für den diesjährigen Oscar nominiert, schildert ein Jahr im Leben eines Lehrers in einer Dorfschule in Frankreich. Die Schule gleicht dort eher einer Notfallambulanz als einer Bildungsanstalt.

Ein Lehrer der Schule stellt sich einem Neuankömmling mit den Worten vor: „Hallo, ich unterrichte hier das Einmaleins – und nebenbei bin ich Mathematiklehrer". Das kann man als Botschaft interpretieren!

Der Regisseur Laurant Cantet sieht allerdings die Bedeutung von Schule – „Schule muss die Grundlagen einer Kultur vermitteln" doch auch er hat keinen Lösungsvorschlag, er schlägt vor, „dass der Lehrer seinen Schülern vermitteln muss, warum sie in der Schule sind, warum es wichtig für sie ist, zur Schule zu gehen." Hier wird niemand widersprechen.

Was können wir – in der Mathematikdidaktik – angesichts derartiger Kritik tun? Sicherlich sehen wir viele Probleme der Schulen und wissen wohl mittlerweile auch, dass schnelle Lösungen nicht möglich sind, dass Schule entwickeln ein Agieren in einem höchst komplexen System bedeutet. Unsere Aufgabe – auch auf dieser Tagung – sehe ich darin (wenn ich das einmal auf drei Punkte reduzieren darf):

1. Gründe für Fehlentwicklungen an Schulen, im Mathematikunterricht, wissenschaftlich fundiert aufzuzeigen. In den USA erfährt gerade die jahrelange Kritik an der „No Child left behind"-Initiative der Bush-Administration eine späte – traurige – Rechtfertigung, wenn man die derzeitige Realität an den Schulen, die teilweise beängstigende Testorientierung, sieht.
2. Wir – die Mathematikdidaktik – müssen Ziele und Perspektiven des Mathematikunterrichts stets erneut aufzeigen und
3. Konstruktive Beiträge für eine zumindest partielle Veränderung des realen Unterrichts geben zu können.

Und letztlich denke ich – und hier schließt sich für sich der Kreis zum 1. Punkt – dass fortwährendes Engagement und Überzeugung in der Sache die zentrale Grundlage für alle Veränderungen sind. Diese Tagung soll – wieder einmal – einen Impuls in diese Richtung geben.

Lassen Sie mich zum Schluss nochmals allen Helferinnen und Helfern vor Ort für die Vorbereitung und die Durchführung dieser Tagung ganz herzlich danken.

Ich wünsche Ihnen, dass Sie auf dieser Tagung interessante Vorträge hören, an belebenden Arbeitsgruppen teilnehmen, neue Anregungen bei vielen Gesprächen bekommen,

Die Tagung ist damit – auch seitens der GDM – eröffnet.

Hans-Georg Weigand

(1. Vorsitzender der GDM)

Deborah LOEWENBERG BALL & Hyman BASS, Michigan USA

With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures[1]

Over the last 20 years, we and our colleagues have been developing a 'practice-based theory' of the mathematical resources entailed by the work of teaching. Our aim is to understand better the mathematical demands of helping pupils learn mathematics. Our central hypothesis is that examining the work of teaching directly is a useful way to understand these mathematical demands (Ball & Bass, 2003). To do this, our analyses seek to identify recurrent tasks of teaching mathematics and to analyze their mathematical entailments. In this paper, we describe a recent development of an aspect of our theory that centers on a kind of mathematical 'peripheral vision', a view of the larger mathematical landscape, that teaching requires. We call this kind of vision *horizon knowledge* of mathematics and we consider it a part of mathematical knowledge for teaching. The following vignette illustrates how the need for horizon knowledge can arise in teaching.

> Students in a grade 1 class were measuring their handprints as part of an exploration of the notion of area. They traced the outline of their hands on graph paper, and then counted the number of square cells contained inside the hand outline. One child suggested getting the graph paper used by older pupils because the squares were much smaller and they would be able to get a closer count of the area of their handprints. The teacher, who happened to have recently studied integral calculus, heard the comment as reflecting a surprising intuitive grasp of the fundamental idea that finer mesh affords more accurate measurement. The teacher decided to call the child's idea to the attention of the class and asked what others thought. Many grasped the point and were intrigued, and several wanted to go get some of the smaller-grid paper and try her idea. When they returned with some sheets of the finer-grid graph paper, they tried using it to measure their hands and commented excitedly that they seemed to be able to count more precisely with the finer mesh paper.

Although the class did not pursue the idea in depth, this encounter with the roots of the powerful notion of limits nonetheless exemplifies the importance of teachers being able to hear their students and to build bridges between their thinking and fundamental ideas and practices of the discipline. Such knowledge afforded the teacher in the vignette a view of the mathe-

---

[1] This paper is based on a keynote address at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held in Oldenburg, Germany, March 1 – 4, 2009. The ideas in the paper are ones that have been influenced by the members of our research group, to whom we are grateful, including especially Mark Thames and Laurie Sleep.

matical horizon with which she was able to interpret the child's question and to make an informed decision about how and how much to take it up.

Responsibilities and dilemmas of mathematics teaching

Our notion of teaching entails three central responsibilities: (1) To provide effective opportunities to learn substantial mathematics, and treat the mathematics with intellectual integrity (Bruner, 1960); (2) to be able to hear student thinking, take it seriously, and make it an integral part of the instruction; and (3) to be committed to the learning of every student, and further to the learning of the class as an intellectual community.

These responsibilities can pull in different directions. Reconciling them presents teachers with fundamental dilemmas of teaching: How to balance mathematical rigor with generosity toward emergent student thinking, how to manage mathematical opportunities wisely, or how to make teaching both responsible and responsive? The capacity to do this work entails considerable knowledge and skill, some of it deeply content-based. What is the mathematical knowledge and skill that it takes to manage these issues in teaching, and how can one prepare teachers with opportunities to learn the content in such ways? We turn next to our approach to these questions, which builds on the notion of pedagogical content knowledge (PCK) developed by Lee Shulman and his colleagues (Shulman, 1986).

Mathematical knowledge for teaching (MKT)

'Horizon knowledge,' the focus of this paper, is a sub-domain of what we call *mathematical knowledge for teaching* (MKT), a practiced-based theory of the knowledge of mathematics entailed by the work of teaching mathematics.[2] To provide context for our discussion, we start with a synopsis of our research on MKT. Our work comprises this set of activities:

- Empirically study instruction to identify the mathematical *work* of teaching (Ball & Bass, 2003).
- Analyze what mathematical knowledge is entailed by this work to form a hypothetical characterization of MKT (Ball, Hill, & Bass, 2005; Ball, Thames, & Phelps, 2008).

[2] This is the product of work of several research groups at the University of Michigan, over the past 15 years. It has included the development of survey measures of MKT (mainly at the K-8 grade levels), linking MKT to student learning gains, development of video-codes for the "mathematical quality of instruction" and linking this too to MKT measures, and now also the infusion of MKT ideas into curriculum for teacher education and professional development.

- Test this theory of MKT by developing measures of MKT (Hill, Schilling, & Ball, 2004), validating teacher scores against practice (Hill, Blunk, Charalambos, Lewis, Phelps, Sleep, & Ball, 2008) and against student achievement gains (Hill, Rowan, & Ball, 2005).
- Develop and evaluate approaches to helping teachers learn MKT (Ball, Sleep, Boerst, & Bass, 2009)

What is MKT and how is it distinct from ‘pure’ knowledge of content? How is it different from knowing ways to teach the content?

> We illustrate with an example, situated in two-digit multiplication. Consider the multiplication problem 49×25. The calculation produces the answer 1225. In teaching, being able to multiply is necessary, but far from enough. Being able to get the answer 1225 equips the teacher to recognize whether a student’s answer is right or wrong, but little else. When pupils make errors, something that happens regularly in teaching, diagnosis is the basis for knowing how best to intervene. What is involved in figuring out what students have done? Try analyzing the following incorrect answers:

(a) 49	(b) 49	(c) 49
× 25	× 25	× 25
405	225	1250
108	100	25
1485	325	1275

First, it is important to note that such diagnosis is a common task of teaching. One might argue that the best procedure would be to probe pupils’ thinking through individual interactions to better understand how they were reasoning about the problems. But what if students are not present when the teacher is examining the work, say, as part of marking homework papers? In the absence of knowledge of the student, is there some purely mathematical way of diagnosing these errors, based just on the numerical data? And, if so, what is the mathematical knowledge deployed in doing so?

Interestingly, such analysis is something that many skillful teachers perform with great facility, while it is difficult for other mathematically trained professionals (including mathematicians) who do not teach children. It is for this reason that we call the knowledge needed to do this ‘*specialized*’ knowledge of mathematics; it is mathematical knowledge specialized in particular for the work of teaching.

> We turn to annotate these three examples for the reader. Example (c) appears to be a compensation strategy, replacing 49 by 50, to get the (easier) product 50 x 25 = 1250, but then adding, rather than subtracting 25 to compensate for the change. Example (b) can be seen to be a conventional and widely used algorithm for multiplication, but deployed ’upside down‘: first 9 x 25 = 225; then 4 x 25 = 100. But this second product is really 40 x 25 = 1000, and so

the 100 is actually 100 *tens*, which should be recorded one place over. Finally, example (a) is somewhat subtle. One guess is that the product 5 x 9 = forty five may have been recorded as 405 (40 + 5) and similarly 2 x 9 = eighteen was recorded as 108 (10 + 8). This hypothesis would imply that the solver ignored the need to multiply by the 4 in 49. A more persuasive hypothesis is that in carrying out the standard U. S. algorithm, first multiply 5 x 9 = 45, record the 5 in the units position, and carry the 4 to the tens column. The next step normally would be to multiply 5 x 4 = 20, and then add the carried 4 to obtain 24. However, here the 4 was added first to the 4 in 49, yielding 4 + 4 + 8, and then multiplied by 8 to get 40. This hypothesis can be tested by seeing what happened with the next multiplications, by 2: 2 x 9 = 18; record the 8 and carry the 1. Then add the 1 to 4 to get 5 and multiply 2 x 5 = 10. Performing this analysis requires a shift in perspective from one's own accustomed procedures, a skill of mathematical analysis centrally required in teaching.

This skill is useful not only when students make errors but also when they get right answers using unrecognized methods. Is the right answer based on a method, or a lucky accident? Does the method work in general? If not, under what conditions does it work?

Other examples of tasks of teaching that require mathematical knowledge and skill include:

- Selecting/designing instructional activities
- Identifying and working toward the mathematical goal of the lesson
- Listening to and interpreting students' responses
- Analyzing student work
- Teaching students what counts as "mathematics" and mathematical practice
- Making error a fruitful site for mathematical work
- Attending to ambiguity of specific words
- Deciding what to clarify, make more precise, leave in student's own language

The domains of MKT (The "egg")

Our analyses of the work of teaching, combined with our empirical analyses of teachers' knowledge and reasoning in the context of the work of teaching have produced a framework that articulates distinct 'domains' of MKT (Ball, Thames, & Phelps, 2008) – see Fig. 1.

Our notion of MKT comprises two of the categories of knowledge defined by Shulman and his colleagues: pedagogical content knowledge (PCK); and content knowledge (CK) (Shulman, 1986). In our work, we have refined the earlier characterizations, particularly on the side of content knowledge. Following Shulman, we define PCK as a blend of knowledge of content and knowledge of pedagogy. Inside this we distinguish knowledge of content and students (for example typical student errors), knowledge of content and teaching (for example with what sequence of examples to introduce a new concept or method), and knowledge of content and curriculum (for example educational goals, standards, state assessments, grade levels where particular topics are typically taught, etc.)

On the content knowledge side, perhaps our most significant work has been the identification and measurement of specialized content knowledge, discussed above. This is complementary to what we call 'common content knowledge.' By 'common,' we mean knowledge held *in common* with professionals in other mathematically intensive fields.

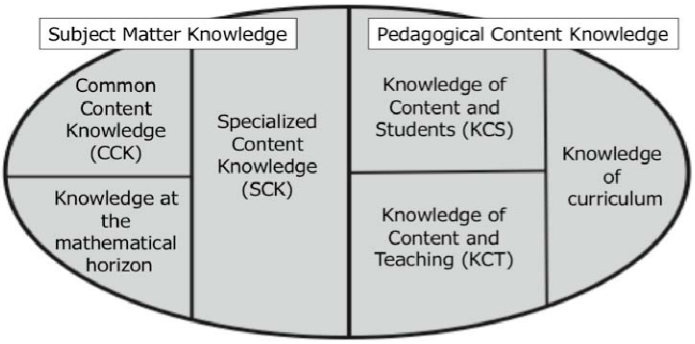


Figure 1

But we have known from the beginning that there is a kind of content knowledge that is neither common nor specialized. It is not directly deployed in present instruction, yet it supports a kind of awareness, sensibility, disposition that informs, orients and culturally frames instructional practice. We consider this a kind of peripheral vision, or awareness of the mathematical horizon (Ball, 1993). We turn next to discuss our emerging concept of 'horizon knowledge.'

Horizon knowledge of mathematics

Widely-known is Bruner's (1960) assertion that it is possible to teach any subject to any learner in an intellectually honest way—a claim that inspires curriculum developers and teachers to consider ways to engage pupils in the seeds of big and complex ideas. Schwab (1961/1978) too, argued for the importance of acquainting pupils with the major structures of a discipline as a foundation for their appreciation of its major ideas and ways of knowing. Our interest in the relation of the discipline to the teaching and learning of any particular age is in sympathy with the ideas of Bruner and Schwab, but arises directly from our studies of practice. Repeatedly we see that connections emerge and ideas touch, even across great expanses of regular curricular sequence. We see that teaching requires a sense of how the mathematics at play now is related to larger mathematical ideas, structures, and principles. Some may be ones that students will learn in later grades; some may be at the heart of what doing mathematics is. Attention to the mathematical horizon is thus important in orienting instruction to embody both pedagogical foresight and mathematical integrity. Having this sort of knowledge of the mathematical horizon can help in making decisions about how, for example, to draw the number line or how to set the anticipation that the number line will soon 'fill in' with more and more numbers. This sort of knowledge can help teachers think about how to anticipate the integers when their pupils know only whole numbers, or to set the cognitive stage for real numbers. But this kind of vision is not the same as the detailed curricular knowledge we include in PCK (knowledge of mathematics and curriculum). We define horizon knowledge as an awareness – more as an experienced and appreciative tourist than as a tour guide – of the large mathematical landscape in which the present experience and instruction is situated. It engages those aspects of the mathematics that, while perhaps not contained in the curriculum, are nonetheless useful to pupils' present learning, that illuminate and confer a comprehensible sense of the larger significance of what may be only partially revealed in the mathematics of the moment. It is a kind of knowledge that can guide the following kinds of teaching responsibilities and acts:

- Making judgments about mathematical importance
- Hearing mathematical significance in what students are saying
- Highlighting and underscoring key points
- Anticipating and making connections
- Noticing and evaluating mathematical opportunities
- Catching mathematical distortions or possible precursors to later mathematical confusion or misrepresentation

Our current conception of horizon knowledge has four constituent elements:

1) A sense of the mathematical environment surrounding the current "location" in instruction.
2) Major disciplinary ideas and structures
3) Key mathematical practices
4) Core mathematical values and sensibilities

We turn next to examine an episode of teaching, and identify some kinds of horizon knowledge that can be seen in what transpires.

A teaching episode: 'Sean Numbers'[3]

The setting is a grade 3 classroom, comprising culturally and linguistically diverse pupils, many speaking English as a second language. The children have been working on even and odd numbers. Before third grade they had already learned that certain small numbers were called 'even' and others 'odd,' but they lacked a formal definition of these concepts. One day, one of the boys, Sean, raises his hand and says, 'I was just thinking about six. … I'm just thinking it can be an odd number, too, 'cause there could be two, four, six, and two, three twos, that'd make six. … And two threes, that it could be an odd and an even number. Both! Three things to make it, and there could be two things to make it.' The reader may form ready opinions about Sean's thinking or wish to assert what the teacher should do. ('Why doesn't the teacher just point out his error and explain it?') But, before even considering such judgments, consider the more difficult questions, 'What is significant mathematically about what is going on in this episode? What might be helpful for a teacher to see, and be sensitive to, mathematically?'

The teacher does not immediately challenge or correct Sean. She re-voices and tries to publicly clarify what he is saying, and then invites comments from the class. His classmates quickly disagree. They already know from second grade that 6 is even. We follow now the mathematical debate as it unfolds in the class, and attend to how the children are processing mathematical ideas and claims, and to the mathematical moves of the teacher to orchestrate their discussion. Cassandra, the first to object, points to the number line above the blackboard, saying, 'Six can't be an odd number because this is (she points to the number line, starting with zero) even, odd, even, odd, even, odd, even, ...' 'Because zero's not an odd number.'

Sean persists, 'Because there can be three of something to make six, and three of something is odd.' Kevin protests, 'That doesn't necessarily mean that six is odd. ... Just because two odd numbers add up to an even number doesn't mean it has to be odd.' The teacher asks, 'What's our working definition of an even number? Jillian explains, 'If you have a number that you can split up evenly without having to make (long pause) to split one in half, then, it's an even number.' When the teacher then asks Sean if he can do that with six, he agrees, and she says, 'So then it would fit our working definition; then it would be even, okay?' Sean nods but adds, 'And it could be odd. Three twos could make it.'

Sean, contrary to the tacit understanding of the class, seems to allow that a number can be both even and odd. The teacher realizes that this discussion requires an explicit definition of odd numbers. After some discussion, the class agrees that odd numbers are those you cannot split up fairly into two groups. But Sean is tenacious. 'You could split six fairly (two threes) and not fairly (three twos).'

---

[3] See Ball (1993) for an analysis of this episode as a case of teaching 'with an eye on the mathematical horizon'.

Mei, listening carefully, exclaims, ‘I think I know what he is saying! I think what he’s saying is that you have three groups of two. And three is a odd number so six can be an odd number and an even number.’ Sean nods — this is what he is saying. The teacher asks if others agree. Mei raises her hand. ‘I disagree with that because it’s not according to like … here, can I show it on the board?’ She continues, ’It’s not according to like … how many groups it is. Let’s say that I have (long pause while she thinks) let’s say – ten.’ She draws on the board. ‘Here are ten circles. And then you would split them … by twos. … One, two, three, four, five …’ (Mei draws lines between each pair of circles and counts the groups of two.) ‘Then why do you not call ten a, like … an odd number and an even number, or why don’t you call other numbers an odd number and an even number?’ To Mei’s surprise, and then dismay, Sean responds, ‘I disagree with myself. I didn’t think of it that way. Thank you for bringing it up; so, I say it’s … ten can be an odd and an even.’ Many pupils raise their hands, eager to protest. Mei, intending to prove to Sean that his reasoning fails when the claim is extended to other numbers, has instead succeeded in giving Sean an expanded understanding and appreciation of his own idea, which he embraces gratefully. Mei protests, ‘But what about other numbers?! If you keep on going on like that and you say that other numbers are odd and even, maybe we’ll end it up with all numbers are odd and even. Then it won’t make sense that all numbers should be odd and even, because if all numbers were odd and even, we wouldn’t even be having this discussion!’

Mathematical knowledge at the horizon of this lesson

In this section we provide commentary on the aspects of horizon knowledge that may relate to the episode. A synopsis, keyed to the four elements, is represented in this table:

Element	Possible examples from this episode
1) A sense of the mathematical environment surrounding the current “location” in instruction.	Definitions, factorization, modular arithmetic
2) Major disciplinary ideas and structures	Number systems, even and odd, powers, number theoretic concepts
3) Key mathematical practices	Establishing correspondences and equivalence, choosing representations, questioning, using definitions, proving
4) Core mathematical values and sensibilities	Precision, care with mathematical language consistency, parsimony, coherence, connections

First, worth noting is that the episode is not only about even and odd numbers, but also centrally about mathematical communication, reasoning and proving (3). The children are making and defending and critiquing mathematical claims. The critiques are based on distinct definitions of even and odd. In fact, though the class has not developed formal definitions, there are three types of mathematical definitions of even and odd numbers that are implicitly in play in the class discourse (4). For example, for evenness:

Fair-share: A number is even if it can be made into to two equal groups with none left over.

Pair: A number is even if it can be made into groups of two with none left over.

Alternating: Starting with 0, the numbers alternate, even, odd, even, … .

For odd numbers, one has one left over in the fair-share and pair definitions. Note that the alternating definition immediately implies that a number cannot be both odd and even. These definitions are not obviously equivalent. To reconcile arguments resting on distinct definitions would first require reconciliation of the definitions themselves (3, 4). For example the equivalence of fair-share and pair is a special case of the commutativity of multiplication, which could be enacted using rectangular arrays (2).

Mei gives a clear articulation of Sean's reasoning, even though she disagrees with it. More than challenging his method ('It's not according to like how many groups of two there are'), she shows how his own reasoning would lead to conclusions that she expects would be unacceptable even to Sean, a form of reasoning by contradiction. To do this she generalizes (3, 4) Sean's idea about 6 to the class of all numbers that, like six, are made of an odd number of groups of two. Mei's sensibility about definitions – that they fail in their purpose if they lose the capacity to make significant distinctions, to give concepts appropriately sharp boundaries (4) – convinces her that there are many even-and-odd numbers that Sean's idea would usher in. She expects this to unsettle him. But Sean both understands and welcomes the possibility.

What about Sean's thinking? Though Sean misuses the terms 'even' and 'odd,' he nonetheless has a clear and meaningful mathematical idea about six: it has 'an odd way of being even.' But, lacking vocabulary to name this feature, he appropriates the name 'odd-and-even' for it. While Sean is thinking only about six, Mei generalizes this to odd multiples of two. What are these numbers (that the teacher later names 'Sean numbers' (3)) introduced by Mei? Even and odd are about mod 2 modular arithmetic. Sean and Mei have opened a glimpse of mod 4 arithmetic, identifying numbers that are congruent to 2 mod 4 (2). These numbers were already studied by the ancient Greeks, and turn out also to be exactly those natural numbers that are not a difference of two squares[4]. So Sean's idea has some interesting mathematical significance that he could not have anticipated, but that might a teacher might notice. Indeed, once Mei had identified these numbers, the students began an exploration of their properties, identifying their patterns (they

---

[4] The squares mod 4 are 0 and 1, so the differences of two squares mod 4 are 0, 1, and -1 (or 3), but not 2. If an integer N is ± 1 mod 4, then it is odd, so $N = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2$. If N is 0 mod 4, then $N = 4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$.

appear every fourth number, starting with 2); making and proving conjectures (a sum of Sean numbers does not produce a Sean number); etc. The children are practicing skills of mathematical exploration, reasoning, and generalization (3).

From this example, we see that even a simple ten-minute segment in a grade 3 class can take pupils and their teacher into contact with some major mathematical ideas and practices. Noticing the significance of the discussion would alter a teacher's view of the pupils' ideas and, although it might not compel her to spend time following them, it could nonetheless shape her view of the value of time spent unpacking and pursuing what first seemed like a simple pupil misconception. Seeing that students may say things that sound wrong, but that on closer listening are insightful is one use of horizon knowledge. Another is in pausing to develop pupils' sensibilities with mathematical habits of mind ('if you keep on going on like that' can be heard as a child's version of the mathematically crucial impulse to generalize) or to raise questions that are fundamental to the mathematical enterprise ('What is our working definition?'). It is horizon knowledge that can orient the teacher to hear, to speak, and to make decisions that honor children's often surprisingly deep insights that anticipate their later mathematical journeys. The broader mathematical integrity that horizon knowledge can enable in teaching does not imply that teachers will rush to that horizon with their pupils. Indeed to do so would often be both pedagogically reckless and irresponsible. But our explorations and preliminary analyses suggest that horizon knowledge can open up for teachers a greater appreciation both of their pupils' insights and of the significance of their own mathematical settings.

Current thoughts about horizon knowledge as a domain of MKT

Felix Klein (1924) offered the attractive and oft-cited idea of 'a higher perspective on elementary mathematics.'[5] Our notion of 'horizon knowledge' complements his. We hypothesize it as a kind of elementary perspective on advanced knowledge that equips teachers with a broader and also more particular vision and orientation for their work. This may include the capacity to see 'backwards,' to how earlier encounters inform more complex ones, as well as how current ones will shape and interact with later ones. It is also about sheer mathematical honesty—that sense of the territory that helps to bring a sense of judgment and good taste to teachers' responsibilities toward their pupils. Some horizon knowledge is about topics, some is about practices, and some is about values. Important, too, is that it is not knowledge of the kind that teachers need to understand in order to explain it to pupils; similarly, knowledge of the horizon does not create an imperative to act in any particular mathematical direction.

---

[5] More often translated from the German 'höhere' as 'advanced,' we appreciate Jeremy Kilpatrick's (2008) interpretation of the word as signifying <u>higher</u>, as in a 'higher perspective,' or 'eagle's eye view' from the discipline of the school curriculum.

There are many important issues that are as yet undeveloped or unresolved and form the directions in which we and our colleagues are now working. As appealing as the notion may be, for example, we have no evidence that such mathematical perspective produces improvements in teachers' effectiveness or in pupils' learning. We do not know how to estimate how far out or in what direction the pedagogically relevant and useful horizon extends. We do not know the level of detail that is needed for horizon knowledge to be useful. Moreover, we do not know how horizon knowledge can be helpfully acquired and developed, and we do not, as yet, have ways to assess or measure it.

Much remains to be done. We think, however, that teaching can be more skillful when teachers have mathematical perspective on what lies in all directions, behind as well as ahead, for their pupils, that can serve to orient their navigation of the territory. We seek to work toward conceptualizing more precisely what comprises that sense of horizon

References

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, *93* (4), 373-397.

Ball, D.L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D. L., Hill, H.C, & Bass, H. (2005). Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 5*(3), 14-17,20-22,43-46.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Ball, D. L. , Sleep, L., Boerst, T., & Bass, H. (2009). Combining the development of practice and the practice of development in teacher education. *Elementary School Journal*, *109,* 458-476.

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Harvard University Press: Cambridge, MA.

Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, *26* (4), 430-511.

Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400.

Hill, H. C, Schilling, S., & Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematical knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, *105*, (1), 11-30.

Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406.

Kilpatrick, J. (2008). *What do we know? And how do we know it?* Plenary address at the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11), Monterrey, Mexico, July, 2008

Klein, F. (1924). Elementary mathematics from an advanced standpoint. *Arithmetic-Algebra- Analysis.* Translated from the 3rd German edition by E. R. Hedrick and C. A. Noble, Dover Publications, New York (1953), ix+274 pp. MR0055397 (14,1068e)

Schwab, J. J. (1961/1978). Education and the structure of the disciplines. In I. Westbury and N. Wilkof (eds.), *Science, curriculum, and liberal education: Selected essays*. University of Chicago Press: Chicago, IL.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 4-14.

Regina BRUDER, Darmstadt

Langfristige fachdidaktische Forschungsprojekte zur mathematischen Unterrichtsentwicklung in der Sekundarstufe I

Funktion und Ziele von Langzeitstudien

International i.w. übereinstimmend beschäftigt sich die Mathematikdidaktik mit Zielen des Lehrens und Lernens von Mathematik und der Inhaltsauswahl für den Mathematikunterricht (MU), Phänomenen und Gesetzmäßigkeiten des Lehrens und Lernens von Mathematik (Bedingungen und Einflussfaktoren, auf Individuen- und Gruppenebene), spezifischen Gestaltungsmöglichkeiten zur Realisierung der jeweiligen Ziele und Inhalte des MU und sie beschäftigt sich mit der Reflexion und Evaluation der Untersuchungsergebnisse und –methoden zu den vorher genannten Aspekten, vgl. Bruder (1988). Vor diesem Hintergrund gehören zu möglichen Zielen von Langzeitstudien insbesondere Lernprozessbeobach-tungen (unter kontrollierten Bedingungen), Lerneffektmessungen bei Individuen und Gruppen (Längsschnitt unter kontrollierten Bedingungen), Fragen der Lehrerprofessionalisierung (insbesondere in der Aus- und Fortbildung); auch die Evaluation eines implementierten Curriculums könnte dazu gehören sowie die Entwicklung und Erprobung von (ganzheitlichen) Unterrichtskonzepten. Solche Ziele erfordern Langzeitstudien. Gemeint sind mit dieser Kategorie Untersuchungen mit empi-rischen Anteilen, die Zeiträume von mindestens einem Schuljahr umfassen.

Für Langzeitstudien gelten gewisse Forschungsparadigmen. Beispielsweise gehen sie in Form von Interventionsstudien davon aus, dass Lehr- und Lernprozesse ganz erheblich von den Entscheidungen der Lehrkräfte im Unterricht beeinflusst werden. „*Die Lehrervorstellungen bilden die Basis für diese Entscheidungen, daher ist ihre Kenntnis wichtig für alle Untersuchungen, in denen es um die Analyse von Lernprozessen in üblichen Unterrichtskontexten geht*“ Fischler (2001), S.105. Dieser Hintergrund hat Konsequenzen: Z.B. macht es wenig Sinn, Kompetenzdiagnostik von Schülern mit Vergleichsarbeiten betreiben zu wollen, ohne die unterrichtliche Situation und Art und inhaltliche Ausrichtung der Orientierungsbildung durch die Lehrkraft zumindest mit zu beobachten und bei den Ergebnissen zu berücksichtigen. Das gilt besonders dann, wenn es um langfristigen Kompetenzaufbau gehen soll.

Ferner kann davon ausgegangen werden, dass Innovationen für den MU auch auf der Lehrerebene die Berücksichtigung ihrer eigenen Lernprozesse erfordern. Diese zu beschreiben bedarf es fundierter Konzepte wie für die Lernprozesse der Schüler auch.

Langzeitstudien benötigen eine tragfähige theoretische Basis

Ein geeignetes Konzept, mit dem die Entstehung und die Qualität von Lernprozessen von (älteren) Schülern und Erwachsenen in einer handhabbaren Weise beschrieben werden kann, ist z.B. das Tätigkeitskonzept aus der osteuropäischen Forschungstradition, das hier exemplarisch kurz vorgestellt werden soll. Danach erfordert ein (nachhaltiger) Lernfortschritt eine *selbst* gestellte *Lernaufgabe* und die Erarbeitung einer *Orientierungsgrundlage* für die zur Bewältigung der Lernaufgabe notwendigen Lernhandlungen, vgl. Lompscher (1988). Je umfassender und reichhaltiger die aufgrund der Vorgaben der Lehrkraft bzw. der Lehr- und Lernmaterialien individuell konstruierte *Lernaufgabe* ist, umso größer sind die Chancen, dass die zu entwickelnde Orientierungsgrundlage einen höheren Allgemeinheitsgrad mit entsprechend größerem Vernetzungspotenzial erreicht. Ein Beispiel für eine recht weit reichende individuell konstruierte Lernaufgabe zeigt die folgende Schüleräußerung aus einem Lerntagebuch in Klasse 7: *„Wir lernen jetzt, Zuordnungen mathematisch darzustellen und Fehler in der Zeitung zu finden. Und wir wollen aus den Zuordnungen noch mehr herausholen“*. Im Unterricht wurde der Mehrwert einer mathematischen Betrachtung von Zuordnungen thematisiert (Prognosen entwickeln bzw. „Zwischenwerte“ bestimmen), was zu der entsprechenden Schülerinterpretation führte. Überlegungen zu einem langfristigen Kompetenzaufbau im MU, die derzeit noch ganz am Anfang stehen, werden um die Frage der Weite und Tragfähigkeit von solchen Zielorientierungen nicht herum kommen.

Bei Lehrkräften in einer Fortbildung bzw. in einem Forschungsprojekt kommt die individuelle Lernaufgabe oft als Frage daher: *„Wie kann ich mit den unterschiedlichen Lernvoraussetzungen meiner Schülerinnen und Schüler angemessen umgehen?“* Auch hier gilt: Je enger und konkret situationsbezogen die Frage gestellt ist, um so weniger besteht die Notwendigkeit, eine weiter reichende Handlungsorientierung auszubilden.

Die zur Lernaufgabe zu erarbeitende Handlungsorientierung kann in Anlehnung an Galperin (1967) unterschiedliche Niveaus erreichen. Wir bezeichnen sie wie folgt: I Orientierung nach Versuch-Irrtum (Probierorientierung), II Orientierung am Beispiel (Muster) und III Feldorientierung. Eine Feldorientierung in einem Themenfeld ist z.B. daran erkennbar, dass man in der Lage ist, selbst Beispiele in diesem Themenfeld zu generieren. Auf diese Weise können auch Effekte von Lehreraus- und -fortbildung qualitativ anhand der Arbeitsprodukte der Teilnehmer/innen beschrieben werden, vgl. Komorek (2006).

Fragestellungen aktueller Langzeitprojekte

Die zentrale Frage in einem von der DFG geförderten Langzeitprojekt über insgesamt 6 Jahre (vgl. Komorek et al (2007), Collet (2009)) mit dem Ziel der Implementation der Forschungsergebnisse in die Schulpraxis lautete: *Wie kann im MU Problemlösekompetenz entwickelt werden?*

An diesem Projekt soll gezeigt werden, welche grundsätzlichen Fragen sowohl mit theoretischen Konzepten als auch anhand praktischer Erprobungen mit entsprechenden Effektmessungen schrittweise zu beantworten sind:

Was soll (sinnvollerweise) unter Problemlösenlernen im Mathematikunterricht verstanden werden?Um welche Lernziele und –inhalte geht es? (Theoretische Ableitungen und Begründungen)

Wie kann man Problemlösen lernen? (Entwicklung eines theoriebasierten Konzeptes, Laborstudie zur Überprüfung)

Wie kann man „Problemlösenlernen" im MU für alle Lernenden organisieren und gestalten? (Entwicklung und Erprobung eines Unterrichtskonzeptes auf der Grundlage der theoretischen Vorstellungen zum Problemlösenlernen; Pilotstudie)

Wie wird das entwickelte Unterrichtskonzept von den Lehrkräften angenommen und umgesetzt und welche Effekte zeigen sich bei den Schüler/innen? (Akzeptanz- und Effektmessungen auf Lehrerebene und bei den Schülern im Rahmen einer Interventionsstudie im Feld)

Wie können die erzielten Ergebnisse in die Praxis überführt werden? (Konzeptentwicklung für eine Implementierung im Feld)

Angestrebt wurde mit diesem Projekt ein fundiertes Lehrerfortbildungskonzept zum Problemlösenlernen im MU. Dieses im Projekt in einem mehrfaktoriellen Design mit 49 Lehrkräften erprobte Konzept wird jetzt seit drei Jahren umgesetzt in Form eines blended learning Angebotes als modularisierter Halbjahreskurs über eine MOODLE-Lernplattform unter **www.proLehre.de** in Verbindung mit entsprechenden Unterstützungssystemen wie der Aufgabendatenbank **www.madaba.de**.

Aktuell laufen Langzeitprojekte mit ähnlich weit greifender Zielstellung wie das Projekt CAliMERO (2005-2012), an dem 6 Gymnasien mit 29 Schulklassen beteiligt sind. Hier geht es um die Entwicklung und Erprobung von Lehr- und Lernmaterialien für eine mathematische Kompetenzentwicklung mit Unterstützung von CAS-fähigen Taschencomputern ab Klasse 7 in Gymnasien, vgl. Ingelmann (2009) und Bruder & Weiskirch (2008). In dieser vom Land Niedersachsen und der Firma Texas Instruments unterstützten Interventionsstudie wird sowohl das Curriculum weiter entwickelt als auch ein Unterrichtskonzept zum kompetenzorientierten Rechnereinsatz umgesetzt. Bestandteile dieses Unterrichtskonzeptes sind folgende methodischen Elemente: Varianten für Themeneinstiege, Mind Map bzw. semantisches Netz zur inhaltlichen Strukturierung einer Unterrichtseinheit, Lernprotokoll zur Verständnisreflexion nach den ersten Stunden zu einem neuen Thema (vgl. Bruder (2007)), Wissensspeicher, Hilfen zur Bedienung und zum Einsatz des Taschencomputers, Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten, vermischte Kopfübungen zum Wachhalten von Basiskönnen (vgl. Bruder (2008a)), ein Konzept für vielseitige Aufgaben beim Üben und Anwenden (vgl. u.a. Bruder (2008b) und Leuders (2008)), Angebote zur Selbsteinschätzung und Beispiele für Klassenarbeitsaufgaben (vgl. Büchter & Leuders (2005)).

Im letzten Jahr wurde ein weiteres Projekt in Niedersachsen gestartet (MABIKOM 2008-2012) mit dem Ziel, ein alltagstaugliches Unterrichtskonzept zu entwickeln für binnendifferenziertes Lehren und Lernen von Mathematik in der Sekundarstufe I, wobei ab Klasse 7 dann wiederum das Potenzial der eingesetzten Rechnertechnologie genutzt werden soll. Die zentrale Frage in diesem Projekt lautet: *Wie kann man mit heterogenen Lernvoraussetzungen im MU so umgehen, dass möglichst viele Lernende kognitiv wie motivational angesprochen und effektiv Lernfortschritte für alle erreicht werden?* Der Fortschritt in diesem Projekt wird ähnlich wie bei CAliMERO auf der Kommunikationsplattform **www.proLehre.de** dokumentiert.

Ausgewählte Untersuchungsmethoden für Langzeitstudien

Es zeigt sich, dass für die Evaluation von Langzeitstudien eine Kombination aus verschiedenen qualitativen und quantitativen Untersuchungs- und Auswertungsmethoden sinnvoll ist.

Eine der Kernfragen der Evaluation in Interventionsstudien über längere Zeiträume lautet z.B.: *Wie kann man konzeptbezogene Lernzuwächse innerhalb eines Schuljahres effektiv messen?*

Wir haben hierfür in Kombination mit anderen Instrumenten zur Kontrolle der Rahmenbedingungen das Format eines „open ended test“ (pre-post) eingesetzt. Dieses Testformat zeichnet sich aus durch ein wellenförmiges Anforderungsprofil und bildet ähnlich wie bei Vergleichsarbeiten ein möglichst breites Kompetenzprofil ab. Entscheidender Vorteil des Formats ist die Vermeidung von Deckeneffekten durch die erhöhte Itemzahl. Ferner wurde darauf geachtet, dass alle Aufgaben bereits zum Schuljahresbeginn prinzipiell lösbar sein müssen. Erwartet werden dann in den verschiedenen Leistungsgruppen im Laufe eines Schuljahres Lernzuwächse bzgl. Anzahl und Qualität der Aufgabenbearbeitung. Lernzuwächse über einem Drittel Standardabweichung sind unter kontrollierten Bedingungen als Interventionseffekte interpretierbar, vgl. Lange & Lehmann (2001). Die Definition von drei Leistungsgruppen (lernschwache Schüler, mittleres Leistungsniveau und leistungsstarke Schüler) erfolgt jedoch nicht durch äquidistante Aufteilung der Gesamtpunktzahl sondern inhaltlich begründet aus dem Anforderungsprofil der gestellten Aufgaben.

Im Projekt CAliMERO haben die lernschwachen Schüler/innen ihre Leistungen im Laufe des 7., 8. und 9.Schuljahres deutlich über den Erwartungen des Zuwachses innerhalb eines Schuljahres steigern können. Die eingesetzten Instrumente sind unter **http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/didaktik/research/projekte.php** verfügbar und die Ergebnisse im Detail siehe Ingelmann (2009).

Um jedoch einen nachvollziehbaren Zusammenhang mit der Intervention und dem implementierten Unterrichtskonzept herstellen zu können, ist nach Wegen zu suchen um die Frage zu beantworten, ob die beteiligten Lehrkräfte die gemeinsam erarbeiteten Materialien und Konzepte auch eingesetzt haben. Bei solch langen Untersuchungszeiträumen und großen Populationen scheidet die Methode der Videoanalyse von vorneherein aus. Wir haben uns dafür entschieden, ein Instrument mit Doppelfunktion einzusetzen: Teilstandardisierte Stundenberichte der Lehrkräfte haben sowohl eine Monitoring- als auch eine Evaluationsfunktion. Auf dem Berichtsbogen werden auf einer Seite wesentliche Elemente des umzusetzenden Konzeptes aufgelistet und haben so eine Erinnerungsfunktion für die Lehrkräfte. Gleichzeitig zeigt der Einsatz der Stundenberichte über mindestens 10 Wochen, dass man Auswirkungen spezifischer Interventionen in diesem Zeitraum beobachten kann und die Selbstberichte der Lehrkräfte zu ihrem Unterricht sehr gut mit den Ergebnissen der analysierten Arbeitsprodukte korrespondieren, vgl. auch Collet (2009).

Im Projekt CAliMERO trat das Phänomen auf, dass bereits nach einigen Monaten in Klasse 7 der eingeführte Taschencomputer zu einem selbstverständlichen und individuell auch unterschiedlich genutzten Werkzeug geworden ist, so dass eine Dokumentation des Einsatzes durch die Lehrkräfte in der bisherigen Form nicht mehr sinnvoll war. Deshalb wurde ab Klasse 8 ein teilstandardisiertes Unterrichtsprotokoll für Schüler eingesetzt, ebenfalls abrufbar unter **http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/didaktik/research/projekte.php**. In jeder beteiligten Klasse wurde jeweils eine thematische Einheit durchgehend protokolliert, so dass von jedem Schüler ein Stundenprotokoll vorliegt. Die Schüler gaben z.B. Auskunft darüber, ob in der jeweiligen Stunde die im Konzept grundsätzlich vorgesehenen methodischen Elemente in der Stunde vorkamen oder nicht. Auf diese Weise wurde auch eine Vorstellung darüber gewonnen, wie oft der Taschencomputer in Schülerhand eingesetzt wird, nämlich im Mittel in drei Viertel aller Unterrichtsstunden und welche Einsatzzwecke dominieren. Die vom Konzept her intendierten vielfältigen explorativen Einsatzszenarien werden von den Schülern auch in etwa vergleichbaren Anteilen identifiziert.

In 22% der über 400 protokollierten Stunden in Kl.9 werden Kopfübungen eingesetzt und es zeigt sich jetzt ein klarer Zusammenhang zu den Ergebnissen im gesonderten Test zu rechnerfreien Fertigkeiten. In den Klassen, in denen regelmäßig, also mindestens vierzehntägig, die im Konzept verabredeten vermischten Kopfübungen stattfinden zum Wachhalten von Basiskönnen auch aus länger zurückliegenden Themengebieten, sind über den Erwartungen liegende Leistungssteigerungen zu verzeichnen. Die anderen Klassen bleiben im Mittel stabil oder verringern sogar ihre Leistungen im Laufe des Schuljahres. Diese Ergebnisse sind ein klarer Beleg dafür, dass die oft beklagten Defizite im mathematischen Basiskönnen nicht einfach dem Taschencomputer angelastet werden dürfen sondern mit dem Unterrichtskonzept zusammen hängen, mit dem der Rechner eingesetzt wird.

In den Evaluationsstudien zu Interventionen über längere Zeiträume lautet eine weitere Frage, wie tiefgehend bestimmte Konzepte auf der Seite der Lehrkräfte individuell verarbeitet wurden. Eine Analyse der entwickelten Arbeitsprodukte im Problemlösenprojekt konnte etwa 60% der Teilnehmer im Laufe eines Schuljahres eine Feldorientierung bzgl. des zu implementierenden Konzeptes bescheinigen. Eine Alternative oder auch Ergänzung zur Analyse von Arbeitsprodukten bietet die repertory grid Befragung, die wir bereits in größerem Umfang zur Messung von Fortbildungseffekten zur „neuen Aufgabenkultur“ eingesetzt haben. Vorteile der Methode liegen in der Vermeidung von Anpassungsleistungen und die Befragung wird nicht als Testsituation erlebt. Vorstellungen sind individuell und in der Entwicklung erfassbar. Allerdings sind Erhebung und Auswertung recht aufwändig. Während mit klassischen Lehrerbefragungen festgestellt wurde, dass die Vorstellungen und Einstellungen zum MU von erfahrenen Lehrkräften doch sehr stabil sind, lassen sich mit der repertory grid Befragung spezifische Entwicklungen aufzeigen – z.B. eine stärkere Ausdifferenzierung und Erweiterung erkannter Aufgabenmerkmale bis hin zu Blickwinkelverschiebungen zu tiefer gehenden Analysekriterien, vgl. die Auswertungen von Collet (2009).

Thesen zur fachdidaktischen Forschung für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts

I. Werden Weiterentwicklungen des MU angestrebt, müssen entsprechende Forschungsarbeiten zur Konzeptentwicklung und späteren Implementierung viel stärker als bisher langfristig angelegt werden.

II. Langzeitstudien benötigen sowohl qualitative als auch quantitative empirische Forschungsmethoden. Eine Verbindung zwischen beiden kann einen bedeutenden Zugewinn an Erkenntnis für den MU bringen und darüber hinaus das Profil der Fachdidaktik in der wissenschaftlichen Kommunikation schärfen.

III. Kein noch so wertvolles Forschungsergebnis setzt sich von alleine durch. Vielmehr bedarf es eines partizipativen Projektdesigns, eines einflussreichen, reflektierten Engagements von Personen und geeigneter Netzwerke an den Schulen zur Umsetzung bis hin zur Ergebniskontrolle.

IV. Untersuchungen zur Weiterentwicklung des MU sollten sich letztlich an ganzheitlichen Unterrichtskonzepten messen lassen bzw. diese voran bringen. Die aus sehr speziellen Forschungsdesigns gewonnenen Detaileinsichten relativieren sich nicht selten im Unterrichtsalltag und werden von anderen, stärkeren Effekten überlagert.

V. Fachdidaktische Forschung für eine Weiterentwicklung des MU ist immer mit Fragen nach Akzeptanz und Machbarkeit sowie nach „Effektivität" konfrontiert und bedarf der Unterstützung und Multiplika-tion durch viele engagierte und kompetente Partner auf allen Ebenen – von der Schule bis zu den Ministerien.

Literatur

Bruder, R. & Weiskirch, W. (Hrsg.) (2008): CAliMERO - Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren. Bände 1 - 4: *Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler*. Münster 2007 und 2008

Bruder, R. (2008a): Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen. In: *mathematik lehren 147*, Friedrich Verlag, S.12-14.

Bruder, R. (2008b): Üben mit Konzept. In: *mathematik lehren 147*, Friedrich Verlag, S.4-11

Bruder, R. (2007): Lerngelegenheiten für Reflexionen im Mathematikunterricht. In: Peter-Koop, A. & Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.): *mathematische bildung – mathematische leistung*. Festschrift für Michael Neubrand zum 60.Geburtstag. Franzbecker 2007, S.305-316

Bruder, R. (1988): *Grundfragen mathematikmethodischer Theoriebildung unter besonderer Berücksichtigung des Arbeitens mit Aufgaben*. Habilitationsschrift, Potsdam.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005): Kriterien für die Gestaltung von Tests, die zur

Steigerung der Unterrichtsqualität beitragen können. *Pädagogik, 57 (5),* S. 14-18.

Collet, C. (2009): Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen zu Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation. In: Heinze, A. & Krummheuer, G. (Hrsg.): *Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik*, 2, Münster: Waxmann (in Druck)

Fischler, H. (2001): Verfahren zur Erfassung von Lehrer-Vorstellungen zum Lehren und Lernen in den Naturwissenschaften. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften; Jg.7, 2001, S.105.

Galperin, P.J.(1967): Die Psychologie des Denkens und die Lehre von der etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen. In: *Untersuchungen des Denkens in der sowjetischen Psychologie*. Berlin: Volk und Wissen.

Ingelmann, M. (2009): *Evaluation eines Unterrichtskonzeptes für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Berlin: Logos (in Druck)

Komorek, E. (2006): *Mit Hausaufgaben Problemlösen und eigenverantwortliches Lernen in der Sekundarstufe I fördern. Ein Ausbildungsprogramm für zukünftige Mathematiklehrer.* Berlin: Logos.

Komorek, E., Bruder, R., Collet, C. & Schmitz, B. (2007): Contents and results of an intervention in maths lessons in secondary level I with a teaching concept to support mathematic problem-solving and self-regulative competencies. In: Prenzel, M. (Hrsg.): *Studies on the educational quality of schools. The final report on the DFG Priority Programme.* Münster: Waxmann, S. 175-196.

Lange, R. & Lehmann, R. (2001): Ergebnisse der Erhebung von Aspekten der Lernausgangslage und der Lernentwicklung – Klasse 9 (LAU9). http://www.ggg-hamburg.de/ Inhalt/BSJB-LAU9-2001.html (Zugriff am 23.1.2009).

Leuders, T. (2008): Übungsaufgaben produktiv weiterentwickeln. In: *mathematik lehren 147*, Friedrich Verlag, S.17-21.

Lompscher, J. (Hrsg.) (1988): *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit*. Berlin: Volk und Wissen / Luchterhand

Corinna HÖSSLE (Didaktik der Biologie), Ilka PARCHMANN (Didaktik der Chemie), Michael KOMOREK (Didaktik der Physik), Oldenburg

Naturwissenschaften im Kontext

Die Projekte Biologie, Chemie und Physik im Kontext gehen der Frage nach, wie sinnstiftender, alltagsnaher Unterricht in den Naturwissenschaften gelingen kann. Sie verfolgend dabei das Ziel, naturwissenschaftliche Konzepte, Arbeitsweisen und Strategiewissen bei ihrer Vermittlung im Unterricht so in ausgewählte Kontexte einzubetten, dass die Schülerinnen und Schüler damit gezielt in ihrer Kompetenzentwicklung unterstützt werden. Den Lernenden werden Anknüpfungspunkte an ihr Vorwissen und ihre Alltagserfahrungen geboten sowie wissenschaftliche Anwendungsfelder vermittelt. In den Projekten wird die symbiotischen Implementationsstrategie realisiert, bei der schulübergreifende Gruppen aus Lehrkräften in Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern und Vertretern der Bildungsadministration Unterrichtseinheiten entwickeln, erproben und optimieren (Konzept der "learning communities").

Chemie im Kontext – Aus der Wissenschaft in die Praxis

Ausgangspunkt für die Entwicklung von *Chemie im Kontext* waren nicht allein die unbefriedigenden Befunde von TIMSS und PISA und Forderungen anerkannter Lern- und Motivationstheorien, sondern auch Erfahrungen mit alternativen Unterrichtskonzeptionen aus anderen Ländern. Insbesondere in England und in den USA sind kontextbasierte Zugänge durch die „Salters Chemistry Courses“ und „Chemistry in the Community“ etablierte Konzepte für den Chemieunterricht (siehe dazu Demuth et al., 2008, Gilbert et al., 2006, Nentwig et al., 2005). Diesen Ansätzen liegen sowohl Theorien des konstruktivistischen und situierten Lernens als auch die Selbstbestimmungstheorie nach Deci & Ryan (in der Erweiterung nach Prenzel u. a.) zugrunde (vgl. Parchmann et al., 2001). Ziel ist es, den oftmals als abstrakt und persönlich unbedeutend erlebten Chemieunterricht anwendungsbezogener und nachhaltiger zu gestalten, indem Kontexte als Ausgangspunkte und strukturierende Elemente von Unterrichtseinheiten gewählt werden, die entweder aus der Lebenswelt der Lernenden stammen oder aber durch gesellschaftliche Bezüge oder spätere berufliche Perspektiven für sie von Relevanz sind. Damit verbunden ist die Förderung unterschiedlicher Aktivitäten zur Entwicklung zentraler fachbezogener und fachübergreifender Kompetenzen. Die 2004 verabschiedeten Nationalen Bildungsstandards (KMK, 2005) korrespondieren in ihrer Ausrichtung auf vier Kompetenzbereiche (Fachwissen strukturieren und anwenden, Methoden der Erkenntnisgewinnung, Kommunikation und Bewerten) und Basiskonzepte zur Strukturierung von Fachinhalten eng mit den konzeptionellen Leitlinien von *Chemie im Kontext* (Demuth et al., 2008).

Die konzeptionellen Entwicklungen von *Chemie im Kontext* wurden durch verschiedene bundesweite und exemplarische Forschungsvorhaben begleitet, die größtenteils in die vom BMBF und den beteiligten Ländern geförderten Modellprojekte zur Implementation und zum Transfer innovativer Unterrichtskonzeptionen in die Schulpraxis und -systeme eingebunden waren. Im Folgenden sollen die Grundlagen der Unterrichtskonzeption und auch des Implementationsmodells der „symbiotischen Implementation" (Gräsel & Parchmann, 2004) und Begleitstudien erörtert werden.

Unterrichtskonzeption und Implementationsmodell

Chemie im Kontext liegen drei leitende Prinzipien zugrunde:

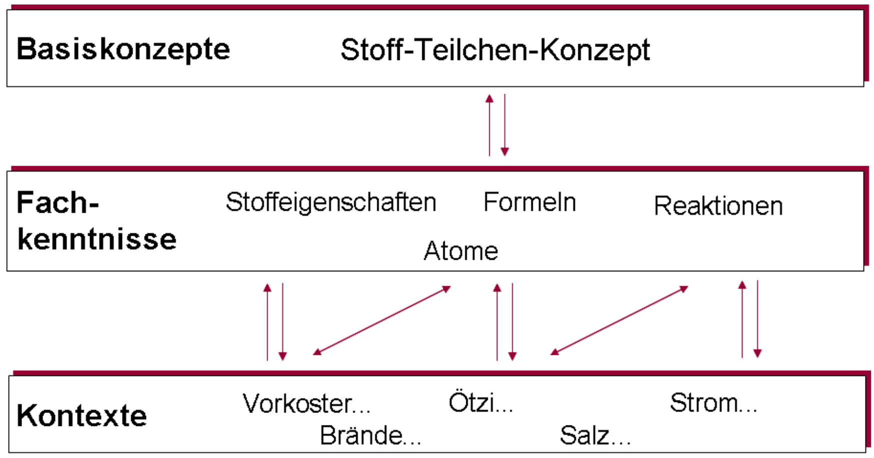


Abb. 1: Drei Inhaltsebenen von Unterricht

(1) Kontextorientierung. Ausgangspunkt und strukturierendes Element von Unterrichtseinheiten sind Kontexte, die für die Lernenden eine persönliche, gesellschaftliche oder beruflich zukunftsweisende Relevanz aufweisen sollen. Diese Kontexte dienen dem gemeinsamen Ableiten und der Bearbeitung von Fragen sowie der Anwendung erworbener Kenntnisse.

(2) Aufbau von Basiskonzepten. Um neben der Situierung und Verankerung der Lernprozesse und -inhalte auch einen erfolgreichen Transfer anbahnen zu können, ist es ebenso notwendig, die erarbeiteten Inhalte zu abstrahieren und zu vernetzen. Dazu werden systematisch Basiskonzepte aufgebaut, die die Lernenden in nachfolgenden Kontexten immer wieder anwenden und damit vertiefen und erweitern können (vgl. Abb. 1).

(3) Methodenvielfalt und *Phasierung von Lernprozessen*. Die kontinuierlichen Wechsel zwischen Kontextbetrachtungen, der Fokussierung auf einzelne Fachinhalte und -methoden sowie den abstrahierten Basiskonzepten

bedingt einen Wechsel der Lehrer- und Schülerrollen sowie der Lehr- und Lernmethoden.

Chemie im Kontext schlägt einen vierphasigen Aufbau der Lerneinheiten vor: In der (1) Begegnungsphase setzen sich die Lernenden mit einem Kontext auseinander. Dazu werden offene und explorative Methoden wie Kugellager und Recherchen und authentische Medien eingesetzt. Die (2) Neugier- und Planungsphase strukturiert die aufgeworfenen Fragen und den weiteren Arbeitsplan, hier kommen insbesondere Mapping- und Moderationsmethoden zum Einsatz. In der (3) Erarbeitungsphase werden Experimente, Modelle und weiterführende Recherchen vielfach in Lernzirkel oder andere Gruppenmethoden eingebettet, so dass auch hier das aktive Lernen der Schüler gefordert und von der Lehrkraft moderiert wird. In der (4) Vertiefungs- und Vernetzungsphase übernimmt die Lehrperson dagegen eine aktivere Rolle, um die notwendigen Sicherungen und Übungen, Abstraktionen und Vernetzungen integrieren zu können. Abb. 2 stellt diesen idealtypischen Ablauf, der unterschiedliche akzentuiert sein kann Ablauf, dar.

Die Rahmenkonzeption war ebenso wie erste pilotierte Unterrichtseinheiten und Materialien die Basis für das vom BMBF und den beteiligten 14 Bundesländern geförderte Implementations- und Transferprojekt. Hier lag der Ansatz zugrunde, dass erst die Kooperation zwischen den verschiedenen Unterrichtsexperten – einmal aus Sicht der Wissenschaft und einmal aus Sicht der Praxis (inkl. Bildungsadministration) – die Nachteile von Top-Down- und Bottom-Up-Ansätzen aufheben kann. Für *Chemie im Kontext* wurde daher ein „symbiotisches Implementationskonzept“ entwickelt und evaluiert, dass durch die Ausgründung von neuen Sets und das Einbeziehen von Fortbildungsinstitutionen einen Transferansatz mit beinhaltet (Gräsel & Parchmann, 2004; Demuth et al., 2008). In den Lehrersets haben Lehrkräfte verschiedener Schulen gemeinsam mit Fachdidaktikern

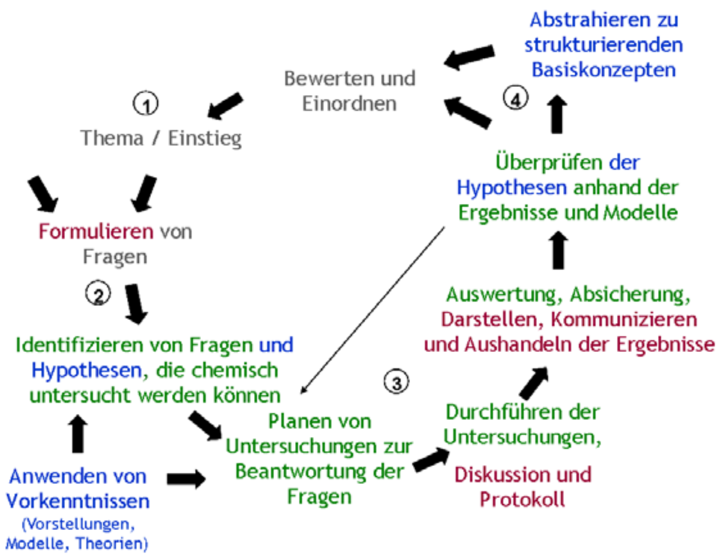


Abb. 2: Aufbau einer Unterrichtseinheit nach den vier Phasen von Chemie im Kontext und den Kompetenzbereichen der Bildungsstandards

anhand der Rahmenkonzeption neue Unterrichtseinheiten entwickelt, erprobt und gemeinsam reflektiert, wobei die Einheiten mit zunehmender Projektlaufzeit auch zwischen den Sets ausgetauscht und damit erneut ergänzt, erprobt und optimiert wurden. Dieses System führte zu einer Umsetzung innovativer Unterrichtskonzeptionen, die flexibel an die Bedingungen der jeweiligen Bundesländer, Schulen, Klassen und Lehrkräfte angepasst werden konnten.

Unterrichts- und Implementationsforschung

Sowohl die Unterrichtskonzeption als auch das Implementationsmodell wurden durch verschiedene qualitative und quantitative empirische Studien begleitet. Die zentralen Ergebnisse sind im Abschlussband (Demuth et al., 2008) zusammengefasst. Wichtiges Ergebnis ist, dass sich das Konzept der „symbiotischen Implementation" als erfolgreich für die Realisierung innovativer Unterrichtskonzeptionen in der Schulpraxis erwiesen hat, und zwar nicht nur aus Sicht der Lehrkräfte, die die Unterstützungsstrukturen positiv einschätzten. Auch eine Befragung von Schüler/-innen und Lehrer/-innen hat ergeben, dass Entwicklungen im Unterricht wahrgenommenen wurden. Überraschend war das Ergebnis einer exemplarischen Vergleichsstudie. Nicht nur die persönliche Relevanz und das Interesse wurden nach dem CHiK-Unterricht positiver bewertet als in Vergleichsklassen, sondern auch der wahrgenommene fachbezogene Lernzuwachs. Leistungstests konnten aufgrund der zahlreichen und verschiedenen Einheiten nicht zentral über alle Lerngruppen durchgeführt werden. Fallstudien zeigten jedoch keine Nachteile bezüglich des tatsächlichen Fachwissens, was aufgrund der stärkeren Fokussierung auf Kontexte und weitere Kompetenzbereiche von Lehrkräften anderenorts befürchtet wurde (Bennett et al., 2005).

Sowohl das Unterrichts- als auch das Implementationskonzept von *Chemie im Kontext* haben damit sowohl aus Sicht der Forschung als auch der Praxis als vielversprechend erwiesen, auch wenn Optimierungspotentiale (z.B. hinsichtlich des Aufbaus und Transfers von Basiskonzepten) ebenso klar ausgewiesen werden können. Auch nach Beendigung der Projektförderung arbeiten daher zahlreiche Lehrergruppen weiter an der Erstellung kontextbasierter Curricula, Einheiten und Materialien. An der Universität Oldenburg wurde der Ansatz der „symbiotischen Implementation" zudem im Rahmen des Projekts „Energiebildung" (www.energiebildung.uni-oldenburg.de) auf weitere Bildungsbeteiligte (z.B. Unternehmen) und Fächer übertragen.

Physik im Kontext – Fachdidaktisches Denken entwickeln

Das Konzept der symbiotischen Implementationsstrategie wurde auch im bundesweiten Projekt *Physik im Kontext* realisiert. piko-OL (Nawrath & Komorek, im Druck) wird vom Land Niedersachsen gefördert. Drei Gruppen mit insgesamt 28 Physiklehrkräften planen kontextstrukturierten Physikunterricht in den Kontextbereichen „Erneuerbare Energien“, „Physik des menschlichen Körpers" und „Transponder-Technologie“ (vgl. Abb. 3). Die Situation im Fach Physik stellt sich dabei etwas anders dar als in der Chemie, denn ein ausgearbeitetes System von Basiskonzepten (vgl. Abb. 1), auf das beim Prozess der „Dekontextualisierung“ Bezug genommen werden kann, existiert hier nicht. Die beteiligten Lehrkräfte sind also bei der Aufgabe, kontextstrukturierten Physikunterricht zu entwickeln, immer auch intensiv mit dem Prozess der Elementarisierung des betreffenden Inhaltsbereichs befasst. Zwar formulieren die Bildungsstandards Physik für den mittleren Abschluss die Basisbegriffe *Energie*, *Materie*, *System* und *Wechselwirkung*, eine Operationalisierung dieser Begriffe, die Lehrern die Prozesse der Kontextualisierung und der Rückbindung an die fachliche Struktur der Physik erleichtert, muss noch entwickelt werden.

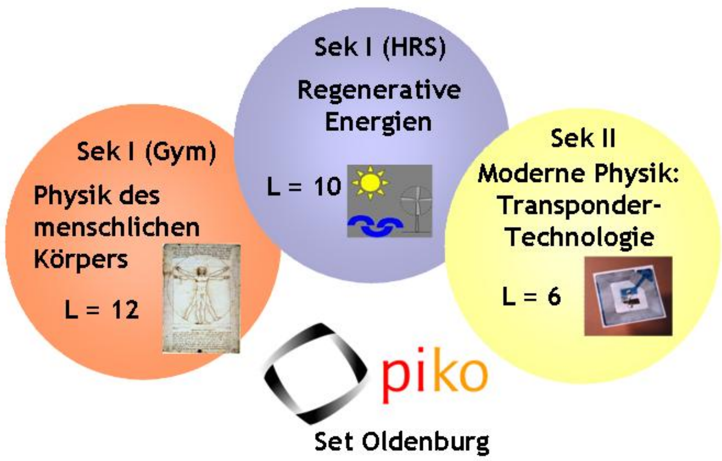


Abb. 3: Kontextbereiche und Lehrergruppen bei piko-OL

Eine zehnköpfige Gruppe hat ein Unterrichtskonzept zum Kontext „Erneuerbare Energien“ für Haupt- und Realschulen. Neben der didaktischen Aufbereitung des Einsatzes von Farbstoff-Solarzellen rückte die Frage, wie man einen MP3-Player mit Hilfe von Solarenergie betreiben kann, in den Mittelpunkt der Diskussion. Dieser Kontext ist enger gefasst als das generelle Thema der Erneuerbaren Energien, so dass sich in dieser Gruppe ein Konzept durchsetze, bei dem enger gefasste Kontexte in einer Art Zwiebelschalenmodell in weiter gefasste Kontexte eingliedert werden.

Zentraler Forschungsaspekt bei piko-OL sind Prozesse des Professionellen Lernens der beteiligten Lehrkräfte. In dieser piko-Gruppe zeigte es sich dadurch, dass Informationsangebote, die außerhalb von Schule und Hochschule liegen, in die Setarbeit integriert wurden. Dies umfasste etwa den gemeinsamen Besuch eines Informationsmobils („EWE-Truck“) oder den Kontakt zum außerschulischen Lernort „Bildung für Technik und Natur“ in Wilhelmshaven. Ein Kontakt zur Bundeszentrale für elektrotechnische Berufe (bfe in Oldenburg) bezieht derzeit auch den Kontext der Berufsorientierung der Haupt- und Realschüler mit ein.

Eine weitere Gruppe von zwölf Gymnasiallehrkräften entschied sich für den weit gefassten Kontextbereich „Physik des menschlichen Körpers“, der in Unterkontexte wie „Druck als Körpererfahrung“, „Physik und Sport“ oder „Der Mensch als Energiewandler“ aufgegliedert wurde. Gemeinsames Ziel war es, Physik für die Schüler/-innen erfahrbar zu machen und den Menschen als physikalisches Subjekt und Objekt zu verstehen. Schließlich wurde eine Unterrichtseinheit zum Unterkontext „Der Mensch als Energiewandler“ entwickelt und an den beteiligten Schulen mehrfach erprobt. Sie umfasst v.a. einen Stationenlauf für die Klassenstufe 7, bei dem die Experimente jeweils Modelle für Energieumwandlungsprozesse im menschlichen Körper darstellen.

Zur Weiterentwicklung des Unterrichts in der Sekundarstufe II befassten sich sechs Lehrkräfte mit moderner Physik im Bereicht der „Transpondertechnologie“ und der „Radio Frequency Identification“. Professionelles Lernen fand dadurch statt, dass ein Konzept für das in Niedersachsen neu entstandene Seminarfach in Zusammenarbeit mit einem Projektkurs und der ortsansässigen berufsbildenden Schule in Syke umgesetzt wurde. Im Rahmen der fachlichen Weiterbildung wurde u.a. ein RFID-Experte einer Bremer Firma zu einem gemeinsamen Treffen eingeladen, um fachliche Fragen im neuen Terrain zu erörtern. Seit 2008 besteht an einem der beteiligten Gymnasien eine Schüler-Arbeitsgruppe, die ein Modell für ein Schließsystem mit Hilfe dieser Technologie realisiert hat.

Forschende Begleitung

Sowohl die Prozesse der Planung, als auch der Durchführung und Reflexion werden forschungsseitig begleitet. Ziel ist es zu untersuchen, welche Funktion Kontexte für die beteiligten Lehrkräfte bei der Strukturierung der Unterrichtssequenzen haben. Die Planungssitzungen der drei Gruppen wurden dazu ein Jahr lang audiographiert. Anhand der Audioaufzeichnungen wurden Verlaufs- und Ergebnisprotokolle der Sitzungen erstellt. Diese Protokolle dienen einerseits der formativen Evaluation, andererseits als eine Grundlage für weitere Planungssitzungen. Die Protokolle werden im Hinblick auf die fachdidaktische Strukturierung kontextstrukturierten Physikunterrichts mittels zusammenfassender Inhaltsanalyse (vgl. Lipowski,

2004) ausgewertet. Fünf Lehrkräfte wurden während der Durchführung des gemeinsam geplanten kontextstrukturierten Physikunterrichts begleitet (jeweils ca. 15 Unterrichtsstunden). Die Unterrichtsstunden wurden dabei videographiert und dienten neben kurzen unterrichtsbegleitenden Schülerinterviews als Grundlage für Planungs- und Reflexionsgespräche. Um die Prozesse der fachdidaktischen Strukturierung zu analysieren und zu modellieren, wurde das Modell der Didaktischen Rekonstruktion (Komorek & Kattmann, 2008) auf Prozesse der Lehrerbildung adaptiert.

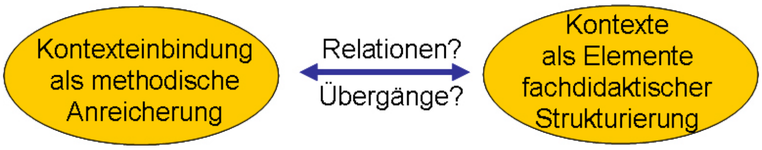


Abb. 5: Die Einbindung von Kontexten im Physikunterricht kann sowohl zu einer methodischen Anreicherung führen als auch eine wichtig Funktion in der didaktischen Strukturierung übernehmen.

Erste Ergebnisse zeigen, dass es den beteiligten Lehrkräften bei der Entwicklung kontextorientierten Physikunterrichts sowohl um die methodische Anreicherung als auch um (sach-)strukturelle Aspekte des Physikunterrichts geht. Den bestehenden theoretischen Ansätzen zur Kontextorientierung gelingt es aber nicht, diese beiden wichtigen Aspekte getrennt darzustellen. Deswegen wird bei piko-OL an einem Modell gearbeitet, das beide Aspekte gleichberechtigt darstellt (vgl. Gilbert, 2006) und die Relationen zwischen beiden Funktionen der Kontexteinbindung zu modellieren erlaubt (vgl. Abb. 5).

Biologie im Kontext - Wie bewerten Schüler bioethische Konflikte?

Für das Fach Biologie werden mit den 2004 erlassenen Bildungsstandards erstmals in aller Deutlichkeit zentrale Fähigkeiten des reflektierten Urteilens bezüglich ambivalent diskutierter Themen wie Gentechnik, Stammzellforschung, Organtransplantation gefordert. Ethische Bewertungskompetenz muss nun ebenso wie die Kompetenzen Fachwissen, Wege der Erkenntnisgewinnung und Kommunikation inhaltlich konkretisiert und definiert werden, damit es als diagnostizierbare und förderbare Fähigkeit in praxi vermittelbar wird. Dieser fachdidaktischen Herausforderung stellt sich *Biologie im Kontext* in Oldenburg (Mittelsten-Scheid & Hößle, 2008).

Theoretischer Hintergrund und zentrale Forschungsfrage

Zur Konstruktion eines Kompetenzstrukturmodells zum Kompetenzbereich Bewerten wurden Modelle aus der Biologie- und der Philosophiedidaktik sowie allgemeine ethische Kompetenzen auf Gemeinsamkeiten hin analysiert, um zentrale Elemente von Bewertungskompetenz zu gewinnen (Reit-

Abb. 6 Kompetenzstrukturmodell nach Reitschert, Langlet, Hößle, Mittelsten Scheid, Schlüter 2006)

schert et al., 2008). Das entstandene theoretische Konstrukt setzt sich aus den in Abb.6 dargestellten Teilbereichen zusammen. Die zentrale Forschungsfragen lautet nun: Welche strukturellen Differenzierungen und Niveaus von Bewertungskompetenz lassen sich in den Schüleräußerungen zu bioethischen Fragestellungen wiederfinden? Welche Werte halten Schüler für relevant? Wie begründen sie diese Relevanz? Inwieweit antizipieren sie Gefühle von Personen, die im Dilemma betroffen sind, und inwieweit reflektieren sie Folgen für diese Personen? Es wurden Schüler der 8. (n=36) und 10. Klasse (n=36) anhand eines standardisierten Interviews 45 Minuten hinsichtlich ihres Urteils bezüglich der Dilemmata Organtransplantation und Sterbehilfe befragt (Mittelsten Scheid, 2008). Die Interviews wurden einer Computer-gestützten qualitativen Inhaltsanalyse unterzogen.

Befunde zur Teilkompetenz Wahrnehmen und Bewusstmachen moralischer Relevanz: Die Aussagen der Schüler konnten in drei Kategorien eingeteilt werden, die jeweils zwei Niveaus aufwiesen (Tab. 1). Dabei wurden die Kategorien a und c induktiv gewonnen, während b deduktiv theoriebasiert hergeleitet wurde. Die Niveaus zeigen abstrakte Entwicklungslinien für das Wahrnehmen von Wertrelevanz auf, die sich wie folgt beschreiben lassen.

a) Ein Wert wie Gerechtigkeit kann in einer Dilemmadiskussion auf zweifache Weise relevant sein, als Wahrung oder als Verletzung dieses Wertes. Die Aussagen der Schüler unterscheiden sich dahingehend, ob sie die lediglich die Wahrung oder Verletzung eines Wertes wahrnehmen bzw. ob sie bereits beides erkennen und nennen können.

b) Eine weitere Entwicklungslinie bezieht sich auf den Personenkreis, der mit der Wahrung bzw. Verletzung eines Wertes angesprochen wird. Auf unterem Niveau gelingt es Schülern, die Werte lediglich mit einer Person in Beziehung zu setzen. Mit zunehmender Entwicklung betrachten Schüler ethische Werte im Zusammenhang mit einem größeren Personenkreis.

c) Die dritte Entwicklungslinie konkretisiert sich darin, dass Schüler eine zunehmend komplexere Wahrnehmung der Situation zeigen. So erkennen sie in zunehmendem Maße, dass die Wahrung eines Wertes zugleich bedeutet, dass ein anderer Wert mit einem Konflikt verbunden ist.

N	(a) Wahrnehmung der Wahrung bzw. Verletzung eines Wertes	(b) Wahrnehmung der Relevanz eines Wertes für bestimmte Personenkreise	(c) Wahrnehmung von Konflikten, die mit der Wahrung eines Werts verbunden sind
I	Ein Wert wird gewahrt ***oder*** ein Wert wird verletzt	Relevanz des Wertes wird aus der Perspektive ***nur einer*** Person erkannt	Zwiespalt wird nicht wahrgenommen
II	Ein Wert wird gewahrt ***und*** ein anderer Wert wird verletzt.	Relevanz des Wertes wird aus der Perspektive ***von mindestens zwei*** Personen erkannt	Zwiespalt zwischen den Werten wird wahrgenommen

Tab. 1 Teilkompetenz Wahrnehmen und Bewusstmachen moralischer Relevanz

Die Zuordnung der Aussagen zu den Kategorien macht deutlich, dass es den weiblichen Schülern tendenziell besser gelang, ethisch relevante Werte zu nennen als den männlichen Schülern. Dabei spielte der Wert Gerechtigkeit für die männlichen Schüler eindeutig eine wichtigere Rolle als bei den weiblichen Schülern. Vergleicht man die Anzahl der Werte, die Schüler im Zusammenhang mit dem Dilemma erkannten, so konnten die weiblichen Schüler mehr Werte nennen als die männlichen Schüler. Hinsichtlich des Perspektivwechsels konnten die Mädchen häufiger mehr als nur eine involvierte Person benennen als die Jungen. Ein Altersvergleich macht deutlich, dass es älteren Schülern besser gelingt als jüngeren, relevante Werte zu nennen. Dabei steht jedoch der Wert Schutz des Lebens eher im Vordergrund als der Wert Gerechtigkeit. Auch halten ältere Schüler häufiger Werte für mindestens zwei Personen relevant und nehmen Zwiespälte eher wahr als jüngere Schüler.

Ergebnisse zur Teilkompetenz Perspektivenwechsel und Folgenreflexion: Hier lassen sich jeweils in zwei Niveaus unterteilten: a) In Abhängigkeit vom erreichten Kompetenzniveau gelingt es Schülern den Kreis der vom Dilemma betroffenen Personen von der eigenen Person bis hin zur abstrakten gesellschaftlichen Ebene auszudehnen. b) Die beschriebenen Gefühle und Folgen können dahingehend unterteilt werden, ob sie eher selbstzentrisch sind und lediglich die direkt betroffene Person erfassen oder aber auf sozio-zentrischer Ebene anzusiedeln sind und somit das soziale Gefüge der betroffenen Personen mit in den Fokus nehmen. c) Das Wahrnehmen eines Zwiespaltes in den Gefühlen betroffener Personen ist Zeichen der Fähigkeit zum Perspektivwechsel, der Schülern unterschiedlich gut gelingt. Einen

Zwiespalt aufzulösen, indem man Handlungsoptionen abwägt und sich für eine Handlungsoption entscheidet, ist jedoch als differenziertes Niveau einzuordnen.

Literatur

Bennett, J., Gräsel, C., Parchmann, I. & Waddington, D. (2005). Context-based and Conventional Approaches to Teaching Chemistry: Comparing teachers' views. *International Journal of Science Education (IJSE) 27*(13), 1521-1547.

Demuth, R., Gräsel, C., Parchmann, I. & Ralle, B. (Hrsg.) (2008). *Chemie im Kontext – Von der Innovation zur nachhaltigen Verbreitung eines Unterrichtskonzepts*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Gilbert, J. (Ed.) (2006). Special Issue on Context-based learning. *International Journal of Science Education (IJSE) 28*(9).

Gräsel, C. & Parchmann, I. (2004). Implementationsforschung – oder der steinige Weg, Unterricht zu verändern. In: *Unterrichtswissenschaft 32*(3), 196-214.

KMK, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Chemie für den Mittleren Schulabschluss*. München: Luchterhand.

Komorek, M. & Kattmann, U. (2008). The Model of Educational Reconstruction. In S. Mikelskis-Seifert, U. Ringelband, U. & M. Brückmann, M. (Eds.), *Four Decades of Research in Science Education – from Curriculum Development to Quality Improvement (*pp. 171-188). Münster: Waxmann.

Lipowsky, Frank (2004). Was macht Fortbildungen für Lehrkräfte erfolgreich? Befunde der Forschung und mögliche Konsequenzen für die Praxis. *Die Deutsche Schule*, *96*(4), 462-479.

Mittelsten Scheid, N. (2008). Niveaus von Bewertungskompetenz. Eine empirische Studie im Rahmen des Projektes Biologie im Kontext. In I. Parchmann, C. Hößle, M. Komorek & T. Wloka (Hrsg.), *Studien zur Kontextorientierung im naturwissenschaftlichen Unterricht*, *Bd. 04*. Tönning: Der andere Verlag.

Mittelsten Scheid, N. & Hößle, C. (2008): Wie Schüler unter Verwendung syllogistischer Argumente argumentieren. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 14*, 167-184.

Nawrath, D. & Komorek, M. (im Druck). Physikunterricht mit Hilfe von Kontexten weiterentwickeln. In V. Nordmeier & A. Oberländer (Hrsg.): *Didaktik der Physik. Frühjahrstagung in Bochum.* Berlin: Lehmanns Media.

Nentwig, P., Parchmann, I., Demuth, R., Gräsel, C. & Ralle, B. (2005). Chemie im Kontext - From situated learning in relevant contexts to a systematic development of basic chemical concepts. In P. Nentwig & D. Waddington (Eds.), *Making it relevant – Context based learning of science* (pp. 155-174). Münster: Waxmann.

Parchmann, I., Paschmann, A., Huntemann, H., Demuth, R. & Ralle, B. (2001). Chemie im Kontext – Begründung und Realisierung eines Lernens in sinnstiftenden Kontexten. *Praxis der Naturwissenschaften Chemie* 50(1), 2-7.

Reitschert, K., Langlet, J., Hößle, C., Mittelsten Scheid, N. & Schlüter, S. (2007). Dimensionen ethischer Urteilskompetenz. In: *Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht. 60*(1), 43-51.

Rainer H. KAENDERS, Köln

Von Wiskunde und Windmühlen: Über den Mathematikunterricht in den Niederlanden

Wiskunde ist das niederländische Wort für Mathematik. Es geht zurück auf den Mathematiker, Ingenieur und Gelehrten Simon Stevin, der nicht nur die Dezimalbrüche eingeführt sondern auch Windmühlen konstruiert hat. Die Metapher der Windmühle steht für eine sehr nützliche und sinnvolle Erfindung, die aber auch dazu missbraucht werden kann, Wind zu machen.

Die Niederlande sind mit nur 16,5 Mio. Einwohnern ein kleines reformfreudiges Land, aus dessen Erfahrungen wir vieles lernen können. Für eine gemeinsame Tradition und Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik steht auch der 1930 in die Niederlande emigrierte Deutsche, Hans Freudenthal. Als ein Pionier der Mathematikdidaktik hat er in den 70er Jahren mit den Arbeitsgruppen Wikobas und Wiskivon am IOWO, dem späteren Freudenthal Institut, neue ungewöhnliche Alternativen zu der seinerzeit einflussreichen New Math Bewegung entwickelt. Unter Rückgriff auf Freudenthalsche Prinzipien prägte Adri Treffers in den späten 80er Jahren den Begriff des *realistischen Mathematikunterrichts (RME)*. Ein Begriff, der seit dem zum Markenzeichen des Freudenthal Instituts und des gesamten niederländischen Mathematikunterrichts wurde (z.B. Case, 2005), da das Feudenthal Institut wie keine andere Einrichtung jahrzehntelang Einfluss auf den niederländischen Mathematikunterricht nehmen konnte (zum Beispiel bei *Hewet*,1980, Reform vwo mit Einführung *Wiskunde A* und *B* und *Hawex*, 1986, Reform für havo, *Basisvorming*, *mavo/vbo* sowie *vmbo* oder bei der Einführung der *Tweede Fase* u.a. mit den *Profiboeken*).

In internationalen Vergleichsstudien wie TIMSS oder Pisa 2003 und 2006 schneidet der niederländische Mathematikunterricht seit Jahren besser ab als der deutsche. Und doch befindet sich dieser Mathematikunterricht, vor allem in den Schulformen havo und vwo (vergleichbar mit Realschule bis zur Klasse 11 und Gymnasium bis zur 12) seit etwa zehn Jahren in einer Krise: der Umfang sowie der Charakter der vermittelten Mathematik stehen zur Diskussion, die ohnehin niedrigen Studentenzahlen an den Universitäten für Mathematik, einschließlich Lehramt, sind innerhalb dieser Zeit nochmal eingebrochen, Hochschulen klagen über die mathematischen Fertigkeiten der Studienanfänger und Studierende selbst beschweren sich bei der Ministerin („Lieve Maria!“) über das mathematische Rüstzeug, mit dem sie ein Studium der Mathematik, Informatik, Natur- oder Ingenieurwissenschaft beginnen müssen (www.lievemaria.nl oder Krieg et al. 2008).

Im Jahr 2005 hat jene Maria van der Hoeven, die damalige Ministerin für Unterricht, Kultur und Wissenschaft, mit der Einberufung einer ministeriellen *Kommission Zukunft des Mathematikunterrichts cTWO* eine umfangreiche Reform des Mathematikunterrichts in havo und vwo eingeleitet. Dazu gehört die Einrichtung neuer Fächer *Wiskunde A, B, C* und *D.* Nach dem Studentenprotest *Lieve Maria* wurde zusätzlich eine Resonanzkommission eingerichtet, um die Belange der Folgeausbildungen in Beruf und Hochschule im Auge zu behalten.

Gemäß dem Wunsch der Organisatoren möchte ich in diesem öffentlichen Vortrag einige Einblicke in die Praxis des realistischen Mathematikunterrichts der vergangenen Jahre geben. Vor allem konzentriere ich mich dabei auf die Schulformen havo und vwo. Ich habe 12 Jahre in der niederländischen Mathematik als Forscher, Lehrer und Didaktiker gearbeitet, war Redakteur des *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Mitglied der Kommissionen NOCW, cTWO (einschließlich Unterkommissionen). An der aktuellen zweischrittigen Reform (2007 und 2014) des niederländischen Mathematikunterrichts habe ich aktiv mitgewirkt.

Für eine umfassende Darstellung des niederländischen Mathematikunterrichts der letzten hundert Jahre sei verwiesen auf Goffree, F. et al. (2000).

1. Alltag des Mathematikunterrichts

Im niederländischen Schulsystem besuchen die Kinder acht Jahre lang die Grundschule (von 4 bis 12) und wechseln dann in eine der drei weiterführenden Schulformen vmbo, havo, vwo von jeweils 4, 5 und 6 Schuljahren. Die Schulform havo berechtigt zum Besuch der Fachhochschule und das vwo zum Universitätsstudium – abhängig von gewählten Fächerkombinationen.

Seit dem Jahr 1998 wurde in den Oberstufen von havo und vwo die so genannte *tweede fase* eingeführt, ein allgemeines Unterrichtsmodell, in dem selbstreguliertes Lernen angestrebt wird. Dazu gehört eine große Zahl von Facharbeiten, in denen eigene Untersuchungen in bis zu 80 Stunden durchgeführt und präsentiert werden. Schulen verfügen über eine weitgehende Autonomie, in der sie meist das Modell des *studiehuis* gewählt haben: die Schule als Ort, an dem Schülerinnen und Schüler ihren Lernprozess teilweise selbst gestalten können. Dazu gehört auch die entsprechenden aufwendige Verwaltung all dieser Lernprozesse durch die Lehrer.

Die Lehrer sind an ihren Schulen über individuell ausgehandelte, kündbare Verträge angestellt und haben die Möglichkeit, bis zu 10% ihrer Arbeitszeit für von der Schule bezahlte Fortbildungen zu verwenden. In der Mathematik gibt es dazu ein reichhaltiges Angebot: Nationale Wiskundedagen, Vakantiecursus CWI, Jaarvergadering van NVvW oder das Wintersymposium der *Koninklijken Wiskundig Genootschap* und viele weitere Angebote.

Der alltägliche Mathematikunterricht wird inhaltlich von einer *Methode* bestimmt, d.h. einer kompletten Schulbuchserie, von der sich Lehrer die gesamte Unterrichtsplanung abnehmen lassen können. In der Regel entscheidet sich eine Schule über alle Schulformen und Stufen für eine Methode, an die sie aus organisatorischen Gründen für Jahre gebunden ist.

2. Unkonventionelle Wege

Seit der Reform Hewet im Jahr 1980 prägt die Unterscheidung in *Wiskunde A* und *B* den niederländischen Mathematikunterricht. Die Themen des Faches Wiskunde B sind ähnlich zu den Themen unseres Mathematikunterrichts. Im Fokus von Wiskunde A, das maßgeblich vom Freudenthal Institut entwickelt und vorangetrieben wurde, stand zunächst der mündige Umgang mit Daten und mit Anwendungen der Mathematik in Beruf, Kultur und Alltag. Dieses hoch gesteckte Ziel wurde mit der Zeit bescheidener, da in der Regel Wiskunde A von mathematisch schwächeren Schülern gewählt wird. Doch bei aller möglichen Kritik: Gerade mathematisch schwache Schüler erfahren das Fach als sinnvoll, weil die Inhalte für sie für sie eine Bedeutung haben. Mathematik ist kein gehasstes Fach.

Neben dieser an den Schülern orientierten Differenzierung gibt es eine vielfältige Kultur von unkonventionellen Projekten. Die Bedarf an Projekten für Facharbeiten (praktische opdrachten, profielwerkstukken) hat zur Entwicklung innovativen Unterrichts geführt, sei es durch Materialien, wie den so genannten *Zebrabüchern* oder durch Entwicklungsforschung an den Universitäten in Delft, Eindhoven, Nimwegen und Twente (in Köln wird bald das mathematikdidaktische Internetlabor Math-il.de auf diese Art und Weise arbeiten). In Master- oder Webclasses bieten Universitäten interessierten Schülern bzw. potentiellen Studenten Unterstützung bei Facharbeiten an. Es gibt frei verfügbare Internetmaterialien (z.B. Wisweb und Rekenweb vom Freudenthal Institut, Ratio in Nimwegen oder Mathadore in Eindhoven. Neben dem *Kangoeroe* Wettbewerb und der Mathematik Olympiade gibt es verschiedene spannende Mathematikwettbewerbe für Schüler, in denen die Mathematik sich anders als im Schulalltag präsentiert. Beispiele sind das Mathematikturnier in Nimwegen (seit 2008 auch in Köln), die A-lympiade und der Wiskunde B-dag des Freudenthal Instituts, die auch in Deutschland vom Land NRW und der Uni Köln veranstaltet werden. Und nicht zuletzt gibt es mathematische Zeitschriften für Schüler (Pythagoras), für Lehrer (Euclides, Nieuwe Wiskrant) und für alle Mathematiker (Nieuw Archief voor Wiskunde). Typisch für die Kultur unkonventioneller Projekte ist der Auftritt bekannter Mathematiker auf Popkonzerten oder der Blog Wiskundemeisjes (www.wiskundemeisjes.nl).

3. Krise des Mathematikunterrichts

Der niederländische Mathematikunterricht in den Schulformen havo/vwo hat in den letzten 10 Jahren eine Krise erlebt. Ein äußeres Merkmal dieser Krise ist der landesweite Rückgang der ohnehin schon geringen Erstsemesteranzahlen im Jahr 1988 um zeitweise 64% im Studiengang Mathematik, zu denen auch zukünftige Mathematiklehrer in den Oberstufen von havo oder vwo gezählt werden. Die **eingebrochenen Anfängerzahlen** sind auch ein Maß dafür, wie viele Schüler der Mathematikunterricht so zu begeistern versteht, dass sie sich bei guten Berufsaussichten auch später in ihrem Studium noch der Mathematik widmen möchten.

Vor allem jedoch ist die fachliche Qualifikation der Lehrer gefährdet. Neben dem universitären Bildungsweg zur Lehrerlaubnis in der Sekundarstufe II gibt es auch fachwissenschaftlich weit weniger anspruchsvolle Wege über die Fachhochschulen (mit nur havo-Examen) zu diesem Ziel. Das zahlenmäßige Verhältnis von universitär ausgebildeten Mathematiklehrern in der Sek. II zu den an einer Fachhochschule fortgebildeten Lehrern in der Sek. II wird (trotz Nachfrage der *Niederländischen Kommission für Mathematikunterricht NOCW*) vom Ministerium nicht veröffentlicht. Der Vergleich der geringen Studierendenzahlen mit dem landesweiten Bedarf in der Sek. II zeigt jedoch, dass der zunächst als Ausnahme gedachte Ausbildungsweg zum Regelfall geworden ist.

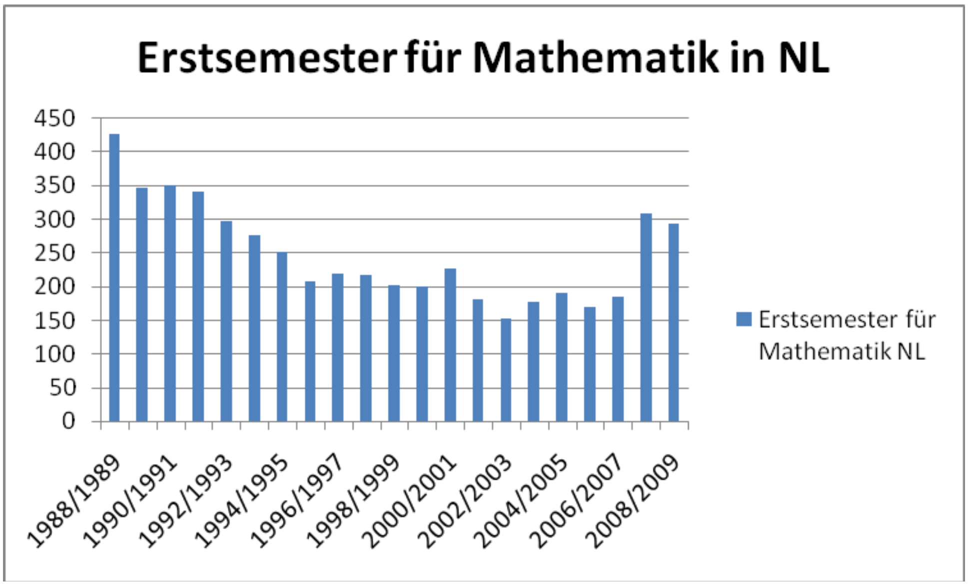


Tabelle 1: Landesweite Anzahlen der Erstsemester für Mathematik, technische Mathematik und Lehramt Mathematik (Sek. II) für havo/vwo an Universitäten.

Die Ursachen für diesen Rückgang sind sicherlich vielfältig. Neben gesellschaftlichen Veränderungen werden auch **inhaltliche Probleme** des tatsächlichen Mathematikunterrichts – realistisch oder nicht – für diese Krise verantwortlich gemacht (z. B. Kaenders, 2003; Wittmann, 2005).

Zunächst besteht die Realität des realistischen Mathematikunterrichts häufig aus **unrealistischen Kontexten**. Eine typische Aufgabe (Abschlussexamen, Wiskunde b1, vwo, 2006): „Um 15 Uhr wird die Heizung einer Sauna eingeschaltet. Von diesem Moment an wird die Sauna aufgewärmt. Dann gilt: $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0{,}29\,t}$. Hierbei ist S die Temperatur in Grad Celsius und t die Zeit in Stunden ab 15 Uhr.“ Ohne, dass hier ernsthaft Mathematik angewendet, mit ihr modelliert oder eine interessante

Frage beantwortet wird, vollführen die Schüler lediglich Standardberechnungen mit der Funktion *S*.

Weiterhin sind in der Mathematikdidaktik und insbesondere in der Entwicklung des realistischen Mathematikunterrichts viele nützliche und sinnvolle didaktische Werkzeuge entstanden, um Intuition für mathematische Konzepte aufzubauen. Mittlerweile wird jedoch an vielen Stellen der Erwerb mathematischer Konzepte durch den Umgang mit diesen didaktischen Werkzeugen *ersetzt*: **didaktische Werkzeuge werden zu mathematischen Inhalten**. Beispiele hierzu sind etwa *Pfeilketten*, die den Funktionsbegriff unterstützen, die *Brettchenmethode* (einen Teil der Gleichung zudecken und sich vorstellen, was dort stehen sollte) bzw. die *Balkenwaagenmethode* zur Lösung von Gleichungen. Sie sollen die Substitution von Funktionen bzw. elementare Aussagenlogik unterstützen. Auch Würfelgebäude für das räumliche Vorstellungsvermögen oder Vasen, die zur Vermittlung des Funktionsbegriffs gleichmäßig mit Wasser gefüllt werden, sind Hilfsmittel, mit denen seit Pisa ja auch deutsche Schüler fleißig umzugehen lernen.

Das vielleicht größte Problem jedoch ist eine **Veränderung der mathematischen Sprache**, durch welche die logischen, beschreibenden, erklärenden und integrativen Ausdrucksmöglichkeiten der Schüler im argumentativen, algebraischen und konzeptionellen Bereich stark eingeschränkt werden.

Zum Beispiel sind die meisten tragfähigen **Definitionen aus dem Mathematikunterricht verschwunden** oder durch Sentenzen ersetzt worden, die zwar in ihrem Duktus noch an Definitionen gemahnen, jedoch logisch und inhaltlich unsinnig sind. Es werden Pseudobegriffe eingeführt wie: „Ein Graph, der einen guten Eindruck eines Zusammenhangs vermittelt, heißt *vollständiger Graph*. Bei einem derartigen Graphen müssen die (eventuellen) Schnittpunkte mit den Achsen und die Extrema gut sichtbar sein.“ oder *gewinnende Funktionen*: „Funktionen, die auf die Dauer die größten Ergebnisse ergeben, nennt man *gewinnende Funktionen*. Quadratische Funktionen gewinnen gegen lineare Funktionen. …“. An anderer Stelle wird das Wort *Produktfunktion* so eingeführt als handelte es sich dabei um eine mathematische Definition: „Eine Funktion, die zu schreiben ist als Produkt zweier Funktionen, heißt eine *Produktfunktion*. Beispiel: $f(x) = g(x) \times h(x)$. (Moderne Wiskunde, wiskunde B12).

Durch das Fehlen von Definitionen oder gar von Unterricht, in dem das Definieren gelernt werden kann, sind Begründungen oder Beweise unmöglich, die sich auf haltbare Definitionen stützen. Daher müssen Argumentationen und Zusammenhänge an **eher intuitiven Vorstellungen** festgemacht werden. Tatsachen und Ergebnisse werden mit Sprache versehen – Zusammenhänge kaum. Verschiedene **Qualitäten mathematischer Einsicht** werden als zueinander gleichwertige Alternativen dargestellt. Z. B.: „Kontrolliere durch Plotten und mit einer Berechnung, dass die Gerade…“ oder

„Untersuche mit dem Taschenrechner in welchen Punkten der Graph die Steigung 0 hat. Was ist die Gleichung dieser Punkte?“ Dass all diese Handlungen in jeweils vollständig unterschiedlichen Qualitäten mathematischer Einsicht resultieren, wird relativiert und nicht problematisiert. Die Folge ist, dass **Abstraktion und mathematische Theoriebildung verhindert werden.** Höhere Van Hiele Niveaus bleiben für die Schüler unerreichbar und der **Einstieg in die mathematische Kultur** wird weitestgehend unmöglich gemacht.

In der Analysis zum Beispiel werden weder Extrema noch Monotonie definiert. In Argumentationen wird die Definitheit der Ableitung mit dem Monotonieverhalten gleichgesetzt, so dass schon die Funktion $f(x) = x^3$ zu einem Gegenbeispiel wird. Statt einer Definition finden sich Formulierungen, wie „…Falls ein Graph bei diesem Wert von x von steigend in sinkend übergeht, dann hat die Funktion ein Minimum.“, was bekanntlich durch die Funktion $h(x) = x^2 + x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ widerlegt wird. Kein Wunder, dass solche Beispiele mit dem Verweis auf die Mathematik der Schule auch als kleinlich angesehen werden. Kurzum, die entwickelte mathematische Sprache verfügt nicht über die Möglichkeiten, die eine adäquate Behandlung der Analysis erfordern würde.

In dieser Situation bleibt dann Büchern und Lehrern nichts anderes übrig, als **mathematische Sachverhalte zu verkündigen** ohne sie zu begründen oder gar in einen größeren theoretischen Kontext zu stellen. So wird etwa ohne Begründung mitgeteilt: „Für eine Potenzfunktion $f(x) = x^p$ ist $f'(x) = px^{p-1}$. Diese Regel gilt auch, wenn der Exponent eine negative Zahl oder ein Bruch ist.“ Zu den zentralen Abschlussprüfungen bekommen die Schüler Formelkarten, auf denen sich Formeln finden wie $x^n = c$ mit $x,c > 0$ und der Lösung $x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$.

Da die Sprache ohne Definitionen und Unterscheidung der Qualitäten mathematischer Einsicht keine Klarheit bietet, sehen sich die Autoren der zentralen Abschlussprüfungen gezwungen, die Sprache zu reglementieren. Hierdurch entsteht eine Form der **mathematischen Jurisprudenz**, bei der jede zu verrichtende Handlung akribisch festgelegt wird. Zum Beispiel „Lösen: Die Art der Lösung ist frei, muss aber erklärt werden. Bei Gebrauch des graphischen Taschenrechners müssen die benutzten Optionen genannt werden.“ Der Zusatz “algebraisch” oder “exakt” erlegt der Art und Weise des Lösens Beschränkungen auf: „…exakt: algebraisch, das schließliche Endergebnis darf nicht angenähert werden“ und „algebraisch: Schritt für Schritt, ohne Benutzung der Spezifischen Optionen des grafischen Taschenrechners; das Endergebnis darf angenähert werden.“

Ein weiteres ernsthaftes Problem ist das der **antididaktischen Ommission**. Ommission, d.h. das Weglassen von Details, Hintergründen und technischen Darstellungen gehört zu den wichtigsten Werkzeugen eines Lehrers/einer Lehrerin. Wenn jedoch für die weitere mathematische Entwicklung der Schüler unverzichtbare Inhalte einfach weggelassen werden, dann kann die Ommission als ‚antididaktisch' bezeichnet werden (vgl. *antididaktische Inversion* in Freudenthal, 1983, p. 305). Neben der Ommission von Definitionen, Beweisen und Theorien, in denen mathematische Objekte als eigenständige Objekte betrachtet werden, gehören dazu auch ganz konkreter Inhalte wie Primzahlen, Teilbarkeit, Bruchrechnung, Irrationalität oder die elementare Sprache der Aussagenlogik, Strukturen und Mengen und wichtige Aspekte infinitesimaler Konzepte wie Grenzwert, Stetigkeit, Asymptoten, Vollständigkeit, Differenzierbarkeit. Schon in der Grundschule gehören Standardalgorithmen wie schriftliche Division oder Multiplikation nicht mehr zum verpflichteten Kanon. Auch die Bruchrechnung ist in den letzten Jahren zusehends aus Schulbuchserien verschwunden.

In Einstiegstests an den Universitäten treten diese Ommissionen dann zu Tage. Andere, über den Bereich der algebraischen Fertigkeiten hinausgehende mathematikdidaktische Bemühungen, werden dabei gerne ignoriert.

PISA-Tests und Zentralexamen signalisieren diese Entwicklung nicht.

4. Die Reform

Seit dem Jahr 2005 ist die Reform des Mathematikunterrichts von havo/vwo in vollem Gang. Schon zu Beginn bestand in der Kommission cTWO Einvernehmen darüber, dass Wiskunde A in seiner Philosophie fortgeführt und durch das Fach Wiskunde C ergänzt werden sollte. Dabei konzentriert sich dieses neue Fach speziell auf soziale und kulturelle Aspekte, wohingegen Wiskunde A auch die ökonomischen und medizinischen Fächer im Blick hat. Das neue Wahlfach Wiskunde D ermöglicht authentischere Kontexte durch eine strukturelle Zusammenarbeit zwischen Schulen und Hochschule. Damit stellt es ein attraktives Angebot für mathematisch interessierte Schüler dar. Die Fächer Wiskunde C und D wurden schon 2007 eingeführt – ab 2014 sollen neue Lehrpläne für alle Fächer Wiskunde A, B, C und D gelten. Zur Unterstützung der Mathematiklehrer beim Umgang mit neuen Inhalten sind breite Fortbildungsprogramme eingerichtet und insbesondere Wiskunde D Förderstellen eingerichtet worden.

Im Zentrum der Reformen steht die Rückbesinnung auf die mathematische Kultur und Sprache. Die Kontexte sollen authentischer und der Einsatz elektronischer Hilfsmittel getreu der Devise *Use to learn* statt *Learn to use* gestaltet werden. Auch die Darstellung der Mathematik in der Außenwelt, d.h. in Kultur, Wirtschaft und Technik, soll ernst genommen werden.

Der Mangel an universitär ausgebildeten Mathematiklehrern und die mathematisch dürftigen Lehrerausbildungen außerhalb der Universität stellen in den kommenden Jahren die größte Herausforderung dar. Die Problem ist so groß, dass die akademische Mathematik jetzt im *Masterplan Toekomst Wiskunde* (NWO) sogar dafür plädiert, schon den universitären Bachelor in Mathematik gleich als Lehrerlaubnis für die Sekundarstufe II zu akzeptieren. Bisher ist dies ein Masterstudium. Aber im Vergleich zur Fachhochschulausbildung stellt schon der Bachelorabschluss an einer Universität die mathematisch viel anspruchsvollere Ausbildung dar.

Trotz aller Probleme bringt die Reform neue Hoffnung und Möglichkeiten. Seit zwei Jahren sind die Erstsemesterzahlen für Mathematik wieder leicht gestiegen. Am Freudenthal Institut, das seit 2006 einen neuen Direktor hat, verändern sich Auffassungen zu realistischem Mathematikunterricht: Rein mathematische Kontexte und Übungsmaterial sind nicht mehr verpönt. Und in der neuesten Auflage der Schulbuchserie *Getal en Ruimte* finden sich nach vielen Jahren wieder Primzahlen, ggT und kgV.

Sind dies die ersten Krokusse im neuen Frühling des niederländischen Mathematikunterrichts?

Literatur

Beukers, F., Blankespoor, J., Broer, H., Drijvers, P., Garst, S., Kaenders, R., Kleijne, W., Kollenveld, M., Peletier, M., Siersma, D., Van Asselt, R., Van der Giessen C., Van Streun, A. & Zaal C. (2007). *Rijk aan betekenis – Visie op vernieuwd Wiskundeonderwijs*. Visiedocument van de Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, cTWO, www.ctwo.nl.

Case, R.W. (2005). Report from the Netherlands: The Dutch Revolution in Secondary School Mathematics. *Mathematics Teacher*, Vol. 98, No. 6.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Doordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München, Wien: Oldenbourg, R..

Goffree, F., van Hoorn, M. & Zwaneveld B. (2000). *Honderd jaar wiskundeonderwijs – Een jubileumboek*. Leusden: NVvW.

Kaenders, R.H. (2003). *Verum, Pulchrum, Bonum*. NAW, 5^{e} serie, 4 (2).

Krieg, A., Verhulst, F. & Walcher, S. (2008). *„Lieve Maria“ Niederländische Studenten beschweren sich über den Mathematik-Schulunterricht*. Mitteilungen der DMV 16, pp. 16–18.

Landsman, N. P. (2008). *Where have all the students gone*? Nieuw Archief voor Wiskunde, 5de serie, 9 (2).

Wittmann E. Ch. (2005). *Realistic Mathematics Education, past and present*. Nieuw Archief voor Wiskunde, 5^{e} serie, 6 (4).

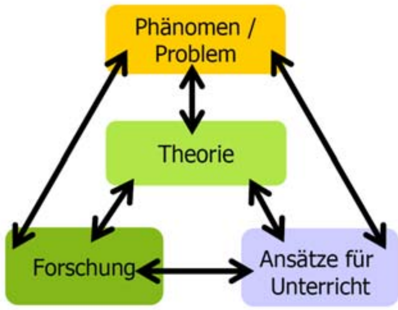
Susanne PREDIGER, Dortmund

Zur Bedeutung vielfältiger Theorien und wissenschaftlicher Praktiken in der Mathematikdidaktik am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben

1. Theorien und wissenschaftliche Praktiken

Die internationale Diskussion über die Rolle von Theorien für die mathematikdidaktische Forschung ist ebenso wie die der allgemeinen Wissenschaftstheorie geprägt von unterschiedlichen Verständnissen des Theoriebegriffs „in Abhängigkeit von den Grundpositionen" (Thiel 1996, 266, ebenso für Mathematikdidaktik bei Assude et al. 2008). Üblich in der Wissenschaftstheorie ist eine Charakterisierung von Theorien hinsichtlich ihrer Funktionen, z.B. als „sprachliches Gebilde, das in propositionaler oder begrifflicher Form die Phänomene eines Sachbereichs ordnet und [ermöglicht,] die wesentlichen Eigenschaften der ihm zugehörigen Gegenstände und deren Beziehungen untereinander zu beschreiben, allgemeine Gesetze für sie herzuleiten sowie Prognosen über das Auftreten bestimmter Phänomene … aufzustellen" (Thiel 1996, 262). Assude et al. (2008) sprechen bei diesem Theoriebegriff von „theories as objects of research".

Forschung wird in diesem Artikel in sozialer Perspektive konzeptualisiert als stets verortet in *communities of practice* (Wenger 1998). Diese Perspektive schließt an Konzeptualisierungen von Wissenschaftsdisziplinen als Wissenschaftskulturen an (Arnold/Fischer 2004, aber auch schon Fleck 1935), erfasst jedoch die kleineren Einheiten von Forschungsgruppen oder wissenschaftlichen Schulen *innerhalb* einer Disziplin adäquater. Wie Wissenschaftskulturen definieren sich Wissenschaftliche Schulen als communities of practice nicht nur über *sozial geteilte Erkenntnisse* (z.B. akzeptierte Theorien, Konstrukte und Aussagen sowie empirische Befunde), sondern auch über ihre *Arbeitsformen* (akzeptierte Erkenntnisweisen, Untersuchungsdesigns, Methoden etc.), *soziale Aspekte* der Community (wie Rollen, Habitus und Spielregeln, Mechanismen der Initiation usw.) und vor allem *implizite und explizite theoretische Grundannahmen*, die die sozial geteilten Forschungs- und Entwicklungspraktiken prägen und eingrenzen (*Hintergrundtheorien* im Sinne von Mason/Waywood 1996). Hintergrundtheorien umfassen ontologische Aspekte (bzgl. der Abgrenzung und Natur des Gegenstandsbereichs), epistemologische Aspekte (Annahmen zu Erkenntnisweisen und Wahrheitsgehalten) sowie Normen über wissenschaftliche Praktiken (vor allem bzgl. Zielsetzungen und Intentionen, paradigmatische Forschungsfragen und Qualitätskriterien). Solche Hintergrundtheorien bezeichnen Assude et al. als „theories as tools" (2008), was aufgrund des zugrunde gelegten weiten Werkzeugbegriffs mit Theorien als Erkenntnisbedingung übersetzt werden sollte.



Silver und Herbst (2007) haben herausgearbeitet, dass mathematikdidaktische (Vorder- und Hintergrund-) Theorien nicht nur zum Erfassen empirischer Phänomene dienen, sondern auch zwischen Forschung und Unterrichtspraktiken vermitteln, indem sie eine “language of descriptions of an educational practice” oder ein “system of best practices” bieten (S. 50). Zwischen empirischen Problemen und der Unterrichtspraxis vermitteln Theorien, indem sie Lösungsvorschläge für Probleme bieten oder ein “tool which can help design new practices” (S. 59). Während Silver und Herbst (2007) einzelne Theorien auf den unterschiedlichen Achsen des Diagramms verorteten, wird hier der Standpunkt eingenommen, dass jede wissenschaftliche Praxis implizit alle drei Achsen tangiert.

2. Umgang mit Textaufgaben als Beispielfeld für Vielfalt von wissenschaftlichen Praktiken in der Mathematikdidaktik

Problem der wohl bekannten Busaufgabe

„1128 Schülerinnen und Schüler einer Schule sollen von der Schule aus zu einer Sportveranstaltung fahren. Ein Schulbus kann 36 Schülerinnen und Schüler befördern. Wie viele Busse sind nötig, um alle Schülerinnen und Schüler zu der Veranstaltung zu bringen?“

Diese Variante der oft diskutierten Busaufgabe war Bestandteil der Lernstandserhebung 9 in NRW 2004. Sie wurde in der Pilotierung von 38 % der Befragten korrekt gelöst, 23 % rundeten die berechneten 1128 : 36 = 31,33 falsch, ca. 40 % hatten andere falsche Lösungen. Das Original aus dem 3rd NAEP National Assessment wurde 1982 in den USA von 23 % der Befragten korrekt gelöst, 19 % rundeten ab, 29% schrieben „31 Rest 12“, 29 % andere falsche Lösungen (Carpenter et al. 1983).

Die Entwicklung der Forschungen und Theoriebildungen rund um diese Aufgabe bietet ein interessantes Beispielfeld, um die Unterschiedlichkeit theoretischer Zugriffe und wissenschaftlicher Praktiken exemplarisch aufzuzeigen. Aus der Vielzahl der Zugänge werden vier hier über die kleinsten denkbaren theoretischen Einheiten, ihre zentralen Konstrukte, angedeutet:

1. Zugang: Fehlende Aktivierung von Grundvorstellungen

Die Ergebnisse anderer Untersuchungen legen nahe, dass den 40 % bzw. 29 % falschen Lösungen neben reinen Rechenfehlern oft falsche Operationswahlen zugrunde liegen, hinter denen fehlende oder falsche Aktivierungen von Grundvorstellungen zu vermuten sind. Die Relevanz dieses aus stoffdidaktischer Tradition stammenden theoretischen Konstrukts zur Analyse und Prognose von Schwierigkeiten bei Aufgaben mit Mathematisierungsanforderungen wurde in zahlreichen qualitativen und quantitativen Untersuchungen gezeigt (insbesondere Blum et al. 2004, vom Hofe 1995).

2. Zugang: Antrainierte Ausblendung realistischer Überlegungen

Besondere Aufmerksamkeit haben die 19% bzw. 23% falsche Bearbeitungen gefunden, in denen zwar richtig gerechnet, dann aber ab- statt aufgerundet wurde, weil die mathematischen Rundungsregeln dies nahelegen. Hier ist eine Validierung des Ergebnisses in Bezug auf die Sachsituation vermutlich nicht erfolgt. Analysen der Hintergründe dieser Ausblendung realistischer Überlegungen durch Interviewstudien weisen auf einen erlernten Umgang mit eingekleideten Textaufgaben im Unterricht hin (Verschaffel et al. 2000).

3. Zugang: Interventionsstudie zur Behebung des Defizits

Dass die Einbeziehung realistischer Überlegungen trainierbar ist, hat Renkl (1999) mit einer Interventionsstudie zu zeigen versucht, in der Viertklässler in 3x 45 min. für die möglichen Fallen solcher Aufgaben sensibilisiert wurden. Nachweisen konnte er signifikant bessere Leistungssteigerungen der Experimentalgruppe gegenüber der Kontrollgruppe.

4. Zugang: Soziomathematische Normen im Mathematikunterricht

Das Problem des Nicht-Einbezugs realistischer Überlegungen lässt sich nicht nur in der kognitiven Konstitution der Lernenden verorten, sondern grundsätzlicher in den im Klassenraum etablierten soziomathematischen Normen und Prozeduren im Umgang mit Textaufgaben (Neth/Voigt 1991, Chevallard 1988). Interaktionsanalysen zeigen, wie soziomathematische Normen etabliert werden, die nur bestimmte Übergänge zwischen realistischen und schulmathematischen Kontexten als legitime Praktiken konstituieren (Neth/Voigt 1991, Gellert/Jablonka 2009).

3. Vergleich der theoretischen Zugänge und wissenschaftlichen Praktiken

Vielfalt der Zugänge wichtig

Metaphorisch lassen sich die verschiedenen Zugänge als Lupen begreifen, die unterschiedliche Ausschnitte einer komplexen Realität zu erfassen oder zu verändern versuchen. Die Vielfalt der Zugänge ist wichtig, weil einzelne Zugänge allein die Komplexität des Feldes nicht erfassen könnten.

Unterschiedliche Konsequenzen für unterrichtliche Ansätze

Die Zugänge liefern Konsequenzen für unterrichtliche Ansätze auf ganz unterschiedlichen Ebenen: der Ebene der Inhalte (Aufbau von Grundvorstellungen als wichtige Lerninhalte im *1. Zugang*), der Ebene der Aufgaben (mehr authentische realitätsbezogene statt eingekleidete Aufgaben im *2. Zugang*) und der Ebene der Unterrichtskultur (stärkerer Fokus auf unterrichtlichen Umgang mit Kontexten im *4. Zugang*). Erst alle drei Ebenen zusammen liefern ein umfassendes Unterrichtskonzept, die Vielfalt der Zugänge ist somit wichtig, um der Komplexität des Unterrichtsgeschehens gerecht werden zu können.

Der *3. Zugang* hat die unterrichtlichen Handlungsmöglichkeiten direkt zum Forschungsgegenstand gemacht, hätte aber kritische Auswirkungen, wenn er so verstanden würde, dass der Einbezug realistischer Überlegungen kurzfristig und isoliert trainierbar wäre. Hier zeigt sich die Notwendigkeit einer angemessenen Interpretation des Geltungsanspruchs von Interventionsstudien für die Unterrichtspraxis.

Konstituierung der Forschungsgegenstände durch Fokus der Forschung

Die Lupenmetapher und die dargestellten unterschiedlichen Konsequenzen für unterrichtliche Ansätze würden zu kurz greifen, wenn nicht die Grenze der Lupenmetapher transzendiert würde: Die unterschiedlichen theoretischen Zugriffe erfassen nicht verschiedene Ausschnitte *derselben* Realität, stattdessen *konstituieren* die theoretischen Zugriffe durch entsprechende Konzeptualisierung überhaupt erst ihre Forschungsgegenstände: “indeed, theoretical constructs act to bring these objects (to be studied) into being.” (Mason/Waywood 1996, 1058).

Im *1. Zugang* wird in stoffdidaktischer Perspektive Grundvorstellungsintensität als schwierigkeitsgenerierendes Aufgabenmerkmal konzeptualisiert, deren erklärende Kraft im large scale assessment mittels Varianzaufklärung nachgewiesen wird (s.o.). In kognitiver Perspektive wird eine fehlende Aktivierung von Grundvorstellungen als *bereichsspezifisches Defizit* der Einzelnen gefasst, mit dem (im Gegensatz etwa zur Lokalisierung der Schwierigkeit in der Lesekompetenz) nicht nur ein mathematik-, sondern auch gegenstandsspezifischer Forschungsgegenstand geschaffen wird.

Im *2. Zugang* dagegen werden, ebenfalls in *kognitiver Perspektive*, aber unter Einbezug des Unterrichtskontexts, die Schwierigkeiten vorrangig in erwartungswidrigem *Verhalten* der bereichsunabhängigen Ausblendung realistischer Überlegungen verortet. Werden diese zurück geführt auf den unterrichtlichen Umgang mit eingekleideten Aufgaben, so wird Lernen als Prozess in unterrichtlichem Kontext konzeptualisiert, der eine Erklärung für Defizite in einer ungeeigneten Aufgabenauswahl im Unterricht bietet.

Wenn der *3. Zugang* mit einer Interventionsstudie zu zeigen versucht, dass der Einbezug realistischer Überlegungen trainierbar ist, so verortet er Schwierigkeiten mit Textaufgaben dagegen wie der 2. Zugang in *kognitiver Perspektive* bei den Lernenden, hier allerdings als bereichsübergreifendes, kurzfristig behebbares Defizit.

Die Erklärungsrichtung des 2. Zugangs wird im *4. Zugang* aus *sozialer Perspektive* weiter geführt, die die Schwierigkeit fasst als Nicht-Passung zwischen den im Unterricht etablierten *soziomathematischen Normen* im Umgang mit Textaufgaben und den Erwartungen im Test. Noch konsequenter als im 2. Zugang werden Schwierigkeiten hier nicht den Individuen zugewiesen, sondern in der Unterrichtsinteraktion verortet. Mit dem erschließenden Konstrukt der soziomathematischen Normen (Yackel/Cobb 1996 oder dem des didaktischen Kontrakts von Chevallard 1988) wird ein Forschungsgegenstand erst etabliert, für den zuvor keine Sprache vorhanden war. Dieser Fokus auf Unterrichtsinteraktionen war Voraussetzung für die Wahrnehmung der Bedeutung von Fragen der Unterrichtskultur.

Insbesondere am Konstrukt der Grundvorstellungen und dem der soziomathematischen Normen zeigt sich die Kraft von „ontological innovations“ (DiSessa/Cobb 2004). Wenn die Vordergrundtheorie dadurch die Erfassung neuer Phänomene ermöglicht, ist der Zugewinn gegenüber theorie-ärmeren Analysen evident.

Innovative Konstrukte der Vordergrundtheorie sind jedoch immer auch eingebettet in bestimmte Hintergrundtheorien, die die wissenschaftlichen Praktiken begrenzen. So ist etwa das Konstrukt der soziomathematischen Normen (Yackel/Cobb 1996) eingebettet in die theoretische Perspektive des symbolischen Interaktionismus mit ihrem Fokus auf Interaktionenssituationen (Neth/Voigt 1991). Sie ermöglicht die Rekonstruktion der situativen Emergenz von Normen und bezieht dabei immer auch die Binnenperspektiven der Akteure ein. An Grenzen stößt der Interaktionismus bzgl. individueller Vorstellungen einzelner Akteure oder bzgl. längerfristiger Prozesse statt Mikro-Situationen.

Forschungsfragen - Forschungsmethoden

Der Vergleich der Zugriffe zeigt die Weite des Spektrums möglicher Forschungsmethoden und somit Erkenntnisweisen, die jeweils begrenzen, welche Forschungsfragen formuliert werden können. So sind unterrichtliche

Ursachen der Ausblendung realistischer Überlegungen erst ins Blickfeld geraten, als Lernende in Interviews bzgl. der Ursachen ihrer Handlungen befragt wurden, während Leistungsstudien mit großen Fallzahlen dies nicht erheben konnten (Verschaffel et al. 2000).

Allgemein sind Unterschiede zwischen quantitativen und qualitativen Forschungsmethoden in breit geführten Methodendiskussionen immer wieder dargestellt worden, darauf kann hier nur verwiesen werden (Lamnek 1995). Interessant ist darüber hinaus die Rekonstruktion der dahinter liegenden impliziten theoretischen (insbesondere ontologischen und epistemologischen) Grundannahmen, die auf wichtige Aspekte der Hintergrundtheorien verweisen. Ein eindrucksvolles Beispiel für die Denkstilgebundenheit (Fleck 1935) wissenschaftlicher Praktiken gibt Cobbs (2007) kritische Rekonstruktion ontologischer Grundannahmen der (oft als theorieunabhängig bezeichneten) Interventionsstudien der experimentellen Psychologie.

Zwischenfazit: Vielfalt theoretischer Zugriffe und wiss. Praktiken

Was und wie man beforscht, hängt von den wissenschaftlichen Praktiken ab, in denen man partizipiert (entweder bewusst gewählt oder hinein sozialisiert). Der Vergleich zeigt, dass diese nicht nur durch Methoden und Methodologien, sondern durch alle oben aufgeführten Bestandteile wissenschaftlicher Praktiken erheblich geprägt sind, vor allem durch als relevant betrachtete Forschungsfragen, theoretische Grundannahmen und Werte sowie spezifische Praktiken, die eigenen Forschungsergebnisse für Unterrichtspraxis fruchtbar zu machen.

Diese Unterschiede wahrzunehmen und sich im Spektrum der Möglichkeiten bewusst zu positionieren, ist Aufgabe jedes reflektiert arbeitenden Mitglieds einer wissenschaftlichen Community.

4. Verknüpfung vielfältiger theoretischer Ansätze aus Verantwortung für Unterrichtspraxis

Mit jeder Forschungspraxis lassen sich nur Teilbereiche der komplexen Realität mathematischen Lehrens und Lernens erfassen, angesichts der Komplexität des Forschungs- und Handlungsfeldes wäre daher eine Vereinseitigung der Forschungspraktiken nicht wünschenswert. Deswegen ist die Arbeit der Theory Working Group der CERME-Konferenzen 4-6 geprägt von dem Motto „Diversity is richness!“ (Bikner-Ahsbahs/Prediger 2006, S. 54, Diskussionsstand dokumentiert in Prediger et al. 2008).

Die Gruppe arbeitet jedoch gerade deswegen intensiv, weil eine Würdigung der Pluralität nicht mit Beliebigkeit verwechselt werden darf. Folgt man wie die Autorin den normativen Ansprüchen einer Mathematikdidaktik als

Design Science nach Wittmann (1992) (ohne diese als kurzfristigen Utilitarismus misszuverstehen), dann trägt jede Leitung einer Forschungsgruppe Verantwortung für die Relevanz der eigenen Arbeit für Unterrichtspraxis. Daraus ergibt sich die zu bearbeitende Frage, wie die vielfältigen theoretischen Zugriffe und die durch sie bedingten Ergebnisse von Forschung in der komplexen Realität des Unterrichts wieder zu verbinden sind. Denn Unterrichtspraxis allein kann nicht die Gewichtungen und Verknüpfungen vornehmen, die die Didaktik als wissenschaftliche Disziplin ausspart.

Die Vielfalt theoretischer Zugriffe und wissenschaftlicher Praktiken wird also nur dann zu einer Ressource für Reichtum, wenn die Ansätze nicht nur unverbunden nebeneinander stehen, sondern es stattdessen gelingt, Forschungsergebnisse und unterschiedliche Forschungspraktiken miteinander zu verbinden. Dazu müssen auch Theorien verbunden werden.

Ziel solcher Verknüpfungsbemühungen ist jedoch nicht eine globale Einheitstheorie, sondern viele lokale Netzwerke von Theorien. Mögliche Strategien zur Vernetzung wurden in Prediger et al. (2008) diskutiert und in Fallbeispielen ausgelotet.

Mittelfristig zu entwickeln sind umfassendere Handlungsrahmen für Unterrichtspraxis, nicht einseitige Forderungen aus sehr lokalen theoretischen Zugängen, darauf hat auch Bruder (in diesem Band) aufmerksam gemacht. Für eine solche Entwicklung ganzheitlicher Ansätze für komplexe Unterrichtsrealitäten sind neben langfristigen Projekten und Methodenmix auch kohärente Vordergrund- und Hintergrundtheorien, zunehmende Explizierung der Grundannahmen wissenschaftlicher Praktiken sowie eine ernsthafte, methodologisch reflektierte Vernetzung von Ansätzen nötig. Diesen Weg hat insbesondere die europäische Community begonnen, sollte ihn aber noch weiter gehen.

Literatur (Weitere Literatur zum Vortrag auf der Homepage der Autorin)

Arnold, Markus / Fischer, Roland (2004) (Hrsg.): Disziplinierungen. Kulturen der Wissenschaft im Vergleich, Turia & Kant, Wien.

Assude, Teresa / Boero, Paolo / Herbst, Patricio / Lerman, Stephen / Radford, Luis (2008): The notions and roles of theory in mathematics education research, Paper presented by the survey Team at ICME 11, Mexiko 2008.

Bikner-Ahsbahs, Angelika / Prediger, Susanne (2006): Diversity of Theories in Mathematics Education - How can we deal with it?, in: ZDM 38(1), 52-57.

Blum, Werner / vom Hofe, Rudolf / Jordan, Alexander / Kleine, Michael (2004): Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA, in: Neubrand, Michael (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. VS, Wiesbaden, 145-157.

Carpenter, Thomas P. / Lindquist, Mary M. / Matthews, Westina / Silver, Edward A. (1983): Results of the Third NAEP Math Assessment: Secondary School, in: Mathematics Teacher 76 (9), 652–659.

Chevallard, Yves (1988): Sur l'analyse didactique. Deux études sur le notions de contrat et de situation, Publications de l'IREM d'Aix -Marseille, 14.

Cobb, Paul (2007): Putting philosophy to work. Coping with multiple theoretical perspectives, in; Lester, Frank (Hrsg.): Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NCTM, Reston, 3-38.

DiSessa, Andrea A. / Cobb, Paul (2004): Ontological innovation and the role of theory in design experiments, in: Journal of the Learning Sciences 13(1), 77-103.

Fleck, Ludwik (1935): Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache: Einführung in die Lehre vom Denkstil und vom Denkkollektiv, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1980 (erstmals 1935).

Gellert, Uwe / Jablonka, Eva (2009, in Vorb.): "I am not talking about reality." Word problems and the intricacies of producing legitimate text, erscheint in: Verschaffel, Lieven et al. (Hrsg.): Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations, Sense Publications, Rotterdam.

Lamnek, Siegfried (1995): Qualitative Sozialforschung, Bd. 1, Beltz, Weinheim.

Mason, John / Waywood, Andrew (1996): The role of theory in mathematics education and research, in: Bishop, Alan J. et al. (Hrsg.): International Handbook of Mathematics Education, Kluwer, Dordrecht, 1055-1089.

Neth, Angelika / Voigt, Jörg (1991): Lebensweltliche Inszenierungen – Die Aushandlung schulmathematischer Bedeutungen an Sachaufgaben, in: Maier, Hermann / Voigt, Jörg (Hrsg.): Interpretative Unterrichtsforschung, Aulis, Köln, 79-116.

Prediger, Susanne / Bikner-Ahsbahs, Angelika / Arzarello, Ferdinando (2008): Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches – First steps towards a conceptual framework, in: ZDM 40 (2), 165-178.

Renkl, Alexander (1999): The gap between school and everyday knowledge in Mathematics. Paper presented at the 8th EARLI Conference, Göteborg, Sweden.

Silver, Edward A. / Herbst, Patricio G. (2007): Theory in Mathematics Education Scholarship, in: Lester, Frank K. (Hrsg.): Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NCTM, Reston, 39-68.

Thiel, Carsten (1996): Theorie, in: Mittelstraß, Jürgen (Hrsg.): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, Bd. 4, Stuttgart/Weimar, 260-270.

Verschaffel, Lieven / Greer, Brain / De Corte, Eric (2000): Making sense of word problems, Swets & Zeitlinger, Lisse.

vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Spektrum, Heidelberg.

Wenger, Etienne (1998): Communities of practice: Learning, meaning, and identity, Cambridge University Press, Cambridge.

Wittmann, Erich C. (1995). Mathematics education as a 'design science', in: Educational Studies in Mathematics 29(4), 355-374. (Vorversion deutsch JMD 1992)

Yackel, Erna / Cobb, Paul (1996): Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics, in: JRME, 27, 458-477.

Elsbeth STERN, Zürich

Intelligentes Wissen als der Schlüssel zum Können

Die genetische Grundausstattung, die unsere Gehirnfunktion steuert, hat sich, nach allem, was wir bisher wissen, in den letzten Jahrtausenden nicht wesentlich verändert, die Welt, in der wir leben hingegen schon. Obwohl Menschen Jahrtausende brauchten, um Schrift zu entwickeln, können die meisten Kinder wenige Monate nach der Einschulung lesen. Auch wenn das arabische Zahlensystem erst vor 1200 Jahren entwickelt wurde, können die meisten Grundschulkinder dividieren und verstehen, dass die Null eine Zahl ist. Ein heute fünf Jahre altes Kind, das mit einem Gehirn ausgestattet ist wie ein in der Steinzeit geborenes Kind vor 5.000 Jahren, kann einen Computer bedienen und mit diesem lernen.

Obwohl wir Menschen ein enormes Lernpotential haben, befassen wir uns vor allem mit dem Lernen, weil wir unzufrieden mit unserer Lernleistung sind. Warum ist es so mühsam, eine Fremdsprache zu lernen? Warum sitzen Schüler über Jahre im Physik- und Mathematikunterricht ohne das Wesentliche verstanden zu haben? Lernen dient der besseren Anpassung an die Umwelt und ist deshalb immer in Interaktion mit der Umwelt zu sehen. Die im lernenden Subjekt ausgelösten Veränderungen lassen sich auf neurobiologischer und auf psychologischer Ebene beschreiben. Auf neurobiologischer Ebene verändern sich chemisch-physikalische Verbindungen zwischen den Synapsen, und auf psychologischer Ebene verändert sich das Wissen. Auf welcher Ebene Lernen beschrieben wird, hängt von der Fragestellung ab. Möchte man erklären, warum es so schwer ist, eine Fremdsprache zu lernen oder Mathematik zu verstehen, ist es wenig erhellend, wenn man dies darauf zurückführt, dass sich die zuständigen Synapsen nicht verbinden. Aus einer derartigen Erklärung lassen sich keine Hinweise für die Gestaltung von Lerngelegenheiten ableiten. Wissenspsychologische Begriffe wie Automatisierung oder Konzeptwechsel hingegen geben Aufschluss über mögliche Ursachen der genannten Lernschwierigkeiten und deren Bewältigung. Möchte man hingegen erklären, warum ein an Alzheimer erkrankter Mensch nichts dazulernt, lässt sich das mit der auf neurobiologischer Ebene zu beschreibenden Zerstörung seines Gehirns erklären.

Im Mittelpunkt dieses Artikels steht die Frage, wie Menschen das im kulturellen Kontext entstandene Wissen erwerben können: Welche kognitiven Mechanismen müssen angenommen werden und welche institutionelle Unterstützung ist erforderlich?

1. Wie wird Wissen intelligent?

Der Begriff des Wissens hat manchmal einen negativen Beigeschmack. Wissen ansammeln ist etwas für weniger intelligente Menschen, während intelligente Menschen sich auch ohne dies behelfen können. In den letzten Jahrzehnten hat sich die Auffassung gefestigt, dass es intelligente Schüler nicht nötig haben, für die Schule zu lernen, was sich denn auch über Jahre hin zu bestätigen schien. Erst der Globalisierungsschock namens PISA förderte zutage, dass Deutschland, was Spitzenleistungen insbesondere in der Mathematik und den Naturwissenschaften angeht, nicht auf die Herausforderungen der Zukunft vorbereitet ist. Es wurde ja bereits hervorgehoben, dass der Schule die Aufgabe zukommt, Wissen weiterzugeben und zu erhalten, welches unter großen Mühen von teilweise genialen Geistern entwickelt wurde. Neuere Ergebnisse der Kognitionsforschung zeigen die Bedeutung des Wissens für das Können. Zwei Forschungsrichtungen betonen dies.

1. *Expertiseforschung*: In der Tradition der Expertiseforschung werden Menschen erforscht, die in einem anspruchsvollen und komplexen Gebiet Höchstleistungen erbringen. Schach, Mathematik, Musik und Naturwissenschaften sind gut erforschte Gebiete. Es zeigte sich, dass sich Menschen, die Höchstleitungen erbringen, von so genannten Novizen nicht durch ihre Intelligenz, sondern durch ihr Wissen unterscheiden. Systematische biographische Forschungen haben gezeigt, dass Experten lange Jahre hindurch sehr intensiv auf ihrem Gebiet geübt haben. Natürlich sind Experten in vielen Bereichen auch überdurchschnittlich intelligent. Ein unterdurchschnittlich intelligenter Physik- oder Mathematikprofessor ist schwer denkbar. Aber während fehlendes Wissen nicht kompensierbar ist, können mögliche Defizite bei Intelligenz und speziellen Begabungen durch besonders intensives Üben auf weiten Strecken ausgeglichen werden (Neubauer & Stern, 2007).

2. *Vorhersage von Leistungsunterschieden*: Warum unterscheiden sich am Ende eines Schuljahrs die Schüler einer Klasse in ihren Leistungen auf Gebieten, welche im Unterricht ausführlich behandelt wurden? Eine einfache Erklärung wäre, dass manche Schüler aufgrund ihrer Persönlichkeit, die sich in Merkmalen wie Intelligenz, Motivation oder Anpassung ausdrücken kann, mehr vom Unterricht mitbekommen haben als andere. Tatsächlich liegt die Sache noch einfacher: Kinder, die unabhängig von ihrer Intelligenz schon zu Beginn des Schuljahres Wissen mitbrachten, haben die besten Chancen, etwas dazu zu lernen. Unterschiede des Vorwissens z.B. in der Ma-

thematik treten schon sehr früh auf. Manche Kinder können rechnen, lange bevor sie in die Schule kommen, und sich diesen Vorsprung oft auch erhalten. Dies zeigen Längsschnittstudien wie z.B. LOGIK und SCHOLASTIK. An mehreren hundert Münchener Schülern wurden über einen Zeitraum von 15 Jahren regelmäßig Leistungsmessungen in Mathematik, Lesen und Schreiben sowie naturwissenschaftlichem Verständnis vorgenommen. Gleichzeitig wurden auch Intelligenz und andere Persönlichkeitsmerkmale mehrfach erfasst. In ganz unterschiedlichen Analysen zeigte sich immer wieder das gleiche Ergebnis: Sobald bereichsspezifisches Wissen in die Analyse aufgenommen wurde, verloren Persönlichkeitsunterschiede an Vorhersagekraft. Ein Ergebnis war besonders beeindruckend: Unterschiede der Mathematikleistung bei Gymnasiasten in der 11. Klasse ließen sich besonders gut durch Unterschiede der Mathematikleistung in der zweiten Klasse erklären. Es war sogar so, dass nur Kinder, die bereits in der 2. Klasse ein fortgeschrittenes Verständnis von Zahlen hatten – später wird noch näher darauf eingegangen, was darunter zu verstehen ist –, in der 11. Klasse noch sehr gute Leistungen erbringen konnten. Verglich man den Einfluss von Vorwissen und Intelligenz, so zeigt sich – wie nicht anders zu erwarten –, dass intelligentere Kinder im Allgemeinen auch über mehr Wissen verfügen. Wer es jedoch nicht geschafft hat, seine Intelligenz in Wissen umzusetzen, der hat in dem entsprechenden Fachgebiet weniger Chancen als jemand, der bei schlechteren Ausgangsbedingungen mit vielleicht etwas größerer Anstrengung Wissen erworben hat (Stern, 2003, 2008).

Im Folgenden werden drei Mechanismen erörtert, welche dem menschlichen Geist für den Aufbau einer brauchbaren Wissensbasis zur Verfügung stehen.

2. Lernen als Chunking: Das Bündeln von Information zu größeren Einheiten

Wer die Zahlen 91119893101990 hört, wird sich diese kaum merken können. Im Allgemeinen kann sich der Mensch nur sieben bis neun Einheiten merken. Wenn ich aber sage, dass es sich bei den Zahlen um zwei wichtige Daten der jüngsten deutschen Geschichte handelt, nämlich den Tag der Mauerfalls und den Tag der Wiedervereinigung, kann man die Zahlenreihe wahrscheinlich problemlos reproduzieren: 9.11.1989 3.10.1990. Unsere Gedächtniskapazität, also die Fähigkeit, eine bestimmte Menge an Information in einer bestimmten Zeit aufzunehmen, ist grundsätzlich begrenzt. Diese Fähigkeit ist jedoch keine starre, naturgegebene Größe, sondern hängt wesentlich davon ab, ob wir über bereichsspezifisches Wissen verfügen und ob dieses Wissen in einer Weise organisiert ist, die es uns ermöglicht, Informationen zu bündeln. Die Bildung von Einheiten (der wissenschaftliche Fachausdruck für diese kognitive Leistung ist „chunking“) versetzt uns nämlich in die Lage, Informationen zu komprimieren und so die Gedächtniskapazität zu vergrößern. Diese Abhängigkeit unserer Gedächtniskapazität von der Wissensorganisation lässt sich an folgendem Beispiel gut veranschaulichen: Werden wir mit der Anforderung konfrontiert, eine Buchstabenreihe wie „lsiftgvsazbtdk“, die uns für kurze Zeit präsentiert wurde, exakt wiederzugehen, so werden die meisten von uns scheitern. Hingegen werden die meisten Leser die Buchstabenreihe „hamburgberlinfrankfurtmünchenvenedigflorenzrom“ auch nach Stunden noch reproduzieren können, selbst wenn sie nur wenige Sekunden dargeboten wurde. Denn spätestens, nachdem „Hamburg“ erkannt wurde, wird im Gedächtnis die Kategorie „Städtenamen“ aktiviert. Die einzige Herausforderung besteht nun lediglich noch darin, sich die Reihenfolge der Städte zu merken. Dabei reichen durchschnittliche Geographiekenntnisse aus um zu bemerken, dass wichtige deutsche und italienische Städte in Nord-Süd-Richtung aufgeführt werden. All dieses Wissen wurde aktiviert, ohne dass der Aufgabenstellung selbst ein Hinweis darauf zu entnehmen war. Während sich niemand auf Anhieb die 14 zufällig angeordneten Buchstaben merken kann, weil sich in diesem Fall nicht auf Wissen zurückgreifen lässt, das die Bündelung einzelner Buchstaben zu größeren Einheiten erlaubt, kann man sich die 46 Buchstaben durchaus merken, weil man sie zunächst zu sieben Städtenamen-Einheiten zusammenfasst, für die es bereits Gedächtniseinträge gibt. Weitere Gedächtniseinträge über die geographische Lage der einzelnen Städte erlauben eine zusätzliche Verdichtung der Information.

Im Alltag spricht man zwar häufig von gutem oder schlechtem Gedächtnis wie von einer Persönlichkeitseigenschaft - der eine hat es, der andere eben nicht. Tatsächlich zeigen sich aber Einschränkungen in der generellen Gedächtnisleistung nur als Folge von kortikalen Störungen. Ansonsten hängt es vor allem von der zur Verfügung stehenden Wissensrepräsentation ab, in welchem Umfang man sich Informationen merken kann.

Die Abhängigkeit der Merkfähigkeit von der bereichsspezifischen Wissensstruktur wurde auch mit dem folgenden, inzwischen klassisch gewordenen Experiment der kognitiven Psychologie eindrucksvoll nachgewiesen: Man zeigte Schachexperten und Schachnovizen (also nicht Laien, sondern Personen, die das Schachspiel beherrschen, wenn auch nicht auf professionellem Niveau) für eine begrenzte Zeit Bilder mit Schachbrettern und Schachfiguren. Die Versuchsteilnehmer hatten die Aufgabe, die Schachstellungen zu reproduzieren. Handelte es sich dabei um Schachstellungen, die sich aus einem sinnvollen Spielverlauf ergeben, zeigten die Experten eine sehr viel bessere Gedächtnisleistung als die Novizen. Kein Unterschied hingegen trat auf, wenn die Schachfiguren auf dem Brett zufällig angeordnet waren. Man geht davon aus, dass Schachexperten Tausende von Schachstellungen als Einheiten gespeichert haben. Dieses Wissen, das es ihnen erlaubt, über mehrere Züge hinweg die möglichen Konsequenzen bestimmter Züge abzuschätzen, erleichtert ihnen die Gedächtnisaufgabe unter der Bedingung eines sinnvollen Spielverlaufs (neuere Arbeit: Grabner et al., 2007).

Auch die Strategien von Gedächtniskünstlern, die sich bis zu 80 Ziffern merken können (und nicht nur 7, wie die meisten von uns), sprechen für die Bedeutung der Wissensorganisation für die Gedächtniskapazität. Sie erweitern ihre Merkfähigkeit nämlich dadurch, dass sie sich ein zahlenintensives Wissensgebiet wie zum Beispiel Geschichtszahlen, Sportdaten oder Telefonnummern auswählen und es systematisch derart organisieren, dass sie jede längere Zahlenkombination auf ein Ereignis abbilden können.

3. Lernen als Automatisierung: Perfektion auf Kosten der Flexibilität

Erinnern wir uns daran, wie wir Autofahren gelernt haben: Kupplung treten, Gang raus, Fuß auf das Gas, Schlüssel umdrehen, Fuß auf die Kupplung, Gang rein. Führt man diese Schritte nicht in der angegebenen Reihenfolge durch, besteht die Gefahr, dass das Auto absäuft bzw. gegen die Mauer springt. Ein geübter Autofahrer führt diese Schritte in Sekundenschnelle aus und kann seine Aufmerksamkeit problemlos auf etwas anderes – z.B. das Gespräch mit dem Beifahrer – lenken. Der Anfänger hingegen muss sich nach jedem ausgeführten Schritt selbst sagen, was als nächstes kommt, und wenn er abgelenkt wird, treten die genannten Ereignisse ein. Dass wir in Sekundenschnelle das Wort Mississippidampfschifffahrtsgesellschaftskapitän lesen können, verdanken wir der hochgradigen Automatisierung des Erkennens von Buchstaben sowie dem Wissen darüber, welche Buchstabengruppen – jedenfalls in einer uns gut bekannten Sprache – welchen Silben zugeordnet sind. Ein im Lesen ungeübter Mensch hingegen muss jeden Buchstaben in einen Laut übertragen und daraus mühsam ein Wort konstruieren. Es wird Arbeitsspeicherkapazität gebunden, die für das Sinnverständnis verloren geht. Bei manchen Schülern ist der Leseprozess ist so wenig automatisiert, dass die gesamte Aufmerksamkeit absorbiert wird, so dass das Stiften von Sinnzusammenhängen nicht möglich ist. Automatisierung wird in allen Bereichen gefordert. Das Beherrschen des 1x1 gehört ebenso dazu wie das Erkennen von Schaubildern oder das Vokabellernen in der Fremdsprache. Automatisierung ist die Folge von Übung in Teilschritten. Ein kapitaler Fehler ist es Üben gering zu schätzen. Automatisiertes Wissen ist die Voraussetzung für das Verstehen komplexer Zusammenhänge und abstrakter Begriffe, da man für den Aufbau solcher Wissensstrukturen Kapazitäten braucht. Wenn ich die binomischen Formeln nicht nur rekonstruieren kann, sondern sie auch auswendig weiß, kann dies beim Auflösen einer komplexen Gleichung hilfreich sein, weil ich auf einen Blick erkenne, wo ich etwas vereinfachen kann. Wer Vokabeln einer Fremdsprache gelernt hat, kann sich bei der Konstruktion eines Satzes auf die Grammatikregeln konzentrieren. Dass die Expertise von mathematisch kompetenten Personen auch in der Automatisierung von Rechenprozeduren konnten Grabner et al. (2007) mit Hilfe neuropsychologischer Studien zeigen.

Einmal automatisiertes Wissen ist nur noch schwer veränderbar und das kann natürlich zu Nachteilen in neuen Situationen führen. Wenn wir von einem Computer mit US-Tastatur E-Mails versenden, werden sich wegen unterschiedlicher Anordnungen der Buchstaben sehr typische Tippfehler zeigen.

4. Lernen als Verstehen: Der Erwerb und die Umstrukturierung von Begriffen

Den Kern unseres bewusst zugänglichen und kommunizierbaren Wissens bilden Begriffe. Wir nennen Wörter wie Peter, Hund, Säugetier, Teufel, Gerechtigkeit, Gewitter oder Relativitätstheorie und erwarten, dass unser Kommunikationspartner versteht, auf welchen Ausschnitt der Welt wir uns beziehen. Begriffswissen entsteht durch die Verbindung zu anderen Begriffen. Dies können Eigenschaften sein, wie z.B. „Ball“ und „rund“, oder aber Begriffe auf der gleichen Ebene wie „Ball“ und „Teddybär“, die zusammen die Grundlage für Oberbegriffe wie „Spielzeug“ bilden können. Aus der Verbindung zwischen Begriffen entstehen Netzwerke, die unterschiedlich umfangreich und unterschiedlich strukturiert sein können. Der passionierte Hundebesitzer wird bei dem Begriff „Hund“ sofort Namen und visuelle Vorstellung seines Hundes aktivieren, der Biologe hingegen einen übergeordneten Begriff wie „domestiziertes Säugetier“. Ein entscheidender Grund für suboptimale Kommunikation zwischen Menschen, insbesondere die zwischen Lehrern und Schülern, besteht darin, dass die gleichen Begriffe verwendet werden, dass aber die Netzwerke, in die sie eingebettet sind, sehr unterschiedlich sind. So ist das Begriffswissen von Kindern zunächst von charakteristischen Oberflächenmerkmalen und nicht von theoriegeleiteten, definitorischen Merkmalen bestimmt, weil sie sich bei der Bildung von Begriffen in erster Linie von ihren Wahrnehmungen leiten lassen. Jüngere Grundschulkinder bejahen zum Beispiel die Frage, ob ein Haufen Reis etwas wiege, verneinen aber die Frage, ob ein einzelnes Reiskorn etwas wiege. Diese zunächst unverständliche Antwort wird nachvollziehbar, wenn man berücksichtigt, dass jüngere Kinder „Gewicht“ und „sich schwer anfühlen“ noch miteinander gleichsetzen. Auch dass der Wal ein Säugetier und kein Fisch ist, ist für Kinder schwer zu verstehen, weil sie Tiere zunächst nach ihrem Lebensraum einteilen. Dass die Art der Fortpflanzung – die man im Allgemeinen nicht zu sehen bekommt – ein sinnvolles Kriterium bei der Klassifikation von Tieren sein kann, versteht man erst im Zusammenhang mit zusätzlichem und tiefer gehendem biologischen Wissen. Erst wenn ein Verständnis für den theoretischen Hintergrund vorliegt, der die Unterteilung in Säugetiere und Fische notwendig macht, werden nicht mehr charakteristische (lebt im Wasser, hat Flossen), sondern definitorische (Nachwuchs wird lebend geboren und mit Muttermilch ernährt) Merkmale zur Unterscheidung herangezogen (Carey, 2000).

Auch bei Erwachsenen zeigen sich ähnliche Diskrepanzen. So ist im Alltagsverständnis vieler Menschen eine Maschine etwas, was sich bewegt, Krach macht und Energie verbraucht. Physiker und Ingenieure hingegen verstehen darunter eine Vorrichtung, welche die vorhandene Kraft möglichst zweckmäßig zur Verrichtung von Arbeit einsetzt. Für sie sind Schnürsenkel und Schrauben ebenso Maschinen wie der Porschemotor eine ist. Erst ein solches abstraktes, auf theorie- und funktionsgeleiteten Merkmalen beruhendes Konzeptverständnis – eben intelligentes Wissen – bietet den Nährboden für kreative und innovative Denkprozesse in naturwissenschaftlichen und technischen Bereichen.

Lernen als Konzeptwechsel gehört zu den anspruchvollsten geistigen Tätigkeiten und erfordert professionelle, institutionalisierte Lerngelegenheiten. Wenn in Mathematik und in den Naturwissenschaften auch sehr intelligente Schüler schlechte Leistungen erbringen, führen Unterrichtsforscher darauf zurück, dass nicht ausreichend am Konzeptwechsel gearbeitet wird. Wer einen Strudel im Fluss oder abfließendes Wasser in der Badewanne beobachtet hat, kann sich durchaus vorstellen, dass das Wasser saugt. Wenn in Wasser eingetauchte Gegenstände untergehen, wird dies konsequenterweise damit erklärt, dass das Wasser sie nach unten saugt. Wer gesehen hat, wie der Wind – von Kindern mit Luft gleichgesetzt – Gegenstände aufwirbelt, wird die Tatsache, dass manche Gegenstände nicht im Wasser untergehen, damit erklären, dass die Luft sie nach oben zieht. Eine Erklärung dafür, dass vom Physikunterricht so wenig hängen bleibt, ist die, dass sich die Schüler bereits lange, bevor das Fach in der Schule gelehrt wurde, so viele Gedanken über Begriffe wie Energie, Arbeit oder Geschwindigkeit gemacht haben, dass für die Feinheiten, die der Physiklehrer zu vermitteln versucht, in ihrem Wissensnetz kein Platz mehr ist (Hardy et al., 2005).

Die Grundlagen für einen Aufbau adäquaten konzeptuellen Wissens sollten bereits in der Grundschule gelegt werden, indem die Lehrer verständnis-orientierten Unterricht forcieren. In Mathematik bedeutet dies vor allem, Kinder mit Aufgaben zu konfrontieren, in denen Zahlen nicht einfach als Zählinstrumente genutzt werden, sondern die Beziehungen zwischen Mengen beschreiben, wir z.B. in Aufgaben zum quantitativen Vergleich (Staub & Stern, 2002, Stern, 2008).

Literatur

Carey, S. (2000). Science education as conceptual change. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *21*(1), 13-19.

Grabner, R. H., Ansari, D., Reishofer, G., Stern, E., Ebner, F. & Neuper. C. (2007). Individual differences in mathematical competence predict parietal brain activation during mental calculation. NeuroImage, 38, 346-356.

Grabner, R., Stern, E. & Neubauer. A. (2007). Individual differences in chess expertise: A psychometric investigation. Acta Psychologica.

Hardy, I., Schneider, M., Jonen, A., Möller, K., & Stern, E. (2005). Fostering diagrammatic reasoning in science education. *Swiss Journal of Psychology*, 64, 207-217.

Neubauer, A. & Stern, E. (2007). Lernen macht intelligent. Warum Begabung gefördert werden muss. München: DVA.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary ma-thematics. *Journal of Educational Psychology, 93*, 144-155.

Stern, E. (2003). Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen. In W. Schneider & M. Knopf (Eds.), *Entwicklung, Lehren und Lernen - Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert* (pp. 207-217). Göttingen: Hogrefe.

Stern, E. (2008). Verpasste Chancen? Was wir aus der LOGIK Studie über den Mathematikunterricht lernen können. In W. Schneider (Ed.) Entwicklung von der Kindheit bis zum Erwachsenenalter: Befunde der Münchner Längsschnittstudie LOGIK. Weinheim: Beltz

Christoph ABLEITINGER, Wien

Moderierte Sektion: Biomathematik als gewinnbringendes Thema im Schulunterricht der Sekundarstufe

Biomathematik ist als Thema im Schulunterricht und in der mathematikdidaktischen Literatur an der einen oder anderen Stelle präsent. Man denke etwa an Wachstumsmodelle (linear, exponentiell, logistisch), an Räuber-Beute-Systeme, an einfache Epidemiemodelle oder an die Mendelschen Gesetze. Sie bietet aber auch darüber hinaus vielfältige Anwendungsmöglichkeiten, die in den folgenden vier Beiträgen spezifiziert werden.

Christoph Ableitinger: Nachdem im Unterricht der 7. Schulstufe diskrete Wachstumsmodelle – wie etwa das exponentielle Wachstum im Kontext der Zinseszinsrechnung – behandelt wurden, ist der Weg zu einfachen biomathematischen Modellen nicht mehr weit. Das dabei neu erworbene Werkzeug rekursiv definierter Folgen kann dazu verwendet werden, biologische Phänomene aus der Demographie, der Epidemiologie, der Populationsgenetik oder – wie im Beitrag anhand des „Allee-Effekts" gezeigt – der mathematischen Ökologie zu modellieren. Aus didaktischer Sicht ergeben sich Chancen hinsichtlich des Systemdenkens, der haptischen wie auch verstandesmäßigen Erfassung von Rekursionen mit Hilfe von Tabellenkalkulationen, des Arbeitens in und des Vernetzens von unterschiedlichen Darstellungsformen derselben sowie des Modellierens realer Situationen und der damit verbundenen möglichen Motivationssteigerung.

Anne Schüller: Das physiologische und neurobiologische Thema Tiefensehen kann unter verschiedenen mathematischen Aspekten und mit verschiedenen mathematischen Werkzeugen Schülern unterschiedlicher Jahrgangsstufen näher gebracht werden. Nach einer kurzen Darstellung der biologischen Grundlagen werden Möglichkeiten vorgestellt, binokulares Tiefensehen im Unterricht zu behandeln: In der Sekundarstufe I können vor allem geometrische Aspekte sowohl anhand von elementargeometrischen Formeln als auch konstruktiv mit Hilfe des dynamischen Geometrieprogramms Geonext betrachtet werden. Einsatzgebiete für die Sekundarstufe II sind die mathematische Auswertung und Analyse von Daten, die Schüler eigenständig in computergestützten Experimenten erheben können.

Christina Roeckerath: Ausgewählte Themen aktueller Forschung können bei sorgfältiger Aufarbeitung interessantes Unterrichtsmaterial bieten. Im Beitrag wird eine für den Schulunterricht entwickelte Software zur Simulation zweier interagierender Spezies vorgestellt. Sie basiert auf einem modernen aber dennoch für Schüler verständlichen Modell der theoretischen Biologie und ermöglicht ihnen, selbständig Modellgleichungen zur Beschreibung der Populationsentwicklungen herzuleiten. Es wird über einen Mathematik-Workshop berichtet, in dem Oberstufenschüler erfolgreich mit der Software gearbeitet haben.

Simone Göttlich: Populationsmodelle sind in der Mathematik weit verbreitet. Aufbauend auf einer aktuellen Studie zur Fortpflanzung der zweigepunkteten Marienkäfer-Spezies wird gezeigt, wie Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II sukzessive ein entsprechendes zeitdiskretes Räuber-Beute-Modell hergeleitet haben. Derart komplexe Aufgabenstellungen erfordern neben einer ausführlichen Literatur-Recherche auch interdisziplinäres Wissen und sind deswegen entweder als Studienarbeit oder im Rahmen einer Projektwoche geeignet.

Christoph ABLEITINGER, Wien

Biomathematische Modelle ganz diskret

Biomathematik hat sich als Teilgebiet der Mathematik und als wichtiges angewandtes Forschungsfeld längst etabliert. Sie versucht, durch die Modellierung biologischer Systeme, diese besser zu verstehen, Phänomene der belebten Natur zu erklären und Prognosen über zukünftige Verläufe zu gewinnen. Große Erfolge hat die Biomathematik bis dato in der Demographie, der Epidemiologie, der mathematischen Ökologie und nicht zuletzt in der Populationsgenetik feiern können.

Wie schnell breiten sich Seuchen aus und wie kann man sie eindämmen? Warum können Krankheiten vererbt werden und wie groß ist das Risiko, dass das Kind kranker Eltern ebenfalls krank wird? Wer soll später unsere Pensionen zahlen, wenn sich die Altersstruktur in unserer Gesellschaft weiter in Richtung Überalterung verändert? Gerade die Lebensnähe dieser oder ähnlicher Fragen könnte doch auch für Schülerinnen und Schüler interessant sein. Das wichtigste Werkzeug in der Biomathematik sind (Systeme von) Differentialgleichungen. Ein Knock-Out-Kriterium, Biomathematik auch schon im Schulunterricht zu behandeln?

1. Diskrete Modelle als Brücke zur Schulmathematik

Die Antwort müsste wohl „Ja" lauten, wenn an eine Bearbeitung ausschließlich mittels Differentialgleichungen gedacht wird. Übersetzt man jedoch die kontinuierlichen Modelle in diskrete, also in (Systeme von) Differenzengleichungen, ist eine Bearbeitung sogar schon in der Sekundarstufe I möglich.

Schülerinnen und Schüler kommen erstmals in Klassenstufe 7 mit Differenzengleichungen in Berührung, nämlich bei der Zinseszinsrechnung. Die dort verwendete Rekursion ist jene des exponentiellen Wachstums $N_{t+1} = N_t + r \cdot N_t$, das auch zur Beschreibung der Entwicklung von Bevölkerungsgrößen (zumindest in der Anfangsphase) verwendet werden kann. Sind Rekursionen erst einmal im Unterricht behandelt worden, ist der Weg zu interessanteren und realistischeren Modellen als dem exponentiellen Modell nicht mehr weit. Beispielsweise ist für die Beschreibung des Wachstums einer Bevölkerung das logistische Wachstumsmodell $N_{t+1} = N_t + r \cdot N_t \cdot (K - N_t)$ meist viel besser geeignet. Im Unterricht kann und soll der Fokus gerade auf das Finden geeigneter Rekursionen, also auf das Modellieren gegebener Sachverhalte, Situationen und Beziehungen, und auf die korrekte Interpretation der darin vorkommenden Terme gelegt werden. Das hohe Rechenpensum, das bei der Berechnung einzelner Folgenglieder auftaucht, kann nämlich ohnedies der Computer übernehmen. Und welches Werkzeug bietet sich zur Simulation von Differenzengleichungen besser an, als die Tabellenkalkulation? Auf das didaktische Potenzial dieser Software gehen wir in Abschnitt 3 genauer ein, zunächst betrachten wir ein Beispiel eines biomathematischen Modells.

2. Das Aussterben von Tierpopulationen

Eine zu große Bevölkerungsdichte in einem bestimmten Gebiet ist oftmals kontraproduktiv für das Wachstum einer Tierpopulation. Zu viel Konkurrenz um vorhandene Nahrungsquellen und Brutstätten führt dazu, dass das Wachstum der Population gebremst wird und die Anzahl der Individuen eine bestimmte Kapazitätsgrenze K in diesem Gebiet nicht dauerhaft überschreiten kann. Dieser Sachverhalt wird durch das logistische Modell beschrieben.

Aber auch eine zu geringe Bevölkerungsdichte kann zum Problem für Tierpopulationen werden. Beispielsweise hat man beim Afrikanischen Wildhund beobachtet, dass die Bevölkerungsdichte in manchen Teilen Afrikas schon jetzt zu gering ist, um dauerhaftes Überleben der Gattung sichern zu können. Der Afrikanische Wildhund ist ein Rudeltier, das in Gruppen auf Jagd geht. Haben einzelne Individuen Schwierigkeiten dabei, Jagdpartner zu finden, so verläuft das Ergattern von Beute oftmals erfolglos, was sich natürlich negativ auf ihre Reproduktionsrate niederschlägt.

Auch bei Pflanzen tritt dieser Effekt auf: Je niedriger beispielsweise die Dichte des Deutschen Enzian in einem Gebiet ist, desto kleiner ist die Anzahl der Samen pro Pflanze.

In der Literatur wird dieses Phänomen nach dem amerikanischen Ökologen Warder Clyde Allee als „Allee-Effekt" bezeichnet. Vereinfacht könnte man sagen, dass eine Population auf lange Zeit gesehen zum Aussterben verdammt ist, wenn ihre Bevölkerungszahl erst einmal unter einen bestimmten Schwellwert gesunken ist.

Diese Beschreibung des Allee-Effekts kann nun als Grundlage für Modellierungstätigkeiten im Schulunterricht herangezogen werden. Ausgehend vom exponentiellen bzw. logistischen Wachstumsmodell können Schülerinnnen und Schüler selbst passende Rekursionsformeln aufstellen, in Tabellenkalkulationen experimentieren, verschiedene Modelle vergleichen und Prognosen abgeben.

Ein (zugegebenermaßen bereits relativ elaboriertes) Modell zur Beschreibung des Allee-Effekts könnte etwa so aussehen: $N_{t+1} = N_t - a \cdot N_t + b \cdot N_t^2 - c \cdot N_t^3$ wobei $a, b, c > 0$. Klarerweise muss so ein

Modell im Schulunterricht motiviert oder besser noch schrittweise aufgebaut und inhaltlich interpretiert werden. Ein didaktisches Konzept dazu findet man in Ableitinger 2008/1, S. 56-63. Wählt man in diesem Modell $a = 0{,}25$, $b = 0{,}0052$ und $c = 0{,}000025$ und lässt man eine Tabellenkalkulation die ersten 60 Zeitschritte berechnen, so erhält man je nach Startwert N_0 unterschiedliche Verläufe der Bevölkerungsentwicklung wie in Abbildung 1. Hier liegt die Kapazitätsgrenze K bei etwa 130, der Schwellwert T bei etwa 75 Individuen. Startet man oberhalb von K, so nimmt die Bevölkerung bis zur Kapazitätsgrenze ab, liegt N_0 zwischen T und K, so wächst die Bevölkerung bis zur Kapazitätsgrenze und sind zu Beginn schon weniger als T Individuen vorhanden, so tritt der Allee-Effekt ein und die Bevölkerung stirbt langfristig aus.

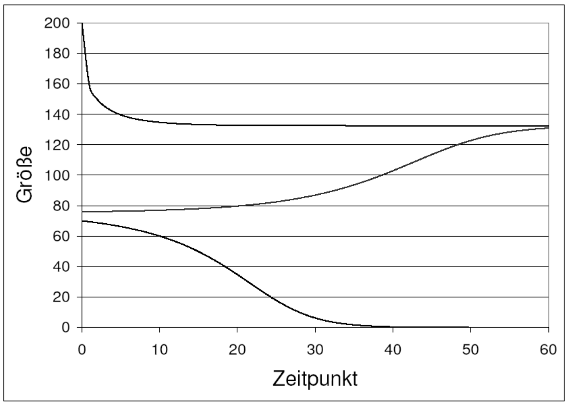


Abbildung1

3. Didaktische Analyse

Tabellenkalkulation: Ohne die Möglichkeiten von Tabellenkalkulationen ist die Bearbeitung diskreter biomathematischer Modelle im Mathematikunterricht der Sek II nur bedingt sinnvoll. Erst durch sie wird der große Rechenaufwand leicht bezwingbar. Ein großer Vorteil gegenüber anderen Softwareprodukten ist zweifellos die einfache Syntax, die den Lernenden meist ohnehin schon vertraut ist. Aus didaktischer Sicht ist „das Bezugnehmen auf die Zelle darüber“ und das haptische „Hinunterziehen von Formeln“ von großer Bedeutung für das Durchschauen und Begreifen von Rekursionen. Im Sinne des operativen Prinzips kann durch Parametervariation (beispielsweise durch Schieberegler) das Objekt „Rekursion“ beweglich gemacht werden.

Iteration: „Eine Iteration ist ein spezieller Algorithmus, bei dem wiederholt „dasselbe getan“ wird“, formulieren Humenberger und Reichel salopp (Humenberger und Reichel 1995, S. 200). Sie ist damit sozusagen eine alltagsnahe Tätigkeit, denn es gibt viele Dinge in unserem Leben, die wir immer und immer wiederholen. Iteration ist aber auch eine der fundamentalen Ideen der Mathematik. Sie kommt in den Curricula der Schulmathematik implizit an vielen Stellen und auf unterschiedlichen Niveaus vor, so etwa bei der Zinseszinsrechnung, bei Wachstumsprozessen, bei der rekursiven Darstellung von linearen Funktionen, beim Thema Folgen und Grenzwerte, bei iterativen Näherungsverfahren und schließlich bei Differenzengleichungen. Die Biomathematik bietet sich hier als möglicher Kontext und somit als Begleiter dieser Idee an.

Systemdenken: Menschen denken häufig in einfachen Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen. Im Sinne der Allgemeinbildung unserer Schülerinnen und Schüler ist es jedoch notwendig, den System- und Netzcharakter realer Situationen und Zusammenhänge auch im Mathematikunterricht miteinzubeziehen. Hier bieten sich Systeme von Differenzengleichungen, wie etwa bei Räuber-Beute-Modellen oder bei einfachen Epidemiemodellen (siehe etwa Ableitinger 2008/2) für ein Kennenlernen bzw. einen ersten Einstieg in eine authentische Arbeit mit komplexen Systemen an. Schon bei solch elementaren Modellen treten Rückkopplungseffekte oder chaotische Phänomene auf, die mit oben erwähntem Ursache-Wirkungs-Denken nicht erklärt werden können. Daraus ergibt sich die Hoffnung, dass die Systemhaftigkeit akuteller Themen wie der Flüchtlingsproblematik, der Umwelt- und Wirtschaftspolitik, der Ausbreitung globaler Epidemien, uvm. von den Lernenden erkannt und zumindest ansatzweise erfasst werden.

Darstellungsformen: Unterschiedliche Darstellungformen sind oftmals Quellen für das Entdecken von Eigenschaften und erweitern den Blick auf den zugrundeliegenden Begriff. Für Rekursionen gibt es eine ganze Reihe von Darstellungsformen, zu nennen sind etwa schematische Darstellungen, die Rekursionsformel, die Tabelle und Zeit- bzw. Phasendiagramme. All diese Darstellungsformen sind in Tabellenkalkulationen präsent, ein Hin- und Herschalten ist ohne großen Aufwand per Mausklick möglich, was den Übersetzungsprozess auch in den Köpfen der Lernenden fördert.

Fächerübergreifend und anwendungsorientiert: Dass realitätsbezogener Mathematikunterricht die Motivation der Lernenden fördern kann, ist vielfach belegt. Biomathematik ist selbstverständlich aus Anwendungen heraus entstanden und zeigt eine Reihe von Anknüpfungspunkten zu aktuellen Themen. Fächerübergreifender Unterricht mit Biologie kann z. B. hinsichtlich der Fachtermini wertvolle Synergien nutzen.

Literatur

Ableitinger, Ch. (2008/1). *Diskrete biomathematische Modelle im Schulunterricht – Chancen aus der Sicht der Mathematikdidaktik*. Dissertation, Universität Wien.

Ableitinger, Ch. (2008/2). Ausbreitung von Epidemien. *Internationale Mathematische Nachrichten, Nr. 209*, S. 29 - 39.

Humenberger, H., Reichel, H.-Ch. (1995). *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.

Anne SCHÜLLER, Aachen

Visuelle Wahrnehmung: Computergestützte Experimente, mathematische Modelle und Simulationen

Mathematische Modellierung bekommt in der Schule einen immer höheren Stellenwert. Allerdings gibt es dazu wenig authentisches und anwendungsbezogenes Material.
Ziel dieser Arbeit ist es, das Thema „Visuelle Wahrnehmung“ so aufzubereiten, dass authentisches Unterrichtsmaterial mit konkretem Anwendungsbezug entsteht, welches sowohl fächer- als auch jahrgangsübergreifend ist. Weiterhin sollen auch Computerprogramme zur Modellierung mit einbezogen werden, um zum einen den Lerneffekt zu erhöhen und zum anderen das Interesse der Schüler zu wecken und aufrecht zu erhalten.

1. Modellierung des Sehvorgangs

Bereits in der Jahrgangsstufe 5/6 lernen die Schüler im Biologieunterricht den Aufbau und die Funktionsweise des Auges kennen. Stark vereinfacht kann dieser wie in Abbildung 1 dargestellt werden. Das Auge wird als Kreis aufgefasst. Die Funktion der Linse wird durch den Knotenpunkt K übernommen. Am hinteren Teil des Auges befindet sich die Netzhaut. Bei der Tiefenwahrnehmung ist vor allem die Netzhautstelle, auf die die Sehstrahlen eines Punktes treffen von besonderem Interesse. Diese Stelle erhält man durch die Verbindungsgerade des Punktes mit dem Knotenpunkt.

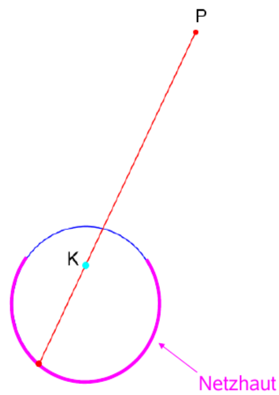


Abbildung 1

2. Tiefenwahrnehmung

Tiefenwahrnehmung beruht auf mehreren Faktoren. Es gibt Tiefenhinweise, die man bereits mit einem Auge wahrnehmen kann, wie zum Beispiel die Größe von Objekten. Diese Hinweise beruhen allerdings auf Erfahrung und sind daher nicht messbar. Viel intensiver und vor allem auch messbar sind die Hinweise, die nur mit beiden Augen erkennbar sind. Sie kommen dadurch zustande, dass sich die beiden Augen an zwei verschiedenen Positionen am Kopf befinden und dadurch bei der Betrachtung eines Punktes im linken und rechten Auge unterschiedliche Netzhautbilder entstehen. Zur Untersuchung dieser Netzhautbilder und der damit einhergehenden Tiefenwahrnehmung muss das beidäugige Sehen zunächst geeignet modelliert werden.

3. Modell des beidäugigen Sehens

Abbildung 2 visualisiert das Modell des beidäugigen Sehvorgangs. Beide Augen fixieren einen Punkt im Unendlichen. In der Realität ist dies der Fall, wenn man entspannt geradeaus blickt. Die Sehstrahlen des Fixpunktes, angedeutet durch zwei gestrichelte vertikale Linien, verlaufen bei diesem Modell parallel und treffen die Netzhäute mittig. Der Betrachter nimmt auch weitere Punkte in der Blickrichtung des Fixpunktes wahr, die sogenannten Referenzpunkte. Betrachtet man den Strahlenverlauf eines Referenzpunktes P, so stellt man fest, dass die Netzhautstelle des Bildpunktes im linken und rechten Auge relativ zur Netzhautstelle, welche zum Fixpunkt gehört, verschieden ist. Die Winkel φ_l und φ_r dienen dabei als Maß für den jeweiligen Abstand. Aus dem Grad der Verschiedenheit der Netzhautbilder kann das Gehirn unter anderem Rückschlüsse über die relative Entfernung des Referenzpunktes bezüglich des Fixpunktes errechnen. Dieses Maß für die relative Entfernung des Referenzpunktes bekommt einen speziellen Namen: die Disparität μ, definiert durch φ_r-φ_l. Der Winkel φ nimmt dabei einen positiven Wert annimmt, falls der Referenzpunkt links vom Fixpunkt auf der Netzhaut abgebildet wird, andernfalls einen negativen. Dieses Modell kann sehr gut mit Hilfe des dynamischen Geometrieprogramms Geonext dargestellt und verdeutlicht werden und erste Beobachtungen können festgestellt werden, wie zum Beispiel, dass die Winkel φ_r und φ_l immer kleiner werden, je weiter der Referenzpunkt vom Betrachter entfernt ist.

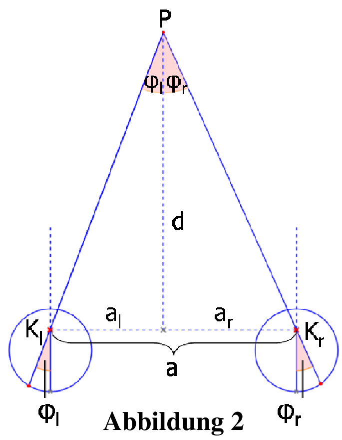


Abbildung 2

4. Themenkreis: Tiefensehen und Geometrie

Ziel bei dem Themenkreis Tiefensehen und Geometrie ist es, eine Abbildung zu untersuchen, die das beidäugige Sehen beschreibt. Dazu wird das kartesische Koordinatensystem zu Hilfe genommen. Dieses wird so festgesetzt, dass die Knotenpunkte symmetrisch auf der x-Achse liegen. Der Referenzpunkt P wird wie üblich durch die x/y-Koordinaten angegeben. Durch Anwendung der Trigonometrie gelangt man zu der Abbildungsvorschrift

$$\begin{array}{cccc} p: & S & \rightarrow & W \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\arctan\dfrac{x+\frac{a}{2}}{y}, \arctan\dfrac{x-\frac{a}{2}}{y} \right). \end{array}$$

Diese Abbildung gilt es zu analysieren. Zum Beispiel könnte die Umkehrbarkeit dieser Abbildung, die jedem Punktkoordinatenpaar das

Winkelpaar (φ_l/φ_r) zuordnet, untersucht oder die Disparität zweier Referenzpunkte verglichen werden.

5. Themenkreis: Experiment zum Tiefensehen

Im Folgenden wird ein anwendungsnahes Experiment zum Tiefensehen vorgestellt. Ziel ist es, die individuelle Tiefenwahrnehmung zu messen. Das Experiment für die Tiefenmessung soll am Computer durchgeführt werden, also auf einem ebenen Bildschirm. Der Fixpunkt liegt dementsprechend nicht, wie bei den geometrischen Untersuchungen, im Unendlichen, sondern auf Bildschirmhöhe. Da es sich bei einem Bildschirm um eine Ebene handelt, muss dafür gesorgt werden, dass der Proband auf diesem ebenen Bildschirm eine Tiefe wahrnimmt. Es muss also eine scheinbare Tiefe erzeugt werden. Abbildung 3 visualisiert, wie eine scheinbare Tiefe hervorgerufen werden kann. Das linke Auge sieht den roten (linken), aber nicht den blauen (rechten) Punkt. Analog sieht das rechte Auge nur den blauen, aber nicht den roten Punkt. Das Gehirn verschmilzt diese Punkte miteinander und der verschmolzene Punkt wird entweder hinter (a) oder vor der Bildschirmebene (c) wahrgenommen. Je weiter dabei die Punkte auseinander liegen, desto größer ist auch die wahrgenommene Tiefe. Der Punktabstand kann nicht beliebig groß gewählt werden, da das Gehirn sonst nicht in der Lage ist, die Punkte miteinander zu verschmelzen.

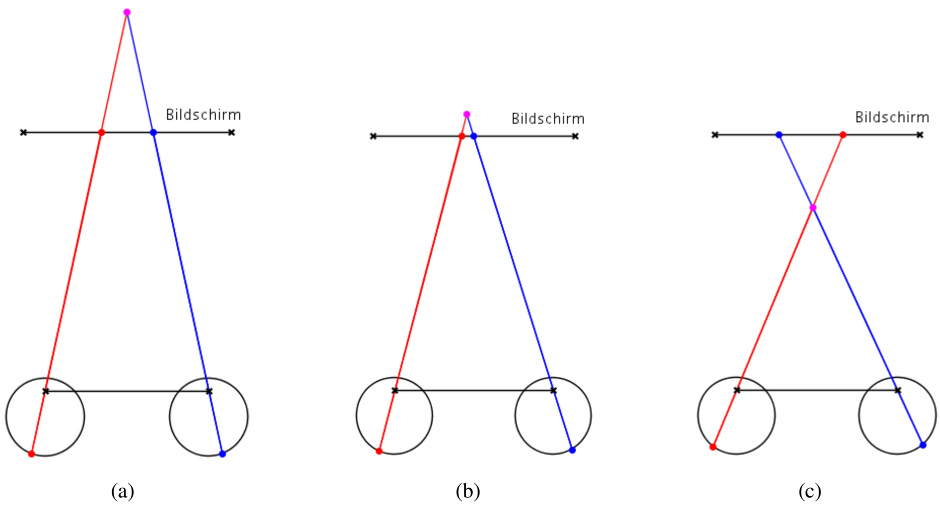


Abbildung 3: (a) Der verschmolzene Punkt wird weit hinter dem Bildschirm wahrgenommen; (b) Der Punkt wird direkt hinter dem Bildschirm wahrgenommen; (c) Der Punkt wird vor dem Bildschirm wahrgenommen

Ein Verfahren, wie man erreicht, dass die Augen verschiedene Punkte wahrnehmen und das Gehirn diese paarweise miteinander verschmilzt, sind Random-Dot-Stereogramme (RDS), wie in Abbildung 4 visualisiert. RDS bestehen aus zwei dichten Feldern von roten bzw. blauen Zufallspunkten. Eine Rot-Blau-Brille sorgt dafür, dass das eine Auge nur die roten und das andere nur die blauen Punkte sieht. Sind beide Felder identisch, so sieht man durch die Brille ein einziges verschmolzenes Bild auf einer ebenen Fläche. Um scheinbare Tiefe mittels RDS zu erzeugen, wählt man einen Bereich aus, z.B. ein Rechteck, in dem alle roten und blauen Punkte horizontal gegeneinander verschoben sind. Die restlichen Punkte außerhalb des Bereichs liegen an der gleichen Position. Der ausgewählte Bereich wird nun entweder vor, oder hinter dem Bildschirm wahrgenommen.

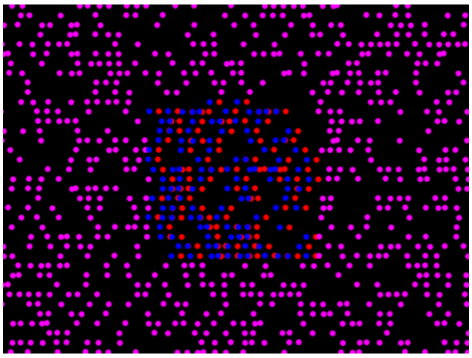


Abbildung 4

Für den Versuchsablauf wurde im Vorfeld ein Applet programmiert. Durch Drücken eines Buttons wird der Versuch gestartet. Der Proband sollte nun die Rot-Blau-Brille aufsetzten. Es erscheinen nacheinander mehrere RDS. Bei jedem Stereogramm muss sich der Schüler entscheiden, ob er das Rechteck vor oder hinter der Ebene sieht, was er durch entsprechenden Tastendruck dem Rechner signalisiert. Wie weit das Rechteck aus der Ebene herauskommt oder in der Ebene liegt, variiert bei jedem RDS, wobei jede Tiefe mehrmals getestet wird, um richtiges Raten auszugleichen. Als Ergebnis erhält man für verschiedene Tiefendarbietungen die relative Häufigkeit, wie oft man richtig entschieden hat.
An die so erworbenen Daten, welche in ein Koordinatensystem eingetragen werden, wird nun eine logistische Funktion angepasst. (Die Wahl der logistischen Funktion geht zurück auf die Schwellentheorie.) Ziel ist es, den kleinsten horizontalen Versatz der Punkte, der zu einer Tiefenwahrnehmung führt, zu bestimmen. Dies entspricht genau dem Wendepunkt der logistischen Kurve, welchen der Proband nach manuellem Anpassen der Funktion an die individuellen Daten ablesen, oder mit aufwendigen mathematischen Verfahren bestimmen kann.
Das Experiment stellt somit eine anwendungsbezogene Optimierungsaufgabe dar.

Christina ROECKERATH, Aachen

Aktuelle Forschung im Klassenzimmer: Modellierung und Simulation von Populationsentwicklungen

Es ist allgemein akzeptiert, dass Modellieren von fundamentaler Bedeutung für den Mathematikunterricht ist. Dennoch besteht die Arbeit mit Modellen im Unterricht häufig nur aus der Anwendung von Formeln und der Suche nach passenden Parametern. Realitätsbezogenes Unterrichtsmaterial gibt es bisher wenig. Ausgewählte Themen aktueller Forschung in Natur- und Ingenieurswissenschaften können bei sorgfältiger Aufarbeitung hingegen interessantes Unterrichtsmaterial bieten.

Dieser Beitrag stellt Unterrichtsmaterial zur Modellierung und Simulation von Populationsentwicklungen. Die betrachteten Modelle sind authentisch, da sie Ergebnisse aktueller Forschung in der Theoretischen Biologie (Johansson & Sumpter, 2003) sind und eine starke biologische Fundierung haben. Ihre Herleitung basiert auf der Identifizierung und Erfassung der für die Populationsentwicklung relevanten Eigenschaften auf Individuenebene. Diese Art der Modellierung wird "bottom up"-Modellierung genannt. Eine detaillierte Ausführung zu "bottom-up" Modellen und ihren Vorteilen gegenüber den klassischen, häufig im Schulunterricht verwendeten, "top-down"-Modellen findet man bei Sumpter & Broomhead (2001). Obwohl es sich um ein Resultat aktueller Forschung handelt, ist der gesamte Modellierungsprozess für Schüler begreifbar. Das Unterrichtsmaterial ermöglicht die Modellierung und Simulation eine Vielzahl unterschiedlicher Populationen und die selbständige Herleitung passender Modellgleichungen durch die Schüler.

Das im Folgenden vorgestellte Unterrichtsmaterial kann im Mathematik- und Biologieunterricht der Oberstufe eingesetzt werden und steht im Internet zum Download zur Verfügung (Roeckerath, 2008).

Das Modell

Modelliert werden zwei interagierende Arten, die einen gemeinsamen Lebensraum mit beschränkten Ressourcen bewohnen. Beide Populationen haben eine diskrete nicht überlappende Generationenabfolge, wie Insekten oder einjährige Pflanzen. Ein Individuum interagiert mit Individuen seiner eigenen Art (z.B. Konkurrenz um Nahrung, Lebensraum, Licht) und mit Individuen der anderen Art (z.B. Räuber-Beute oder symbiotisches Verhalten). Diese Phänomene heißen intra- bzw. interspezifische Interaktionen und beeinflussen die Reproduktionsfähigkeit der Individuen. Ein reproduktionsfähiges Individuum reproduziert sich genau einmal und verteilt seinen Nachwuchs (z.B. Samen oder Eier) zufällig im Lebensraum.

Johansson und Sumpter (2003) bilden die Entwicklung der Arten von Generation zu Generation im so genannten Kästchenmodell ab. Aufgrund der nicht überlappenden Generationen lässt sich die Populationsentwicklung in diskreten Zeitschritten beschreiben und ist außerdem nur von der Anzahl der Reproduktionen beeinflusst. Der Lebensraum wird als Feld mit endlich vielen Kästchen dargestellt. Jedes Kästchen entspricht einem Bereich des Lebensraumes. Jeder Spezies wird eine Farbe zugeordnet und die Individuen innerhalb eines Bereichs, werden durch Punkte in der entsprechenden Spezies-Farbe im zugehörigen Kästchen abgebildet (Siehe Abb. 1).

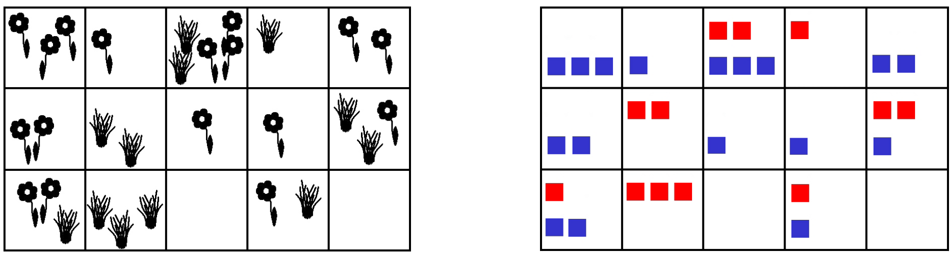
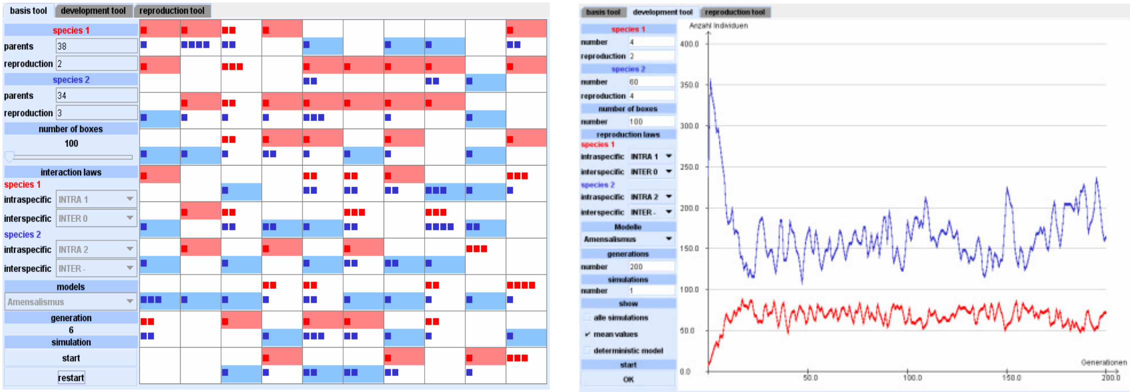


Abbildung 1: Das Kästchenmodell

Da sich Individuen, die im selben Kästchen dargestellt werden, räumlich nah sind, interagieren sie miteinander. Die Interaktionen entscheiden darüber ob ein Individuum reproduktionsfähig wird oder nicht (z.B. wird sich ein Beutetier, welches von einem Räuber gefressen wurde, nicht mehr reproduzieren). Zur Bestimmung der Anzahl an Nachkommen, muss folglich für jedes Kästchen ausgewertet werden, welche seiner Individuen sich reproduzieren können. Da reproduktionsfähige Individuen ihre Nachkommen zufällig im Lebensraum verteilen, wird zur Modellierung der nächsten Generation die entsprechende Anzahl an Punkten zufällig über das Feld verteilt. So lässt sich die Entwicklung der Arten Generation für Generation modellieren. Eine ausführlichere Beschreibung des Kästchenmodells insbesondere bezüglich der modellierbaren Interaktionen findet der Leser im Leitprogramm (Roeckerath, 2008).

Zur Realisierung des Modells als stochastischer Prozess wurde eine Software entwickelt, die die Entwicklung der Populationen mit dem Kästchenmodell simuliert (Abb. 2a) und als Graphen im Koordinatensystem (Abb. 2b) darstellt.



(a) (b)

Abbildung 2: Die Simulationssoftware

Das Modell bietet eine Grundlage, um auf einfacher Weise eine mathematische Beschreibung für den simulierten Prozess zu entwickeln. Die Anzahlen der Individuen zum Zeitpunkt t seien mit $S_1(t)$ und $S_2(t)$ bezeichnet. Aufgrund der separierten Generationenabfolge, hängt die Änderung der Individuenanzahlen vom Zeitschritt t zum Zeitschritt t+1 ausschließlich von der Reproduktion ab. Die Reproduktionsfunktionen $R_1(S_1, S_2)$ und $R_2(S_1, S_2)$ geben an, wie viele Individuen reproduktionsfähig sind, wenn sich S_1 Individuen der einen und S_2 Individuen der anderen Spezies zufällig auf dem Feld verteilen. Die Anzahl der Nachkommen je reproduktionsfähigem Individuum seinen durch r_1 für die Spezies 1 und r_2 für die Spezies 2 angegeben. Die Individuenanzahlen der einzelnen Spezies zum Zeitpunkt t+1 ergeben sich aus deren Reproduktion zum Zeitpunkt t. Mit den Reproduktionsfunktionen kann eine mathematische Beschreibung der Entwicklung der beiden Arten durch die Differenzengleichungen

$$S_1(t+1) = r_1\, R_1(\, S_1(t), S_2(t)\,)$$

$$S_2(t+1) = r_2\, R_2(\, S_1(t), S_2(t)\,)$$

angegeben werden.

Eine für Schüler nachvollziehbare Herleitung der Reproduktionsfunktion kann auf dem Wege der Simulation durchgeführt werden. Die Simulationssoftware stellt ein Werkzeug zur Verfügung, welches für eine Spezies die Simulation der Reproduktionen bei einer festen Individuenanzahl der einen Spezies und einer variablen Individuenanzahl der andere Spezies durchführt und die resultierende Anzahl an reproduktionsfähigen Individuen in einem Koordinatensystem darstellt. Die entstehenden Graphen nähern die Reproduktionsfunktionen an. Schüler können hier mit diversen bekannten Ansätzen eine passende Funktionsvorschrift finden. Auf einem eher universitären Niveau lässt sich eine Herleitung der Reproduktionsfunktion mit Mitteln der Stochastik durchführen.

Unterrichtseinsatz

Zum Unterrichtseinsatz wurde ein Leitprogramm (vgl. Frey & Frey-Eiling, 2004) entwickelt. Dabei handelt es sich um ein Heft zum Selbststudium, das alle notwendigen Inhalte, wie Lehrtexte, Anleitungen zum Umgang mit der Software, Übungen, Arbeits- und Experimentieranleitungen, Rechercheaufgaben und Musterlösungen enthält. Die Schüler können zwischen Einzel- und Partnerarbeit wählen und ihr Tempo selbst bestimmen. Es wird nach dem Mastery-Prinzip gearbeitet. Das bedeutet, dass Schüler erst zum nächsten Kapitel übergehen können, wenn sie eine Lernkontrolle bestanden haben. Leitprogramme lassen sich aufgrund der freien Arbeitsweise gut bei heterogenen Gruppen und bei komplexen Inhalten einsetzen. Schüler lernen Selbstorganisation und Selbstständigkeit und dem Lehrer bleibt Zeit für den Einzelnen. Das Leitprogramm und die Simulationssoftware stehen im Internet zum Download zur Verfügung (Roeckerath, 2008).

Im Rahmen eines MINT-Workshops an der RWTH Aachen vom 17. bis zum 20. September 2008 arbeiteten 26 Schüler/innen der Jahrgangstufe 12 und 13 insgesamt 9 Stunden mit dem Leitprogramm. Eine anschließende Evaluation der Schülerergebnisse und des Workshops ergab, dass die Schüler nicht nur erfolgreich und gerne mit den Modellen gearbeitet haben sondern auch weitergehende Erkenntnisse zur Bedeutung der Mathematik für die Gesellschaft erlangten. Ein Schüler kommentierte die Arbeit mit dem Leitprogramm wie folgt: „Man konnte gut erkennen, wie viel Mathematik in unserem täglichen Leben steckt und wie man das nutzen kann!“

Literatur

Frey, K. & Frey-Eiling, A. (2004). Allgemeine Didaktik. Arbeitsunterlagen zur Vorlesung, 17. Auflage, Institut für Verhaltenswissenschaft, ETH Zentrum, Zürich.

Johansson, A. & Sumpter, D.J.T. (2003). From local interactions to population dynamics in site-based models of ecology. *Theoretical Population Biology, 64,* 419–517.

Roeckerath, C. (2008, 28 Oct). Simulationssoftware und Leitprogramm. http://www.matha.rwth-aachen.de/de/modellierung/fallbeispiele/interaktion.

Sumpter, D.J.T. & Broomhead, D.S. (2001). Relating individual behavior to population dynamics. *Proceedings of the Royal Society B, 268,* 925–932.

Simone GÖTTLICH, Martin BRACKE, Kaiserslautern

Eine Modellierungsaufgabe zum Thema: „Munterer Partnertausch beim Marienkäfer“

Wachstums - bzw. Populationsmodelle sind in der Biomathematik weit verbreitet. Ausgehend von einer aktuellen Studie zur Fortpflanzung der zweigepunkteten Marienkäfer-Spezies *Adalia Bipunctata*[1] werden zwei mathematische Modelle vorgestellt, die Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II im Rahmen einer sogenannten Modellierungswoche erarbeitet haben. Der Ansatz der Schüler basiert in beiden Fällen im Wesentlichen auf einer zeitdiskreten Rekursion, wobei ein Ansatz sich mit dem direkten Aufschreiben der Rekursion beschäftigt und der andere aus einer Skizze zum möglichen Verlauf der Populationen hergeleitet wird. Im Folgenden wollen wir nun die Aufgabenstellung präzisieren und auf weitere wichtige Aspekte des Modellierungskreislaufes (Kaiser 1996, S. 68) wie z.B. das Beschaffen von Daten und das Herleiten eines Modells näher eingehen.

1. Das Problem

Im Jahre 2005 wurde in Polen von einer Gruppe von Forschern um Mary Webberley (Universität von Westaustralien, Perth) eine Studie über das Paarungsverhalten von zweigepunkteten Marienkäfern durchgeführt. Die Forscher fanden heraus, dass die Käfer beim Geschlechtsakt eine Milbe übertragen, die innerhalb von drei Wochen zur Unfruchtbarkeit der Weibchen führt. Der Geschlechtsakt findet im Mittel alle zwei Tage statt. Marienkäfer überwintern die kalten Monate und beginnen im Frühjahr mit der Paarung. Ausgehend von einem bestimmten Anfangsbestand waren 20% der Käfer mit dieser Milbe befallen. Nachdem die Paarung im Frühjahr begann, stieg die Befallsrate innerhalb von zwei Wochen auf 80%. In Spitzenzeiten waren sogar über 90% der Insekten infiziert. Trotzdem starben die Tiere nicht aus, weil rechtzeitig nach fünf Wochen die nächste Generation herangereift war, um sich weiter zu paaren und den Gesamtbestand zu erhalten. Diese neue Generation war zunächst gesund, wodurch sich die Anzahl der befallenen Tiere wieder verringerte. Außerdem wird das Paarungsverhalten eingeschränkt, wenn im Sommer die Temperaturen stark ansteigen.

Aufgabenstellung: Können die oben gemachten Beobachtungen mit Hilfe eines mathematischen Modells nachvollzogen werden?

[1] http://www.wissenschaft.de/wissenschaft/news/258584.html

Datenbeschaffung: Aufgrund der offenen Aufgabenstellung muss man sich zunächst über das Leben und Paarungsverhalten der Marienkäfer sowie speziell das Eiablageverhalten der Weibchen genauer informieren. Hierbei wird insbesondere das Internet als einfach zugängliche Datenquelle genutzt. Möglich andere Quellen stellen biologische Fachliteratur und Institute an Universitäten dar. Eine erste wesentliche Information ist, dass bei der Fortpflanzung dieser Tiere überraschenderweise 80-90% weibliche Nachkommen hervorgehen, d.h. Männchen müssen sich öfters paaren. Das Verhältnis ist auf symbiotische Bakterien zurückzuführen, die in den Geschlechtszellen der Weibchen leben[2]. Die Käfer überwintern von Oktober bis Ende April und da die Temperatur bei der Paarung eine wesentliche Rolle spielt, fangen die Marienkäfer an, sich Ende März/Anfang April zu paaren. Die Studie wurde in Polen durchgeführt, d.h. man kann man anhand eines Klimadiagramms feststellen, dass Marienkäfer ab einer Temperatur von ca. 10 - 12°C aktiv werden. Ein Weibchen legt im Schnitt 400 Eier im Leben, die in Portionen von 10-20 Eiern abgelegt werden[3], von denen jedoch nur 1% überleben. Von der Paarung bis zum Schlüpfen der Larven vergeht eine Zeitspanne von ca. 10 Tagen; 5 Wochen nach Eiablage sind die jungen Käfer geschlechtsreif. Für gewöhnlich leben die Marienkäfer Mitteleuropas etwa ein Jahr lang und sind solange fruchtbar, solange sie sich nicht mit der Krankheit infizieren. Es entstehen zwei bis drei neue Marienkäfer-Generationen pro Jahr.

2. Zwei Modellierungsideen

Bevor man nun versucht, ein möglichst konkretes Modell zu obiger Fragestellung herzuleiten, muss man sich auf wesentliche Annahmen beschränken. Das ist für die Schülerinnen und Schüler in einem Modellierungsprozess oftmals ein schwerer Schritt, denn durch die gemachten Annahmen geben sie nun die Komplexität der Aufgabe vor.

Annahmen: Bei der Suche nach der Wahrscheinlichkeit, mit der eigentlich eine Milbe übertragen wird, findet man keine konkreten Zahlen. Man geht zunächst von einer Übertragungsrate von 100% aus, d.h. eine Neuinfektion ist bei jeder Paarung möglich. Eine weitere wichtige Annahme ist, dass die Paarungen temperaturabhängig sind. D.h. die Paarungszeit schränkt auf einige Monate ein, wobei während der heißen Sommermonate nahezu keine Paarung stattfinden soll.

---

[2] http://lexikon.freenet.de/Zweipunkt

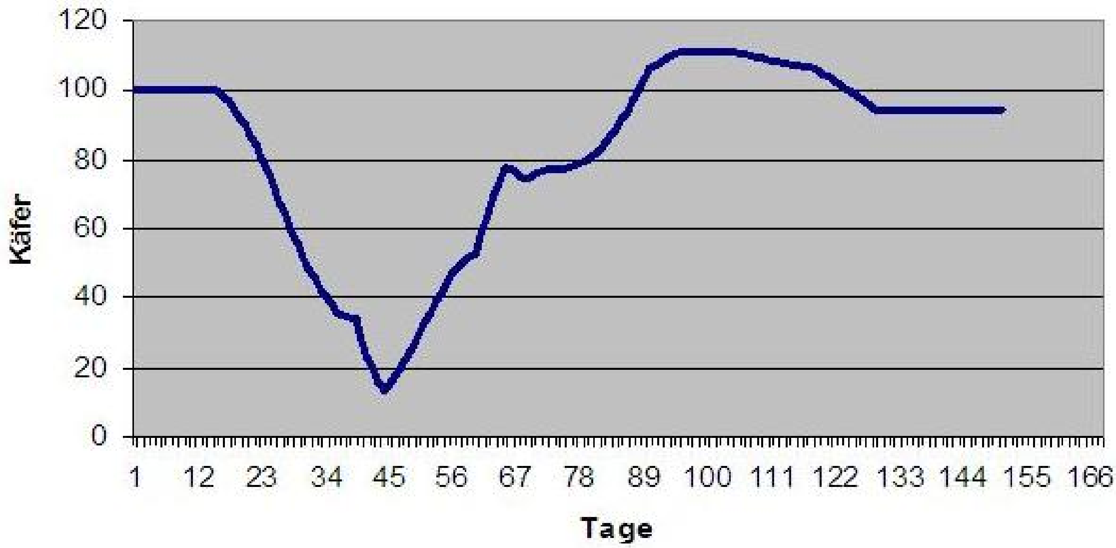
[3] http://www.biologie.de/biowiki/Marienk%C3%A4fer#Fortpflanzung

Eine erste Möglichkeit, eigentlich auch die naheliegende, ist nun auf direktem Wege ein zeitdiskretes Modell, analog zu Räuber-Beute Modellen oder dem Beitrag von Ch. Ableitinger in diesem Tagungsband, herzuleiten.

Eine Grundannahme ist hierbei, dass Infektionsgrad der gesamten Population sowie ihr Umfang zu Beginn jeder Saison gleich ist. Die Sterberate wird an die in jedem Zeitschritt gelegten Eier gekoppelt mir der Idee, dass in jedem Jahr in denselben Zeiträumen die gleiche Anzahl von Käfern schlüpft. Dabei sterben nur infizierte Käfer, und zwar altersbedingt nach einem Jahr – natürlich im Verhältnis der Geschlechter von 4:1 – mit der Begründung, dass am Ende der Lebensspanne jeder Käfer infiziert ist.

Durch mehrere Experimente mit weiteren Vereinfachungen (Weibchen paaren sich aufgrund des Geschlechterverhältnisses nur alle 8 Tage, Unfruchtbarkeit erst 3 Wochen nach der Infektion) wird schnell klar, dass in einem realistischen Modell männliche Käfer sich entsprechend häufiger paaren als Weibchen und die Inkubationszeit berücksichtigt werden muss. Auch die Infektionswahrscheinlichkeit von 100% führt dazu, dass im Modell zu beinahe jedem Zeitpunkt nahezu die gesamte Population befallen ist und somit ausstirbt.

In einem erweiterten Modell wird mit einem temperaturabhängigen Faktor für die Häufigkeit der Paarungen gearbeitet, der durch eine einfache Treppenfunktion mit 8 Stufen realisiert wird (abgeleitet aus Klimatabellen und Datenfitting).



Des Weiteren wird bei der numerischen Auswertung des resultierenden Modells klar, dass die Infektionswahrscheinlichkeit nur bei etwa 65% liegen kann, um die beobachteten Populationsverläufe nachzubilden. Einen solchen vom finalen Modell prognostizierten Verlauf zeigt obige Grafik.

Durch Variation der Parameter kann man erkennen, dass schon eine Erhöhung der Infektionswahrscheinlichkeit auf 70% – ebenso wie kleine Veränderungen der Dauer der Paarungszeit bzw. -häufigkeit – im Modell zu einem Aussterben der Käferpopulation führen.

Ein von einer zweiten Schülergruppe entwickeltes Modell basiert auf der Annahme, dass jedes Jahr zwei neue Generationen – eine im Frühjahr, die zweite im Herbst – entstehen, wobei die Paarungsphasen klimabedingt in den Monaten Mai und September liegen; alle anderen Zeiträume werden aufgrund einer verhältnismäßig sehr geringen Anzahl gelegter Eier vernachlässigt. Im Unterschied zum ersten Modell wird eine zusätzliche Abnahme der Population über den Winter durch Erfrieren bzw. Fressfeinde berücksichtigt. Nun wird ein aus den Hintergrundinformationen angenommener qualitativer Jahresverlauf der Populationsgröße abschnittsweise durch Funktionen beschrieben. Dabei wird von einer exponentiellen Populationsabnahme durch Tod ausgegangen. Die Zunahme erfolgt bei geringem Infizierungsgrad nach einem linearen Modell und wird bei höherer Infektionsrate durch logistisches Wachstum beschrieben.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass das resultierende Modell die beobachteten Populationsverläufe realistisch beschreibt. Allerdings wurden hierzu vielmehr die Beobachtungen selbst als zugrunde liegende Prozesse berücksichtigt, so dass insbesondere die Prognose für veränderte Umgebungsvariablen kaum möglich wird.

Mögliche Erweiterungen: Das von den Schülern gefundene Modell kann noch in viele Richtungen erweitert werden, z.B. auf die Auswirkungen von Klimaveränderungen auf das Populationsgleichgewicht.

Abschließend sei darauf verwiesen, dass weitere anwendungsorientierte Modellierungsaufgaben und deren Schülerlösungen in den Artikeln Ableitinger et al. 2009/1 bzw. 2009/2 diskutiert werden.

Literatur

[1] Ableitinger, Ch., Göttlich, S., Sickenberger, T. (2009/1). Eine Modellierungsaufgabe zum Thema "Optimale Auslastung von Flugzeugen". Erscheint bei *Istron*.

[2] Ableitinger, Ch., Göttlich, S., Sickenberger, T. (2009/2). Kann Papier sprechen? Eine Modellierungsaufgabe zum Thema „Speicherkapazität von 2D Pixel-Mosaiken". Erscheint bei *Istron*.

[3] Kaiser, G. (1996). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In: Graumann, G. et al. (Hrsg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht.* Franzbecker, Bad Salzdetfurth, S. 66- 84.

Rolf BIEHLER, Paderborn

Moderierte Sektion: Studien zum Einsatz von eLearning für das Lernen von Mathematik

In den Beiträgen dieser moderierten Sektion werden einerseits Konzepte und Materialien zum eLearning mathematischer und mathematikdidaktischer Inhalte und andererseits empirische Studien zu deren Evaluation vorgestellt, die sich auf erreichte Kompetenzen sowie auf Einstellung der Lernenden und das Lernverhalten in eLearning-Kontexten beziehen.

Ausgehend vom Projekt "Multimediavorkurs Mathematik" stellt dabei zunächst Pascal R. Fischer unter dem Titel "*E-Learning zwischen Schule und Universität? Ergebnisse einer empirischen Studie zum Einsatz einer E-Variante mathematischer Brückenkurse*" eine eLearning-Variante mathematischer Vorkurse vor, die in 2008 parallel zu den Kasseler Präsenzvorkursen angeboten wurde und im Rahmen seiner von mir betreuten Dissertation entwickelt und evaluiert wird.

Das Kurskonzept stellt den Lernenden als aktiven Konstrukteur seines Lernwegs ins Zentrum, indem die Vorteile computergestützen Lernens effizient genutzt werden: Selbstdiagnose und zielgerichtete Beseitigung individueller Defizite mit Hilfe des im Projektkontext entwickelten, interaktiven Vorkursmaterials. Der empirische Teil seiner Studie umfasst zum einen Befragungen zu Voraussetzungen und Gründen für die jeweilige Wahl der Kursvariante seitens der Teilnehmer, zum anderen einen Ein- und Ausgangstests zur Leistungsmessung; erste Ergebnisse dieser Studie wurden im Rahmen des Vortrages präsentiert.

Anschließend stellen Svetlana Polushkina und Regina Bruder in ihrem Vortrag "*Selbstreguliert Modellieren lernen mit einer E-Lernumgebung für Schüler/innen*" eine an der TU Darmstadt entwickelte Lernumgebung für SchülerInnen ab Klasse 7 vor, deren Ziel die Entwicklung von Kompetenzen mathematischen Modellierens und des selbstregulierten Lernens ist. Unter Einsatz adaptiver Lernunterstützungen werden hier einzelne Lernhandlungen explizit thematisiert und angeregt. Strategien und heuristische Hilfsmittel werden dabei gleichermaßen im Kontext proportionaler Zuordnungen erlernt. Darüber hinaus stellt Frau Polushkina sowohl Konzept als auch erste Ergebnisse der an die Lernumgebung angelagerten Evaluation im Rahmen ihrer Dissertation vor.

Ein abschließendes Beispiel für den Einsatz von eLearning im Unterricht gab Christoph Wassners Vortrag "*E-Learning in der Unterrichtspraxis - Die Lernplattform BayernMoodle*". Als Lehrer und Multiplikator an einer bayerischen Schule präsentiert Wassner die seit 2008 landesweit allen Schulen zur Verfügung gestellten Internet-Lernplattform "BayernMoodle" vor. Das inzwischen von vielen bayerischen LeherInnen eingesetzte System fördert eigenverantwortliches und zukunftsorientiertes Arbeiten der Schüler und ist zugleich auch ohne tief greifende Computerkenntnisse seitens des Lehrenden benutzbar. Auch über die Landesgrenzen hinaus wird Moodle als Lernplattform auch in der universitären Lehre, z. B. in Kassel, Darmstadt und Paderborn eingesetzt.

Im Vortrag berichtete Wassner über Einsatzmöglichkeiten und erste Erfahrungen aus seiner Unterrichtspraxis und der Tätigkeit als Multiplikator. Er ging dabei der Frage nach, inwiefern der Einsatz von eLearning den traditionellen Mathematikunterricht bereichern kann.

Pascal Rolf FISCHER, Kassel

E-Learning zwischen Schule und Universität? Ergebnisse einer empirischen Studie zum Einsatz einer E-Variante mathematischer Brückenkurse

1. Einordnung

Bezugspunkt meiner Forschung ist das Projekt "Multimediavorkurs Mathematik" der Universität Kassel. Das entwickelte Material enthält didaktisch gezielt eingebundene interaktive Elemente und verfügt über ein modularisiertes Format, das dem Nutzer durch verschiedene Lernzugänge die Beseitigung seiner individuellen Defizite ermöglicht (vgl. [1]). Die regelmäßige Evaluation der Vorkurse zeigte, dass sich die Teilnehmer eine noch individuellere Betreuung nicht nur wünschen sondern auch benötigen. Da sich die Situation zudem zusehends durch wachsende Teilnehmerzahlen verschärft (vgl. [2]) entstand zusammen mit Prof. Dr. Biehler die Idee einer alternativen E-Learning-Variante des Vorkurses, die im Rahmen meiner Dissertation entwickelt und erforscht wird. Die Ergebnisse der Vorstudie 2007 (vgl. [3]) wurden zur Verbesserung des Konzeptes und zur Schärfung der Fragestellungen für die Hauptstudie 2008 genutzt. Dieser Artikel behandelt das Kurskonzept 2008 sowie erste Ergebnisse der Evaluation.

2. Das Vorkurskonzept 2008

Das Konzept 2008 sah einen vierwöchigen Vorkurs (20 Tage) vor, das in einer P-Variante und einer alternativen E-Variante angeboten wurde, für die sich jeder Teilnehmer im Vorfeld selbst entscheiden konnte. Die Teilnehmer wurden zu Kursbeginn nach Studiengängen gruppiert und in je 4 Kursgruppen pro Kursvariante aufgeteilt.

Jeder der 4 P-Kursgruppen wurde von je einem eigenen Dozenten und zwei Tutoren betreut, die an 3 Tagen pro Woche (Mo, Mi, Fr) vormittags Vorlesungen und nachmittags Übungen durchführten. Die beiden übrigen Wochentage standen den Studierenden als Selbstlerntage zur Verfügung. Die Inhalte basierten auf der Multimedia-CD und wurden vom Dozenten unter Berücksichtigung der studiengangsspezifischen Anforderungen klar festgelegt. Für die Selbstlerntage wurden Hausaufgaben vergeben, die sich in zwei Teile gliederten: Teil A enthielt Übungsaufgaben zur Festigung der behandelten Themen, Teil B umfasste Aufgabenstellungen zur Vorbereitung der nächsten Sitzung mittels gezielter Bearbeitung der CD, die jedem Teilnehmer zur Verfügung stand. Jeder Kursgruppe stand darüber hinaus ein Kurs in der Lernplattform Moodle als Content- und Kommunikationsplattform zur Verfügung.

Alle vier E-Kursgruppen wurden von mir als Dozent und zwei Hilfskräften als Tutoren betreut, wobei einer der Tutoren als Online-Tutor, der andere als Betreuer der Übungsgruppen arbeitete. Nach zwei gemeinsamen Einführungstagen aller Teilnehmer wurde jede Woche ein kursgruppenspezifischer Tag angeboten. Die kursbezogenen Tage umfassten nach einer einführenden Fragestunde eine Vorlesung zu ausgewählten Themen sowie Übungen zur Festigung des Stoffes. Anders als bei den P-Kursen konnten die Studierenden die zu behandelnden Themen im Vorfeld mitbestimmen. Den E-Kursen stand ein gemeinsamer Bereich in Moodle zur Verfügung, in dem alle Inhalte als SCORM-Module verlinkt waren, so dass hier gelernt und sich gegenseitig ausgetauscht werden konnte. Der Online-Tutor stand den Teilnehmern wochentags von 9-17 Uhr zur Verfügung, die Studierenden konnten sich aber jederzeit in Foren und Chats austauschen.

Da das im Projektkontext entwickelte Multimediaskript zwar bereits gute Voraussetzung zum individuellen Lernen bietet, allerdings nur Feedback in Form von Musterlösungen zur Verfügung stellt, war die eigenständige Gestaltung des Lernwegs für die Teilnehmer verbesserungsfähig. Als Unterstützung wurden ihnen daher jetzt noch selbstdiagnostische Vor- und Nachtests für die meisten Module zur Verfügung gestellt, insgesamt 48. Diese wurden vom System elektronisch ausgewertet und zeigten nach Bearbeitung neben der erreichten Punktzahl eine Musterlösung an und gaben dem Lerner gezielte Bearbeitungsempfehlungen für die jeweiligen Module. Da in Online-Tests in Moodle nur bestimmte Aufgabenformate automatisch auswertbar sind, wurden Modellierungs- und Beweisaufgaben z. T. durch ein offenes Antwortformat realisiert, das eine Korrektur sowie Bewertung und Rückmeldung durch den Online-Tutor erforderte. In fortgeschritteneren Modulen wurden dann Tests angeboten, die eine Selbstbewertung der Teilnehmer mithilfe von Musterlösung und Bewertungshinweisen erforderten.

3. Untersuchungskonzept und -ergebnisse

Das empirische Untersuchungskonzept sah Fragestellungen vor, von denen ich in diesem Artikel lediglich drei auszugsweise vorstellen möchte: 1.) Welche expliziten und impliziten Gründe für die jeweilige Wahl der Kursvariante lassen sich finden? 2.) Was ergibt sich bzgl. der Kurszufriedenheit im Vergleich der Varianten? 3.) Wie ist der Leistungsstand der Teilnehmer zu Beginn und zum Ende des Vorkurses im Vergleich der Varianten E vs. P?

Die Daten wurden auf zwei Ebenen erhoben: Zum einen wurden drei anonyme Befragungen (Eingangs-, Zwischen- und Ausgangsbefragung) durchgeführt, bei der ein persönlicher Schlüssel zur Nachverfolgbarkeit der Fälle diente. Zum anderen wurde ein Eingangstest mit 19 schulbezogenen Aufgaben aus der Sek. I & II sowie ein Ausgangstest mit 20 vorkursbezogenen Aufgaben unter Kontrollbedingungen am Rechner durchgeführt.

Ergebnisse zu den Gründen für die Wahl der Kursvariante

Bei den E-Kursen zeigt die Auswertung hier zwei auch thematisch zusammenhängende Bereiche: Externe Rahmenbedingungen wie Urlaub, berufliche Gründe, keine Wohnung etc. wurden eher nicht als Grund für die Kursentscheidung genannt, während der Wunsch nach freier Zeiteinteilung, einem effektiveren Lernen durch gezielte Themenwahl und die interessante Lernmethode sowie auch die niedriger Anzahl an Präsenztagen eher maßgeblich für die Entscheidung zur E-Variante waren.

Bei den P-Kursen lassen die Daten drei Bereiche erkennen: Auch hier sind externe Gründe wie Unkenntnis der anderen Variante, die Nichtverfügbarkeit von PC, Internet oder Flatrate eher nicht Ursache, genauso wie schlechte Erfahrungen im E-Learning. Deutlich ist die Zustimmung zu Aussagen, die den Vorlesungsbetrieb und die direkte Kommunikationsmöglichkeit mit Dozent und Kommilitonen betreffen.

Die Studierenden mussten ihre PC-Nutzung in der Schule und im Privatleben sowie die bisherige Erfahrung mit E-Learning angeben. Sowohl die Mittelwerte als auch Streuungen sind allerdings in beiden Kursvarianten vergleichbar. Anders als vermutet muss also davon ausgegangen werden, dass PC-Affinität keine wesentliche Rolle bei der Entscheidung spielt.

Ergebnisse zur Zufriedenheit mit dem gewählten Kurs

Die Bewertungen der Fragen "*Im Allgemeinen war ich mit dem Vorkurs zufrieden*" sowie "*Die Teilnahme am Vorkurs ist unbedingt zu empfehlen*" zeigen vergleichbar positive Ergebnisse: Die Teilnehmer waren mit ihrer selbst gewählten Variante jeweils sehr zufrieden. Bzgl. der Frage, ob man sich wieder für die jeweilige Variante entscheiden würde, schnitten die P-Kurse im Mittel leicht besser ab (M=3,67, SD=0,68, N=254) als die E-Kurse (M=3,48, SD=0,79, N=96.

Testergebnisse

Im Eingangstest wurden, bei einer maximalen Punktzahl von 19 Punkten, sowohl bei den P-Kursen ein Mittelwert von 8,52 Punkten (SD=3,14, N=226) erreicht als auch bei den E-Kursen, bei denen eine leicht höhere Streuung (SD=3,64, N=146) erkennbar ist. Im Ausgangstest waren maximal 20 Punkte zu erreichen. Hier erzielt die P-Kursgruppe im Mittel 9,21 Punkte (SD=3,13, N=131) während die E-Kursgruppe einen deutlich höheren Mittelwert von 10,93 Punkten (SD=4,02, N=72) erreichte.

Deutlich erkennbar ist das bessere Abschneiden der E-Kursgruppe im Ausgangstest bei vergleichbarer Eingangsvoraussetzung. Gleichzeitig zeigt sich, dass die Heterogenität in der E-Kursgruppe im Ausgangstest sogar noch zugenommen hat. Die Varianz der Ergebnisse des Ausgangstest ist zu 45% durch die Ergebnisse des Eingangstest erklärbar.

4. Fazit und Ausblick

Die E-Kurse sind als Alternative zu den P-Kursen machbar und sinnvoll: Sie erzielen bzgl. der Kursbewertung durch die Teilnehmer vergleichbar positive Ergebnisse, bzgl. der kursbezogenen Leistungen sind sogar bessere Ergebnisse erkennbar trotz vergleichbarer Eingangsvoraussetzung. Als maßgebliche Gründe für die Entscheidung gegen die E-Variante lassen sich vor allem der persönlicheren Kontakt und das Kennenlernen des typischen Vorlesungsbetriebes heranziehen. Beides sind jedoch Elemente, die an den Präsenztagen der E-Variante ebenfalls gegeben sind.

Die hier vorgestellten Ergebnisse basieren auf einer freiwilligen Wahl der Kursvariante. Unklar ist bislang noch, wie sich die Vorgabe der Kursvariante auf die Ergebnisse auswirken würde. Mit den gesammelten vielfältigen Daten sind noch weitere Auswertungen geplant. So sollen die einzelnen Kursgruppen auch bzgl. Gemeinsamkeiten hinsichtlich Persönlichkeitsmerkmale, epistemologischen Überzeugungen, schulischen Lernerfahrungen u.v.m. untersucht werden. Zudem werden die Kurse noch bzgl. motivierender Merkmale, Individualitätskriterien und hinsichtlich der Bewertung einzelner Kursbestandteile differenziert untersucht. Es soll so eine Antwort auf die Frage gefunden werden, für wen ein solches E-Konzept für Brückenkurse eine sinnvolle Lernmethode darstellt.

Literatur

[1] Biehler, R./ Fischer, P. R.: VEMA - Virtuelles Eingangstutorium Mathematik. *In:* Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6. 3. bis 10. 3. 2006 in Osnabrück. Hildesheim und Berlin 2006, S. 195 – 199.

[2] Fischer, P. R.: E-Learning als effizienteres Mittel für den Brückenschlag zwischen Schule und Universität? *In:* Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim und Berlin 2007, S. 779 - 782.

[3] Fischer, P. R.: vem@-online: Ein E-Learning-Vorkurs zur individualisierten Beseitigung mathematischer Defizite. *In:* Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Hildesheim und Berlin 2008, S. 59 - 62.

Svetlana POLUSHKINA, Darmstadt

Selbstreguliert Modellieren lernen mit einer E-Lernumgebung für Schüler/innen: Kompetenzförderung durch Lernunterstützungen

Das hier vorgestellte Projekt wird an der Technischen Universität Darmstadt realisiert. Im Rahmen des DFG-Graduiertenkollegs „Qualitätsverbesserung im E-Learning durch rückgekoppelte Prozesse“ beteiligen sich Prof. Dr. Regina Bruder (Projektleitung) und die Pädagogischen Psychologen Prof. Dr. Bernhard Schmitz und Bastian Benz am Projekt.

Zunächst werden die Ziele und Forschungsfragen dieses interdisziplinären Forschungsprojektes skizziert. Danach wird die Gestaltung der im Projekt entwickelten E-Lernumgebung umrissen und das Design der bevorstehenden Studie zur Evaluation der E-Lernumgebung schematisch beschrieben. Anschließend informiert ein Ausblick über den weiteren Projektverlauf sowie über den geplanten Einsatz der E-Lernumgebung.

Ziele und Forschungsfragen

Eins der häufig betonten Ziele des modernen Mathematikunterrichts besteht bekanntlich darin, die Schüler/innen durch gezielte Förderung zu befähigen, selbständig Real-Welt-Aufgaben mit Hilfe der relevanten Mathematik meistern zu können. Daraus ergibt sich unter anderem der Bedarf nach der Entwicklung der entsprechenden Kompetenzen. Zentral sind dabei die Kompetenzen des mathematischen Modellierens und des selbstregulierten Lernens.

In unserem Projekt wird eine E-Lernumgebung konzipiert, implementiert und evaluiert, die zur systematischen Förderung der oben genannten Kompetenzen eingesetzt werden kann. Zielgruppe sind dabei Schüler/innen ab dem Jahrgang 7, als mathematisches Werkzeug zum Modellieren dienen hier proportionale Zuordnungen.

Zur umfassenden Kompetenzförderung werden die drei von Weinert (1999) unterschiedenen Kompetenzbereiche beachtet: das intelligente Wissen, die Handlungskompetenz und die Metakompetenz. Dazu werden die kognitiven sowie metakognitiven Aspekte, die beim Kompetenzerwerb und bei der Anwendung vorhandener Kompetenz eine Rolle spielen, berücksichtigt.

Im Fokus steht die Gestaltung der individualisierten Lernunterstützungen (vgl. Vygotsky, 1978). Die Möglichkeiten der Individualisierung und Lernerorientierung sind wichtige Vorteile und zugleich Qualitätsmerkmale von

E-Lernumgebungen. Nicht immer kann allerdings über die konkrete Ausprägung solcher Lernunterstützungen a priori entschieden werden.

Für das Design der entwickelten E-Lernumgebung stellen sich für uns mehrere Fragen im Hinblick auf individualisierte Lernunterstützungen:

- Inhalt: Welche inhaltlichen Hilfestellungen sollte man dem Lernenden bieten?
- Form: Wie sollten diese Hilfestellungen formuliert werden: als direkte Handlungsanweisungen bzw. als Informationsblöcke?
- Zeitpunkt: Zu welchem Zeitpunkt sollte man dem Lernenden Hilfestellungen bieten: vor, während oder nach der Bearbeitung einer Aufgabe?
- Darbietung: Wer entscheidet über den Bedarf nach einer Hilfestellung? Sollte der Lernende auf Anfrage einen Tipp erhalten (Adaptierbarkeit der Lernumgebung) oder sollten Hilfestellungen automatisch dargeboten werden, z. B. als Feedback auf eine fehlerhafte Antwort-Eingabe?

Um diese Fragen für den gegebenen Anwendungsfall und ein Stück weit auch allgemein zu beantworten, variieren wir systematisch die Gestaltung der Lernunterstützungen in der E-Lernumgebung und vergleichen die Varianten in Bezug auf ihre Effektivität in der Förderung der Lernprozesse bei verschiedenen individuellen Lernvoraussetzungen. Darauf fokussiert die Evaluation der E-Lernumgebung in unserem Projekt.

Gestaltung der E-Lernumgebung

In der E-Lernumgebung ist eine Lerneinheit zum systematischen Einstieg ins mathematische Modellieren implementiert. Die Schüler/innen werden durch den Prozess der Lösung eines realitätsnahen Problems hindurch geleitet. Dabei werden dem Lernenden die einzelnen Teilhandlungen dieses Prozesses an Hand eines angepassten Modellierungskreislaufs verdeutlicht, so dass eine subjektive Orientierungsgrundlage zum Lösen ähnlicher Probleme, d. h. Modellierungsaufgaben, entstehen kann.

Zum Lösen der in der Lerneinheit behandelten Modellierungsaufgabe (ein Optimierungsproblem zur Auswahl einer aus zweien Tankstellen) müssen mehrere Einflussgrößen berechnen werden. Dafür sind Fähigkeiten und Kenntnisse im Themenbereich der proportionalen Zuordnungen einzusetzen. Außerdem sind Ziele festzulegen, Pläne zu ihrer Verwirklichung aufzustellen und eigener Fortschritt zu beobachten sowie eventuelle Korrekturen vorzunehmen. Die dazu notwendigen selbstregulierenden Handlungen werden in der E-Lernumgebung angeregt. Es sind individuelle Pläne zur Aufgabenbearbeitung möglich, es wird auch ein dynamisches Feedback zur Reflexion des individuellen Vorgehens generiert.

Zum Meistern der einzelnen Zuordnungsaufgaben für die Berechnung der wichtigen Einflussgrößen für die Modellierungsaufgabe ist das Können im Umgang mit verschiedenen Darstellungen (Tabellen, Grafen und Termen) oder heuristischen Hilfsmitteln (vgl. Pólya, 1949) wesentlich. Zu den Zuordnungsaufgaben werden dem Lernenden gelöste Beispiele als Ganzes oder Stück für Stück als abgestufte Tipps angeboten, so dass die eigentlichen Aufgaben analog gelöst werden können. (Einen guten Überblick zur Gestaltung lernförderlicher gelöster Beispiele geben z. B. Atkinson et al., 2000.)

Insgesamt wird der Lernende mit zwei Arten inhaltlicher Hilfestellungen unterstützt: Einerseits, werden die Lernhandlungen thematisiert und angeregt, und zwar beides, für das Modellieren und für das selbstregulierte Lernen. Andererseits, werden analoge gelöste Beispiele und abgestufte Tipps zum Vereinfachen des konkreten mathematischen Handelns dargeboten.

Für die Studie werden verschiedene Versionen der Lerneinheit implementiert, in denen für die zwei Arten der inhaltlichen Hilfestellungen die Form, der Zeitpunkt und die Darbietung variiert werden.

Design der Studie

Die Evaluationsstudie untersucht Unterschiede in den Lernergebnissen sowie Lernprozessen im Zusammenhang mit den variierten Lernunterstützungen.

Der schematische Modellierungskreislauf wird beispielsweise vor oder nach der Bearbeitung der Modellierungsaufgabe zum ersten Mal präsentiert. Dabei wird der Frage nachgegangen, inwieweit persönliche Problemlöseerfahrung mit einem bestimmten Problemtyp für ein Verstehen der abstrakten Problemlösestrategien notwendig oder hilfreich ist.

Der Umfang der notwendigen und möglichen Regulation des eigenen Vorgehens bei der Bestimmung der einzelnen Einflussgrößen für die Modellierungsaufgabe wird für verschiedene Versionen der Lerneinheit deutlich variiert. Das Spektrum reicht vom völligen Verzicht auf Ziele und Pläne bis zum selbstregulierten Planen aller einzelnen Teilhandlungen über das fremdregulierte Planen (wo der Lernende nichts selber planen muss) und über das selbstregulierte Planen mit Hilfe eines Planungsbeispiels. Zu erforschen ist hier, welche der Varianten sich als effektiver für die Förderung der Kompetenz des selbstregulierten Lernens erweist.

Die gelösten Beispiele und die abgestuften Tipps für die Zuordnungsaufgaben werden in unterschiedlichen Variationen vor oder während der Aufgabenbearbeitung präsentiert und als bloße Informationen oder als direkte Handlungsanweisungen formuliert. Sie werden eingebunden in die Lernmaterialien oder als Feedback zu einer falschen Antwort-Eingabe automatisch dargeboten. Alternativ erscheinen sie auf Knopfdruck. Welche der Varianten ist am hilfreichsten unmittelbar für das Lösen der konkreten Zuordnungsaufgaben und für das nachhaltige Können in diesem Bereich?

Die Studie umfasst drei Messzeitpunkte, mit dem Vortest, der Befassung mit der Lerneinheit in der E-Lernumgebung und dem Nachtest. Beim zweiten Messzeitpunkt werden die kognitiven und metakognitiven Lernunterstützungen wie oben beschrieben variiert. Dabei ist eine detaillierte Einsicht in die Nutzung der E-Lernmaterialien und in die Bearbeitung der Modellierungsaufgabe mit allen Teilaufgaben möglich. Es werden einmalig Daten zu Computernutzung sowie zum Textverständnis erhoben. Beim Vor- und Nachtest werden die relevanten persönlichen Einstellungen wie auch Lernstrategien neben der Kompetenz (mit proportionalen Zuordnungen) zu modellieren abgefragt und getestet. Zusätzlich werden beim Nachtest Fragen zur Akzeptanz der E-Lernumgebung gestellt.

Das Design der Studie erlaubt es, unterschiedliche Ausprägungen von Hilfestellungen im Hinblick auf die Forschungsfragen zu vergleichen.

Ausblick

Die E-Lernumgebung wird in mehreren Gymnasialklassen des Jahrgangs 8 zur Evaluation zwecks Beantwortung der Forschungsfragen eingesetzt.

Anschließend wird diese E-Lernumgebung im Rahmen einer Online-Lehrerfortbildung zum Modellieren den Mathematik-Lehrkräften zum Ausprobieren in der eigenen Praxis zur Verfügung gestellt. Weitere Informationen zu dieser und anderen thematischen regelmäßigen Fortbildungen sind unter www.prolehre.de zu finden.

Literatur

Atkinson, R.K., Derry, S.J., Renkl, A., & Wortham, D.W. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research, 70,* 181-214.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens* (orig. *How to Solve it*). Francke Verlag: Bern.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA, Harvard Business Press.

Weinert, F.E. (1999). Die fünf Irrtümer der Schulreformer. Welche Lehrer, welchen Unterricht braucht das Land? *Psychologie heute, 26(7),* 28-34.

Christoph WASSNER, Nürnberg

E-Learning in der Unterrichtspraxis

1. E-Learning und Schule

Das Schlagwort „E-Learning“ hat in den letzten Jahren rasant die Bildungslandschaft erobert. Ganz allgemein ist das Lehren und Lernen mit elektronischen (d.h. digitalen) Medien gemeint. Die heutige Bandbreite digitaler Lernmedien und -möglichkeiten wird immer unüberschaubarer. Für Lehrende bedeutet digitaler Medieneinsatz meist ein erhebliches Maß an Mehraufwand in der Vorbereitung. Für sie spielt deshalb die Aufwand-Nutzen-Frage eine große Rolle, die aber vielfach unbeantwortet ist.

E-Learning heute muss mit neuen Lernformen in Verbindung gebracht werden. Während z.B. Computerprogramme im Unterricht oft trotzdem traditionell instruktionistisch benutzt werden, sollte ein mit modernen E-Learning-Werkzeugen gestalteter Unterricht deutlich weiter greifen. Im Sinne konstruktivistischer Theorien kann ein Umstieg auf digitale Medien keinen weiteren Fortschritt bringen, wenn nicht auch das Lernen im Sinne von mehr Selbstständigkeit der Lernenden, Selbststeuerung und Indivisualisierung neu organisiert wird. Elemente von Kommunikation, Interaktion und Kooperation sind für diese Prozesse zentral (Aufenager, 2006). Genau solche Elemente sind die Besonderheit von modernen E-Learning-Plattformen bzw. Lernmanagementsystemen (LMS).

In der Schulpraxis spielen die heute bereits an Universitäten weit verbreiteten E-Lernplattformen erst allmählich eine Bedeutung. Der große Vorteil des selbstständigen, orts- und zeitunabhängigen Lernens, das für viele Studenten eine echte Bereicherung des Lernangebots ist, kann womöglich in der Schule nicht so einfach etabliert und umgesetzt werden. Ich möchte in diesem Artikel aktuelle Nutzungsmöglichkeiten der E-Lernplattform „BayernMoodle“ und einige Probleme des Einsatzes aus Lehrersicht ansprechen. Grundlage ist eine Befragung von Lehrenden, die diese Plattform im Unterricht eingesetzt haben.

2. Die E-Learning-Plattform „BayernMoodle“

In Bayern steht seit letztem Schuljahr allen Schulen der Zugriff auf eine zentral verwaltete E-Learning-Plattform zur Verfügung. Sie basiert auf dem weltweit verbreiteten LMS „MOODLE“[1]. Jeder Lehrende hat die Möglichkeit E-Learning-Kursräume für seine Schüler zu entwerfen und zu administrieren. An allen Schulen wurden Schul-Administratoren fortgebildet,

[1] www.bayernmoodle.de; Für eine genauere Beschreibung des Systems: www.moodle.de

die einerseits die Lehrenden in der Nutzung einweisen und unterstützen sollen, andererseits die schulinterne Kursverwaltung organisieren. Die Kurse können für Klassen- bzw. Kursverbände geschlossen bleiben oder auch nach außen geöffnet werden. Im Dez. 2008 wurden 4200 Kurse und 36000 Nutzer gezählt.

Die Nutzungsmöglichkeiten könnte man in Anlehnung an Aufenanger (2006) in folgende Hauptelemente gliedern:

- Information: Bereitstellung und Management von Lern- und Arbeitsmaterial als einfacher Text, Hypertext, Dateien, Verzeichnisse, Links.
- Interaktion: Bereitstellung interaktiver, hypermedialer Anwendungen (z.B. plug-in für die Einbindung von Geogebra-Arbeitsblättern) bzw. Web-Applets, ohne die Plattform „verlassen" zu müssen.
- Kommunikation zwischen Schüler-Lehrer bzw. Schüler-Schüler mittels Forum, Chat, Abstimmung, Umfrage.
- Kooperation und Kollaboration in Datenbanken, Glossaren, Wikis oder per Blog bzw. Podcast.

Weitere Werkzeuge zielen speziell auf eine Evaluation des Lernens ab und beinhalten dabei kommunikative und kooperative Konzepte: Aufgaben mit online-Bewertung durch Lehrer, Aufgaben mit online-Bewertung durch Schüler (Peer-Assessment), Tests mit verschiedenen Frageformaten bzw. interaktiven Aufgaben (online-Auswertung).

3. Aktivitäten der Kooperation und Kollaboration fördern

Leider kann hier keine detaillierte Vorstellung der Elemente von Lernmanagementsystemen wie „MOODLE" erfolgen. Besonders herausgestellt seien Aktivitäten der Kooperation und Kollaboration, die auch oft unter dem Begriff „Web 2.0" zusammengefasst werden. Es gilt zu erkennen, dass unsere Jugendlichen heute in der Freizeit regelmäßig in virtuellen Netzwerken aktiv sind.[2] Sogenannte „Social Networks" sind deswegen für junge Menschen so attraktiv, weil sie eine Art „Mitmach-Netz" sind. „Mitmach-Aktivitäten" (wie z.B. Wikis, Glossare, Blogs) erlauben den Nutzern nicht nur das „Konsumieren" von (Web-)inhalten, sondern auch das Produzieren und Verknüpfen, das Verändern, Kommentieren und Bewerten. Übertragen auf pädagogische Aufgaben könnte so eine immer wieder geforderte neue Unterrichtskultur unterstützt werden: Unterricht öffnen, Außenwelt einbe-

[2] Z.B. die in Deutschland meistbenutzten Plattformen für Jugendliche sind StudiVZ mit über fünf Millionen registrierten Nutzern und SchülerVZ mit rund 4,5 Millionen.

ziehen, Selbstständigkeit bei Lernprozessen stärken, Handlungsorientierung, Teamfähigkeit betonen (Peschke et al., 2007).

Wie eigenen sich nun diese Werkzeuge für den Mathematikunterricht? Hier scheint es bis auf einige Ausnahmen noch nicht viel Erfahrung, geschweige denn gesicherte Erkenntnisse zu geben.[3] Eine interessante Herausforderung bieten mit der Einführung der neuen gymnasialen Oberstufe in Bayern die sogenannten Seminare. Das „W-Seminar“ hat wissenschaftorientiertes Arbeiten und die Erstellung einer schriftlichen Seminararbeit zum Ziel (vgl. Tschacher, in diesem Band), das „P-Seminar“ praxisorientiertes Arbeiten in Form von Projekt(gruppen)arbeit in Kontakt mit der Arbeitswelt. Es handelt sich um Seminargruppen, in denen Kooperation und Kollaboration zwischen Lehrer, Schülern und ggf. externen Partnern absolut notwendig, in P-Seminaren[4] sogar ein Hauptfokus ist. Offensichtlich ist es bei 2 Schulwochenstunden absolut unrealistisch, dass die nötige Zusammenarbeit immer im Rahmen persönlicher Treffen erfolgen kann. Die Möglichkeiten einer E-Plattform mit Forum, Wiki, Datenbank, Glossar etc. sind geradezu unverzichtbar. Trotz überwiegend kollaborativer Arbeit können individuelle Projektbeiträge jederzeit auch explizit eingefordert werden, z.B. mittels Terminaufgaben. Von jedem Schüler soll eine schriftliche Dokumentation der im Rahmen des Projektes geleisteten individuellen Beiträge erfolgen, um den individuellen Lern- und Entwicklungsprozess zu dokumentieren und zu überdenken. Für diese sog. „Portfolios“ eignen sich hervorragend Weblogs, also digitale Journale bzw. Tagebücher, die auch in MOODLE geführt werden können. Solche E-Portfolios können als eine Methode selbstgesteuerten Lernens wesentliches Lernprodukt des Seminars sein.[5]

4. Erste Rückmeldungen von Lehrenden

In einer kleinen Umfrage mittels Fragebogen unter 25 Mathematiklehrern, die mit dem LMS BayernMoodle gearbeitet haben, können erste Erfahrungen zusammengefasst werden.

Nutzung: Das LMS wurde hauptsächlich zur Bereitstellung von weiterem Lernmaterial und weiteren Informationen benutzt. Diese Dienste könnten aber auch einfache Webseiten (z.B. interne Bereiche der Schulhomepage) leisten. An zweiter Stelle in der Einsatzhäufigkeit, aber deutlich seltener genannt, rangierten Lernlektionen, etwa vergleichbar mit den bereits zahlreich im Internet zu findenden Lernpfaden. Gleich selten werden auch

---

[3] Beispiele: Projekt WiLM@ zum kooperativen Lernen im MU der Primarstufe (Reinhard, 2008); Unfassendere Erfahrungen mit Wikis im Schulunterricht in Schweizer Schulen unter http://wiki.doebe.li .

[4] Beispielsweise zum Thema „Planung und Durchführung einer statistischen Erhebung und Datenanalyse in Zusammenarbeit mit einer Jugendorganisation“

[5] Erfahrungen hierzu bietet u.a. das E-Portfolio-Projekt der Uni Giessen http://www.eportfolio-hessen.de .

Kommunikationsforen eingesetzt. Nahezu gar nicht erfolgte der Einsatz kooperativer „Web 2.0“-Elemente wie Wiki, Glossar, Blog. Wesentliche Möglichkeiten der LMS für das Lehren und Lernen werden offensichtlich noch nicht ausgeschöpft.

Nutzenbewertung: Der Einsatz von LMS wurde besonders unter folgenden Aspekten als sinnvoll und förderlich im MU angesehen: Erweiterung des Lernangebotes durch zusätzliche Werkzeuge und die Zeit-, Orts-, Geschwindigkeitsunabhängigkeit des Lernens (Individualisierung). Am wenigsten wurde von den Lehrenden den folgenden Aussagen zugestimmt: „LMS bieten für die Lernenden erweiterte Möglichkeiten der Artikulation und Selbstreflexion“ und „Traditionelle Lernkonzepte werden aufgebrochen und flexiblere, netzwerkartige Formen werden unterstützt“. Dieses Ergebnis weist darauf hin, dass Lehrende den Einsatz von LMS nicht unbedingt mit einer zwangsläufigen Veränderung von Unterrichtsformen bzw. der Unterrichtskultur in Verbindung bringen, die aber Voraussetzung für den sinnvollen Gebrauch ist.

Probleme: Am problematischsten wurde ein verstärkter Einsatz von LMS aus technisch-organisatorischer Sicht beurteilt. Schüler haben im Elternhaus nicht immer einen Zugang zu PC und Internet. Für Lehrende ergeben sich ebenfalls erhebliche Barrieren im Hinblick auf Nutzungskompetenz und Bereitschaft zu anfänglichem Mehraufwand. Ein zweiter relativ relevant beurteilter Kritikpunkt waren die oft fehlenden Selbstlernkompetenzen und unzureichende Selbstlernbereitschaft der Schüler, da sie womöglich zu wenig Gelegenheiten haben diese im „normalen“ Unterricht aufzubauen. Relativ unproblematisch hingegen wird die nötige Standardisierung von Lerninhalten und die allgemeine Akzeptanz von Computermedien beurteilt. Diese positivere Grundhaltung könnte auf der sich in den letzten Jahren etablierenden Verwendung von allgemeinen Computermedien (nicht unbedingt jedoch LMS) im Unterrichtsalltag zurückzuführen sein. Die bisher am meisten verwendeten Formen von E-Learning im Unterricht (außer LMS) waren bei den befragten Lehrern computerbasierte Trainingsanwendungen (Lernsoftware) und Simulationen am Computer.

Literatur

Aufenanger, S. (2006). E-Learning in der Schule, Computer + Unterricht 16, Heft 62, S.6-10.

Peschke, R., Rüddigkeit, V., Wagner, W (2007). Web 2.0 und Schule. Computer + Unterricht 17, Heft 66, S.6-9.

Reinhard, Christian (2008). Wiki-basierte Lernumgebung zum kooperativen Lernen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe – wiLM@. In: Vásárhelyi, E. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Hildesheim: Franzbecker.

Claudia BÖTTINGER, Essen

Moderierte Sektion: Analyse und Reflexion mathematischer Kommunikationsprozesse im Unterricht - Besonderheiten mathematischer Deutungen

1. Einleitung/Überblick

In der Sektion werden in drei Vorträgen epistemologische Besonderheiten der Deutung mathematischer Zeichen in unterschiedlichen Kontexten des Mathematikunterrichtes in der Grundschule thematisiert. Insbesondere werden die interaktiven mathematischen Wissenskonstruktionen in einem Spannungsfeld zwischen „empirisch-situierten“ und „relational-abstrakten Deutungen“ analysiert.

H. Steinbring stellt in seinem Beitrag heraus, dass der Begriff der Kultur für Mathematik und Mathematikunterricht von Bedeutung ist, weil Zeichen und Symbole sowie der richtige Umgang damit eine ganz zentrale Rolle spielen. Eine wesentliche Aufgabe des Unterrichts besteht darin, Schülerinnen und Schüler in den Gebrauch dieser Symbole einzuführen und mathematische Kommunikationen beziehen sich auf Deutungen mathematischer Zeichen und Symbole.

Er stellt die Besonderheiten der mathematischen Unterrichtskultur aus zwei verschiedenen Perspektiven daher näher dar: Die Besonderheiten der *Kommunikation* und die Besonderheiten *mathematischen Wissens*. Beiden Perspektiven ist gemeinsam, dass die zur Diskussion stehenden Objekte nicht direkt und unmittelbar von einem Individuum zum anderen in eindeutiger Weise vermittelt werden können. Sie müssen gedeutet werden. Daher ist gerade im Mathematikunterricht von zentraler Bedeutung, in welcher Weise über die abstrakten, nicht sichtbaren mathematischen Objekte gesprochen wird. Beide Aspekte und die daraus resultierenden Besonderheiten für den Mathematikunterricht werden aus theoretischer Perspektive unter Bezug zu sozialwissenschaftlichen und mathematikdidaktischen Theorien vorgestellt. Die Art der Kommunikation wird einerseits von den beteiligten Personen und andererseits von der Art des zur Diskussion stehenden mathematischen Gegenstands bestimmt. Anschließend werden zwei empirische Untersuchungen vorgestellt, die genau diese beiden Aspekte näher in den Fokus nehmen. Zum einen geht es um die Kommunikation zwischen Schülern, die jahrgangsgemischt unterrichtet werden. M. Nührenbörger analysiert in welcher Weise jahrgangsältere und jahrgangsjüngere Kinder (in einer experimentellen Situation) miteinander über mathematische Inhalte sprechen und welche Besonderheiten sich aus dieser speziellen Konstellation ergeben. Zum anderen geht es um die besondere Rolle von Anschauungsmitteln als Träger mathematischer Strukturen. E. Söbbeke stellt vor, in welcher Weise es möglich ist, mithilfe eines Tests sowohl die mathematische Deutung als auch den zugehörigen Begründungskontext zu erfassen.

2. Besonderheiten mathematischer Diskurse

Da Kommunikation sich nicht als einfaches Sender-Empfänger-Modell beschreiben lässt, bezieht H. Steinbring sich auf das Modell des Soziologen Luhmann, der detailliert beschrieben hat, in welcher Weise Kommunikation ermöglicht wird und entwickelt es speziell im Hinblick auf Kommunikation über Mathematik weiter. M. Nührenbörger führt dies fort, indem er die Besonderheiten mathematischer Diskurse auf der Grundlage bestehender Diskurstheorien entwickelt. Für den jahrgangsgemischten Mathematikunterricht, den er in besonderer Weise empirisch untersucht hat, arbeitet er heraus, dass diese Diskurse von dem „besonderen Potenzial der vorausschauenden oder aber (…) rückblickenden Umdeutung vertrauter Zeichen und Kontexte“ geprägt sind. Dies zeigt eine neue Facette auf, in welcher Weise Besonderheiten der Deutung und Umdeutung mathematischer Zeichen für den Erwerb mathematischen Wissens von Bedeutung sind.

3. Besonderheiten der Deutung mathematischer Zeichen

Mathematische Objekte und Begriffe stellen Beziehungen dar, sie beschreiben Muster und Relationen und im Gegensatz zu klassischen Naturwissenschaften kann man sie nicht empirisch untersuchen. Man kann sie lediglich mithilfe von Zeichen oder Symbolen beschreiben, darf sie aber nicht mit diesen Zeichen verwechseln und schon gar nicht darauf reduzieren. H. Steinbring hat das Instrument „Epistemologische Dreieck“ entwickelt, mit dessen Hilfe es möglich ist, die Beziehungen zwischen dem begrifflichen Wissen, dem Zeichen zur Kodierung des Wissens und dem Referenzkontext zur Etablierung der Bedeutung des Wissens zu analysieren. E. Söbbeke baut darauf auf und zeigt auf, dass Arbeits- und Anschauungsmitteln unter dieser Perspektive epistemologische Werkzeuge sind und nicht reduziert werden dürfen zu rein methodischen Hilfsmitteln. Sie stellt die Rolle von *Kontext* und *Rahmung* für eine relationale Nutzung heraus. Auf dieser Basis hat sie einen Test entwickelt, um nicht nur mathematische Deutungen von Arbeits- und Anschauungsmitteln (in Anlehnung an ihr Konzept der visuellen Strukturierungsfähigkeit) zu erheben, sondern auch die zugehörigen Rahmungen. Diese werden zunächst mithilfe von Interviews interpretativ erhoben. Im Rahmen eines Two-Tiers-Test soll es darum gehen, einen gut passenden Rechensatz sowie den zugehörigen Sinngebungskontext zu einer Veranschaulichung auszuwählen.

Heinz STEINBRING, Essen

Ist es möglich mathematische Bedeutungen zu kommunizieren? – Epistemologische Analyse interaktiver Wissenskonstruktionen

Mathematikunterricht als eine eigenständige Kultur – Welchen Bedingungen unterliegt Kommunikation und kann man ›unsichtbares‹ mathematisches Wissen mitteilen?

Die Rolle des Kulturbegriffs ist für die wissenschaftliche Mathematik und die Schulmathematik von verschiedenen Autoren betont worden (Wilder 1986, Bishop 1988). Wilder (1986) charakterisiert den Begriff von Kultur folgendermaßen: „A culture is the collection of customs, rituals, beliefs, tools, mores, etc., which we may call cultural elements, possessed by a group of people, …“ (Wilder 1986, S. 187). Und: „Without a symbolic apparatus to convey our ideas to one another, and to pass on our results to future generations, there wouldn't be any such thing as mathematics – indeed, there would be essentially no culture at all, since, … culture is based on the use of symbols….“ (Wilder 1986, S. 193).

Mathematische Zeichen und Symbole haben in den jeweiligen – historischen – mathematischen Kulturen eine außerordentliche Bedeutung. In der Unterrichtskultur werden die Schülerinnen und Schüler in den Gebrauch von mathematischen Symbolen eingeführt und mathematische Kommunikationen beziehen sich auf Deutungen mathematischer Zeichen und Symbole.

Probleme für die *mathematische* Unterrichts*kultur*: (1) Kommunikation funktioniert nicht gemäß dem Sender-Empfänger-Modell – Wie wird Kommunikation möglich? (2) Mathematisches Wissen ist nicht konkret greifbar – Wie kann ›unsichtbares‹ mathematisches Wissen interaktiv konstruiert werden?

(1) Der Soziologe Niklas Luhmann charakterisiert »Kommunikation« als den Grundbegriff der Soziologie „… wenn Kommunikation zustande kommen soll, muss ein … geschlossenes … autopoietisches System in Tätigkeit treten, nämlich ein soziales System, das Kommunikationen durch Kommunikationen reproduziert und nichts weiter tut als dies.“ (Luhmann 1996, S. 279)

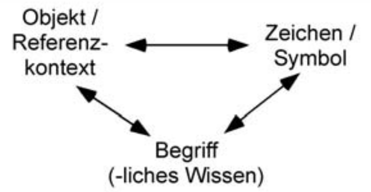
Das Konzept des ›autopoietischen Systems‹ ist von Maturana und Varela (vgl. z. B. 1987) eingeführt worden. Diese Systeme existieren und entwickeln sich autonom durch ihren selbst-referentiellen Bezug. Sie bestehen aus Komponenten, die im System permanent zum Systemerhalt hergestellt werden. Hiermit werden biologische Vorgänge aber auch soziale und psychische Prozesse charakterisiert.

Wodurch unterscheiden sich soziale und psychische Systeme und wie beziehen sie sich auf einander? Das psychische System basiert auf Bewusstheit und das soziale System basiert auf Kommunikation. „Ein soziales System kann nicht denken, ein psychisches System kann nicht kommunizieren. Kausal gesehen gibt es trotzdem immense, hochkomplexe Interdependenzen“ (Luhmann 1997, S. 28). Wie lassen sich diese Interdependenzen verstehen? „Kommunikationssysteme und psychische Systeme (oder Bewusstsein) bilden zwei klar getrennte autopoietische Bereiche; … Diese beiden Systemarten sind jedoch in einem besonders engen Verhältnis miteinander verbunden und bilden wechselseitig eine »Portion notwendiger Umwelt«: Ohne Teilnahme von Bewusstseinssystemen gibt es keine Kommunikation, und ohne Teilnahme an Kommunikation gibt es keine Entwicklung des Bewusstseins“ (Baraldi, Corsi & Esposito 1997, S. 86).

Wie ist Kommunikation möglich? Nach Luhmann werden wechselweise von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern im kommunikativen System durch *Mitteilungen* (bzw. Handlungen) ›Bezeichnende‹ als Hinweise auf *Informationen* (›Bezeichnete‹) gegeben. Der Mitteilende kann nur ein Bezeichnendes mitteilen, aber das vom Mitteilenden intendierte Bezeichnete, welches dann erst zu einem verstandenen Zeichen führen kann, bleibt offen und relativ unbestimmt; es kann nur vom Mitteilungsempfänger hergestellt werden, indem er selbst ein neues Bezeichnendes artikuliert. Der Empfänger darf das mögliche Bezeichnete *nicht strikt* dem Redner zuordnen, er muss es ›selbst herstellen‹, es entsteht in der sozialen Kommunikation.

(2) Mathematische Begriffe sind keine empirischen Dinge, sondern stellen Beziehungen dar. Raymond Duval erklärt diese Position als den „paradoxical character of mathematical knowledge“: „... there is an important gap between mathematical knowledge and knowledge in other sciences such as astronomy, physics, biology, or botany. We do not have any perceptive or instrumental access to mathematical objects, even the most elementary, ... The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings. But, at the same time, mathematical objects must not be confused with the used semiotic representations. This conflicting requirement makes the specific core of mathematical knowledge. And it begins early with numbers which do not have to be identified with digits and the used numeral systems (binary, decimal)“ (Duval 2000, S. 61).

Das epistemologische Dreieck stellt ein theoretisches Instrument dar, um dieses semiotische Problem zu behandeln. Man kann mathematisches Wissen nicht auf Zeichen und Symbole reduzieren. Der Zusammenhang zwischen den Zeichen zur Kodierung des Wissens und den Referenzkontexten zur Etablierung der Bedeutung des Wissens lässt sich im epistemologischen Dreieck darstellen (vgl. Steinbring 2005):

Die Beziehungen zwischen den Eckpunkten dieses Dreiecks bilden ein sich wechselweise stützendes und ausbalancierendes System. In der weiteren Entwicklung des Wissens werden durch den Lernenden dann die Deutungen der Zeichensysteme und der gewählten zugehörigen Referenzkontexte modifiziert bzw. verallgemeinert.	 Fig.1: Das Epistemologische Dreieck

Warum scheinen mathematische Kommunikationen im Unterricht trotz der beiden Grundprobleme oft reibungslos zu funktionieren?

Bei der Art seiner Erklärung, die der Schüler Matthi in einer kurzen Beispielszene gibt, um die Erhöhung eines Steines in der zweiten Reihe (abhängig von der Erhöhung des ersten Steines in der ersten Reihe) einer vierstufigen Zahlenmauer zu begründen, benutzt er viele Gesten des direkten Zeigens auf Mauernsteine, des Zeigens mittels Gleiten zwischen Steinen von verschiedenen Mauern, und durch wenige, kurze verbale Äußerungen wie: „Der da“, „und hier“, und „weil der außen ist“. Einen Stein bezeichnet er mit „der ist 10 mehr, weil der 10 mehr ist„.

Mit seinen vielen Gesten und wenigen, knappen verbalen Äußerungen gelingt es Matthi, in situationsgebundener Weise für die vorgegebene mathematische Problemstellung eine zureichende Erklärung zu geben – er kann in dieser Art mathematisch kommunizieren, indem er auf die ›Objekte‹ (Zahlen und Steine) direkt zeigt, er scheint in seiner Kommunikation das von ihm intendierte Bezeichnete direkt kommunizieren zu können und die doch ›unsichtbare‹ Mathematik sichtbar zu machen. Wie ist das möglich?

Durch diese Weise der Kommunikation seines Wissens ›objektifiziert‹ Matthi die Zahlen, Steine und Mauern. Er nutzt sie als Objekte, auf die er zeigt und die er mit einander in Beziehung setzt und vergleicht, indem er sie durch Gesten des Gleitens verknüpft. Durch die Beschreibung »zehn mehr« verleiht Matthi den Steinen eine spezielle – allgemeine – Eigenschaft. Diese Formen der Kommunikation scheinen automatisch und ohne Missverstehen zu funktionieren. Gibt es dann ein ernsthaftes Problem, theoretisches mathematisches Wissen zu kommunizieren?

Die menschliche Kommunikation muss von Mitteln Gebrauch machen, die sich in der Menschheitsgeschichte entwickelt haben. „Auch dort, wo die

Sprache zu ihren höchsten, spezifisch-gedanklichen Leistungen fortschreitet, wo sie, statt Dinge oder Eigenschaften, Vorgänge oder Handlungen zu benennen, vielmehr reine Beziehungen und Verhältnisse bezeichnet, geht dieser rein signifikative Akt über bestimmte Schranken der konkret anschaulichen Darstellung zunächst nicht hinaus. Immer wieder schiebt sich der logischen Bestimmung ein Bild, ein Schema der Anschauung unter" (Cassirer 1990, S. 527).

Die Steine in Matthis Zahlenmauern sind keine realen Steine mehr, sie erhalten eine neue Existenz und eine *geänderte Bedeutung im Rahmen einer mathematischen Struktur*. Die lernenden Schülerinnen und Schüler müssen diese ›Bedeutungs-Verschiebung‹ erkennen – und oft gelingt es ihnen auch unbewusst und ohne jegliche Probleme.

Die konkreten Gegenstände – das greifbare Arbeits- und Anschauungsmaterial z.B. – gewinnen eine neue – eine *symbolische* – Existenz und sie müssen im Rahmen von Mustern, Strukturen und Beziehungen neu gedeutet werden. Die beiden genannten fundamentalen Einschränkungen für die mathematische Kommunikation treten dann zu Tage und wirken sich hinderlich aus, wenn mathematische Kommunikationsprozesse nicht mehr reibungslos verlaufen, sondern auf Grund von Miss-Deutungen kollabieren.

Literatur

Baraldi, C., Corsi, G. & Esposito, E. (1997). *GLU. Glossar zu Niklas Luhmanns Theorie sozialer Systeme.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cassirer, E. (1990). *Philosophie der symbolischen Formen, Band 3: Phänomenologie der Erkenntnis.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24thInternational Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 55 - 69). Hiroshima, Japan: Nishiki Print Co., Ltd.

Luhmann, N. (1997). *Die Gesellschaft der Gesellschaft*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Maturana, H. R. & Varela, F. J. (1987). *Der Baum der Erkenntnis. Die biologischen Grundlagen des menschlichen Erkennens*. Bern, München: Scherz.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective*. Berlin, New York: Springer.

Wilder, R. L. (1986). The Cultural Basis of Mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (pp. 185 - 199). Boston: Birkhäuser.

Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund

Diskursives Lernen im Mathematikunterricht - Interaktive Wissenskonstruktionen von und mit Kindern im jahrgangsgemischten Anfangsunterricht

Ein Diskurs bezeichnet ein erörterndes, hin- und hergehendes Gespräch zwischen Personen in einem sozialen Kontext. Nach Keller (2007) wird im Diskurs eine soziale Praxis der Verständigung mittels Sprache in alltäglichen oder aber auch institutionellen Kontexten konstruiert; Sprecher und Hörer stehen sich gegenüber. Auf den schulischen Kontext bezogen beschreibt der Diskurs – wie es Artzt und Armour-Thomas (2002, 16) darlegen – „(...) the verbal exchange among members of the community in the classroom, both teachers and students." Diskurse sind somit keine kommunikativen Einbahnstraßen, sondern immer das Resultat aller daran Beteiligten. Grundlegende Aspekte eines Diskurses sind: inhaltsbezogene Kommunikation (Klärung des Inhalts) - aufgabenbezogene Koordination (Klärung der Aufgabeninterpretation und -bearbeitungsweise sowie des jeweiligen Rederechts) - sonstige Kommunikation (Klärung alltagsbezogener Inhalte).

1) Diskursive Lernprozesse

Lernen im *Dialog mit anderen* basiert grundlegend auf der Fokussierung auf eine inhaltsbezogene Kommunikation, die kooperative Verständigungsbereitschaft der Lernenden; letzteres impliziert die Fähigkeit, sich auf die Sichtweisen der am Diskurs Beteiligten einzulassen. Zentral ist nach Miller (2006), dass ein „diskursiver Kontext der Entdeckung" konstruiert wird, in dem ein Dissens geklärt wird. „Ein diskursiver Kontext der Entdeckung lässt sich bestimmen und eingrenzen als das in kollektiven Argumentationen entstehende Netzwerk möglicher Gedanken oder Teilargumente, die zwischen entgegen gesetzten Ansichten (...) vermitteln und sie eventuell sogar in Einklang bringen" (Miller 2006, 216). Im Diskurs wird eine „strittige Frage" verhandelt; d.h. es werden Differenzen in Bezug auf einen zentralen inhaltlichen Aspekt ausgemacht. Der Dissens wird in einem Akt rationaler Auseinandersetzung exploriert, hervorgebrachte Argumente werden analysiert, geprüft und weiter entwickelt. Letztlich bewegt sich der Diskurs im Spannungsfeld zwischen dem Dissens über die strittige Frage und dem gemeinsam angestrebten Konsens mit Hilfe von Argumenten. Schwarzkopf (2003, 212) versteht unter einem Argument die in „(...) Prozessen zwischen den Individuen produzierten und im Sinne einer Begründung zueinander in Beziehung gesetzten (schul-)mathematischen Inhalte." Wenn aber kaum oder keine Argumente angeführt und ausgehandelt werden und zugleich ein Konsens erzielt wird, gehen die am Diskurs Beteiligten der Strittigkeit aus dem Weg. Nach Miller (2006) beseitigt ein voreiliger Konsens die Anreize fürs diskursive Lernen.

Was aber macht diskursives Lernen aus? Der Diskurs hat eine entscheidende Rolle bei der Reproduktion und potentiellen Veränderung einer gemeinsamen Verständigung über Erkenntnisse inne, in denen letztlich jedes strukturelle Wissen gründet: „Nur von solchen sozialen bzw. kommunikativen Prozessen, deren primäres Ziel und deren Funktionsweise genau darin besteht, interpersonelle Koordinationsprobleme zu identifizieren und eine gemeinsame Erfahrungsbasis für eine Lösung jener Koordinationsprobleme zu entwickeln, kann ... angenommen werden, dass durch sie jene Prozesse eines fundamentalen Lernens ausgelöst werden können. Nur ein sozialer bzw. kommunikativer Handlungstyp scheint diese Bedingung zu erfüllen, und dies ist der Diskurs“ (Miller 2006, 74).

2) Besonderheiten diskursiven Lernens von Mathematik (im jahrgangsgemischten Anfangsunterricht)

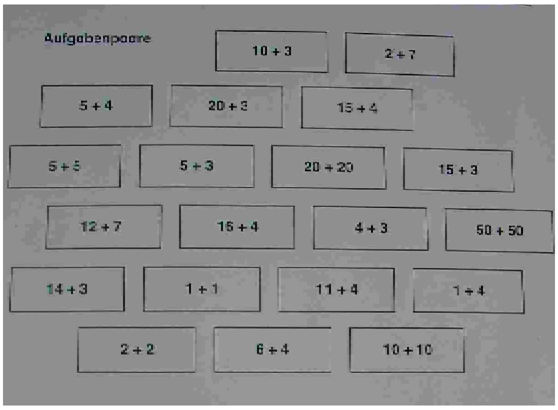
Im Kontext Mathematik kommt dem diskursiven Lernen eine besondere Rolle zu, da sich mathematisches Wissen letztlich im Wechselspiel sozialer Bedeutungs- und individueller Deutungsprozesse über Zeichen und Symbole vollzieht (vgl. Steinbring 2005). Hierbei bewegt sich das in der Kommunikation konstruierte Wissen in Balance zwischen der Konstruktion eigener Deutungen und der Vermittlung mathematischer Fakten, Regeln, Verfahren und konventionalisierten Bedeutungen. Steinbring (2005) weist auf eine strukturelle Besonderheit des diskursiven Lernens von Mathematik hin: Die in der Kommunikation vermittelten Ideen sind für alle Gesprächsteilnehmer zu konstruieren; allerdings können sie als strukturelles, abstraktes, nicht sichtbares Wissen nicht direkt gezeigt und benannt werden. Vor diesem Hintergrund bezeichnet eine strittige mathematische Frage die Differenz zwischen unterschiedlichen strukturellen Deutungen: Mathematiklernen im Dialog mit anderen zielt auf die Verständigung der Lernenden über eigene und fremde, auch irritierende Sichtweisen auf Strukturen.

Im Gespräch sind Äußerungen, Gesten und Zeichen symbolisch im Hinblick auf die potentielle Deutung mathematischer Beziehungen zu sehen, zu deuten oder zu erkennen – d.h. die Schüler stehen im Mathematikunterricht vor der besonderen Herausforderung, Wissen zu konstruieren und zu vernetzen, indem sie sich bei Zeichen und zugehörigen Referenzkontexten immer von der Konkretheit der Situation lösen und diese mit Blick auf einen neuen strukturellen Zusammenhang umdeuten (vgl. Steinbring 2005).

Schulisches Lernen von Mathematik findet in einer eigenen Kultur der Deutung von Zeichen und der Teilnahme an Kommunikationsprozessen statt (vgl. Steinbring 2005). Wenn Kinder aus benachbarten Einschulungsjahrgängen und somit mit diversen schulmathematischen Erfahrungshintergründen zusammen arbeiten, kann sich zwischen ihnen als weitere Besonderheit der diskursiven Konstruktion mathematischer Deutungen das Spannungsfeld zwischen dem vorausschauenden und rückblickenden Lernen aufspannen. Denn das Gespräch ist auch von der schulkulturell gewonnenen Erfahrung mit der Deutung mathematischer Zeichen und dem schulmathematischen Diskurs geprägt (vgl. Nührenbörger 2007).

3) Analoge Aufgaben: Ein diskursiver Kontext der Entdeckung

Die hier exemplarisch diskutierte Szene aus dem jahrgangsgemischten Anfangsunterricht thematisiert die Passung von Termen im Zahlenraum bis 100. Die Schüler sind aufgefordert, während der Arbeitsphase Deutungen über die Passung von Aufgaben vorzunehmen und diese im Zuge der Verständigung auszuhandeln (vgl. Nührenbörger & Pust 2006). Zu Beginn der Szene haben die Schüler chris und DAVID (der jahrgangsjüngere wird klein, der jahrgangsältere groß geschrieben) bereits die Aufgabenpaare „1+1, 10+10“ - „2+2, 20+20“ - „5+5, 50+50“ - „1+4, 11+4“ - „5+3, 15+3“ notiert, als chris „20+3“ aufschreibt. Hieran entwickelt sich eine Deutungsdifferenz über eine mögliche passende Aufgabe:



Chris schlägt als Term „4+3“ vor und versucht die „nicht sichtbare“ Beziehung der beiden Terme sichtbar zu machen, in dem er auf die Zahlen zeigt und diese gezielt benennt: „Nimm doch das ... Das ist 20 ... und das da.“ Mit Bezug auf die elementare Deutung einer Beziehung zwischen den 2. Summanden - wie bei den Paaren „1+4, 11+4“ und „5+3, 15+3“ - konstruiert er eine *konventionell-empirische Deutung* der Aufgabenpaare. Dieser empirische Diskursbeitrag wird von DAVID nicht (an)erkannt. Er teilt chris mit der Metapher „verwandt“ mit, dass es keine passende Aufgabe gibt, so dass der Dissens zwischen den beiden unaufgelöst bleibt („Das passt irgendwie nicht ... Wir müssen doch die verwandte Aufgabe finden“).

Als die Lehrerin in diesem Moment zu den Kindern tritt, entsteht ein neuer sozialer Kontext, der auf veränderte Weise den Diskurs neu initiiert. Die Kinder fühlen sich durch die stumme Zurückhaltung der Lehrerin (diese setzt sich zu den Kindern, ohne etwas zu sagen) aufgefordert, ihren Diskurs wieder aufzunehmen. Mit Bezug auf die Deutung einer Beziehung zwischen den 1. Summanden - wie bei den Paaren „1+1, 10+10“ und „5+5, 50+50“ konstruiert DAVID eine *konstruktiv-empirische Deutung* der Aufgabenpaare, indem er den nicht existierenden Term „2+3“ benennt.

Als die Lehrerin von DAVID aufgefordert wird zu helfen und diese einen methodischen Impuls gibt, erkennt er eine neue Beziehung zwischen dem von chris genutzten Referenzkontext („1+4, 11+4“ und „5+3, 15+3“) und den Aufgaben „20+3“ und „10+3“: Er deutet den alten Kontext um und konstruiert mittels Zeigen auf die entsprechenden Terme eine Beziehung zwischen den 1. Summanden. Diese Erkenntnis bringt er als „strukturell-mathematisches Argument“ (Schwarzkopf 2003, 227f) in den Diskurs ein: „Weil da nur zehn, also ein Zehner weg ist ... Wenn man hier ja bei der Zehn einen Zehner weg nimmt, dann ist das ja zehn“. Die neu erkannte Beziehung wird im Diskurs dadurch ***bedeutsam***, indem konkret-sichtbare Zeichen und Streifen als strukturelle Objekte genutzt und deren Beziehungen anschaulich per Gesten und Verbalisierungen darzustellen versucht werden.

4) Resümee

Mathematische Diskurse im jahrgangsgemischten Unterricht sind nicht allein von spezifischen sozialen Kontexten geprägt (vgl. Nührenbörger & Steinbring 2009), sondern auch vom besonderen Potential der vorausschauenden oder - wie im Beitrag exemplarisch angeführt - rückblickenden Umdeutung vertrauter Zeichen und Kontexte. Dadurch kann der Diskurs strukturell-mathematische Formen annehmen, auch wenn nicht unbedingt Konsens über einen Dissens erzielt wird. „Erforderlich ist lediglich, dass das Verfahren des gegenseitigen Verstehens von Differenzen in Gang kommt; und je komplexer und undurchsichtiger die Differenzen sind, desto radikaler und tiefgehender kann das Lernen sein“ (Miller 2006, 217f). Anregungen erfährt ein schulmathematischer Diskurs durch *Aufgaben zum Deuten* und konkrete *Aufforderungen zum Deuten*, die auf das gegenseitige Verstehen eigener und fremder Deutungen abzielen. Dieses wiederum ist davon geprägt, dass die Kinder ihre Ideen über abstrakte mathematische Beziehungen im Diskurs mittels Gesten und verbalen Hinweisen kommunizieren.

Literatur

Artzt, A. & Thomas-Arnour, E. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher*. New York: Erlbaum.

Keller, R. (2007). *Diskursforschung.* (3. Aufl.). Wiesbaden: VS.

Miller, M. (2006). Dissens. *Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens*. Bielefeld: transcript verlag.

Nührenbörger, M. (2007), Unterrichtsgespräche zwischen Schülern und Lehrkräften in jahrgangsgemischten Kleingruppen. In K. Möller u.a. (Hrsg.), *Qualität von Grundschulunterricht entwickeln, erfassen und bewerten* (245-248). Wiesbaden: VS.

Nührenbörger, M. & Pust, S. (2006). *Mit Unterschieden rechnen*. Seelze: Kallmeyer.

Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2009). Forms of mathematical interaction in different social settings. *Journal of Mathematics Teacher Education* (DOI 10.1007/s10857-009-9100-9)

Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen. *Journal für Mathematikdidaktik, 24* (3/4), 211-235.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. Berlin: Springer.

Elke SÖBBEKE, Duisburg-Essen

Welche Faktoren beeinflussen eine strukturorientiert relationale Deutung von Anschauungsmitteln?

Ansätze zur Erhebung möglicher Rahmungen bei der Interpretation von Anschauungsmitteln in der Grundschule

Anschauungsmittel und Mathematiklernen

- Epistemologische Perspektive -

Sollen Anschauungsmittel als Denk- und Artikulationsmittel im Mathematikunterricht genutzt werden, ist es unerlässlich diese nicht ausschließlich in einer direkten und eindeutigen Weise zu nutzen, sondern sie notwendigerweise bewusst in ihrer Mehrdeutigkeit zu verstehen. Die unten angeführten verschiedenen Gebrauchs- und Nutzungsweisen der beiden Punktefelddarstellungen (Abb.1) sollen diese Mehrdeutigkeit verdeutlichen:

1. Gebrauchsweise: „Addition von Mengen“:

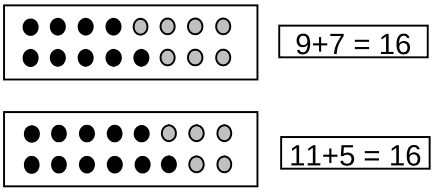


Abb. 1

Hier werden beide Darstellungen weitgehend getrennt voneinander betrachtet, zudem stehen vor allem die konkreten Eigenschaften des Materials im Vordergrund: Die Anzahl der roten und blauen Plättchen kann gelegt oder gezeichnet und anschließend zur Bestimmung der Summe abgezählt werden.

2. Gebrauchsweise: „Operative Veränderungen vornehmen und nutzen“:

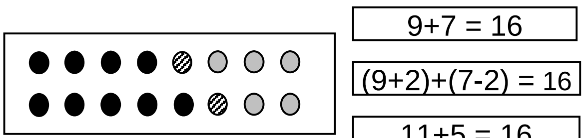


Abb. 2

Demgegenüber könnten Kinder auch eine Beziehung zwischen beiden Punktefelddarstellungen herstellen, hierüber operative Beziehungen entdecken und erste Deutungen entwickeln, dass bei gegensinniger Veränderung zweier Summanden die Summe immer gleich bleibt.

3. ***Gebrauchsweise: „Gesetzmäßigkeiten erkennen und erklären“:***

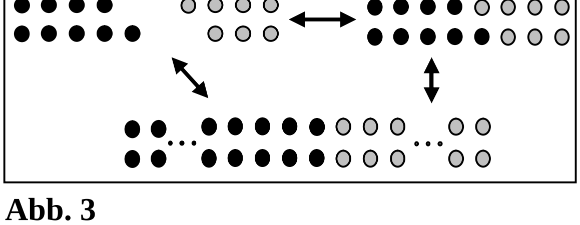


Abb. 3

In einer dritten Gebrauchsweise könnte das Verallgemeinerbare in beiden Darstellungen im Vordergrund stehen. Hier spielen die konkreten Eigenschaften und Anzahlen eine untergeordnete Rolle, vielmehr stehen die Strukturen im Vordergrund der Betrachtung und ermöglichen die Deutung einer übergeordneten Beziehung: die Addition zweier ungerader Zahlen muss *immer* eine gerade Zahl ergeben.

Die verschiedenen Deutungen und Sichtweisen ein und desselben Materials sind fundamental für den Aufbau eines nachhaltig stabilen mathematischen Wissens. Insofern können Kinder nicht eine festgelegte, eindeutige „Bedeutung" von Anschauungsmitteln wie einen klassischen „Lernstoff" auswendig lernen, vielmehr müssen sie von Anfang an in eine spezielle Deutungs*kultur* eingeführt werden, die sich bewusst mit der Komplementarität von Anschauungsmitteln auseinandersetzt: Zum einen muss das Kind ein Anschauungsmittel zur *Lösung einer mathematischen Problemstellung benutzen*, zum anderen muss es *interpretieren, unter welcher „Lesweise"* das Anschauungsmittel in einem speziellen *Kontext zu deuten* ist.

- Wahrnehmungspsychologische Perspektive -

Sehen ist kein geistloser Reizreaktionsvorgang, sondern ein intelligenter, hoch entwickelter Konstruktionsprozess (vgl. Kebeck 1994). Insbesondere das individuelle Wissen eines Menschen spielt in dem Prozess der Informationsaufnahme und -verarbeitung eine fundamentale Rolle. Folglich stellt auch der jeweilige *Kontext*, in den die Wahrnehmungssituation eingebettet ist, einen nicht unbedeutenden Faktor dar, der das Wahrnehmungsergebnis beeinflussen kann (vgl. Guski 2000, 68f.). Diese Erkenntnisse nutzend, wird im eigenen Forschungsprojekt herausgearbeitet, in welchen mathematischen Kontext ein Anschauungsmittel eingebettet ist, d.h. welcher Kontext in dem gegebenen Anschauungsmittel von dem Hersteller oder der Lehrperson intendiert ist sowie welcher Kontext von dem jeweiligen Kind individuell konstruiert wird.

- Interaktionistische Perspektive -

Im Prozess des Mathematiklernens muss das Kind die im Unterricht verwendeten Zeichen deuten. Ein solch subjektiver Prozess des Deutens wird im Kontext des symbolischen Interaktionismus mit dem Begriff der „Situationsdefinition" bezeichnet und umfasst die bewusste und unbewusste Strukturierung der Bedeutungskomponenten einer gegebenen Situation (vgl. Mollenhauer 1972, zit. nach Krummheuer 1984, 286). Eine solche Situationsdefinition ist immer auch durch Prozesse der Entwicklung und Veränderung geprägt. Verschiedene Muster strukturieren diese Entwicklungsprozesse, so dass die einzelnen Deutungszüge in umfassendere Sinnzusammenhänge eingebettet werden können. Mit Hilfe des „*Rahmungskonzeptes*" von Goffman (1974) lassen sich solche bedeutsamen Prozesse der Entwicklung beschreiben: Zu Beginn steht ein für das Kind grundlegendes Deutungsschema, der „(Primär-)Rahmen". Dieser kann im Prozess der

Auseinandersetzung mit anderen verändert werden. Das Ergebnis einer solchen „Modulation" ist wieder als ein Deutungsmuster zu verstehen und wird dann als (abgeleiteter) Rahmen bezeichnet (vgl. Krummheuer 1984, 287). Rahmungen können als *„Sinngebungshorizonte*" (Schwarzkopf 2003, 219) eines Individuums zur Deutung von Inhalten und Kontexten verstanden werden. Sie beeinflussen grundlegend das Verständnis, die Deutung und Bearbeitung von mathematischen Begriffen, Aufgaben und Medien des Unterrichts (vgl. Krummheuer 1984).

Zusammenfassung und Konsequenzen für die eigene Forschung

Für den Aufbau mathematischen Wissens sind verschiedene Deutungsweisen (*Mehrdeutigkeit*) eines Anschauungsmittels fundamental. Grundsätzlich ist jede Wahrnehmungssituation in einen speziellen *Kontext* eingebettet. Das Kind muss somit dem Anschauungsmittel in diesem Kontext einen Sinn verleihen. Diese Deutungen werden geprägt von dem individuellen Sinngebungshorizont (*Rahmung*), mit dem das Kind das Anschauungsmittel betrachtet. Für die Deutung und Nutzung von Anschauungsmitteln im Mathematikunterricht sind somit zwei *Anforderungsebenen* relevant, die im Rahmen des Forschungsvorhabens erhoben werden müssen.

AUFGABENBEARBEITUNG	SINNGEBUNGSHORIZONT
Erhebung der eigentlichen Anforderung:	**Erhebung des prägenden Hintergrundes:**
4 Nutzung des Anschauungsmittels hinsichtlich besonders gut passender arithmetischer Rechensätze	4 Deutung und Sinngebung, warum der gewählte Rechensatz gut passt.

Um der beschriebenen komplementären Anforderung gerecht zu werden, wird im vorliegenden Forschungsprojekt ein in der aktuellen naturwissenschaftlichen Forschung etabliertes Testinstrument „Two-Tiers-Test" (vgl. Treagust 1988) genutzt und auf die eigenen Forschungsanforderungen hin adaptiert. Die von Treagust entwickelte zweigeteilte Testform dient insbesondere in der Physik und Chemie einer Erhebung von Aufgaben*bearbeitungen* sowie der zugrunde liegenden *„conceptions and misconceptions*", die die Aufgabenbearbeitungen maßgeblich beeinflussen.

Nachfolgend ist ein Item der Testkonzeption des eigenen Forschungsprojektes beispielhaft aufgeführt. Jedes einzelne Item ist so konzipiert, dass auf einer ersten Ebene (linke Seite, Abb. 4) die eigentliche Anforderung „Nutzung des Anschauungsmittels hinsichtlich besonders gut passender arithmetischer Rechensätze" per Multiple-Choice-Darbietung abgefragt wird. Die zweite Ebene (rechte Seite, Abb. 4) bietet speziell auf die inhaltlichen Antworten der ersten Ebene bezogene Begründungen an.

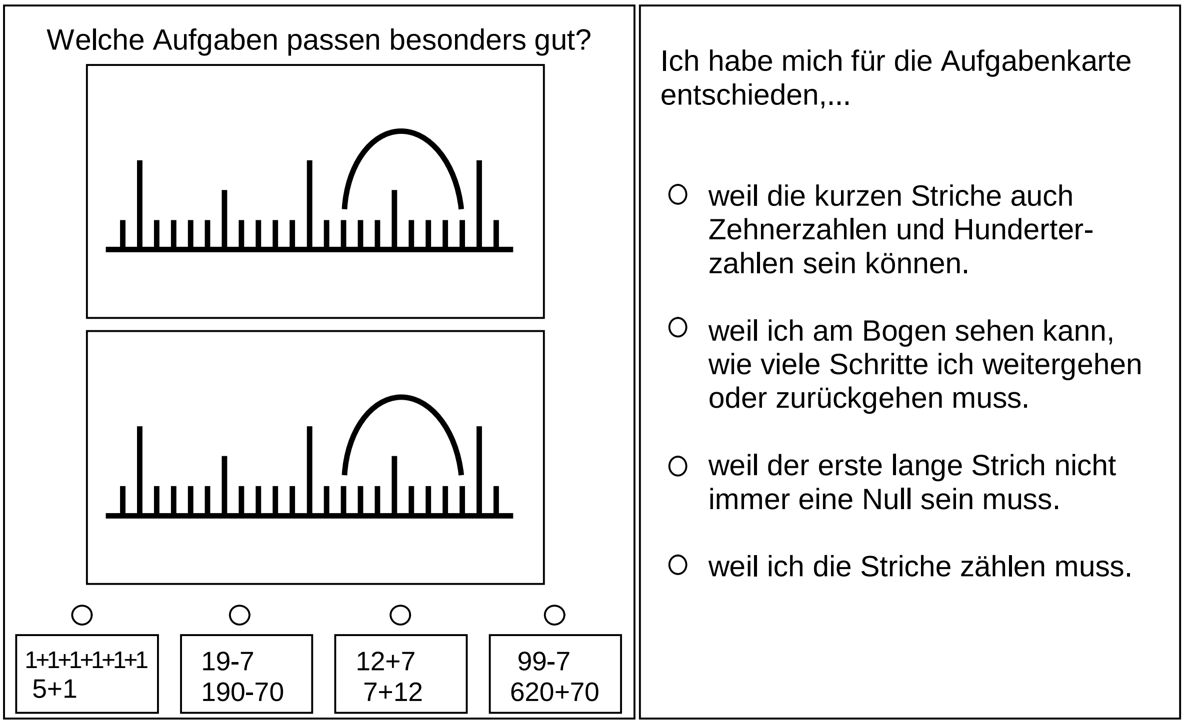


Abb. 4

Die Antwortmöglichkeiten und Begründungen der beiden Ebenen sind auf der Grundlage von Datenmaterial aus einer abgeschlossenen empirischen Studie (Söbbeke 2005) sowie aus aktuellen Voruntersuchungen (klinische Interviews) rekonstruiert und typisiert worden. Nur ein zweigeteiltes Testinstrument kann einer Erhebung der oben begründeten zweifachen Anforderung im Umgang mit Anschauungsmitteln gerecht werden und auch solche für den Unterricht bedeutsamen Faktoren erheben, die eine strukturorientiert relationale Deutung von Anschauungsmitteln beeinflussen.

Literatur

Goffman, E. (1974). Frame Analysis. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Guski, R. (2000). Wahrnehmung. Eine Einführung in die Psychologie der menschlichen Informationsaufnahme. 2. überarb. Auflage. Stuttgart: Kohlhammer.

Kebeck, G. (1994). Wahrnehmung. Theorien, Methoden und Forschungsergebnisse der Wahrnehmungspsychologie. Weinheim und München: Juventa.

Krummheuer, G. (1984). Zur unterrichtmethodischen Dimension von Rahmungsprozessen. *JMD* 5 / 4, 285-306.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *JMD* 24, H3/4, 211-235.

Treagust D.F., (1988). Development and use of diagnostic tests to evaluate students' misconceptions in science. *International Journal of Science Education,* 10, 159-169.

Claudia BÖTTINGER, Essen

Moderierte Sektion: Analyse und Reflexion mathematischer Kommunikationsprozesse im Unterricht - Besonderheiten mathematischer Reflexion

1. Einleitung/Überblick

In der Sektion werden die kommunikativen Beiträge von Lehrkräften in der kollegialen Reflexion des eigenen Mathematikunterrichtes interpretativ analysiert und systematisiert. Dies ist einzuordnen in den Kontext der Professionalisierung von Lehrkräften, bei der es um selbstgesteuerte berufliche Weiterbildung und Weiterentwicklung geht. Speziell wird sie hier verstanden als eine zunehmende Sensibilität für interaktive Konstruktionen mathematischer Zusammenhänge.

Kollegiale Reflexionen bieten Lehrern die Gelegenheit über Unterricht von einem eher distanzierten Standort ins Gespräch zu kommen. Auch wenn sie sich der Bedeutung interaktiver Lernprozesse und des Erkennens mathematischer Zusammenhänge bewusst sind, so sind die alltäglichen Gespräche über den Unterricht davon geprägt, dass mathematisches Wissen als ein „fertiges eindeutiges Produkt“ angesehen wird und dass Kinder sich dieses mathematische Wissen direkt erschließen können. Daher ist es lohnenswert zu untersuchen, wie Lehrkräfte für die interaktive Entwicklung mathematischer Deutungen sensibilisiert werden können und zwar über einen längeren Zeitraum hinweg.

In zwei verschiedenen Forschungsprojekten arbeiten Lehrkräfte gemeinsam an der Interpretation mathematischer Deutungen von Kindern. Im Projekt MaLIn – „Mathematik in altersgemischten Lerngruppen – Interaktion und Intervention“ von M. Nührenbörger sprechen die Lehrer auf der Basis von Transkripten und Videoausschnitten über die mathematischen Bearbeitungen von zwei Kindern, die sich in unterschiedlichen Jahrgangsstufen befinden. Im Rahmen des Forschungsprojektes MathKiD von K. Bräuning – „Mathematische Gespräche mit Kindern – individuelle Diagnose und Förderung“ analysieren und diskutieren Lehrerinnen auf der Basis von Transkripten und Videoausschnitten gemeinsam Diagnosegespräche, die sie selbst durchgeführt haben. Dabei wird der Schwerpunkt der Analyse auf eine der drei folgenden Perspektiven gelegt: Analyse des in der Interaktion beobachteten Verstehens des Kindes, Analyse von Vorgehensweisen des Gesprächsleiters oder Analyse von Interaktionen zwischen dem Kind und dem Gesprächsleiter. Beiden Projekten ist gemeinsam, dass die Lehrer einen im Vergleich zum Schulalltag unüblichen Blick auf Interaktionsprozesse werfen können, die Situation aus distanzierter Sicht immer wieder betrachten können und so möglicherweise zu einer sensibleren Wahrnehmung von Interaktions- und Kommunikationsprozessen gelangen. Ziel ist nicht, dass Lehrer wie Forscher ein Transkript zur wissenschaftlichen Theoriebildung nutzen.

2. Analyse

Im Mittelpunkt der Analyse stehen die Interaktion und Kommunikation der Lehrkräfte über die Videoausschnitte. Hierbei stehen sie vor der Herausforderung, die interaktiven Wissenskonstruktionsprozesse in Beziehung zu eigenen Interpretationen zu setzen und als spezifische Fälle zu deuten. Sie verständigen sich untereinander über die Deutung eines Falls.

K. Bräuning und M. Nührenbörger nutzen jeweils zur Analyse ihrer Dokumente das Konzept verschiedener *Lesarten*, mit denen sich die Lehrer über einen derartigen Fall verständigen. Ein Transkript (aus dem Unterricht bzw. aus den Diagnosegesprächen) wird von den Lehrkräften in einer Spanne von *spontan-vorgeprägt* bis hin zu *reflektiert-offen* gelesen. Bei der spontan-vorgeprägten Lesart kommt zum Ausdruck, dass vorhandene didaktisch-methodische Ansichten bestätigt gefunden werden und die Szene nur kurz und spontan bewertet wird. Die reflektiert-offene Lesart zeichnet sich dadurch aus, dass die Szene differenziert erläutert wird und Interpretationen entwickelt werden, die sich direkt auf das Transkript beziehen. Die Beschreibung der Wahrnehmungsprozesse kann in einer Spanne von *schildern* bis hin zu *umschreiben* erfolgen. Während das „Schildern“ eher vergleichbar ist mit einem spontanen Erlebnisbericht, ist das „Umschreiben“ eher mit einer reflektierten Beobachtung eines Forschers vergleichbar. Diese Lesarten korrespondieren mit 4 verschiedenen *Wissenstypen*, die an den Fall herangetragen werden können, um ihn näher zu verstehen und zu klären. K. Bräuning führt aus, welche Lesarten sich in den strukturierten Gesprächen finden und wie sich diese im Laufe mehrerer Sitzungen entwickeln.

3. Ergebnisse

M. Nührenbörger stellt heraus, dass sich Lehrkräfte erst im Zuge mehrerer kollegialer Reflexionen von einem durch Erfahrungen geprägten Blick auf Unterrichtsprozesse entfernen. Erst dann gelangen sie zu einer differenzierteren Haltung gegenüber den vielfältigen strukturellen mathematischen Deutungsprozessen, die in der Interaktion entstehen. Dies wird durch die Analyse von K. Bräuning auch für die strukturierten Gespräche bestätigt.

Kerstin BRÄUNING, Essen

Kollegiale Reflexionen von Mathematiklehrkräften der Grundschule – In welcher Form kommunizieren die Lehrerinnen miteinander über mathematisches Wissen?

Die vorliegende Forschungsarbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung der Lehrerprofessionalisierung durch die kollegialen Reflexionen videodokumentierter Gesprächsausschnitte. Dazu wird ein Ausschnitt einer kollegialen Reflexion mit dem dazu entwickelten theoretischen Analyseinstrument untersucht.

Professionalisierung im Lehrerberuf ist laut Stenhouse (1975) die „Fähigkeit zur selbstgesteuerten beruflichen Weiterbildung und Weiterentwicklung". Dabei wird die Lehrperson als Forscher gesehen. Bisher scheint die Lehrerfortbildung (teacher professional development) eher kurzfristig angelegt, individualisiert und unabhängig von der Praxis zu sein (Ball & Cohen, 1999). Professionalisierung ist jedoch kein individuelles Entwicklungsproblem der Lehrkräfte, sondern ein Interaktionsgeschehen auf verschiedenen Ebenen. Dazu sollten Lehrergruppen in Lehrerfortbildungen längerfristig mit ihren Kollegen kollaborieren und Themen behandeln, die mit ihren täglichen Unterrichtsaktivitäten in Beziehung stehen (Little, 2002).

1. Projekt MathKiD

In diesem Zusammenhang entstand das Forschungsprojekt „**Math**ematische Gespräche mit **K**indern – **i**ndividuelle **D**iagnose und Förderung" (MathKiD) in Zusammenarbeit mit Lehrkräften der Schuleingangsphase. Das Projekt setzt sich aus drei Schwerpunkten zusammen: individuelle Diagnose und Förderung in Mathematik, Bedeutung der Interaktion / Kommunikation für das Mathematiklernen sowie Professionalisierung von Mathematiklehrkräften durch kollegiale Reflexionen.

Im Schuljahr 2007/2008 nehmen 5 Lehrerinnen der Klasse 1 & 2 aus zwei verschiedenen Grundschulen am Projekt teil. Dadurch ergeben sich zwei Kleingruppen, bestehend aus 2 bzw. 3 Lehrerinnen. In diesem Aufsatz soll ein strukturiertes Gespräch der Zweiergruppe näher betrachtet werden. Jede Lehrerin hat je 6 diagnostische Gespräche mit Kindern aus ihrer eigenen Klasse 2 geführt, die videografiert wurden, und an 4 Lehrerfortbildungen teilgenommen. In einem strukturierten Gespräch diskutieren, reflektieren und analysieren die beiden Lehrerinnen gemeinsam mit der Forscherin als Moderatorin Ausschnitte aus ihren selbst geführten Diagnosegesprächen mit Hilfe der dazugehörigen Transkriptausschnitte. Diese Gespräche werden audiografiert. Die zu diskutierenden Ausschnitte der Diagnosegespräche werden von der Forscherin ausgewählt und beinhalten interessante Situationen unter drei verschiedenen Analyseperspektiven (Scherer, Söbbeke, & Steinbring, 2008): Analyse des in der Interaktion beobachteten Verstehens des Kindes, Analyse von Intentionen / Vorgehensweisen des Gesprächsleiters, Analyse von Interaktionen zwischen dem Kind und dem Gesprächsleiter. Ein strukturiertes Gespräch gliedert sich in eine gemeinsame Analyse eines „Fall-Beispiels" anhand eines Videoausschnittes und dazugehörigem Transkript unter je einem der drei Analyseperspektiven und einem abschließenden Blitzlicht zu den neu gewonnenen Einsichten durch die Analyse des „Fall-Beispiels".

2. Warum kollegiale Reflexionen?

Es stellt sich die Frage, wie Lehrer dafür sensibilisiert werden können, die interaktive Konstruktion mathematischer Zusammenhänge in Diagnosegesprächen zu erkennen. In kollegialen Reflexionen setzen sich die Lehrer diskursiv mit interaktiven Wissenskonstruktionen, Deutungsmustern und Einstellungen auseinander, die ihrerseits wiederum auf ein verändertes Handeln abzielen (Nührenbörger & Steinbring, 2009). Die Lehrer sollen in der kollegialen Reflexion keine wissenschaftlich distanzierte analytische Durchdringung des Diagnosegesprächs zum Zwecke einer Theoriebildung vollziehen. Sie sollen sich vielmehr bewusst werden, dass wir normalerweise „jedesmal, wenn wir etwas Gesagtes hören, spontan einen unmittelbaren Schluß [ziehen], nämlich den, der Sprecher meine das, was wir selbst meinen würden, wenn wir das gleiche sagten. In manchen Fällen kann diese Deutung zutreffend sein; es stellt sich heraus, daß er eben das gemeint hat. Aber bei den meisten Erörterungen, bei denen es um feinere Nuancen geht, als sie auch in einer Zeichensprache ausgedrückt werden könnten, wird das nicht der Fall sein" (Ogden & Richards, 1974, p. 23). Im alltäglichen Diskurs zwischen Lehrern in der Schule müssen sich diese auf die Aussagen des anderen verlassen und unmittelbar aus dem Gesagten Schlüsse ziehen. Kollegiale Reflexionen von Diagnosegesprächsepisoden ermöglichen den Lehrkräften einen „unüblichen" Blick auf Interaktionsprozesse. Sie werden möglicherweise irritiert, auf feinere Nuancen aufmerksam und betrachten dadurch die Situation auf eine andere Weise. Die Weiterentwicklung der Interaktions- / Kommunikationskultur setzt somit beim Lehrer selbst an.

3. Kollegiale Reflexionen – Analyseinstrument und ein Beispiel

Im Folgenden soll das Instrument zur Analyse kollegialer Reflexionen präsentiert (Nührenbörger & Bräuning, 2009) und für einen Ausschnitt eines strukturierten Gesprächs, eine kollegiale videobasierte Reflexionssitzung mit einer Moderatorin, angewendet werden. Im Zentrum des Interesses stehen die beiden Forschungsfragen: „In welcher Form kommunizieren die Lehrkräfte über mathematisches Wissen?“ und „Welche Art von Wissen entwickeln die Lehrkräfte zu dem jeweiligen Fall?“

Im Folgenden werden die zentralen Begriffe erläutert, die den Zugang der Lehrkräfte auf die zu interpretierende Szene kenntlich machen sollen. Die Lehrkräfte konstruieren einen Fall und nehmen dazu entweder eine organisatorische, eine interaktionistische, eine mathematische oder eine forschende Rahmung ein. Als Fälle entstehen die folgenden Themen im Verlaufe einer kollegialen Reflexion: Mathematiklernen, Lehrerhandeln, mathematischer Inhalt und Diagnoseerkenntnisse & Förderideen. Wenn die Lehrkräfte gemeinsam den Fall klären, nutzen sie verschiedene **Lesarten**, um darüber zu kommunizieren. Entweder gehen sie eher spontan-vorgeprägt oder eher reflektiert-offen an die Beschreibung und Klärung des Falls. „Schildern“ und „Umschreiben“ sind Lesarten, die genutzt werden, um Wahrnehmungsprozesse zu beschreiben. Dabei kann die Lesart „Schildern“ mit einem spontanen Erlebnisbericht und die Lesart „Umschreiben“ mit einer reflektierten Beobachtung eines Forschers verglichen werden. Die Lesarten „Bewerten“ und „Interpretieren“ dienen dazu Situationen zu deuten und zu erklären. Beim „Bewerten“ überwiegt die eigene Lesart des Falles und es wird nicht in Betracht gezogen, dass auch andere Deutungen möglich sind. Hingegen wird beim „Interpretieren“ von einer interpretativen Sorgfalt sowie einer höheren Sensibilität ausgegangen.

Die Lehrer in den kollegialen Reflexionen aktivieren unterschiedliche Kennzeichnungen der **Genese des Wissens zum Fall** – sie aktivieren nicht gelerntes (mathematisches, didaktisches, pädagogisches oder psychologisches) Wissen im Sinne von Kompetenzen. Der Begriff Wissen wird hier in dem Sinne verwendet, dass Lehrer im Diskurs Wissen anbringen, um den Fall zu klären und zu verstehen. Demnach entwickeln die Lehrer je nach Zugang zum Ereignis folgende Kennzeichnungen der Genese des fallbezogenen Wissens. „Wissen durch Beobachtung“ umfasst Aktivitäten des Beschreibens. Interaktionen werden wahrgenommen, erkannt und beschrieben. „Wissen durch Erfahrung“ umfasst ebenso wie das „Wissen durch Beobachtung“ die Aktivitäten des Beschreibens, stellt aber einen Bezug zu den eigenen Erfahrungen dar, die mit dem Ereignis verbunden sind und in denen man selbst involviert war. „Wissen durch Transfer“ entsteht aus dem subjektiven Verständnis und der Interpretation der kommunikativen Äußerungen der am Gespräch Beteiligten. Die Ideen der anderen werden reproduziert und in Beziehung zum eigenen Wissen gesetzt. „Wissen durch Verarbeitung“ entsteht, wenn die unterschiedlichen Wissensbestände miteinander verknüpft werden. Die mathematischen Lernprozesse werden verständlich und verallgemeinert. Es entwickelt sich Bewusstheit über die Situation.

Wird das hier beschriebene theoretische Auswertungsinstrument auf einen Ausschnitt des ersten strukturierten Gesprächs der Zweiergruppe angewendet, so lässt sich feststellen, dass die beiden Lehrerinnen hauptsächlich den Fall Lehrerhandeln unter interaktionistischer Perspektive und Mathematiklernen des Kindes unter mathematischer Perspektive betrachten. Organisatorische und forschende Rahmungen werden nicht eingenommen. Um den Fall zu deuten, nutzen sie meist die vorgeprägt-spontanen Lesarten „Schildern“ und „Bewerten“. Die beiden Lesarten „Umschreiben“ und „Interpretieren“ treten kaum auf und werden nur von der Lehrerin eingenommen, die nicht das zu diskutierende Diagnosegespräch geführt hat. Vielleicht aufgrund des ersten strukturierten Gespräches und der neuen Art auf Gespräche mit Kindern zu blicken, entwickeln die Lehrerinnen „Wissen durch Beobachtung und durch Erfahrung“, um den Fall für sich zu klären. Werden in der Entwicklung dreier aufeinander folgender strukturierter Gespräche die Lesarten betrachtet, so lässt sich feststellen, dass die beiden Lehrerinnen sich von eher vorgeprägt-spontanen hin zu offen-reflektierten Lesarten entwickeln. Dabei zeigt sich, dass die Lehrerinnen im Sinne des Zitates von Ogden/Richards, nicht mehr aus der betrachteten Videosequenz spontan, unbewusst und unmittelbar Schlüsse ziehen, sondern den Fall unterschiedlich deuten und gemeinsam darüber reflektieren. Strukturierte Gespräche regen die Lehrkräfte an, bewusster und professioneller über mathematische Diskurse zu reflektieren. Somit tragen sie zur Weiterentwicklung der Professionalisierung von Lehrkräften bei.

Literatur

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the Learning Profession* (pp. 3-32). San Francisco: Jossey Bass.

Little, J. W. (2002). Locating learning in teachers’ communities of practice. *Teaching and Teacher Education, 18*(8), 917-946.

Nührenbörger, M., & Bräuning, K. (2009). *Teachers' collegial reflections of their own mathematics teaching processes*. Paper presented at the CERME 6, 2009.

Nührenbörger, M., & Steinbring, H. (2009). Forms of mathematical interaction in different social settings [Electronic Version]. *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Ogden, C. K., & Richards, I. A. (1974). *Die Bedeutung der Bedeutung* Frankfurt a. M.: Suhrkamp Verlag.

Scherer, P., Söbbeke, E., & Steinbring, H. (2008). *Praxisleitfaden zur kooperativen Reflexion des eigenen Mathematikunterrichts.* Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund

Lehrer-Schüler-Diskurse im Mathematikunterricht als Gegenstand kollegialer Reflexion - Fallkonstruktionen mathematischer Unterrichtsdiskurse

Kollegiale Reflexionen über Unterrichtsszenen sind seit einigen Jahren Gegenstand der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften. Die Betrachtung von und das Gespräch über – insbesondere videgrafierten – Unterricht erlaubt den Lehrkräften, die Komplexität des Unterrichtsgeschehen zum Gegenstand einer Reflexion über die Art und Weise der Lehr-, Lernprozesse zu machen (vgl. z.B. Krammer & Reusser 2005, Nührenbörger & Steinbring 2009, Sherin & Han 2004). Scherer & Steinbring (2006, 165) zeigen auf, dass gerade die Verknüpfung der Arbeit mit Lehrkräften an ihrem eigenen Unterricht mit der gemeinsamen Reflexion über diesen Unterricht positive Wirkungen auf die Professionalisierung von Lehrkräften hat. Ähnliche Ansätze finden sich in dem Modell der Professionellen Lerngemeinschaften (PLG), deren Ansatz auf den Säulen gemeinsam geteilter Normen und Werte, der Deprivatisierung des Unterrichts, der aktiven Erforschung der Lehr-Lernprozesse, Kooperation mit Kollegen und Initiierung reflektierender Dialoge basiert (vgl. Bonsen & Rolff 2005).

Unter dem Begriff „Professionalisierung“ ist in diesem Beitrag eine zunehmende Sensibilität für interaktive Konstruktionen mathematischer Zusammenhänge gemeint. In alltäglichen Unterrichtsprozessen sind Lehrkräfte aktiv involviert, so dass sie nicht zugleich die verschiedenen interaktiven Deutungs- und Verstehensprozesse distanziert und reflektiert beobachten können. „Die Entwicklung der Unterrichtstätigkeit erfordert gerade auch ein kritisches Nachdenken und damit eine Distanz, aus der her die eigenen Tätigkeit überdacht werden kann“ (Steinbring 2003, 196).

1. Entwicklungen kollegialer Reflexion

Bereits Dewey (2002) weist im Kontext der Lehrerbildung auf die Bedeutung des „Reflective Thinking“ hin, mit der Lehrkräfte über die „Rückschau“ auf vergangene Ereignisse neue Einsichten über ihre eigene Unterrichtspraxis erhalten sollten können. Als wesentliches Kriterium eines reflexiven Gedanken stellt er das Moment der Irritation heraus, das zu einer Klärung der unklaren Unterrichtssituation führen kann.

Die kollegiale Reflexion über mathematische Lehr-, Lernprozesse ist nicht allein vom distanzierten Austausch über das Unterrichtsgeschehen geprägt, sondern im Besonderen von dem epistemologischen Charakter der Mathematik, von der eigenen Sicht auf das Fach Mathematik und das mathematische Lernen (vgl. Nührenbörger & Steinbring 2009). Auch wenn sich die Lehrkräfte über die Bedeutung interaktiver Lernprozesse und des Erkennens mathematischer Zusammenhänge bewusst sind, sind alltägliche mathematische Lehr-, Lerngespräche immerzu von einer Haltung gegenüber dem Denken der Kinder und der Mathematik geprägt, die mathematisches Wissen als ein „fertiges eindeutiges Produkt“ versteht, das der Lernende direkt erschließen kann (vgl. Steinbring 2003). Dieses Dilemma ist dem Lehrer im Unterrichtsgeschehen nicht bewusst und erst aus der Distanz und im reflektierenden Gespräch mit beteiligten Kolleginnen wahrnehmbar. „Der Unterrichtsalltag lässt sich nur dann substanziell verändern, wenn die im Unterricht Beteiligten mit einer veränderten Interpretationsfähigkeit Interaktionsverläufe im Mathematikunterricht situativ anders deuten können“ (Gellert 2007, 34). Im Hinblick auf eine Professionalisierung der Lehrkräfte gewinnt somit die Frage an Bedeutung, wie Lehrkräfte für die interaktive Entwicklung mathematischer Deutungen sensibilisiert werden können.

2. Fallkonstruktionen mathematischer Unterrichtsdiskurse

Im Rahmen des Forschungsprojektes MaLIn (Mathematik in altersgemischten Lerngruppen – Interaktion und Intervention) arbeiten zehn Lehrkräfte gemeinsam an der Untersuchung interaktiver Lehr-Lernprozesse. Im halbjährlichen Rhythmus über zwei Jahre treffen sich in insgesamt vier Treffen à 3 Stunden die Lehrkräfte in drei unterschiedlichen Gruppen, um eine videografierte und transkribierte Unterrichtsdiskurse von einem der anwesenden Lehrer zu besprechen (vgl. Nührenbörger & Steinbring 2009).

Die interpretativen Analysen der Transkripte einzelner kollegialer Reflexionssitzungen bestätigen auf der einen Seite die Erkenntnisse der „Video-Club-Studien“ von Sherin und Han (2004): Lehrkräfte entfernen sich erst im Zuge mehrerer kollegialer Reflexionen von einem normativ geprägten, erfahrungsbezogenen Blick auf Unterrichtsprozesse und entwickeln eine bewusstere, differenzierte Haltung gegenüber den vielfältigen strukturellen mathematischen Deutungsprozesse, die in der unterrichtlichen Interaktion entstehen (vgl. Nührenbörger & Steinbring 2009).

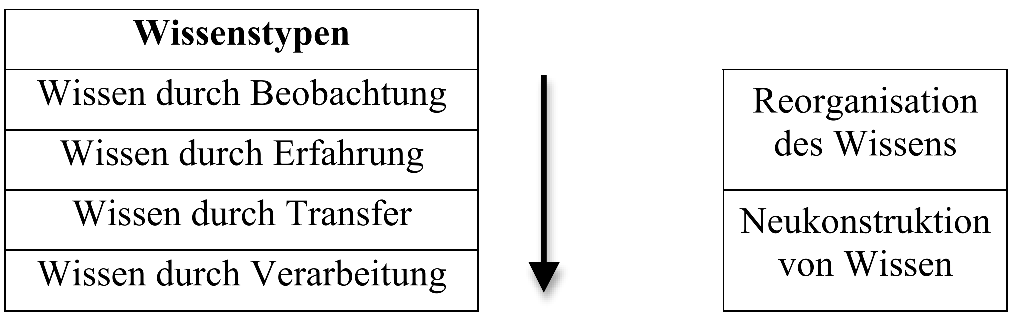
Auf der anderen Seite zeigt sich, dass der kollegiale Diskurs für die Lehrer einen neuen Kontext kreiert. Sie konstruieren im Zuge eines Wechselspiels zwischen eigenen Lesarten des Ereignisses und den Deutungen der Kollegen spezifische *Fälle*. Ebenso wie im Unterricht zwischen Lehrern und Schülern passende Be-Deutungen ausgehandelt werden, verständigen sich die Lehrkräfte untereinander über die Deutung eines Falles. Ein Fall wird somit nicht der Unterrichtsszene oder dem Transkript entnommen. Vielmehr wird er von den Beteiligten ko-konstruiert und nach und nach mit

Hilfe von gedeuteten „Indizien“ geklärt. Die Analysen weisen darauf hin, dass eher organisatorisch, unterrichtsmethodische Fälle von interaktionistisch, sozialen Fällen und mathematischen Fällen unterschieden werden können. Im Hinblick auf die Entwicklung einer „professionellen Reflexion“ macht es einen Unterschied, wie genau ein Fall diskutiert wird.

3. Ein Analyseschema zur Beschreibung professioneller Reflexionen

Im Folgenden wird ein im Zuge der kollegialen Reflexionen entwickeltes theoretisches Analyseschema zur Erfassung *professioneller Reflexionen* vorgestellt. Das Transkript – als lesbares Dokument zur Unterrichtsszene – wird von Lehrkräften auf unterschiedliche Weise „gelesen“: Eine *reflektiert-offene* Lesart zeichnet sich dadurch aus, dass die Lehrkräfte einen Fall unter Einbindung der Handlungen und Gesten umfassend und differenziert umschreiben und auf das Transkript bezogene Interpretationen entwickeln. Hingegen weisen eher *spontan-vorgeprägte* Lesarten auf eine Neigung von Lehrkräften hin, die die Auseinandersetzung mit der Unterrichtsszene nutzen, um bereits vorhandene didaktisch-methodische Ansichten bestätigt zu finden. Die Szene wird nur kurz betrachtet und spontan bewertet.

Diese zwei Lesarten korrespondieren mit Wissenstypen, die an den Fall herantragen werden, um diesen näher zu *verstehen* und zu *klären*. Während der Reflexion nutzen die Lehrkräfte nicht spezifisches Professionswissen, wie es Shulman (1986) oder auch Bromme und Haag (2004) beschreiben. Die Wissensgenerierung, die in der Reflexion zum Ausdruck kommt, ist strukturell verschieden von der theoretischen Topologie des Wissens. Die Lehrkräfte tragen ihr Wissen zur Bedeutungszuschreibung, zum Verstehen und zur Bewertung des konstruierten Falles heran (vgl. Hoffmann 2009). Sie klären im Zuge des Gesprächs, was in der Szene passiert ist, und führen hierzu Wissen an, das auf Beobachtungen und Erfahrungen ruht. Erst der vertiefende Transfer der unterschiedlichen Beobachtungen und Erklärungen führt dazu, dass die Lehrkräfte beginnen, den Fall reflektiert zu interpretieren. In diesem Kontext bringen die Lehrkräfte Wissen durch Transfer und Verarbeitung ein.



Dadurch beginnen sie, ihr Reflexionswissen neu zu strukturieren und mit Bezug auf verallgemeinernde Deutungsprozesse zu generieren. Die professionelle Reflexion ist durch eine Zunahme an interpretativer Sorgfalt, eine reflektiert-offene Lesart der konstruierten Fälle und durch eine Sicht auf mathematische Lehr-, Lernprozesse gekennzeichnet, auf die mit Wissen durch Transfer und Verarbeitung Bezug genommen wird.

4. Resümee

Das entwickelte Analyseschema zur professionellen Reflexion von Lehrern unterscheidet die Art und Weise der Konstruktion eines Falles. Zudem zeigt es das Spannungsfeld zwischen eher spontan-vorgeprägten und reflektiert-offenen Lesarten auf, das mit den Wissenstypen korrespondiert, die zur Beschreibung und Erklärung des Falles herangezogen werden. Eine professionelle Reflexion von Lehrkräften der mittels Video und Transkript wahrgenommenen Unterrichtswirklichkeit befördert über die Reinszenierung des Unterrichts auch eine Veränderung und Erweiterung des „Reflexionswissens", das die Praxis in einem neuen Licht erscheinen lässt.

Literatur

Bonsen, M. & Rolff., H.-G. (2005). Professionelle Lerngemeinschaften von Lehrerinnen und Lehrern. *Zeitschrift für Pädagogik, 52*, (2), 167-184.

Bromme, R. & Haag, L. (2004). Forschungen zur Lehrerpersönlichkeit. In W. Helsper & J. Böhme (Hrsg.), *Handbuch der Schulforschung* (S. 777-793). Wiesbaden: VS.

Dewey, J. (2002). *Wie wir denken*. Zürich: Pestalozzianum.

Gellert, U. (2007). Gemeinschaftliches Interpretieren mit Studierenden und Lehrern. *Journal für Mathematikdidaktik, 1*, 31-48.

Hoffmann, L. (erscheint 2009). Wissensgenerierung. In U. Dausendschön-Gay, Ch. Domke & S. Ohlhus (Hrsg.). *Wissen in (Inter-)Aktion.* Berlin: Gruyter-Verlag.

Krammer, K. & Reusser, K. (2005). Unterrichtsvideos als Medium der Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen. *Beiträge zur Lehrerbildung, 23* (1). 35-50.

Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2009). Forms of mathematical interaction in different social settings. *Journal of Mathematics Teacher Education* (DOI 10.1007/s10857-009-9100-9)

Scherer, P. & Steinbring, H. (2006). Noticing children's learning process. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9,* 157-185.

Sherin, M. G. & Han, S. Y. (2004). Teacher Learning in the Context of a Video Club. *Teaching and Teacher Education, 20*, 163-183.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 3-14.

Steinbring, H. (2003). Zur Professionalisierung des Mathematiklehrerwissens. In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.) *Mathematikunterricht in der Grundschule - ein Arbeitsbuch* (S. 195-219). Seelze: Kallmeyer.

Rita BORROMEO FERRI, Hamburg; Gilbert GREEFRATH, Köln und Katja MAAß, Freiburg

Moderierte Sektion: Mathematisches Modellieren – zwischen empirischer Forschung und Praxisrelevanz

Die aktuelle didaktische Diskussion räumt Realitätsbezügen und Modellierungen einen hohen Stellenwert ein. Trotz eines breiten Konsenses über die Notwendigkeit der Integration von Modellierungen in den Unterricht, sind teilweise grundlegende Fragen noch nicht abschließend geklärt. Dazu gehören beispielsweise, wie ein Modellierungsprozess geeignet beschrieben werden kann, wie Schülerinnen und Schülern das mathematische Modellieren geeignet vermittelt werden kann und wie man Lehrkräfte geeignet ausbildet. In der moderierten Sektion wurden diese Fragen ausgehend von der empirischen Forschung aufgegriffen.

Gilbert Greefrath beschreibt in seinem Beitrag, welche Schwierigkeiten Lernende beim Lösen von Modellierungsaufgaben haben können und wie sie damit umgehen. Im Rahmen einer qualitativen Studie wurde speziell die Bedeutung der Datenbeschaffung bei der Lösung von unterbestimmten Aufgaben für Schülerinnen und Schüler analysiert und im Kontext anderer Bearbeitungsprozesse betrachtet. Derartige Analysen werfen gleichzeitig die Frage nach den erforderlichen Qualifikationen der Lehrpersonen auf.

Rita Borromeo Ferri hat sich mit der eben genannten Frage auseinandergesetzt, in dem sie über ein Modellierungsseminar aus der universitären Lehramtsausbildung berichtet hat. Dieses Seminar wurde inhaltlich und methodisch so angelegt, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer alle nötigen Basisqualifikationen zum Unterrichten von Modellieren erhalten sollten. Im Rahmen dieser explorativen Studie zeigt die Analyse der 55 Lerntagebücher der Studierenden, die während des gesamten Semester geführt wurden, dass auch Studierende Zeit benötigen, um Modellierung sowohl theoretisch als auch praktisch zu durchdringen.

Gabriele Kaiser und Björn Schwarz haben im Rahmen der international-vergleichenden Sechs-Länder-Studie zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung „Mathematics Teaching in the 21st Century” (MT21), Ergebnisse einer ergänzenden qualitativ orientierten Studie zur professionellen Kompetenz mit angehenden Mathematiklehrkräften zu verschiedenen Bereichen, u.a. Modellierung und Realitätsbezüge, berichtet. Es konnte rekonstruiert werden, dass es Zusammenhänge zwischen den einzelnen Wissensdomänen und den zugehörigen Beliefs gibt. Umso wichtiger ist es daher, denkt man an die Implikationen für die Lehrerausbildung, schon in der Universität genügend Raum für die Vermittlung einer „Didaktik des Modellierens“ zu geben.

Im Sinne lebenslangen Lernens ist es jedoch auch bedeutsam, Modellieren in die Lehrer*fort*bildung zu integrieren – insbesondere auch im Hinblick darauf, dass viele Lehrer es in ihrer Ausbildung noch nicht kennengelernt haben und daher Modellieren im Unterricht noch nicht den Stellenwert hat, der vielfach gefordert wird - eine Situation, die in vielen Ländern Europas vorliegt. Ziel des Projektes LEMA, an dem 6 europäische Länder teilnehmen und von dem Katja Maaß berichtete, war es, ein in Europa einsetzbares Fortbildungskonzept zu entwickeln, zu pilotieren und zu evaluieren. Im Rahmen dieses Projekts wurde ein Evaluationsinstrument zum Lehrerprofessionswissen im Bereich Modellieren entwickelt. Die ersten Ergebnisse zeigen einerseits die positiven Effekte der Fortbildung, andererseits wurde aber auch deutlich, dass praktizierende Lehrerinnen und Lehrer, die zum ersten Mal mit Modellierung in der Fortbildung konfrontiert wurden, dem nicht immer aufgeschlossen gegenüber standen.

Es gibt offensichtlich einige Gründe, die Lehrende am Modellieren im Mathematikunterricht hindern – trotz vorhandener Materialien und der Implementation in den Curricula. Diesen Aspekt hat Barbara Schmidt im Rahmen ihrer Studie beleuchtet. Begleitend zu dem Projekt LEMA wurden die deutschen Lehrer in einem Pre-Post-Kontrollgruppen-Design mit einem speziell entwickelten Fragebogen sowie Interviews zu ihren Hinderungs- und Beweggründen bezogen auf das Modellieren befragt. Für viele Lehrende sind u.a. der Zeitaufwand oder die Unplanbarkeit des Unterrichts Hinderungsgründe. Auf diese Problematik kann, wie bereits erwähnt, schon in der universitären Ausbildung eingegangen werden.

Unter günstigen Rahmenbedingungen sind auch „Modellierungstage“ an Schulen möglich, von denen Hans-Stefan Siller berichtet hat. Modellierungsaufgaben können die Nutzbarkeit von mathematischen Denkweisen zwischen realitätsbezogenen Problemstellungen und der Mathematik verdeutlichen. Unterschiedliche Herangehensweise von Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufen zum Thema „Sportwetten“ wurden dargelegt.

Insgesamt wurde in dieser moderierten Sektion eine Vielzahl von Studien und Erfahrungen vorgestellt, die an unterschiedlichen Stellen ansetzen: Bei Schülerinnen und Schülern sowie Lehrenden in der Aus- und Fortbildung. Alle diese Ansätze zeigen Wege auf, eine wissenschaftlich fundierte und nachhaltige Implementation von Modellierungen in der Praxis zu fördern.

Gilbert GREEFRATH, Köln

Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben

Im Rahmen einer Untersuchung zur Lösung von unterbestimmten Modellierungsaufgaben wurden die Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Lösungsprozess untersucht. In diesem Beitrag konzentrieren wir uns auf Schwierigkeiten, die im Rahmen der Datenbeschaffung auftreten. Es werden Ergebnisse einer qualitativen Studie und einer schriftlichen Befragung von Schülerinnen und Schülern im Zusammenhang mit solchen Modellierungsaufgaben vorgestellt.

Konzeption der qualitativen Studie

Im Rahmen einer qualitativen Untersuchung zu Modellbildungs- und Problemlöseprozessen von Schülerinnen und Schülern haben wir (unterbestimmte) offene Aufgaben mit Realitätsbezug verwendet [Greefrath 2006]. Je zwei Schülerinnen bzw. Schüler wurden bei der Bearbeitung einer solchen Aufgabe beobachtet. Die Schülerinnen und Schüler wurden aufgefordert, die Aufgabe zu zweit – ohne weitere Hilfen – zu lösen. Die Arbeit an den Aufgaben wurde videografiert. Zur Auswertung haben wir diese Videodaten komplett transkribiert. Im Rahmen des offenen Kodierens mit drei Ratern wurden den einzelnen Äußerungen der Schülerinnen und Schülern konzeptuelle Bezeichnungen zugeordnet, die in mehreren Durchgängen diskutiert und modifiziert wurden. Diesen Bezeichnungen für einzelne Interviewabschnitte wurden schließlich Kategorien zugeordnet [Strauss & Corbin 1996, S. 43 ff.]. Drei dieser Kategorien waren *Datenbeschaffung*, *Planung* und *Kontrolle*. Wir interessieren uns hier speziell für die Datenbeschaffung.

Datenbeschaffung

Die Datenbeschaffung von Modellierungsaufgaben kann theoretisch an zwei Stellen im Problemlöseprozess eingeordnet werden. Betrachtet man einen idealisierten Problemlöseprozess [Garofalo & Lester, 1985], so tritt die Datenbeschaffung vor der Organisation mit dem Ziel der Planerstellung und nach der Organisation mit dem Ziel der Datenbeschaffung für die Ausführung auf. Genauer kann man so im Sinne der Beschreibung von Planungsvorgängen bei Schoenfeld [1985] einerseits von analysierend-explorativer und andererseits von ausführender Datenbeschaffung sprechen.

Im Rahmen der durchgeführten qualitativen Studie konnten wir in den Lösungsprozessen der Schülerinnen und Schüler unterschiedlichste Datenbeschaffungsprozesse lokalisieren. Beispielsweise zeigt der unten zitierte Transkriptausschnitt einen Vergleich von gegebenen Daten mit Stützpunktvorstellungen.

Transkriptausschnitt: *01:51 S2: Wir können das Gerüst nehmen das Gerüst ist immer ein (.) dass ein Mann drunter stehen kann . oder?*

Insgesamt wurden in den ausgewerteten Beobachtungen folgende Arten der Datenbeschaffung festgestellt:

- Schätzen
- Alltagswissen verwenden
- Vergleich mit Stützpunktvorstellungen
- Messen
- Vergleich mit vorher ermittelten Werten
- Zwischenergebnisse verwenden
- Abzählen
- Direkter Vergleich mit vorhandenen Gegenständen
- Lesen
- Raten

Fallstudie

Im Rahmen einer Fallstudie mit fünf Schülerpaaren wurden die Datenbeschaffung, die Planung und das Kontrollverhalten der Schülerinnen und Schüler analysiert und charakterisiert. Dabei zeigt sich für die Datenbeschaffung, dass einige Schülerpaare auf bestimmte Arten der Datenbeschaffung festgelegt sind. So dominierten in zwei Fällen das Messen sowie in weiteren Fällen das Schätzen und die Verwendung von Alltagswissen. Nur in einem Fall konnte eine vielfältig angelegte Datenbeschaffung festgestellt werden. Ein Vergleich mit den beiden anderen Kategorien Planung und Kontrolle zeigt, dass hier gewisse Parallelen auftreten können. Während die vielfache Datenbeschaffung mit einer sehr expliziten Planung und einem globalen Kontrollverhalten zusammenfällt, trifft beispielsweise die auf Alltagswissen basierende Datenbeschaffung mit einer ebenso realitätsverhafteten Planung und einer nur lokalen Kontrolle zusammen [vgl. Greefrath 2008]. Die folgende Aufstellung gibt eine Übersicht über die Fälle mit der jeweiligen Charakterisierung.

Fall	Datenbeschaffung	Planung	Kontrolle
A	Vielfach	Explizit	Global
B	Alltagswissen	Real	Lokal
C	Messen	Implizit	Vielfach
D	Messen	Implizit	Lokal
E	Schätzen	Explizit	Vielfach

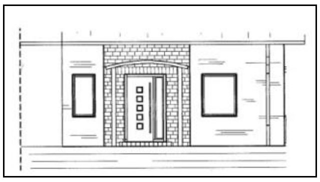
Aufgaben mit unterschiedlichem Modellierungsgrad

Im Rahmen einer schriftlichen Untersuchung wurden 388 Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 7 gebeten, eine der drei folgenden Aufgaben zu bearbeiten (Petermöller 2007). Anschließend wurden die Schülerinnen und Schüler zu Ihrer Einstellung bezüglich dieser Aufgaben befragt.

Aufgabenvariante 1

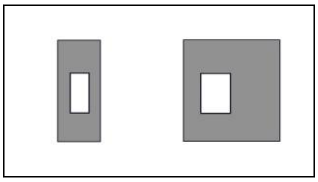
Die Vorderseite dieses Hauses soll außen verputzt werden. Berechne möglichst genau die zu verputzende Fläche!

Aufgabenvariante 2



Die Vorderseite dieses Hauses soll außen verputzt werden. Berechne möglichst genau die zu verputzende Fläche!

Aufgabenvariante 3



In der Zeichnung ist die Vorderseite eines Hauses zu sehen. Die weißen Rechtecke stellen die Fenster dar. Sie haben eine Höhe von 1,30 m. Die grau schraffierten Flächen sollen verputzt werden. Berechne möglichst genau diese Fläche.

Dabei wurde festgestellt, dass allen Schülerinnen und Schülern die Flächenberechnung und die anschließende Subtraktion von Teilflächen leichter fallen als die Datenbeschaffung. Eine genauere Analyse dieser Datenbeschaffung zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums häufiger einen Maßstab verwenden als die Schülerinnen und Schüler anderer Schulformen (GY 30 %, RS 10 %, HS 5 %). Hier stellt man mit einer asymptotischen Analyse von Kontingenztafeln unter Verwendung des χ^2-Tests (vgl. Bortz et al. 1990, S. 131 ff.) einen signifikanten Unterschied der Lösungsqualität bezogen auf die Merkmale Schulform und Datenbeschaffung fest ($\alpha = 0.01$). Im Vergleich zu anderen Schulformen wird an der Realschule mehr mit in sich stimmigen Relationen von Längen gearbeitet (GY 19 %, RS 28 %, HS 16%). Die Schülerinnen und Schüler von Haupt- und Realschulen fanden also häufiger auf anschauliche und weniger mathematisch abstrakte Weise einen alternativen Lösungsweg. Insgesamt stellt man hier einen signifikanten Unterschied der Lösungsqualität bezogen auf die Merkmale Schulform und Aufgabenvarianten fest ($\alpha = 0.01$).

In Aufgabenvariante 1 zeigt sich der oben beschriebene Effekt bezüglich der Datenbeschaffung sogar noch deutlicher. Während Real- und Hauptschülerinnen und -schüler fast bzw. gar nicht (4% bzw. 0 %) mit einem Maßstab arbeiteten, haben mehr als ein Viertel der Gymnasialschülerinnen und Schüler diesen Weg verwendet (28 %). Insgesamt wurde die Aufgabenvariante 1 (53 %) als die interessanteste Aufgabe angesehen. Die anderen beiden Aufgaben wurden etwa gleich bewertet. Die leichteste Aufgabe war aus Sicht der Schülerinnen und Schüler eindeutig die Aufgabenvariante 3 (75 %). Die Antworten auf die Frage, welcher Aufgabentyp am häufigsten im Mathematikunterricht vorkommt, ergaben ähnliche Anzahlen für die Varianten 2 und 3. Aufgabenvariante 1 kommt nach Ansicht der Schülerinnen und Schüler fast gar nicht vor (7 %).

Schlussfolgerungen für den Unterricht

Fehler in den Rechnungen werden häufig von Schülerinnen und Schülern selbstständig gefunden und korrigiert, während für Schwierigkeiten im Rahmen der Datenbeschaffung meist Kontrollmechanismen fehlen. Die Untersuchungen zeigen die Notwendigkeit der Beschäftigung mit Datenbeschaffungen im Unterricht. Dabei sollte insbesondere das Schätzen kritisch hinterfragt und diskutiert werden. Hierzu ist es notwendig, Stützpunktwissen und Vergleichsgrößen im Unterricht entsprechend zu behandeln.

Literatur

Bortz, J. & Lienert, G.A. & Boehnke, K. (1990). *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik*, Berlin Heidelberg: Springer.

Garofalo, J. & Lester F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance, *J. Res. Math. Educ.*, 16(3), 163-176

Greefrath, G. (2006). *Modellieren lernen mit offenen realitätsbezogenen Aufgaben*, Aulis, Köln.

Greefrath, G. (2008). Untersuchung von Modellbildungs- und Problemlöseprozessen, Beiträge zum Mathematikunterricht 2008, WTM-Verlag, Münster

Petermöller, W. (2007). *Untersuchung von Aufgaben mit unterschiedlichem Modellierungsanteil und eine Befragung zur Einstellung von Schülerinnen und Schülern zu diesen Aufgabenvarianten am Beispiel der Hausaufgabe*, Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe II / I, Wuppertal.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*, Academic Press, Orlando

Strauss, A. & Corbin, J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung*, Weinheim: Beltz Psychologie Verlags Union.

Rita BORROMEO FERRI, Hamburg

Zur Entwicklung des Verständnisses von Modellierung bei Studierenden

Einführung

Mathematische Modellierung ist zwar mittlerweile in den Rahmen- und Lehrplänen verankert und stellt eine Kernkompetenz bei den Bildungsstandards dar, dennoch ist die Umsetzung im Unterricht durch geschulte Lehrende in diesem Bereich nicht garantiert. Ein Grund dafür ist die Tatsache, dass Modellierung und ihre Didaktik in den Curricula oder Modulen für angehende Lehrerinnen und Lehrer nicht bundesweit festgeschrieben ist, was aufgrund des aktuellen Status von Modellierung fast schon paradox erscheint. Es ist jedoch unstrittig, dass Lehrende Experten (siehe u.a. Krauss et al.) für Modellierung werden müssen, um ihre Schülerinnen und Schüler effektiv zu unterrichten und aktiv in die Modellierung mit einbinden zu können (Chapman 2007). In den letzten Jahren gab es viele empirische Studien, die sich mit der Frage auseinandergesetzt haben, wie Modellierung in der Schule zu unterrichten ist (u.a. Maaß 2007, Blum/Leiß 2007) oder wie Studierende für diesen Bereich sensibilisiert werden können (Blomhoj/Kjeldsen 2007; Schwarz/Kaiser 2007). Die Ergebnisse eröffneten neue Ansichten, wie Modellierung auf eine profitable Weise in den Mathematikunterricht integriert werden kann. Dennoch blieben dabei Fragen offen, in wie weit diese Aspekte in die Lehrerausbildung integriert werden können und zwar so, dass Studierende mit Selbsterfahrung, inhaltlichen **und** methodisch-didaktischen Grundlagen zum Modellieren gut gerüstet sind. Konkret bedeutet das für die Lehre an der Universität:

1) Wie können angehende Lehrerinnen und Lehrer in (Uni)-Seminaren auf das Unterrichten von Modellieren vorbereitet werden – welche Inhalte und Methoden sind angemessen?
2) Wie entwickelt sich das Verständnis von Modellierung bei Studierenden über ein Semester und wie kann dieser Prozess beobachtet werden?

Hier kann nur eine kurze Darstellung und Auswertung eines Modellierungsseminars bezüglich der oben genannten Fragen erfolgen, was an der Universität Hamburg für diese Zwecke konzipiert und zweimal durchgeführt wurde (April 2008-Februar 2009). Dabei handelt es sich um eine explorative Studie mit dem Ziel, ein Kompetenzmodell für Studierende bezüglich Modellierung zu entwickeln. Das Prinzip für die Seminarkonstruktion war: *Wenn unsere Studierenden später Modellierung in angemessener Weise unterrichten sollen (mit einer Korrespondenz zwischen Inhalt und*

Methoden, kognitive Aktivierung der Lernenden) müssen wir sie als Hochschullehrende in derselben Art und Weise unterrichten.

1. Konzeption des Seminars

In beiden Semestern nahmen insgesamt 55 Studierende aus dem Hauptstudium teil, die allen Schulformen angehörten, d.h. von Sonderschullehrern bis Berufsschullehrern. Das Seminar gliederte sich in fünf Teile:

Teil 1 (Theorie) – 3 Stunden	(Ziele, Perspektiven, Kreisläufe)
Teil 2 (Praxis) – 3 Stunden	(lösen, analysieren, entwickeln)
Teil 3 (Theorie und Praxis) – 3 St.	(Kompetenzen, Beliefs, Interventionen)
Zwischenevaluation	(offener Fragebogen)
Teil 4 (Präsentationen) – 2 St.	(Unterrichtsversuch und Diskussion)
Teil 5 (Reflexion des Seminars)	
Endevaluation	(offener Fragebogen)

Neben diesen Inhalten, sollten die Studierenden gleichzeitig erfahren, welche Methoden sich eignen, um Modellierung zu unterrichten. Diese Methoden wurden jedoch nicht gelehrt, sondern die Studenten erfuhren und reflektierten diese durch Selbsterfahrung, in dem die Dozentin die Inhalte des Seminars methodisch aufbereitete. Es handelte sich vorrangig um Methoden des kooperativen Lernens, beispielsweise „Gruppenpuzzle“, „Kugellager“, „Stummes Schreibgespräch“. Dazu gehörte auch, dass die Studierenden über das Semester hinweg in Basisgruppen arbeiteten und gemeinsam eine Modellierungsaufgabe entwickelten sowie in der Schule erprobten und diese schließlich dem Seminar präsentierten.

2. Methodische Aspekte – Design der Studie

Die Konzeption des Seminars stellte die Basis dar, an der das Verständnis von Modellierung bei den Studierenden über ein Semester rekonstruiert werden sollte. Das bedeutet, dass die „Güte“ der Verstehensprozesse jedoch genau von der Seminarstruktur abhängig ist, welche die Dozentin entwickelt hat. Der methodologische Hintergrund ist demnach die Aktionsforschung, da man selbst zum Beforschten wird. Die Entwicklung von Verständnis ist ein individueller Prozess. Welche Methode erscheint bei einem so großen Sample über einen langen Zeitraum für angemessen, um diese Prozesse zu rekonstruieren? Ich habe mich für die Methode des „Lernwochenbuchs bzw. Reisetagebuchs“ (Gallin/Ruf 1996) entschieden, da „das Schreiben den Gedankenfluss stark verlangsamt, erhält der Schüler Gelegenheit seine eigenen Aktivitäten der Reflexion zugänglich zu machen.“ (Gallin/Ruf 1996, 91) Die Studierenden mussten demnach am Ende jeder

Seminarstunde nach folgenden Kriterien, angeleht an Gallin/Ruf ihren Lern- und Verstehensprozess refelktieren und festhalten: **Datum; Thema:** (Womit befassen wir uns?); **Auftrag:** (Was muss ich tun?); **Orientierung:** (Wozu machen wir das?); **Spuren:** (Wie geht mein Verständnisprozess bezgl. Modellierung voran?); **Rückblick:** (Wo stehe ich jetzt?); **Rückmeldung:** (Wer mir weiterhelfen kann); **Sonstige Gedanken/Reflexionen zum Seminar.** Die Lerntagebücher wurden kodierend, im Sinne der Grounded Theory (Strauss/Corbin 1990) ausgewertet. Dadurch konnten individuelle Entwicklungsprozesse rekonstruiert und auch querschnittliche Ergebnisse gewonnen werden, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen wird.

3. Ergebnisse – im Überblick

Die Analyse der Lerntagebücher verdeutlichte, dass die Struktur des Seminars zum Verständnis von Modellierung beitrug, was viele Metabemerkungen belegten. Sowohl Inhalt als auch Methoden scheinen ein adäquater Weg zu sein, Modellierung und ihre Didaktik in Universitätsseminaren zu lehren. Bei 55 Studierenden konnte ein positiver Entwicklungsprozess von Modellierung und dessen didaktische Umsetzung rekonstruiert werden. Modellierung wurde von 20 Studierenden zu Beginn des Seminars als zu komplex und zu schwierig angesehen, was Aussagen wie „kein Prüfungsthema!“ oder „wie in der Schule umsetzbar?“ zeigten. 50 Studierende kannten zu Begin nur einen Kreislauf und ihnen waren keine adäquaten Methoden des Unterrichtens von Modellierung vertraut. Der Theorieteil schaffte einerseits Verständnis von Modellierung, andererseits kamen Probleme auf, z.B. bei den Kreisläufen, der Unterscheidung von einzelnen Phasen, bes. Reales Modell/ Situationsmodell, Interpretieren und Validieren. Ein erster großer Zuwachs des Verständnisses konnte bei Teil 2 rekonstruiert werden der sich dann kontinuierlich fortsetzte. Deutlich wurde dabei die Art und Weise, wie die Inhalte nachvollzogen wurden: mehrschichtig und reflektiv, das heißt nicht nur theoretisches Verständnis wuchs, sondern auch die Selbstreflexion als Lehrperson. Deutlich wurde jedoch, dass das Verständnis mit unterschiedlicher Methodenwahl zusammenhängt und mit dem Arbeiten in der Basisgruppe. Das folgende Zitat eine Studentin zeigt, welchen Schluss sie am Ende des Semesters bezüglich ihres Verständnisses von Modellierung für sich zieht:

„Ich denke ich werde keine Probleme haben, falls ich später eine Modellierungsaufgabe in einer Klasse präsentieren sollte. Ich habe nicht nur gelernt wie ich eine solche entwickeln und analysieren kann, sondern fühle mich auch in der Lage Fragen der Schüler zielgerichtet beantworten zu können.“

4. Kompetenzmodell für Studierende bezüglich Modellierung

Auf der Basis der Daten der explorativen Studie konnte ein Kompetenzmodell für Studierende entwickelt werden, was über „Modellierungskompetenzen“, so, wie es in der aktuellen Literatur verstanden wird (Maaß 2007), hinausgeht. Modellierungskompetenzen sind nur ein Teil des Modells, welches u.a. noch methodisch-didaktische Aspekte miteinschließt. Im Folgenden sind die jeweiligen Haupt-Dimensionen dargestellt, ohne jedoch die Subdimensionen weiter auszuführen (siehe Borromeo Ferri/Blum, im Druck). Dimensionen des Kompetenzmodells:

Theoretische Dimension *Aufgaben Dimension*
Unterrichts Dimension *Diagnostische Dimension*

Literatur

Blum, W.; Leiß, D. (2007). „Filling Up“- the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In: Bosch, Marianna (Hrsg.): *CERME 4 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1623-1633.

Blomhoj, M; Kjeldsen, T. (2007). Learning the integral concept through mathematical modelling. In: Pitta-Pantazi, D; Philippou, G. (Hrsg.): *CERME 5 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2070-2079.

Borromeo Ferri, R.; Blum, W. (im Druck). Modelling in Teacher Education - Experiences from a Modelling Seminar. *Erscheint in Proceedings der CERME 6*, Lyon

Chapman, O. (2007). Mathematical modelling in high school mathematics: teachers’ thinking and practice. In: Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Hrsg.): *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 325-332.

Gallin, P.; Ruf, U.(1996): Mit Geschichten lernen - Lernen als Geschichte erleben, auch in der Mathematik. Merkmale eines Sprachunterrichts, von dem auch andere Fächer profitieren. In: Hohmann, Joachim; Rubinich, Johann (Hrsg.), *Wovon der Schüler träumt*. Frankfurt: Peter Lang. S. 319-369.

Krauss, S.; Brunner, M.; Kunter, M.; Baumert, J.; Blum, W.; Neubrand, M.; Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? In: Haines, C.; Galbraith, P.; Blum, W; Khan, S. (Hrsg.): *Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics*. Chichester: Horwood Publishing, 65-78.

Schwarz, B.; Kaiser, G. (2007). Mathematical Modelling in school – experiences from a project integrating school and university. In: Pitta-Pantazi, D; Philippou, G. (Hrsg.): *CERME 5 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2180-2189.

Strauss, A.; Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research*. London: Sage

Gabriele KAISER, Björn SCHWARZ, Universität Hamburg

Zusammenhänge zwischen verschiedenen Wissensgebieten der professionellen Kompetenz von Lehramtsstudierenden des Fachs Mathematik im Bereich von Modellierung und Realitätsbezügen

1. Einleitung

Nicht erst seit der verstärkten Diskussion über Schülerleistungen im Zuge der entsprechenden internationalen Vergleichsstudien wie PISA und TIMSS ist auch die Lehrerbildung national wie international Zentrum von zum Teil kontrovers geführter Debatten geworden. Vor diesem Hintergrund haben sich mehrere große Vergleichsstudien zur Lehrerbildung entwickelt, etwa die MT21-Studie, die TEDS-M-Studie und die COACTIV-Studie. Im folgenden Text werden die Ergebnisse einer qualitativen Vertiefungsstudie zu MT21 vorgestellt, die insbesondere auf Lehramtsstudierende und deren individuellen Kompetenzerwerb fokussiert.

2. Theoretischer Hintergrund

Ausgangspunkt der Untersuchung sind die Konzeptualisierungen zu verschiedenen Bereichen des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern. So kann nach Shulman (1986) dieses Wissen zuerst in pedagogical knowledge und content knowledge unterteilt werden und bezüglich des content knowledge dann eine weitere Unterscheidung zwischen subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge und curricular knowledge vorgenommen werden. Für die beschriebene Studie werden diese Komponenten darüber hinaus weiter ausdifferenziert, so wird etwa mit Bezug auf Bromme (1995) der Unterschied zwischen Schulmathematik und Mathematik als Wissenschaft berücksichtigt. Diese kognitive Komponente wird in der Studie außerdem ergänzt um eine affektiv-wertorientierte Komponente, die unter anderem verschiedene beliefs zur Mathematik und zum Lehrern und Lernen von Mathematik in Anlehnung an Grigutsch, Raatz und Törner (1998) berücksichtigt. Die zentrale Frage der Studie ist damit, wie das Professionswissen von Lehramtsstudierenden gestaltet ist und welche Zusammenhänge zwischen den beschriebenen unterschiedlichen Bereichen rekonstruiert werden können.

3. Methodisches Vorgehen

Für die Vertiefungsstudie wurden Fragebögen mit offenen Aufgaben zu den Themengebieten "Modellierung und Realitätsbezüge", "Argumentieren und Beweisen" und "Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht" entwickelt. Die Aufgaben sind dabei domänenübergreifend gestaltet, das heißt, dass verschiedene Teilaufgaben einer Aufgabe sich jeweils auf verschiedene Bereiche des Lehrerprofessionswissens beziehen. An der Befragung haben insgesamt 79 Studierende in Deutschland freiwillig teilgenommen. Die Auswertung der Fragebögen geschieht gemäß der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2000) unter Anwendung der deduktiven Kategoriendefinition. Im Einklang mit der Fragestellung wird genauer auf die Methode der strukturierenden Inhaltsanalyse und hierbei auf das skalierende Strukturieren zurückgegriffen. Die Antworten werden dabei durchgehend von zwei Ratern eingeschätzt.

4. Ergebnisse

Die folgenden Ergebnisse beschränken sich auf den Teilbereich "Modellierung und Realitätsbezüge" und deren Thematisierung im Mathematikunterricht. Beschrieben werden dabei insbesondere Ergebnisse zu den Zusammenhängen zwischen den diesbezüglichen beliefs und dem auf Modellierung im Mathematikunterricht bezogenen fachdidaktischen Wissen. Eine ausführliche Darstellung dieser und weiterer Ergebnisse sowie des zugehörigen methodischen Vorgehens findet sich in Schwarz, Kaiser und Buchholtz (2008).

In Ergänzung zu den beliefs wurde für die Analyse der Zusammenhänge von verschiedenen Wissensbereichen das Konzept der "Affinität" eingeführt. Kurz formuliert beschreibt die Affinität den Grad der Zustimmung zu oder Ablehnung gegenüber einem Themengebiet auf einer Ordinalskala. Im Weiteren sind sowohl die Affinität als auch das fachdidaktische Wissen dabei immer bezogen auf Modellierung im Mathematikunterricht.

Erwartungsgemäß zeigen sich dann im Sinne der Filter-Funktion von beliefs (vgl. Richardson & Placier, 2001) starke Einflüsse der beliefs auf das erworbene fachdidaktische Wissen. In der hier zugrundeliegenden Analyse wurde dabei die Fähigkeit der Studierenden zur fachdidaktisch fundierten Reflexion über Modellierung im Mathematikunterricht als Merkmal für fachdidaktisches Wissen ausgewertet. Ganz ähnliche Zusammenhänge wie diejenigen zwischen den beliefs und dem fachdidaktischen Wissen zeigen sich dann auch zwischen der Affinität und dem fachdidaktischen Wissen. Studierende, die eine positive Haltung gegenüber Modellierung im Mathematikunterricht vertreten, also eine hohe Affinität zu diesem Thema haben, sind zumeist in der Lage, fachdidaktisch deutlich fundiertere Analysen zu formulieren als Studierende mit einer niedrigen Affinität. In diesen Zusammenhang fügen sich die beliefs im Einklang mit der Filter-Funktion dann passend ein. So haben Studierende mit einem stark formalistischen oder schematischen Mathematikbild und entsprechenden beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematik größtenteils eine niedrige Affinität zur Modellierung im Mathematikunterricht. In den Ausführungen dieser Studierenden werden im Einklang damit insbesondere formale Bildungsziele von Mathematikunterricht betont, die sich durch Modellierung und die dazugehörigen Arbeits- und Unterrichtsformen schlechter realisieren lassen. Studierende, die dieser Gruppe zugeordnet werden können, formulieren zudem häufig typische Gegenargumente gegen Modellierung im Mathematikunterricht. So betonen sie den hohen Zeitbedarf und Aufwand für die Durchführung einer Modellierungseinheit oder verweisen auf den Fachunterricht in anderen Fächern als Ort für die Behandlung realitätsbezogener Fragestellungen. Im Mathematikunterricht dagegen sollten den typischen Antworten dieser Studierendengruppe gemäß realitätsbezogene Probleme vor allem dann gestellt werden, wenn sich damit bereits gelernte mathematische Inhalte wiederholen lassen. Im Gegensatz dazu haben Studierende mit einem eher durch prozess- und anwendungsbezogene beliefs geprägten Antwortverhalten oftmals eine hohe Affinität zu Modellierung im Mathematikunterricht. In den Antworten dieser Studierenden werden neben fachlichen auch nicht-fachliche Inhalte als Bildungsziele von Mathematikunterricht formuliert. Gerade durch stark prozessbezogene beliefs geprägte Antworten zeigen dabei häufig auch eine stark subjektivitätsbezogene Perspektive auf Mathematikunterricht.

Damit einhergehend lassen sich auch Zusammenhänge zwischen den beliefs und der fachdidaktisch geprägten Reflexion der Studierenden über den motivierenden Gehalt von Modellierungsaufgaben rekonstruieren. Im Einklang mit den vorher geschilderten Ergebnissen tendieren Studierende, deren Antworten durch prozess- oder anwendungsbezogene beliefs geprägt sind, zu der Einschätzung, dass Modellierungsaufgaben für Schülerinnen und Schüler einen hohen Motivationsgehalt haben. Im Gegensatz dazu neigen Studierende, deren Antworten auf formalistische oder schemaorientierte beliefs schließen lassen, dazu, Modellierungsaufgaben den motivierenden Charakter für Schülerinnen und Schüler abzusprechen. Bemerkenswert ist dabei aber, dass insbesondere die eigenen Erfahrungen der Studierenden im Umgang mit Modellierungsaufgaben stark zum Referenzrahmen für die fachdidaktische Reflexion über den motivationalen Gehalt dieser Aufgaben gemacht werden und weiterhin diese Erfahrungen ebenfalls stark durch die eigenen beliefs geprägt sind. So empfinden Studierende, deren Mathematikbild stark schemaorientiert oder formalistisch ist, die eigene Arbeit mit Modellierungsaufgaben häufig als geradezu frustrierend. Dazu trägt beispielsweise bei, dass in diesen Aufgaben häufig Angaben fehlen, die zur erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe anderweitig recherchiert oder geschätzt werden müssen. Gerade Studierende mit einem stark schematisch geprägten Bild von Mathematik empfinden auch das Fehlen einer bekannten, algorithmischen Standardprozedur zur Lösung der Aufgabe als ungewohnt und wenig motivierend. Diese Erfahrungen beziehungsweise subjektiven Wahrnehmungen vom eigenen Modellieren werden dann zur Grundlage der Reflexion über den motivationalen Charakter von Modellierungsaufgaben gemacht und auf die Einschätzung, wie Schülerinnen und Schüler Modellierung empfinden, übertragen. Daher betonen diese Studierenden häufig Argumente, die gegen einen hohen Motivationscharakter der Modellierungsaufgaben sprechen und nehmen an, dass die Lernenden eine eher negative Einstellung zu Modellierungsaufgaben haben. Im Gegensatz dazu stehen Antworten von Lehramtsstudierenden mit einem prozess- oder anwendungsgeprägtem Bild von Mathematik. Diese Studierenden beschreiben oftmals, dass sie Modellierungsaufgaben und die selbstständige Auseinandersetzung mit der Realität und dessen Verhältnis zur Mathematik als motivierend und sinnhaft empfinden. Oftmals grenzen die Studierenden Modellierungsaufgaben darüber hinaus gegen die algorithmisch geprägten "Standardaufgaben" ab und bezeichnen umgekehrt diese Aufgaben als frustrierend. Im Einklang mit der vorher geschilderten Gruppe von Studierenden leiten dann auch diese angehenden Lehrerinnen und Lehrer aus ihren subjektiven Erfahrungen beim Modellieren ihre Einschätzung von Modellierungsaufgaben ab und betonen in ihren Antworten die motivierenden Eigenschaften von solchen Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler.

Literatur

Bromme, R. (1995): What exactly is ‘pedagogical content knowledge’? – Critical remarks regarding a fruitful research program. In Hopmann, S., Riquarts, K. (Hrsg.), *Didaktik and/or Curriculum.* Kiel: IPN.

Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(1), 3–45.

Mayring, P. (2000). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Richardson, V., Placier, P. (2001). Teacher Change. In: Richardson, V. (Hrsg.), *Handbook of Research on Teaching*. Washington: American Educational Research Association.

Schwarz, B., Kaiser, G., Buchholtz, N. (2008). Vertiefende qualitative Analysen zur professionellen Kompetenz angehender Mathematiklehrkräfte am Beispiel von Modellierung und Realitätsbezügen. In: Blömeke, S. Kaiser, G., Lehmann, R. (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer – Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und –referendare – Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung.* Münster: Waxmann Verlag.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Katja MAAß, Freiburg & Johannes GURLITT, Göttingen

LEMA – Lehrerprofessionalisierung im internationalen Kontext

Die Forderung, Realitätsbezüge im Mathematikunterricht herzustellen und Modellierungen in den Unterricht zu integrieren, beschränkt sich nicht nur auf den deutschsprachigen Raum. Ähnliche Forderungen werden in vielen Ländern Europas erhoben, wenn auch die Intensität der Forderungen und die Rahmenbedingungen jeweils andere sind. LEMA[1] (Learning and education in and through modelling and applications) ist ein von der EU gefördertes Projekt, in dem 6 Länder Europas daran beteiligt sind, ein Lehrerfortbildungskonzept zum Modellieren sowie dazugehörige Materialien zu entwickeln, zu pilotieren, zu evaluieren und zu optimieren. LEMA läuft von Oktober 2006 bis September 2009.

Im Folgenden sollen zunächst einige kurze Erläuterungen zum theoretischen Hintergrund der Materialien gegeben werden, anschließend werden die Materialien kurz beschrieben. Danach werden die Methodik der Datenerhebung sowie einige erste Ergebnisse vorgestellt.

1. Theoretischer Hintergrund

Mathematisches Modellieren: Es gibt viele verschiedene Auffassungen zum Modellierungsprozess (Kaiser & Shiraman, 2006), in LEMA haben wir die Darstellung aus PISA - gewählt (Prenzel et al., 2004), uns aber – im Gegensatz zu PISA auf außermathematische Fragestellungen beschränkt.

In einem internationalen Projekt besteht eine besondere Herausforderung in der Integration unterschiedlichen theoretischer Perspektiven und Vorstellungen über die Art und Weise wie Modellieren unterrichtet werden. Zusätzlich muss die Einbettung in die spezifischen nationalen Kontexte berücksichtigt werden. So arbeitet beispielsweise der englische Partner mit der Cultural-Historical Activitiy Theory (CHAT), die Mathematik als soziale Aktivität konzeptualisiert, der spanische Partner ist verwurzelt in der Antropological Theory of Didactcs, während die Autorin sich maßgeblich in der internationalen Theorie zum Modellieren verortet. Unsere Lösung bestand darin, in den unterschiedlichen Ansätzen nach Gemeinsamkeiten zu suchen und Unterschiede in den theoretischen Ansätzen als Chance auf-

[1] Partner in LEMA: Katja Maass (Koordinatorin) & Barbara Schmidt, PH Freiburg, Geoff Wake, Universität Manchester, Fco. Javier Garcia Garcia, Universität Jaen, Nicholas Mousoulides, Universität Zypern, Ödon Vancso & Gabriella Ambrus, Universität Budapest, Anke Wagner, PH Ludwigsburg, Richard Cabassut, IUFM Strasbourg.

fassen, die das Projekt durch eine mehrperspektivische Sichtweise bereichern können.

Lehrerprofessionalisierung: Im Hinblick auf Lehrerkompetenzen unterscheiden wir in Anlehnung an Krauss et al. (2004) und Shulmann (1986): Professionswissen (Fachwissen, Didaktisches Wissen, Pädagogisches Wissen), Beliefs, Motivationale Orientierung und Kompetenzen in Selbstreflexion/Selbstwahrnehmung. Empirische Studien zur Lehrerprofessionalisierung (z. B. Tirosh & Gerber 2003) zeigen, dass Fortbildungen zu Veränderungen führen, wenn es sich um längere Fortbildungen mit eingebetteten Praxis- und Reflexionsphasen handelt, wenn verschiedene Einflussfaktoren (Schulleitung, Eltern,…) in Betracht gezogen werden und die Beliefs der Lehrer berücksichtig werden.

2. Bedarfsanalyse

Weitere Grundlage für die Entwicklung der Materialien war eine Bedarfsanalyse auf Lehrerseite hinsichtlich ihrer mathematischen Beliefs und ihre Einsatzgewohnheiten bzgl. verschiedener Aufgabentypen. Außerdem wurden den Lehrern drei konkrete Modellierungsaufgaben vorgelegt. Sie mussten angeben, ob sie die Aufgaben einsetzen würden und ihre Antwort begründen.

Insgesamt haben N= 563 Lehrer aus allen Partnerländern an der Befragung teilgenommen. Die Items hatten alle eine 4-Punkt-Rating Skala von 1 (lehne ich völlig ab) bis 4 (ich stimme absolut zu). Die Ergebnisse zeigen, dass die prozessorientierten Beliefs (z. B. Mathematik hilft einem Probleme zu lösen: M = 3,49) und die nützlichkeitsorientierten Beliefs (z. B. Mathematik ist im Alltag sehr nützlich: M = 3,5) der Lehrer hoch zu sein scheinen, während formalismus-orientierte oder schema-orientierte Beliefs (z. B. Mathematik ist ein unveränderliche Sammlung von Wissen: M = 2,44) eher weniger bedeutsam erscheinen. Befragt nach Aufgaben, die sie im Unterricht einsetzen, verwiesen die meisten jedoch auf Aufgaben, die Grundfertigkeiten trainieren. Hinsichtlich der konkreten Modellierungsaufgaben gaben relativ viele an, die recht geschlossene Aufgabe unterrichten zu wollen, während dies für die offene Aufgabe nicht zu traf. Als Gründe, die dagegen sprachen, wurden angeführt, dass die offenen Aufgaben zu komplex seien und zu viel Zeit kosten würden.

3. Das entwickelte Fortbildungskonzept

Basierend auf der Bedarfsanalyse fanden die folgenden Aspekte im Fortbildungskonzept Berücksichtigung: Um den Befürchtungen der Lehrer hinsichtlich des Einsatzes von offenen Modellierungsaufgaben entgegenzuwirken, wurden die Ziele, die mit der Integration von derartigen Aufgaben verbunden werden, explizit thematisiert. Außerdem wurden unterschiedliche Möglichkeiten integriert, um Schüler bei der Bearbeitung offener Modellierungsaufgaben zu unterstützen.

Basierend auf unserem synthetisierten theoretischen Ansatz, der Bedarfsanalyse sowie in Kenntnis der unterschiedlichen nationalen Rahmenbedingungen wurde für die Fortbildung ein flexibel adaptierbarer modularer Ansatz gewählt, der Materialien für ca. 5 Fortbildungstage umfasst. Die Fortbilder werden dabei ausdrücklich aufgefordert, die Materialien an die lokalen Bedingungen anzupassen. Weiter wurde angeregt, die Fortbildungstage so zu verteilen, dass die teilnehmenden Lehrer die Gelegenheit haben, das Modellieren im Unterricht auszuprobieren und anschließend in der Fortbildung darüber zu reflektieren. Insgesamt umfasst die Fortbildung die folgenden 5 Module bzw. Untermodule: 1. Modellieren (Was ist das? / Warum?), 2. Aufgaben (Untersuchen / Entwickeln / Klassifizieren / Variieren), 3. Unterricht (Methoden / Kompetenzen fördern / Mathematische Inhalte üben / Neue Medien), 4. Diagnose (lernbegleitend /Klassenarbeiten / Feedback), 5. Reflexion (Implementierung / Herausforderungen). Die Materialien umfassen für jedes Fortbildungsmodul eine Powerpointpräsentation, ein Handbuch für die Fortbildner, ein Lehrertagebuch für die Reflexion und eine Einleitung für die Lehrer.

4. Pilotierung und Evaluation

Die Materialien wurden im Jahr 2008 in allen 6 Partnerländern pilotiert. Während dieser Pilotierung wurden die Materialien mittels eines Lehrerfragebogens im Rahmen eines Pre-Post-Kontrollgruppendesigns evaluiert. Der Fragebogen umfasst die Bereiche mathematische Beliefs, fachdidaktisches Wissen und Selbstwahrnehmung. Ein zusätzlicher Fragebogen erfasste die Akzeptanz der Fortbildung an allen Fortbildungstagen. Wo möglich (Beliefs, Selbstwirksamkeit) wurde auf etablierte Instrumente und Anleitungen (Bandura 2006; Grigutsch, Raatz & Törner 1996) aufgebaut. Beim fachdidaktischen Wissen erschien es sinnvoll offene Items zu verwenden, da so das Anwendungswissen – das die Lehrenden auch im Unterricht zur Verfügung haben sollten - evaluiert werden sollte. Der Fragebogen wurde so konzipiert, dass er sich möglichst eng an die Inhalte der Fortbildung anlehnt. Die Entwicklung des Fragebogens umfasste mehrere Phasen.

Der Fragebogen wurde von 143 Lehrern in Europa ausgefüllt (N = 106 Teilnehmer, N = 37 Baseline). Die ersten Auswertungen zeigen signifikante, deutliche Veränderungen im Bereich des fachdidaktischen Wissens ($p < .05$, $\eta^2 = .19$) und der Selbstwirksamkeitsüberzeugung in Bezug auf Modeling ($p < .05$, $\eta^2 = .26$), jedoch keine Veränderungen im Bereich der Beliefs. Darüber hinaus zeigen die nach jedem Tag durchgeführten Akzeptanzratings eine sehr hohe Akzeptanz der Fortbildung (5-stufige Skala; 5 entspricht maximaler Akzeptanz). Gemittelt über die 5 Fortbildungstage ergibt sich eine durchschnittliche Akzeptanz in Höhe von $M = 4{,}20$.

4. Diskussion

Die Ergebnisse untermauern sowohl auf Lern- als auch Akzeptanzebene den Erfolg der Fortbildung. Es gelang jedoch nicht, die Beliefs über Mathematik innerhalb des Fortbildungszeitraums zu verändern. Eine mögliche Erklärung für die Tatsache, dass sich die Beliefs im Rahmen des Erhebungszeitraums, nicht verändert haben, sind die Änderungsresistenz und tiefe Verwurzelung von Beliefs.

Die Größe der Kontrollgruppe ist gemessen an der Anzahl der Teilnehmer gering, aber sie ist vorhanden und sichert somit die Ergebnisse ab. Da im Projekt keine Gelder zur Entlohnung der Evaluationsteilnahme zur Verfügung standen, war insbesondere die Gewinnung von Lehrern als „Teilnehmer" der Kontrollgruppe eine Herausforderung. Insgesamt nahmen mehr als 106 Lehrer an den Fortbildungen teil. Missings ergaben sich vor allem dadurch, dass Schulleiter den Lehrenden nicht erlaubt haben, an allen Tagen der Fortbildung teilzunehmen und sie sich mit Kollegen abwechseln mussten.

Literatur

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: *The exercise of control*. New York: Freeman and Company.

Baumert, J, Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K. & Weiß, M. (2001): *Pisa 2000, Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik* 19 (98), 3-45.

Kaiser, G., Shriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38 (3), 302-310.

Kraus, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A., Löwen, K.(2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierende Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll, M. Prenzel, Bildungsqualität von Schule, (S. 31-53). Münster: Waxmann.

Shulmann, L. S. (1986). Those who understand : knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Tirosh, D, Graeber, A.(2003): Challenging and changing mathematics teaching practises. In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, F. Leung, Second international handbook of mathematics education (S. 643 – 688). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barbara SCHMIDT, Freiburg

Was Lehrerinnen und Lehrer am Modellieren hindert

Das Thema Modellieren steht nicht nur in Deutschland in den bundesweiten Bildungsstandards, auch in anderen Ländern Europas wird gefordert, Realitätsbezüge und Problemlösen in den Unterricht zu integrieren. Der Alltag im Unterricht sieht vielfach noch anders aus: Er ist vielerorts noch immer von kalkülartigen Aufgaben geprägt. Warum eigentlich? Was hindert Lehrer daran, Modellieren im Unterricht durchzuführen? Was motiviert Lehrer dazu? Um dieser Fragestellung nach zu gehen, wurde eine empirische Ergänzungsstudie im Rahmen des EU-Projektes LEMA[1] durchgeführt. Das Paper stellt das Projekt, die Entwicklung des Fragebogens und das Design der Studie vor. Abschließend sollen erste Ergebnisse präsentiert werden.

Die Intervention im Rahmen von LEMA

Im Rahmen von LEMA (Learning and Education in and through Modelling and Applications) wurde eine Konzeption für eine Lehrerfortbildung zum Thema Modellieren und Realitätsbezüge entwickelt, pilotiert und evaluiert. Dabei sollen Lehrer mit zeitgemäßen didaktischen und methodischen Konzepten vertraut gemacht werden. Sie sollen grundlegendes Wissen über mathematisches Modellieren und Realitätsbezüge im schulischen Kontext erwerben und nach der Fortbildung wissen, warum im Mathematikunterricht modellieren gelernt werden soll und wie ihre Schülerinnen und Schüler modellieren erlernen können. D. h. sie sollen wissen welche Lerninhalte, Lernformen und Lehrmethoden zum Fördern geeignet sind, an welchen Stellen des Unterrichts Modellierungen eingesetzt werden können und wie fehlendes Ausgangsniveau gesichert werden kann. Ferner sollen praktikable Konzepte zum Stellen und Aus- und Bewerten von Aufgaben in Klassenarbeiten angeeignet werden. Ein weiteres Ziel besteht darin, das Lernpotential, das in Modellierungsaufgaben steckt, analysieren, variieren und beschreiben zu können, sowie in der Fähigkeit, Aufgaben unter Berücksichtigung der Heterogenität der Klasse zu entwickeln[2].

Die Fortbildungsinhalte wurden für eine etwa fünftägige Fortbildung konzipiert. Die modulare Struktur der Inhalte erlaubt eine Auswahl der Inhalte und ist flexibel hinsichtlich der Länge der Fortbildung. Darüber

---

[1] LEMA = **L**earning and **E**ducation in and through **M**odelling and **A**pplications. Koordinatorin: Katja Maaß Pädagogische Hochschule Freiburg. Teilnehmende Länder: DE, EN, FR, ES, HU, CY

[2] www.lema-project.org

hinaus wurde die Konzeption so angelegt, dass Lehrer aller Schularten und Schulstufen daran teilnehmen können. In Deutschland fanden zwei parallele Fortbildungen an fünf über das Jahr verteilten Tagen statt (Start: Januar 2008; Ende: November 2008). Zwischen den Fortbildungstagen lagen jeweils ca. zwei Monate, damit die Lehrenden die Gelegenheit hatten, die Inhalte der Fortbildung im Unterricht zu integrieren.

Theoretische Grundlagen

Mathematisches Modellieren bezeichnet in der Regel den Gebrauch von Mathematik zur Lösung von realistischen und offenen Problemen. Dabei variieren die genaueren Definitionen je nach dem, welche Ziele angestrebt werden, welches Modell des Modellierungsprozesses verwand wird als auch die Bedeutung des Sachkontextes, der einer Modellierungsaufgabe zugeschrieben wird (Kaiser-Messmer 1986, Kaiser & Shiraman 2006).

Barrieren zur Integration von Modellierungen: Modellierungen spielen im Schulalltag immer noch eine geringere Rolle, als es wünschenswert wäre (Burkhard 2006, Maaß 2004). Anscheinend dominieren die Gründe, die aus Sicht der Lehrer dem Einsatz Modellierungen im Wege stehen gegenüber den Vorzügen. Blum (1996) ordnet sie vier Kategorien zu: Oranisatorische, Schülerbezogene, Lehrerbezogene und Materialbezogene Hindernisse. (siehe Ausführlich in Schmidt 2009)
Das Angebots-Nutzungs-Modell Abbildung 1 versucht Einflüsse auf die Unterrichtsqualität in ein umfassenderes Modell der Wirkungsweise des Unterrichts zu integrieren.

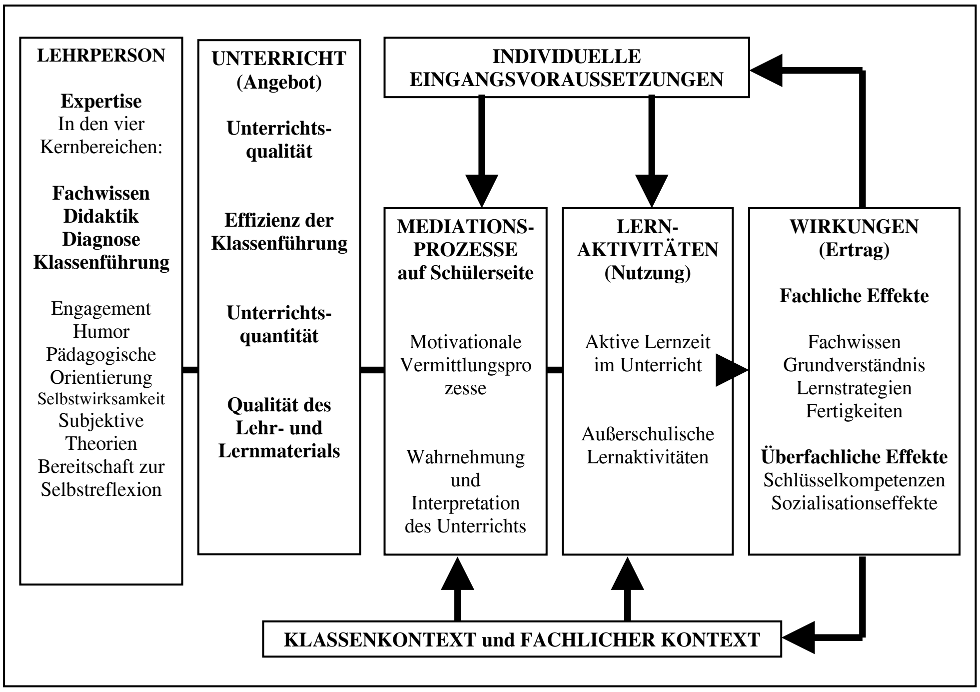


Abbildung 1: Angebots-Nutzungs-Modell Quelle: Helmke (2006)

Neben Merkmalen des Unterrichts umfasst das Modell auch Merkmale der Lehrerpersönlichkeit, des Klassenkontextes, der individuellen Eingangsvoraussetzungen und die Mediationsprozesse und Lernaktivitäten auf Schülerseite. Dieses Modell soll die Grundlage für eine theoretische Verortung der Hindernisse und Beweggründe gegenüber Modellierungen darstellen, sowie die Identifikation von Vernetzungen zwischen den Aspekten ermöglichen.

Forschungsfragen

Im vorausgegangenen Abschnitt wurden Argumente gegen das Modellieren aufgezeigt, die jedoch fast ausschließlich nur auf Erfahrungswerten beruhen und nicht empirisch untersucht wurden. Dies rechtfertigt den Anspruch an ein Messinstrument, welches empirisch die Argumente gegen Modellierungen erhebt. Die zentralen Fragestellungen für die Untersuchung lauten daher:

(1) Welche Hindernisse gibt es aus Lehrersicht gegenüber Modellierungen? (2) Welche Hindernisse erweisen sich hinsichtlich einer Umsetzung in die Praxis als bedeutsam? (3) Welche Veränderungen hinsichtlich der Hindernisse lassen sich im Verlauf der Fortbildung identifizieren?

Um diese Fragen zu beantworten wurde folgendes Design entwickelt.

Design der Studie

Um die Forschungsfragen zu beantworten, wurden quantitative und qualitative Methoden eingesetzt. Unter anderem wurde ein Fragebogen zur Erfassung von Hindernissen gegen das Modellieren konzipiert. Dieser soll zu drei Zeitpunkten eingesetzt werden (Pre-, Post- und Follow-up Test).

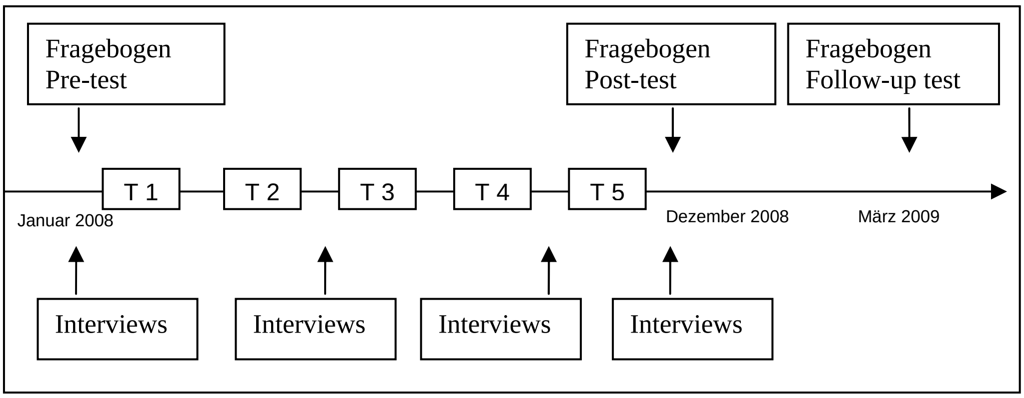


Abb.2: Verlaufsplan der Untersuchung

Drei Erhebungszeitpunkte wurden gewählt, um später eine mögliche Verlaufskurve bzw. Lehrertypen ausfindig zu machen. Ergänzend dazu soll mit einer ausgewählten Stichprobe von sechs Lehrern Einzelinterviews durchgeführt werden. Die genaue Konzeption wird in Abbildung 2 übersichtlich dargestellt.

Derzeit liegen für die hier beschriebene Studie die Ergebnisse des Pre- als auch des Posttests der Fragebögen vor. Des Weiteren liegen die ersten, zweiten und dritten Interviews der ausgewählten Probandengruppe vor. Weitere Daten werden im Laufe des Jahres erhoben.

Stichprobe: Die Stichprobe umfasst Lehrer aus zwei Fortbildungskursen mit insgesamt 52 Teilnehmern, sowie einer entsprechenden Kontrollgruppe mit 47 Probanden. Die Zuordnung zur Experimental- bzw. Kontrollgruppe wurde zufällig bestimmt.

Erste Ergebnisse

Der Fragebogen gibt Aufschluss, in welchen Bereichen sich Hindernisse von Lehrkräften gegenüber Modellierungen zeigen:

In der Analyse der Fragebögen zeichneten sich 3 Aspekte als Hindernisse ab: Lehrkräfte bemängeln den hohen ***Zeit***anspruch von Modellierungsaufgaben im Unterricht und sehen dies als Hinderungsgrund an. Darüber hinaus scheinen Lehrkräfte zu wenig ***Material*** zu haben, was ebenfalls ein Hinderungsgrund darstellt. Des Weiteren finden Lehrkräfte, dass die ***Leistungsmessung*** bei Modellierungsaufgaben schwer sei und stellen dies ebenso als Hinderungsgrund dar.

Ausblick

Im Laufe des Jahres wird die Datenerhebung der Fragebögen und Interviews beendet. Diese sollen Aufschluss über Veränderungen im Verlauf der Fortbildung geben. Des Weiteren stellt sich die Frage ob hinsichtlich des Verlaufs bestimmte Typen von Lehrern identifiziert werden können.

Quellen

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. – In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 23, Trends und Perspektiven, S. 15-38

Burkhardt, H. (2006): Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. –In: ZDM 38 (2) S. 178-195

Kaiser-Meßmer, G. (1986). Anwendungen im Mathematikunterricht, 2 Bände. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G., Shriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM 38 (3).

Maaß, K. (2004): Mathematisches Modellieren im Unterricht: Ergebnisse einer empirischen Studie. Hildesheim: Franzbecker

Schmidt, B. (2009): European Research in Mathematics Education. Proceedings of the CERME 6 Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Modellierungstage mit dem Thema Sportwetten

In der derzeitigen Unterrichtssituation in Österreich wird vor allem das kalkülhafte Operieren betont. Nicht zuletzt wurden diese Defizite durch Studien wie TIMMS oder PISA, die in den letzten Jahren in regelmäßigen Abständen durchgeführt wurden, aufgedeckt. Meine persönliche Einschätzung, die durch diese Studien gestärkt wird, ist, dass durch die Betonung des operativen Charakters die Mathematik in der Schule „verzerrt“ dargestellt wird, d.h. zentrale Anliegen der Mathematik werden kaum behandelt. Aufgabe von Fachdidaktikern, aber insbesondere Praktikern, sollte es sein, sich Gedanken dahingehend zu machen, welche Folgerungen man daraus ziehen kann. Dazu ein paar (persönliche) Gedanken:

- Schüler(innen) sehen keinen Sinn in der Mathematik; die Frage „Wofür Mathematik?“ tritt immer wieder auf.
- Mathematik wird kaum im Alltagsleben verwendet (man kann oft beobachten, dass einfache Prozentrechnungen Schwierigkeiten machen).
- Benötigte Kompetenzen sind nicht in ausreichendem Maße vorhanden.

Ist es das Ziel von Mathematiklehrer(inne)n nachhaltigen Unterricht durchzuführen, kann dies unter diesen Voraussetzungen unzureichend erfolgen. Es ist notwendig, dass Inhalte und Herangehensweisen gesucht und gefunden werden, die für das Betreiben von Mathematik charakteristisch sind. Aus Sicht eines Fachdidaktikers ist es dabei notwendig verschiedene fachdidaktische Aspekte zu berücksichtigen, v.a.

- sollen mit Hilfe des Spiralprinzips bestimmte Themen immer wiederkehrend auf verschiedenen Wissensniveaus behandelt werden,
- soll im Sinne des genetischen Prinzips an das Vorverständnis angeknüpft werden, entdeckt und Mathematik anwendet werden, aber auch die kommunikativen, prototypischen und fächerübergreifenden bzw. fächerverbindenden Aspekte der Mathematik herausgehoben werden,
- der Transfereffekt beachtet werden.

1. Modellbilden im Unterricht

Gerade die Beachtung der oben angeführten Punkte lässt mich immer wieder argumentieren, dass Modellbilden im Unterricht eine bedeutendere Rolle einnehmen muss. Durchläuft man einen Modellierungsprozess, so werden neben mathematischen Kenntnissen und Fertigkeiten insbesondere auch interpretierende und wertende Fähigkeiten verlangt. Gerade, wenn man das Zusammenspiel von Wirklichkeit (Realität) und Mathematik genauer betrachtet, sind die genannten Kompetenzen notwendig, um erfolgreich Ergebnisse erzielen zu können. Im Sinne der Modellbildung geht es also nicht nur um das Bearbeiten innermathematischer Aufgabenstellungen, sondern auch um die Auseinandersetzung mit Problemen der Lebenswelt (der Schüler(innen)). Ziel der Berücksichtigung der Modellbildung im Unterricht muss also sein:

- Erschließung der uns umgebenden Welt
- Erschließung der Mathematik
- Motivation zu „Neuem“

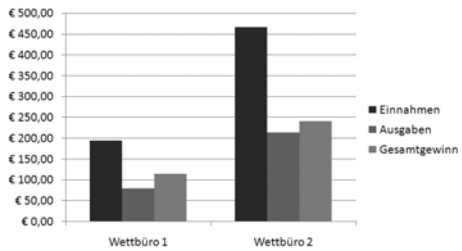
Im österreichischen Lehrplan findet man dazu viele Textstellen, die genau auf diese Punkte abzielen. Exemplarisch möchte ich einige anführen (Lehrplan (2008)): „Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen. (…) Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts. (…) Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen. (…)Unter Beachtung der Vorkenntnisse sind Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret anschaulichen, intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln, bei einfachen Anwendungen zu erproben und erst in einer späteren Phase zu vertiefen, ergänzen, verallgemeinern oder exaktifizieren.“

2. Sportwetten

Einen Unterrichtsvorschlag zum Thema Sportwetten, unter Berücksichtigung des Unterrichtsprinzips Projektarbeit, sowie die konkrete Entwicklung des Themas „Wetten im Unterricht" wurde von Jürgen Maaß und mir (Siller, Maaß, 2009a; Siller, Maaß, 2009b) in der ISTRON-Schriftenreihe ausgeführt. Aber was wäre eine theoretische Aufbereitung eines solchen Themas ohne eine praktische Umsetzung. Aus diesem Grund habe ich dieses Thema zum Anlass genommen, Schüler(innen) der Sekundarstufe I und II des BG/BRG St. Martin in Villach (Österreich) dieses Thema bei deren jährlich stattfindenden Modellierungstagen bearbeiten zu lassen. Als Gastdozent der Freien Universität Bozen habe ich dieses Thema auch mit Studierenden behandelt – diese haben ähnlich den Schüler(inne)n der Sekundarstufe I agiert. Ursprünglich dachte ich, dass dieses Thema aufgrund der Lehrplangegebenheiten sicherlich nur Schüler(innen) der Sekundarstufe II behandeln würden, allerdings war das Interesse von Schüler(innen) der Sekundarstufe I (Schulstufe 7) so groß, dass sie sich für dieses Thema entschieden. Entscheidend für die Entscheidung zu diesem Thema war vor allem die Begeisterung der Schüler(innen) einmal „hinter die Kulissen" von Wettbüros zu blicken, die in Österreich in jeder größeren Ortschaft vorzufinden sind. Auch motivierte die Schüler(innen) der Ansatz Fußballwetten, wie man sie im Internet ohne größere Schwierigkeiten tätigen kann, realitätsnah zu modellieren, um das reale Problem „Wie kann ich meine Welttipps gestalten, dass sich der Verlust in Grenzen hält bzw. sich der Gewinn erhöht" mit Hilfe mathematischer Mittel zu behandeln.

Schüler(innen) der Sekundarstufe I bzw. II wählten als Zugang zu diesem Thema gänzlich konträre Ansätze. Während sich die Schüler(innen) der Sekundarstufe II intellektuell mit dem Thema auseinanderzusetzen begannen, Literaturrecherche betrieben und von Beginn an mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung versuchten, einen Zugang zum Thema zu finden, versuchten die Schüler(innen) der Sekundarstufe I zunächst einmal einen experimentellen Zugang zu finden. Sie setzten sich an einen Tisch und führten eine Art von Elfmeterschießen durch, wobei sie darüber Aufzeichnungen führten, welcher Spieler gegen einen anderen Spieler öfter gewann. Basierend auf dieser Ausgangssituation ermittelten sie die prozentuelle Häufigkeit, wer höchstwahrscheinlich gewinnen würde und daraus die Quote für ein solches Spiel. In ihrer Simulation der Wettbüros ließen sie fiktive Einsätze auf ein Spiel tätigen und ermittelten aufgrund des Spielausgangs den Gewinn der Wettbüros. Die Ergebnisse, d.h. der Gewinn der Wettbüros, die die Schüler(innen) der Sekundarstufe I erhalten haben, füge ich an dieser Stelle ein, da sie für die Schüler(innen) wie sie in ihrer

Präsentation der Ergebnisse auch selbst festgestellt haben – nämlich, dass es sich aufgrund der mathematischen Analyse nicht lohnt zu wetten. Das Ergebnis der Simulation der Schüler(innen) lautete: „Wette nie!“ Wetten ist jedoch aufgrund psychologischer Aspekte in der realen Situation äußerst populär, wie Umsätze in Milliardenhöhe zeigen.



Die Lösungen die die Schüler(innen) der Sekundarstufe II ermittelten waren unseren Ergebnissen, welche in den beiden Artikeln von Siller und Maaß (2009a, 2009b) dargestellt sind, sehr ähnlich. Daher verzichte ich hier auch aus Platzgründen auf eine genauere Darstellung. Für die Schüler(innen) der Sekundarstufe II war es vor allem spannend zu begreifen, dass sich im Fall der fairen Wetten von der Quote auf die Gewinnwahrscheinlichkeit einer Partei schließen lässt und ebenfalls, dass sie mit elementaren mathematischen Methoden tatsächlich nachweisen konnten, dass sie in einer Wettsituation meistens als Verlierer dastehen würden, das Wettbüro zumeist der Gewinner sein würde.

3. Fazit

Modellierungstage können bei Schüler(innen) das Interesse an der Mathematik wecken; v.a. dann wenn man mit realitätsbezogenen Aufgabenstellungen entsprechende Motivation erzeugen kann. Natürlich ist auf die in einer Region/Land spezifischen Interessen Rücksicht zu nehmen und gewisse Rahmenbedingungen einzuhalten. Ist dies gewährleistet, so können nachhaltig Effekte erzielt werden, an die sich Schüler(innen) sicherlich noch lange nach ihrer Schulzeit erinnern werden. Außerdem haben gerade die Schüler(innen) der Sekundarstufe I mit ihrem Zugang gezeigt, dass es bei entsprechender Motivation auch möglich ist, ein Thema zu bearbeiten (in diesem Fall ein Teilgebiet der Stochastik), in dem man keinerlei Vorbildung besitzt. Gerade in diesem Sinn sollte es ein Anliegen ein, den Mut zu mehr realitätsbezogenen Aufgabenstellungen im Unterricht zu finden.

Literatur

Siller, H.-St., Maaß, J. (2009a). Fußball EM mit Sportwetten. In A. Brinkmann, R. Oldenburg (Hrsg.)*: ISTRON Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht,* Hildesheim: Franzbecker.

Siller, H.-St., Maaß, J. (2009b). Wetten im Mathematikunterricht – Förderung prozessbezogener Kompetenzen. In R. Bruder, A. Eichler (Hrsg.)*: ISTRON Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht,* Hildesheim: Franzbecker.

Astrid BRINKMANN, Münster

Moderierte Sektion: Vernetzungen im Mathematikunterricht

In der aktuellen didaktischen Diskussion wird ein breiter vernetztes mathematisches Wissen sowie stärker vernetztes Denken bei Problemlöseprozessen der Lernenden gefordert. In Deutschland wurde diese Forderung insbesondere als Folge der Ergebnisse der großen internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA erhoben, da diese Studien deutschen Schüler/innen Defizite vor allem im Bereich des konzeptuellen Verständnisses und des vernetzten Denkens bescheinigen (vgl. z. B. Baumert & Lehmann 1997, Neubrand u. a. 1998).

Die danach entwickelten Bildungsstandards erheben entsprechend des Beschlusses der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003 den Anspruch, „auf systematisches und vernetztes Lernen“ zu zielen (Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss 2003, S. 3).

Allerdings werden die Begriffe des vernetzten Wissens, Denkens oder Lernens allenthalben recht vage gebraucht. Versteht man unter Vernetzungen Relationen, in denen mathematische Objekte mit anderen mathematischen oder auch nichtmathematischen Objekten/Dingen stehen, so zeigt sich, dass es sehr unterschiedliche Qualitäten von Vernetzungen gibt, die für den Mathematikunterricht relevant sind (Brinkmann 2002). Entsprechend lässt sich der Ruf nach Förderung vernetzten Lernens auch verschieden interpretieren, woraus unterschiedliche Schwerpunktsetzungen resultieren.

Die Beiträge der moderierten Sektion liefern einerseits einen Einblick in die Thematik der Vernetzungen im Mathematikunterricht und einen Überblick über Forschungs- und Entwicklungsarbeiten hierzu, und andererseits methodische und inhaltliche Anregungen im Hinblick auf die geforderten Unterrichtsziele des Erwerbs eines besser vernetzten Wissens und eines erfolgreicheren Vernetzens (in Beziehung setzen) bei Problemlöseprozessen:

- Der Beitrag von *Astrid Brinkmann* führt in die Thematik der Vernetzungen im Mathematikunterricht ein. Es werden Defizite deutscher Schüler/innen präzisiert, aktuelle mathematikdidaktische Positionen aufgezeigt, laufende Projekte mit ersten Ergebnissen vorgestellt und verschiedene Bereiche, in denen Entwicklungsbedarf besteht, herausgestellt.
- *Swetlana Nordheimer* stellt in ihrem Beitrag das Konzept der von ihr entwickelten Unterrichtsmethode „die kapitelübergreifende Rückschau“ zum zusammenfassenden Wiederholen von mathematischen Inhalten am Ende des Schuljahres vor. Sie präsentiert eine Fallstudie, in der Schü-

ler/innen der 8. Klasse selbst kapitelübergreifende Aufgaben entwickelt haben.

– *Jürgen Roth* zeigt an einem Beispiel, wie sich Anschauung, Begriffe und Ideen vernetzen lassen. Ausgehend von Aspekten der Bewegung eines Baggerarms werden geometrische Überlegungen angestellt, Vermutungen aufgestellt, untersucht und schließlich bewiesen. Es zeigt sich, dass man bei einer derartigen Herangehensweise an die Geometrie, Grundverständnis aufbauen, Zusammenhänge erkennen und so Wissen vernetzen kann.

In den Diskussionen der moderierten Sektion wurde das Interesse an einem Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht" erkundet sowie entsprechende künftige Arbeitsfelder, Aktivitäten und Projekte erörtert. Die Gründung des Arbeitskreises wurde beschlossen; ca. zehn Personen erklärten ihre Bereitschaft mitzuwirken.

Eine Schriftenreihe mit Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht ist geplant. Beiträge bitte an folgende Adresse schicken:

astrid.brinkmann@math-edu.de

Literatur

Baumert, J., Lehmann, R. u. a. (1997). *TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde.* Opladen: Leske+Budrich.

Brinkmann, A. (2002). *Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I.*

Duisburger elektronische Texte. http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5386/index.html

Als Buch: Saarbrücken: VDM Verlag, 2008.

Neubrand, J., Neubrand, M., Sibberns, H. (1998). Die TIMSS-Aufgaben aus mathematikdidaktischer Sicht: Stärken und Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler. In: W. Blum & M. Neubrand (Hrsg.), *TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen, Konsequenzen* (S. 17 – 27). Hannover: Schroedel Verlag GmbH.

Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (2003). http://www.kmk.org/fileadmin/doc/Bildung/IVA/IVA-Beschluesse/Bildungsstandards/103-1_MSA-Mathe.pdf

Astrid BRINKMANN, Münster

Vernetzungen im Mathematikunterricht - Aktuelle Positionen und Entwicklungsbedarf

Als Folge der wenig erfreulichen Ergebnisse deutscher Schüler/innen in den großen internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA wird vielfach die Forderung nach einer besseren Vernetzung mathematischer Lerninhalte erhoben. Dabei wird der Vernetzungsbegriff allerdings recht vielschichtig und i. A. wenig präzise verwendet.

1. Der Begriff Vernetzung

Eine Begriffspräzisierung liefert Brinkmann (2002, 2007). Es wird argumentiert, dass die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens es erlaubt, dieses über Graphen aus Knoten und Kanten zu modellieren. Inhaltlich interpretiert repräsentieren die Knoten mathematische Objekte oder auch nichtmathematische Objekte/Dinge, die mit mathematischen Objekten in Beziehung stehen; die Kanten zeigen existierende Beziehungen (Relationen) auf. Solche Relationen lassen sich als Vernetzungen definieren. Auf der Ebene des Unterrichtsstoffes wird zwischen fachsystematischen Vernetzungen und anwendungsbezogenen Vernetzungen unterschieden, die jeweils in weitere Kategorien unterteilt sind; auf kognitiver Ebene der Lernenden kommen weitere für den Mathematikunterricht relevante Vernetzungskategorien hinzu.

Vernetzung bezeichnet dabei sowohl den Prozess des Vernetzens, also das in Relation setzen, als auch das Ergebnis: Ein Knotenpunkt a eines Systems wird mit einem Knotenpunkt b des Systems vernetzt, wenn a zu b in eine Relation gesetzt wird; ein Knotenpunkt a eines Systems ist mit einem Knotenpunkt b des Systems vernetzt, wenn a mit b in Relation steht.

Vom „vernetzenden Denken", bei dem Vernetzung im obigen Sinne als Prozess erfolgt, zu unterscheiden ist das „vernetzte Denkens". Letzteres meint i. A. ein Denken in vernetzten, systemischen Strukturen dynamischer Systeme (Ossimitz, J. Maaß); hierzu verwandte Begriffe sind Systemdenken, Denken in Systemen (Dörner), Denken in Netzen (MUED), u. a.

2. Defizite und Folgerungen

Mit dem begrifflichen Instrumentarium von Brinkmann lassen sich Defizite Vernetzungen betreffend in Lehr- und Lernprozessen genauer beschreiben. Eine Studie von Brinkmann (2002) deutet darauf hin, dass Vernetzungen aus dem intendierten Curriculum, so wie sie in Schulbüchern dargestellt werden, von Lehrern auch unterrichtet werden, allerdings insbesondere die

Vernetzung zwischen verschiedenen Repräsentationen eines mathematischen Objekts (z. B. zwischen einer geometrischen und einer algebraischen Repräsentation) von Schülern sehr wenig nachhaltig gelernt wird. Das aktive Vernetzen im Zuge von Problemlöseprozessen, für das kein Standardalgorithmus zur Verfügung gestellt wird, gelingt nur einzelnen Ausnahmeschülern. Ferner stellten Voruntersuchungen zu dieser Studie eine recht vernetzungsarme Darstellung mathematischer Inhalte in Schulbüchern heraus, insbesondere im Hinblick auf das Aufzeigen von Querverbindungen zwischen Geometrie und Algebra bzw. zwischen verschiedenen Darstellungen mathematischer Objekte.

Eine Befragung von mehreren hundert Lehrern (Brinkmann, 2008, noch nicht veröffentlicht) hat u. a. bestätigt, dass Lehrer in enger Anlehnung an Schulbücher unterrichten und gezeigt, dass sie als ergänzende Materialien i. d. R. nur solche verwenden, die ohne größeren Aufwand im Unterricht eingesetzt werden können (z. B. fertig ausgearbeitete Arbeitsblätter).

Es sollten somit mindestens in folgenden Bereichen Entwicklungs- und entsprechende Forschungsarbeiten geleistet werden, vor allem auch mit Blick auf „Modellvernetzungen" zwischen verschiedenen Darstellungen mathematischer Objekte:
- veränderte Darstellungen in Schulbüchern und ergänzenden Materialien,
- veränderte Unterrichtsmethodik (mit entsprechendem Angebot an Lehrerfortbildungen),
- andere (erweiterte) Aufgabenkultur.

3. Aktuelle F & E

3.1 Schulbuchentwicklung

Eine Untersuchung (Rezat, 2008) von 18 Mathematikschulbuchern, die nach 2000 in Deutschland herausgegeben wurden, zeigt, dass im Vergleich zu älteren Schulbüchern viele Elemente neu hinzugekommen sind, die Inhalte einzelner Lerneinheiten verknüpfen:
- kapitelübergreifende Aufgaben (in 12 der 18 Bücher),
- Einleitungen in neue Schulbuchkapitel, die teils anhand von Beispielen zeigen, dass der folgende Stoff in Alltag, Wissenschaft oder Architektur seine Anwendung findet,
- Zusammenfassungen am Ende eines Kapitels (in 11 der 18 Bücher),
- vermischte Aufgaben am Ende eines Kapitels, durch welche erworbene Qualifikationen in vermischter Form angewandt und mit den bereits gelernten Inhalten vernetzt werden (in 13 der 18 Bücher),
- Advance Organizer am Anfang jeder Lerneinheit (1 Buch).

3.2 Unterrichtsmethodik

Zunächst sei auf die Beiträge in diesem Band von Nordheimer zur *kapitelübergreifenden Rückschau*, und von Roth zur Vernetzung von Anschauung, Begriffen und Ideen hingewiesen. Weitere Beiträge werden unten skizziert.

a) Bewusstes Aufzeigen von Vernetzungen

In den NCTM Standards 2000 wird der Connections-Standard als einer von 10 Standards definiert und die Weisung erteilt, an möglichst vielen Stellen im Unterricht explizit Verbindungen von und mit mathematischen Objekten aufzuzeigen. Dies kann dem Lernen von Vernetzungen zuträglich sein.

Eine Hamburger Studie, die von Euba durchgeführt wurde, untersucht Lernerfolge von Schülern, auf der Basis eines Unterrichts, der Vernetzungen gezielt herausarbeitet.

b) Visualisierung vernetzter Lerninhalte

Brinkmann (2007) stellt graphische Netzwerkdarstellungen wie *Mind Maps* oder *Concept Maps* als effiziente Unterrichtsmittel mit ihren Möglichkeiten und Grenzen vor. Zusammengetragene Unterrichtserfahrungen und –Beobachtungen sowie Ergebnisse diverser Untersuchungen zeigen, dass sich Mind Maps, Concept Maps u. ä. insbesondere in folgenden Hinsichten als hilfreich erweisen können:

- um Vernetzungen im Mathemetikunterricht explizit zu machen und darüber zu reflektieren,
- zum Lernen von Begriffen in ihrer Beziehungshaltigkeit,
- für eine zusammenfassende Wiederholung und Strukturierung von Lerninhalten,
- als Hilfe beim Problemlösen.

Entsprechende Lehrerfortbildungen zum Einsatz von *Knowledge Maps* als Unterrichtsmittel werden im Rahmen des Projekts „Mathematik anders machen“ der Deutschen Telekom Stiftung angeboten.

In diesen Fortbildungen führt außerdem Limke in die Theorie und den Gebrauch von *Advance Organizer* ein. Dies sind Lernlandkarten, die in konzentrierter und abstrakter Form durch Begriffe, Visualisierungen, Bilder, Strukturen usw. die wesentlichen Inhalte, Zusammenhänge und Ergebnisse in einer Lerneinheit übersichtlich darstellen. Es wird derzeit von einigen Schulbuchautoren vermehrt an geeigneten Entwürfen für Advance Organizer zur Einleitung von Schulbuchkapiteln gearbeitet.

Im Rahmen des Sinus-Projekts, Modul 5, sind Arbeitsaufträge für Schüler entwickelt worden, in denen *Vernetzungsdiagramme* (Knoten-Kanten-Graphen) zur Reflexion über gewählte Wege in Problemlöseprozessen dienen.

Eine Lehrerarbeitsgruppe beschäftigt sich seit 2007 mit dem Einsatz bestimmter *Lernlandkarten* als Arbeitsmittel zur Förderung der Selbstreflexion über das eigene Lernen (www.SysFoNie.de, Text 10).

c) Materialien für ein handlungsorientiertes, experimentelles Lernen

Der *Mathekoffer* (Büchter, Henn (Hrsg.), mit Unterstützung von MNU, Deutsche Telekom-Stiftung; Verlage Friedrich und Klett, 2008) bietet eine Materialsammlung für das selbständige Entdecken von Zusammenhängen. Aufgabenkarten für Schüler und Lehrerkommentare mit konkreten Impulsen für den Unterricht ermöglichen einen direkten Einsatz im Unterricht.

d) Entwicklung vernetzten Denkens

Diverse Untersuchungen von Ossimitz, J. Maaß u. a. dienen dem Ziel, Grundideen des vernetzten (systemorientierten) Denkens durch Beschäftigung mit systemdynamischen Simulationsmodellen zu vermitteln.

Die MUED-Gruppe erhebt die Forderung, dass das Denken in Netzen einen zentralen Stellenwert im Mathematikunterricht bekommen und als neue Leitidee aufgenommen werden sollte, und sucht für diesen Bereich Materialien, Ideen und Konzeptionen – und Mitarbeiter.

3.3 Aufgabenentwicklung

Aufgaben, in denen insbesondere „Modellvernetzungen“ zwischen realen Situationen und ihren mathematischen Beschreibungen (Modellen) zum Tragen kommen, werden vor allem von Mitgliedern der ISTRON-Gruppe und auch der MUED-Gruppe entwickelt. Ferner bieten die Südtiroler Internet-Lernumgebungen „Modellieren mit Mathe“ und „Mathe überall“ eine Fülle von Modellierungsaufgaben, die weiter ergänzt werden.

4. GDM-Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“

Ein neu gegründeter AK befasst sich mit dem Lehren und Lernen vernetzter Inhalte und dem Anwenden von Vernetzungen, d. h. dem aktiven Vernetzen, in Problemlöseprozessen. Geplant ist die Herausgabe einer Schriftenreihe „Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“.

Literatur

Brinkmann, A. *Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I.* http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5386/index.html, 2002.

Als Buch: Saarbrücken: VDM Verlag, 2008.

Brinkmann, A. *Vernetzungen im Mathematikunterricht – Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels graphischer Darstellungen.* Hildesheim: Franzbecker, 2007.

Rezat, S. Die Struktur von Mathematikschulbüchern. *JMD 29/1*, 2008, 46–67.

Jürgen ROTH, Würzburg

Geometrie und der Bagger – Anschauung, Begriffe und Ideen vernetzen

Kant stellt in seiner „Kritik der reinen Vernunft“ fest: „… alle menschliche Erkenntnis (fängt) mit Anschauung an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen“ (vgl. Hilbert 1999). Dieser Dreisprung ist aber keine Einbahnstraße, vielmehr bleibt es eine ständige Aufgabe des Mathematikunterrichts und darüber hinaus jedes selbstständig denkenden Menschen, diese Aspekte miteinander zu vernetzen und in Beziehung zu setzen. Das Produkt dieses Vernetzungsprozesses gilt es bei Problemlöseprozessen konstruktiv zu nutzen und im Sinne Piagets durch Assimilation und Adaption weiterzuentwickeln. Für eine vertiefte Diskussion des häufig wenig reflektiert verwendeten Begriffs „Vernetzung“ sei auf Hischer (2009) in diesem Band verwiesen.

Vernetzung spielt im (Mathematik-)Unterricht eine zentrale Rolle. Lehrkräfte sollten ihren Unterricht so gestalten, dass Beziehungen zwischen den Unterrichtsinhalten erfasst werden. Schülerinnen und Schüler sollen lernen, wie man Wissensnetze aufbaut, sowie vorhandene Wissensnetze nutzt und weiterentwickelt. Vernetzung ist aber auch bei anderen Prozessen, wie etwa der Mediennutzung ein wesentlicher Aspekt. So kann ein geeigneter und individuell verantworteter Einsatz verschiedenster Medien eine entscheidende Komponente bei Problemlöseprozessen sein (vgl. Roth 2009).

Hier soll gezeigt werden, wie geometrische Ideen und Anschauung durch vernetzendes Vorgehen voneinander profitieren. Ideen können aus der Anschauung heraus verstanden werden, Anschauung lässt sich mit Hilfe von Ideen relativieren und reflektieren. Beides kann bei Problemlöseprozessen helfen. Beim Problemlösen können aber auch die Anschauung geschärft und die Entwicklung von Ideen angestoßen werden. Konkret werden hier ausgehend von Aspekten der Bewegung eines Baggerarms geometrische Überlegungen angestellt, Vermutungen aufgestellt, untersucht und schließlich bewiesen. Es zeigt sich, dass man, bei derartiger Herangehensweise an die Geometrie, Grundverständnis aufbauen, Zusammenhänge erkennen und so Wissen vernetzen kann.

1. Geometrie am Bagger entdecken – Die Anschauung nutzen

Im Alltag trifft man immer wieder auf Bagger, haben Sie sich aber schon einmal gefragt, wie die Bewegungen eines Baggerarms gesteuert werden? Betrachtet man einen Bagger bei der Arbeit (das Original, ein Video davon oder eine wirklichkeitsgetreues Funktionsmodell), so können einige Aspekte direkt aus der Anschauung erschlossen werden (vgl. Abb. 1). Die Bewegung wird über spezielle Gelenkdreiecke, sogenannte Krandreiecke, gesteuert, bei denen zwei Seiten starr sind und eine Seite (der Kolben) in der Länge veränderlich ist. Die Längenänderung des Kolbens bewirkt eine Bewegung eines Eckpunkts des Krandreiecks auf einem Kreisbogen. Durch die Kopplung mehrerer derartiger Dreiecke, wie am Baggerarm, lassen sich auch komplexe Bewegungen steuern.

Abb. 1: Baggerarmsteuerung

Abb. 2: Gelenkviereck (Baggerschaufel)

Zur Steuerung der Bewegung der Baggerschaufel gibt es zusätzlich zu einem Krandreieck auch noch ein Gelenkviereck (vgl. Abb 2). Die Funktion dieses Gelenkvierecks lässt sich erahnen, wenn man einen Bagger beobachtet, der nur die Schaufel bewegt. Mit Hilfe eines Gelenkviereckmodells aus zusammengeschraubten Lochblechen und (noch besser) mit einer DGS-Simulation eines Gelenkvierecks lässt sich dieses Phänomen erforschen. Ein Krandreieck (vgl. Abb. 3) ermöglicht über die Längenänderung des Kolbens eine Drehbewegung eines Eckpunktes um maximal 180°.

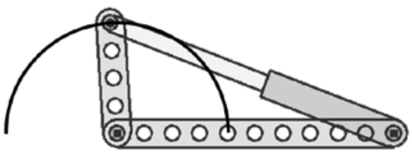


Abb. 3: Krandreieck

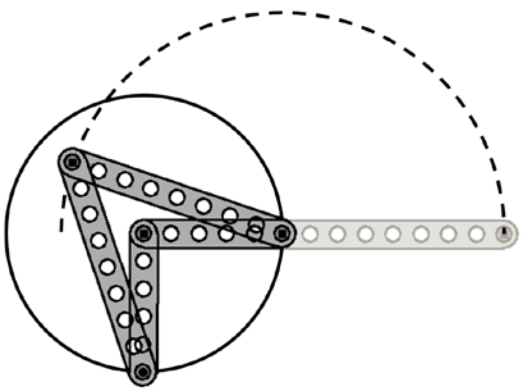


Abb. 4: Gelenkviereck

Bei einem geeignet dimensionierten Gelenkviereck (vgl. Abb. 4) kann man durch Drehung eines Eckpunkts um 180° eine Bewegung eines anderen Eckpunkts um 360° erreichen. Dies lässt sich unter der Internet-Adresse http://www.juergen-roth.de/dynageo/lochstangen/viereck.html an Hand eines DynaGeoX-Applets überprüfen. Durch Variation der Seitenlängen kann dort ein entsprechendes Gelenkviereck experimentell erzeugt und dessen Funktionsweise getestet werden. Dabei wird schnell klar, dass nur bei speziellen Gelenkvierecken durch die Drehung einer Seite um 180° eine Drehung der gegenüberliegenden Seite um 360° erreicht werden kann.

2. Zusammenhänge beweisend erschließen

Welche Vierecke haben aber die genannte Eigenschaft? Gibt es evtl. sogar verschiedene Viereckstypen die diese Bedingung erfüllen? Diese Fragen lassen sich durch geeignete Vernetzung der experimentell gewonnenen Erfahrungen mit einer mathematisch-systematischen Herangehensweise beantworten. Um eine derartige Bewegung zu realisieren, muss ein Außenwinkel β' (in Abb. 5 der bei B) zwischen 0° und 180° variiert werden können und dabei ein Innenwinkel des Gelenkvierecks – hier und im Folgenden der Winkel α beim Eckpunkt A – den vollen Winkelbereich zwischen 0° und 360° durchlaufen.

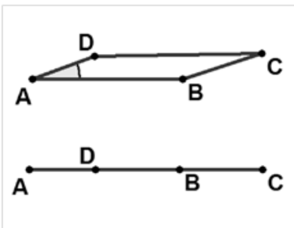


Abb. 5: $\alpha = 0°$

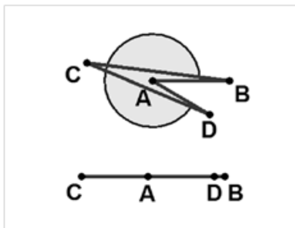


Abb. 6: $\alpha = 360°$

Eine Grenzlage, nämlich $\alpha = 0°$ und $\beta' = 0°$ lässt sich nur dann erreichen, wenn alle Punkte des Vierecks ABCD auf einer Gerade, hier AB liegen. Damit liegen sowohl D als auch B *zwischen* A und C. Für die Seitenlängen folgt daraus (vgl. Abb. 5):

$$\text{(I)} \qquad |AB| + |BC| = |CD| + |DA|$$

Die zweite Grenzlage mit $\alpha = 360°$ und $\beta' = 180°$ wird in Abb. 6 dargestellt. Diese kann sich nur ergeben, wenn A sowohl *zwischen* C und D als auch *zwischen* C und B liegt. Dies ergibt zwei weitere Bedingungen für die Seitenlängen des gesuchten Gelenkvierecks, nämlich:

$$\text{(II)} \quad |CD| = |CA| + |AD| \qquad \text{und} \qquad \text{(III)} \quad |CB| = |CA| + |AB|$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich die Beziehungen

$$|CD| = |BC| \qquad \text{und} \qquad |AB| = |DA|$$

und damit die Erkenntnis ableiten, das ein Gelenkviereck mit den gewünschten Eigenschaften notwendig ein *symmetrisches Drachenviereck* sein muss.

3. Ideen erfassen – Axiome verstehen und nutzen

Die alles entscheidende Idee beim durchgeführten Beweis ist die *Zwischenbeziehung*. Deren Bedeutung für den axiomatischen Aufbau der Geometrie war Euklid nicht bewusst, wurde erst von Pasch vollständig verstanden und von Hilbert (1999) in seinen 1899 erstmals erschienenen „Grundlagen der Geometrie“ in den Axiomen der Anordnung verbreitet. Ein erster Zugang zum Verständnis der Axiome der Anordnung ist bereits im Mathematikunterricht über eine Vernetzung von Modellierungs- und Problemlöseaktivitäten mit der Reflexion von benutzten Ideen möglich. Diese Erkenntnis steht aber nicht am Ende sondern sollte wiederum genutzt werden, um eine neue Perspektive auf scheinbar offensichtliche Aspekte der Anschauung, zu gewinnen und diese kritisch zu reflektieren. Zu diesem Zweck ist etwa die Auseinandersetzung mit dem „Beweis“ hilfreich, dass jedes Dreieck gleichschenklig ist. Dazu wird (vgl. Abb. 7) der Schnittpunkt D der Winkelhalbierenden des Winkels bei C mit der Mittelsenkrechten der Seite [AB] betrachtet. Mit Hilfe von Kongruenzsätzen lässt sich jeweils zeigen, dass entsprechende Dreiecke in der linken und rechten Hälfte des Dreiecks jeweils kongruent sind, deshalb |AC| = |BC| und damit das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Dies würde bedeuten, dass jedes Dreieck gleichschenklig ist!

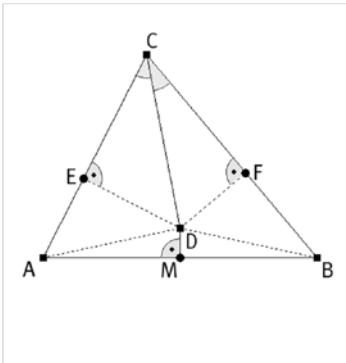


Abb. 7: Gleichschenklig!?

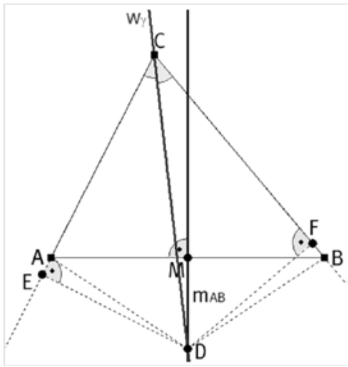


Abb. 8: Gleichschenklig? – Nein!

Wie Abb. 8 zu entnehmen ist liegt der Fehler darin, dass D nicht im Inneren des Dreiecks und damit auch E nicht zwischen A und C liegt. Es gilt also: Vorsicht mit der Anschauung im Hinblick auf die Lage von Punkten!

Literatur

Hilbert, D. (1999). Grundlagen der Geometrie. Stuttgart, Leipzig: B.G. Teubner

Hischer, H. (2009). Was sind und sollen Vernetzungen? In: GDM (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: Martin Stein Verlag

Roth, J. (2009). Mathematik rund um den Bagger – Medien vernetzen, Modellieren erleichtern. Erscheint in U. Kortenkamp, A. Lambert (Hrsg.): *Medien vernetzen. Bericht über die 26. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" vom 26.-28. September 2008 in Saarbrücken*. Hildesheim: Franzbecker

Swetlana NORDHEIMER, Berlin

Kapitelübergreifende Rückschau: Unterrichtsmethode zum Vernetzen im Mathematikunterricht

Hinsichtlich von Vernetzungen im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I besteht eine Diskrepanz zwischen normativen Vorgaben und deskriptiven Befunden. Im Folgenden stelle ich die normativen Vorgaben nach dem Konzept von Grunderfahrungen (Winter, Baptist 2001) den Befunden aus älteren und neueren empirischen Untersuchungen gegenüber (Bauer 1981, Baumert, Klieme 2001). So sehen viele Schüler Mathematikunterricht nicht als ein „Universum mit einem Höchstmaß an innerer (deduktiver) Vernetzung und Offenheit gegenüber neuen Ordnungen und Beziehungen" (Winter, Baptist 2001), sondern als „zusammenhanglos nebeneinander stehende Stoffe"(Bauer 1981), die „nicht in ausreichender Weise vernetzt" (Baumert, Klieme 2001) sind. An Stelle eines „Reservoirs an Modellen, die geeignet sind, auf rationale Art zu interpretieren oder das Verfolgen von Zwecken systematisch zu organisieren" (Winter, Baptist 2001), begegnen viele Schüler Mathematik als „einer selbstgenügenden Struktur, die kaum mit anderen Bereichen der Wahrnehmung verknüpft ist" (Bauer 1981). Daraus ergeben sich Schwierigkeiten für die Mathematik als „Übungsfeld für heuristisches und analytisches Denken" (Winter, Baptist 2001), weil es vielen Schülern nicht gelingt, im Mathematikunterricht erworbenes Wissen „zur Bearbeitung von komplexen Fragen einzusetzen" (Baumert, Klieme 2001). Deshalb steht die Bearbeitung und Entwicklung von komplexen Fragestellungen durch Schüler im Mittelpunkt der *kapitelübergreifenden Rückschau* als einer Unterrichtsmethode zur Förderung der Vernetzung im Mathematikunterricht.

1. Vernetzungsbegriff

Den theoretischen Ausgangspunkt der Unterrichtsmethode bildet die Dissertation von Brinkmann (2003). Demzufolge wird Vernetzung als Prozess und Ergebnis des in Beziehung Setzens mathematischer Inhalte und Anwendungen auf der Ebene des Unterrichtsstoffes sowie auf der kognitiven Ebene des Schülers verstanden. Nach Brinkmann lassen sich Vernetzungen auf diesen beiden Ebenen in gleicher Weise kategorisieren, deshalb werden sie im Rahmen dieser Arbeit zur epistemischen Ebene zusammengefasst und mit der sozialen Ebene ergänzt. Letztere soll das Potenzial der sozialen Struktur der Lerngruppe für die Entstehung von Vernetzungen im Mathematikunterricht fruchtbar machen.

2. Konstruktion der Unterrichtsmethode

In der Didaktik der Mathematik findet man verschiedene Vorschläge zur Förderung von Vernetzungen im Mathematikunterricht vor allem auf der epistemischen Ebene. So schlägt beispielsweise Vollrath (2001) vor, *Themenstränge* (Leitideen und Leitbegriffe) der Mathematik mit Hilfe des Inhaltsverzeichnisses den Schülern sichtbar zu machen, Übergänge zwischen verschiedenen Schulbuchkapiteln durch *Themenkreise* (innermathematische kapitelübergreifende Kontexte) und *Themenkomplexe* (anwendungsbezogenene kapitelübergreifende Probleme) zu gestalten. Auch im Rahmen von *Lerntagebüchern* (Gallin, Ruf 1998) wird den Schülern die Möglichkeit gegeben, kontinuierlich an mathematischen Problemen zu arbeiten und durch Eigenproduktionen Zusammenhänge zu studieren. Brinkmann (2003) schlägt zur Förderung von Vernetzungen den Einsatz von *mind-maps* und *concept-maps* im Unterricht vor.

Die soziale Ebene der Vernetzung, insbesondere die Rolle der sozialen Netzwerke bei der Konstruktion von Wissen, wird vor allem in der allgemeinen Pädagogik thematisiert (vgl. Fischer 2001). Es werden *Expertengruppen* und *Lernen durch Lehren* als kooperative Lernformen vorgeschlagen, um die Entstehung von Vernetzung zu fördern.

Einer der wenigen Ansätze in der Didaktik der Mathematik, in dem die epistemische und die soziale Ebene an konkreten Aufgabenbeispielen verzahnt werden, ist die Methode der schülerzentrierten Aufgabenvariation (Schupp 2003). Eines der wichtigen Ziele der Methode ist die Thematisierung der Variationsmethoden als heuristischen Strategien.

Die Methode der schülerzentrierten Aufgabenvariation wird im Folgenden zur Methode der *Kapitelübergreifenden Rückschau* abgewandelt. Dabei besteht das Ziel darin, den Schwerpunkt auf die Vernetzung der Unterrichtsinhalte zu legen und die Variation stärker an die Inhalte des Lehrplans bzw. des Schulbuchs zu binden. Dafür werden die oben erwähnten Methoden zur Förderung von Vernetzungen im Unterricht aus der Mathematikdidaktik und der allgemeinen Pädagogik synthetisiert.

Die Segmentierung des Unterrichtsstoffes und des mathematischen Wissens eines einzelnen Schülers in Stoffgebiete wird als Segmentierung der Klasse in der Phase des Expertentrainings fortgesetzt. Dadurch können die Schüler Unterschiede und Gemeinsamkeiten unter den Kapiteln des Schulbuchs sowie verbindende Leitideen und Leitbegriffe bzw. Themenstränge mit Hilfe einer inhaltsbezogenen Kompetenztabelle entdecken. Diese entsteht durch die Abwandlung des Inhaltsverzeichnisses des Schulbuches bzw. Heftes, indem die Überschriften der Groß- und Kleinkapitel in die linke Spalte und die Aufgabennummern in die obere Zeile eingetragen werden. Somit kann durch Ankreuzen der entsprechenden inhaltlichen Kompetenzen angegeben werden, welche Kompetenzen sich mit der Aufgabe ansprechen lassen. Im Anschluss an das Bewusstmachen von inhaltlicher Segmentierung auf der epistemischen Ebene und ihrer Ausweitung auf die soziale Ebene werden die beiden Ebenen miteinander in einer Expertenrunde verzahnt. Dabei können Schüler selbständig Themenkreise und Themenkomplexe entdecken und als kapitelübergreifende Aufgaben formulieren.

Anknüpfend an die Konstruktion werden im Folgenden die einzelnen Phasen der Methode vorgestellt.

Vorbereitung: Zum Anfang lösen Schüler im Klassenverband eine Einstiegsaufgabe. Diese deutet den gemeinsamen Kontext der ganzen Einheit an. Den Schülern werden entsprechend der Anzahl der Schulbuchkapitel des Schuljahres sechs Initialaufgaben vorgestellt.

Expertentraining: Jeder Schüler entscheidet sich für eine der Initialaufgaben. Alle Schüler mit der gleichen Aufgabe setzen sich jeweils in einer Gruppe zusammen, um diese gemeinsam zu lösen. Im Anschluss daran wird die Lösung der Aufgabe so präsentiert, dass die Mitschüler diese möglichst schnell nachvollziehen können. Daraufhin bestimmt jede Gruppe durch Ausfüllen der an das Inhaltsverzeichnis des Schulbuches angelehnten Kompetenztabelle das Kompetenzspektrum der Aufgabe.

Expertenrunde: Die Gruppen werden neu zusammengestellt. Jetzt treffen sich in einer Gruppe Experten von verschiedenen Initialaufgaben bzw. Schulbuchkapiteln. Ziel der Phase ist es, in der neuen Gruppe durch Variation von gelösten Initialaufgaben mindestens eine kapitelübergreifende Aufgabe zu entwickeln, die Lösung aufzuschreiben und das Kompetenzspektrum der Aufgabe zu bestimmen.

Plenum: Die Aufgaben und Lösungen der Schüler werden in einem Trainingsheft zusammengefasst. Das Heft wird mit einer Tabelle versehen, in der die Schüleraufgaben den inhaltsbezogenen Kompetenzen zugeordnet werden.

3. Erprobung

Für die Erprobung der Unterrrichtsmethode wurden sechs Initialaufgaben aus verschiedenen Stoffgebieten zum Thema Tangram als verbindendem Element entwickelt und im Schuljahr 2007/08 in zwei 8. Klassen eingesetzt. Exemplarisch gehe ich hier nur auf eine Gymnasialklasse ein. Der Unterricht in dieser 8. Klasse war nach dem Schulbuch strukturiert. Da es sich um die Pilotphase der Erprobung handelte, standen nur drei Unterrichtsstunden zur Verfügung. In diesen wurden Tangram-Initialaufgaben gelöst und ausgewertet. Die Entwicklung von kapitelübergreifenden Aufgaben wurde in die freiwillige Hausaufgabe verlegt. 15 von 30 Schülern haben Aufgaben abgegeben, in denen mehr als ein Kapitel des Schulbuches explizit oder implizit angesprochen wurde. Die meisten Aufgaben vernetzten die Inhalte im innermathematischen Kontext, wobei auch außermathematische Bezüge zu finden waren. Die Schüler äußerten sich sehr positiv über die intensive Beschäftigung mit einer Aufgabe in der Gruppe und das Tangram als verbindendes Motiv der Aufgaben. Nur in zwei von 15 Aufgaben haben sich die Schüler von dem Tangram-Kontext gelöst. Die Schüler hätten sich mehr Zeit zur Präsentation der Ergebnisse sowie Entwicklung von eigenen Aufgaben gewünscht. Abschließen möchte ich mit einer Schüleraufgabe, die die Kriterien eines Themenkreises im Sinne von Vollrath (2001) erfüllt und als Überleitungsaufgabe zwischen den Unterrichtseinheiten zur Symmetrie und zu Linearen Funktionen eingesetzt werden kann: *„Legt mit allen Tangram-Steinen ein Quadrat. Zeichnet eure gesamte Lösungsfigur in ein Koordinatensystem. Welche Symmetriearten findet ihr auf dieser Zeichnung? Nennt die Symmteriearten und gebt für alle Symmterieachsen die entsprechenden Funktionsgleichungen an.“*

Literatur

Baptist, P., Winter, H. (2001): Überlegungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Oberstufe des Gymnasiums. In H.-E. Tenorth (Hrsg.), *Kerncurriculum Oberstufe. Mathematik – Deutsch – Englisch* (S. 54 - 77). Basel: Belz.

Baumert, J., Klieme, E. (2001): TIMMS – Impulse für Schule und Unterricht. For schungsbefunde, Reforminitiativen. Praxisberichte. Videodokumete. Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF)

Bauer, L. A. (1988): Mathematik und Subjekt. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag

Brinkmann, Astrid (2002): Über Vernetzungen im Mathematikunterricht: Eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I. Dissertation angenommen durch: Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Fakultät für Naturwissenschaften, Institut für Mathematik, 2002-09-09

Fischer, F. (2001): Gemeinsame Wissenskonstruktionen – theoretische und methodologische Aspekte. Forschungsbericht Nr. 142, München: Ludwig-Maximilian-Universität, Lehrstuhl für Empirische Pädagogik und Pädagogische Psychologie

Gallin, P., Ruf, U. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Griesel, H., Postel, H., Suhr, F. (2007): Elemente der Mathematik. 8. Klasse. Berlin: Schroedel

Schupp, H. (2003): Variatio delectat! *Der Mathematikunterricht, 49, 5, 4-12*

Vollrath, H.-J. (2001): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Mathematik. Primar- und Sekundarstufe (171-216). Berlin: Spektrum

Elmar COHORS-FRESENBORG, Osnabrück

Moderierte Sektion: Wertschätzen und Praktizieren von Monitoring und diskursiver Unterrichtskultur - Ein Erklärungsversuch für den Erfolg mathematischen Lernens und Lehrens

In der internationalen Diskussion über die Verbesserung der Qualität des Mathematikunterrichts gelten Maßnahmen, welche die metakognitiven Kompetenzen der Lernenden fördern, als wichtiges Instrument, die Wirksamkeit und Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht zu erhöhen. Metakognition wird dabei meist in drei Kategorien dekomponiert: das *Planen* (z.B. von Problemlöseschritten, des Einsatzes mathematischer Werkzeuge), das *Monitoring* (z.B. das Überwachen von mathematischen Umformungen, der Argumentationen oder der Zielerreichung) sowie die *Reflexion* (z.B. über mathematische Begriffe und Werkzeuge, über das bisherige Vorgehen, über die Diskrepanz zwischen Darstellungen und Vorstellungen).

Bei den umfangreichen Analysen von Schülereigenproduktionen und Unterrichtsvideos im Rahmen des von der DFG geförderten Projekts „Analyse von Unterrichtssituationen zur Einübung von Reflexion und Metakognition im gymnasialen Mathematikunterricht der SI“ hat sich einerseits ergeben, dass das Augenmerk besonders darauf zu richten ist, inwieweit Lernende ihre eigenen Rechnungen bzw. Argumentationen überwachen; andererseits erscheint uns, dass in der internationalen Literatur (z.B. Wang et al., 1993) innerhalb des Konstruktes *Metakognition* dem *Monitoring* für den Lernerfolg allgemein, aber auch innerhalb der Mathematikdidaktik (z.B. Kramarski & Mevarech, 2003) zu wenig Bedeutung zugemessen wird. Dies gab Anlass, den Zusammenhang von Monitoring-Aktivitäten und (mathematischer) Leistung zu untersuchen.

Unsere Analyse hat darüber hinaus ergeben, dass ein tieferes Verständnis der Lernenden von Begriffen, eingeschlagenen Vorgehensweisen und benutzten Werkzeugen nur möglich ist, wenn sich Monitoring und Reflexion präzise auf das beziehen, was zur Debatte steht. Weiter bedarf es der Fähigkeit zum komplexen Argumentieren bei der Herausarbeitung mathematisch relevanter Ideen, sowohl im innermathematischen Kontext als auch bei der mathematischen Modellierung. Dazu ist wesentlich die Fähigkeit, Argumentationsstränge zu verfolgen, die Tragfähigkeit von Argumenten einzuschätzen und Zweifel sowie Gegenargumente strategisch adäquat und präzise platzieren zu können. Wir haben diese Kompetenzen unter dem Begriff *diskursive Kompetenz* subsumiert. Es hat sich gezeigt, dass dem Zusammenspiel von metakognitiven Aktivitäten und einer praktizierten diskursiven Unterrichtskultur eine besondere Bedeutung zukommt (Cohors-

Fresenborg & Kaune, 2003). Wir haben deshalb im „Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht“ (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007) neben den Kategorien *Planung, Monitoring* und *Reflexion* als vierte Kategorie *Diskursivität* aufgenommen und ihre Bedeutung für das Zustandekommen und die Qualität metakognitiver Aktivitäten untersucht.

Im ersten Beitrag von Elmar Cohors-Fresenborg *„Zum Zusammenhang des Wertschätzens und Praktizierens von Monitoring-Aktivitäten mit mathematischer Leistung*“ wird als Ergebnis mehrer Studien dargelegt, inwiefern die Kompetenz und der Wille zum Überwachen der Richtigkeit beim mathematischen Arbeiten ein wichtiger Indikator für dessen Erfolg ist.

Im zweiten Beitrag von Eva Maria Gretzmann „*Klassifizierung von Monitoring-Aktivitäten und Diskursivität im Unterrichtsdiskurs*“ wird ein Teil eines Kategoriensystems in seiner Anwendung vorgestellt, mit dem videografierter Unterricht ohne Erstellung von Transkripten analysiert werden kann. Dieses soll auch dazu dienen, aus in Unterrichtsvideos beobachteten Unterschieden bzgl. der Monitoring-Aktivitäten und der Diskursivität Rückschlüsse auf unterschiedliche Unterrichtskulturen zu ziehen.

Im dritten Beitrag von Edyta Nowinska „*Monitoring-Aktivitäten als Hilfe zur Erhöhung der Nachhaltigkeit von mathematischen Lernprozessen*“ wird gezeigt, inwiefern Aufgaben zum konstruktiven Umgang mit Schülerfehlern dazu geeignet sind, Monitoring-Aktivitäten bei den Schülern auszulösen. Beim Umgang mit solchen Aufgaben lernen die Schüler, die Ergebnisse von (eigenen) Denkprozessen zu kontrollieren und Fehleranalyse vorzunehmen. Dies hat sich bewährt, um die Nachhaltigkeit des Mathematiklernens in der Realschule zu verbessern.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003). Unterrichtsqualität: Die Rolle von Diskursivität für "guten" gymnasialen Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003* (S. 173 – 180). Hildesheim: Franzbecker.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht*, 2. überarbeitete Auflage. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kramarski, B. & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. *American Educational Research Journal, 40 (1)*, 281-310.

Wang, M. C.; Haertel, G. D. & Walberg, H. J. (1993). Toward a Knowledge Base for School Learning. *Review of Educational Research, 63(3)*, 249-294.

Elmar COHORS-FRESENBORG, Osnabrück

Zum Zusammenhang des Wertschätzens und Praktizierens von Monitoring-Aktivitäten mit mathematischer Leistung

In unserem Beitrag wollen wir der Frage nachgehen, inwiefern die Kompetenz und der Wille zum Überwachen der Richtigkeit beim mathematischen Arbeiten wichtige Indikatoren für dessen Erfolg sind. Dazu sind in den letzten Jahren am Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück mehrere Studien gemacht worden, die aufeinander bezogen sind. Darüber soll hier ein Überblick gegeben werden.

Monitoring bei Überprüfung von Termumformungen

Sjuts (2003) legte verschiedenen Gruppen von Schülerinnen und Schülern (aus Klassenstufe 10-13) unterschiedlichen Leistungsniveaus sowohl mehrere Aufgaben mit teilweise fehlerhaften Termumformungen vor, die auf ihre Regelgemäßheit zu überprüfen waren, als auch einen Fragebogen über das Praktizieren und Wertschätzen von Monitoring. Es handelte sich einmal um durchschnittliche Gymnasiasten aus zwei Gymnasien, dann um eine ausgewählte, den 10% Besten entsprechende Gruppe aus einem anderen Gymnasium und um Teilnehmer an einer Sommerakademie zur Kognitiven Mathematik, zu der die Universität Osnabrück bundesweit sehr leistungsstarke Schülerinnen und Schüler eingeladen hatte. Die Gruppen waren in ihrer Leistungsfähigkeit also als durchschnittlich, überdurchschnittlich und weit überdurchschnittlich einzustufen. Sjuts (2003) konnte zeigen, dass die Unterschiede in der praktizierten Kompetenz, die vorgelegten Termumformungen auf ihre Regelgemäßheit zu überprüfen, sowohl mit den Unterschieden in der Mathematikleistung als auch mit den Unterschieden in den Antworten des Fragebogens bezüglich Selbstwahrnehmung und Wertschätzung von Monitoring korrespondieren.

In einer neuen Studie (Pundsack, 2009) wurden einmal die Untersuchungen von Sjuts (2003) mit ähnlichen Untersuchungspopulationen wiederholt. Zum anderen wurden mit den Teilnehmern darüber hinaus Interviews durchgeführt, in denen sie bei zwei ähnlichen Aufgaben wie im schriftlichen Test die vorgelegten Termumformungen zu überprüfen hatten. Es zeigte sich einmal eine Wiederholung der Ergebnisse von Sjuts, zum anderen wurde durch Auswertung der Interviews deutlich, wie offenkundig sorglos einige Probanden bei der Überprüfung vorgehen, auch dann, wenn sie im Fragebogen angekreuzt hatten, dass sie Monitoring durchführen. Man darf wohl davon ausgehen, dass die im Fragebogen angekreuzten

Werte für die Selbsteinschätzung über das eigene Praktizieren von Monitoring im Vergleich zu dem tatsächlich durchgeführten deutlich zu hoch sind.

Monitoring beim Lösen von QuaDiPF-Aufgaben

Zwei der bei Sjuts untersuchten Schülerpopulationen (nämlich die überdurchschnittlichen und die weit überdurchschnittlichen) waren auch Versuchspersonen in einer Untersuchung von Brinkschmidt (2005) zur Möglichkeit, Rückschlüsse auf Präferenzen für prädikatives versus funktionales Denken aus den erhobenen Blickbewegungen der Versuchspersonen - beim Bearbeiten von Musterergänzungsaufgaben aus dem Test QuaDiPF (Schwank, 1998) - zu ziehen. Bei dieser Untersuchung war nach dem Bearbeiten jeder Aufgabe – während der Bearbeitungszeit wurden die Blickbewegungen aufgezeichnet - die vorgeschlagene Lösung - und damit auch das Vorgehen - in einem Interview zu begründen. Es zeigte sich, dass diejenigen Versuchspersonen, die unpassende Lösungen anboten, einerseits bei ihren Blickbewegungen wenig oder überhaupt nicht die Stellen erfasst hatten, bei deren "Betrachtung" sich Hinweise auf Ungereimtheiten ergeben hätten, andererseits war bei vielen von ihnen auch im Interview eine auffallende Ungenauigkeit in der Analyse festzustellen. Bemerkenswert war aber auch, dass bei Personen mit großer mathematischer Leistung, die wegen ungeeigneter Passung zwischen der von ihnen präferierten kognitiven Struktur - funktional versus prädikativ - und dem geeigneten Vorgehen bei der Aufgabenlösung Schwierigkeiten hatten, der Problemlöseerfolg von der Qualität des tatsächlich praktizierten Monitorings abhing – dokumentiert sowohl in der Organisation der Blicksequenzen als auch beim nachträglichen „Lauten Denken“ (Brinkschmidt, 2005, S. 125-132 und 303-318).

Querbezüge zu anderen Untersuchungen

Bei der Analyse der Ergebnisse von PISA-2000E (Cohors-Fresenborg, Sjuts & Sommer, 2004) konnte durch die Einbeziehung des schwierigkeitsgenerierenden Merkmals *Formelhandhabung* eine bemerkenswerte Erklärung der Varianz bei den empirisch gemessenen Item-Schwierigkeiten der einschlägigen Items erreicht werden. In dieses Merkmal gehen stark die für die Aufgabenlösung notwendigen Monitoring-Aktivitäten ein. Dieses Resultat passt zu den Ergebnissen und Erklärungen von Sjuts (2003) und Pundsack (2009).

Die Resultate von Sjuts (2003) und Pundsack (2009) sowie die Analyse der PISA-2000E-Ergebnisse (Cohors-Fresenborg, Sjuts & Sommer, 2004) passen zu den Ergebnissen einer 40 Jahre zurückliegenden Studie von Gundlach (1968). Er hatte die Erhebung der Kompetenz von Studienanfängern im Fach Mathematik in algebraisch–rechnerischen Fertigkeiten in Verbindung gesetzt mit dem Studienerfolg am Ende des ersten Semesters in einer Analysis-Vorlesung und einen hohen Zusammenhang aufgedeckt. Er sah in mangelhafter Kompetenz in algebraisch–rechnerischen Fertigkeiten die Ursache für mangelnden Studienerfolg. Nach den an unserem Institut gemachten Untersuchungen würden wir aber nicht mehr als alleinige Erklärung das inhaltliche Argument von Gundlach heranziehen, dass solche Rechenfertigkeiten offenkundig auch für abstrakte Mathematik notwendig sind – das sind sie in viel geringerem Maße als dort fälschlicherweise angenommen –, sondern dass hinter beiden zu erbringenden Leistungen als erklärende Variable das praktizierte Monitoring bei Termumformungen bzw. Begriffsbildung die entscheidende Rolle spielt.

In die Reihe der Untersuchungen zur Bedeutung von Monitoring-Aktivitäten für das Zustandekommen mathematischer Leistung gehört auch eine chinesisch - deutsche Vergleichsstudie mit Kindern des 5. Schuljahres (460 in Leer und 397 in Shanghai) von Sjuts & Xu (2007). Sie arbeiteten heraus, dass der große Vorsprung chinesischer Kinder im Wesentlichen durch erfolgreichere Monitoring-Aktivitäten zu erklären ist.

Zusammenfassung

Die genannten Untersuchungen und Analysen machen deutlich, in wiefern die Kompetenz und der Wille zum Überwachen der Richtigkeit beim mathematischen Arbeiten ein wichtiger Indikator für dessen Erfolg ist. Die Untersuchung von Brinkschmidt gibt einen Hinweis darauf, dass die praktizierte Kompetenz zum Monitoring generell ein Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit ist. Es handelt sich also um sehr grundlegende Kompetenzen und wohl eher stabile Verhaltensmuster, die es langfristig zu beeinflussen gilt.

Es wird wohl auf Dauer nur gelingen, Lernende zum Wertschätzen und Praktizieren von solchen Monitoring-Aktivitäten zu veranlassen, wenn das Bemühen Teil einer passenden Unterrichtskultur ist: Dazu gehören Aufgabenstellungen, die zu metakognitiven Aktivitäten anregen (vgl. Kaune, 2009a), sowie eine diskursive Gesprächskultur im Unterricht, die metakognitive Aktivitäten fördert. Hinweise darauf, wie solches erreicht werden kann, findet man in Kramer (2009) und Kaune (2009b).

Literatur

Brinkschmidt, S. (2005). *Über die Unterschiedlichkeit kognitiver sowie metakognitiver Prozesse beim Bearbeiten von QuaDiPF-Aufgaben - Empirische Untersuchungen mit Blickbewegungsanalysen.* Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors -Fresenborg, E.; Sjuts, J. & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In Neubrand, M. (Hg.), *Mathematische Kompe-*

tenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000, 109-144. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Gundlach, K.-B. (1968). Kenntnisse der Abiturienten und Studienerfolg in den Anfängervorlesungen im Fach Mathematik. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, XV, 20-31.

Kaune, C. (2009a). "Hier hab ich wieder nicht daran gedacht..." - Hausaufgaben und Berichtigungen als Anregung metakognitiver Aktivitäten. *Praxis der Mathematik*, 27 (im Druck).

Kaune, C. (2009b). Analyse von Mathematikunterricht hinsichtlich des Einsatzes von metakognitiven Aktivitäten und Identifikation spezieller Unterrichtsskripts. In diesem Band.

Kramer, S. (2009). Diagnose metakognitiver Aktivitäten – Trainingsmaßnehmen für Mathematiklehrkräfte. In diesem Band.

Pundsack, F. (2009). *Zusammenhang von Monitoring und mathematischer Leistung - eine (empirische) Studie und Entwicklung eines Trainingsprogramms.* Unveröffentlichte Masterarbeit. Osnabrück: Universität Osnabrück.

Schwank, I. (1998). *QuaDiPF - Qualitatives Diagnose Instrument für predicatives versus funktionales Denken.* Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24(1), 18-40.

Sjuts, J. & Xu, B.Y. (2007). Mehr Erfolg mit Metakognition? Ergebnisse einer chinesisch-deutschen Vergleichsuntersuchung. *SEMINAR - Lehrerbildung und Schule*, 12(2), 59-75.

Eva Maria GRETZMANN, Osnabrück

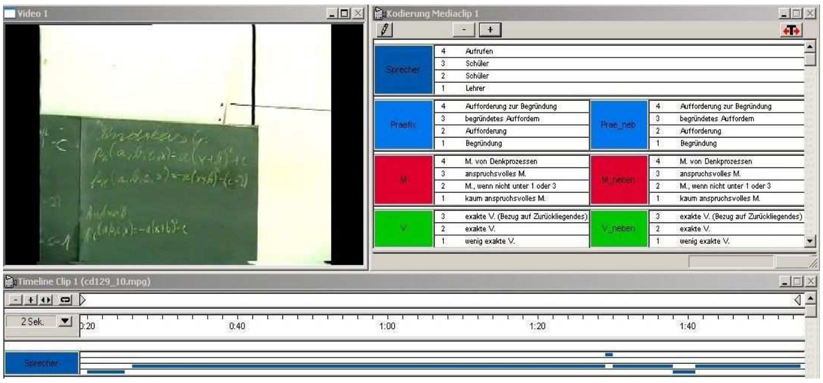
Klassifizierung von Monitoring-Aktivitäten und Diskursivität im Unterrichtsdiskurs

Richtet sich der Blick vor dem Hintergrund der von Cohors-Fresenborg (in diesem Band) vorgestellten Ergebnisse verschiedener Studien zum Wert von Monitoring-Aktivitäten für Schülerleistungen auf Mathematikunterricht, so scheint es nützlich, sich um ein Verfahren zu bemühen, durch dessen Anwendung Unterricht bzgl. dieser Aktivitäten untersucht werden kann. Hierfür bietet sich die Möglichkeit auf ein bereits bestehendes Kategoriensystem zur Analyse von metakognitiven Aktivitäten (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007) zurückzugreifen. Da die Anwendung dieses Systems jedoch sehr zeitintensiv ist, weil zunächst detaillierte Transkripte angefertigt werden müssen, eignet es sich in vielen Situationen nicht als Analyseeinstrument. Häufig ist ein schneller anzuwendendes System nötig, mit dem dennoch aussagekräftige Ergebnisse erzielt werden können.

Der derzeitige Entwicklungsstand solch eines neuen Systems wird im Folgenden vorgestellt. Dabei liegt der Fokus einerseits auf der Analyse von Monitoring-Aktivitäten. Da Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) davon ausgehen, dass die Förderung dieser Aktivitäten einer spezifischen Unterrichtskultur bedarf, nämlich einer diskursiven Unterrichtskultur, soll andererseits ein wichtiger Aspekt von Diskursivität, nämlich das Verankern von Beiträgen im Unterrichtsgespräch, in den Blick genommen werden. Insgesamt zeichnet sich eine diskursive Gesprächskultur z. B. durch die Bereitschaft aus, sich intensiv mit Argumentationen, Formulierungen und Vorstellungen anderer auseinander zu setzen und sich auf diese zu beziehen.

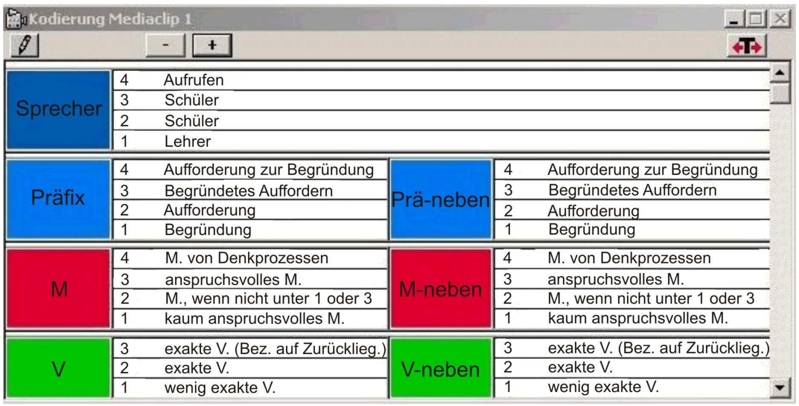
Das Kategoriensystem

Um die zeitaufwendige Transkription einzusparen, wird direkt am Video analysiert. Dies geschieht mit Hilfe der Software „Videograph" (Rimmele, 2005), über deren Oberfläche nebenstehende Abbildung überblicksartig informiert.



Das Kodierverfahren sieht zunächst die Klassifizierung aller Beiträge nach dem jeweiligen „Sprecher" vor. Im Timeline-Fenster (erste Abb., unterer

Bildrand) bedeutet ein Balken auf der unteren Ebene, dass in dem markierten Zeitraum ein Lehrer spricht, analoges gilt bei einem Balken auf den beiden darüber liegenden Ebenen für einen Schüler usw. Durch eine derartige erste Kodierung können nun einzelne Beiträge für weitere Analysen gezielt angesteuert werden.



Zur Kategorisierung der Monitoring-Aktivitäten stellt das System unter der Abkürzung „M“ eine vierstufige, zur Kategorisierung der Verankerungen unter der Abkürzung „V“ eine dreistufige Skala zur Verfügung. Durch die Kategorie „Präfix“ wird u. a. die Möglichkeit bereitgestellt, zu erfassen, ob eine Aktivität begründet auftritt oder zu einer Aktivität aufgefordert wird.

Im Rahmen der Klassifizierung von Monitoring-Aktivitäten und Verankerungen ist zunächst zu entscheiden, was für eine Aktion sich in einem Beitrag in der Hauptsache zeigt. Falls im Rahmen dieser Hauptaktivität noch Nebenaktivitäten auftreten, werden diese über die zu jeder Hauptkategorie vorhandene Nebenkategorie erfasst.

Beispielhafte Analyse einer Unterrichtsszene

Zur Demonstration der Anwendung des Analyseverfahrens ist ein Transkriptauszug (vgl. Cohors-Fresenborg & Kaune, 2003) ausgewählt worden, in dem eine Klasse 9 die an der Tafel stehende Schülerlösung $p(a,b,c,x) = -a(x+b)^2 - c$ zu folgender Aufgabe diskutiert:

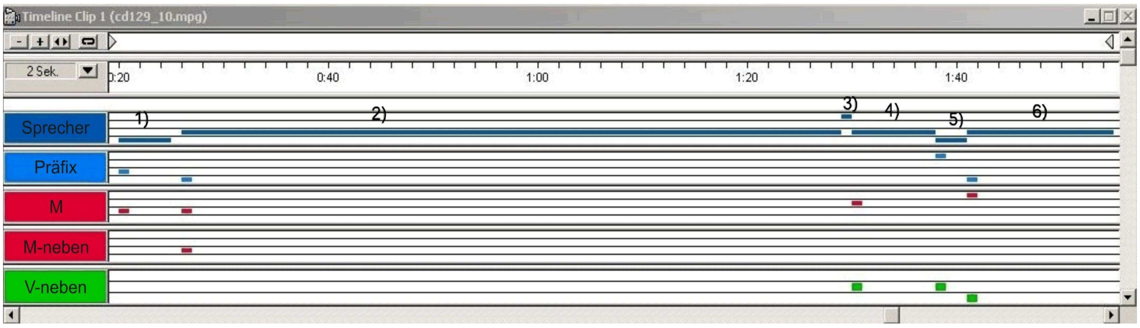
Der Graph jeder Funktion, die nach dem Schema $p(a,b,c,x) = a(x-b)^2 + c$ mit $a \neq 0$ definiert wird, ist eine Parabel. Solch eine Parabel wird am Ursprung gespiegelt. Gib für die gespiegelte Parabel das zugehörige Funktionsschema an.

1) L.: Wen haben wir denn da auf der Ecke, die noch nicht viel gesagt haben? Jenny, wie ist`s denn, sag doch mal `was dazu!

2) Jenny: Also, ich meine das auch. Und zwar, weil erstmal, wenn das am Ursprung gespiegelt wird, dann muss die Öffnung unten sein und das hat er halt mit dem -a. Weil, ähm dann ... Ähm, das ist ja einmal an der Argumentachse dann gespiegelt und dann müsste ähm -b, äh, +b hin, da das ja b dann im Minusbereich sein muss und dann muss auch -c hin, -c...? Ja klar. Ähm ja, das wird dann an der Funktions-

wertachse gespiegelt und das muss auch im Minusbereich sein, also muss ein Minus dahin.

3) L.:	Hmm...Chris!
4) Chris:	Ja, Jennys ist eigentlich fast richtig, bis auf, dass sie gesagt hat, dass es nach unten geöffnet ist. Ich würde eher sagen „andersrum“.
5) L.:	Kannst du erklären, warum das ein Unterschied ist, ob du sagst „nach unten geöffnet“ oder „andersrum“?
6) Chris:	Weil a ist ja nicht unbedingt eine positive Zahl, die Variable a, weil es kann auch eine negative sein. Ich glaube, Jenny hat sich vorgestellt, dass a einfach nur eine positive Zahl ist, und wenn man da ein Minus vorsetzt, das negativ ist.



In dem obigen Timeline-Fenster liegt die Kodierung des Videoausschnitts, zu dem das abgedruckte Transkript gehört, vor. Um es dem Leser zu ermöglichen, das Transkript mit der Videokodierung in Verbindung zu bringen, sind die Sprecherbalken im Timeline-Fenster entsprechend den Beiträgen im Transkript nummeriert.

In Beitrag 1) fordert die Lehrkraft Jenny auf, die an der Tafel stehende Schülerlösung zu kontrollieren. Dass sich demzufolge eine Aufforderung zum Monitoring in dem Beitrag verbirgt, wird durch die kurzen Markierungen im Bereich der Kategorien „M“ und „Präfix“ unter dem Sprecherbalken 1) deutlich. Die Durchführung dieser Kontroll-Aktion wird der Schülerin mehr abverlangen als ein **kaum anspruchsvolles Monitoring** bspw. einer simplen Rechnung, erfordert aber wohl weniger als ein **anspruchsvolles Monitoring** bspw. einer Argumentation. Daher befindet sich der Monitoring-Balken auf Ebene 2.

Jenny kommt der Aufforderung in ihrem Beitrag 2) begründet nach. Sie demonstriert zudem, bspw. durch die Worte „dann muss auch -c hin, -c...? Ja klar.“, dass sie sich während ihrer Kontrollaktion zusätzlich selber überwacht. Dies wird in der Kategorisierung durch die gesetzte Monitoring-Kategorie aus dem nebengeordneten Bereich deutlich.

Chris äußert sich in Beitrag 4) kontrollierend schwerpunktmäßig zu einer bestimmten Formulierung Jennys. Da diese Kontrolle sich nur auf (genaues) Zuhören stützen kann, wird die Aktion im Unterschied zu Jennys als **anspruchsvolles Monitoring** auf der Ebene 3 gewertet. Weil Chris in dieser Aktivität **exakt** nennt, woran er sich stört, verankert er seinen Beitrag. Dies geschieht auf eine Art, bei der nicht nur ein grober, **wenig exakter** Bezugspunkt genannt wird, sich die Verankerung aber auch nicht auf **länger Zurückliegendes** bezieht. Für Derartiges ist Ebene 2 vorgesehen.

In ihrer Reaktion fordert die Lehrkraft nun eine Begründung. Die Aktivität, die der Schüler hierzu ausführen muss, fällt in den Bereich der Reflexion und soll hier nicht weiter diskutiert werden. Analog zu ihrem Vorredner verankert auch die Lehrperson ihren Beitrag.

In Beitrag 6) kommt Chris der Aufforderung zur Begründung nicht nach. Er konzentriert sich stattdessen darauf, begründet eine Fehlvorstellung bei seiner Mitschülerin aufzudecken, wofür die Kategorie **Monitoring von Denkprozessen** vorhanden ist. Zudem nennt er Jenny als Bezugsperson, womit er seinen Beitrag, wenn auch nur **wenig exakt**, verankert.

Ausblick

Das hier in der Anwendung von einigen Kategorien vorgestellte Verfahren ist ein erster Versuch, ein Analysesystem zu entwickeln, mit dem sich Unterricht unter vertretbarem Zeitaufwand aussagekräftig bzgl. des Vorkommens von Metakognition und Diskursivität einschätzen lässt. Es ist denkbar, dass sich solch ein Instrument in Zukunft dazu eignen könnte, Unterrichtsstunden auf das Vorliegen charakteristischer Unterrichtskulturen zu untersuchen. Hierzu muss noch vertieft u. a. über adäquate Auswertungsmöglichkeiten der Kodierungsdaten nachgedacht werden.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003). Mechanismen der Wirksamwerdens von Metakognition bei Verstehensprozessen im Mathematikunterricht. In L. Hefendehl-Hebeker & S. Hußmann (Hrsg.), *Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie* (S. 21 - 34). Hildesheim: Franzbecker.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht.* Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E. (2009). Zum Zusammenhang des Wertschätzens und Praktizierens von Monitoring-Aktivitäten mit mathematischer Leistung. In diesem Band.

Rimmele, R. (2005). *Videograph: Multimediaplayer zur Kodierung von Videos.* Kiel: IPN.

Edyta NOWINSKA, Osnabrück

Monitoring-Aktivitäten als Hilfe zur Erhöhung der Nachhaltigkeit von mathematischen Lernprozessen

1. Einleitung

Die in (Cohors-Fresenborg, 2009) diskutierten Ergebnisse über die Bedeutung von Monitoring-Aktivitäten für den Lernerfolg von Schülern stellen die Unterrichtswissenschaft vor die Aufgabe, nach Methoden der Verankerung einer die Monitoring-Aktivitäten der Lernenden fördernden Unterrichtskultur zu suchen. Diese Problematik soll in den Debatten über die Möglichkeiten der Verbesserung der Unterrichtsqualität mehr Beachtung finden. Im Folgenden wird gezeigt, dass man beim konstruktiven Umgang mit Schülerfehlern durch die Konstruktion geeigneter Aufgaben die Monitoring-Aktivitäten der Schüler auslösen kann. Diese Maßnahme hat sich bewährt, um die Nachhaltigkeit des Mathematiklernens in der Realschule zu verbessern.

Die Überlegungen werden an Beispielen aus dem Projekt KogMaL-R (Kognitionsorientiertes Mathematik-Lehren in der Realschule) zur Verbesserung der Nachhaltigkeit des Realschulmathematikunterrichts erläutert. Als ein Ergebnis aus KogMaL-R findet man (in Nowinska, 2008) einen Hinweis darauf, dass bei der Verankerung einer die metakognitiven Aktivitäten der Lernenden fördernden Unterrichtkultur das unterrichtliche Handeln, das kompetente Tun des Lehrers sowie das Wertschätzen metakognitiver Aktivitäten durch die Lehrkräfte eine zentrale Rolle spielen.

Ausgangspunkt des Projektes KogMaL-R waren forschungsbasierte Ergebnisse über schulformspezifische Unterschiede in den Leistungen und Lernzuwächsen von Schülern (Sommer, 2008). Sie haben gezeigt, dass die Realschüler in einem Schuljahr bei solchen Items nur sehr geringe Lernzuwächse erzielen, die das Verstehen (Formalisierung von Wissen) und das Handhaben formal notierter Mathematik (Formelhandhabung) sowie die Sinnentnahme aus einem umgangssprachlich formulierten Aufgabentext (Sprachlogische Komplexität) verlangen. Eine zuverlässige Handhabung formaler Ausdrücke sowie semantisches Interpretieren eines Aufgabentextes erfordern insbesondere Monitoring-Fähigkeiten. In KogMaL-R wurde daher den denkbegleitenden Aktivitäten der Realschüler bei mathematischen Lernprozessen und den Kompetenzen der Schüler zur Selbstüberwachung ein besonderes Augenmerk gewidmet. Um die Nachhaltigkeit des Realschulmathematikunterrichts zu verbessern, wurde KogMaL-R für eine inhaltliche Ausrichtung des Realschulmathematikunterrichts gesorgt. Dem Funktionsbegriff mehrerer Veränderlicher kommt dabei eine zentrale Rolle zu. Diese Maßnahme soll durch methodische Änderungen ergänzt werden: Die Denk- und Verstehensprozesse der Lernenden sollen im Zentrum der Aufmerksamkeit stehen.

2. Monitoring-Aktivitäten bei den Fehleranalyseaufgaben

Ausgehend von folgender Aufgabe aus einer Klassenarbeit in Klasse 6 einer Realschule wird gezeigt, dass sich beim konstruktiven Umgang mit den Schülerfehlern die Fähigkeiten der Lernenden zum Praktizieren von Monitoring fördern lassen.

Aufgabe: Herr und Frau Schmidt und ihre drei Kinder planen in den Sommerferien in die Schweiz zu fahren. (...) Sie haben sich für die Ferienanlage in Leysin am Genfer See entschieden.

Ferienanlage Leysin :	Mietpreis pro Woche:	900 SFR
	Kosten für Endreinigung:	75 SFR
	Haustier pro Woche:	60 SFR

a) Schreibe eine Funktionsgleichung, mit der sich der Gesamtpreis für den Aufenthalt in der Ferienanlage Leysin in SFR ausrechnen lässt:
x_1: Anzahl der Wochen, die man buchen möchte
x_2: Anzahl der Haustiere, die man mitnehmen möchte
$p_{Leysin}(x_1,x_2) =$

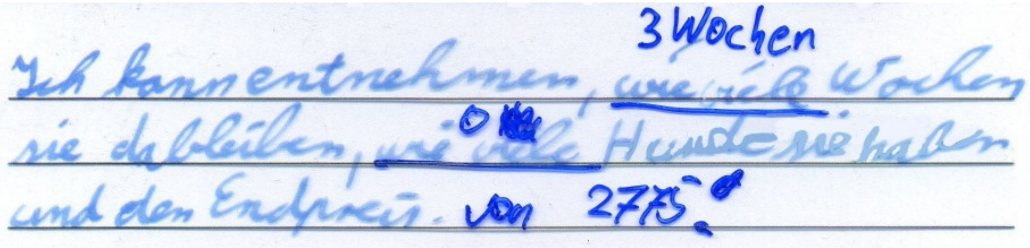
b) Herr Müller hat sich auch für diese Ferienanlage entschieden. Für seine Familie hat er folgende Berechnung durchgeführt: $p_{Leysin}(3, 0) = 2775$. Notiere, welche Informationen du der Gleichung entnehmen kannst.

Der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe liegt weit über dem üblichen Niveau des Realschulmathematikunterrichts. Die Funktionsgleichung, die bei a) zu erstellen ist, kann so aussehen: $p_{Leysin}(x_1,x_2)= 900\cdot x_1+x_2\cdot 60\cdot x_1 +75$.
Der Funktionsgleichung im Aufgabeteil b) kann man entnehmen, dass der Urlaub für drei Wochen geplant ist, keine Haustiere mitgenommen werden und dass man für ihn 2775 SFR bezahlen muss. Beide Aufgabenteile erfordern genaues Lesen, präzises Schreiben und Selbstkontrolle. Der Genauigkeit der Monitoring-Aktivitäten kommt hier eine wichtige Rolle zu. Mangel an diesen Tätigkeiten – und nicht nur Mangel am Sachwissen – scheint der Grund für die Schülerfehler und für das Scheitern bei der Aufgabe zu sein.

Die Schülerlösungen zu dieser Aufgabe wurden zum Anlass, nach Möglichkeiten eines konstruktiven Umgangs mit Schülerfehlern zu suchen. Die gesuchten Maßnahmen sollen die Monitoring-Aktivitäten fordern und fördern. Von den Schülerfehlern aus der Klassenarbeit ausgehend wurde eine neue Aufgabe konzipiert: Je drei fehlerhafte Schülerantworten zu beiden Aufgabenteilen wurden in neue Aufgabe eingespeist. Die Schüler sollen die

Antworten kontrollieren und die aufgedeckten Fehler korrigieren und begründen.

Folgende fehlerhafte Schülerantwort zu dem Aufgabenteil b) wurde im Unterricht von Adam berichtet „*Ich kann entnehmen, wie viele Wochen sie da bleiben, wie viele Hunde sie haben und den Endpreis*.“ Adam zeigt den Mitschülern eine Folie mit seinem Korrekturvorschlag:



Adam hat die Schülerlösung um genaue Werte für die Anzahl der Wochen, für die Anzahl der Hunde und für den Endpreis ergänzt. Dennoch bleiben in der Antwort weitere von ihm nicht aufgedeckte Fehler. Es handelt sich nicht um die Anzahl der *Hunde*, die die Familie Müller *hat*, sondern um die Anzahl der *Haustiere*, die in den Urlaub *mitgenommen werden*. Es ist zu vermuten, dass in der zur Korrektur gestellten Antwort eine Diskrepanz zwischen dem Geschriebenen und dem Gemeinten vorliegt. Diese wurde durch den die Antwort korrigierenden Schüler nicht behoben. Adam kommentiert seinen Korrekturvorschlag wie folgt:

Adam: Ähm, hier muss man ja unterstreichen, was falsch ist, und das Richtige drüberschreiben. Ähm, das war auch meine Lösung. Ich hatte jetzt falsch gemacht, ich hatte jetzt die Zahl nicht hingeschrieben, deswegen mussten n-, mussten noch 3 Wochen, muss man '3 Wochen' hinschreiben, null Hunde, eher gesagt, Haustiere. Und den Endpreis hab ich nicht hingeschrieben, das war falsch.

Hier liegt ein besonderer Fall vor: Der Schüler hat seine *eigene* Antwort kontrolliert und berichtigt die vermeintlichen Fehler. Er nutzt das kognitive Potential der Aufgabe, um das Ergebnis seines Denkprozesses zu kontrollieren und zu präzisieren. Die Erkenntnis, zu der er dabei kommt, scheint für ihn wichtig zu sein, sodass er sogar vorab mitteilt, dass das seine Antwort war. Der Kern der Äußerung besteht im Monitoring: Adam kontrolliert die Präzision und die Adäquatheit seiner Antwort. Er sagt, dass es sich nicht um Hunde sondern eher um Haustiere handelt. Damit hebt er einen Unterschied zwischen Geschriebenem und Gemeintem hervor. Es bleibt aber noch ein Fehler, den er nicht thematisiert. Dazu äußert sich Tim:

Tim: Und da ist noch falsch, ähm wiev- also, da, das 'haben', da steht ja, 'wie viel Hunde sie haben' *[betont]*, aber das heißt, (muss heißen) (...) Ja, und e-, das muss heißen 'wie viel Hunde sie mitnehmen' *[betont]*.

Tim zeigt in seinem Beitrag Monitoring-Aktivitäten. Seine Präzision veranlasst den Schüler Adam dazu, die fehlerhafte Formulierung auf der Folie zu korrigieren: Adam streicht de Formulierung „wie viele *Hunde* sie *haben*“ durch und schreibt darüber „wie viele *Haustiere* sie *mitnehmen*“.

Das Beispiel zeigt, dass man von Schülerfehlern ausgehend, mit Hilfe geeigneter Aufgaben die Fähigkeiten der Lernenden, Fehleranalyse vorzunehmen und Monitoring zu praktizieren, fördern kann. Auf diese Weise lernen die Schüler, die Ergebnisse von (eigenen) Denkprozessen zu kontrollieren.

3. Nachhaltigkeit der durchgeführten Maßnahmen

Um die Effektivität der im KogMaL-R umgesetzten Maßnahmen zur Verbesserung der Nachhaltigkeit des Realschulmathematikunterrichts, insbesondere des Bemühens um die Förderung von Monitoring-Aktivitäten der Lernenden einzuschätzen, wurden zwei Tests zur Diagnose mathematischen Wissens der Schüler eingesetzt (zu Beginn und am Ende des Schuljahres 2007/08). An diesen Tests haben 29 Schüler aus dem Projekt KogMaL-R (KogMaL) und 111 Schüler aus allen anderen Klassen des 6. Jahrgangs der Realschule (VerglGr) teilgenommen. Der Vortest weist keine signifikanten Unterschiede im mathematischen Wissen der beiden Gruppen auf (KogMaL: 62%, VerglGr: 57%; s = 0,079). Nach einem Jahr der Realisation des Projektes KogMaL-R ist der Unterschied zugunsten der Gruppe KogMaL statistisch signifikant (KogMaL: 69%, VerglGr: 59%; s <0,01).

4. Fazit

Die Ergebnisse aus KogMaL-R zeigen, dass die Förderung der Monitoring-Aktivitäten der Schüler mit der Verbesserung der mathematischen Kompetenzen der Schüler einhergeht. Dem Wertschätzen und dem Willen zum Praktizieren dieser Aktivitäten kommt hierfür eine zentrale Rolle zu. Die Monitoring-Fähigkeiten der Lernenden können mit Hilfe geeigneter Aufgaben angeregt und gefördert werden. Auf die Dauer ist diese Maßnahme nur tragfähig, wenn das Bemühen um die Genauigkeit und Präzision ein integrierter Bestandteil der Unterrichtkultur ist.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. (2009). Zum Zusammenhang des Wertschätzens und Praktizierens von Monitoring-Aktivitäten mit mathematischer Leistung (in diesem Band).

Nowinska, E. (2008). KogMaL-R: Kognitionsorientiertes Mathematik-Lehren in der Realschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: WTM, S. 621-624.

Sommer, N. (2008): Lernzuwachs und kognitive Aufgabenanforderungen – Untersuchungen am PISA-E-2000-Datensatz. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 29 (1), 3–19.

Astrid FISCHER, Oldenburg & Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen

Moderierte Sektion: Algebraisches Denken zwischen Einzelfall und Struktur

Algebraisches Denken hat in seinem Wesen immer mit Verallgemeinerung zu tun, also mit der Möglichkeit, das allen Fällen einer Gesamtheit Gemeinsame zu erfassen und darzustellen und umgekehrt solche Darstellungen geeignet zu interpretieren. Die ersten vier Beiträge zur selbstmoderierten Sektion befassen sich mit der Frage, wie sich Kinder auf dem Wege zur Algebra mit solchen Möglichkeiten auseinandersetzen.

DAGMAR BERTALAN erörtert Probleme in der Deutung algebraischer Notation anhand der bekannten Studenten-Professoren-Aufgabe: „An einer Universität sind p Professoren und s Studenten. Es sind sechsmal so viele Studenten wie Professoren. Beschreibe die Aussage durch eine Gleichung!" Der Beitrag stellt dar, wie diese Aufgabe im Unterricht verwendet wurde, um Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern aufzudecken und zu klären.

TATJANA BERLIN schildert, wie Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 5 in einer gegenständlich repräsentierten geometrischen Lernumgebung das Bildungsgesetz einer Folge erfassen und dieses zunächst exemplarisch durch Zahlenterme und schließlich mit Hilfe der Variablen n für eine beliebige natürliche Zahl allgemein darstellen.

ASTRID FISCHER analysiert den Lösungsprozess eines Fünftklässlers zur Vereinfachung eines arithmetischen und eines strukturgleichen algebraischen Terms. In einer vorausgehenden Lernumgebung setzte sich die Klasse mit arithmetischen Aufgaben auseinander, die sich strukturell gleichen. Mit Hilfe von geometrischen Darstellungen der Rechenaufgaben wurden die Gemeinsamkeiten, die gemeinsame Rechenvereinfachungen bedingen, thematisiert. Dies bedeutet jedoch nicht, dass alle Schüler einen Blick für die zugrunde liegenden Strukturen bekommen.

SANDRA GERHARDT beleuchtet das Variablenverständnis von Schülerinnen und Schülern, die Variablen in einem geometrischen Zusammenhang mit Größen und Größenvergleichen kennen gelernt haben. Der Ansatz ist in der Literatur umstritten. Die Hauptkritik liegt darin, dass die Schülerinnen und Schüler die Variablen als die Objekte selbst und nicht als die Größe der Objekte identifizieren. Zum Teil bestätigen Gerhardts Analysen diese Kritik.

In ihrem zusammenfassenden Beitrag stellen ASTRID FISCHER und LISA HEFENDEHL-HEBEKER Merkmale mathematischen Denkens vor: Es ist gesteuert von allgemeinen Denkhandlungen wie Ordnen und Strukturieren, Darstellen und Interpretieren, Verallgemeinern und Abstrahieren, Konstruieren, Argumentieren und Begründen. In der Algebra erhalten diese Denkhandlungen spezifische Ausprägungen. Dazu gehört zum Beispiel, dass Beweise allein durch formales Manipulieren geführt werden können.

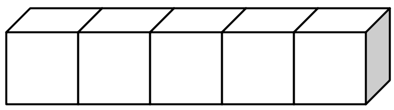
Tatjana BERLIN, Essen

Unterrichtsvorschlag zur Einführung von Variablen im 5. Schuljahr

Im traditionellen Algebraunterricht beginnt die Einführung der symbolischen Algebra in der Jahrgangsstufe 7. Die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der algebraischen Formelsprache sind seit Jahren bekannt. Die Autorin ist der Auffassung, dass man die ersten Begegnungen mit Algebra in frühere Jahrgangsstufen verlagern kann und soll, damit die Lernenden die Gelegenheit bekommen, sich an eine neue Symboldarstellung zu gewöhnen und sich vom Nutzen der Symbolisierung zu überzeugen. Mit Aktivitäten wie Erkennen von Mustern und Beziehungen in arithmetischen oder geometrischen Lernumgebungen, Beschreiben der Strukturen durch konkrete Zahlenbeispiele und dann allgemein mit Hilfe von Symbolen können die Grundlagen gelegt werden, die den Schülerinnen und Schülern helfen können, den Weg zur Algebra zu bahnen. Dabei sollte man die Lernenden die ersten Schritte im Gebrauch der Formelsprache zunächst auf „verschiedenen individuellen Erkenntniswegen" (Hefendehl-Hebeker 2003, S.27) gehen lassen und Metakognition (vgl. Berlin 2008) bei der Auseinandersetzung mit den Aufgaben initiieren.

In diesem Aufsatz wird geschildert, wie Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 5 in einer gegenständlich repräsentierten geometrischen Lernumgebung das Bildungsgesetz einer Folge erfassen und dieses mit Hilfe der Variablen *n* für eine beliebige natürliche Zahl allgemein darstellen. Es handelt sich hierbei um die Aufgabe „Würfelschlange" (vgl. Affolter et al. 2003, S. 23), die den Kindern in Einzelninterviews im Rahmen des Dissertationsprojektes angeboten wurde.

Aufgabenstellung



Auf dem Tisch liegen Holzwürfel gleicher Größe. Zuerst soll die Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einem einzelnen Würfel bestimmt werden. Weil eine Seite des Würfels verdeckt wird, wenn dieser auf dem Tisch liegt, bleiben von den ursprünglichen sechs sichtbaren quadratischen Seiten nur noch fünf übrig. Ferner werden Würfelschlangen gebildet, indem man einen bereits auf dem Tisch liegenden Würfel nach und nach durch Heranschieben weiterer Würfel zu einer Würfelschlange ansteigender Länge ergänzt. Mit jedem Würfel soll die Anzahl der nun sichtbaren Quadrate notiert und der Anzahl von Würfeln in der Schlange gegenübergestellt werden. Dabei zeigen sich Gesetzmäßigkeiten, welche eine allgemeine Darstellung fordern.

Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler im Überblick

Im Laufe der Auseinandersetzung mit der Aufgabe entwickeln die Kinder verschiedene Abzählstrategien. Neben den Rechnungen stellen sie arithmetische Terme als Kurzprotokolle von Rechenstrategien auf und geben mit Hilfe einer Formel an, wie die Anzahl der sichtbaren Quadrate mit der Anzahl n der Würfel zusammenhängt. Die unterschiedlichen Strukturierungen spiegeln sich in den von den Kindern aufgestellten Zahlentermen und Formeln wider. Typische Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler lassen sich gut an den folgenden Lösungen von einigen Fünftklässlern aufzeigen:

- Verena zählt nacheinander die Quadrate an der Vorderseite, der Oberseite und der Rückseite und berücksichtigt anschließend die beiden Quadrate an den Enden der Würfelschlange. Sie gelangt zu dem Term $n+n+n+2$.
- Kevin zählt die drei Reihen gebündelt und fügt dann die beiden Quadrate an den Enden hinzu. Er kommt auf den Term $n \cdot 3+2$.
- Lena betrachtet im Gegensatz zu Verena und Kevin die Quadrate pro Würfel und zählt das obere, vordere und hintere Quadrat eines Würfels und dann die beiden Quadrate an den Enden. Ihre Vorgehensweise verallgemeinert sie durch den Term $3 \cdot n+2$.
- Michael betrachtet ebenfalls die sichtbaren Quadrate eines Würfels, unterscheidet jedoch zwischen den beiden äußeren Würfeln und der sich ändernden Anzahl der inneren Würfel. Er konstruiert den Term $4+(n-2) \cdot 3+4$.
- Niko erkennt die Veränderung und prüft die mit jedem neuen Würfel hinzukommende Anzahl der sichtbaren Quadrate. Schon nach drei Würfeln verkündet er eine Gesetzmäßigkeit gesehen zu haben und notiert den Term $5+3 \cdot (n-1)$.
- Nina überlegt sich: Jeder Würfel hat, wenn er allein auf dem Tisch liegt, 5 sichtbare Quadrate. Werden zwei Würfel zusammen geschoben, decken sich zwei vorher sichtbare Quadrate an den Enden gegenseitig zu. Werden n Würfel zusammen geschoben, entstehen n–1 Nachtstellen dieser Art. So kommt die Schülerin auf den Term $5 \cdot n-(n-1) \cdot 2$.

Von den unterschiedlichen Lösungsansätzen der Schülerinnen und Schüler ausgehend, kann man im Unterricht auf natürliche Weise zum Aspekt der Äquivalenz der algebraischen Terme durch Termumformungen gelangen. Man kann durch konkrete Zahlenbeispiele und auch auf formaler Ebene die Gleichwertigkeit dieser Formeln zeigen.

Symbolsprache der Algebra als Mittel der Argumentation

Es ist von besonderem Interesse zu beobachten, wie die Interviewfrage nach zehn Würfeln bearbeitet wurde, unmittelbar nachdem die Kinder ihre Formeln mit Hilfe der Variablen *n* für eine beliebige natürliche Zahl allgemein aufstellten. Während einige Kinder die auf dem Tisch liegenden Würfel zusammen schoben und abzählten, führten die anderen ihre Zählstrategien fort bzw. benutzten die selbst entwickelten algebraischen Darstellungen, indem sie die Zahl zehn statt der Variable *n* in die Formel einsetzten und zu der richtigen Lösung 32 kamen. Viele Kinder behaupteten jedoch zunächst, dass bei der Verdoppelung der Anzahl an Würfeln die Anzahl der sichtbaren Quadrate sich auch verdoppeln würde, und schlossen von 17 sichtbaren Quadraten bei fünf Würfeln auf 34 sichtbare Quadrate bei zehn Würfeln. Die nachfolgende Szene stammt aus einem Interview mit Niko:

59	I	Wie viele Quadrate werden bei zehn Würfeln sichtbar?
60	N	Zehn … Da werden vierunddreißig
61	I	Wie hast du gerechnet?
62	N	Siebzehn plus siebzehn. Bei fünf sind es siebzehn, und zehn ist doppelt so groß als fünf.
63	I	Bilde die Schlange und rechne nach.
64	N	*(bildet eine Schlange aus 10 Würfeln)* Eins, zwei, ah! Dreißig, einunddreißig, zweiunddreißig… Und 17 plus 17 …
65	I	Vierunddreißig.
66	N	Stimmt nicht!
67	I	Was stimmt nicht?
68	N	Gerechnet habe ich richtig.
69	I	Wie viele Quadrate sehen wir?
70	N	Zweiunddreißig.
71	I	Zweiunddreißig, das ist die Tatsache.
72	N	Nun, wir können mit diesem Schema versuchen (*zeigt auf den Term $5+3\cdot(n-1)$, schreibt einen Zahlenterm $5+3\cdot(10-1)$ auf und rechnet den Wert aus).* Alles richtig, 32.
73	I	Und was war dort mit 17?
74	N	Ich ahne etwas, aber verstehe nicht was es ist.
75	I	Lass uns überlegen, was wir machten. Das sind Würfel vor dir, schau die an!
76	N	Nun, wo hatten wir 17? *(Trennt die Schlange in zwei Schlangen je fünf Würfel).* Ah! *(strahlt)*
77	I	Hast du es?

78	N	Aha!
79	I	Sag es mir.
80	N	Ich kann sogar zeigen (*schiebt beide kurze Schlangen aneinander und wieder auseinander*). Hier waren 17 und hier 17. Und diese zwei Quadrate verschwanden.

Diese Äußerungsfolge zeigt, wie stark der Schüler von seiner Abzählstrategie überzeugt ist und seiner selbst konstruierten Formel vertraut. Somit wird die symbolische Darstellung als Argumentationsmittel verwendet.

Potenzial der Aufgabe

Die präsentierte Aufgabe zur Bildung von Würfelschlangen ist gut für die Einführungsphase der algebraischen Formelsprache geeignet. Sie ist handlungsorientiert, da eine aktive, selbst gesteuerte Tätigkeit der Lernenden gefordert wird. Kinder lernen eigene Gedanken zu ordnen, eigene Lösungsansätze zu analysieren und daraus Erkenntnisse zu gewinnen. Dadurch wird Denken zum „Ordnen des Tuns“ (Aebli 1993/1994). Diese Aufgabe ist auch schülerorientiert, da sie zulässt, die vorhandene Entwicklungsstufe und die Individualität jedes Lernenden zu berücksichtigen. Die Kinder zeigen unterschiedliche Herangehensweisen bei der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabe und strukturieren die Konfiguration der sichtbaren Quadrate der Würfelschlangen auf verschiedene Weisen, was zu einer Vielfalt an Beschreibungen führt. Die Gesamtheit der verschiedenen Sichtweisen und Formulierungen führt im Unterrichtsgespräch zu einem tiefgehenden Verständnis des Probleminhaltes und kommt somit allen Beteiligten zugute. Die Aufgabe ist auch fachorientiert, da die algebraische Formelsprache gleichzeitig zum Mittel des Selbstausdruckes und der Kommunikation wird. Dabei sind die Einblicke, die die Lehrerinnen und Lehrer in die Vorstellungen und individuellen Denkweisen ihrer Schülerinnen und Schüler gewinnen, von unschätzbarem Wert.

Literatur

Aebli, H. (1993/94). Denken: das Ordnen des Tuns. Band I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. Band II: Denkprozesse. 2. Auflage. Stuttgart: Klett-Cotta.

Affolter, W. u. a. (2003). mathbu.ch 7. Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern: Schulverlag blmv AG und Zug: Klett und Balmer AG.

Berlin, T. (2008). Metakognition als Schlüssel zur Einführung der algebraischen Formelsprache. In Barzel, B., Berlin, T., Bertalan, D. & Fischer, A. (Hrsg.), *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 17 - 25). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Hefendehl-Hebeker, L. (2003). Didaktik der Mathematik als Wissenschaft – Aufgaben, Chancen, Profile. Jahresbericht der DMV 105, Heft 1 (S. 3 – 29). Teubner.

Dagmar BERTALAN, Essen

Die Professoren-Studenten-Aufgabe im Unterricht

„An einer Universität sind p Professoren und s Studenten. Es sind sechsmal so viele Studenten wie Professoren. Beschreibe die Aussage durch eine Gleichung!“ Die Professoren-Studenten-Aufgabe hat in der mathematikdidaktischen Literatur einige Berühmtheit erlangt, da an ihr immer wieder der so genannte Umkehrfehler untersucht und dargestellt wurde, der als Lösung dieser Aufgabe 6s = p produziert. Zum Teil tritt der Umkehrfehler sicherlich aus Unachtsamkeit auf. Seine Häufung und die Resistenz gegenüber Korrekturversuchen (Kaput/Clement 1979, Rosnick/Clement 1980) lassen aber grundlegende Schwierigkeiten mit der algebraischen Formelsprache vermuten. In diesem Beitrag soll anhand eines Fallbeispiels dargestellt werden, wie sich die Aufgabe im Unterricht einsetzen lässt, um Schwierigkeiten aufzudecken und zu klären.

Schon Rosnick und Clement (1980) stellten in Interviews fest, dass Probanden die Buchstaben s und p als Abkürzungen für *Studenten* und *Professoren* anstatt richtigerweise für *Anzahl der Studenten* und *Anzahl der Professoren* verwendeten und damit zur falschen Gleichung 6s = p gelangten. In der Gleichung lasen diese Versuchsteilnehmer dann: sechs Studenten entsprechen einem Professor.[1] Um diese „(Fehl-)Vorstellung zum Gegenstand des Nachdenkens “ zu machen (Kaune 2001, S. 44), wurde die Professoren-Studenten-Aufgabe für unser Unterrichtsprojekt in eine Nimm-Stellung-Aufgabe (ebd.) eingebettet.

> Kevin und Milena haben folgende Aufgabe bearbeitet:
> „An einer Universität sind p Professoren und s Studenten. Es sind sechsmal so viele Studenten wie Professoren.“ *Beschreibe die Aussage durch eine Gleichung!*
>
> Kevin hat die Gleichung $p = 6 \cdot s$ aufgeschrieben und sagt: „Auf einen Professor kommen sechs Studenten.“
> Milena hat die Gleichung $6 \cdot p = s$ aufgeschrieben. Sie sagt: „s steht für die Anzahl der Studenten und p steht für die Anzahl der Professoren. Man muss p mit sechs multiplizieren, weil es weniger Professoren sind.“
>
> Was haltet Ihr von den beiden Lösungen? Begründet Eure Meinung!

Die Aufgabe wurde von Schülerinnen und Schülern einer siebten Klasse eines Gymnasiums nach Einführung von Variablen, Termen und Gleichungen zunächst in Gruppen bearbeitet, dann im Klassengespräch weiterdiskutiert. Das Klassengespräch soll im Folgenden näher betrachtet werden.

---

[1] Eine Darstellung der verschiedenen in der Literatur beschriebenen Ursachen für den Umkehrfehler sowie eine ausführliche Erörterung der *Objekt-Anzahl-Problematik* findet sich in Bertalan 2007.

Kais Äußerung zu Beginn des Klassengesprächs zeigt, dass die Professoren-Studenten-Aufgabe für Schülerinnen und Schüler einer siebten Klasse durchaus lösbar ist.

Kai: Also, wir glauben auch, dass Milenas richtig ist, weil, ja weil die Anzahl, die komplette Anzahl der Professoren also mal sechs genommen und daraus entsteht dann, wenn man das rechnet, die Anzahl der Studenten. Die Anzahl der Studenten ist halt sechsmal so groß wie die von den Professoren, und deswegen ist das von Milena richtig.

Nach Kais Äußerung vertritt im Klassengespräch zunächst niemand mehr Kevins Lösung. Der Lehrer weist dann aber darauf hin, dass in der Arbeitsphase einige Gruppen gemeint hätten, dass beides richtig sei. Er nutzt hier das Vorhandensein einer falschen Gleichung im Aufgabentext, um die Schülerinnen und Schüler aufzufordern, sich noch einmal mit Kais Begründung, den Lösungsvorschlägen der fiktiven Schüler aus der Aufgabenstellung sowie mit ihren eigenen Gedanken auseinanderzusetzen und sich dazu zu äußern. Peter geht darauf ein.

Peter: [...], aber auf den ersten Blick könnte man ja auch meinen, dass Kevins, also man kann ja jetzt nicht direkt sagen, dass Kevins falsch ist, weil auf den ersten Blick, würde ich jetzt sagen *(deutet mit der Hand auf sich)*, also wenn ich das jetzt mir länger angucke, könnte ich da vielleicht schon was finden, aber auf den ersten Blick sieht das so aus als hätte der Kevin schon irgendwie richtig gerechnet.

Auch diese Äußerung illustriert noch einmal Möglichkeiten, die die Aufgabenstellung in der Diskussion bietet: Peter kann für Kevin sprechen, ohne sich selbst klar zu dessen Lösung zu positionieren. Auf die Nachfrage des Lehrers, warum er meine, dass Kevin auch Recht haben könnte, antwortet er:

Peter: Ja weil da stand ja, ähm, sechsmal so viele Studenten wie Professoren, (.) also Studenten mal sechs (.) rechnen, die Studentenanzahl,

Diese Äußerung könnte man im Unterricht zum Anlass nehmen, um über eine weitere Quelle des Umkehrfehlers zu sprechen, die auch in der Literatur beschrieben und diskutiert wurde (Rosnick/Clement 1980, MacGregor/Stacey 1993): die Übernahme der Wortreihenfolge der Aussage in die Gleichung. Im hier dargestellten Unterrichtsgespräch bringt nun aber Karsten gegen Peters Äußerung einen Einwand hervor.

Karsten: Dann hast Du aber sechsmal so viele Studenten äh Professoren wie Studenten.

Nach einem neuen Diskussionsstrang des Klassengesprächs, an dem weder Peter noch Karsten beteiligt sind, hat Peter eine neue Idee, Kevins Lösung plausibel zu machen.

Peter: Also wenn man für p und s gleiche Zahlen verwenden würde, also sagen wir mal zwei, dann würd' das schon klappen, weil dann hätte man ja ähm zwei Professoren und zwölf Studenten, das sind ja sechsmal so viele.

Im weiteren Verlauf des Gesprächs führt er dies aus.

Peter: Zwei gleich sechsmal zwei, wären dann zwölf, und dann hätte man sechsmal so viele Studenten wie Professoren.

Der Lehrer fasst Peters Beitrag wie nebenstehend im Kasten dargestellt an der Tafel zusammen. Sogar als die falsche arithmetische Gleichung $2 = 6 \cdot 2$ an der Tafel steht, fällt Peter nichts auf. Er passt die algebraischen Zeichen seinem Ausdruckswillen an – das Gleichheitszeichen, aber auch die Buchstaben. $2 = 6 \cdot 2$ scheint für ihn auszudrücken, dass 2 Professoren $6 \cdot 2$ Studenten gegenüberstehen. Er setzt für p und s zwei ein, obwohl er weiß, dass eigentlich 2/12 ein passendes Zahlenpaar ist, verwendet die Variablen also nicht den Konventionen entsprechend und fügt den in der Literatur beschriebenen Lösungsvorschlägen eine neue Variante hinzu. Es ist wiederum Karsten, der genau dort einhakt.

p = 6 · s
Prof.: 2
Studenten: 2
2 = 6 · 2
2   12

Karsten: Ja, dann kannst Du ja aber jetzt nicht in Studenten zwei einsetzen.

Obwohl Karsten hier richtigerweise Einspruch einlegt, kann er Kevins Lösung in seinen folgenden Wortbeiträgen dann doch etwas abgewinnen, und stellt sie nur noch als die unsicherere von beiden dar. Der Lehrer versucht die Schülerinnen und Schüler dann zunächst zu einem Statement für eine der beiden Lösungen zu bewegen, indem er fragt, ob die Zahlenpaare 2/2 und 2/12 beide in Ordnung wären. Da dies nicht den gewünschten Erfolg hat, sondern nach wie vor beide Lösungen von den Lernenden als plausibel erachtet werden, weist der Lehrer nun expliziter darauf hin, dass die beiden Lösungen verschieden sind und nicht beide richtig sein können, und fordert damit eine Stellungnahme ein. Dann hat noch einmal Karsten eine Idee.

Karsten: [...], das kann eigentlich nicht funktionieren, die vom Kevin, weil p sind ja die Professoren, um die auszurechnen, muss man sechsmal die Anzahl der Studenten nehmen. Dann hätte man, wenn man zwei Studenten hat, hätte man zwölf Professoren, aber die zwei an den Studenten ändert sich ja nichts. [...] und das würd' ja heißen, dass es sechsmal so viele Professoren gibt wie Studenten und das steht ja nicht in der Aufgabe, also kann die gar nicht funktionieren.

Peter gibt Karsten Recht und merkt auch an, dass zwei ja eben nicht gleich zwölf ist.

Peter: [...] das ist keine Gleichung irgendwie vom Kevin. Also das kann man schon ausrechnen, aber das ist keine richtige Gleichung eben.

Im Gespräch wird erarbeitet, dass man eine neue Möglichkeit finden müsste, um das Lösungsverfahren, welches Peter Kevin unterstellt, darzustellen. Der Lehrer wischt zunächst das Gleichheitszeichen in $2 = 6 \cdot 2$ aus und fügt stattdessen als ersten Vorschlag einen vertika-

p = 6 · s
Prof.: 2
Studenten: 2
2 | 6 · 2
2 | 12

len Strich ein (s. Kasten). Peter stimmt dem Lehrer zu, betont am Ende des Gesprächs aber auch noch einmal, dass Kevins Lösung ja so falsch nicht sein könne.

Peter: Ja also, Kevins, also das Ergebnis von Kevins Rechnung, [...] das würd' dann, also zwei und zwölf, würd' dann ja wieder bei Melina klappen, das sind so die Ausgangszahlen für die Rechnung, [...]

Zusammenfassende Bemerkungen

Im dargestellten Fallbeispiel sind bekannte Ursachen für den Umkehrfehler zu Tage getreten – insbesondere die Anpassung der Deutung algebraischer Zeichen an den eigenen Ausdruckswillen. Die Problematik ist im Unterricht an dieser Stelle also vorhanden und sollte zum Thema gemacht werden. Die zusammenfassende Darstellung des Unterrichtsgesprächs sollte illustrieren, dass und wie Schüler der siebten Klasse sich mit den Schwierigkeiten der Professoren-Studenten-Aufgabe und dem Umkehrfehler auseinandersetzen können. Insbesondere Peters Ringen mit der falschen Gleichung wurde verfolgt. Es wurde deutlich, dass der Sachverhalt für ihn im Gespräch etwas durchsichtiger wurde, auch wenn seine letzte Äußerung vermuten lässt, dass noch Klärungsbedarf bezüglich der Passung zwischen seinem Verfahren und der richtigen Gleichung besteht.

Eine Diskussion der Professoren-Studenten-Aufgabe kann auch anders als durch eine Nimm-Stellung-Aufgabe angestoßen werden. Für die Einbettung spricht aber, dass sie den Umkehrfehler unmittelbar zum Gegenstand der Diskussion macht und Schülern sowie Lehrern Anknüpfungspunkte für die Diskussion liefert.

Literatur

Bertalan, D. (2007). Buchstabenrechnen? In: Barzel, B. / Berlin, T. / Bertalan, D. / Fischer, A. (Hrsg.): Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker. Hildesheim, Berlin: Franzbecker. S. 27 - 34.

Kaput, J. J.; Clement, J. (1979). Letter to the editor. In: The Journal of Childrens' Mathematical Behavior 2(2). S. 208.

Kaune, Ch. (2001). Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als die „etwas andere Aufgabe". In: Der Mathematikunterricht 47(1). S. 35-46.

MacGregor, M.; Stacey, K. (1993). Cognitive Models Underlying Students' Formulation of Simple Linear Equations. In: Journal for Research in Mathematics Education 24(3). S. 217-232.

Rosnick, P.; Clement, J. (1980). Learning Without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. In: The Journal of Mathematical Behavior 3(1). S. 3-27.

Astrid FISCHER, Oldenburg

Vereinfachen von Termen: Imitation von Handlungsroutinen oder gedankliches Durchdringen von Zusammenhängen?

Eine Stärke der algebraischen Sprache ist, dass man mit ihrer Hilfe kontextfrei äquivalente Aussagen erzeugen und so gezielt Veränderungen vornehmen kann. Aber Termumformungen haben für viele Schülerinnen und Schüler ihre Tücken. Oftmals werden Terme rein schematisch umgestellt, ohne dass die Lernenden einen Sinn für die Wirkung und Aussage dieser Transformationen entwickeln. Wenn die Regeln gut gelernt sind, können die betreffenden Schüler bei Standardaufgaben durchaus effektiv arbeiten. Aber wenn Aufgabentypen nicht mehr erinnert werden oder wenn sich Fehler einschleichen, führt diese Form des Lernens zu Hilflosigkeit. Malle (1993) hat eindrückliche Beispiele hierzu aufgeführt.

Hier wird eine kleine Fallstudie vorgestellt, in der ein Fünftklässler, David, mit dem Vereinfachen von einem arithmetischen und einem algebraischen Term beschäftigt ist.

1. Der Kontext der Fallstudie

In einer dreiwöchigen Lernumgebung (vgl. Fischer 2009) haben sich die Schülerinnen und Schüler von vier fünften Klassen mit unterschiedlichen Strukturen arithmetischer Aufgaben beschäftigt. Angeregt wurden sie dazu durch gleichartige Rechenterme und durch zeichnerische Darstellungen in Form von Punktmustern oder Pfeilsequenzen, welche für Aufgaben mit kleinen Zahlen geeignet waren. Die Darstellungsformen wurden im Verlauf der Unterrichtsreihe von den Kindern fortentwickelt, damit auch Rechenaufgaben mit großen Zahlen illustriert werden konnten. Dazu war es notwendig, den Fokus von den absoluten Zahlwerten weg, hin zu den strukturellen Gemeinsamkeiten der Aufgaben zu lenken.

Ein Beispiel einer Aufgabenserie aus dem Unterricht ist:

$(3\cdot5-6):3$; $(3\cdot8-6):3$; $(3\cdot25-6):3$; $(3\cdot47-6):3$; $(3\cdot96378-6):3$; $(3\cdot x-6):3$.

Ausnahmsweise tritt in dieser Serie neben Zahlen- auch ein Variablenterm auf, den der Lehrer zum Anlass nahm, folgende Umformung vorzuführen:

$$\begin{aligned} &(3\cdot x-6):3 \\ &= 3\cdot x:3 - 6:3 \\ &= x - 2 \end{aligned}$$

Eine Woche nach Beendigung der Unterrichtsreihe wurde ein Einzelinterview mit David geführt. Im nächsten Abschnitt werden Auszüge aus dem zweiten Teil des Interviews erörtert.

Dabei sollen die Fragen erörtert werden:

- Welches Verständnis zeigt David von Transformationen arithmetischer und algebraischer Terme?
- Welche Rolle spielen dabei die Zeichnungen?

2. Davids Versuch, einen arithmetischen Term zu vereinfachen

David wird zunächst gefragt, wie man möglichst einfach das Ergebnis von (117·4+8):4 herausfindet. Er erläutert, dass beginnend mit 117 die Operationen mal, plus und geteilt jeweils auf das vorherige Zwischenergebnis anzuwenden sind. Teile berechnet er, jedoch nicht das Endergebnis.

Nun wird David aufgefordert, mit Hilfe einer Zeichnung einen abkürzenden Rechenweg zu suchen. Er zeichnet zunächst ein Rechteck von 4x6 Rechenkästchen, dessen Seiten er mit „4“ und „117“ beschriftet, ergänzt sodann ein L-förmiges Feld, das 8 Kästchen groß ist und er mit „+8“ kennzeichnet. Anschließend teilt er die Figur in vier (nicht ganz gleich große) Teile. Er erkennt, dass er das Ergebnis der Rechenaufgabe an dieser Zeichnung nicht ablesen kann. Sein Vorgehen beim Zeichnen entspricht ganz dem Vorgehen in seiner Rechnung, jeweils die folgende Operation auf das fertige Zwischenergebnis der Vorhergehenden anzuwenden, ohne dabei die besondere Struktur seiner Entstehung zu berücksichtigen.

Nach einem Tipp der Interviewerin, zunächst zu schauen, was gut geteilt werden kann, teilt David zunächst das Rechteck in vier Streifen, von denen er einen markiert, und anschließend das „L“ in 4 Felder, wobei er ebenfalls eines kennzeichnet (vgl. Abb. 1). Die Frage nach dem Ergebnis der Aufgabe beantwortet er durch Ergänzung der Zeichnung (Abb. 2) und den Kommentar: „Also das hier hier unten dranhängen. Das sind dann 117. 117 plus 2 sind 119.“

David findet hier mit Hilfe seiner Zeichnung zu einer Lösung der Rechenaufgabe. Allerdings gibt es keine Hinweise darauf, ob er auch Einsicht in die besondere Struktur des Rechenterms gewinnt, d.h. ob er die zeichnerischen Vereinfachungen in die Termumformung (117·4+8):4 = 117·4:4+8:4 übersetzt.

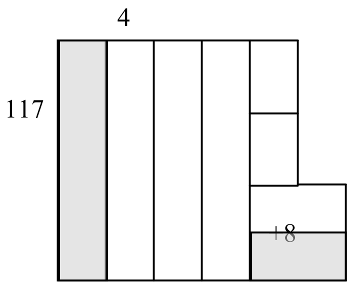


Abb. 1

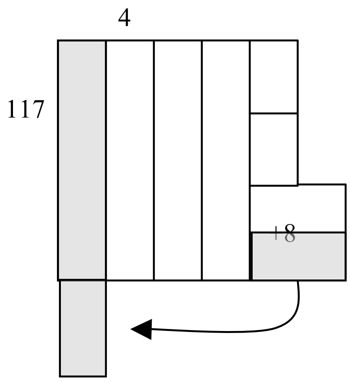


Abb. 2

3. Davids Transformation eines algebraischen Terms

David wird anschließend gebeten, den Ausdruck (x·4+8):4 zu erklären. Er erklärt, dass vier mal x durch vier dasselbe wie x ist und ergänzt, dass dann noch Acht zu addieren ist, was zum Ergebnis x+8 führt. Er notiert diese Überlegung folgendermaßen 4·x:4 = x+8 = x+8.

Er erinnert sich hier offenbar halb an die algebraische Umformung im Unterricht, übersieht dabei jedoch, dass auch die Acht zu dividieren ist. Hinter dem ersten Gleichheitszeichen notiert er das Ergebnis des linken Ausdrucks, dann fährt er fort mit der nächsten Rechenanweisung. Diese führt er nach dem zweiten Gleichheitszeichen aus. Während also der erste Term „x+8" für eine Handlungsaufforderung steht, noch 8 zu addieren, steht das zweite „x+8" für das Ergebnis dieser Handlung. Beide Terme gleichen sich zwar in ihrer Form, erhalten aber von David ganz unterschiedliche Bedeutungen.

David wird nun gefragt, ob seine Zeichnung dazu passt. Er verneint, und ergänzt eine zweite Zeichnung, die den Variablenterm illustrieren soll. Dabei orientiert er sich jedoch nicht am gegebenen Term, sondern an seiner formalen Transformation (Abb. 3). Der Vergleich mit der ersten Zeichnung veranlasst ihn auch noch das L-förmige Feld zu vierteln und ein Viertel an das Zwischenergebnis „x" anzufügen (Abb. 4). Nun fällt ihm auf, dass das Ergebnis der Zeichnung dem zuvor gefundenen Ergebnis „x+8" widerspricht, und er entscheidet, dass die Zeichnung daher falsch sein muss: Die Zeichnung hat für ihn also keine Überzeugungskraft, sondern er vertraut völlig auf seine formale Transformation. Erst nach deutlichem Infragestellen durch die Interviewerin und dem Hinweis, den ursprünglichen Variablenterm nochmals anzuschauen, erkennt David seinen Fehler und begründet die Antwort anhand der Wirkungen der urspünglichen Operationen.

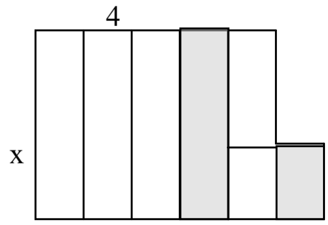


Abb. 3

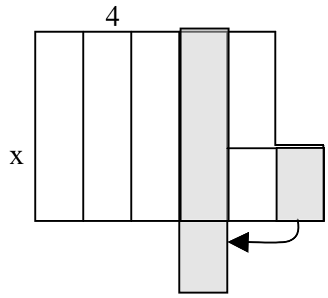


Abb. 4

4. Imitation oder eigenständiges Denken?

Im Umgang mit beiden Termen handelt David zunächst jeweils nach einem starren, (halb) erinnerten Handlungsschema, und überträgt dieses auf seine Zeichnung, ohne seine Bedeutung zu reflektieren. Aus unterschiedlichen Gründen gelangt er jedoch in beiden Fällen nicht zu dem Ziel, das Ergebnis an seiner Zeichnung abzulesen. Nach Hinweisen durch die Interviewerin kann er sich dann von seinem dominierenden Schema lösen und im ersten Fall das Rechenergebnis mit Hilfe der Zeichnung finden, im zweiten Fall Einsicht in die Termstruktur und eine daraus resultierende Vereinfachung gewinnen.

Auf sich gestellt, gelingt es David nicht, die Zeichnungen als Werkzeuge zu nutzen. Hat dies epistemologische Ursachen, die in einer grundsätzlichen Schwierigkeit liegen, die Strukturen eines Terms zu erfassen? Oder liegen die Ursachen in einer unterrichtlichen Konditionierung auf die Nachahmung vorgegebener Verfahren, die zu wenig Wert auf echte Auseinandersetzung mit den Darstellungen legt? Für Grundschulen ist bekannt, dass Anschauungsmittel im Grundschulunterricht nicht selbsterklärend sind, sondern der aktiven Erschließung durch die Kinder bedürfen (Söbbeke 2005).

Literatur

Fischer, A. (2009). Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen: Zahl- und Variablenauffassungen von Fünftklässlern. *JMD 30(1),* 3 – 29.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme mit der elementaren Algebra.* Braunschweig: Viehweg.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern - epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu visuellen Strukturierungsfähigkeiten mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Sandra GERHARD, Frankfurt am Main

Variablen im geometrischen Kontext

Der Vorschlag, Variablen im Zusammenhang mit geometrischen Größen einzuführen, trifft auf geteilte Meinungen. Die Hauptkritik liegt darin, dass die Schülerinnen und Schüler die Variablen als die Objekte selbst und nicht als die Größe der Objekte identifizieren. Im folgenden Beitrag wird das Variablenverständnis von Schülerinnen und Schülern, die Variablen im Zusammenhang mit Größen und Größenvergleichen kennen gelernt haben, einmal näher beleuchtet.

1. Zugang zur Algebra – was, wann und wie?

Wenn über den Zugang zur Algebra gesprochen wird, stellt sich nicht nur die Frage wie, sondern auch die Frage, ab wann Algebra unterrichtet werden sollte und was überhaupt unter Algebra in der Schule zu verstehen ist.

Das vorliegende Forschungsprojekt basiert auf folgenden Ausgangsüberlegungen:

– Traditionell wird Algebra erst nach einer langjährigen Ausbildung als generalisierte Arithmetik in den Schulen eingeführt, aber "children's equation learning difficulties are due […] to children's existing knowledge" (McNeil 2004, S. 938). Für den Algebra-Unterricht bedeutet dies, dass Schülerinnen und Schüler, nicht nur aus dem bisherigen Unterricht, sondern auch von zu Hause aus, häufig die Vorstellung von Mathematik als reines Rechnen, mit z.B. dem Gleichheits- als „Rechne aus"-Zeichen, mitbringen.

– Das Erlernen der algebraischen Symbolsprache ist ein wichtiges Ziel des Algebra-Unterrichts (vgl. Dörfler 2008). Zwar kann Algebra auch ohne Symbolsprache betrieben werden, die Algebraisierung der Mathematik im letzten Jahrhundert bewirkte jedoch enorme strukturelle Vereinfachungen, von denen auch Schülerinnen und Schüler profitieren sollten.

– Schülerinnen und Schüler stellen sich häufig die Frage, warum sie Variablen verwenden sollen, wenn eine Aufgabe doch auch ohne diese lösbar ist. Das liegt daran, dass "algebraic syntax will not be appreciated by students until they have experienced the limits of the scope of their previous knowledge" (Rojano 1996, S. 62). Schülerinnen und Schüler sollten sich also mit Aufgaben auseinandersetzen, die eine Beschäftigung mit der algebraischen Symbolsprache unabdingbar machen.

Die Ausgangsüberlegungen führen zu der Idee, langjährigen Arithmetik-Unterricht ohne algebraische Elemente zu vermeiden und stattdessen nicht nur das algebraische Denken, sondern auch die algebraische Symbolsprache früher zu unterrichten. Da die Schülerinnen und Schüler dann weniger Mathematik-Kenntnisse besitzen, wird das Vorhaben, Schülerinnen und Schüler an die Grenze ihres bisherigen Wissens zu bringen, vereinfacht.

2. Konkret vs. abstrakt

Einer der Gründe, dass der bisherige Einstieg in den Algebra-Unterricht erst ab einem Alter von 11-12 Jahren erfolgt, liegt darin, dass nach Piaget Schülerinnen und Schüler erst ab diesem Alter in die formal-operationale Stufe eintreten. Wird der Unterricht der algebraischen Symbolsprache vorgezogen, stellt sich die Frage, ob die Behandlung der abstrakten Symbolsprache bereits in der konkret-operationalen Stufe möglich ist.

Bei Anderson (2001) wird die konkret-operationale Stufe wie folgt definiert: „Kinder entwickeln eine Reihe mentaler Operationen, die es Ihnen ermöglicht, sich auf systematische Art und Weise mit der physikalischen Welt auseinanderzusetzen.“ Schülerinnen und Schüler sind also in dieser Stufe in der Lage, nicht nur sensorisch-konkretes Wissen durch Verwendung von konkretem Material, sondern auch integrativ-konkretes Wissen in Form von vernetzten Ideen zu entwickeln (vgl. Clements 1999). Dies beinhaltet auch den gezielten Aufbau von Grundvorstellungen.

Nach Malle (Ohne Datum) ist es unverzichtbar, vor die formal-regelhafte Entwicklung und Einübung eines Kalküls eine inhaltlich-anschauliche Phase zu schalten, die der Entwicklung der nötigen Grundvorstellungen unter Zurückstellung der Arbeit mit Regeln dient. Gleichzeitig kritisiert er, dass diese inhaltlich-anschauliche Phase oft vernachlässigt wird.

3. Ein geometrischer Zugang

Es gibt viele Möglichkeiten, algebraische Sachverhalte geometrisch zu veranschaulichen, wie z.B. figurierte Zahlen. Das vorliegende Forschungsvorhaben basiert auf der Grundidee, Beziehungen von geometrischen Größen symbolisch darzustellen. Dabei wird eine Brücke vom konkreten Größenvergleich zu abstrakten Gleichungen geschlagen (vgl. Gerhard 2008). Die Schülerinnen und Schüler vergleichen konkrete, mit Buchstaben bezeichnete Längen, Flächeninhalte und Volumina, stellen dazu Ungleichungen und Gleichungen auf und interpretieren und manipulieren diese materialgestützt. Durch diesen inhaltlich-anschaulichen Zugang zu Gleichungen ist es möglich, dass die Schülerinnen und Schüler bei einer späteren Begegnung mit Gleichungen auf geometrische Vorstellungen zurückgreifen.

Eine Besonderheit dieses Zugangs liegt darin, dass arithmetische Vorerfahrungen weitgehend ausgeblendet werden, indem zunächst auf die Verwendung von Zahlen verzichtet wird. Der gewählte Zugang ist mit konkretem Material erfahrbar und erweiterbar, wenn mit gerichteten Größen gearbeitet wird, auch auf negative Zahlen. Ein weiterer Vorteil ist, dass die Größen variabel und kontinuierlich sind, was eine Betrachtung der Gleichung unter funktionalen Aspekten ermöglicht. Es bleibt die Frage, wie die Schülerinnen und Schüler Buchstabenvariablen sehen: Als Größe oder als Objekt?

4. Variablenaspekte im geometrischen Kontext

Die Problematik, dass bei einem Zugang zur Algebra über Längen, Flächeninhalte und Volumina die Buchstaben, die eigentlich Größen bezeichnen, von Schülerinnen und Schülern als Bezeichnungen für die Objekte Seite, Fläche und Körper gesehen werden können, findet vielfache Erwähnung in der Literatur (vgl. Bertalan 2008). Küchemann (1978) vergibt an diese Fehlvorstellung einen eigenen Variablenaspekt, indem er „letter as object" dem Aspekt „letter as number" gegenüberstellt. Dazu ein Ausschnitt aus einer Unterrichtssequenz:

Ein Schüler (J), unterstützt von der Lehrkraft (L) soll Cuisenaire-Stäbe aneinanderlegen und Aussagen über die Länge der gelegten Stäbe treffen.

J: Also nennen wir die ganz kleinen grauen U. Das hier ist ein U.

L: So, dann kannst du ja mal alle benennen.

J: A ist immer das größte. B, das blaue ist fast so groß, oder?

L: Welchen Buchstaben geben wir denn zum Beispiel dieser Länge?

J: Ähm, den niedrigsten, den niedrigsten Buchstaben hiervon, welches.. äh.. welcher ist denn das niedrigste?

Zunächst scheint sich hier zu bestätigen, dass Buchstaben von Schülerinnen und Schülern leicht als Bezeichnungen für Objekte missverstanden werden. Der Schüler J benennt mit den Buchstaben die Objekte, in diesem Fall die Cuisenaire-Stäbe. Allerdings erfolgt die Benennung nicht willkürlich. Vielmehr macht der Schüler die Benennung von der Größe, in diesem Fall von der Länge des Objektes abhängig.

Die Variablen werden hier weder als Zahlen noch als reine Objekte betrachtet. Vielmehr handelt es sich hier um einen Zwischenaspekt, die Variablen stehen für Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft, in diesem Fall für Stäbe mit bestimmter Länge. In diesem Zusammenhang kann auch für eine Metonymie gesprochen werden, die Buchstaben stehen für den Repräsentanten der Größe, den Stab, der wiederum für die Größe selbst steht.

Griesel (1981) schreibt hierzu:

„Eine Größe wie z.B. ¾ m läßt sich als solche nicht vorstellen, wohl aber ihr Repräsentant, in unserem Fall Strecken der Länge ¾ m. Insbesondere für ein inhaltliches Denken und für eine intuitive Begründung von mathematischen Zusammenhängen sind solche Vorstellungen unerläßlich." (Griesel 1981, S. 9)

5. Ausblick

Auch wenn die Schülerinnen und Schüler die Buchstaben nicht als Bezeichnung für die reinen Objekte sehen, bleibt die Frage offen, ob die Sicht auf Buchstaben als Bezeichnung für Objekte mit bestimmten Eigenschaften für die Ausbildung einer tragfähigen Grundvorstellung zum Umgang mit Gleichungen eher von Vorteil oder eher hinderlich ist. Die Klärung dieser Frage wird im Rahmen des Forschungsprojektes weiter verfolgt.

Literatur

Anderson, J.R. (2001). *Kognitive Psychologie*. 3. Aufl. Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akad. Verlag.

Bertalan, D. (2008). Buchstabenrechnen? In B. Barzel et al. (Hrsg.), *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 27 - 34). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Clements, D.H. (1999). ´Concrete` Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, Vol. 1, No. 1,* 45 – 60.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections, *ZDM 40(1),* 143 - 160.

Gerhard, S. (2008): Algebra in der Grundschule – Von konkreten Größenvergleichen zu abstrakten Gleichungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, Hildesheim: Franzbecker.

Griesel, H. (1981). 20 Jahre moderne Didaktik der Bruchrechnung. *Der Mathematikunterricht, 27, Heft 4,* 5 – 15.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School, 7(4),* 23 - 26.

Malle, G. (Ohne Datum). Grundvorstellungen im Mathematikunterricht. Verfügbar über http://imst2.uni-klu.ac.at/materialien/_design/s1_m_ grundvorstellungenmatheunterricht_150104. pdf (Datum der Einsichtnahme: 29.03.2009).

McNeil, N. (2004). Don't teach me 2 + 2 equals 4: Knowledge of arithmetic operations hinders equation learning. In K. Forbus et al. (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, (S. 938 – 943). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rojano, T. (1996). The Role of Problems and Problem Solving in the Development of Algebra. In N. Bednarz et al. (Hrsg.), *Approaches to algebra* (S. 55 - 62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Astrid FISCHER, Oldenburg; Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen

Zur algebraspezifischen Ausprägung mathematischer Denkhandlungen

To think is to forget differences,
to generalize, to abstract.
(Borges 1989, zitiert nach Arcavi 1994)

In unseren Überlegungen gehen wir davon aus, dass mathematische Denkoperationen spezifische Ausprägungen bzw. Idealisierungen allgemeiner menschlicher Denkhandlungen sind (Wille 2001 im Anschluss an Kitcher 1984). Harel unterscheidet in diesem Zusammenhang „mental acts" and „ways of thinking" (Harel 2008). Mental acts bezeichnen allgemeine Denkhandlungen, die überall im menschlichen Denken eine Rolle spielen, ways of thinking sind bereichs- oder disziplinspezifische Ausprägungen von diesen (ebd.). Danach können wir das Anliegen unseres Vortrages so präzisieren: Wir möchten allgemeine Denkhandlungen ausweisen, die auch in der Algebra eine Rolle spielen, und ihre algebraspezifischen Ausprägungen charakterisieren.

1. Strukturieren

„Im Denken wiederholt oder strukturiert sich … eine (‚objektiv') gegebene Wirklichkeit:" (Mittelstraß 1995, Stichwort ‚Denken'). Strukturieren gehört also zu den reflexiven Akten, mittels derer das Denken seine „Orientierungs- und Konstitutionsleistungen" (ebd.) erbringt.

In der Algebra liegt ein besonderer Fokus auf dem Erfassen und Darstellen von Strukturen. Durch Symbolisches Beschreiben von Rechenschemata und Gesetzmäßigkeiten werden Strukturen in Zahl- und Größenbereichen explizit gemacht. Es können sogar Muster und Strukturen konstituiert werden, z. B. wenn eine Folge durch Festlegen eines Bildungsgesetzes erschaffen wird.

2. Abstrahieren und Generalisieren

Unser Denken ist auf das Bilden abstrakter Begriffe und Beziehungen und das Lernen von Allgemeinem aus.

> „Betrachten wir den einfachen Fall. Sie haben sicherlich in Ihrem Leben schon tausende Tomaten gesehen bzw. gegessen, können sich jedoch keineswegs an jede einzelne Tomate erinnern. Warum sollten Sie auch? Ihr Gehirn wäre voller Tomaten! Diese wären zudem völlig nutzlos, denn wenn Sie der nächsten Tomate begegnen, dann nützt Ihnen nur das, was Sie über *Tomaten im Allgemeinen* wissen, um mit dieser Tomate richtig umzugehen.". (Spitzer 2002, S. 75 f.)

Das Allgemeine als das „allen Gemeinsame“ ist notwendig abstrakt, denn Abstraktion bedeutet, Gegenstände bzw. Sachverhalte in einer bestimmten Hinsicht als gleich zu betrachten; dabei wird von als unwesentlich erachteten Merkmalen abgesehen und als wesentlich erachtete Merkmale werden hervorgehoben. Insofern gehören Abstrahieren und Generalisieren eng zusammen.

Algebra ist speziell darauf gerichtet, Allgemeinheit zu erfassen und zum Ausdruck zu bringen. Formeln beschreiben mit symbolischen Mitteln das allen Fällen der betrachteten Art Gemeinsame. So stellt zum Beispiel die Volumenformel für die Pyramide das für alle Pyramiden in gleicher Weise bestimmende Gefüge der Größen Grundkreisradius und Höhe dar.

3. Darstellen

Denken ist häufig auf Darstellungen angewiesen. Darstellungen (Sprache, Skizzen, Symbole) materialisieren Gedanken und machen sie zugänglich für die Sinne (R. Fischer 2003).

Die Algebra bedient sich besonderer Darstellungssysteme. Sie sind symbolisch, hoch konventionalisiert und regelgeleitet. Es sind formale Darstellungen, die es erlauben, inhaltsgebundene logische Schlüsse durch inhaltsinvariante symbolische Manipulationen zu ersetzen (Cohors-Fresenborg 2001). Dabei stehen Variable als uneigentliche Ausdrücke (Metonymien) für spezielle mathematische Objekte (Zahlen, Größen, …); man arbeitet mit ihnen „als ob“ sie Zahlen, Größen, … wären. Auf diese Weise wird die Allgemeinheit der Ausdrucksweise möglich.

4. Konstruieren

Denkinhalte beschreiben und strukturieren nicht nur die Realität, sie haben auch den Charakter von Entwürfen (Heidegger 1962). In Gedanken entwerfen wir, als was wir einen bestimmten Ausschnitt der Wirklichkeit betrachten wollen. Deshalb werden Begriffe, die Grundeinheiten des Denkens, als Konstrukte betrachtet.

Das Erkennen von Strukturen und Gesetzmäßigkeiten, die mit Mitteln der Algebra beschrieben werden, kann für sich bereits als konstruktive Tätigkeit gelten. Darüber hinaus können in der Algebra neue Objekte und Zusammenhänge symbolisch erschaffen werden. Das zeigen die folgenden Beispiele:

- $\sqrt{-1}$: Ein neues Objekt wird durch symbolische Repräsentation erzeugt (eine Form von Reifikation).

- Prinzip der Permanenz formaler Gesetze: Das Bedürfnis nach Fortführung bestehender Gesetze verleiht Ausdrücken wie $(-1)\cdot(-1)$ eine wohl bestimmte Bedeutung.
- Axiomatische Grundlegung algebraischer Strukturen: Ein mathematisches Gebiet wird zum Zweck des globalen Ordnens durch ein Regelsystem konstituiert. Das Verhältnis von Beschreiben und Definieren kippt um.

5. Argumentieren und Beweisen

Das Argumentieren und Begründen macht einen wesentlichen Teil menschlicher Rationalität aus, wenn wir unter Rationalität die Fähigkeit verstehen, Verfahren des begrifflichen und systematisch begründend oder kritisierend vorgehenden Denkens und Redens über Geltungsansprüche zu entwickeln und verfügbar zu haben. Der Beweis als schlüssige Argumentation für eine Aussage spielt in der Mathematik eine besondere Rolle.

In der Algebra können Deduktionen allein durch Umformungen vorgenommen werden. Die Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen durch geeignete Umformungsschritte mit Hilfe der quadratischen Ergänzung liefert Darstellung und Begründung zugleich. Das bedeutet, dass man mit Hilfe der algebraischen Formelsprache „Rezeptwissen“ und „Begründungswissen“ in Einem erzeugen kann; sie dient nicht nur dazu, bestimmte Probleme zu lösen, sondern auch dazu, die Allgemeingültigkeit der Lösungsverfahren zu demonstrieren (Krämer 1988, S. 71 f.).

Fazit

In der Algebra werden allgemeine Denkhandlungen in bestimmter Weise zugespitzt, idealisiert oder sogar radikalisiert, wenn radikal bedeutet: bis auf die Wurzel, bis zum Äußersten gehend.

Das mag ein Grund sein, warum Algebra einerseits so effizient, andererseits aber auch für Lernende zunächst fremd und schwer ist und warum sie die Einen durch ihre Klarheit besticht und für Andere zuweilen auch rätselhaft und bedrohlich bleibt.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E.: Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. In: Der Mathematikunterricht 47 (1), 2001, S. 5-13.

Fischer, R.: Reflektierte Mathematik für die Allgemeinheit. In: Hefendehl-Hebeker, L. & Hußmann, St. (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie. Festschrift für Norbert Knoche. – Hildesheim: Franzbecker 2003, S. 42 - 52.

Harel, G.: DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 40, 2008, 487–500.

Heidegger, M.: Die Frage nach dem Ding. Tübingen: Niemeyer 1962.

Kitcher, Ph.: The nature of mathematical knowledge. New York, Oxford: Oxford University Press 1984.

Krämer, S.: Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung im geschichtlichen Abriss. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1988.

Mittelstraß, J. (Hrsg.): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Band 1. A – G. Stuttgart, Weimar: Metzler, korr. Nachdruck 1995.

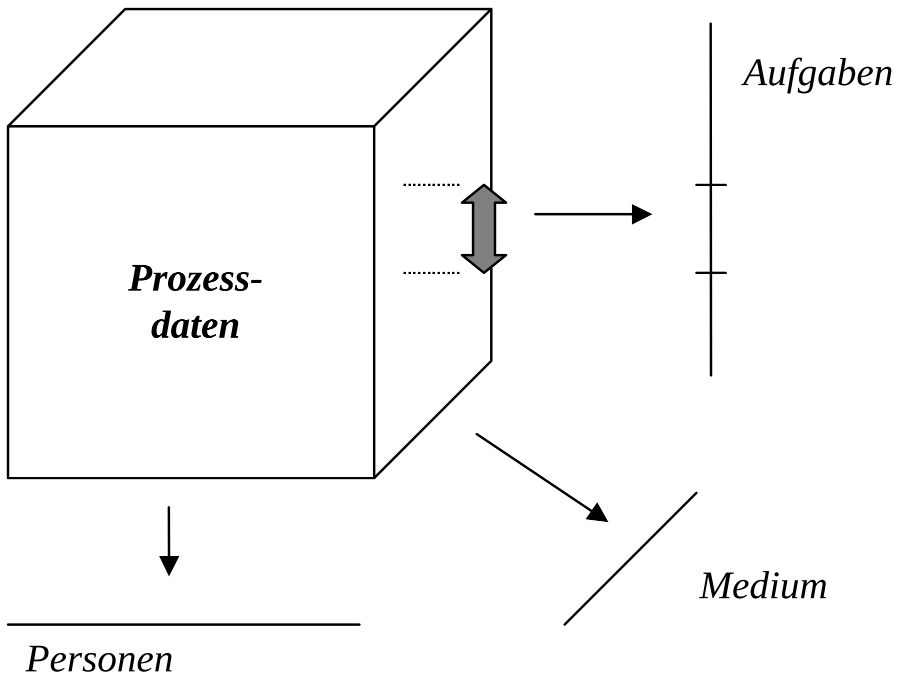
Spitzer, M.: Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens. Heidelberg, Berlin: Spektrum 2002. Lizenzsausgabe für die Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Wille, R.: Mensch und Mathematik, Logisches und mathematisches Denken. In: Lengnink, K. / Prediger, S. / Siebel, F. (Hrsg.): Mathematik und Mensch. Sichtweisen der allgemeinen Mathematik. Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft 2001, S. 141 - 160.

Thomas GAWLICK, Hannover

Moderierte Sektion: Empirische Untersuchungen zur Interaktion beim Problemlösen

Die Sektion berichtet über verschiedenen Phasen laufender hannoveraner Studien, deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede sich anhand der Struktur ihres Designs beschreiben lassen: Lerner aus einer Probandenmenge P bearbeiten Aufgaben aus einem Set A in einem Medium aus M, wobei Ergebnisse und Prozessdaten entstehen. Ordnet man jedem Prozess das erzeugende Tripel des Produktraums $P\times M\times A$ zu, erhält man eine Abbildung f des Datenraums D auf $P\times M\times A$, Untersucht wird, wie sich die Struktur der Fasern $f^{-1}(p,m,a)$ bei Projektion auf die Achsen P, M, A – also bei systematischer Variation dieser Parameter – ändert.



In den Studien von Gawlick und Köster besteht P aus Paaren von Schülern resp. Studenten, die Aufgaben zur Differentialrechnung bearbeiten ($|A|=4$), wobei M={Papier, DGS}. Gawlick berichtet über Design und Ergebnisse der Studien, während Köster die Auswertung im Detail erläutert.

Lange erläutert den strukturierten Aufbau von A für die geplante Untersuchung der Interaktion Hoch- und Normalbegabter beim Problemlösen. Die Rolle des Mediums spielen hier Polyas heuristische Strategien.

In beiden Fällen sind *Prozesse* der geeignete Untersuchungsgegenstand: Aus der Medienforschung ist seit Salomon (1978) bekannt, dass für die Bearbeitung *gleicher* Aufgaben *in unterschiedlichen* Medien bzgl. der Ergebnisse das „no significant difference phenomenon“ (Russell o.J.) gilt – möglich sind aber medienspezifische Arbeitsweisen.

Die Fragestellungen dazu sind analog wie beim Problemlösen:

- Wie gut wurde die Aufgabe gelöst?
- Mit welcher Strategie wurde sie bearbeitet?
- Welche Strategie war bei welchen Problemen erfolgreich?

Für Polyas Strategien scheint es hierzu keine Studien zu geben! Die Problemlöseforschung setzt dennoch (mit Detailfragen dazu) am Prozess an.

In Medien- und Problemlösestudien entsteht also das Problem des ***Prozessdatenvergleichs***: wie setzt man Prozesse aus verschiedenen Fasern von D in Beziehung? Obige Abbildung zeigt dies für den Fall der Bearbeitung verschiedener Aufgaben durch die gleichen Probanden im gleichen Medium. Ein solcher Vergleich kann qualitativ oder quantitativ erfolgen – beide Methoden haben spezifische Vor- und Nachteile:

	quantitativ	qualitativ
+	Lösung vom Kontext Leichter übertragbar: auf den *gesamten* Prozess, auf *andere* Prozesse, an andere *Auswerter*	Anbindung an Kontext Leichter interpretierbar
-	Zuordnung von Kategorien zu Bedeutungseinheiten	Repräsentativität/Vergleichbarkeit von Fällen oft unklar/fraglich

Ziel einer solchen Auswertung ist der Übergang „Vom Einzelfall zum Typus“ – *das* entscheidende Problem der qualitativen Sozialforschung, wie Kelle und Kluge im gleichnamigen Lehrbuch herausarbeiten. Köster zeigt, wie mit statistischen Mitteln Typen gebildet werden – deren Sinnhaftigkeit ist dann anhand von Transkriptausschnitten abzusichern. Die Variation längs der Achsen P, M, A erfolgt dabei qualitativ.

Lange sichert dagegen statistisch die Typizität der Probanden (normal- vs. hochbegabt). Die Interaktion der damit gebildeten Paare wird zunächst qualitativ untersucht werden – die Problembearbeitungsphasen und -strategien von Polya etc. lassen sich aber auch quantitativ auswerten.

Literatur

Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Tübingen: Francke.

Russel (o.J.): http://www.nosignificantdifference.org/

Salomon, G. (1978): On the future of media research. Educ. Comm.& Techn.,26, 37–46

Thomas GAWLICK, Hannover

Quantitative Methoden zum Prozessvergleich

Die Ausgangslage Vergleichsstudien zeigen, dass die Lernvoraussetzungen des tradierten SII-Curriculums zunehmend weniger erfüllt sind. Dies und die stärkere Akzentuierung inhaltsübergreifender und prozessbezogener Kompetenzen legen nahe, vermehrt heuristische und explorative Zugänge und leichter binnendifferenzierbare Arbeitsformen zu wählen.

DGS als heuristisches Werkzeug In der Differentialrechnung kann DGS als Experimentalumgebung dienen, ähnlich wie Modellbildungssysteme in der Physik. Möglich ist *ohne* Verwendung von Konstruktionsbefehlen:

D*ynamische Visualisierung:*	*Eigenständige Erkundung* :
– Einfluss von Parametern auf den Graphen einer Funktion,	– Finden einer Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften
– Ableitung als Änderungsrate und als Tangentensteigung,	– experimentelle Ableitungsbestimmung
– Mittelwertsatz	– geometrische Extremwerte

Vorteile von DGS gegenüber CAS sind bei der „neuen“ SII als Zielgruppe:

• die Verwendung von DGS erfordert nicht so viele formale Fähigkeiten,

• bei ausschließlicher Verwendung von Messen und Ziehen entsteht praktisch kein Einarbeitungsaufwand,

• die dynamische Variation gehorcht dem Prinzip der direkten Manipulation, so dass Änderungen in ihrem zeitlichen Verlauf erfahrbar werden,

• sie ist theoriegeleitet: Lernende können daher die Auswirkungen mathematischer Phänomene erfahren, ohne sie kalkülmäßig zu beherrschen.

DGS-Arbeitsblätter zum selbstständigen Lernen Es wurde eine Reihe von 14 Blättern für das Projekt SelMa erstellt. Ausgehend von einem „*verifizierenden Gebrauch*“ in bekannten Beispielen (Ableitung der Parabel) soll die „*instrumentelle Genese*“ durch das Einbeziehen heuristischer Techniken (Ableitung der Exponentialfunktion) vorangetrieben werden, um dann durch das Entdecken neuer Sachverhalte (Mitteltangente einer kubischen Funktion) einen „*epistemic value*“ im Sinne von Artigue (2001) in Form eines vertieften Verständnisses des Tangentenkonzepts zu realisieren. Zum Design der interaktiven Arbeitsblätter zur Differenzialrechnung[1] vgl. Gawlick (2003), eine Themenübersicht folgt umseitig.

---

[1] Download: www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/andereautoren/dgs/dgs2.htm

1. Der Grenzübergang vom Differenzen- zum Differenzialquotienten 1.1 Ableitung der Parabel 1.2 Ableitung der Exponentialfunktion 1.3 Ableitung der Logarithmusfunktion *2. Anwendungen der Differenzierbarkeit* 2.1 Modellierung eines Gleisanschlusses 2.2 Zur Herleitung der Kettenregel *3. Entdeckung von Tangenteneigenschaften* 3.1 Parabeltangenten 3.2 Mittelwertsatz	3.3 Mitteltangente 3.4 Polynome im Affenkasten *4. Extremwertaufgaben* 4.1 Glasscheibe 4.2 Claim abstecken *5. Kurvenscharen* 5.1 Die parabolisch gebrochene Scheibe 5.2 Die Helligkeitsverteilung einer Lampe 5.3 Quartiken

Studiendesign Vom Vf. wurden 7 Blätter in 3 Kursen am Oberstufenkolleg Bielefeld in Partnerarbeit erprobt, 4 davon wurden audiographiert. Sie wurden sowohl auf Papier als auch per DGS eingesetzt – das ursprüngliche „cross over design“ konnte allerdings aufgrund technischer Probleme nicht realisiert werden, sodass Köster (im Folgebeitrag) die Bearbeitungen mit denen von Lehramtsstudierenden kontrastierte.

Literatur Qualitative Studien (Hölzl 1994 etc.) zeigen einen DGS-Einfluss auf den Lernprozess: *einerseits* kommt es zu einer Erweiterung des Handlungsspielraums sowie zu einer erhöhten Aktivierung der Lernenden, *andererseits* zu epistemologischen Brüchen gegenüber der „statischen“ Begriffswelt, zu gesteigerten kognitiven Anforderungen und (aufgrund der Interaktivität) zum „degoaling“ (s.u.). Offen blieb dabei:

– Sind diese Phänomene DGS-spezifisch? (Keine Papier-Aufgaben!)

– Welche Rolle spielt die Auswahl der Probanden?

– Welche Rolle spielt das sehr offene Aufgabenformat?

Für die Beantwortung sind also *Vergleiche* von Lern*prozessen* notwendig! Dies leistet in dieser Studie das quantitative Design:

Fragestellungen der Untersuchung

1. In welcher Weise verändert sich generell die Arbeit durch DGS?
2. Regt die Beschäftigung mit bewegten Bildern vermehrt das Entstehen beweglicher innerer Bilder an?
3. Führt die Beschäftigung mit bewegten Bildern zu einer vertieften Auseinandersetzung mit theoretischen Aspekten?
4. Spielen bewegte Bilder eine Rolle beim Aufstellen und bei der Überprüfung von Vermutungen?
5. Ändert sich in der DGS-Umgebung der Materialbezug?
6. Kommt es in der DGS-Umgebung vermehrt zum „degoaling“?

Anregungen aus der Physikdidaktik Hucke (2000) untersuchte Handlungsregulation und Wissenserwerb in traditionellen und computergestützten Experimenten des physikalischen Anfängerpraktikums: Videographierte Experimente wurden in 30sec-Intervallen in Sprach- und Handlungskategorien eingeordnet. Er zeigte: Das traditionelle Praktikum ist für die Anwendung und den aktiven Erwerb physikalischen Wissens keine besonders geeignete Lernumgebung. Die Rahmenbedingungen sind so bestimmend, dass der Computereinsatz kaum Auswirkungen hat. Hucke forderte daher eine offenere Gestaltung der Lernumgebung. Entsprechend wurden hier nicht alle Arbeitsschritte vorgegeben! Wir haben in 10sec-Intervallen kategorisiert, allerdings nur Sprachäußerungen, da audiographiert wurde. Das Kategoriensystem wurde adaptiert aus dem „Beobachtungsschema zur Erfassung von Lernbedingungen: Facette 1B – Elaboration und Organisation von Inhalten“ aus Prenzel et al. (2001). Ergänzt wurde es um inhaltsspezifische Facetten 2 und 3 zur Beantwortung der Fragen 2-6:

Facette 1: Inhaltskategorien (disjunkt)

A: Aufwerfen von Fragen
B: Fragen zur Rechnerbedienung
W: Wiedergabe von Fakten
V: Vorstellungen
F: Feststellungen
O: Vorwissen
H: Vermutungen und Hypothesen
Ü: Überprüfen von Ideen und Hypothesen
S: Schlussfolgerungen und Begründungen
K: Koordination von Handlungen
X: Andere
- : Stille

Facette 2: Verknüpfungskategorien (nicht disjunkt)

G: Generalisierende Äußerung
L: Verknüpfung von Lerninhalten

Facette 3: Bezugskategorien (disjunkt)

T: Text der Aufgabenstellung
M: Material zur Veranschaulichung
U: Unbewegliche Innere Bilder
D: Dynamische Innere Bilder

Vorläufige Ergebnisse

1. Köster hat die Kategorien ausgezählt und statistisch untersucht. (Siehe Folgebeitrag. Nachfolgend wird auf dessen Tabelle Bezug genommen!)

2. Insgesamt nein. Bei 2 von 4 Paaren tritt Kategorie D bei DGS signifikant häufiger auf. Dies könnte auf eine typabhängige Varianz hindeuten.

3. Ja! Bei 3 von 4 Paaren tritt G bei DGS häufiger auf.

4. Insgesamt kommt nicht mehr H oder Ü bei DGS vor, auch die (nach Hucke gebildete) Dichte H/D ist insgesamt insignifikant. Bei 2 von 4 Paaren ist H/D größer bei DGS. Divergente Interpretationen sind möglich: sowohl „vertiefte Auseinandersetzung“ als auch erschwertes Arbeiten“!

5. Die Kategorie M tritt bei DGS signifikant häufiger auf.

6. In einer aktuell laufenden BA-Arbeit operationalisiert Dittmer anhand von Transkriptausschnitten den von Hölzl (1994) als „Abweichen vom Ziel“ aufgefassten Begriff „degoaling“ anhand der vom ihm angegebenen Originalquelle: „In so doing they do not necessarily learn those things that one might expect – but they still learn and they learn ideas which are functional for their projects.“ (Hoyles und Sutherland 1989, S.30) Davon ausgehend wird für (Teil-)Prozesse jeweils unterschieden, ob ein *neues Ziel* gesetzt, ob zusätzlich *Wissen erworben* und ob die *gestellte Aufgabe gelöst* wird. Von den entstehenden 8 Typen werden die ersten 4 (neues Ziel: ja) als Degoaling aufgefasst. Mit dieser provisorischen Definition ermitteltes Degoaling tritt erstaunlicher Weise bevorzugt in der Papierumgebung auf:

Umgebung	Häufigkeit	1	2	3	4	5	6	7	8
Papier	Absolute	1	0	1	2	1	1	13	2
	Relative	0,05	0	0,05	0,09	0,05	0,05	0,62	0,09
	Absolute	4				17			
	Relative	0,19				0,81			
Computer	Absolute	0	0	1	0	1	0	13	3
	Relative	0	0	0,05	0	0,05	0	0,72	0,17
	Absolute	1				17			
	Relative	0,06				0,94			

Diskussion Mehrere Resultate überraschen und verdienen ausführlichere Analyse – alle müssen jedenfalls in weiteren Studien an größeren Fallzahlen unter variierten Rahmenbedingungen abgesichert werden. Aber schon jetzt sei prognostiziert: dabei wird sich unser Bild von den DGS-Auswirkungen auf den Problembearbeitungsprozess deutlich verändern!

Literatur

Artigue, M. (2001): Learning Mathematics in a CAS Environment. Plenary Lecture, CAME 2. Utrecht: Freudenthal Institute

Gawlick, Th. (2003): DGS als Trägermedium für interaktive Arbeitsblätter in der Differentialrechnung. Bender, P. (Hrsg.): Lehr-Lernprogramme im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker

Hölzl, R. (1994): Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Weinheim: Dt. Studien-Verlag

Hoyles, C.; Sutherland, R. (1989): Logo in the Mathematics Classroom. London: Routledge.

Hucke, L: (2000): Handlungsregulation und Wissenserwerb in traditionellen und computergestützten Experimenten des physikalischen Praktikums. http://dspace.hrz.uni-dortmund.de:8080/handle/2003/2324

Prenzel et al. (2001): Erhebungs- und Auswertungsverfahren des DFG-Projekts „Lehr-Lern-Prozesse im Physikunterricht – eine Videostudie“. Kiel:IPN

Dennis KÖSTER, Studienseminar Celle

Ein Kategorienschema zur Analyse von Aussagen im MU

Welche Prozesse vollziehen sich eigentlich während der Bearbeitung von Aufgaben im Mathematikunterricht? Um diese Frage genauer zu untersuchen ist es hilfreich, Schüler bei der Arbeit zu beobachten. Doch nur eine Beobachtung alleine liefert im Allgemeinen nicht genügend Details, um konkrete Aussagen treffen zu können. In der Studie, auf die hier näher eingegangen wird, wurden die Bearbeitungen audiographisch festgehalten und mit einem Kategorienschema ausgewertet. Dieses soll zunächst vorgestellt werden, bevor dann die damit erzielten Ergebnisse der Studie präsentiert werden.

Das Kategorienschema

Basierend auf Ideen von Seidel (vgl. Prenzel 2001, S.65ff.) aus der Physikdidaktik wurde das Kategorienschema zur Anwendung im MU von Gawlick angepasst (vgl. vorheriger Beitrag). In drei Kodierungsschritten werden dabei stets drei Facetten der audiographierten Aussagen untersucht. Dazu wird das Audiomaterial in „10 Sekunden“-Intervalle zerlegt und die dort getätigten Aussagen im ersten Kodierungsschritt genau einer der zwölf Inhaltskategorien zugeordnet. In einem zweiten Schritt werden dann die beiden Facetten Verknüpfung und Bezug untersucht, wobei diese nur bei Bedarf angewendet werden (vgl. vorheriger Beitrag).

Damit die Zuordnung für spätere Arbeiten vergleichbar bleibt und die Disjunktheit der Inhaltskategorien gewährleistet wird, wurde ein ausführliches Kodierungshandbuch erstellt (vgl. Köster 2008, S.17ff.). In diesem wird für jede Kategorie genau erläutert, für welche Aussage sie zu wählen ist. Dabei dienen vor allem viele Beispiele als Richtlinie für spätere Kodierungen. Bei den seltenen Fällen, dass mehrere Kategorien in einem Intervall möglich waren, wurde stets die erste Aussage kodiert, da es sinnvoller ist, die Ursache zu erfassen als die Folgen. Aus diesem Grunde ist es auch verständlich, das Intervall möglichst klein zu halten, da man somit diesem Problem nicht allzu oft begegnet.

Auf die beschriebene Weise wird jede vorliegende Audiodatei untersucht und kodiert, so dass man als Ergebnis eine Statistik erhält, die weiter auszuwerten ist. Zu beachten ist jedoch bei der Anwendung des Kategorienschemas, dass nicht Aussagen gezählt werden, sondern Intervalle. Somit wird also ein Ergebnis wie etwa: „Es gibt bei der Bearbeitung am Computer mehr Hypothesen.“ niemals erreicht, da es auch vorkommen kann, dass das Formulieren einer Hypothese 30 Sekunden dauert und man somit für eine geäußerte Hypothese drei Zeitintervalle zählt.

Studiendesign

Zunächst war die Studie 2002 von Gawlick als eine Vergleichsstudie angelegt, bei der untersucht wird, welche Bearbeitungsverläufe bei Schülern bei der Bearbeitung von Arbeitsblättern im Analysisunterricht auftreten. Dabei wurde als Vergleichsebene das Medium variiert. Zum einen mussten die Schüler die Arbeitsblätter in der herkömmlichen Papier-und-Bleistift-Umgebung lösen, zum anderen wurden aber auch themenähnliche Aufgaben mit der DGS Euklid bearbeitet. Die Arbeiten wurden zur späteren Auswertung audiographiert.

In 2008 wurde diese Studie dann vom Vf. auf eine weitere Vergleichsebene erweitert. Dieselben Arbeitsblätter wurden nun von Studenten eines Mathematikdidaktik-Seminars bearbeitet. Dabei wurde vor allem darauf geachtet, dass die Versuchsumgebung genauso aufgebaut war, wie dies bei den Schülern der Fall war. Das bedeutet im Detail, dass jeweils zu zweit an den Arbeitsblättern gearbeitet wurde und die Probanden angehalten wurden ihre Erkenntnisse schriftlich festzuhalten (auch in der Computerumgebung). Somit standen neben den Audiodaten auch noch Verschriftlichungen für den Vergleich zur Verfügung.

Die Arbeitsblätter aus dem Bereich der Analysis wurden extra für diese Studie angefertigt[1]. Aus Zeitgründen wurden in 2008 nur die Arbeitsblätter 3.1, 3.3, 3.4 und 4.2 bearbeitet. Insbesondere bezieht sich die anschließende Auswertung nur auf die themenähnlichen Arbeitsblätter „Parabeltangenten" und „Mitteltangenten". Zu bedenken ist hierbei, dass jede Gruppe eines der beiden Arbeitsblätter mit der DGS und das andere in der Papierumgebung bearbeitet hat.

Resultate der Vergleichsstudie

Grundlage der Auswertung sind dabei zunächst einmal die Statistiken, die mit Hilfe des Kategorienschemas entstanden sind. Die Inhaltskategorien werden mit einem $k{\cdot}l$-χ^2-Test auf signifikante Unterschiede untersucht (vgl. Bortz 2005, S. 172). Die Kategorien wurden dann einzeln mit einer Konfigurationsfrequenzanalyse (kurz KFA) untersucht (vgl. Clauß 1995, S. 260ff.), da der $k{\cdot}l$-χ^2-Test in dieser Studie jeweils stark signifikante Unterschiede bei einem Signifikanzniveau von $\alpha=0.01$ in mindestens einer Merkmalsausprägung (hier die Kategorien) liefert. Die KFA ergibt dann schließ-

---

1 http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/andereautoren/dgs/dgs2.htm (Stand März 2009)

lich, welche der Kategorien verhältnismäßig häufig (Typ) oder selten (Antityp) auftreten.

Der Schüler-Studenten-Vergleich

		A	B	W	V	F	O	H	Ü	S	K	X	-	G	L	T	E	M	U	D
Schüler	%	14,0	1,5	6,8	7,4	6,3	2,5	3,2	4,8	2,8	10,5	20,6	19,6	3,4	2,7	4,4	12,3	18,4	2,6	1,7
Studenten	%	5,7	1,1	3,9	4,1	9,0	4,3	3,8	6,6	4,9	9,4	33,1	14,1	5,1	3,6	7,4	17,4	13,8	3,5	2,9

Aus der KFA für diese Statistik ergibt sich, dass die Kategorie „A“ (Aufwerfen von Fragen) als Typ und die Kategorie „X“ (Andere) als Antityp der Schülerbearbeitung statistisch gesichert werden können.

Das erhöhte Aufkommen der Kategorie „Fragen“ bei den Schülern bietet verschiedene Erklärungsmöglichkeiten. Zu allererst war sehr auffällig, dass die Schüler immer wieder Fragen an den Versuchsleiter (VL) richteten, wenn sie nicht weiter kamen. Obwohl die Blätter so konzipiert waren, dass die Inhalte selbstständig erarbeitet werden sollten, war festzustellen, dass die Schüler lieber nachfragten als per Trial-and-Error-Verfahren Lösungen auszuprobieren oder erst einmal zu überlegen. Andererseits wurden aber auch Fragen vom VL an die Schüler gestellt, um sie gezielt zu den Lösungen zu bringen, was damit zusammenhängt, dass die Schüler erwartungsgemäß thematisch mehr Probleme bei der Bearbeitung hatten als die Studenten. Insgesamt ist das erhöhte Aufkommen von „A“ also in der Kommunikation zwischen VL und Schülern erklärbar und das antitypische Aufkommen von „A“ bei den Studenten durch höheres Sachverständnis erklärbar.

Das antitypische Vorkommen von „X“ bei der Schülerbearbeitung ist eindeutig darauf zurückzuführen, dass die Schüler konzentrierter bei der Arbeit waren. Sie hatten fachlich größere Probleme, so dass sie sich permanent mit den Inhalten der Aufgaben beschäftigen mussten. Außerdem sprach eine Studentengruppe das Geschriebene laut aus, so dass hier die Erklärung des Typs zu finden ist, da hier immer „X“ kodiert wurde. Dies zeigt sich auch im erhöhten Auftreten der Bezugskategorie „E“.

Vergleich der beiden Lernumgebungen

		A	B	W	V	F	O	H	Ü	S	K	X	-	G	L	T	E	M	U	D
Computer	%	12,0	2,9	6,4	5,6	8,4	3,5	3,8	6,1	4,6	12,1	24,2	10,3	5,0	3,6	7,2	10,2	24,5	2,9	2,3
Papier	%	8,7	0,0	4,6	6,1	6,9	3,2	3,1	5,2	3,0	8,2	28,1	23,0	3,6	2,7	4,5	18,4	9,3	3,1	2,2

Nach einer Zusammenlegung der beiden Fragekategorien „A“ und „B“ zu „AB“ ergibt die KFA, dass „AB“ als Typ und die Kategorie „-“ (Stille) als Antityp in der Computerumgebung statistisch gesichert sind.

Das erhöhte Aufkommen der Kategorie Fragen in der DGS-Umgebung kann dadurch erklärt werden, dass ein Großteil der Fragen nun auch auf die Bedienung der Software gerichtet ist. Dabei geht es oft darum, Sachverhalte anschaulicher oder schneller darzustellen. Es besteht offensichtlich ein Interesse, mehr Funktionen der DGS zu verwenden, als ursprünglich veranlagt war.

Der Typ „Stille“ der Papierumgebung bietet zwei Erklärungsvarianten. Zum einen wird beim Zeichnen und Rechnen auf Papier wenig kommuniziert, obwohl die Aufgaben in Partnerarbeit zu absolvieren waren. Auch an den Aufzeichnungen der Probanden ließ sich erkennen, dass jeder für sich gearbeitet hat. Zum anderen kann man aber auch den Antityp „Stille“ in der DGS-Umgebung erklären. Da hier die Zeichnungen fertig und beweglich auf dem Monitor zu sehen waren, förderte dies offenbar die Kommunikation der Probanden. Dies zeigt sich auch in einem erhöhtem Aufkommen der Bezugskategorie Material „M“ (24,5% in der DGS- und 9,3% in der Papierumgebung). Ein solch deutlicher Unterschied zeigte sich in keiner anderen Bezugskategorie.

Fazit

Das verwendete Kategorienschema liefert sinnvolle Ergebnisse. Diese sind nicht nur in der statistischen Auswertung zu finden, sondern auch in der Strukturierung der Audiodaten, die damit einhergeht und weitere Forschungsfragen aufwerfen kann.

Die erhaltenen Ergebnisse der Vergleichsstudie zeigen grundlegende Unterschiede in den Bearbeitungen bei Schülern und Studenten, die sich nicht etwa in Kategorien wie Feststellungen oder Vorwissen manifestieren, sondern im Generieren von Fragen. Ganz deutlich zeigt sich außerdem, dass die DGS-Umgebung zu einer erhöhten Motivation zur Kommunikation bei den Probanden führt. Zurückzuführen ist dies auf das Sprechen über die vorliegenden beweglichen Bilder.

Literatur

Bortz, J. (2005). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*

Clauß, G. et al. (1995). *Statistik. Für Soziologen, Pädagogen, Psychologen und Mediziner*

Köster, D. (2008). *Vergleichende Analyse der Strukturen und Ergebnisse von Bearbeitungsverläufen ausgewählter Arbeitsblätter zum selbstständigen Lernen im Analysisunterricht.* (unveröffentlichte Examensarbeit, Leibniz Universität Hannover, IDMP)

Prenzel et al. (2001): *Erhebungs- und Auswertungsverfahren des DFG-Projekts „Lehr-Lern-Prozesse im Physikunterricht – eine Videostudie“*. Kiel:IPN

Diemut LANGE, Hannover

Auswahl von Aufgaben für eine explorative Studie zum Problemlösen

Im Folgenden wird eine Möglichkeit aufgezeigt, Aufgaben *für* eine Studie zusammenzustellen, d.h. aus einer Vielzahl von Aufgaben[1] diejenigen auszuwählen, die für die geplante Studie in Frage kommen und dabei gleichzeitig andere Aufgaben auszuschließen.

1. Die Studie

Ausgewählt werden sollten Aufgaben für eine explorative, hypothesengenerierende Studie zur Untersuchung von Problemlöse- und Interaktionsprozessen mathematisch verschieden begabter Fünftklässler. Die aufgrund zweier Eingangstests eingeladenen Fünftklässler hannoveraner Gymnasien sollten ohne jegliche äußere Intervention in Paaren in 45 bis 60 Minuten Aufgaben bearbeiten. Um anschließend eine annähernd objektive Auswertung zu ermöglichen, wurden die Aufgabenbearbeitungsprozesse mitprotokolliert und per Videokamera bzw. Diktiergerät aufgezeichnet.

Daraus leiten sich folgende studienspezifische Kriterien an die Auswahl ab:

- Die Vorkenntnisse zu Beginn der fünften Klasse (lt. Kerncurriculum) sollten für die Bearbeitung der Aufgaben ausreichen. Der Erwerb unbekannten mathematischen Wissens sollte nicht untersucht werden.
- Die Aufgaben sollten auch für mathematisch begabte Kinder eine "Problemhaltigkeit" bzw. "Problembarriere" (Dörner, 1979) beinhalten[2].
- Um Hypothesen hinsichtlich der Problemlöse- und Interaktionsprozesse mathematisch verschieden begabter Fünftklässler generieren zu können, sollten möglichst "vielfältige" Problemaufgaben ausgewählt werden. Die Kennzeichnung einer Aufgabenzusammenstellung als "vielfältig" setzt zum einen die Möglichkeit voraus, Aufgaben hinsichtlich bestimmter Merkmale charakterisieren zu können. Zum anderen beinhaltet eine solche Kennzeichnung die Möglichkeit, zwei Aufgaben hinsichtlich eines bestimmten Merkmals als vergleichbar oder als verschieden anzusehen.

Die Vagheit der Formulierungen ("Problemhaltigkeit"; "Vielfältigkeit") erschwert die Operationalisierung der Kriterien für die Aufgabenauswahl. Um die Aufgabenauswahl so weit wie möglich nachvollziehbar und repro-

---

[1] Als Quellen für Aufgaben kamen für diese Studie Aufgabensammlungen und Knobelbücher, Wettbewerbe und Olympiaden in Frage. Weitere Anregungen boten Aufgaben, die an mathematisch begabten Kindern erprobt sowie Aufgaben, die für andere empirische Untersuchungen zum mathematischen Problemlösen ausgewählt wurden.

[2] In Folgenden werde ich von Problemaufgaben sprechen.

duzierbar zu machen, sollen diese vage formulierten Kriterien im Folgenden weiter präzisiert werden.

2. Präzisierung der studienspezifischen Kriterien

Die Kennzeichnung einer Aufgabenzusammenstellung als "vielfältig" setzt eine Beschreibungsmöglichkeit von Problemaufgaben voraus. Auf der Grundlage bereits existierender Klassifikationen stellt Neubrand (2002) ein umfassendes, eigenes Klassifikationsschema für mathematische Aufgaben zusammen, das m.E. eingeschränkt auch auf die für diese Studie zur Auswahl stehenden Problemaufgaben angewandt werden kann.

Unter den "in einer Aufgabe niedergelegten objektiven Kennzeichen" bzw. dem "Potential einer Aufgabe" (S. 91) versteht Neubrand (2002) diejenigen Aufgabenmerkmale, "die ein Experte beim Beurteilen und Lösen der Aufgabe einschätzen kann" (S. 138). Bezogen auf die für diese Studie in Frage kommenden Aufgaben kann auf diese Weise das *Stoffgebiet*, der *Problemlösecharakter* sowie das *heuristische Potential* der Aufgaben eingeschätzt und zur Kennzeichnung der Aufgabenvielfalt herangezogen werden. Dazu ein für die Studie ausgewähltes Aufgabenbeispiel:

2.1 Kennzeichnung eines Aufgabenbeispiels

Bei der folgenden Kombinatorikaufgabe[3] soll aus der Quadratanordnung auf einem Schachbrett auf die Gesamtzahl der vorhandenen Quadrate geschlossen werden.

Ach ja, das Schachbrett...

Peter spielt leidenschaftlich gerne Schach. Er spielt so gerne Schach, dass seine Gedanken auch dann um das Spiel kreisen, wenn er gerade gar nicht spielt.

Neulich stellte er sich die Frage, wie viele Quadrate wohl auf einem Schachbrett zu finden sind.

Versucht, Peters Frage zu beantworten!

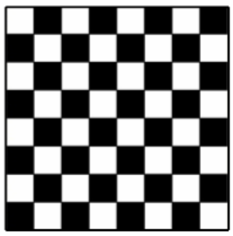


Abb. 1: Die Schachbrettaufgabe [Quelle: Mason et al., 2006]

Demzufolge ist der Anfangszustand der Aufgabe vorgegeben, nicht jedoch der Zielzustand und der Weg, diesen zu erreichen. Bruder (2000) spricht in diesem Fall von einer "Problemaufgabe". Je nachdem, ob Voraussetzungen, der Lösungsweg oder zu berechnende Werte bekannt, genannt, bereits vorgegeben sind oder nicht, unterscheidet Bruder (2000) acht verschiedene

[3] Da die ausgewählten Aufgaben mit den Vorkenntnissen zu Beginn der fünften Klasse lösbar sein sollten, kamen die folgenden *mathemat. Stoffgebiete* für die Aufgabenauswahl in Frage: Geometrie, Zahlentheorie (mit Arithmetik), Logik, Mengenlehre und Diskrete Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie).

Aufgabenarten, d.h. Möglichkeiten, den *Problemlösecharakter* einer Aufgabe zu beschreiben. Da in der Studie Problemlöseprozesse untersucht werden, die Aufgaben jedoch innerhalb von 45 bis 60 Minuten von Fünftklässler lösbar sein sollten, schienen im Rahmen der Studie lediglich drei Aufgabenarten mittleren Offenheitsgrades (vgl. Leuders, 2003) geeignet[4].

Die Schachbrettaufgabe kann unter Verwendung unterschiedlicher heuristischer Strategien gelöst werden: Zum einen ist ein vorwärtsgerichtetes, auf die Gesamtfigur schließendes Vorgehen, zum anderen ein rückwärtsgerichtetes, von der Gesamtfigur ausgehendes Vorgehen denkbar[5].

Bruder (2000) zählt neben Strategien (Vorwärts-, Rückwärtsarbeiten, Suche nach Mustern) auch Prinzipien und Hilfsmittel zu den *Heurismen*. Diese sind i. A. jedoch an die Strategien gekoppelt[6], so dass die Strategien als Grundlage dafür genommen werden können, ob zwei Lösungsprozesse ein und derselben Aufgabe hinsichtlich der verwendeten Heurismen miteinander vergleichbar oder voneinander zu unterscheiden sind[7].

2.2 Kennzeichnung der Aufgabenvielfalt

Dementsprechend können zwei verschiedene Aufgaben dann als unterschiedlich betrachtet und voneinander abgegrenzt werden, wenn sie sich

- verschiedenen *mathematischen Stoffgebieten* zuordnen lassen **und/oder**
- verschiedenen *Problemlösecharakteren* zuordnen lassen **und/oder**
- mit Hilfe verschiedener *heuristischer Strategien* lösen lassen

Die folgende Tabelle lässt die Vielfalt der für die Studie ausgewählten Aufgaben[8] erkennen. Zudem gibt sie Aufschluss über mögliche Aufgabengruppierungen: Beispielsweise können die Problemlöseprozesse aller Kombinatorikaufgaben (in Abb. 3 **schwarz gestrichelt** markiert) bzw. die Prozesse der Aufgaben, die mit Hilfe der Strategien Vorwärtsarbeiten und Suche nach Mustern gelöst wurden (**schwarz** markiert) miteinander verglichen und Prozessen anderer Aufgaben gegenübergestellt werden[9].

---

[4] Für die Auswahl geeignet erschienen die Aufgabenarten "Begründungs- oder Beweisaufgabe bzw. Strategiefindungsaufgabe", "Problemaufgabe" und "Umkehrung einer Problemaufgabe" (Bruder, 2000).

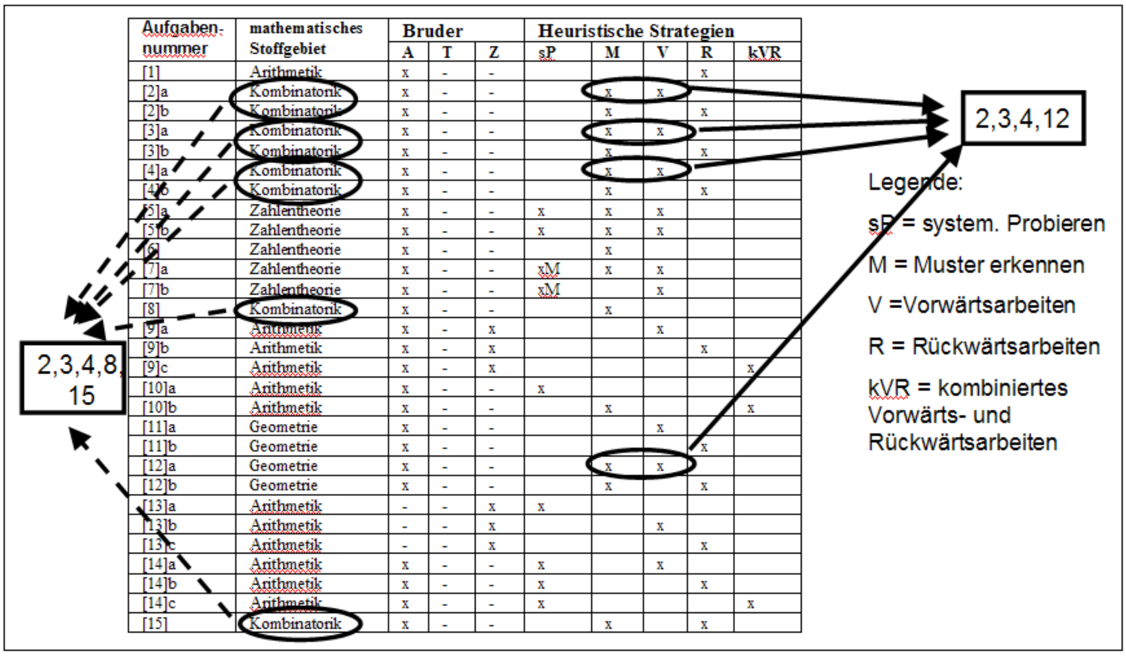
[5] s. Langfassung: www.idmp.uni-hannover.de/lange/downloads/

[6] Bei der Schachbrettaufgabe kann beim Vorwärtsarbeiten das Rückführungsprinzip, beim Rückwärtsarbeiten das Symmetrieprinzip ausgemacht werden.

[7] Hier liegt die Annahme zugrunde, dass zwei Problemlöse- bzw. Interaktionsprozesse nicht miteinander verglichen werden können, sofern die Schülerpaare die Aufgabe auf "unterschiedliche" Weise lösen.

[8] Die Schachbrettaufgabe ist in der Tabelle als Aufgabe [2] dargestellt. Der Zusatz "a" und "b" bezieht sich auf die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten (vgl. Kategorisierung der heurist. Strategien).

[9] An dieser Stelle wird eine systematische Variation des Aufgabenparameters vorgenommen (vgl. Einleitungstext von Th. Gawlick zu dieser moderierten Sektion).



Aufgaben-nummer	mathematisches Stoffgebiet	Bruder			Heuristische Strategien				
		A	T	Z	sP	M	V	R	kVR
[1]	Arithmetik	x	-	-				x	
[2]a	Kombinatorik	x	-	-		x	x		
[2]b	Kombinatorik	x	-	-		x		x	
[3]a	Kombinatorik	x	-	-		x	x		
[3]b	Kombinatorik	x	-	-		x		x	
[4]a	Kombinatorik	x	-	-		x	x		
[4]b	Kombinatorik	x	-	-		x		x	
[5]a	Zahlentheorie	x	-	-	x	x	x		
[5]b	Zahlentheorie	x	-	-	x	x	x		
[6]	Zahlentheorie	x	-	-		x			
[7]a	Zahlentheorie	x	-	-	xM	x	x		
[7]b	Zahlentheorie	x	-	-	xM		x		
[8]	Kombinatorik	x	-	-		x			
[9]a	Arithmetik	x	-	x			x		
[9]b	Arithmetik	x	-	x				x	
[9]c	Arithmetik	x	-	x					x
[10]a	Arithmetik	x	-	-	x				
[10]b	Arithmetik	x	-	-		x			x
[11]a	Geometrie	x	-	-			x		
[11]b	Geometrie	x	-	-				x	
[12]a	Geometrie	x	-	-		x	x		
[12]b	Geometrie	x	-	-		x		x	
[13]a	Arithmetik	-	-	x	x				
[13]b	Arithmetik	-	-	x			x		
[13]c	Arithmetik	-	-	x				x	
[14]a	Arithmetik	x	-	-	x		x		
[14]b	Arithmetik	x	-	-	x			x	
[14]c	Arithmetik	x	-	-	x				x
[15]	Kombinatorik	x	-	-		x		x	

Abb. 3: Klassifikation von 15 der insgesamt 26 für die Studie ausgewählten Aufgaben

3. Zwei abschließende Bemerkungen

Die auf diese Weise gekennzeichnete "Vielfalt" einer Aufgabenzusammenstellung bezieht sich auf die Einschätzung des Aufgabenpotentials durch Experten im Vorfeld einer Aufgabenbearbeitung (vgl. Neubrand, 2002). Inwiefern die an der Studie teilnehmenden Fünftklässler etwa die heuristischen Strategien der Experten angewandt haben, muss geprüft werden.

Die vorgenommene Kennzeichnung der Aufgaben berücksichtigt die Anlage dieser Studie. Sollten beispielsweise keine Problemaufgaben zur Auswahl stehen oder die Aufgaben nicht für eine explorative Studie ausgewählt werden, müsste das beschriebene Vorgehen geeignet modifiziert werden.

Literatur

Bruder, R. (2000): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In: Flade, L. & Herget, W. (Hrsg.): *Lehren und Lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen*, (S. 69-78), Berlin: Volk und Wissen Verlag.

Leuders, T. (2003): Problemlösen. In: Leuders, T. (Hrsg.): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, (S. 119-135), Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2006): *Mathematisch denken. Mathematik ist keine Hexerei*, 4. überarbeitete Auflage, München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

Neubrand, J. (2002): *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*, Hildesheim: Franzbecker.

Gert KADUNZ, Klagenfurt

Moderierte Sektion: Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik

Der gleichnamige GDM-Arbeitskreis konzentriert sich seit seiner Gründung im Jahr 2000 auf die Mathematikdidaktik vor allem unter dem Aspekt der (Re)Präsentation von Mathematik. In diesem Sinne folgt er der Vorstellung, dass sich die Mathematik mehr auf Zeichen als auf Dinge richtet. Lernen von Mathematik bedeutet auch immer, sich zu überlegen, für welche Handlungen die Zeichen der Mathematik stehen und in welchen Kontext diese einzubetten sind. So bedeutet es, Mathematik zu „verstehen", den Blick auf die verwendeten Zeichen zu richten und ihnen ihre Rolle als Mittel der Veranschaulichung, der Kommunikation und der (Re)präsentation von Wissen beizumessen.

Alle in dieser selbstmoderierten Sektion angebotenen Beiträge folgen in eigener Weise dieser Sicht auf das Lernen und Lehren von Mathematik.

Beginnen wir mit dem Beitrag von Frau Melanie Huth. Sie nennt ihn „Redebegleitende Gestik in mathematischen Kindergesprächen". Ganz im Sinne des eben erwähnten Blickes auf Zeichen als Mittel der Kommunikation stellt sie in ihren Untersuchungen zur gesprochenen Sprache die fast jede Rede begleitende Gestik in das Zentrum ihrer Untersuchungen. Diese Begleitung findet sich auch, wenn junge Lernende über mathematische Inhalte verbal kommunizieren. Die Untersuchung des Sprachsystems der Mathematik Lernenden wird auf diese Weise um die Gestik erweitert.

Die Erläuterungen von Frau Rose Vogel, die thematisch an jene von Frau Huth anschließen, richten das Augenmerk auf Tandemgespräche von Kindern zu mathematischen Fragestellungen. Insofern sind es also wieder die sprachlichen Zeichen als Mittel der Kommunikation, die untersucht werden. Frau Vogel geht dabei von zwei Positionen aus. Das Gespräch mit einem zweiten Lernenden eröffnet Lernenden die Möglichkeit einer intensiven Auseinandersetzung mit dem jeweiligen mathematischen Inhalt. Andererseits bietet die Beobachtung einer solchen Kommunikationsform der Mathematikdidaktikerin (Lehrerin) die Möglichkeit, über die gehörte Sprache und die sichtbaren Handlungen auf die von den Lernenden verwendeten mathematischen Konzepte zu schließen.

Mit einer anderen Fragestellung nähert sich Frau Barbara Schmidt-Thieme dem Verhältnis von Sprache und Mathematikdidaktik. Bei der Beschreibung der Qualität von Unterricht verwenden Lernende gerne die Beschreibung „Mein Lehrer kann gut erklären". Unter diesem Motto beleuchtet

Frau Schmidt-Thieme in ihrem Beitrag zum „Erklären als fachspezifische Kompetenz in fächerübergreifender Perspektive“ die Erklärkompetenz. Blickt man in den Unterricht, so ortet Frau Schmidt-Thieme dort Erklärmuster von Lehrerinnen, die sich an der eigenen Schulerfahrung orientieren. Dem gegenüber wird nun versucht, „gutes Erklären“ im Sinne eines erfolgreichen Erklärens als gelungene Lehrerinnen-Schüler Kommunikation von einem sprachtheoretischen Ansatz aus zu beschreiben und daraus gewonnene Erkenntnisse auf andere Fächer zu erweitern.

Diese hier knapp angemerkten Beiträge repräsentieren den sprachtheoretischen Teil der selbstmoderierten Sektion. In meinem Beitrag „Diagramm und Algorithmus“ kommt nun die Verwendung von jenen Zeichen zum Zug, die wir auf Papier, an die Tafel oder am Computerbildschirm schreiben und dort auch sehen. Es sind die Diagramme, mit denen auf experimentelle Weise eine elementare Aufgabe der Raumgeometrie bearbeitet wird. Dies wird vorgestellt. Gleichzeitig schlägt dieser Beitrag aber auch die Brücke zu den bisherigen an Sprache orientierten Ansätzen. Aus Experimenten mit den Diagrammen – Zeichen, die Regeln folgend konstruiert und verwendet werden – entsteht die sprachliche Beschreibung eines Lösungsweges, welche zuletzt in Form eines Algorithmus von einem Computer abgearbeitet wird.

Geschriebene Zeichen und gesprochene Sprache ergänzen einander beim Lernen von Mathematik.

Melanie HUTH, Frankfurt am Main

Redebegleitende Gestik in mathematischen Kindergesprächen

1. Einleitung

In allen Sprachen der Welt nutzen Sprecher Gestik als bedeutsames und variantenreiches Sprachphänomen (Goldin-Meadow 2005, 19). In der aktuellen Gesprächsforschung, in der die Lautsprache und die dabei spontan-intuitiv geäußerte Gestik als ein gemeinsames und integratives Sprachsystem gelten, gewinnt daher die Analyse beider kommunikativen Modi (Lautsprache und Gestik) an Bedeutung. Im folgenden Beitrag soll die redebegleitende Gestik in mathematischen Kindergesprächen als bedeutungsvoller Bestandteil in diesen kommunikativen Aushandlungsprozessen in den Blick genommen werden.

2. Theoretische Rahmung

Gestik kann als topologisch, mehrdeutig und visuell wahrnehmbarer Ausdruck durch Bewegungen der Arme- und Hände beschrieben werden. Eine differenzierte Definition dieser gestischen Bewegungen in Abgrenzung zur Manipulation an Objekten oder Personen (vgl. Givry/Roth 2006, Goldin-Meadow 2005) erscheint mit Blick auf mathematische Gespräche unter Lernenden sinnvoll. Es gibt verschiedene Gestik-Kategoriensysteme, die in der Analyse häufig aber zu einer mehrdeutigen Zuordnung führen können. Kendon's Kontinuum (vgl. McNeill 2005, 5ff) reicht von sprachbegleitenden Gesten bis zu Gebärdensprachen, von linguistisch unsystematisch zu systematisch:

Gestikulation/ Gesten	**„language-like“ Gesten**	Pantomime	Embleme	Gebärdensprachen

Bedeutsam für das beschriebene Forschungsvorhaben sind hier insbesondere die beiden ersten Kategorien: spontan geäußerte redebegleitende Gesten und Gesten, die anstelle eines Wortes vom Sprecher produziert werden.

McNeill (2005) beschreibt zudem vier Kategorien von Gestik: *Ikonische Gesten* (verweisen auf konkrete Objekte), *metaphorische Gesten* (verweisen auf abstrakte Objekte/Vorstellungen), *deiktische Gesten* (Zeigegesten) und *beat Gesten* (Betonung Sprachrhythmus) (vgl. McNeill 2005, 38f). Cadoz (1996) (vgl. Mulder 1996) unterteilt demgegenüber nach den Funktionen von Gesten: *Semiotic hand movements* (Kommunikation kulturell bedeutsamer Erfahrungen), *epistemic hand movements* (taktile Erschließung der Welt) und *ergotic hand movements* (Kreierung von Artefakten).

Die Bedeutung von Gestik im (mathematischen) Lernprozess basiert auf verschiedenen theoretischen Ansätzen. Goldin-Meadow (2005) beschreibt

Gestik als Möglichkeit, Zugang zu den mentalen Repräsentationen des Sprechers über die emotionale Ebene hinaus zu erhalten (Gestik als Fenster zum Denken). Aus ihren Untersuchungen entwickelt Goldin-Meadow die Theorie der *matches* (Lautsprache und Gestik drücken überschneidende Informationen aus) und *mismatches* (Lautsprache und Gestik drücken kontextbezogen verschiedene Informationen aus) (vgl. Goldin-Meadow 2005, 25). Besonders letztere scheinen in Bezug auf Übergänge im Lernprozess interessant: „Mismatches marks a child as being open to instruction, and thus on the precipice of learning.“ (Goldin-Meadow 2005, 40) Givry/Roths (2006) Erkenntnisse knüpfen an Annahmen bezüglich verdichteter Lernmöglichkeiten bei *mismatches* an. Beide Autoren vermuten vor allem in Bezug auf die Ausbildung einer an der jeweiligen Fachkultur orientierten Sprache eine vorbereitende Funktion von Gestik. In ihren Analysen betrachten sie Lautsprache, Gestik und die Struktur der Situation, auch in Bezug auf Konzeptentwicklung (vgl. Givry/Roth 2006). Radford (2006) erweitert mit seinem materiellen und multimodalen Ansatz den Blick auf Gestik als ein genuiner Bestandteil des Denkens. Er betont die kognitive Rolle von Gesten, insbesondere bezüglich mathematischen Lernens. In der sozialen Praxis entfalten sich multimodale sinnliche Aspekte des Denkens. Gestik ist dabei der individuelle Versuch, mit abstrakten kulturellen Ideen der Umwelt umzugehen (vgl. Radford 2006, 107ff).

Aus den ausgewählten theoretischen Ausführungen ergeben sich die relevanten Forschungsfragen, die im folgenden Beispiel in einer ersten Annäherung betrachtet werden sollen: In welchem Zusammenhang steht die in mathematischen Kindergesprächen genutzte Gestik mit der genutzten verbalen Sprache in Bezug auf die mathematischen / individuellen Konzepte der Kinder? Welche Funktion hat Gestik für die Ausbildung einer an der Mathematik orientierten Sprache?

3. Untersuchungsdesign

In der geplanten Untersuchung sollen Kindertandems außerhalb des Regelunterrichts ein von einem Erwachsenen präsentiertes und ihnen möglichst unbekanntes mathematisches Problem lösen. Für die Aufgabengestaltung werden drei mathematische Bereiche ausgewählt (Kombinatorik, Geometrie, Größen), um ein geeignetes Spektrum abbilden zu können. Die mathematischen Gesprächssituationen werden videografiert, transkribiert und zunächst mit einer „gesture-by-gesture“ bzw. turn-by-turn-Analyse ausgewertet. Es erfolgen zwei Analyseschritte: 1) Gestenanalyse: Aufstellen von Deutungsalternativen und 2) Lautsprachenanalyse: Evaluation gefundener Deutungsalternativen der Gesten. Eine Trennung von Gesten und Lautsprache in der Analyse erscheint trotz integrativem Sprachsystem sinnvoll:

Gestik kann zunächst ohne Betrachtung der Lautsprache anhand des Transkripts intensiv nachvollzogen werden, um der Gefahr einer dominanten Betrachtung der verbalen Äußerungen entgegenzuwirken. Als Analysegrundlage dient die unten aufgeführte Transkriptpartitur (vgl. Sager 2005). Äußerungen werden in Form einer gestischen (gs) und verbalen Zeile (vb) notiert und durch eine möglichst objektive Beschreibung der produzierten Gesten mit Verweis zu den Signifikanzpunkten der Geste ergänzt. Die Signifikanzpunkte der Gesten ergeben sich aus den angenommenen drei Phasen einer Geste nach Kendon (1980): *Anfangspunkt (°)*, *Kern* der Geste mit einem oder mehreren kommunikativ bedeutungsvollen Signifikanzpunkt(en) (1, 2, …) und *Endpunkt (°)* der Geste.

4. Jakob und Claus bei einer Kombinatorikaufgabe – Erste Analyse und Erkenntnisse anhand eines Beispiels aus der Vorstudie

Transkriptausschnitt

J [gs] **J [vb]**	°------1----2---3.--- und des geht jetzt (.)	Jakob startet mit den Händen mittig neben den Kärtchenreihen, Handrücken nach oben (Afp), zeigt dann mit beiden Zeigefingern auf 3. Reihe (Sfp1), dann mit rechtem Zeigefinger auf 1. Reihe, linker Zeigefinger bleibt auf 3. Reihe (Sfp2), beide Zeigefinger werden in Richtung jeweils der 1. Position beider Reihen geführt, kurz fixiert (Sfp3)
J [gs] **J [vb]**	---------------4~------------5.---- weil die weißen sin ja gleich	Jakob zeigt mit linkem Zeigefinger auf 1. Position in 3. Reihe (Sfp4), mit rechtem Zeigefinger auf 1. Position in 1. Reihe, zeigt dann kurz die Handflächen (Sfp5), fixiert die Geste
J [gs] **J [vb]**	------6~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ un des is ja umgetauscht	Jakob zeigt mit beiden Zeigefingern auf 2. und 3. Position in 3. Reihe (Sfp 6) und tippt dann hin und her zwischen den beiden Reihen 1 und 3 und den jeweiligen Positionen 2 und 3 mit den Zeigefingern beider Hände in der Luft
J [gs] **J [vb]**	-----------7-----8---° un des **geht** dann	Jakob bewegt seine Hände Richtung seines Oberkörpers mit den Handrücken nach oben und öffnet die Hände durch eine Drehung nach oben in zwei Stufen (Sfp7), zeigt schließlich die Handflächen (Sfp8); die Geste endet mit dem Ablegen der Hände jeweils links und rechts neben den untersten beiden Reihen, Handrücken oben

Mathematisch geht es im ausgewählten Transkriptausschnitt um die Anzahl der Permutation von n (hier n = 3) Elementen (n!). Alle sechs Permutationen (hier mit drei Tierfiguren, aus denen Reihen gebildet werden) haben die Erstklässler bereits mit Plastikfiguren gestellt und mit Kärtchen vor sich auf dem Tisch nachgelegt. In Jakobs Erklärung (s. Transkript) sind vor allem die erste (weißer Tiger-W, brauner Tiger-B, Elefant-E) und die dritte Reihe (W, E, B) relevant.

Jakob deutet auf die kommunikativ relevanten Reihen und jeweiligen Positionen innerhalb der Reihen mit *deiktischen Gesten*. Er wählt zur Erklärung vergleichbare Reihen mit W auf der ersten Position, die sich in der zweiten und dritten Position unterscheiden. Dieses gestische Verweisen auf kommunikativ relevante Aspekte deutet auf *semiotic hand movements* hin. Es werden Relationen zwischen den Reihen hergestellt und gestisch individuelle Vorstellungen von Permutationen bzw. Vertauschungen ausgedrückt (z.B. hin und her Tippen zwischen Positionen). Verbal werden Abstraktionen geäußert („die weißen sin ja gleich“). Gleichheit wird zusätzlich gestisch metaphorisch durch das Zeigen beider Handflächen ausgedrückt. Eine bestimmte Reihenfolge wird innerhalb dieser ersten Erklärung mit „des“ und einer Zeigegeste ausgedrückt, wobei gestisch bereits deutlich wird, was Jakob unter einer Reihe versteht: verschiedene aufeinander folgende Positionen. Diese werden für ihn beim Vergleich von Reihen relevant.

Im weiteren Verlauf der Situation nimmt Jakob sowohl verbal als auch gestisch Variationen in seinen weiteren Erklärungen vor: Reihenfolgen gestikuliert er nun z.B. nicht mehr durch Tippen auf die Positionen, sondern eine konstante Handbewegung mit beiden Händen nach außen über den Reihen. Er bezeichnet diese zudem als „Reihenfolge“. Die gestischen wie auch verbalen Ausdrücke verweisen auf sich aufbauende und bestehende mathematische Konzepte, deren nähere Untersuchung in der zukünftigen Forschungsarbeit relevant wird. Ebenso deuten sich hier erste Veränderungen in Bezug auf den Aufbau eines mathematisch passenden Vokabulars an. Schwierig gestaltet sich zum jetzigen Zeitpunkt die Analyse von *matches* und *mismatches*. Dies deutet möglicherweise auf eine anzustrebende Differenzierung der beiden Kategorien hin, die sich für die weitere Forschungsarbeit als ein interessanter Ansatz zur differenzierteren Analyse erweist.

Literatur

Goldin-Meadow, S. (2005). *Hearing Gesture. How our hands help us to think*. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.

Givry, D., Roth, W.-M. (2006). Toward a New Conception of Conceptions: ‚Interplay of Talk, Gestures, and Structures in the Setting. Online publiziert in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com) [30.03.09].

McNeill, D. (2005). *Gesture & Thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Mulder, A. (1996). Hand Gestures for HCI. *Hand Centered Studies of Human Movement Project. Technical Report*, 1-96. Online publiziert, Simon Fraser Uiversity (www.xspasm.com/x/sfu/vmi/HCI-gestures.htm) [30.03.09].

Radford, L. (2006). Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 103-129.

Sager (2005). Ein System zur Beschreibung von Gestik. *Osnabrücker Beiträge zur Sprachtheorie, 70*, 19-47.

Barbara SCHMIDT-THIEME, Hildesheim

Erklären als fachspezifische Kompetenz in fächerübergreifender Perspektive

1. Mathematik erklären

Was man von Mathematik als Außenstehender – etwa in Büchern - sieht, scheint ein logisches Gebäude zu sein, themenweise axiomatisch aufgebaut; dies spiegelt sich wieder in einer strengen formalen Textgestaltung in Definition, Satz und Beweis. Also: In der Sicht von außen erklärt Mathematik die Welt, Bücher erklären was, warum und wie.

Das ist allerdings nur das fertige Produkt eine langen kulturell und menschlich geprägten Entwicklungslinie der Mathematik. Doch Entstehung und Erkenntnis laufen anders. Der Beweis z. B. ist nur das sichtbare Produkt mathematischer Tätigkeit, er ist ein "offizieller Abschluss eines komplexen Suchprozesses" (144), in ihm wird "individuell Gewusstes in eine standardisierte Form" gebracht (163), "subjektive Gewissheit in Sicherheit überführt" (169) (Heintz 2000). Also: In der Innensicht erklären Mathematiker sich (gegenseitig) Mathematik, Mathematik ist sowohl Produkt wie Prozess.

In Überlegungen zum Mathematikunterricht lag lange Zeit ein starkes Gewicht auf der Sichtweise Mathematik als Produkt. Zwei Änderungen kennzeichnen die diesbezügliche Beschäftigung in der Mathematikdidaktik im vergangenen Jahrzehnt: (1) die Outputorientierung und daraus folgend die Formulierung von Kompetenzen; (2) die explizite Formulierung allgemeiner mathematischer Kompetenzen, welche den Prozess mathematischen Arbeitens widerspiegeln (s. Bescherer 2005). Gründen lässt sich dies auf das konstruktivistische Paradigma in der Mathematikdidaktik: Ein Mathematiklernender macht idealiter dasselbe wie ein Mathematiker; der Schüler als lernendes Individuum konstruiert (sein) mathematisches Wissen. So wird (im Nachvollzug der Entwicklung) aus Definition/Satz/Beweis definieren/behaupten/beweisen, aus dem Produkt ein Prozess.
Zwei Grundformen des Erklärens treten im Mathematikunterricht auf: (a) ein Wissender erklärt Unwissenden einen für sie neuen Sachverhalt; (b) Unwissende erarbeiten sich einen neuen Sachverhalt – sie erklären also sich selbst-, werden in diesem Prozess aber durch Materialien oder Tipps gesteuert. In der Schule erklären Schüler also als lernende Individuen sich untereinander Mathematik, aber auch der Lehrer erklärt mathematische Inhalte.

2. Erklärtypen in der Mathematik

ERKLÄREN erklärt sich unter sprachtheoretischem Ansatz in diesem Forschungszusammenhang am besten aus handlungstheoretischer Sicht. Vielfach diskutiert und unterschiedlich fokussiert ergeben sich als Gemeinsames des Erklärens folgende Definitionsaspekte: Erklären

- ist eine spezielle Form der Wissens- oder Fähigkeitsvermittlung,
- hat das Ziel, dass jemand etwas weiß, versteht oder kann,
- ist asymmetrisch,
- führt zum Zusammenhang von Dingen.

Generell lassen sich drei Grundtypen unterscheiden:

(1) „Erklären – WIE“ befähigt Adressaten zur korrekten Durchführung einer Handlung. Im weitesten Sinne umschließt dieser Typ also Handlungserklärungen aller Art; übertragen dazu auch Funktionserklärungen. Beispiele aus dem Alltag (damit Thema des Deutschunterrichts): Wege-, Spielerklärungen.

(2) „Erklären – WAS“ führt zur Begriffsbildung, hier kann man zwischen Begriffs- und Worterklärungen unterscheiden.

(3) „Erklären – WARUM“ führt beim Adressaten zum Verständnis. Zu unterscheiden sind hier: Motiv-, Sachverhalts- sowie Zusammenhangserklärungen.

Allerdings zeigte es sich, dass die Sprachhandlung ERKLÄREN und noch mehr die Unterscheidungen schwierig auf der sprachlichen Oberfläche zu fassen sind. Es lassen sich zwar mögliche Formen beschreiben, wie diese Sprachhandlung Wortwahl oder Satzbau prägt, nicht aber, wie man etwas formulieren muss, damit das Gelingen einer solchen Handlung gesichert werden kann.

Im folgenden sollen Beispiele für „Erklären WAS, WARUM und WIE“ in der Mathematik vorgestellt werden. Das erste Beispiel beschreibt jeweils den Prozess, wie er im Unterrichtsgespräch ablaufen könnte bzw. wie er in den Zitaten von Sprachwissenschaftlern formuliert wird. Das zweite gibt dann die Form an, wie sich dieser Prozess produkthaft in schriftlicher Fixierung findet.

„Erklären – WAS“. Die natürlichen Zahlen.

- Beispiel 1:
  mathematisch $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, 4, ...\}$
  umgangssprachlich: alle Zahlen, die Dinge, die in der Natur vorkommen, benennen (Anzahlen)

– Beispiel 2: Peano-Axiome
„Sei M eine Menge, s eine Abbildung und 0 ein Objekt mit:
(1) 0 in M
(2) Wenn a in M , dann s(a) in M
(3) ...“

In der schriftlichen Fixierung spiegelt sich der Endpunkt mathematischer Tätigkeit wieder. Die nun formulierte Definition hat sich von einer Beschreibung weit entfernt („was sind natürliche Zahlen?“) und wird in der weiteren mathematischen Arbeit als Setzung verwendet (natürliche Zahlen als Modell eines Axiomsystems).

„Erklären – WIE“. Schriftliche Addition.

– Beispiel 1:
„1.) Schreibe die Zahlen untereinander, wobei die gleichen Werte untereinander stehen (Einer, Zehner, ...).
2.) Ziehe einen Strich darunter und beginne mit der Addition rechts, beim kleinsten Wert.
3.) Vergiss nicht, bei der Zehnerüberschreitung den Zehner in die Spalte davor zu übertragen.“

– Beispiel 2:
„Schreibe die beiden Zahlen, die du addieren möchtest, untereinander und zwar so, dass die Einer ....“

Der erste Text zeigt zwar schon typische Merkmale allgemeiner Anleitungen (Gliederung in Schritte, Imperativ), lässt aber inhaltlich einige Leerstellen und Unklarheiten, die bei einer erstmaligen Durchführung zum Scheitern führen müssten; der Computer führt das deutlich vor Augen. Rechenanleitungen oder auch Konstruktionsbeschreibungen im Geometrieunterricht haben als Endform den Algorithmus, der dann in Computersprachen übersetzt werden kann (Schmidt-Thieme 2005).

„Erklären – WARUM“. Addition zweier ungerader Zahlen.

– Beispiel1:
„Die Ungeradheit der einen wird dann aufgehoben durch die Andere.“
„Weil eins und eins zwei ist.“

– Beispiel 2:
„Beweis: Seien a, b die beiden ungeraden Zahlen. Dann kann ich schreiben: a=2n+1 bzw. b=2m+1 mit n, m in N.
a+b=2n+1+2m+1=2n+2m+1+1=2(n+m)+2=2 (n+m+1). - Dies ist aber eine gerade Zahl.“

Der Weg zum Beweis führt über die Argumentation, welche sich allerdings vom Argumentieren im Alltag essentiell unterscheidet, da die Lösung am Ende nicht strittig bleibt, das meint ein Kompromiss, für den man sich nach begründeter Diskussion entscheidet (s. Schmidt-Thieme 2006).

3. Erklären fächerübergreifend und Erklärkompetenz

Andere Fachdisziplinen bzw. Schulfächer zeigen zum einen andere Schwerpunkte in der Verwendung, zum anderen in der Regel nicht die eben skizzierten (schriftlichen) Endformen. In Deutsch wie in anderen Sprachen erklärt die Grammatik „wie" man spricht oder schreibt; die Literaturinterpretation erklärt „was" geschieht und „warum". Geschichte erklärt menschliches Handeln, auch dieses „warum" beinhaltet eher Motiverklärungen und ist damit von mathematischen Beweisen prinzipiell zu unterscheiden. Sport erklärt „wie" Bewegungen abzulaufen haben und „warum" sie zum erhofften Ergebnis führen sollten.

Neben einer allgemeinen Erklärkompetenz brauchen Lernende wie Lehrende fachspezifische Ausprägungen; Lehrende brauchen neben diesen beiden noch eine Erklärlehrkompetenz (s. dazu etwa auch die Coactiv-Studie). Zur Ausbildung dieser Kompetenzen während der Lehrerausbildung bedarf es neben den Voraussetzungen eines linguistischen Grundwissens, eines fachlichen Grundwissens und fachdidaktischen Wissens steter Theorie und Übung (s. Just 2009).

Literatur

Bescherer, Ch. (2005): „Eine kurze Geschichte der Bildungsstandards", in: Engel, Joachim u. a. (Hg.), *Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatorischer Aktivitäten,* Hildesheim: Franzbecker 331-341.

Just, C. (2009): Zur Verbesserung der Mathematiklehrerausbildung. Erprobte Ideen und abgeleitete Überlegungen. In diesem Band.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien, New York: Springer.

Schmidt-Thieme, B. (2005), „Algorithmen - fächerübergreifend und alltagsrelevant?", in: Engel, Joachim u. a. (Hg.), *Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatorischer Aktivitäten,* Hildesheim: Franzbecker 177-188.

Schmidt-Thieme, B. (2006), „Unmathematisches Argumentieren im Mathematikunterricht", in: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*, 4 S.

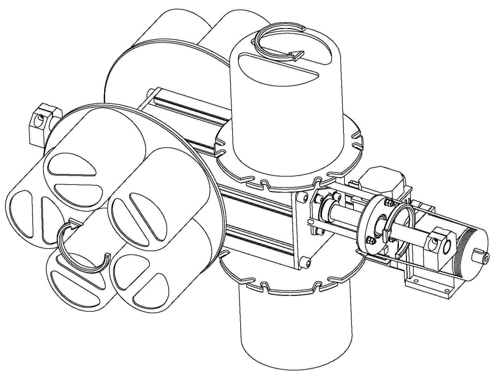
Gert KADUNZ, Klagenfurt

Diagramm und Algorithmus

In der mathematikdidaktischen Literatur findet sich seit mehreren Jahren – spätestens seit Hoffmann 2003 – ein theoretischer Ansatz zur Interpretation und Organisation des Lernens von Mathematik, der unter dem Stichwort Semiotik zusammengefasst werden kann. Beispielhaft sei auf Themenhefte der ESM (2006/Bd. 61) sowie des JMD (2006/Bd.27, Nr.3/4) verwiesen. In den folgenden Ausführungen konzentriere ich mich unter Bezug auf die Semiotik des Ch. S. Peirce auf die Verwendung von Diagrammen bei der Entwicklung eines elementaren Algorithmus zur Lösung einer geometrisch-kinematischen Fragestellung. Dabei wird an einem Beispiel die Interpretation von Diagrammen – vor allem in Gestalt von Skizzen – und deren schrittweise Übersetzung in eine algorithmische Beschreibung eines Sachverhaltes vorgestellt.

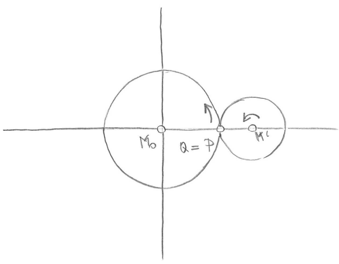
Die Fragestellung und eine mögliche Lösung

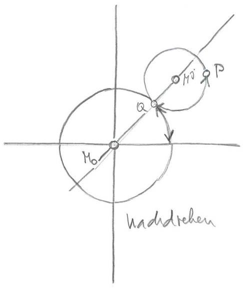
Ein Betrieb, der Maschinen zur Durchmischung von Pulvern herstellt, möchte das Verhalten einer speziellen Mischmaschine mit Mitteln der Mathematik beschreiben. Zu diesem Verhalten zählt auch die Bahnkurve des Mischbehälters bei Durchführung des Mischvorganges. Die hier angegebene Abbildung zeigt die CAD-Konstruktion eines Prototyps der Mischmaschine. Wir konzentrieren uns auf einen Mischbehälter und wollen seine Bahnkurve beschreiben. Dabei dreht sich der Behälter um zwei zueinander orthogonale Achsen (in der CAD-Konstruktion durch die kreisförmigen Pfeile angedeutet).



Der Weg zur vollständigen Beschreibung dieser Bahnkurve im Raum wird nun vorgestellt. Dabei soll der Lösungsweg möglichst einfach und mit den Mitteln der Schulmathematik begehbar sein. Die nachfolgende Lösung geht aber noch einen Schritt weiter. Die Lösung dieser Problemstellung gelingt im Wesentlichen ohne „Rechnung“, da alle notwendigen „Rechnungen“ an ein CAS ausgelagert werden.

Bei der zu untersuchenden Bewegung handelt es sich offensichtlich um die Hintereinanderausführung zweier Drehungen. Da eine unmittelbare Beschreibung in Gestalt einer Parameterdarstellung nicht möglich erscheint, hilft die heuristische Strategie Polyas, eine verwandte Aufgabe zu suchen. Die Verknüpfung zweier Drehungen, wenngleich in der Ebene, ist nun eine altbekannte Geschichte, welche den Namen Epizykloidenbewegung trägt. Können wir die Kenntnisse dieser Bewegung verwenden, um den Computer per Algorithmus zu überreden, die Epizykloide für uns zu zeichnen und vor allem auch deren Bahnkurve in Form einer Parameterdarstellung für uns zu bestimmen. Zwei Diagramme, welche die Rollung darstellen, stehen am Beginn der Lösung. Mit ihrer Hilfe kann die Entstehung der Bahnkurve mit Worten beschrieben werden. Dabei ist nur zu beachten, dass die Rollung für eine Position des zu drehenden Punktes formuliert wird. Es entsteht eine in Zeilen organisierte Beschreibung. Diese Beschreibung kann dann unmittelbar in die Sprache des CAS (hier Mathematica 7.0) übersetzt werden. Die hier angegebenen Abbildungen und der Beschreibungsalgorithmus mögen dies verdeutlichen.



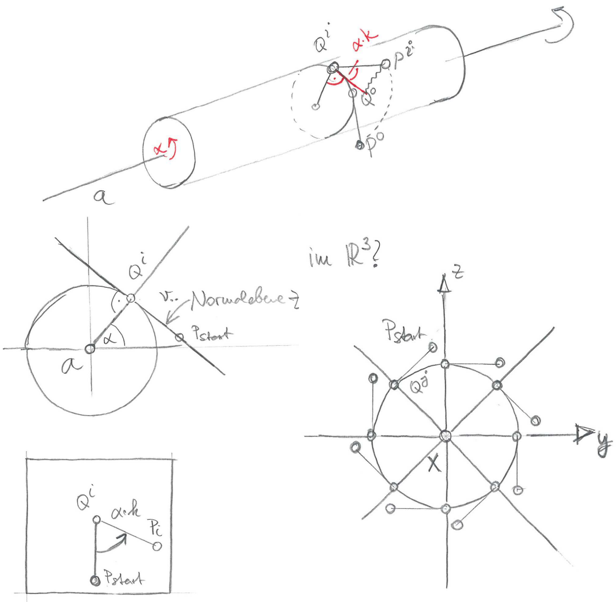



```
epizykloide[t_, ri_, ra_] := Module[ {v, w, res},
  Drehe den Mittelpunkt des rollenden Kreises
    v = {ri + ra, 0}.DrehMat[t];
  Drehe den zu drehenden Punkt P nach
    w = {ri, 0}.DrehMat[t];
  Drehe nun P um den Mittelpunkt des rollenden
Kreises
    res = rot[t*ri/ra, v, w];
  Return[res]
```

Der Gewinn, der aus diesem Vorgang erzielt werden kann, ist nun weniger die Zeichnung der Bahnkurven, als vielmehr die Ausgabe der Parameterdarstellung der Epizykloide ohne Rückgriff auf Analysis und Lineare Algebra. Dies leistet das CAS. Auf eine Darstellung der Parameterdarstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

Blickt man auf diesen ersten Ansatz, so sind einander abfolgende Handlungen zu erkennen. Dies ist zuerst die Anfertigung einer händischen Zeichnung, welche den Regeln der Geometrie folgt (Diagramm der Geometrie). Danach erfolgt die Übertragung in eine noch umgangssprachliche Beschreibung der Bewegung, welche aber schon algorithmische Züge trägt. Zuletzt wird diese Beschreibung in einen linearen Algorithmus übersetzt. Diese Vorgangsweise soll nun auf die eigentliche Fragestellung angewandt werden. Leider erweist sich dies als aufwendiger als zuerst gedacht. Zwar kann die Darstellung der räumlichen Bewegung eines Punktes der Mischmaschine auch in einer Freihandskizze gelingen, eine sorgfältige algorithmische Beschreibung scheint aber auf den ersten Blick nicht möglich. Ein anderer Vorschlag Polyas eröffnet einen neuen Blick. Kann die Fragestellung zweidimensional gedeutet werden?

Die hier angegebene Abbildung zeigt vier Konstruktionen. Zuerst ist eine räumliche Skizze erkennbar, welche die gesuchte Bahnkurve andeutet. Die Drehachse eines Zylinders sei a. Ein Punkt Q dreht sich um a und steuert eine Stange fester Länge. Deren Endpunkt sei der Punkt P. Diese Stange schließt mit der Radiusrichtung von Q jeweils einen rechten Winkel ein. Der Punkt P dieser Kurve wird für zwei Positionen gezeichnet. Dazwischen verläuft die vermutete Kurve. Aus dieser Darstellung ist eine algorithmische Beschreibung schwer abzulesen. Folgt man aber Polyas zweitem Vorschlag,



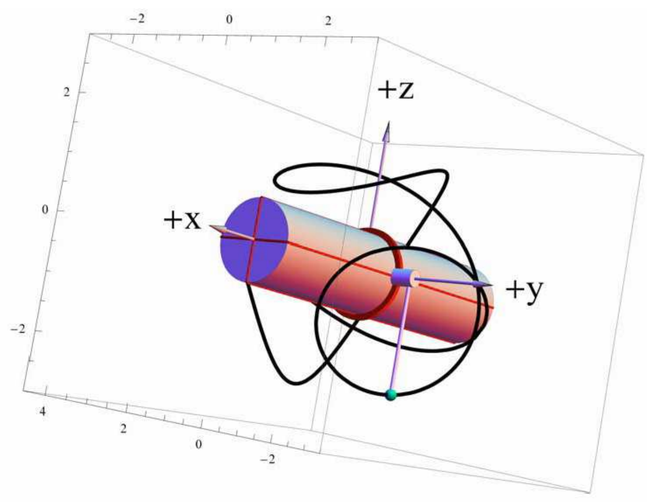
so ergeben sich neue Beschreibungsmöglichkeiten. Blickt man in Richtung der Drehachse a, so kann die Fragestellung „zweidimensional“ gedeutet werden. Ein Punkt Q bewegt sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Drehachse a entspricht. Er steuert über eine Strecke fester Länge den Bahnkurvenpunkt P. Diese Strecke schließt nun mit der Richtung des zum „Mittelpunkt“ einen rechten Winkel ein. In jedem Augenblick wird Q gedreht und gleichzeitig dreht sich auch P. Für acht Positionen stellt die letzte dieser händischen Zeichnungen diese Drehung von Q dar. Für jede Lage von Q ist der Punkt P dann um einen bestimmten Winkel zu drehen, der ein beliebiges Vielfaches des Drehungswinkels von Q sein kann. Aus dieser Beschreibung ergibt sich der hier angeführte Algorithmus. Er

```
kurve[t1_,t2_,q_,radInnen_,radAussen_]:=Module[
{gedrehteMitte, kurvenPunkt,Mr,p,vek,normalvek,vek2},
Nimm den Drehungsmittelpunkt der äußeren Drehung
Mr={0,radInnen,0};
Drehe  Mr um die x-Achse
gedrehteMitte=drehungraum[t1,q].Mr;
Zwischenrechnung
vek2=1/Norm[gedrehteMitte]*gedrehteMitte;
vek={gedrehteMitte[[2]],gedrehteMitte[[3]]};
normalvek={gedrehteMitte[[3]],-gedrehteMitte[[2]]};
Trage in Richtung des gewählten Normalvektors den Außenradius auf
p=vek+(radAussen/Norm[normalvek])*normalvek;
Drehe nun p um den Drehungsmittelpunkt der äußeren Drehung
kurvenPunkt=drehungraum[t2,vek2].{0,p[[1]],p[[2]]};
N[kurvenPunkt]
```

entspricht der geometrischen Vorgangsweise in obiger Konstruktion und folgt dabei deren sprachlicher Beschreibung. Mit dieser Folge von Befehlen kann die gesuchte Kurve ohne Schwierigkeiten gezeichnet werden. Die oben bereits erwähnte Eigenschaft des hier verwendeten CAS (Mathematica 7.0) ermöglicht die Ausgabe der Parameterdarstellung der gesuchten Kurve. Dabei sei t die Winkelgeschwindigkeit der inneren Drehung, k*t sei die Winkelgeschwindigkeit der äußeren Drehung, rI sei Radius der inneren Drehung und rA sei Radius der äußeren Drehung. Mit dieser Parameterdarstellung, die ohne „Rechnung" bestimmt wurde, können nun unterschiedliche Fragen zum Verhalten der Mischmaschine beantwortet werden. Zu diesen Fragen zählen neben Geschwindigkeit und Beschleunigung auch die Gestalt der Kurve. Die letzte Abbildung zeigt die gesuchte Bahnkurve für ein Geschwindigkeitsverhältnis von 1:3.

$$X(t) := \begin{cases} -rA * Sin(k*t) \\ rI * Cos(t) + rA * Cos(k*t) * Sin(t) \\ -rA * Cos(t) * Cos(k*t) + rI * Sin(t) \end{cases}$$

Nachdem nun die Frage nach der Kurve beantwortet ist, kann man zur eingangs gestellten Frage zurückkehren und die Verwendung der Diagramme betrachten. Die wahrscheinlich zentrale Stelle im Lösungsweg findet man in der dritten Abbildung. Da die räumliche Darstellung zu keiner erfolgreichen Beschreibung führt, muss die Fragestellung zwischendurch zweidimensional gedeutet werden. Vor allem aus diesen Diagrammen ist man in der Lage, die Hintereinanderausführung der Drehungen in einen Algorithmus zu überführen. Dabei geht die geometrische Beschreibung, die sich am Diagrammen orientiert – also an Skizzen, die den Regeln der Geometrie folgend konstruiert und auch interpretiert werden – in eine (umgangs)sprachliche Beschreibung und dann in eine CAS-Beschreibung über. Aus den Diagrammen entwickelt sich der Algorithmus.



Literatur

Hoffmann, M. (Hrsg.). (2003). *Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Kadunz, G. (2006). Experiments with diagrams - a semiotic approach. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(6), 445-455.

Katzenberger, M. (2006). *Die Rolle händischer Inskriptionen beim Lernen von Mathematik.* Dissertation, Universität Klagenfurt, Klagenfurt.

Polya, G. (1995). *Schule des Denkens Vom Lösen mathematischer Probleme* (E. Behnke, Übers. 4 Aufl.). Tübingen, Basel: Francke.

Christa KAUNE, Osnabrück

Moderierte Sektion: Das Telekom-Projekt „Mathematik Gut Unterrichten“

Die Qualität des Mathematikunterrichts an deutschen Schulen steht im Fokus des von der Deutschen Telekom Stiftung von 2007 bis 2009 geförderten Modellprojekts "Mathematik Gut Unterrichten". In einem Qualitätsnetzwerk engagieren sich Lehrer und Wissenschaftler bundesweit für die Verbesserung didaktischer und diagnostischer Kompetenzen von Mathematiklehrkräften.

Der Arbeitsbereich, über den in dieser Sektion berichtet wird, umfasst die Planung, Dokumentation und Auswertung von Unterrichtsprozessen. Die Methode ist die videobasierte und transkriptgestützte Analyse nach einem am Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück erprobten Kategoriensystem, mit dem detailliert metakognitive und diskursive Aktivitäten – sowohl von Lehrenden als auch von Lernenden – im Mathematikunterricht klassifiziert werden können (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). Die Anwendung dieses Kategoriensystems ist auf ganz unterschiedliche Arten von Mathematikunterricht möglich, von der Grundschule bis zur gymnasialen Oberstufe.

Unterschiedliche Auswertungsmöglichkeiten – grafische Profile des Ablaufs von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten und quantitative Auswertungen – ermöglichen die Herausarbeitung spezifischer Unterrichtsskripts der am Netzwerk beteiligten Lehrkräfte. Auf dieser Grundlage werden Empfehlungen im Rahmen eines begleitenden Lehrercoachings (Kaune, 2008) ausgesprochen.

Die im Netzwerk beteiligte Lehrkraft Silke Kramer berichtet in ihrem Beitrag *„Diagnose metakognitiver Aktivitäten – Trainingsmaßnahmen für Mathematiklehrkräfte“*, mit welchen Methoden und speziellen, eigens für die Lehrkräfte konstruierten Aufgabenformaten das Ziel des Telekom-Projektes erreicht wird, die beteiligten Lehrkräfte durch Teilhabe an Unterrichtsforschung in ihrer eigenen Unterrichtskompetenz weiter zu qualifizieren. Für eine theoriegeleitete Unterrichtsanalyse kommen inzwischen als Trainingsmodule verschiedene Aufgabenformate zum Einsatz, die von den Lehrkräften unterschiedliche Kompetenzen in der Analyse von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten in vorgelegten Transkriptauszügen verlangen. Ein weiteres Aufgabenformat verlangt auf der Grundlage des Transkripts einer Lehrer-Schüler-Interaktion die Planung von Interventionen zur Fortführung des Unterrichtsgesprächs mit möglichst hohem Anteil an speziell vorgegebenen, metakognitiven Aktivitäten auf Seiten der Lernenden. Anschließend wird auf der Grundlage eines Feedbacks der beteiligten Lehrkräfte analysiert, wie und wodurch die eingesetzten Maßnahmen bei diesen ihre Wirkung entfaltet haben.

Mathilde Griep, ebenfalls eine der am Netzwerk beteiligten Lehrkräfte, stellt in ihrem Vortrag *„'Vermischte Kopfübungen' als Anlass für Monitoring und Reflexion*" dar, wie sich das bekannte und vielpraktizierte Format von „täglichen Übungen" mit Ergebnissen aus der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung so gestalten lässt, dass die Lernenden zum verstärkten Praktizieren von metakognitiven Aktivitäten angeregt werden. Basierend auf der Analyse von drei Transkripten von am Netzwerk beteiligten Lehrkräften aus verschiedenen Schulen kann gezeigt werden, dass sich „vermischte Kopfübungen" ganz unterschiedlich hinsichtlich der Aktivierung der Lernenden bezüglich ihrer metakognitiven Aktivitäten gestalten lassen. Sowohl bei der Zusammenstellung der Aufgaben, als auch bei der Wahl der Methoden der Bearbeitung und der Besprechung der Ergebnisse haben Lehrende die Möglichkeit, den Anteil der metakognitiven Aktivitäten zu beeinflussen.

Zum Abschluss werden von Christa Kaune in ihrem Beitrag *„Analyse von Mathematikunterricht hinsichtlich des Einsatzes von metakognitiven Aktivitäten und Identifikation spezieller Unterrichtsskripts"* die von Mathilde Griep präsentierten Transkriptauszüge von „vermischten Kopfübungen" hinsichtlich des Auftretens von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten klassifiziert. So wird illustriert, wie sich als Ergebnis einer videobasierten Unterrichtsanalyse nach einem erprobten Kategoriensystem drei grafische Profile von Lehrer-Schüler-Interaktionen gewinnen lassen. Es wird dann exemplarisch gezeigt, wie auf dem Fundament der interpretierten Profile und den zusätzlich durchgeführten quantitativen Auswertungen den Lehrkräften differenzierte Hilfestellung gegeben werden kann, metakognitive Prozesse in ihrem eigenen Unterricht bewusster wahrzunehmen, und welche individuellen Coaching-Maßnahmen sich für die am Netzwerk Beteiligten ableiten lassen.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten bei schrittweise kontrolliertem Argumentieren im Mathematikunterricht*. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C. (2008). Lehrercoaching zur Verbesserung der Unterrichtsqualität - das Telekom-Modellprojekt "Mathematik Gut Unterrichten". In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, 175-178. Münster: WTM.

Mathilde GRIEP, Bad Iburg

"Vermischte Kopfübungen" als Anlass für Monitoring und Reflexion

Viele Fachkonferenzen diskutieren in regelmäßigen Abständen Vor- und Nachteile täglicher oder auch wöchentlicher „vermischter Kopfübungen". Sie sehen darin eine Maßnahme für die Nachhaltigkeit des Lernens. Auch Mathematikdidaktiker setzen sich mit dieser Thematik auseinander. So stellt Bruder verschiedene Übungsformate und –formen vor, unter denen sie die „vermischten Kopfübungen" als rituelle Lerngelegenheiten zum Wachhalten von Basiswissen einordnet (Bruder, 2008, S. 12). Sie konnte im Rahmen des Projektes CALiMERO empirisch nachweisen, dass diese „vermischten Kopfübungen", regelmäßig eingesetzt, einen deutlichen Effekt auf die Nachhaltigkeit haben[1].

Im Qualitätsnetzwerk „Mathematik Gut Unterrichten" sind „vermischte Kopfübungen" von drei verschiedenen Lehrkräften in der Sekundarstufe I durchgeführt worden. Eine vergleichende Analyse der Videos zeigt, dass sich hinter dem Begriff „vermischte Kopfübungen" ganz unterschiedliche Lernarrangements verbergen. In diesem Beitrag werden diejenigen Merkmale dargestellt, die zum Monitoring und zur Reflexion anregen.

Zunächst unterscheiden sich die drei Unterrichtssequenzen in der Aufgabenzusammenstellung und in der Art der Durchführung: Die Lehrkräfte 1 und 2 bedienen sich eines an ihrer Schule von der Fachschaft zur Verfügung gestellten Aufgabenpools, die dritte Lehrkraft gestaltet die Aufgaben individuell, abgestimmt auf die von ihr im Unterricht beobachteten Kenntnisdefizite und Fehlvorstellungen ihrer Lernenden. Weitere Gemeinsamkeiten und Unterschiede lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Merkmal	Lehrkraft 1	Lehrkraft 2	Lehrkraft 3
Aufgabenzusammenstellung	Auswahl aus einem Aufgabenpool		individuell auf die Lerngruppe abgestimmt
Aufgabenanzahl	10	10	10
Arbeitsmaterial	Folie mit den Aufgaben auf dem Projektor	Aufgabenblatt für jeden Lernenden	Aufgabenblatt für jeden Lernenden sowie eine Folie, in die ein Schüler Lösungen einträgt.
Bearbeitungsdauer	5 Minuten	5 Minuten	5 Minuten

[1] Information aus dem Hauptvortrag von Frau Bruder auf dieser GDM-Tagung.

Die drei von den jeweiligen Unterrichtsausschnitten angefertigten Transkripte legen dar, dass sich die Unterrichtssequenzen auch in der Präsentation der Ergebnisse unterscheiden. Dies soll an den folgenden drei Transkriptauszügen exemplarisch aufgezeigt werden:

Lehrkraft 1, Besprechung der

Aufgaben 4 und 5:	
4. 25% sind 200 €. 100%= ________€	**5. 20% von 100 € =________€**

L. Fünfundzwanzig Prozent sind zweihundert Euro und einhundert Prozent sind dann? [*schaut Tom an*]

Tom Achthundert Euro.

L. Hmm.

L. Zwanzig Prozent von einhundert Euro? [*schaut Ron an*]

Ron Zwanzig Euro.

Lehrkraft 2, Besprechung der

Aufgabe 7: $\frac{12{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}4} =$ ________

Daria Ich hab bei äh Siebtens Einundsechzig raus.

[Steffen *ändert die Zahl 0,00601 zu 61.*] (*11 sec*)

L. Rob!

Rob Ich hab bei sechstens (...)

L. Bleiben wir erst mal bei Sieben. Bist du mit einverstanden?

Rob Ja, ich hab das selbst nicht.

L. Ach haste selbst nicht. Möchte noch jemand was zu siebtens jetzt sagen?

Richie Ich hab (...). Also ich hab da Sechs Komma Eins, weil man kann ja Null Komma Zwei und Null Komma Vier kürzen. Das bei Null Komma Zwei ist dann Eins und bei Null Komma Vier Zwei. Und die Hälfte von Zwölf Komma Zwei ist Sechs Komma Eins.

Lehrkraft 3, Besprechung der

Aufgabe 2:

Unterstreiche diejenigen Zahlen, die gleich sind: 0,75 ; 0,075 ; 0,705 ; 0,750

Timo Also A2 ist richtig, weil bei Null Komma Null Sieben Fünf und Null Komma Sieben Null Fünf. Bei Null Komma Null Sieben Fünf ist da ne Null davor, also das ist dann zu wenig. Bei Null Komma Sieben Null Fünf ist das irgendwie (die Fünf) und die Null halt umgedreht. (*4 sec*)

Timo Fred!

Fred Ähm zu A2, da kann man bei der Null Komma Sieben Fünf Null hin, wenn hinter einem Kom (…), wenn hinter einem Komma am Ende ne Null steht, kann man die wegnehmen und dann ist das au, und dann ist das auch Null Komma Sieben Fünf.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über Merkmale der Besprechung der Lösungen der „vermischten Kopfübungen“ in den drei Klassen:

Merkmal	Lehrkraft 1	Lehrkraft 2	Lehrkraft 3
Präsentation der Lösungen	mündliches Abrufen der einzelnen Lösungen durch die Lehrkraft	Ein Schüler notiert die von einem anderen diktierten Lösungen an der Tafel.	Eine Folie mit den Lösungen eines Schülers wird aufgelegt.
Besprechung von Lösungen	die von der Lehrkraft als falsch erkannten	die von einzelnen Schülern als falsch erkannten	alle
Begründungen der Lösungen durch die Schüler	keine	für die von ihnen zunächst als falsch erkannten Aufgaben	für alle Aufgaben
Reflexion (durch Nennen von zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten)	nein	nein	ja
Besprechungszeit	3 Minuten	6 Minuten	8 Minuten

Die in den grau unterlegten Zellen aufgelisteten Merkmale sind aus dem jeweiligen Transkriptauszug ersichtlich.

Metakognitive Aktivitäten

Die kurzen Transkriptauszüge zeigen keine Unterschiede bezüglich der Aufforderung der Lehrkraft zu metakognitiven Aktivitäten. Führt man jedoch eine Analyse auf der Grundlage der vollständigen Transkripte der Unterrichtssequenzen durch, so sind durchaus Unterschiede bezüglich dieses Merkmals zu beobachten (vgl. Kaune 2009).

Im Transkript der Lehrkraft 1 findet auf Seiten der Schüler kein Monitoring statt, auf Lehrerseite beschränkt es sich auf Bestätigungen („Hmm.“) von korrekten Ergebnissen.

Im Transkript der Lehrkraft 2 gibt Richie eine Erklärung für die korrekte Lösung. Obwohl seine Argumentation unvollständig ist, erkennt man deutlich eine Kontrolle der einzelnen Rechenschritte und sein Bemühen um eine Begründung. Er betreibt also Monitoring.

Im Transkript der Lehrkraft 3 reflektiert Timo über die Bedeutung der Ziffern vor dem Hintergrund des Stellenwertsystems: Er benennt für die Zahl 0,075 die Ziffer Null als diejenige, die diese Zahl im Vergleich mit 0,75 zu klein werden lässt. Die Zahl 0,705 vergleicht er mit 0,750. Er erkennt, dass die Ziffern in anderer Reihenfolge notiert wurden, kann aber keinen Größenvergleich durchführen. Fred geht in seiner Äußerung nicht auf Timo ein. Er verfolgt seinen Gedankengang und erklärt, warum die beiden Zahlen 0,75 und 0,750 gleich sind. Er nennt dazu die im vorhergehenden Schuljahr entwickelte Regel. Beide Schüler betreiben Monitoring und Reflexion: Fred reflektiert über die Syntax-Regel, die hier angewendet wurde. So wird für die gesamte Lerngruppe das zugrunde liegende Basiswissen in Erinnerung gerufen.

Fazit

Auf der Grundlage der transkriptgestützten Analyse von unterschiedlichen Variationen der „vermischten Kopfübungen" lassen sich Empfehlungen hinsichtlich der Planung von Monitoring und Reflexion aussprechen:

- Eine individuelle Zusammenstellung der Aufgaben ist der Auswahl aus einem Aufgabenpool vorzuziehen; die Lehrkraft kann so auf Defizite und (Fehl-) Vorstellungen in der Lerngruppe eingehen.
- Das Austeilen der zu bearbeitenden Aufgaben ist dem Auflegen einer Aufgabenfolie vorzuziehen. Die Lernenden behalten die Aufgaben und ihre Lösungen. So können sie und ihre Erziehungsberechtigten ihre Stärken und Schwächen über den Verlauf eines Schuljahres verfolgen und Defizite aufarbeiten.
- Lernende sollten aufgefordert werden, die Lösungen ihrer Mitschüler zu überwachen. Solche Monitoringaktivitäten sollten nicht allein der Lehrkraft überlassen werden.
- Sowohl richtige als auch falsche Lösungen sollten von den Schülern begründet analysiert werden. Dies bietet einerseits Anlass zur Reflexion und andererseits erkennen Schüler, die selbst einen Fehler gemacht haben, warum ihr Ergebnis falsch ist.

Literatur

Bruder, R. (2008). Üben mit Konzept. *mathematik lehren, 147,* 4-11.

Bruder, R. (2008). Wider das Vergessen. *mathematik lehren, 147,* 12-14.

Kaune, C. (2009). Analyse von Mathematikunterricht hinsichtlich des Einsatzes von metakognitiven Aktivitäten und Identifikation spezieller Unterrichtsskripts. (in diesem Band)

Silke KRAMER, Springe

Diagnose metakognitiver Aktivitäten – Trainingsmaßnahmen für Mathematiklehrkräfte

„Bunt ist unsere Lieblingsfarbe“ – so könnte das Motto der Lehrerinnen und Lehrer lauten, die dem bundesweiten Qualitätsnetzwerk „Mathematik Gut Unterrichten“ (Kaune, 2008) angehören. Der Wunsch ihren Unterricht „bunter“ zu gestalten - im Sinne des Kategoriensystems „Metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht“ (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007) - eint diese Lehrkräfte. Damit haben sie sich ein hohes Ziel gesetzt. Unterricht zu verändern gilt generell als schwierig, wie zahlreiche, auch misslungene Reformen beweisen (vgl. Reinmann, 2005; Leuchter et al., 2006). Noch schwieriger als die Einführung neuer Materialien, neuer Aufgabenformate oder neuer Sozialformen dürfte es dabei sein, Unterrichtsgespräche so zu verändern, dass sie auf einem höheren diskursiven Niveau verlaufen und damit für die Schülerinnen und Schüler kognitiv anspruchsvoller werden und dass mehr metakognitive Aktivitäten zu verzeichnen sind (Hasselhorn, 1998). Andererseits kommt der Qualität der Unterrichtsgespräche sicherlich eine zentrale Bedeutung in einem kognitiv aktivierenden Mathematikunterricht zu (Lipowski, 2007). Unterrichtsgespräche „bunter“ zu gestalten - ein erstrebenswertes, wenn auch sicherlich nicht leicht zu erreichendes Ziel.

Welche Fähigkeiten müssen die Lehrkräfte erlangen, damit sie die „Farben“ für ihren Unterricht passend mischen können?

- Sie müssen mit dem Kategoriensystem vertraut werden, das theoretische Konstrukt „Metakognition“ in Kategorien und Unterkategorien dekomponieren können.
- Sie müssen transkriptgestützt in Äußerungen von Lehrenden und Lernenden das Vorkommen von metakognitiven und diskursiven Aktivitäten erkennen und klassifizieren können.
- Sie sollten erspüren können, welche „Farben der Farbpalette“ sie in ihrem eigenen Unterricht nutzen und welche nicht.
- Sie sollten lernen, Maßnahmen ergreifen zu können, um mit dem gesamten „Farbspektrum“ nach ihren Wünschen ihr Unterrichtsgebilde gestalten zu können.

Wie kann man den Lehrkräften dazu verhelfen, diesen Zielen ein Stück näher zu kommen? Nach Gärtner (2007) ist es bei Fortbildungsmaßnahmen für Lehrkräfte wichtig, dass deren Lernprozesse in einem relevanten Klassenkontext situiert sind. Eine Möglichkeit aufzuzeigen, worüber man in

Theorien spricht, wird dabei im Einsatz von Unterrichtsvideos gesehen. Darüber hinaus sollten Lehrerfortbildungen so angelegt sein, dass sie den Diskurs zwischen den Lehrkräften anregen. Denn oft sind es erst die kognitiven Konflikte, die in einer Diskussion heraufbeschworen werden, die dazu veranlassen, eingefahrene Verhaltensmuster zu hinterfragen, was im günstigen Fall zu einer Anpassung des bisherigen Verhaltens führt.

So gab es zu Beginn der Arbeit im Qualitätsnetzwerk einen mehrtägigen Workshop, bei dem die Lehrkräfte zunächst an mehreren Unterrichtsbeispielen demonstriert bekamen, wie Experten mithilfe des Kategoriensystems im Unterricht metakognitive und diskursive Aktivitäten identifizieren. Am Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück gibt es schon lange die Tradition, sich bei der Analyse von Unterricht nicht alleine auf Videos zu stützen, sondern darüber hinaus Transkripte der Unterrichtsgespräche zu benutzen. Dies führt zu einer noch größeren Verlangsamung des Unterrichtsgeschehens und ermöglicht damit eine noch größere Tiefe in der Analyse. Eng verknüpft wurde das Vorstellen der „Farbpalette" mit Übungen zu ihrer Nutzung. In Gruppen wurden Unterrichtsbeispiele in transkribierter Form mithilfe des Kategoriensystems klassifiziert. Die Beispiele waren dabei so gewählt, dass sowohl „bunter" Unterricht wie auch eher „schwarzer" oder „grauer", sprich Unterricht mit wenig Metakognition und eher negativer Diskursivität zur Diskussion standen. Anhand dieser Beispiele hatten die Lehrkräfte Gelegenheit, die Mechanismen aufzuspüren, die einen Unterricht mit hoher metakognitiver Aktivität fördern bzw. ihn gerade verhindern.

Um das Training, das bei der Tagung begonnen wurde fortzusetzen, bekamen die Lehrkräfte einen Transkiptausschnitt per Mail zugesandt, der mithilfe des Kategoriensystems analysiert werden sollte. Ihre Klassifikationen sollten sie dabei mit dem Tandempartner an ihrer Schule diskutieren, der ebenfalls dem Netzwerk angehört. Die Lehrkräfte aus der Region um Osnabrück, der die meisten Lehrerinnen und Lehrer des Netzwerks angehören, kamen darüber hinaus zu einem Regionaltreffen zusammen. Auf diesem Regionaltreffen stellten sie zunächst ihre Sicht auf den Unterrichtsausschnitt mithilfe des Kategoriensystems dar. Darüber hinaus hatten sie auch Gelegenheit, ihre gewonnen Einsichten der Expertensichtweise gegenüberzustellen. Dazu lag zum einen das Transkript mit den Klassifikationen der Experten vor, zum anderen war auch eine Expertin vom IKM anwesend. Als Ergebnis dieses Regionaltreffens entstand eine schriftlich ausgearbeitete Gegenüberstellung der Lehrersicht mit der Expertensicht, in der sich die Lehrkräfte kritisch mit ihrer ursprünglichen Sicht, aber auch mit der Expertensicht auf die vorliegende Unterrichtsszene auseinandergesetzt haben und für sich ein Resümee gezogen haben, was sie aus dieser Analyse gelernt haben.

Da auch Regionaltreffen nicht regelmäßig durchführbar schienen, wurden Trainingsformate entwickelt, welche die Lehrkräfte vor Ort durchführen konnten. Weil die Lehrkräfte sich nach eigener Einschätzung recht schwer getan hatten, auf sich alleine gestellt mit dem Kategoriensystem zu arbeiteten, sollte der Umgang mit dem Kategoriensystem schrittweise trainiert werden. In einem ersten Schritt wurde dazu das Transkript bereits gefärbt vorgegeben. Auf diese Weise müssen die Lehrkräfte nur die Unterkategorien einer Kategorie gegeneinander abwägen. Auch wann überhaupt metakognitive oder diskursive Aktivitäten vorliegen, ist vorgegeben. Die Lehrkräfte schickten ihre mit Klassifizierungen und Begründungen versehenen Transkripte per Mail ans IKM. Dort wurden die eingegangenen Hausaufgaben von Experten gesichtet und auf die Art und Häufigkeit der auftretenden Abweichungen von der Expertensicht hin untersucht. Schließlich wurde eine schriftliche Rückmeldung ausgearbeitet, in der aus Expertensicht dokumentiert wurde, warum bestimmte Kategorien in der vorliegenden Szene vergeben werden und warum andere, vielleicht auf den ersten Blick auch nahe liegende und daher von den Lehrkräften häufiger gesetzte, eher nicht. Diese Kommentare erhielten die Lehrkräfte dann per Mail zugesandt mit der Bitte, weitere Verständnisfragen per Mail oder telefonisch an einen Experten des IKM zu richten.

Da bei diesem Aufgabenformat die Unterscheidung zwischen Planung, Monitoring und Reflexion bereits vorgegeben ist, und ebenso diskursive Aktivitäten schon gekennzeichnet sind, wurde ein weiteres Format eingeführt, das diese, in dem anderen Aufgabenformat noch nicht trainierten, Fähigkeiten gezielt ausbauen soll. Um den Schwierigkeitsgrad erneut nicht zu hoch anzusetzen, wurde eine Art Lückentextaufgabe eingeführt, bei der vorgegeben ist, welche Unterkategorien die Experten in dem vorliegenden Unterrichtsausschnitt gesetzt haben. Dieses Aufgabenformat legt zwei unterschiedliche Herangehensweisen nahe: Man kann zunächst den Ausschnitt von vorne durchgehen und überlegen, ob und wenn ja mit welcher der zur Auswahl stehenden Unterkategorien Äußerungen zu klassifizieren sind. Dann wird man möglicherweise feststellen, dass man bestimmte Unterkategorien, welche die Experten vergeben haben, noch gar nicht benutzt hat. Dies veranlasst dazu, erneut den Ausschnitt detailliert zu untersuchen und gezielt nach bestimmten Merkmalen zu suchen, die einem beim ersten Durchgang entgangen sind. Den Rückmeldungen der Lehrkräfte ist zu entnehmen, dass sie dieses Trainingsformat für sich als besonders gewinnbringend empfinden, da es dazu beiträgt, den Blick für Diskursmerkmale zu schärfen, die man gewöhnlich leicht übersieht.

Als Fazit nach einigen Durchgängen mit Hausaufgaben dieser Art formuliert ein Lehrer: „Durch die Hausaufgaben bleibt man ständig am Ball und hat die ‚Farben' immer besser im Arbeitsspeicher." Dieser Lehrer ist offensichtlich so trainiert, dass er schon während des Unterrichtens die auftretenden „Farben der Farbpalette" erspüren kann.

Auf dem Weg zu „buntem Unterricht" sind die Lehrkräfte des Qualitätsnetzwerkes auch aus Expertensicht den ersten Teilzielen schon ein gutes Stück näher gekommen. Nun wird das letzte Teilziel verstärkt in den Blick rücken, nämlich die Handlungskompetenz der Lehrerinnen und Lehrer bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten im Unterricht weiter zu stärken. Dazu wird es ein neues Aufgabeformat geben, bei dem Unterrichtssituationen durch ein Transkript vorgegeben sind – natürlich aus dem Leben stammend. An einer bestimmten Stelle bricht ein Unterrichtsgespräch ab. Aufgabe wird es dann sein, sich einen Impuls zu überlegen, der vermutlich dazu führen würde, die Schülerinnen und Schüler zu einer vorgegebenen metakognitiven oder diskursiven Aktivitäten anzuregen. Dies soll dazu führen, dass die Lehrkräfte ein Handlungsrepertoire aufbauen, mit dem sie gezielt bestimmte metakognitive oder diskursive Aktivitäten einleiten können.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht.* Arbeitsbericht Nr. 44. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Gärtner, H. (2007). *Unterrichtsmonitoring. Evaluation eines videobasierten Qualitätszirkels zur Unterrichtsentwicklung.* Münster: Waxmann.

Hasselhorn, M.(1998). Metakognition. In Rost, D. (Hrsg): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie*, Weinheim, 348-351.

Kaune, C. (2008). Lehrercoaching zur Verbesserung der Unterrichtsqualität - das Telekom-Modellprojekt "Mathematik Gut Unterrichten". In *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 175-178. Münster: WTM.

Leuchter, M. et al. (2006). Unterrichtsbezogene Überzeugungen und handlungsleitende Kognitionen von Lehrpersonen. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften, 9(4),* 562-579.

Lipowsky, F. (2007). Was wissen wir über guten Unterricht? *Friedrich Jahresheft 2007*, 26-30.

Reinmann, G. (2005): Innovation ohne Forschung? Ein Plädoyer für den Design-Based Research-Ansatz in der Lehr-Lern-Forschung. *Unterrichtswissenschaft, 33(1),* 52-69.

Christa KAUNE, Osnabrück

Analyse von Mathematikunterricht hinsichtlich des Einsatzes von metakognitiven Aktivitäten und Identifikation spezieller Unterrichtsskripts

Es ist eine Besonderheit des Qualitätsnetzwerkes „Mathematik Gut Unterrichten", Lehrer durch Teilhabe an mathematikdidaktischer Forschung zu qualifizieren. Ziel ist, ihre didaktischen sowie diagnostischen Kompetenzen zu steigern, um Unterrichtsprozesse besser als bisher verstehen und dann auf dieser Grundlage auch besser als bisher unterrichten zu können.

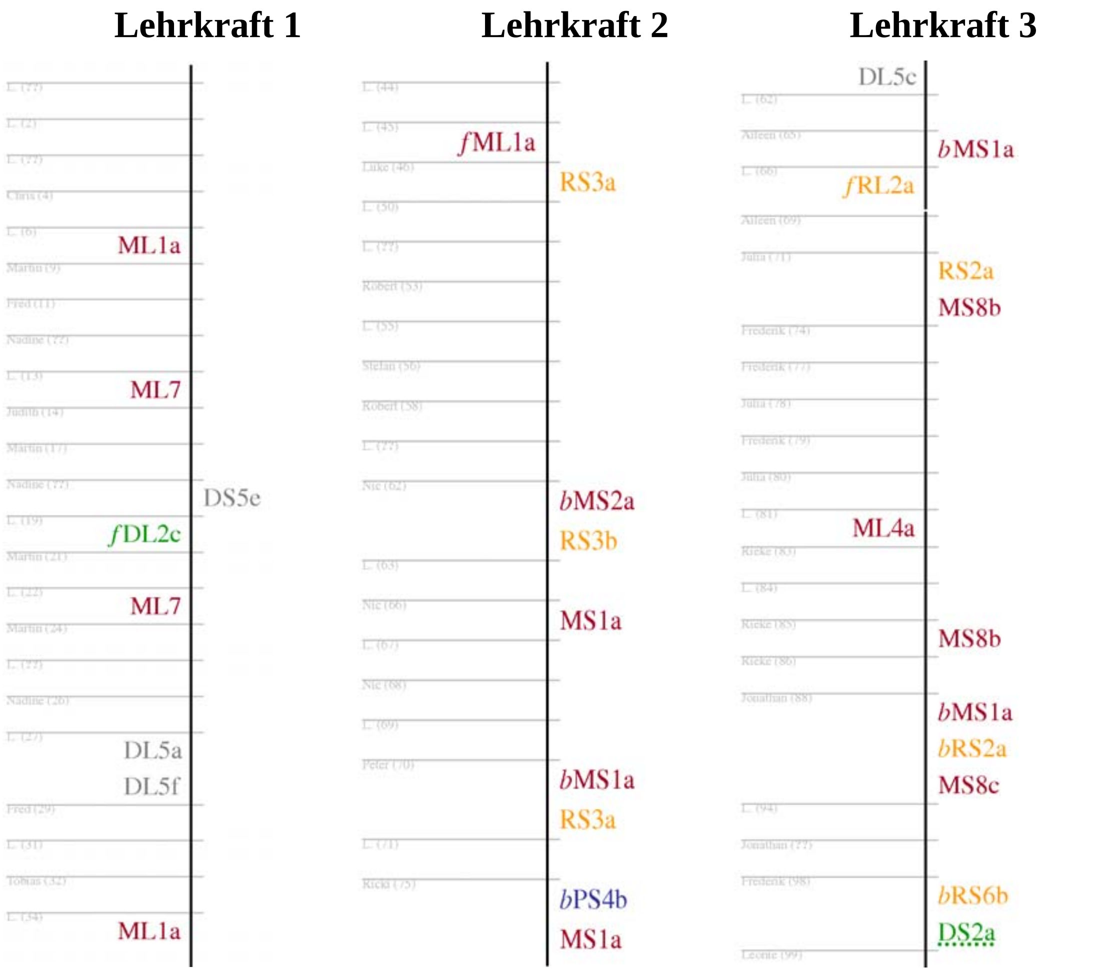
Die Vorgehensweise beim Coachen, wie von den Netzwerkteilnehmern eigener Unterricht geplant, Coachingwünsche formuliert, Unterricht durchgeführt und videografiert wird, ist in Kaune (2008) detailliert beschrieben worden. Mit welchen Maßnahmen die Lehrkräfte befähigt werden, den eigenen Unterricht auf der Grundlage von Transkripten theoriegeleitet zu analysieren, beschreibt Kramer (2009) in diesem Band. Da das Heranziehen von theoretischen Erkenntnissen den Blick auf Unterrichtsprozesse erweitert (Krammer & Reusser, 2004), ist die eingesetzte Methode die videobasierte Analyse von Unterrichtsprozessen auf der Grundlage eines am Institut für Kognitive Mathematik entwickelten und erprobten *Kategoriensystems für metakognitive Aktivitäten*. Dieses ist in Cohors-Fresenborg & Kaune (2007) ausführlich dargelegt und seine Anwendung an zahlreichen Unterrichtsbeispielen demonstriert worden.

Metakognition wird darin in drei Kategorien dekomponiert, nämlich in: das *Planen* (z. B. von Problemlöseschritten, des Einsatzes und der Abfolge mathematischer Werkzeuge), das *Monitoring* (z. B. das Überwachen von mathematischen Umformungen oder Argumentationen, das Überwachen des Zielbezugs) sowie die *Reflexion* (z. B. über mathematische Begriffe und Werkzeuge, über das bisherige Vorgehen, über die Diskrepanz zwischen Darstellungen und Vorstellungen). Zusätzlich erfasst das Kategoriensystem eine weitere Kategorie, die *Diskursivität* (z. B. das präzise Sichbeziehen auf bereits Gesagtes).

Die angefertigten Transkripte bilden die Grundlage, auf der die Lehrkräfte mit dem Kategoriensystem die Klassifizierungen vornehmen. Als erste Abstraktionsstufe erhalten die Lehrenden neben dem Transkript ihres Unterrichts, in dem Textpassagen in der Farbe der jeweiligen Kategorie gefärbt sind, eine grafische Darstellung des Ablaufs der metakognitiven und diskursiven Aktivitäten in ihrer Stunde.

Grafische Profile des Ablaufs metakognitiver und diskursiver Aktivitäten

Die folgenden drei grafischen Profile stellen den Ablauf der metakognitiven und diskursiven Aktivitäten im Unterricht von dem Netzwerk angehörigen Lehrkräften dar. Um die Methode deutlich zu machen, sind wegen des begrenzten Platzes nur kurze Ausschnitte, die aber für die jeweilige Lehrkraft typische Unterrichtsmerkmale aufweisen, dokumentiert. Inhaltlich handelt es sich bei allen Auszügen um die Besprechung von „vermischten Kopfübungen", zugehörige Transkripte sind von Griep (2009) in diesem Band abgedruckt.



Links der Trennlinie sind jeweils Aktivitäten der Lehrkraft, rechts die der Lernenden abgetragen. Der erste Großbuchstabe (in passender Farbe) weist auf die Kategorie hin: auf **M**onitoring, **R**eflexion, **P**lanung oder **D**iskursivität. Ein grau gedrucktes **D** ist ein Indikator für einen Verstoß gegen Diskursregeln. Die Zeichen ***b*** oder ***f***, als Präfix gesetzt, zeigen eine ***b***egründete metakognitive Aktivität oder aber eine Auf***f***orderung zu einer metakognitiven Aktivität an.

Welche Merkmale über unterschiedliche Unterrichtsskripte lassen sich diesen Darstellungen entnehmen?
Lehrkraft 1 hat ein eher traditionelles Rollenverständnis: Monitoring-Aktivitäten sind nur „auf ihrer Seite" auszumachen. Sie versteht sich als (alleinige) Überwacherin (**ML1a**) und Beurteilerin der Korrektheit der Antworten. Nur sie überwacht den Sach- und Zielbezug (**ML7**) der Rechnungen. Aufforderungen an die Lerngruppe zum Monitoring oder zur Reflexion, sind nicht zu verzeichnen. Vergleichsweise hohe Anteile von Verstößen gegen Diskursregeln zeugen davon, dass die Lehrkraft keine Intervention gegen gravierende Verstöße der Regeln eines Diskurses ergreift (**DL5f**).
Ganz anders versteht Lehrkraft 2 ihre Rolle: Sie fordert zum Monitoring auf (***f*ML1a**), zeigt sich in der Szene selbst aber nicht in der Rolle einer Überwacherin. Die Lernenden kommen der Aufforderung ihrer Lehrkraft zur Überwachung nach: Ausnahmslos alle Monitoring-Aktivitäten sind auf der rechten Seite der Trennlinie, also auf der Schülerseite zu finden. Die Lernenden überwachen Rechnungen ihrer Mitschüler (MS1a), aber auch den Sach- und Zielbezug (**MS7**). Es fällt auf, dass zwei von vier Monitoringbeiträgen von den Lernenden begründet werden. Die Lernenden planen alternative Termdarstellungen (***b*PS4b**) und reflektieren über die Struktur von Termdarstellungen (**RS3a**) ohne direkte Aufforderung durch die Lehrkraft. Es ist kein aktives Bemühen um einen gepflegten Unterrichtsdiskurs zu verzeichnen, aber in diesem Ausschnitt finden sich auch keine Verstöße gegen Diskursregeln.
Lehrkraft 3 wird selbst nur einmal überwachend tätig, einmal fordert sie zur Reflexion auf. Die Kategorie *f*RL2a zeigt an, dass sie die Schüler auffordert, den einem Umformungsschritt zugrunde liegenden Satz zu nennen. Zweimal kommen die Lernenden dieser Aufforderung nach. Eine der Antworten ist wieder begründet. In dieser Lerngruppe ist die höchste Anzahl an Monitoring-Aktivitäten auf Schülerseite zu verzeichnen. Die Kategorie **MS8** zeigt einen hohen Grad an Selbstüberwachung des Ausdrucks aber auch die Selbstüberwachung der eigenen Argumentation (**MS8c**) an.

Quantitative Auswertung der Unterrichtsgespräche

Ein grafisches Profil zeigt die *Verteilung* von metakognitiven Aktivitäten. Eine quantitative Auswertung hinsichtlich ihrer *Anteile* an allen während der Besprechung der „vermischten Kopfübungen" gesprochenen Wörtern liefert darüber hinaus noch ein Maß für das Gewicht der jeweiligen Aktivität. So fallen neben den beschriebenen gravierenden Unterschieden zwischen den drei Szenen an den Monitoring-Aktivitäten der gesamte Stunde ins Auge:

- der hohe Monitoring-Anteil der Lehrkraft 1;
- die hohen Monitoring-Anteile der Lenenden in den Szenen 2 und 3;
- die hohen Anteile ***b***egründeter Monitoring-Aktivitäten der Lernenden in den Szenen 2 und 3.

Prozentuale Anteile von Monitoring-Aktivitäten, gemessen in gesprochenen Wörtern

	Szene 1	Szene 2	Szene 3
ML	**9,3**	**0,0**	**18,0**
MS	**2,4**	**31,0**	**43,6**
***b* MS**	**4,8**	**27,9**	**27,1**
M gesamt	**16,5**	**58,9**	**88,7**

Abgeleitete Maßnahmen für ein Lehrercoaching

Welches Potenzial liegt in diesen Ergebnissen, wie können sie im Lehrercoaching genutzt werden? Die Analyse der grafischen Profile dient auf Seiten der Unterrichtenden zur Objektivierung und Reflexion eigener, in der Praxis meist unbewusst gewordener Denk- und Handlungsmuster.

– Wünschenswert ist ein Wandel des Rollenverständnisses aller drei Lehrkräfte: keine von ihnen versteht ihre Rolle als Moderator, der die Beiträge der Lernenden aufeinander bezieht. Dies ist an dem Fehlen der Kategorie **D2** festzumachen.

– Für die Lehrkraft 1 ist die Erweiterung ihres didaktischen Repertoires angezeigt. Durch verstärktes Auffordern der Lernenden zum Monitoring und zur Reflexion müssten diese ihre eher passive Rolle aufgeben und würden verstärkt zur Metakognition angeregt.

– Die Lehrkräfte 1 und 3 sollten sich als exemplarische Intellektuelle mehr um die Sprachrichtigkeit – auch um ihre eigene - und um die Einhaltung der Diskursregeln kümmern.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten bei schrittweise kontrolliertem Argumentieren im Mathematikunterricht*. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C. (2008). Lehrercoaching zur Verbesserung der Unterrichtsqualität - das Telekom-Modellprojekt "Mathematik Gut Unterrichten". In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, 175-178. Münster: WTM.

Kramer, S. (2009). Diagnose metakognitiver Aktivitäten – Trainingsmaßnahmen für Mathematiklehrkräfte. In diesem Band.

Krammer, K., Reusser, K. (2004). Unterrichtsvideos als Medium der Lehrerinnen- und Lehrerbildung. *Seminar – Lehrerbildung und Schule, 4*. 98f.

Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg und Barbara DROLLINGER-VETTER, Zürich

Moderierte Sektion: Videobasierte empirische Studien zum Erklären, Argumentieren und Verstehen im Mathematikunterricht

Handlungen und Aktivitäten des Mathematikunterrichts im Zusammenhang mit dem Verstehen, Erklären und Argumentieren dienen nicht nur Zielen des begrifflichen Lernens und des Kompetenzaufbaus, sondern sie bilden auch eine Grundlage für die Beschreibung der Qualität von Lernsituationen. Dies ist insbesondere für videobasierte Untersuchungen der Fall, in denen Merkmale von Aktivitäten des Erklärens und der Verständnisförderung unter der Perspektive der empirischen Unterrichtsforschung in den Blick genommen werden können. In der videobasierten Unterrichtsqualitätsforschung sind einerseits lerntheoretisch bedeutsame Merkmale von Unterricht, die prinzipiell einer Wahrnehmung und Beschreibung von Unterricht aus Schüler(innen)perspektive zugänglich sind (vgl. Gruehn, 2000) in den Blick genommen worden, andererseits kamen auch kumulative und hoch-inferente Codierungen von Unterrichtsmerkmalen durch externe Beobachter zum Einsatz (vgl. z.B. Clausen, Reusser & Klieme, 2003). Solche Ratings sind möglich, weil Unterrichtsvideos eine Fülle von Informationen zu Unterrichtsituationen enthalten. Auch wenn Unterrichtsvideos selbstverständlich nur einen Ausschnitt des Klassenraumgeschehens abbilden können, bieten sie beispielsweise auch nonverbale Kontextinformationen über die aufgezeichneten Unterrichtssituationen (Petko et al., 2003).

Sowohl für das Verstehen als auch für das Erklären im Mathematikunterricht bietet der Begriff des verständnisvollen Lernens, wie er von Baumert & Köller (2000, S. 273) charakterisiert wurde, eine theoretische Grundlage. Verständnisvolles Lernen stellt demnach einen „aktiven individuellen Konstruktionsprozess“ dar, für den die Möglichkeit des Anknüpfens an Vorwissen, multikontextuelle und multiperspektivische Verknüpfungen, motivationale Dispositionen und metakognitive Steuermechanismen, sowie der Aufbau informationsreicher Wissenseinheiten förderlich sind. Dies bedeutet, dass nicht nur reichhaltige und kognitiv anregende Lernsituationen verständnisfördernd sein dürften, sondern dass auch die Unterrichtsqualitätsdimension der Klarheit und Strukturiertheit (vgl. z. B. Clausen et al., 2003) wesentlich zu verständnisvollem Wissensaufbau beitragen kann.

Vor diesem Hintergrund erscheint es möglich, für externe Betrachter in videografierten Unterrichtssituationen beobachtbare Merkmale von Unterrichtssituationen herauszuarbeiten, die für die Förderung verständnisvollen

Lernens relevant sein dürften. Beispiele für solche Merkmale werden von Barbara Drollinger-Vetter vorgestellt. Ausgehend von kognitionspsychologischen (Aebli, 1994) und fachdidaktischen Vorstellungen von Verstehensprozessen werden in diesem Beitrag inhaltsspezifische Merkmale jener Phasen im Mathematikunterricht bestimmt, in denen es darum geht, ein neues Konzept klar und verständlich einzuführen. Auch Sebastian Kuntze spricht in seinem Beitrag anhand einer Videostudie zum Erarbeiten von Beweisen im Geometrieunterricht derartige, auch auf Begriffswissen zum Beweisen bezogene verständnisstützende Unterrichtsmerkmale an.

Die Frage, inwiefern mit der Förderung verständnisvollen Lernens assoziierte Unterrichtsmerkmale auch inhaltsspezifische, fachdidaktische Komponenten einschließen sollten, stellt sich auch für Unterrichtssituationen, in denen Aktivitäten des Erklärens stattfinden. Das Erklären als auf verständnisvolles Lernen von Adressaten ausgerichtete Form des Argumentierens im weiteren Sinne wirft aufgrund seines Bedeutungsumfangs im Zusammenhang mit videobasierten Untersuchungen auch theoretische Fragen auf. Die Untersuchung von Anke Wagner und Claudia Wörn baut auf solchen theoretischen Überlegungen auf, um bedeutsame Unterrichtsmerkmale im Zusammenhang mit Erkläraktivitäten im Unterricht und deren Repräsentationsmodi empirisch beschreiben zu können.

Diese Überlegungen deuten bereits an, dass auf dem Weg vom theoretischen Hintergrund der zugrunde liegenden Modellvorstellungen über das Lernen im Mathematikunterricht und bedeutsamer Unterrichtsqualitätsmerkmale bis hin zu methodischen Designfragen videobasierter Untersuchung eine Reihe von Herausforderungen bestehen. Derartige Herausforderungen werden im Beitrag von Sebastian Kuntze skizziert.

Literatur

Aebli, H. (1994). *Denken. Das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse* (2. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Baumert, J. & Köller, O. (2000). Unterrichtsgestaltung, verständnisvolles Lernen und multiple Zielerreichung im Mathematik- und Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS/III, Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn, Band 2*. Opladen: Leske+Budrich.

Clausen, M., Reusser, K. & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualität auf der Basis hochinferenter Unterrichtsbeurteilungen: Ein Vergleich zwischen Deutschland und der deutschsprachigen Schweiz. *Unterrichtswissenschaft, 31*(2), 122-141.

Gruehn, S. (2000). *Unterricht und schulisches Lernen*. Münster: Waxmann.

Petko, D., Waldis, M., Pauli, C. & Reusser, K. (2003). Methodologische Überlegungen zur videogestützten Forschung in der Mathematikdidaktik. *ZDM, 35*(6), 265-281.

Barbara DROLLINGER-VETTER, Zürich

„Verstehenselemente“ im Mathematikunterricht

Ausgehend von kognitionspsychologischen und fachdidaktischen Vorstellungen von Verstehensprozessen lassen sich Merkmale jener Phasen im Mathematikunterricht bestimmen, in denen es darum geht, ein neues Konzept klar und verständlich einzuführen. Diese Merkmale lassen sich konzeptspezifisch, aber gleichzeitig unabhängig von den im Unterricht verwendeten Methoden und Handlungsformen formulieren. Grundlage dazu ist der Begriff des „Verstehenselements“.

1. Mathematik verstehen

Verstehen gilt als zentrales Ziel des Mathematikunterrichts. Reusser und Reusser-Weyeneth (1994) beschreiben in ihren acht fachübergreifenden Strukturmerkmalen von Verstehen das Verstehen unter anderem als kognitive Konstruktion, die auf Sinnvollheit bezogen ist und einen nach vorne offenen Vorgang darstellt. Mathematik verstehen wird auch innerhalb der Mathematikdidaktik von verschiedenen Autoren mit dem Herstellen von Verknüpfungen und Sinn in Verbindung gebracht (z. B. Hiebert & Carpenter, 1992). Was Mathematik verstehen bedeutet, hängt insbesondere vom Bild von Mathematik und vom zugrundeliegenden Lehr-Lernverständnis ab. Aus der kognitionspsychologischen Sicht von Aebli (1994, 2001) bedeutet Verstehen Aufbau von kognitiven Strukturen. Diese bestehen aus Elementen des Vorwissens, welche durch Relationen miteinander verknüpft werden. Neue Elemente des Denkens, insbesondere Elemente höherer Ordnung, entstehen durch Verdichten (Aebli sagt Objektivieren) von vorhandenen Netzwerkteilen. Diese neuen Elemente können wiederum mit weiteren Elementen in Verbindung gebracht werden. Entscheidend ist, dass in einem verdichteten Element die ganze Information vorhanden ist, dass es also jederzeit in alle seine Teilelemente und deren Beziehungen untereinander aufgefaltet werden kann.

Solche Teilelemente eines Konzepts, welche man verstanden haben muss, um das Konzept als Ganzes verstehen zu können, nenne ich „Verstehenselemente“ (vgl. Drollinger-Vetter, in Vorb.). Entscheidend ist, dass in diesem Begriff gleichzeitig sowohl kognitionspsychologische als auch fachdidaktische Aspekte enthalten sind. Verstehenselemente berücksichtigen sowohl das Vorwissen der Lernenden als auch die fachliche Seite des zu verstehenden Konzepts, wobei letztere aus der Sicht der Lernenden gedacht wird. Für eine Einführung in den Satz des Pythagoras lassen sich beispielsweise unter anderen folgende zentrale Verstehenselemente bestimmen:

- Ausgangslage ist ein rechtwinkliges Dreieck.
- Es geht um zwei Typen von Seiten (im rechtwinkligen Dreieck).
- Der Satz macht eine Aussage über Seitenlängen (im rechtwinkligen Dreieck).
- Der Satz macht eine Aussage über Flächeninhalte von Quadraten, die speziell angeordnet sind.

Diese und weitere Verstehenselemente müssen Schülerinnen und Schüler in einem kognitiven Aufbauprozess geeignet miteinander verknüpfen, damit sie den Satz des Pythagoras verstehen, wobei die Verknüpfungen sowohl bildlich als auch sprachlich und formal (Bruner, 1974) gedacht und dargestellt werden können.

Welche Konsequenzen lassen sich daraus für Qualitätsmerkmale eines Unterrichts ableiten, in dem die Lernenden ein neues Konzept, hier den Satz des Pythagoras, verstehen sollen? Oder anders gefragt: Welche beobachtbaren inhaltsspezifischen Unterrichtsmerkmale lassen aus dieser Sicht auf gelingende Verstehensprozesse der Schülerinnen und Schüler während einer Einführungsphase schließen?

Angenommen wird, dass diese Verstehenselemente im Unterricht ausführlich vorkommen und miteinander in kohärenter Art und Weise in Beziehung gesetzt werden müssen. Dies kann auf sehr unterschiedliche Art und Weise und auch in verschiedensten Reihenfolgen geschehen: Beispielsweise kann die Bedeutung des rechten Winkels während eines Einstiegsproblems thematisiert oder innerhalb des Beweises explizit herausgearbeitet werden. Die Voraussetzung des rechten Winkels kann in einem Theoriehefteintrag besonders betont oder aber innerhalb einer üblichen sprachlichen Formulierung des Satzes eher versteckt erwähnt werden. Bei den Übungen können Beispiele zu nicht-rechtwinkligen Dreiecken vorkommen. Es ist weiter ein Unterricht denkbar, in dem zwar immer mit rechtwinkligen Dreiecken gearbeitet wird, in dem aber diese Voraussetzung nie explizit thematisiert wird, so dass dieses Verstehenselement für die Lernenden gar nicht deutlich wird.

Eine wesentliche Qualität dieser Verstehenselemente zeigt sich in ihrem Nutzen für die Einschätzung von Unterrichtsqualität: Sie lassen sich unabhängig von den im Unterricht verwendeten Aufgaben, aber auch unabhängig von der gewählten Methode und den eingesetzten Sozialformen bestimmen. Der Unterricht kann nicht nur in Bezug auf das Vorkommen, sondern auch hinsichtlich der Kohärenz und Klarheit dieser Verstehenselemente im zeitlichen Verlauf in seiner Qualität eingeschätzt werden. Damit erhält man ein konzeptspezifisches inhaltliches Maß für die Klarheit des Unterrichts im Verlauf. Ein Beispiel soll dies illustrieren: Ein Einstieg, der mit den Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck arbeitet, und ein Beweis, der mit den Flächeninhalten der Quadrate argumentiert, müssen im Unterricht sorgfältig miteinander verbunden werden, damit aus der Sicht der Lernenden kein Bruch entsteht, der das Verstehen behindern kann.

Selbstverständlich gehört zu einem umfassenden Verständnis des Satzes des Pythagoras mehr als die oben erwähnten Verstehenselemente; man vergleiche zum Beispiel Winter (1984), Wittmann (1996) oder Fraedrich (1995). Grundlegend für ein erstes Verständnis des Satzes im engen Sinne erscheinen aber aus der oben beschriebenen kognitionspsychologischen Perspektive die erwähnten Verstehenselemente, welche im Laufe des folgenden Unterrichts mit vielen weiteren Wissenselementen verknüpft und in Beziehung gebracht werden müssen.

2. Empirischer Teil

Mit der binationalen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" (Projektleitung: Eckhard Klieme, Christine Pauli, Kurt Reusser; vgl. Klieme & Reusser, 2003; Lipowsky, Rakoczy, Klieme, Reusser & Pauli, 2005) liegt ein Forschungsdesign vor, das es erlaubt, solche konzeptspezifische Unterrichtsqualitätsmerkmale zu erheben und mit Leistungsdaten mehrebenenanalytisch in Beziehung zu setzen. U.a. wurde in 40 Klassen eine dreistündige Einführung in den Satz des Pythagoras videografiert und es wurden Leistungstests durchgeführt. Die Verstehenselemente wurden mittel-inferent über die Theoriephasen der videographierten Unterrichtseinheiten geratet, das genaue Vorgehen ist in Drollinger-Vetter und Lipowsky (2006) beschrieben. Aus den zentralen Verstehenselementen lässt sich ein Summenscore bilden, der mit Leistungsdaten in Beziehung gesetzt werden kann. In einer Mehrebenenanalyse (zur Methode vgl. Hox, 2002) zeigt sich unter Kontrolle verschiedener Variablen auf der Individualebene ein Effekt des Verstehenselemente-Scores auf den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler.

Daraus lässt sich folgern, dass Verstehenselemente auch für die Planung und Durchführung eines verstehensbezogenen Unterrichts und somit für die Lehrerbildung hilfreich sein könnten. Denn Verstehenselemente lassen sich zu jedem mathematischen Thema bestimmen, wobei die fachdidaktischen Eigenheiten des vorliegenden Stoffs berücksichtigt werden müssen.

Eine ausführliche Darstellung dieses Themas findet man in Drollinger-Vetter (in Vorb.).

Literatur

Aebli, H. (1994). *Denken. Das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse* (2. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (2001). *Zwölf Grundformen des Lehrens* (11. Aufl.). Stuttgart: Klett.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.

Drollinger-Vetter, B. & Lipowsky, F. (2006). Fachdidaktische Qualität der Theoriephasen. In I. Hugener, C. Pauli & K. Reusser (Hrsg.), *Videoanalysen (= Teil 3 der Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis", hrsg. E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser,* S. 189-205). Frankfurt a. M.: GFPF/DIPF.

Drollinger-Vetter, B. (in Vorb.). *Fachdidaktischer Strukturaufbau*. Dissertation Universität Zürich.

Fraedrich, A.M. (1995). *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Mannheim: Wissenschaftsverlag.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65-97). New York: Macmillan.

Hox, J. (2002). *Multilevel analysis: techniques and applications.* Mahwah, N.J.: Erlbaum.

Klieme, E. & Reusser, K. (2003). Unterrichtsqualität und mathematisches Verständnis im internationalen Vergleich. Ein Forschungsprojekt und erste Schritte zur Realisierung. *Unterrichtswissenschaft, 31* (3), 194-205.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Klieme, E., Reusser, K. & Pauli, C. (2005). Unterrichtsqualität im Schnittpunkt unterschiedlicher Perspektiven - Rahmenkonzept und erste Ergebnisse einer binationalen Studie zum Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. In H.G. Holtappels & K. Höhmann (Hrsg.), *Schulentwicklung und Schulwirksamkeit. Systemsteuerung, Bildungschancen und Entwicklung der Schule* (S. 223-238). Weinheim: Juventa.

Reusser, K. & Reusser-Weyeneth, M. (1994). Verstehen als psychologischer Prozess und als didaktische Aufgabe: Einführung und Überblick. In K. Reusser & M. Reusser-Weyeneth (Hrsg.), *Verstehen: Psychologischer Prozess und didaktische Aufgabe* (S. 9-35). Bern: Hans Huber.

Winter, H. (1984). Satzgruppe des Pythagoras. *mathematik lehren, 2*, 42-48.

Wittmann, E.C. (1996). Designing Teaching: The Pythagorean Theorem. In T. Cooney (Hrsg.), *Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education* (S. 97-165). Portsmouth: Heinemann.

Anke WAGNER & Claudia WÖRN, PH Ludwigsburg

Erklärend handeln – handelnd erklären

Erklären in der Theorie

Zum Begriff der Erklärung existieren in der Literatur unterschiedliche theoretische Modelle. In der Wissenschaftstheorie ist das Modell nach Hempel/Oppenheim zu nennen. Aus gesetzesartigen Aussagen und gegebenen Randbedingungen (beides wird als Explanans bezeichnet) wird die das Phänomen beschreibende Tatsachenbehauptung (Explanandum) logisch abgeleitet (Hempel/Oppenheim, 1988).

Im pädagogischen Kontext ist das Modell nach Kiel zu nennen (Kiel, 1999). Er fokussiert nicht das Produkt *Erklärung* als solches, sondern vielmehr den Prozess des *Erklärens*. In seinem Modell wird ein Erklärprozess in acht unterschiedliche Schritte eingeteilt (Kiel, 1999, S. 267 ff.). Diese lassen sich drei Kategorien kognitiver Operationen zuordnen: Analyse (Erkennen von Bestandteilen einer Erklärung), Synthese (Erkennen der Funktionalität einer Erklärung) und Synkrise (Vergleichen mit anderen Erklärgegenständen und gegebenenfalls Einordnen in die eigene Wissensstruktur).

Betrachtet man die mathematikdidaktische Forschungslage, so stellt man fest, dass es bis dato keine empirischen Untersuchungsergebnisse auf nationaler Ebene zum Erklären bzw. zu Erklärprozessen im Mathematikunterricht gibt.

Verwendung von Darstellungsformen in Erklärsequenzen

In Erklärsequenzen des Mathematikunterrichts werden häufig Darstellungsformen verwendet. Diese dienen dazu mathematische Begriffe und Operationen zu veranschaulichen.

Bruner (1971) unterscheidet drei Formen der Darstellungen: die Enaktive, die Ikonische und die Symbolische. Seine Ausführungen bezüglich der Darstellungen macht Bruner am Beispiel des Knotenbindens fest. Im enaktiven Sinne erfolgt die Repräsentation des Knoten durch eine Handlung. Unter der ikonischen Darstellung versteht Bruner sowohl das Bild eines entstehenden Knotens (Bewegungsbild), als auch das Endbild des Knotens sowie die Abbildung einer Zwischenphase. Zur dritten Form der Darstellung, der Symbolischen, schreibt Bruner (1971, S.27ff.): „Die symbolische Darstellung […] erfordert die Übersetzung dessen, was dargestellt werden soll in diskrete Ausdrücke, die dann zu Äußerungen oder Wortketten oder Sätzen zusammensetzbar sind. […] es ist auch darauf hinzuweisen, daß man […] spezifizieren muß, ob man den Prozeß des Knüpfens oder den Knoten selbst (in irgendeinem Stadium seiner Entstehung) beschreibt.“ Die symbolische Ebene nach Bruner beinhaltet zudem einerseits die formale Sprache der Mathematik andererseits die natürliche Sprache im Sinne von Verbalisierungen.

Zech (1998, S. 106) bezieht sich in seinen Ausführungen auf Bruner, spricht jedoch von Darstellungsebenen. Er teilt die symbolische Darstellung von Bruner weiter auf in eine symbolische Ebene der „Zeichen“ und eine Ebene der „Sprache“ (vgl. auch Bönig, 1995, S. 60).

Lompscher (1972) weist besonders auf die unterschiedliche Rolle der Sprache (neben der Rolle der Anschauung) im Zusammenspiel mit den verschiedenen Erkenntnisebenen – welche im Wesentlichen den Brunerschen Darstellungen entsprechen – hin: während die Sprache einerseits Träger der geistigen Handlung sein kann, fungiert sie andererseits als zusätzliches Element z.B. zur Handlungssteuerung oder zur Ergebnissicherung.

Datenmaterial

In einer empirischen Untersuchung fokussieren wir Erklärsequenzen zu offenen und geschlossenen Aufgaben im Mathematikunterricht. Das uns zur Verfügung stehende Datenmaterial stammt aus insgesamt 45 videografierten Unterrichtsstunden aus Grund-, Haupt-, Realschulen und Gymnasien. In der Grundschule waren vierte Klassen und in der Sekundarstufe I siebte Klassen beteiligt. Vor den Videoaufnahmen wurden die Schüler langsam an die Kamera gewöhnt. Um störende Effekte - bedingt durch das Videografieren - möglichst zu vermeiden, wurden die Kamerapersonen angehalten, sich unauffällig und zurückhaltend zu verhalten und sich nicht auf Interaktionen mit der Klasse einzulassen. Dadurch konnte das Interesse der Schülerinnen und Schüler an der Person des Kameraführenden minimiert werden. Die Videoaufnahmen fanden im normalen Klassenzimmer statt. Während der Unterrichtsaufnahmen wurden Beobachtungen durchgeführt und ausführlich protokolliert. Zeitnah wurden mit drei der sieben Lehrern Recall-Interviews durchgeführt, basierend auf einem halbstandardisierten Leitfaden.

Die gesammelten Daten bestehen insgesamt aus (a) Videoaufnahmen, (b) Schülerdokumenten, (c) Feldnotizen der Forscher und (d) Recall-Interviews. Alle Videoaufnahmen und Recall-Interviews wurden vollständig transkribiert.

Struktureller Aufbau von Erklärsequenzen

Aus der Analyse der oben beschriebenen Daten ergibt sich eine Grundstruktur, nach der Erklärsequenzen im Mathematikunterricht aufgebaut sind (vgl. Wagner & Wörn, 2009).

Erkläranlass

Der Erkläranlass ist der Ursprung bzw. Auslöser einer Erklärsequenz. Es gibt geplante sowie ungeplante Erkläranlässe. Geplante Erkläranlässe ergeben sich aus komplexen Explanandi, sofern diese vom Lehrer in seiner Vorbereitung vorhergesehen werden. Hierbei spielt vermutlich das Erfahrungswissen eine nicht zu unterschätzende Rolle. Ungeplante Erkläranlässe ergeben sich aus unvorhergesehenen oder spontanen Situationen kognitiven Ungleichgewichts (Kiel, S. 74). Diesen ungeplanten Erkläranlässen schließen sich Adhoc-Erklärungen an (Schmidt-Thieme & Wagner, 2007).

Erklärinitiierung

Besteht ein Erkläranlass stellt sich die Frage, wer eine Erklärung zum Explanandum einfordert, und wie und in welcher Weise dies geschieht. Diesen Vorgang bezeichnen wir als Erklärinitiierung.

Erklärprozess

Im Erklärprozess steht das zu Erklärende (Explanandum) im Vordergrund. Dieses sollte den Kern der Erklärung bilden. Häufig verläuft der Erklärprozess nicht linear, sondern es kommt zu eingeschobenen Teilerklärungen mit abweichenden Expanandi (vgl. Schmidt-Thieme & Wagner, 2007). Der Erklärprozess kann unterschiedliche (didaktische) Funktionen erfüllen. Neben dem Ausgleich des o.g. kognitiven Konflikts können metakognitive Fähigkeiten (Schütte, 2002) angeregt, sowie Kommunikationsmöglichkeiten (Bauersfeld, 2002) geschaffen werden. Hierbei ist zu beobachten, dass unterschiedliche Darstellungsformen im Sinne Bruners (1971) verwendet werden, um sprachliche Prozesse angemessen zu unterstützen.

Erklärcoda

Unabhängig davon ob ein Erklärprozess erfolgreich war oder nicht, findet ein Abschluss desselben statt.

Zu beobachtende Phänomene in Erklärsequenzen

In unseren Daten zeigt sich, dass Erklärinitiierungen überwiegend vom Lehrer ausgehen, während die eigentlichen Erklärprozesse entgegen unseren Erwartungen hauptsächlich von Schülern übernommen werden. Lehrer fungieren in diesem Zusammenhang unterstützend. Auffällig ist insgesamt, dass Erklärsequenzen zumeist auf sprachlicher Ebene ohne die Verwendung weiterer Darstellungsformen ablaufen. Selten wird die Sprache durch eine weitere Darstellungsform unterstützt (intermodaler Transfer). Die Vernetzung dreier Darstellungsformen findet in den analysierten Daten kaum statt und wenn, dann ausschließlich durch den Lehrer. Lehrer verwenden im Vergleich zu Schülern eine höhere Vielfalt an Kombinationen aus Sprache und anderen Darstellungsformen.

Literatur

Bauersfeld, H. (2002): Interaktion und Kommunikation. In: *Grundschule, 2002, Heft 3,* (S. 10-14) Braunschweig: Westermann.

Bönig, D. (1995): Multiplikation und Division. Münster, New York: Waxmann.

Bruner, J.S. (1971): Über kognitive Entwicklung. In: Bruner, J.S. et al.: *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 21-53) Stuttgart: Klett.

Hempel, C.G., Oppenheim, P. (1988): Studies in the Logic of Explanation. In Pitt, J.: *Theories of explanation* (S. 9-50) New York: Oxford Univ Press.

Kiel, E. (1999): Erklären als didaktisches Handeln. Göttingen: Ergon.

Lompscher, J. (1972): Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten. Berlin: Volk und Wissen.

Schütte, S. (2002): Das Lernpotenzial mathematischer Gespräche nutzen. In: *Grundschule, 2002, Heft 3* (S. 16-18) Braunschweig: Westermann.

Schmidt-Thieme, B. & Wagner, A. (2007): Erklärprozesse im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Wagner, A. & Wörn, C. (2009) (in Vorbereitung): Developing explanatory competencies. In: Pre-Proceedings of the 10th International Conference “Models in Developing Mathematics Education”, MEC 21.

Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Herausforderungen videobasierter empirischer Forschung zum Argumentieren und Erklären im Mathematikunterricht im Hinblick auf die Qualität von Lerngelegenheiten

Die Frage nach kognitiv aktivierenden Lernangeboten und Lernprozessen wird als zentral für die Untersuchung der Qualität von Mathematikunterricht angesehen (z.B. Clausen, Reusser & Klieme, 2003). Kognitive Aktivierung bezieht sich dabei einerseits auf intrapersonale Prozesse des Lernens und damit des Kompetenzaufbaus, andererseits steht mit dem Blick auf Lerngelegenheiten des Unterrichts der inhaltliche Austausch zwischen den am Unterrichtsgeschehen beteiligten Personen in Verbindung mit gestellten Aufgaben im Mittelpunkt des Interesses. Kognitive Aktivierung kann sich in Prozessen des Argumentierens und des Erklärens zeigen, wenn etwa im Hinblick auf mathematisches Begriffswissen inhaltlich reichhaltige und an die Lernvoraussetzungen von Schülerinnen und Schülern angepasste Aushandlungsprozesse zwischen Lernenden stattfinden. Das Konstrukt der kognitiven Aktivierung ist jedoch gleichzeitig in theoretischen Modellvorstellungen zum Lehren und Lernen verankert und hat daher etwa im Verbund mit einem gemäßigt-konstruktivistisch orientierten Prozess-Mediations-Produktmodell des Lernens im Mathematikunterricht von Pekrun und Reiss (angelehnt an Fend, 1998, zitiert z. B. in Kuntze, 2006a, S. 11) große theoriebasierte Erklärungspotentiale für Prozesse des Kompetenzaufbaus. Das Konstrukt der kognitiven Aktivierung baut daher gleichsam eine Brücke zwischen theoretischen Modellvorstellungen zum Lernen und forschungsmethodisch implementierbaren Charakteristika von Unterrichtssituationen, die auch Argumentationen oder Aktivitäten des Erklärens enthalten können.

Ein wichtiges Forschungsinteresse in diesem Zusammenhang ist es daher, Qualitätsmerkmale in Unterrichtssituationen hinsichtlich des Argumentierens und Erklärens einzuschätzen. Wie oben bereits sehr knapp für das Beispiel der kognitiven Aktivierung angesprochen, begegnet Forschung zu Unterrichtsqualitätsmerkmalen in diesem Bereich einer Reihe von Herausforderungen, die sich auf die folgenden Ebenen beziehen:

- *Theoriegeleitet Untersuchungsinteressen klären / Bewusstmachen der Rahmentheorie*: Untersuchungen zur Qualität von Lernanlässen im Zusammenhang mit dem Argumentieren und Erklären sollten auf Modellvorstellungen zum Lernen Bezug nehmen, damit Qualitätsmerkmale von Lernangeboten und deren Nutzung betrachtet werden können. Dabei kann es auch notwendig sein, die Theorie weiterzuentwickeln (z.B. Begriffe zu Merkmalen von Erklärprozessen zu schärfen). Insgesamt sei angemerkt, dass Einschätzungen von Unterrichtsqualität und damit verbundene Kriteriensetzungen aufgrund des theoriegeleiteten Ansatzes einen normativen Charakter aufweisen dürften. Externe Beobachter(innen) können aus gemäßigt-konstruktivistischer Sicht (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001) Wahrnehmungen zu Unterrichtssituationen grundsätzlich immer nur auf der Basis von Vorwissen machen, weshalb hier ein möglichst tragfähiger theoretischer Bezugsrahmen vorhanden sein sollte.

- *Untersuchungsrelevante (d.h. auf Forschungsfragen abgestimmte) Konstrukte auf diese Rahmentheorie beziehen*: Videobasierte Untersuchungen müssen zwangsläufig Teile des Klassenraumgeschehens ausblenden und bestimmte Fokussierungen vornehmen. Den Hintergrund für diese Fokussierungen sollten Konstrukte bilden, die in der Rahmentheorie verankert sind. Die Arbeit an diesen Konstrukten stützt auch umgekehrt das Aussagepotential der letztendlich gewonnenen Ergebnisse für die weitere Theorieentwicklung.
- *Operationalisierbare Indikatoren zu diesen Konstrukten finden und abgrenzen*: Im Hinblick auf das Argumentieren und Erklären besteht eine Herausforderung darin, dass zu den als bedeutsam identifizierten Konstrukten konkrete Indikatoren erarbeitet werden müssen, damit die Konstrukte auf Unterrichtssituationen bezogen werden können. Dabei sollten die gewählten Indikatoren einerseits aus theoretischer Sicht für die in der Untersuchung betrachteten Konstrukte bedeutsam sein und andererseits eine auswertungsmethodische Umsetzbarkeit im Hinblick auf die zur Verfügung stehenden oder zu erhebenden Videodaten aufweisen.
- *Methodische Vorgehensweisen zu diesen Indikatoren finden und abgrenzen*: um die oben angesprochenen Indikatoren für die Untersuchung von Unterrichtssituationen heranziehen zu können, ist es notwendig, bis in Details des Auswertungsprozesses hinein die methodische Herangehensweise festzulegen. Eine polarisierte Gegenüberstellung qualitativer vs. quantitativer Methoden erscheint allerdings für videobasierte empirische Untersuchungen wenig hilfreich. Um die Vorteile einer wechselseitigen Ergänzung verschiedener Methoden für Studien zu erschließen, ist es sinnvoll, verschiedene Sichtweisen im Spektrum zwischen hoch inferenten und niedrig inferenten Auswertungsmethoden einzubeziehen.

Um diese Herausforderungen anhand von konkreten Beispieluntersuchungen zu verdeutlichen, werden im Folgenden zwei eigene videogestützte Untersuchungen im Hinblick auf das gewählte Vorgehen und den Umgang mit Herausforderungen auf den verschiedenen Ebenen angesprochen:

Das *erste Beispiel* ist eine Untersuchung zu inhaltlichen Elementen bei der Erarbeitung von Beweisen im Unterrichtsgespräch (Kuntze & Reiss, 2004; Kuntze, Rechner & Reiss, 2004). Der theoretische Hintergrund für das Erarbeiten von Beweisen als Form des Argumentierens basiert im Falle dieser Studie auf Beweisprozessmodellen (Boero, 1999; Stein, 1986; Steinhöfel & Reichold, 1971) in Verbindung mit der Situation des Mathematikunterrichts. Aus diesen ergeben sich als Konstrukte die in der Studie betrachteten beweisrahmenden inhaltlichen Elemente (z.B. Entscheidung über den Beweisweg, Rückschau auf den Beweis, etc.). Die Indikatoren beziehen sich darauf, inwiefern inhaltliche Elemente beobachtet werden können und welchen inhaltlichen Beitrag Schüler(innen) und Lehrkräfte zu den inhaltlichen Elementen leisten. Auf methodischer Ebene wurde diese Herangehensweise mit einer relativ hoch inferenten Top-down-Codierung durch zwei Beobachter entsprechend einer kumulativen Codierweise nach Grobkategorien umgesetzt.
Ein zu dieser Untersuchung komplementärer anderer Untersuchungsteil fokussierte auf das Anforderungsniveau von Aufgaben, das mit etwas niedrig-inferenteren Codierungen ausgewertet wurde. Durch diesen komplementären Untersuchungsteil konnte das Befundbild des ersten Untersuchungsteils ergänzt werden, was eine insgesamt differenziertere Interpretation der Ergebnisse ermöglichte.

Das *zweite Beispiel* stellt eine Untersuchung zur Wahrnehmung von Unterrichtssituationen aus Sicht von Lehrkräften dar (Kuntze, 2008, 2006b), bei der unter anderem die Intensität des argumentativen Austauschs zwischen den am Unterricht Beteiligten als unterrichtsqualitätsrelevantes Einschätzungskriterium betrachtet wurde. Der theoretische Hintergrund der Untersuchung bezog sich auf Unterrichtsqualitätsmerkmale in Verbindung mit der kognitiven Aktivierung (Clausen, Reusser & Klieme, 2003), die ihrerseits in Modellen zu Einflussgrößen auf verständnisvolles Lernen (Baumert & Köller, 2000) verankert werden kann. Als Indikatoren für das aus dem theoretischen Hintergrund abgeleitete Konstrukt „argumentativer Austausch“ wurden kumulative, hoch inferente Einschätzungen der Lehrkräfte betrachtet, die wiederum auf der untersuchungsmethodischen Ebene mit Fragebogen-Items zu verschiedenen videografierten Unterrichtssituationen erhoben wurden. Da Einschätzungen der 43 Lehrkräfte im Mittelpunkt standen, verfolgte die quantitative Auswertung das Interesse, über Veränderungen in den Einschätzungen der Lehrkräfte Entwicklungen in deren unterrichtsbezogenen Vorstellungen zur Unterrichtsqualität von Argumentationsphasen im Unterrichtsgespräch festzustellen, die als Folge einer videobasierten Fortbildung der Lehrkräfte erwartet wurden (vgl. Kuntze, 2006b). Die Beobachtung signifikanter Unterschiede in diesen situationsbezogenen Einschätzungen der Lehrkräfte kann dahingehend interpretiert werden, dass sich mit den situationsbezogenen Einschätzungen im Laufe der Fortbildung auch Entwicklungen im professionellen Wissen der Lehrkräfte vollzogen haben dürften.

In den beiden Beispielstudien sind jeweils pragmatische Lösungen zu den vorgestellten Bereichen von Herausforderungen getroffen worden, wodurch der Problematik des Umgangs mit Komplexität und des notwendigen Ausblendens von Information bei videobasierten Untersuchungen Rechnung getragen wurde. Auch anhand der Beispielstudien wurde deutlich, dass die vorgestellten Ebenen an Herausforderungen sicherlich nicht völlig überschneidungsfrei sind, dass sie aber Orientierung für Konzeption und Reflexion von Untersuchungen bieten können.

Literatur

Baumert, J. & Köller, O. (2000). Unterrichtsgestaltung, verständnisvolles Lernen und multiple Zielerreichung im Mathematik- und Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS/III*, Band 2. Opladen: Leske+Budrich.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7-8.

Clausen, M., Reusser, K. & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualität auf der Basis hochinferenter Unterrichtsbeurteilungen: Ein Vergleich zwischen Deutschland und der deutschsprachigen Schweiz. *Unterrichtswissenschaft*, 31(2), 122-141.

Kuntze, S. (2006a). *Themenstudienarbeit*. München: Verlag Dr. Hut.

Kuntze, S. (2006b). Video technology in the assessment of an in-service teacher learning program – Differences in mathematics teachers' judgements on instructional quality. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(5), 413-421.

Kuntze, S. (2008). Zusammenhänge zwischen allgemeinen und situiert erhobenen unterrichtsbezogenen Kognitionen und Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. *Unterrichtswissenschaft*, 36(2), 167-192.

Kuntze, S. & Reiss, K. (2004) . Unterschiede zwischen Klassen hinsichtlich inhaltlicher Elemente und Anforderungsniveaus im Unterrichtsgespräch beim Erarbeiten von Beweisen - Ergebnisse einer Videoanalyse. *Unterrichtswissenschaft*, 32(4), 357-379.

Kuntze, S., Rechner, M. & Reiss, K. (2004). Inhaltliche Elemente und Anforderungsniveau des Unterrichtsgesprächs beim geometrischen Beweisen - Eine Analyse videografierter Unterrichtsstunden. *mathematica didactica*, 27(1), 3-22.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 601-646). Weinheim: Beltz.

Stein, M. (1986). *Beweisen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Steinhöfel, W. & Reichold, K. (1971). Zur Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise im Mathematikunterricht (Teil 1). *Mathematik in der Schule*, 11, 700-707.

Dominik LEISS, Frankfurt, Kristina REISS, München, Stanislaw SCHUKAJLOW, Kassel & Luzia ZÖTTL, München

Moderierte Sektion: Empirische Leistungsuntersuchungen im Kompetenzbereich Modellieren

Die Entwicklung und Evaluation von Interventionsmaßnahmen und Herangehensweisen, die den Erwerb von Modellierungskompetenz begünstigen sollen, stellen wichtige Themen in der Modellierungsforschung dar. Laut Maaß (2006) gibt es in diesem Rahmen zwar zahlreiche Veröffentlichungen mit konkreten Modellierungsbeispielen, die im Schulunterricht eingesetzt werden können, detaillierte Untersuchungen zur Entwicklung und gezielten Förderung der Modellierungskompetenz sind jedoch nur in deutlich geringerem Maße vorzufinden. Drei Projekte, die an diesem Punkt ansetzen, sind COCA „*Consequences of classroom assessment*“ (Rakoczy et al. 2008), KOMMA „*Kompendium Mathematik*“ (Reiss et al. 2007) und DISUM „*Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht in Mathematik*“ (Leiss et al. 2008).

Modellierungskompetenz in COCA, KOMMA und DISUM

Allen Projekten ist gemein, dass sie einen *ganzheitlichen Ansatz* verfolgen. Nach Haines, Crouch und Fitzharris (2003) bedeutet dies, dass der Erwerb von Modellierungskompetenz durch die Beschäftigung mit vollständigen Modellierungsaufgaben erfolgen soll. Dabei ist es in der Regel sinnvoll zunächst solche Problemstellungen zu verwenden, die vergleichsweise einfach gelöst werden können, wohingegen im weiteren Verlauf das Anforderungsniveau mit wachsender Kompetenz zu steigern ist.

Trotz dieser Gemeinsamkeit weisen die drei Projekte bezüglich ihrer Realisierung deutliche Unterschiede auf. Während in KOMMA der Fokus auf dem anfänglichen Kompetenzerwerb mit Hilfe so genannter *heuristischer Lösungsbeispiele* liegt, wird in DISUM der Kompetenzerwerb durch Problemlösen im Rahmen eines *operativ-strategischen Unterrichts* erprobt. Ganz im Gegensatz dazu befasst sich COCA weniger mit einer spezifischen Lehr-Lernform der Beschäftigung mit Modellierungsaufgaben, sondern vielmehr mit den Auswirkungen verschiedener Arten von Feedback auf die Entwicklung motivationaler Variablen und Schülerleistungen.

Evaluation der Fördermaßnahmen

Ein grundlegender Aspekt, der die Projekte aber wiederum verbindet, betrifft die Evaluation der jeweiligen Förderungsmaßnahme. So erfolgt diese in allen Projekten primär über Testinstrumente, die eine quantitative Auswertung der Leistungsentwicklung anstreben. Methodologisch zeigte sich dabei, dass eine gezielte Erfassung von Modellierungskompetenz insbesondere auch einer Betrachtung der relevanten Teilkompetenzen des Modellierens und damit auch entsprechend konstruierter Items bedarf. Solche Teilkompetenzen des Modellierens werden dazu in Anlehnung an den Modellierungskreislauf von Blum und Leiss (2005) aus den dort beschriebenen unterschiedlichen Phasen des Modellierungsprozesses abgeleitet. So wurden neben Items, die einen vollständigen Durchlauf durch den Modellierungskreislaufs erfordern, u.a. Aufgaben konstruiert, die lediglich

- das realitätsbezogene Verstehen der Aufgabenstellung erfordern, ohne dass diese im Folgenden bearbeitet werden musste.
- die für die Bearbeitung der behandelten Modellierungsaufgaben benötigten innermathematischen Fertigkeiten abtesten.
- die Interpretation und Validierung eines aus einer gegebenen Modellierung stammenden mathematischen Resultats erfordern.

Aufgrund des zusätzlichen Einbezugs auch qualitativer und stoffdidaktischer Analysen ermöglicht dies, differenziertere Aussagen über Einstellungs- und Leistungsveränderungen der Lernenden zu treffen, welche im Folgenden projektspezifisch dargestellt werden.

Literatur

Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren, 128*, 18–21.

Haines, C., Crouch, R. & Fitzharris, A. (2003). Deconstruction Mathematical Modelling: Approaches to Problem Solving. In Q.-X. Ye, W. Blum, K. Houston & Q.-Y. Jiang (Hrsg.), *Mathematical Modelling in Education and Culture: ICTMA 10* (S. 41–53). Chichester: Horwood Publishing.

Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S. & Pekrun, R. (2008). Modellieren lehren und lernen in der Realschule. In E. Vasarhélyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008* (77-80). Münster: WTM Verlag.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didakitk der Mathematik, 38*(2), 113–142.

Rakoczy, K., Klieme, E., Bürgermeister, A. & Harks, B. (2008). The interplay between student evaluation and instruction. *Zeitschrift für Psychologie, 2*, 111-124.

Reiss, K., Pekrun, R., Kuntze, S., Lindmeier, A., Nett, U. & Zöttl, L. (2007). KOMMA: Ein Projekt zur Entwicklung und Evaluation einer computergestützten Lernumgebung. *GDM-Mitteilungen, 83*, 16–17.

Dominik LEISS, Anika BÜRGERMEISTER, Birgit HARKS, Eckhard KLIEME, Katrin RAKOCZY, alle Frankfurt am Main; Werner BLUM, Kassel

Consequences of Classroom Assessment - Vorstellung des Projekts CoCa[1]

Anknüpfend an die aktuelle Diskussion um den Einsatz formativer und summativer Leistungsmessungen im Unterricht (vgl. Shepard, 2000) steht im Projekt COCA die Untersuchung von Nutzung und Folgen unterrichtsnaher (formativer) bzw. inhaltsbreiter (summativer) Tests sowie darauf basierender Feedbackvarianten im Vordergrund des Interesses. Die zentralen Fragestellungen des Projekts sind dementsprechend u.a.

I. Eignen sich aktuelle psychometrische Verfahren (mehrdimensionale IRT-Modelle mit qualitativ unterschiedlichen Niveaus), um relativ kurzfristige Lernvorgänge (z.B. eine Unterrichtseinheit mit ca. vier bis sechs Wochen) zu erfassen?

II. Können dabei mathematische Kompetenzen, wie sie etwa bei den Bildungsstandards Mathematik (vgl. Leiss & Blum 2006) beschrieben werden, psychometrisch getrennt werden?

III. Welche Folgen haben die Durchführung von unterrichtsnahen bzw. inhaltsbreiten Tests sowie unterschiedliche Rückmeldeformen (prozessbezogen, sozial-vergleichend, kriterial – genauer siehe weiter unten) der Testergebnisse auf das Leistungsverhalten sowie auf kognitive und motivationale Zielvariablen?

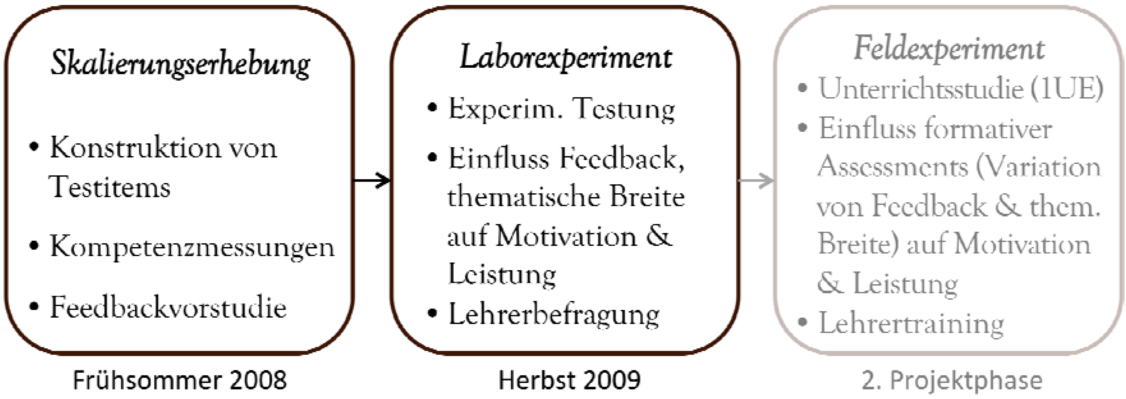
IV. Welche Voraussetzungen – beispielweise Einstellungen, diagnostische und andere Kompetenzen – auf Seiten der Lehrenden sind bestimmend für die Gestaltung der Leistungsbewertung und welche Folgen hat diese wiederum für Motivation und Kognition der Lernenden?

Design

COCA fokussiert seine Untersuchungen auf Realschulklassen bzw. B-Kurse des Jahrgangs 9, auf technische Kompetenzen [TK] und Modellierungskompetenzen [MK] sowie auf die beiden Inhaltsbereiche Pythagoras und Lineare Gleichungssysteme. Das zugrunde liegende Design für die auf drei Projektphasen mit je zwei Jahren ausgerichteten Studien sieht dabei folgendermaßen aus:

---

[1] Hierbei handelt es sich um ein von der DFG im Rahmen des Schwerpunktprogramms "Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen " gefördertes Projekt (Projektleiter: Prof. Dr. E. Klieme)



Im Folgenden wird kurz die abgeschlossene Skalierungserhebung dargestellt; über die folgenden Studien wird an anderer Stelle berichtet.

Skalierungserhebung

Das primäre Ziel der Skalierungserhebung bestand zum einen darin, ausreichend Items für die vorgesehenen Inhaltsgebiete und die entsprechenden Kompetenzen für die anstehenden Labor- und Unterrichtstudien zu entwickeln und zu skalieren, und zum anderen darin, bei der Aufgabenpilotierung erste Feedbackvarianten empirisch zu erproben bzw. zu analysieren. Dementsprechend stand am Anfang dieser Studie die Konstruktion einer hinreichend großen Zahl (131) von Items. Dabei wurden neben Aufgaben, welche die Kompetenzen in ihrer Gänze verlangen, auch solche Items konstruiert, die das Vorwissen zu den Themengebieten systematisch erfassen oder einzelne Teilkompetenzen des Modellierens abtesten, und es wurden Parallelaufgaben entwickelt, bei denen systematische Variationen zur Bestimmung von schwierigkeitsbestimmenden Merkmalen vorgenommen wurden. Die Items wurden in einem Multimatrixdesign an ca. 1500 hessischen Schülern pilotiert. Dabei erfüllten 92% die psychometrischen Anforderungen an gute Testaufgaben, so dass prinzipiell ausreichend Items aus beiden Kompetenz- und Inhaltsbereichen vorhanden waren. Dabei zeigte eine zweidimensionale Skalierung (mit Einfachladung) des Tests mit den beiden Dimensionen *Technisches Arbeiten* und *Modellieren* zwar eine relativ hohe Korrelation (.87) zwischen diesen Dimensionen, allerdings hatte dieses Modell signifikant bessere Fitwerte (AIC/ BIC/ CAIC) als ein eindimensionales Modell, das nur von einem allgemeinen Konstrukt *mathematische Fähigkeit* ausgeht. Insofern handelt es sich bei Modellierungskompetenz und Technischer Kompetenz nicht nur um theoretisch sondern auch um psychometrisch differenzierbare Personenfähigkeiten, so dass mit diesen Tests nun Instrumente vorliegen, die es erlauben, getrennt nach den beiden Kompetenzen sensible Leistungs(fortschritts)messungen im schulischen Leistungsspektrum vorzunehmen (vgl. Abb. 1).

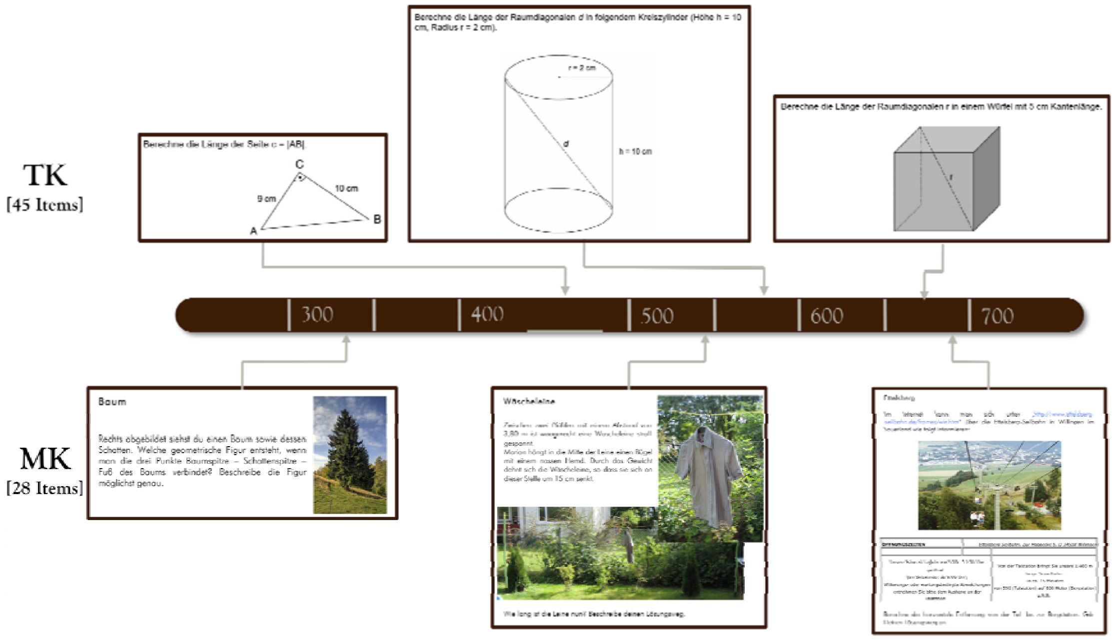


Abb. 1: Kompetenz- und inhaltsspezifisches Aufgabenspektrum am Beispiel Pythagoras

Zudem zeigte sich eine Fülle an interessanten Einzelergebnissen wie z.B. dass bei der Aufgabenvariation die Aufgabenvariante mit einem ausführlicheren Text bei Modellierungsaufgaben durchaus mit höheren Lösungsquoten verbunden sein kann als die Aufgabenvariante mit weniger Text oder dass insbesondere Aufgaben, welche die Teilkompetenz „Validieren“ abzuprüfen versuchen, einen relativ hohen Schwierigkeitsgrad aufweisen.

Parallel zur Testung der Schüler wurde ein Großteil der beteiligten Lehrpersonen mithilfe eines Fragebogens zu verschiedenen Aspekten ihres Mathematikunterrichts, aber auch zur Leistungsstärke der Einzelschüler befragt. Ergebnisse dieser Befragungen waren u.a., dass

- eine verbale Rückmeldekultur, verbunden mit verschiedenen lehrer- und notenzentrierten Bewertungsformen, im Unterricht dominieren,
- partizipative Formen (Selbst- oder Peer-Evaluation) insgesamt selten sind und sich vergleichsweise häufig bei Lehrern mit guten diagnostischen Kenntnissen (laut Selbsteinschätzung) finden,
- lehrer- und notenzentrierte Rückmeldungen mit niedriger Motivation und eine aus Schülersicht ipsative Bezugsnormorientierung der Lehrperson mit einer hohen Motivation der Schüler einhergehen,
- hohe diagnostische Kompetenz der Lehrpersonen mit besseren Testleistungen der Schüler verbunden ist.

Fünf Monate nach der Skalierungserhebung erhielten die Schüler von 14 Klassen eine individuelle Rückmeldung, wobei die drei folgenden Formen des Feedbacks eingesetzt wurden.[2]

1. Prozessbezogenes Feedback
   Hierbei werden den Schülern anhand ihrer Aufgabenlösungen ihre individuelle Stärken und Schwächen erläutert.

2. Sozial-vergleichendes Feedback
   Bei dieser Variante wird den Lernenden rückgemeldet, wie leistungsstark sie im Vergleich zur durchschnittlichen Klassenleistung in den beiden untersuchten Kompetenzen TK und MK sind.

3. Kriteriales Feedback
   Bei diesem Feedback wird die Schülerleistung mit normativ gesetzten Lernzielen (für Realschüler/innen der Jahrgangsstufe 9) verglichen. Die individuelle Schülerleistung und das Lernziel werden dabei anhand eines Kompetenzstufenmodells – getrennt für technische Kompetenz und Modellierungskompetenz – dargestellt.

Im Anschluss an das Feedback mussten die Schüler/innen einen Fragebogen zur emotionalen und motivationalen Wirkung des Feedbacks ausfüllen. Im Verhältnis der drei Feedbackarten wurde dabei das kriteriale Feedback von den Lernenden vergleichsweise positiv beurteilt. Unter der Bedingung, dass zwischen Testung und Feedback mehrere Monate liegen – was beispielsweise bei vielen Large Scale Erhebungen der Fall ist –, scheint also eine kriteriumsbezogene Rückmeldung den größten motivationalen Effekt zu haben. Der Einfluss unterschiedlicher Feedbackformen auf Motivation und Leistung bei zeitnaher Rückmeldung soll in den folgenden Experimenten untersucht werden.

Literatur

Shepard, L. (2000). The role of assessment in a learning culture. Educational researcher, 29 (7), 4-14.

Leiss, D. & Blum, W. (2006): Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In: Blum, W. et al. (Hg.). Bildungsstandards Mathematik: konkret. Berlin: Cornelsen Scriptor, 33-50.

[2] Die drei Rückmeldebedingungen wurden hinsichtlich der durchschnittlichen Testleistung der Schüler/innen parallelisiert. Die parallelisierte Zuordnung erfolgte über die Klassen hinweg.

Luzia ZÖTTL & Kristina REISS, München

Lösungsbeispiele zum Einstieg in das Modellieren – Erste Ergebnisse aus KOMMA

Kernpunkt des Projekts KOMMA[1] ist die Gestaltung und Evaluation einer computergestützten Lernumgebung für die Sekundarstufe I, die Lerngelegenheiten zum Erwerb *allgemeiner mathematischer Kompetenzen* im Sinne der Bildungsstandards (KMK 2003) bietet. Die Evaluation der Lernumgebung erfolgte unter anderem im Bereich Geometrie in der 8. Jahrgangsstufe (Reiss, Pekrun, Kuntze, Lindmeier, Nett, & Zöttl, 2007). Hierbei lag der Schwerpunkt auf der Förderung von Modellierungskompetenz.

Modellierungskompetenz

Als Modellierungskompetenz werden hier solche kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten bezeichnet, die notwendig sind, um Modellierungsprozesse zielgerichtet und angemessen durchführen zu können. Eine genauere Betrachtung solcher Modellierungsprozesse (etwa im Sinne des Modellierungskreislaufs von Blum und Leiss, 2005) führt zur Identifikation von so genannten Sub-Kompetenzen, die für erfolgreiches Modellieren notwendige sind.

Damit hängt individuelle Modellierungskompetenz beziehungsweise deren Ausprägungsgrad maßgeblich davon ab, ob und gegebenenfalls über welche Sub-Kompetenzen eine Person verfügt. Neben der Aktivierbarkeit entsprechender Sub-Kompetenzen spielt jedoch auch deren Koordination und damit Meta-Wissen über den Modellierungsprozess eine wesentliche Rolle. Diesem weiteren Aspekt wird in einem Kompetenzmodell von Niss und Jensen (Jensen 2007, S. 143–144) Rechnung getragen. So bestimmen ihrer Meinung nach der *degree of coverage,* der *radius of action* und das *technical level* einer Person, wie kompetent diese in Bezug auf Modellieren einzustufen ist. Dabei zeigt der *degree of coverage* an, welche Aspekte oder Sub-Kompetenzen eine Person beim Modellieren zu aktivieren vermag und inwieweit dies selbständig erfolgt. Der *radius of action* hingegen bezieht sich auf das Spektrum an Kontexten und Situationen, in denen erfolgreich modelliert werden kann. Dabei ist ein großer Aktionsradius dann gegeben, wenn Modellierungsprobleme mit unterschiedlichem situativem Kontext oder auch aus verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen bewältigt werden. Das *technical level* dagegen betrifft die mathematische Komplexität der Werkzeuge und Konzepte, die für eine Modellierung herangezogen werden können.

[1] Das Projekt wird vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert (Bew.-Nr. PLI3032).

Heuristische Lösungsbeispiele

Aufgrund der Tatsache, dass Schüler der 8. Jahrgangsstufe in der Regel vergleichsweise wenig Erfahrung mit der Bearbeitung vollständiger Modellierungsaufgaben, im Gegensatz zu lediglich eingekleideten Aufgaben, haben dürften, wurde die Lernumgebung auf die Bedürfnisse eines anfänglichen Fähigkeitserwerbs im Bereich Modellieren ausgerichtet. So sollten so genannte *heuristische Lösungsbeispiele* die Schüler an die für einen erfolgreichen Modellierungsprozess relevanten heuristischen Strategien heranführen.

Heuristische Lösungsbeispiele sind ausgearbeitete Lösungen die aus einer Problemstellung, der Abbildung eines Lösungsprozess sowie der Lösung selbst bestehen (Reiss & Renkl 2002). Hierbei wird nicht ein optimierter Lösungsweg präsentiert, sondern – häufig realisiert im Rahmen eines Dialogs zweier fiktiver Problemlöser – ein realistischer Bearbeitungsprozess dargestellt, der sowohl tentative als auch explorative Schritte einschließt (Hilbert, Renkl, Kessler, & Reiss, 2008). Zudem werden angelehnt an ein entsprechendes Prozessmodell relevante heuristische Strategien expliziert (Zöttl & Reiss, 2008).

Die im Bereich des Mathematischen Begründens und Beweisens entwickelte Methode hat sich dort bereits als erfolgreich erwiesen. Insbesondere zeigte sich, dass vor allem leistungsschwächere Schüler wesentlich vom Einsatz der Beispiele profitieren (Reiss, Heinze, Kuntze, Kessler, Rudolph-Albert, & Renkl, 2006).

Für die Untersuchungen im Projekt KOMMA stellt sich somit einerseits die Frage ob das Prinzip der heuristischen Lösungsbeispiele auch im Bereich des Modellierens erfolgreich eingesetzt werden kann. Zum anderen ist zu überprüfen, ob auch hier Schüler mit einer anfänglich geringer ausgeprägten Modellierungskompetenz stärker von der Arbeit mit der beispielbasierten Lernumgebung profitieren, als Schüler mit vorab besser ausgeprägter Modellierungskompetenz.

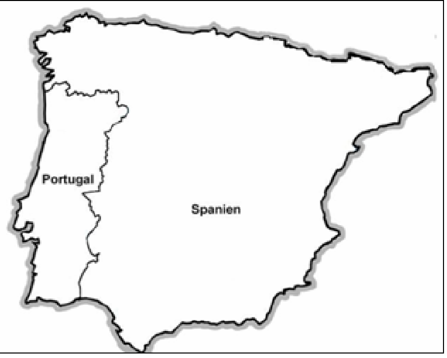
Erfassung der Modellierungskompetenz

Zur Überprüfung dieser Fragestellungen wurde ein spezifischer Modellierungstest entwickelt, der sich dadurch auszeichnet, dass er die im Kompetenzmodell von Niss und Jensen (2007) dargelegten Aspekte weitestgehend berücksichtigt. So wurden Items mit unterschiedlichen Kontexten integriert und darauf geachtet, dass zur Lösung der Aufgaben verschiedene mathematische Werkzeuge erforderlich sind und die Komplexität der technischen Anforderungen variiert. Dies wurde realisiert durch Aufgaben, die lediglich einen Rechenschritt oder entsprechend mehrere Schritte erfordern. Inhaltlich lassen sich die Aufgaben in die Umfangs- und Flächenmessung von Rechteck, Dreieck und Kreis einordnen. Auf die beschriebene Weise wurde den ersten beiden Aspekten (*radius of action* und *technical level*) Rechnung getragen.

Zudem wurden für den Test Items konstruiert, die ein unterschiedliches Maß an *degree of coverage* erfordern. Dies führt zu vier verschiedene Itemtypen, von denen drei jeweils nur das Durchlaufen eines spezifischen Teils des Modellierungsprozesses erfordern, wohingegen der vierte Itemtyp eine vollständige Modellierung erfordert. Eine exemplarische Aufgabenstellung für den Itemtyp 4 ist der folgenden Abbildung zu entnehmen (die Abbildung der Karte ist hier verkleinert dargestellt):

Portugal hat eine Landesfläche von 92 117,5 km^2.

Schätze aus der Karte ab, wie groß die Landesfläche von Spanien ist. Dein Vorgehen muss nachvollziehbar sein! (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn Dir das hilft.)



Untersuchung im Rahmen des Projekts KOMMA

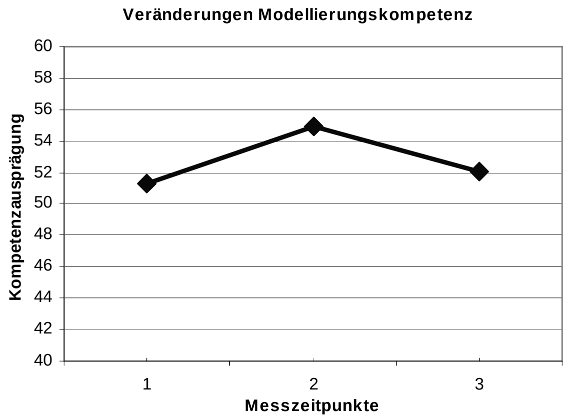
Zur Beantwortung der Fragestellungen wird zunächst nur eine der vier untersuchten Treatmentgruppen und damit eine Teilstichprobe der KOMMA Studie herangezogen. Sie hat einen Umfang von 316 Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgansstufe am Gymnasium. Diese Versuchspersonen arbeiteten mit einer computergestützten Version der Lernumgebung, bei der die Reihenfolge der zu bearbeitenden Beispiele vorgegeben war und die somit ein vergleichsweise geringes Maß an Selbstregulation erlaubte.

Das Treatment umfasste insgesamt fünf Unterrichtsstunden à 45 Minuten. Während der ersten Unterrichtsstunde erhielten die Lernenden zunächst eine Einführung in das Computerprogramm sowie in den Inhaltsbereich Kreisflächenmessung. Erst in den darauf folgenden weiteren vier Stunden arbeiteten sie mit den Lösungsbeispielen und mit so genannten Übungsaufgaben, die eine langsame Überführung zu eigenständigem Modellieren ermöglichen sollten.

Vor der Bearbeitung des Treatments wurde mit Hilfe des oben beschriebenen Testinstruments in einem Vortest zunächst die anfängliche Modellierungskompetenz der 316 Probanden erfasst. Ein Nachtest, im direkten Anschluss an das Treatment, und ein Follow-Up-Test, ca. 4 Monate später, ermöglichen damit die Betrachtung des entstandenen Leistungszuwachses.

Erste Auswertungen weisen darauf hin, dass die lösungsbeispielbasierte Lernumgebung KOMMA zumindest kurzfristig zu einer Steigerung der Modellierungskompetenz führt und damit eine probate Methode zu deren Förderung darstellt. So zeigte eine ANOVA eine signifikante Leistungsveränderung zwischen den drei Messzeitpunkten. Aus der post-hoc Analyse wird deutlich, dass dies auf kurzfristige positive Effekte der Intervention zurückzuführen ist (siehe Abbildung unten links).

Ähnlich wie bereits in den Untersuchungen von Reiss et al. (2008) scheint die Arbeit mit den Lösungsbeispielen in der Lernumgebung auch im Bereich Modellieren für Schüler mit einer anfänglich schwächeren Modellierungsleistung deutlich geeigneter als für anfänglich stärkere Modellierer.



Literatur

Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren*, *128*, 18–21.

Hilbert, T., Renkl, A., Kessler, S. & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning & Instruction, 18*, 54–65.

Jensen, T. (2007). Assessing Mathematical Modelling Competencies. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Hrsg.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, engeneering and economics* (S. 141–148). Chichester: Horwood Publishing.

Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss*. Bonn: KMK.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 194–208). Münster: Waxmann.

Reiss, K., Pekrun, R., Kuntze, S., Lindmeier, A., Nett, U. & Zöttl, L. (2007). KOMMA: Ein Projekt zur Entwicklung und Evaluation einer computergestützten Lernumgebung. *GDM-Mitteilungen, 83*, 16–17.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(1), 29-35.

Zöttl, L. & Reiss, K. (2008). Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Lösungsbeispielen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, 189-192.

Werner BLUM, Kassel; Stanislaw SCHUKAJLOW, Kassel; Dominik LEISS, Kassel/ Frankfurt am Main; Rudolf MESSNER, Kassel

Selbständigkeitsorientierter Mathematikunterricht im ganzen Klassenverband? Einige Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt

1. Das DISUM-Projekt

Die zentrale Frage im Projekt DISUM[1] lautet: Wie lässt sich eine kognitiv anspruchsvolle Fachkompetenz wie *Modellierungskompetenz* im Mathematikunterricht wirksam vermitteln? Zu DISUM siehe u.a. Leiss, Blum & Messner 2007; Schukajlow et al. 2009). In der sogenannten DISUM-Hauptstudie (siehe Leiss et al. 2008) wurde untersucht, wie sich bezüglich Schülerselbständigkeit unterschiedliche Lehr-Lernformen auf die Vermittlung von Modellierungskompetenz auswirken. Die Stichprobe bestand aus insgesamt 14 Realschulklassen des neunten Jahrgangs, die aus Gründen der Leistungshomogenisierung auf jeweils 16 Schüler reduziert wurden. In einer Zusatzstudie wurde dasselbe Untersuchungsdesign in 7 ganzen Klassen durchgeführt. Dies ermöglichte einen Vergleich zwischen Wirkungen von selbständigkeitsorientierten Unterrichtsformen in Klassen unterschiedlicher Größen. Über diesen Vergleich wird hier berichtet.

In der DISUM-Hauptstudie wurden die Wirkungen von zwei Unterrichtsformen auf die Kompetenzentwicklung der Lernenden verglichen. Es handelt sich dabei um zwei Optimalformen von Unterricht, wobei die „*direktive*“ Form wesentliche Elemente des wohlbekannten „*fragend-entwickelnden*“ Unterrichts modelliert (mit einer Mischung aus lehrergesteuerter Plenumsarbeit, orientiert am durchschnittlichen Leistungsniveau der Klasse, und übender Einzelarbeit der Schüler), während die „operativ-strategische“ Form stärker auf selbständiger, vom Lehrer gecoachter Schülerarbeit in Vierergruppen beruht (ebenfalls mit Plenumsphasen, vorwiegend bei Lösungspräsentationen durch die Schüler). Die zugehörige Unterrichtseinheit umfasste 10 Unterichtsstunden und lief in beiden Formen in derselben Struktur mit denselben Modellierungsaufgaben ab (für Details siehe Leiss et al. 2008). Unmittelbar vor und nach der Unterrichtseinheit wurden ein Leistungstest sowie Befragungen zu diversen Einstellungen und Überzeugungen der Schüler durchgeführt. Zudem gab es drei Monate später einen Follow-Up-Test, über den wir hier nicht berichten. Die jeweils 90minütigen Tests enthielten sowohl Modellierungsaufgaben als auch eher

[1] Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik, Leiter: W. Blum, R. Messner (beide Universität Kassel) und R. Pekrun (LMU München); seit 2005 gefördert von der DFG.

technisch orientierte Aufgaben zu den Themengebieten Lineare Funktionen und Satz des Pythagoras.

2. Die Spezialstudie

Die Fragestellung lautete also: *Gibt es Unterschiede in den Effekten bzgl. Leistungen bzw. Einstellungen zwischen operativ-strategischem Unterricht in 16er-Klassen und in ganzen Klassen?* Die entsprechende Frage wurde nicht für den direktiven Unterricht untersucht, da wir hier keine Unterschiede erwartet haben. Andere Untersuchungen weisen nämlich darauf hin, dass die Klassengröße im herkömmlichen Mathematikunterricht der Sekundarstufe kein signifikanter Einflussfaktor ist (u.a. Schrader 2001). Ein Problem solcher Studien besteht allerdings darin, dass oft das Treatment nicht klar festgelegt ist, was Effekte „verwischen" kann. Auch in Large-Scale-Assessment-Studien wie TIMSS und PISA konnten keine korrelativen Zusammenhänge zwischen Schülerleistungen und Klassengrößen festgestellt werden.

Über die Effekte der Klassengröße in einem stärker selbständigkeitsorientierten Unterricht liegen noch keine Befunde vor. Es ist plausibel, dass in einem Unterricht, in dem individuell diagnostiziert und interveniert wird, die Klassengröße doch eine gewisse Rolle spielt. Insofern lauteten die *Hypothesen* für diese Spezialstudie:

(1a) Der operativ-strategische Unterricht führt in beiden Varianten (kleine wie große Klassen) zu signifikanten Leistungszuwächsen.

(1b) Tendenziell gibt es in den kleinen Klassen größere Leistungszuwächse, diese unterscheiden sich aber nicht signifikant zwischen den beiden Varianten.

(2a) Der operativ-strategische Unterricht führt in beiden Varianten zu günstigeren Werten für z.B. Interesse, Selbstregulation, Emotionen sowie Aktivierungserleben.

(2b) Tendenziell gibt es in den kleineren Klassen größere Wahrnehmungsveränderungen, diese unterscheiden sich aber nicht signifikant zwischen den beiden Varianten.

Die Stichprobe für die Spezialstudie umfasste also zum einen sieben „kleine" Klassen mit je 16 Schülern, also 112 Schüler, und zum anderen fünf „große" Klassen mit insgesamt 129 Schülern (also ca. 26 Schüler pro Klasse). Zudem stand für Vergleichszwecke die erweiterte Stichprobe aus der Hauptstudie mit zusätzlich sieben „kleinen" direktiven Klassen, also mit weiteren 112 Schülern, zur Verfügung. Die Testergebnisse wurden auf eine Skala mit Mittelwert 500 und Standardabweichung 100 transformiert.

3. Ergebnisse

Abb. 1 zeigt die Zuwächse im Gesamttest für alle drei interessierenden Gruppen. Die Zuwächse sind in allen Gruppen signifikant, wobei der Unterschied zwischen den Zuwächsen der beiden in der Spezialstudie untersuchten Gruppen („kleine“ versus „große“ operativ-strategische Klassen) zwar deutlich, aber noch nicht signifikant ist. Dies liegt auch an den unterschiedlichen Startwerten, die sich u.a. dadurch ergeben haben, dass bei der Reduzierung der Hauptstudien-Klassen auf 16 Schüler eher die leistungsstärkeren Schüler abgeschnitten werden mussten.

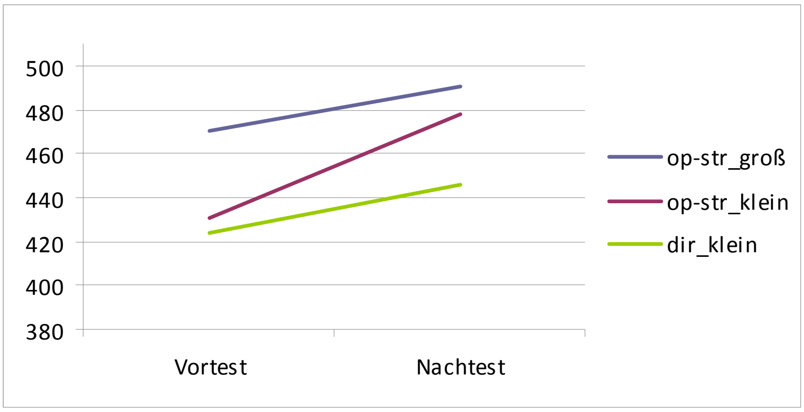


Abb.1 Veränderungen im Gesamttest

Interessant ist nun eine Betrachtung des Teiltests mit Modellierungsaufgaben. Es zeigt sich, dass auch hier signifikante Zuwächse in kleinen wie großen Klassen vorhanden sind (nicht aber bei den direktiv unterrichteten Klassen), und die Zuwachsunterschiede sind nicht signifikant. Modellierungskompetenz scheint also beim selbständigkeitsorientierten Unterricht sowohl in kleinen als auch in großen Klassen in ähnlicher Weise vermittelbar. Beim technischen Arbeiten sind die Zuwächse in den großen Klassen dagegen tendenziell geringer als in kleinen Klassen.

Bei den Einstellungen gab es ebenfalls interessante Veränderungen im Laufe der Unterrichtseinheit. So nahm das fachbezogene Interesse in allen untersuchten Gruppen signifikant zu, wobei es keine auf dem 5% Niveau signifikanten Unterschiede zwischen kleinen und großen Klassen gab. Die von den Schülern wahrgenommene Selbstregulation nahm nur in den kleinen operativ-strategischen Klassen signifikant zu, wobei die Unterschiede in den Zuwächsen der Selbstregulation zwischen großen und kleinen Klassen nur minimal ausfallen

4. Diskussion und Ausblick

Die oben berichteten Ergebnisse erlauben vorsichtige *Folgerungen* für den Unterricht. Erstens – das ist die wichtigste Botschaft – scheint selbständigkeitsorientiertes Lehren und Lernen von Modellieren auch in normal großen Klassen möglich zu sein und kann auch dort relevante Effekte in Bezug auf Leistungen und auf Einstellungen der Schüler haben. Zweitens scheint die Klassengröße beim selbständigen lehrergestützten Lernen doch einen gewissen begrenzten Einfluss auf die Leistungsfortschritte und auf einige Einstellungen zu haben. Dies könnte eine Rechtfertigung für die immer wieder erhobene Forderung nach kleineren Klassen sein. Freilich zöge eine Reduktion von Klassengrößen die Verpflichtung nach sich, dann auch einen Unterricht zu praktizieren, in dem sich diese Reduktion durch eine tatsächliche höhere individuelle Zuwendung auch auszahlt. Wie in der Literatur ‚mehrfach berichtet wird, ändert sich die Unterrichtspraxis nach einer Reduktion der Klassengröße keineswegs von selbst. Die Lehrenden müssten deswegen gezielt für das Unterrichten in kleineren Klassen fortgebildet werden.

Ein normativer Blick auf die Ergebnisse zeigt allerdings ein weiterhin hohes Optimierungspotential, insbesondere durch eine Verknüpfung von Elementen beider untersuchter Unterrichtsformen, durch die Berücksichtigung metakognitiver Elemente für Schüler (Einsatz des „Lösungsplans", siehe Blum 2006) und durch einen Ausbau von Übungs- und Durcharbeitungsphasen. Dies ist Inhalt von derzeit laufenden DISUM-Studien. Ziel ist die Untersuchung von Wirkungen eines optimierten „methodenintegrativen“ Unterrichtsdesigns zum Modellieren über längere Zeiträume hinweg.

Literatur

Blum, W. (2006). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis (Hrsg.: A. Büchter u. a.). Franzbecker, Hildesheim, 8-23

Leiss, D., Blum, W. & Messner, R. (2007). Die Förderung selbstständigen Lernens im Mathematikunterricht – Problemfelder bei ko-konstruktiven Lösungsprozessen. *JMD*, 28(3/4), 224-248.

Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S. & Pekrun, R. (2008). Modellieren lehren und lernen in der Realschule. In Beiträge zum Mathematikunterricht (pp. 370-373). Münster: WTM Verlag.

Schrader, F.-W. (2001). Klassengröße und Mathematikleistung. *Empirische Pädagogik*, 15, 601-625.

Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., Pekrun, R., Leiss, D. & Müller, M. (2009). Unterrichtsformen, Emotionen und Anstrengung als Prädiktoren von Schüler-Leistungen bei anspruchsvollen mathematischen Modellierungsaufgaben. *Unterrichtswissenschaft*.

Matthias LUDWIG, Weingarten und Reinhard OLDENBURG, Frankfurt

Moderierte Sektion: Raumgeometrie Lernen: Die Bedeutung realer und mentaler Modelle von Körpern und deren Konstruktion

Reinhard OLDENBURG, Frankfurt

Vorstellungen von Konfigurationen und raumgeometrischen Konstruktionen

Es gibt mittlerweile zwei erfolgreiche dynamische Raumgeometrieprogramme: Archimedes Geo 3D und Cabri 3D. Trotz ihres Erfolges soll hier gefragt werden, welche Alternativen Zugänge es zu raumgeometrischen Konstruktionen gibt und welche Vorstellungen diese bei den Lernenden ausbilden aber auch erfordern. Die Perspektive dabei ist die der didaktischen Softwareentwicklung (Didaktik als design science im engeren Sinne).

Mentale Modelle von Software

Man kann Software nur sinnvoll nutzen, wenn man ein mentales Modell ihrer Arbeitsweise entwickelt. Mentale Modelle sind dabei (nach Dutke 1994) hypothetische Konstrukte, die grundsätzlich die gleichen Merkmale wie allgemeine Modelle besitzen. Sie sind schwer revidierbar, wenn sie nützlich, aber offensichtlich unzureichend sind. Häufig stützen sich häufig auf Analogien. Weigand (2007) findet für die Didaktik der Informatik vor allem den Spezialfall „Intuitiver Mentaler Modelle" nützlich, die über ihre Selbstevidenz zu einer intrinsischen Gewissheit aufgrund ihrer Persistenz und Zwanghaftigkeit führen. Es ist naheliegend, dass Geometrieprogramme schnell zur Bildung von intuitiven mentalen Modellen führen, auch wenn diese nicht immer dauerhaft sind.

Bei Mathematikprogrammen sollte man unterscheiden zwischen:

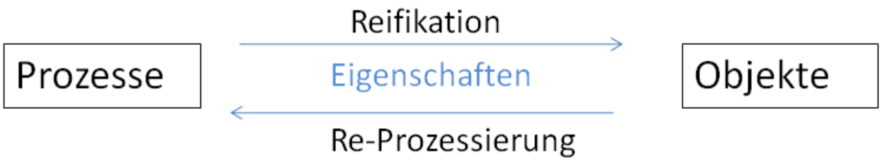
- Mentalen Modellen zum Gegenstand (Mental Model of Mathematical content M^3C)
- Mentalen Modellen zur informatischen Modellierung der mathematischen Objekte (Mental Model of Content Model M^2CM)

Dies soll am Beispiel der reellen Zahlen erläutert werden: Das M^3C könnte das eines Punktes auf dem Zahlenstrahl oder einer beliebige Dezimalzahl sein, während das M^2CM das einer 15-stelligen-Fließpunktzahl sein könnte.

Auch jeder Entwickler eines Mathematikprogramms braucht mentale Modelle. Das Programm als sein Produkt kodiert seine mentalen Modelle und der Benutzer (re)konstruiert seine eigenen Modelle in dessen Rahmen. Es liegt die Hypothese nahe, dass die Raumgeometriesoftware wesentlich bestimmt, welche mentalen Modelle von geometrischen Objekten viabel sind.

Im weiteren Beitrag werden vor allem zwei Fragestellungen diskutiert: Die Modellierung des Konstruktionsbegriffs (was ist mein M³C von Raumgeometrischer Konstruktion?) und die Implementation (CM= content model).

Dabei spielt die bekannte Objekt-Prozess-Dualität eine interessante Rolle: Während nach der Reifikationstheorie Prozesse verdinglicht werden und so Objekte bilden, setzt die Arbeit mit einem Raumgeometrieprogramm genau die umgekehrte Richtung voraus: Vorstellungen von Objekten müssen in Konstruktionsprozesse rückübersetzt werden. Für diesen Vorgang schlage ich den Begriff der Re-Prozessierung vor.



Der klassische Konstruktionsbegriff: Objekte mit Relationen

Schon zweidimensionale dynamische Geometrieprogramme realisieren (leicht) unterschiedliche Konstruktionsbegriffe. Wenn man von diesen Unterschieden absieht, erkennt man als Gemeinsamkeit, dass eine Folge von Objekten konstruiert wird, bei denen das jeweils neue Objekt funktional von den bereits konstruierten abhängt (Goebel & Oldenburg 2008), und dieser Konstruktionsbegriff überträgt sich problemlos in den Raum.

Konstruktion als Gleichungssystem: Algebraische Modellierung

Geometrische Beziehungen können als algebraisches Gleichungssystem modelliert werden wie im System FeliX des Autors. Dann bilden sowohl die Objekte als auch die Relationen Mengen, die in beliebiger Reihenfolge erstellt werden können. Man hat so eine „Konstruktion ohne Konstruktion“, was zwar (wie ein Prototyp von FeliX3D zeigt) schnelle Konstruktionserfolge bringt, was aber die schöne Möglichkeit, Konstruktionsaufgaben zur Förderung des Problemlösens einzusetzen, zerstört. FeliX wurde ja auch primär zur Förderung des algebraischen Denkens entwickelt.

Konstruktion als Reihenfolge von Objekten

Die oben dargestellten Schwierigkeiten mit halbfreien Objekten können ausgeräumt werden, wenn der Konstruktionsbegriff so geändert wird, dass es keine prinzipielle Unterscheidung mehr zwischen freien, halbfreien und eindeutig konstruierten Objekten gibt. Ein solcher Konstruktionsbegriff soll hier dargestellt werden. Dabei wird eine Konstruktion verstanden als eine Tabelle der folgenden Art:

Name	**Art**	**Relationen**
P	Punkt	-
Q	Punkt	Abstand zu Q=5
T	Punkt	Koordinaten=(1,2,3)
g	Gerade	Geht durch P und Q
s	Strecke	Anfangspunkt=P; senkrecht zu g
E	Ebene	Parallel zu s; parallel zu g

Der zeilenweise Aufbau stellt die Schritte der Konstruktion dar. Jedem Objekt können Relationen auferlegt werden, die es erfüllen soll. Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die Reihenfolge, in der die Relationen eingetragen werden, offen ist. Man braucht nicht gleich bei der Erzeugung eines Objektes alle Eigenschaften kennen, sondern es können schrittweise Relationen hinzugefügt werden, bis das Objekt so festgelegt ist, wie es der Intention des Benutzers entspricht. Entscheidend dafür, dass es sich trotz dieser Freiheit um einen effektiv ausführbaren Konstruktionsbegriff handelt ist die Einhaltung der folgenden Regel: Die Relationen, die zu jedem Objekt angegeben werden, dürfen das Objekt nur durch Verweis auf andere Objekte spezifizieren, die in der Tabelle vorher spezifiziert worden sind, also oberhalb stehen. Durch diese Vorschrift bleibt die Konstruktion leicht berechenbar.
Dieser Konstruktionsbegriff ist implementierbar (eine proof-of-concept-Implementation existiert, siehe Goebel&Oldenburg 2008) und effektiv ausführbar, denn der Zeitbedarf steigt nur linear mit der Zahl der Objekte solange die Zahl der Relationen für jedes einzelne Objekt beschränkt ist.
Mit einem 3D-DGS, das auf diesem Konstruktionsbegriff aufbaut, kann effektiv gearbeitet werden. Allerdings erfordert es durchaus ein planvolles Vorgehen: Wenn man etwa zwei Punkte erzeugt und *s* als die Strecke zwischen ihnen definiert, dann ist es sinnlos, die Länge von *s* durch eine Relation an *s* zu spezifizieren, denn man würde dann nichterfüllbare Relationen postulieren: Die Lage von *s* ist nämlich schon durch die Endpunkte eindeutig gegeben. Stattdessen könnte man eine Abstandsbedingung an die beiden Punkte stellen. Im nahe liegenden mentalen Modell ist aber die Strecke Träger Abstandseigenschaft, nicht das Punktepaar, d.h. dass dieser Konstruktionsbegriff zumindest in dieser Hinsicht nicht intuitiv ist.

Konstruktion als Reihenfolge von Relationen

Es erscheint natürlich, dass Konstruktionen im Wesentlichen vorgeben, in welcher Reihenfolge die Objekte konstruiert werden. Die algebraische Modellierung zeigt aber schon, dass das nicht denknotwendig ist, und in der

Tat könnte man sogar den Standpunkt vertreten, bei Konstruktionen sollten nicht die Objekte eine Konstruktionsreihenfolge haben, sondern die Relationen eine Erfüllungsreihenfolge. Wenn man reale Konstruktionen mit einem Baukasten durchführt, dann existieren alle verfügbaren Objekte von Anfang an, sie liegen ungeordnet im Kasten. Indem man zwei Objekte fasst und zusammensteckt stellt man eine Relation zwischen ihnen her. Jeder Bauschritt bestimmt also eine neue Relation von Objekten die schon vorher ungeordnet existierten.

Erste Experimente zeigen, dass sich ein solcher Konstruktionsbegriff nur mit großen Schwierigkeiten realisieren lässt. Der Prototyp (noch?) zeigt viele Artefakte, die das Bilden eines M²CM erschweren. Ein zentrales Problem ist zu entscheiden, welche Variablen (Freiheitsgrade) benutzt werden, um eine Relation zu erfüllen. Wenn etwa ein Punkt auf eine Kugel gesetzt wird, reduziert das die Wahl seiner Freiheitsgrade von drei auf zwei. Wenn der Punt in kartesischen Koordinaten beschreiben wird, muss man ggf. alle drei Koordinaten setzen, um die Relation zu erfüllen.

Trotz dieser technischen Schwierigkeiten könnte dieser Zugang ein großes didaktisches Potential haben, weil er eine Re-Prozessierung in natürlichen Teilprozessen ermöglicht.

Fazit

Die Wahl der zugelassenen elementaren Konstruktionsschritte war schon immer ein Thema der Didaktik (Diskussion ums Geodreieck). In der Raumgeometrie sind die Möglichkeiten noch vielfältiger. Die Frage, welche M²CM Lernende bilden, ist ebenso offen wie die stoffdidaktische Frage, welcher Konstruktionsbegriff logisch konsistent, technisch realisierbar und kognitiv herausfordernd ist. Der Beitrag sollte aufzeigen, wie vielfältig und unerschlossen dieses Forschungsgebiet ist.

Literatur

Dutke, St. (1994). *Mentale Modelle: Konstrukte des Wissens und Verstehens. Kognitionspsychologische Grundlagen für die Software-Ergonomie*. Göttingen: Verl. für Angewandte Psychologie.

Goebel, A., Oldenburg, R. (2008). *Konstruktionsbegriffe für die 3D-Raumgeoetrie*. Tagungsband des AK Mathematikunterricht und Informatik.

Weigend, M. (2007). *Intuitive Modelle der Informatik*. Potsdam: Universitätsverlag.

Karsten LUIG & Rudolf STRÄSSER, Gießen

Förderung ausgewählter Aspekte der Raumvorstellung mit dynamischer Geometriesoftware

Die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens von Schülern wird oft in Lehrplänen für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I ausdrücklich gefordert. Begründet liegt dies in der hohen Relevanz dieser Fähigkeit für unseren Alltag, die Howard Gardner als einen Teilbereich der menschlichen Intelligenz ansieht. Trotzdem hat die Raumgeometrie in der Unterrichtspraxis nur einen sehr geringen Stellenwert. Die Anfertigung von Modellen, die für eine handlungsorientierte Umsetzung in der Schule notwendig sind, hat den Nachteil sowohl zeit- als auch kostenintensiv zu sein. Der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware könnte nun für die Schulung des Anschauungsvermögens einen wesentlichen Beitrag leisten. Der größte Vorteil gegenüber konventionellen Methoden liegt dabei in der Dynamik selbst. Schüler können aktiv im Raum handeln und sich auf diese Weise die Auswirkungen von Bewegungen und Veränderungen an bestehenden Konfigurationen vor Augen führen.

Diesem Aufsatz liegt eine Zulassungsarbeit zugrunde, in der empirisch untersucht wurde, ob der gezielte Einsatz eines räumlichen DGS, im vorliegenden Fall Cabri-3D, Auswirkungen auf das Raumvorstellungsvermögen der Schüler hat. Um die Ergebnisse trennscharf beurteilen zu können, muss der Begriff „Raumvorstellung“ zunächst ein wenig differenzierter betrachtet werden.

Die Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens

Wölpert (1983) bezeichnet Raumvorstellung als die „Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und zu denken.“ Hier zeigt sich bereits eine Unterscheidung zwischen Raumwahrnehmung und Raumvorstellung, bei der die Objekte vom Gehirn nicht nur gespeichert, sondern aktiv verarbeitet werden, so dass neue Bilder und Perspektiven aus vorhandenem Material entwickelt werden können.

Aus der Psychologie liegen zahlreiche Abhandlungen vor, die sich mit der Einteilung der Raumvorstellungsfaktoren beschäftigen. Auf dieser Grundlage kommt Maier (1999) zu der Auffassung, dass räumliche Intelligenz stets als eine Verbindung verschiedener Fähigkeiten gesehen werden muss. Als die fünf wesentlichsten Komponenten nennt Maier:

- Räumliche Wahrnehmung
- Veranschaulichung

- Vorstellungsfähigkeit von Rotationen
- Räumliche Beziehungen
- Räumliche Orientierung.

Diese Faktoren werden von Maier nach zwei wesentlichen Gesichtspunkten unterschieden. Die Faktoren *Veranschaulichung*, *Räumliche Beziehungen* sowie *Vorstellungskraft von Rotationen* setzen voraus, dass sich der Proband beim Ausführen des Denkvorgangs außerhalb der Konfiguration befindet, während er sich bei den Komponenten *Räumliche Orientierung* und *Räumliche Wahrnehmung* mental in die Konfiguration hineinversetzen und als ein Teil von ihr agieren muss, um Aufgaben dieser Art lösen zu können.

Im Hinblick auf die Tauglichkeit einer Förderung durch den Computer ist diese Unterscheidung der Faktoren wesentlich, da die derzeit verfügbaren Geometriesysteme einen Nutzers nahelegen, der sich außerhalb der Konfiguration befindet. Deshalb soll sich die weitere Analyse auf die am Computer trainierbaren Faktoren *Veranschaulichung*, *Räumliche Beziehungen* sowie *Vorstellungskraft von Rotationen* beschränken.

Neben der Unterscheidung nach dem Standpunkt des Betrachters, können die Faktoren auch nach der Art der erforderlichen Denkvorgänge aufgegliedert werden. So werden innerhalb der Faktoren *Veranschaulichung*, und *Vorstellungskraft von Rotationen* gedankliche Bewegungen ausgeführt, was sie den dynamischen Denkvorgängen zuordnet. Im Gegensatz hierzu sind die Denkvorgänge des Faktors *Räumliche Beziehungen* statisch. Es müssen lediglich die Anordnung von Objekten untereinander, oder ein Objekt aus verschiedenen Blickwinkeln erkannt werden.

Eine Unterrichtseinheit zur Schulung des Vorstellungsvermögens

Das Wissen um die Unterschiede zwischen den Strukturen der Raumvorstellung ermöglicht es, einzelne Bereiche gezielt trainieren zu können. Dies wurde in einer Unterrichtseinheit mit zehn Schülern einer 9. Realschulklasse erprobt, die an einem Wahlpflichtkurs zur Informatik teilnahmen. Dabei wurde das Programm Cabri-3D eingesetzt.

In einer Aufgabe zum Faktor Veranschaulichung sollten die Probanden alle möglichen Schnittflächen finden, die beim geraden Schnitt durch einen Würfel entstehen. Hier war der Lehrer bislang auf Hilfsmittel wie etwa Styropormodelle angewiesen, die jedoch nur ein einziges Mal für einen Schnitt zu gebrauchen sind. Die Schnitte allein in der Vorstellung durchzuführen würde nahezu jeden Schüler überfordern. Somit stellt die Programmgruppe der räumlichen Geometriesoftware eine exzellente Methode zur Veranschaulichung der Schnitte dar, die von den Schülern gut angenommen wurde. Die Auswertung der im Unterricht aufgenommen Videodaten zeigte, dass sie zunächst heuristische Lösungsstrategien verwendeten. Sie planten zwar die Vorgehensweise, indem sie sich mit ihrem Partner absprachen, wie ein Schnitt auszuführen sei, um ein bestimmtes Ergebnis zu erhalten, fertigten jedoch kaum Hilfskonstruktionen an. Diese Hilfskonstruktionen wären jedoch für einige Flächen notwendig gewesen. So konnte keines der Schülerteams ein Sechseck konstruieren, beim geplanten Einsatz des Zugmodus entdeckten sie jedoch die meisten der möglichen Polygone.

Die Schüler zeigten sich von Beginn an sehr aufgeschlossen gegenüber der neuen Software. Sie benutzen den Zugmodus intuitiv, und griffen häufig auf die Möglichkeit zurück, die Ansicht auf die Konfiguration zu verändern. Das größte Hindernis bestand in der Eingabe räumlicher Punkte über ein ebenes Eingabemedium. Hierzu musste zwischen Änderungen in xy-Ebene und z-Achse durch das Drücken einer zusätzlichen Taste unterschieden werden.

Neben der qualitativen Auswertung der Inhalte, ging es in der Arbeit vor allem darum festzustellen, ob der Einsatz von Raumgeometriesoftware Auswirkungen auf das Vorstellungsvermögen der Schüler hat.

Hierzu wurde vor Beginn der Unterrichtseinheit ein schriftlicher Test durchgeführt, der Aufgaben zu allen Bereichen der Raumvorstellung enthielt. Es wurden also auch die Faktoren getestet, die nicht explizit trainiert wurden, um ein umfassenden Eindruck über die Fähigkeiten der Lerngruppe zu erlangen. Dieser Test wurde in leicht veränderter Form am Ende der Einheit wiederholt, um die Unterschiede kenntlich zu machen.

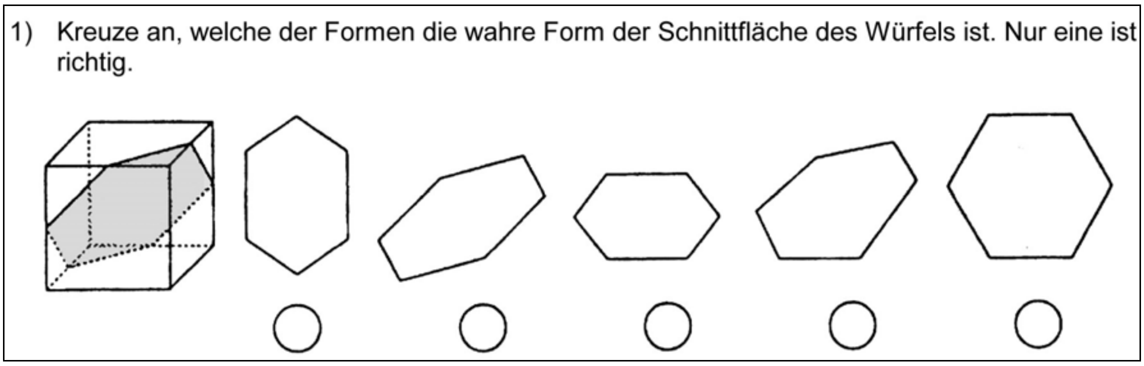


Abbildung 1: **Ein Testitem zum Faktor Veranschaulichung.**

Test-Ergebnisse

In der Auswertung der Testergebnisse zeigte sich, dass sich fast alle Schüler verbessert hatten. Vor allem Schüler, die zuvor ein schwaches Vorstellungsvermögen hatten, konnten sich deutlich steigern. Hieran erkennt man, dass die Probanden Cabri 3D bei den vorliegenden Aufgaben vor allem als Anschauungshilfe verwendet haben. Sie konnten so, aufgrund zusätzlicher

Erfahrung der räumlichen Wahrnehmung, räumliche Informationen besser aktiv verarbeiten. Besondere Verbesserungen waren in den Testaufgaben der Faktoren *Veranschaulichung* und *Räumliche Beziehungen* zu finden. Dies sind genau die Faktoren, die sich mit einem Computersystem gut umsetzten lassen. Allgemein ist aufgefallen, dass sich die Schüler vor allem in den Raumvorstellungsfaktoren verbessert haben, bei denen dynamische Denkvorgänge gefordert waren. Eine besondere Stärke des Programms liegt also in der Möglichkeit, Bewegungen umsetzten zu können.

Die Aussagekraft der Studie kann jedoch schwer abgeschätzt werden. Sie wurde nur mit sehr wenigen Probanden und in einem sehr kurzen Zeitraum durchgeführt. Daneben gab es auch keine Kontrollgruppe, die Lerneffekte durch die bloße Bearbeitung des Tests aufgezeigt hätte. Andersherum können jedoch so auch noch stärkere Effekte bei einem im regulären Unterricht eingebundenen Einsatz erwartet werden.

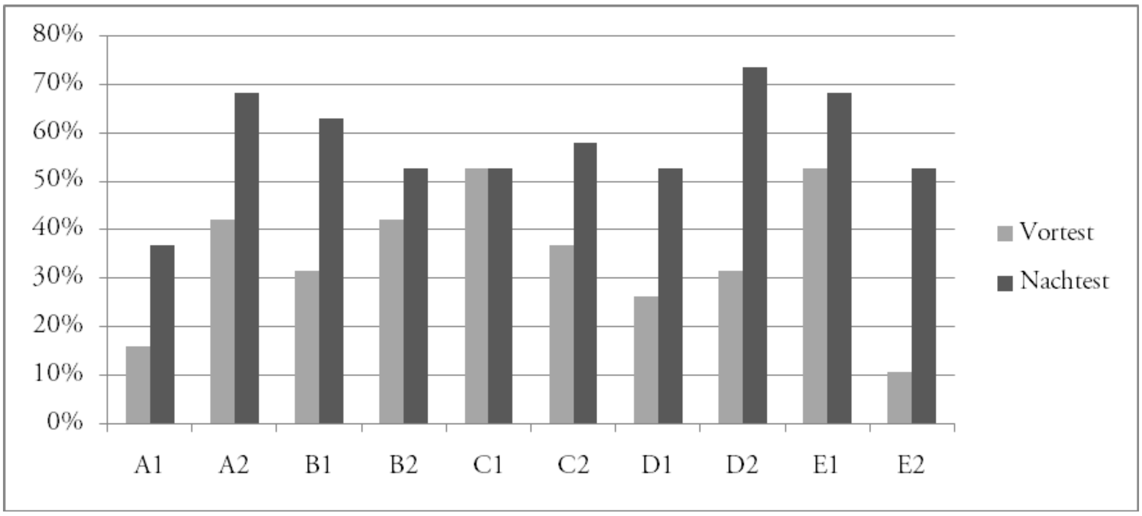


Abbildung 2: Ergebnisse jedes Schülers im Vor- und Nachtest

Literatur

Gardner, H. (1985). Die glorreichen Sieben. In: *Psychologie heute, Heft 2/85* (S. 28-31).

Linn, M.C., Petersen, A.C. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-Analysis. In: *Child Development 56/6* (S. 1479–1498).

Maier, P.H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen, ein theoretischer Abriss des Phänomens.* Donauwörth. Auer Verlag.

Schumann, H. (1994). *Körperschnitte – Raumgeometrie interaktiv mit dem Computer*. Bonn. Dümmler.

Thurstone, L.L. (1950). Some primary abilities in visual thinking. In: *Psychometric Laboratory Research Report No. 59*. Chicago. University of Chicago Press.

Wölpert, H. (1983). Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. In: *MU - Der Mathematikunterricht, Jahrgang 29 Heft 6* (S. 7-42).

Mathias HATTERMANN, Gießen

Neue Zugmodi in 3D-Dynamischen Geometriesystemen

Dynamische Geometriesysteme der Ebene wie *Euklid DynaGeo, Cinderella, Geonext* und *Zirkel und Lineal* haben in den letzten Jahren den Sprung in die deutschen Klassenzimmer geschafft und bringen mit Hilfe des Zugmodus Bewegung in die eher statisch geprägte Geometrie des Euklid. Die 2D-Systeme waren in der Vergangenheit ein beliebtes Objekt der Forschung, besonders in der internationalen Community der PME-Gruppe. Als Einführung in die definierenden Eigenschaften eines DGS-Systems eignet sich Strässer (2002). Für eine Zusammenfassung der breit angelegten Untersuchungen der 2D-Systeme siehe Laborde et al. (2006). Nutzungsmodalitäten des Zugmodus in 3D-Dynamischen Geometriesystemen wie Archimedes Geo3D[1] und Cabri 3D[2], welche erst in den letzten Jahren entwickelt wurden, stellen unser aktuelles Forschungsinteresse dar.

Forschungsdesign

Wir fassen die Ergebnisse zweier Studien zusammen, welche in den Jahren 2007 und 2008 an der Justus-Liebig-Universität in Gießen durchgeführt wurden. Unsere Forschungsgruppe wählte einen qualitativen Ansatz, um Hypothesen zu generieren und das Forschungsdesign abhängig von den ersten Ergebnissen anpassen zu können. An unserer Studie nahmen insgesamt 30 Studierende des Lehramtsstudiengangs (Realschule) teil. Die Studierenden arbeiteten in Gruppen, wobei die Gruppenstärke meist zwei, in Ausnahmefällen 3 Probanden, betrug. Die Untersuchungen fanden in getrennten Räumen statt, als Hilfsmittel wurden die screen-recording Software *Camtasia* und eine Webcam eingesetzt, die zusätzlich den Audioton aufnahm, sodass Diskussionen und Interaktionen der Probanden beobachtet und transkribiert werden konnten. Die screen-recording Software erlaubt die simultane Beobachtung des Webcambildes und der Aktionen der Probanden auf dem Bildschirm, was die Analyse des Datenmaterials vereinfacht.

Forschungsinteresse und Aufgaben

In unserer ersten Studie stellten wir fest, dass Studierende, trotz Vorkenntnissen in 2D-Systemen, den Zugmodus keineswegs intuitiv benutzen und zur Validierung von Konstruktionsaufgaben bzw. zur Exploration heranziehen. Für Details siehe Hattermann (2008a, 2008b). Aufgrund der Ergeb-

[1] www.raumgeometrie.de
[2] www.cabri.com

nisse unserer ersten Studie entschlossen wir uns, die Probanden der zweiten Studie in einer Einführungsveranstaltung im Umgang mit den 3D-Systemen zu schulen. Besonderes Augenmerk legten wir hierbei auf die Verwendung des Zugmodus und auf Grundkonstruktionen, wie Strecke, Gerade, Ebene, Kreis, Orthogonalität und die Definition von Abbildungen (Hattermann, 2009). Mit Hilfe des neuen Forschungsdesigns und einer leicht veränderten Aufgabe stellten wir uns folgende Forschungsfrage: Wie benutzen Studierende den Zugmodus in 3D-DGS, d.h. welches Ziel soll mit dem Einsatz des Zugmodus erreicht werden und wie werden bewegliche Punkte in die Konstruktion integriert, um den Zugmodus überhaupt verwenden zu können? Es muss hier betont werden, dass der Zugmodus in 3D-Systemen nicht mit dem Zugmodus in 2D vergleichbar ist, da der Nutzer in 2D-Systemen freie Punkte in stetiger Weise in der ganzen Ebene bewegen kann, während in 3D-Systemen das stetige Ziehen auf einer Schraubenlinie beispielsweise nicht möglich ist.

Die Studierenden bearbeiteten die folgenden Aufgaben.

Aufgabe 1: Konstruieren Sie, ohne die im Programm Cabri3D/Archimedes Geo 3D bereits vorhandene Funktion „Würfel“ zu benutzen, einen Würfel. Verwenden Sie keine festen Koordinaten, um Punkte zu definieren.

Aufgabe 2: Konstruieren Sie nun mit Hilfe der bereits vorhandenen Funktion „Würfel“ einen Würfel und finden Sie experimentell alle möglichen „n-Ecke“ (n=3, 4,…), welche als Schnittfigur einer Ebene mit einem Würfel auftreten können. Achten Sie besonders auf rechtwinklige und symmetrische Formen!

Ergebnisse

Bei der Bearbeitung der ersten Aufgabe wurde der Zugmodus benutzt um:

- die Konstruktion des Würfels zu validieren.
- festzustellen, dass bei der Konstruktion des Würfels nur 2 Punkte (Ausgangspunkte der ersten Strecke) „ziehbar“ und alle anderen Punkte des konstruierten Würfels „fest“ sind.
- die Funktion eines Hilfspunktes herauszufinden, der auf einer Kante konstruiert wurde. (*Funktionstest*, *function test*)
- die Länge einer Strecke an die vorgegebene Ausgangsstrecke anzupassen. (führt zu keiner richtigen Konstruktion)
- mehr über den Freiheitsgrad von „ziehbaren“ Punkten herauszufinden. (*Freiheitsgradtest*, *degree of freedom test*)
- Fehler in der Konstruktion zu entdecken.

Bei der Bearbeitung der zweiten Aufgabe wurde der Zugmodus benutzt um:

- die spezielle Funktion eines konstruierten Punktes festzustellen (*Funktionstest*, *function test*).
- neue Schnittfiguren zu identifizieren.
- allgemeinere bzw. spezielle Schnittfiguren zu finden (bspw. um ein gleichschenkliges Dreieck aus einem beliebigen Dreieck zu erhalten).
- den Freiheitsgrad von Punkten festzustellen (*Freiheitsgradtest*, *degree of freedom test*).

Mit Ausnahme von zwei Zugmodi können alle beobachteten Zugmodi bereits bekannten und definierten Begriffen zugeordnet werden, siehe hierzu Arzarello et al (2002), Olivero (2002) und für eine Zusammenfassung Restrepo (2008). Aus diesem Grund definieren wir 2 neue Zugmodi, den *Funktionstest* (*function test)* und den *Freiheitsgradtest* (*degree of freedom test)*. Es steht außer Frage, dass diese Zugmodi bereits in 2D-Systemen auftauchen und bestimmt beobachtbar sind, jedoch gibt das vermehrte Vorkommen dieser Zugmodi in 3D-Systemen Anlass zu der Annahme, dass diese Zugmodi in 3D-Systemen stärkeres Gewicht haben und somit zur Problemlösung bzw. zur Orientierung sowohl im virtuellen Raum als auch in der jeweiligen Konstruktion öfter herangezogen werden und somit häufiger zu beobachten sind. Es ist weiter zu bemerken, dass in Aufgabe 2 die Schnittebene von den Probanden erst konstruiert werden muss; von dieser Konstruktion hängt es ab, ob und wie die Schnittebene mit Hilfe des Zugmodus variiert werden kann. So ist die Wahl von drei beliebigen Punkten im Raum zur Definition der Ebene oft nicht hilfreich, da ein kontrolliertes Ziehen der Schnittebene somit schwer möglich ist. Für Details und verschiedene Beispiele der Einbindung von beweglichen Punkten zur Definition der Schnittebene siehe Hattermann (2009).

Ausblick

Mit dem angepassten Forschungsdesign unserer zweiten Studie ist es uns gelungen verschiedene Zugmodi, welche von Studierenden in 3D-Systemen benutzt werden, zu beobachten. Im weiteren Forschungsverlauf möchten wir die *instrumentelle Genese* des Zugmodus nach Rabardel (1995) beobachten und theoretisch fundieren. Zur theoretischen Klärung dieser Genese wurde eine Studie mit SeminarteilnehmerInnen durchgeführt, die zu Beginn, in der Mitte und am Ende eines Semesters bei der Bearbeitung von Konstruktions- und Explorationsaufgaben in Cabri 3D beobachtet wurden. Während des Seminars „Raumgeometrie mit dynamischen Geometriesoftwaresystemen" arbeiteten die Probanden in jeder Seminarsitzung mit Cabri 3D. Aus diesen Resultaten möchten wir die instrumentelle Genese des Zugmodus in 3D-Systemen nachvollziehen, eventuell Kompetenzstufen im Umgang mit diesen Systemen festlegen und diesen Kompetenzstufen verschiedene Zugmodi zuordnen.

Literatur

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Hattermann, Mathias (2008a): Der Zugmodus in dreidimensionalen dynamischen Geometriesystemen. In: Vasarhélyi, Eva (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 13. bis 18. März in Budapest.* Münster: WTM-Verlag, S. 445–448.

Hattermann, Mathias (2008b): The dragging process in three dimensional dynamic geometry environments (DGE). In: Figueras, Olimpia; Cortina, José Luis; Alatorre, Silvia; Rojano, Teresa; Sepúlveda, Armando (Hg.): *International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, July 17-21, 2008*, Morelia. Mexico: Cinvestav-UMSNH, Bd. 3, S. 129–136.

Hattermann, Mathias (2009) : The drag-mode in three-dimensional dynamic geometry environments-two studies. *Proceedings of the CERME 6-Conference*, 28.1.-1.2.2009, Lyon, France. (im Druck)

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (S. 275-304). Rotterdam: Sense.

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment* (PhD thesis). Bristol, UK: University of Bristol, Graduate School of Education.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et la technologie. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin. Translation to English (retrieved on 09.03.2009 at http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1)

Restrepo, Angela Maria (2008): *Genèse instrumentale du Déplacement en Géométrie dynamique chez des élèves de 6eme*. Dissertation. Betreut von Prof. Dr. Colette Laborde. Grenoble. Université Joseph Fourier, École Doctorale des Mathematiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique.

Strässer, Rudolf (2002): Research on Dynamic Geometry Software (DGS)- an introduction. *In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 65.

Jürgen STEINWANDEL & Matthias LUDWIG, Weingarten

Die Strukturerfassung regulärer und halbregulärer Körper. Ein Vergleich von 3D-Computersimulation, Bild und Realmodel

Theoretischer Hintergrund

Im Schulunterricht werden zur Erfassung der räumlichen Strukturen von Polyedern (z.B. Anzahl ihrer Flächen, Art ihrer Flächen, Anzahl ihrer Kanten, usw.) Realmodelle (z.B. aus der Sammlung der Schule) und Bilder (z.B. Schulbuch), als auch Computeranimationen, z.T. interaktiv, eingesetzt. Die Auswirkungen dieser verschiedenen Medien auf die Erfassung einfacher räumlicher Strukturen und Symmetrien und das sich anschließende Lernergebnis von Schülerinnen und Schülern in Abhängigkeit verschiedener Variablen, wie kognitive Leistungsfähigkeit, Raumvorstellungsvermögen, Computerkenntnisse sollen in diesem Projekt untersucht werden. Ziel dieser Arbeit ist es, ein theoretisches Modell zu entwickeln und zu überprüfen, welches auf Grund der Ausgangsvariablen Aussagen darüber machen kann, durch welches Medium der Proband die räumlichen Strukturen der Polyeder (Anzahlt Ecken und Kanten bzw. Anzahl und Art der Flächen) am besten erfassen kann. Es zeigt sich nämlich, dass die bisherigen Befunde uneinheitlich dahin gehend sind, ob man mit (interaktiven) Computeranimationen oder statischen Bilder oder dem Computer überhaupt besser lernt (vgl. Lowe 2003, 2004; Schwan & Riempp 2004; Lewalter, 2003; Souvignier, 1999, Hartmann & Reiss, 1999; Hartmann & Hellmich, 2002; Cohen, C.A. 2005; etc.) . Betrachtet man es aber – soweit es die bisherigen Ergebnisse ermöglichen – von der Warte der Ausgangssituation der Lernenden, so wird schemenhaft erkennbar, dass hier der Schlüssel zum Verständnis der uneinheitlichen Ergebnisse liegen könnte. Es sieht so aus, dass zum einen die Komplexität der Aufgabenstellung, als auch das Vorwissen des Lerners die Wirksamkeit des Mediums beeinflusst.

Vorarbeiten

Wie oben erwähnt wird angenommen, dass neben dem Medium und dem Vorwissen, bzw. den raumgeometrischen kognitiven Fähigkeiten die Komplexität der Aufgabenstellung einen Einfluss auf die Lösungswahrscheinlichkeit der Aufgabe hat. Als Eingangsvariablen werden deshalb neben den individuellen Fähigkeiten des Schülers den Körpern, welche in den Aufgabenstellungen verwendet werden, jeweilige Komplexitätsgrade zugeordnet, die möglichst einfach wie folgt bestimmt werden:

Anzahl der Flächen + Ecken + Kanten eines Körpers = Komplexitätsgrad = (K-Wert) des Körpers. Mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel lässt sich dies sogar nur auf die Anzahl der Kanten zurückführen: K-Wert = 2k+2. Der Körper mit der geringsten Komplexität soll den Wert 1 erhalten. Wir werden deshalb sogenannte relativ-gerundete K-Werte einführen.

								
Körpernr.	1	2	3	4	5	6	7	8
K-Wert	14	26	26	62	38	98	122	182
Rel. K-Wert	1	1,86	1,86	4,4	2,7	7	8,7	13
Gerundete rel. K-Wert	1	2	2	4	3	7	9	13

Mit Hilfe der entsprechenden Korrelationskoeffizienten zwischen den abhängigen und unabhängigen Variablen soll dann eine Lernumgebungszuweisungsmatrix beschrieben werden, die konkrete Hinweise geben kann, welche Lernumgebung (Computer, Modell, Bild) für einen konkreten Schüler in einer konkreten Situation optimal ist.

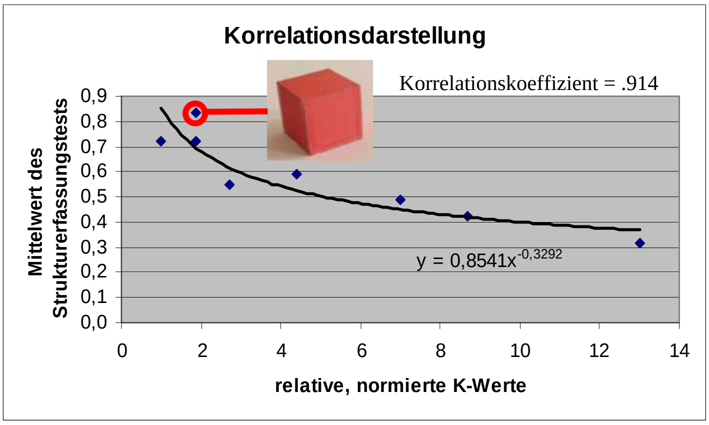
Untersuchungsdesign

Zunächst wurde durch einen Vortest (Bausteine-Test: Birkel, P. et al 2002) die Lerngruppe (n=27) in drei gleich große und von der Leistungsstruktur nahezu identische Versuchsgruppen skaliert, wobei die geschlechtsspezifische Verteilung ebenfalls homogen gehalten werden konnte.

Lernumgebung	**erreichte durchschnittliche Leistung**	**SD**
Computer	43,3 %	22,0 %
Modell	43,9 %	19,6 %
Bild	48,9 %	24,0 %

Daran schloss sich ein Selbsteinschätzungstest bzgl. der Computernutzungsintensität an. Für den folgenden, zentralen Strukturerfassungstest hatten die Schülerinnen und Schüler 25 Minuten Zeit. Während dieser Dauer mussten sie zu jedem der acht vorgelegten Körper 8 Fragen bzgl. der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen, als auch zur Struktur der Körper beantworten. Die geschlossenen Fragen wurden durch eine offene Frage zu den Symmetrien der Körper ergänzt.

Ergebnisse



Wie schon erwähnt, wurde eingangs postuliert, dass Aufgaben, denen ein Körper mit einem höheren Komplexitätsgrad (K-Wert) zu Grunde liegt, schwerer zu bearbeiten sein dürften. D.h. je höher der K-Wert, desto geringer die Lösungshäufigkeit. Ein reziproker Zusammenhang drängt sich hier auf. (P~1/K-Wert)

Das Modell zur Bestimmung des Komplexitätsgrades der Körper kann sehr gut bestätigt werden. Bzgl. Körper Nr. 2 (Würfel) kann argumentiert werden, dass dieser deshalb besonders gut bearbeitet worden ist, weil von ausgeprägten Alltagsvorerfahrungen ausgegangen werden darf.

Besonders interessant scheint uns das Ergebnis beim Vergleich der drei Präsentationsformen der Körper zu sein:

Es konnte nachgewiesen werden, dass die Schüler mit der Lernumgebung „Modell“ hoch signifikant bessere Ergebnisse erzielten, als die beiden anderen Lerngruppen. Des Weiteren kann abgelesen werden, dass ein Leistungsunterschied zwischen den Gruppen „Bild“ und „Computer“ kaum bzw. schwach nachweisbar ist. Vor allem das relativ identische Leistungsbild bei der „Bild-“ und „Computergruppe“ lässt sich darauf zurückführen, dass die Probanden den Körper am Bildschirm nicht mehr bewegen und somit die gleiche Situation erstellen wie auf einem Bild.

Lernumgebung	**erreichte durchschnittliche Leistung**	**SD**	**T-Test**	**P**	
Computer (C)	53,5 %	22,0 %	B-M	.015	v.s.
Modell (M)	43,9 %	19,6 %	B-C	.882	n.s.
Bild (B)	48,9 %	24,0 %	C-M	.062	s.

(Übersichtstabelle bzgl. des Strukturerfassungstests)

Erfahrungen, Forschungsstand bezogen auf den Vortest, Ausblick

Hinsichtlich des Untersuchungsdesigns hat der Vortest gezeigt, dass die Grundstruktur der Untersuchung in dieser Weise die hier gestellten wissenschaftlichen Fragestellungen beantworten kann. Somit werden die wesentlichen Strukturen dieser Voruntersuchung übernommen; jedoch wird es im

Detail Änderungen geben. Komplettierend zu dem bereits eingesetzten Bausteine-Test werden als Vortests ein Arithmetiktest, als auch ein Maustest – der den bisherigen Computerselbsteinschätzungstest ersetzt – durchgeführt. Insbesondere wird die Auswahl der Körper, als auch die Farbgebung, die nicht mehr zweifarbig ausgeführt sein wird, geändert. Es sollen ca. 300 Schüler getestet werden, die aus unterschiedlichen Klassenstufen und den Schularten Hauptschule, Realschule und Gymnasium entstammen sollen. Somit sind weitere Teilauswertungen möglich – so z.B. Aussagen bzgl. Schulart bzw. der Jahrgangsstufe. Des Weiteren soll eine Antwort auf die Frage gegeben werden, in wie weit z.B. schwache Schüler von einer anderen Lernumgebung profitieren, als starke.

Literatur

Birkel, P., Schein, S.A., Schumann, H. (2002). Bausteine-Test. Ein Test zur Erfassung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Hogrefe - Verlag für Psychologie: Göttingen.

Cohen C.A. (2005). The Influence of Spatial Ability on the Use of Dynamic, Interactive Animation in a Spatial Problem-solving Task. Prodeedings, Barkowsky, T. et al. (Hrsg.)Reasoning with mental and External Diagramms Cumpotational Modeling and Spaial Assistance. Proceedings. *American Association for Artificial Intelligence(AAAI) 2005*, Spring Symposium Series, Stanford, S. 1-5.

Hartmann, J., Reiss, K. (1999) Auswirkungen der Bearbeitung räumlich-geometrischer Aufgaben auf das Raumvorstellungsvermögen. *In Leutner, D. & Brünken, R. (Hrsg.), Neue Medien in Unterricht, Aus- und Weiterbildung.* Münster: Waxmann, 85-93

Hartmann, J. & Hellmich, J.(2002). Materialgebundene versus computergestützte Förderung räumlicher Kompetenzen in der Grundschule. *In: Pescheck, W.(Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2002.* Hildesheim: Franzbecker. 211-214

Lewalter, D. (2003). Cognitive strategies for learning from static and dynamic visuals, *Learning and Instruction*, 13, S. 177–189.

Lowe, R. (2003). Animation and learning: Selective processing of information in dynamics graphics. *Learning and Instruction*, 13, S. 157–176.

Lowe, R.(2004). Interrogation of a dynamic visualization during learning

Schwan, S. Riempp, R.(2004). The cognitive benefits of Interactive videos: learning to tie nautical knots, *Learning and Instruction* 14, 293-305

Souvignier, E. (1999). Die Verbesserung räumlicher Fähigkeiten durch Computerunterstütze Fördermaßnahmen: zwei Evaluationsstudien.

Brigitte PROBST & Rudolf STRÄSSER, Gießen

Tauglichkeitstest schulgeeigneter 3D-Programme an Aufgaben zur räumlichen Geometrie

1 Übersicht

In einer Zulassungsarbeit für das erste Staatsexamen wurde zunächst untersucht, welche Ziele im (hessischen) Lehrplan für Realschulen für den Raumgeometrieunterricht vorgegeben sind. Fachdidaktische Überlegungen folgern daraus bestimmte Aufgaben bzw. Aufgabentypen, die sich mit leichten Abwandlungen in allen üblichen Unterrichtswerken wiederfinden lassen. In einem zweiten Schritt wurde ein Satz mit „typischen" Aufgaben entwickelt und daran die Tauglichkeit von schulgeeigneter (also mit begrenzten schulischen Budgets finanzierbarer und mit realistischem Aufwand erlernbarer) Raumgeometrie-Software getestet.

2 Die getesteten Programme

Zum Einsatz kamen zwei schulzugängliche 3D-CAD-Programme:

- Podenstorfer, E.: **GAM-3D** – Generieren, Abbilden, Modellieren. Version GAMV14
- Stachel, H.: **CAD-3D**. Basisversion 1.10

und zwei RDGS-Programme (räumliche dynamische Geometrie-Software):

- Bainville,E.&Laborde, J.-M.: **Cabri-3D** v2
- Goebel, A: **Archimedes Geo 3D**, Version 1.2 beta5.

Die Untersuchungen wurden 2008 mit den jeweils neuesten Software-Versionen durchgeführt, inzwischen können also Änderungen erfolgt sein.

3 Der Aufgabensatz

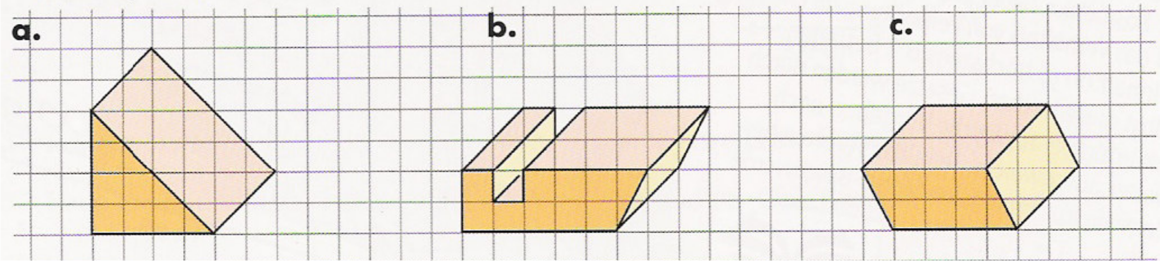
Die Aufgabentypen entsprechen den einzelnen Phasen einer Lerneinheit: dem Erkunden, dem Systematisieren, dem Üben und der Leistungsmessung. Dabei eignen sich zum Erkunden vorwiegend offene divergente Aufgabenstellungen, Systematisierung und Leistungsmessung sind jedoch üblicherweise lösungsorientierte konvergente Vorgänge mit eindeutigen Zielen bzw. Ergebnissen. Beim Üben, Vertiefen und Wiederholen haben beide Strategien ihre Berechtigung.

Typische *lösungsorientierte Aufgaben* im Raumgeometrieunterricht der Realschulen sind einfache Analysen, stereometrische Berechnungen und unspezifische Minimalauswahl an Darstellungen gerader geometrischer Grundkörper oder einfachster Zusammensetzungen.

Typisches Beispiel einer lösungsorientierten Aufgabe:

(i) Messen, Berechnen und Zeichnen von Prismen

Übertrage die Figur in dein Heft. Miss die notwendigen Stücke aus und berechne das Volumen, die Oberfläche und die Mantelfläche des Prismas.



Zeichne zu jedem Prisma ein weiteres Schrägbild und ein Netz.

Problem- oder projektorientierte Aufgabenstellungen erweitern den Begriff des Problemlösens vom Finden „der“ Lösung zum Erkennen des Problems und zur Diskussion alternativer Planungs- und Bearbeitungsstrategien und gegebenenfalls auch divergenter Lösungen, die ausdrücklich erwünscht sind und gemeinsam gesichtet und eingeordnet werden.

Typisches Beispiel einer problem- bzw. projektorientierten Aufgabe:

(ii) Regenmesser

Üblicherweise werden Niederschlagsmengen in Liter pro Quadratmeter angegeben. a) Informiere dich im Internet über die Regenmengen des letzten Jahres in deiner Region. b) Handelsübliche Regenmesser haben meist Kegelform. Warum? c) Baue aus einer stabilen Folie (DIN-A4-Format) und wasserfestem Klebeband einen eigenen kegelförmigen Regenmesser mit größtmöglichem Fassungsvermögen und bringe Markierungen für Regenmengen an. Welche Niederschlagsmenge kann er höchstens anzeigen?

Aufgaben zur Schulung der Raumvorstellung könnten die vorgenannten Aufgabentypen um dieses entscheidende Kriterium ergänzen, welches in den Bildungsstandards zwar nachdrücklich gefordert, dann aber nur rudimentär umgesetzt wird. Charakteristisch für herkömmliche Raumgeometrieaufgaben ist meist, dass sie bei hinreichender Kenntnis der entsprechenden Formeln ohne jede Raumvorstellung oder Planskizze direkt mit dem Taschenrechner lösbar sind.

Nun automatisieren manche neue Computerwerkzeuge selbst aufwändige Berechnungsverfahren und führen die bislang zentrale Inhaltslehre des Raumgeometrieunterrichtes in die Sinnkrise. Sie könnte einem für die sowohl für die mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch für logisch-verbale Fähigkeiten förderlichen wirkungsvollen Training der Raumvorstellung weichen, da die Beherrschung komplexer Darstellungsvorgänge ebenfalls automatisiert wird und schülerzentriertes raumgeometrisches Experimentieren und Entdecken zulässt.

Typisches Beispiel einer Aufgabe zur Schulung der Raumvorstellung:

(iii) Kugelverpackung

Entwirf eine pyramidenförmige Verpackungen für vier Tischtennisbälle (Durchmesser 4cm). Berechne ihre Oberfläche und ihr Volumen. Zeichne ein Netz dafür, baue ein Modell daraus und überprüfe so die Richtigkeit deiner Konstruktion!

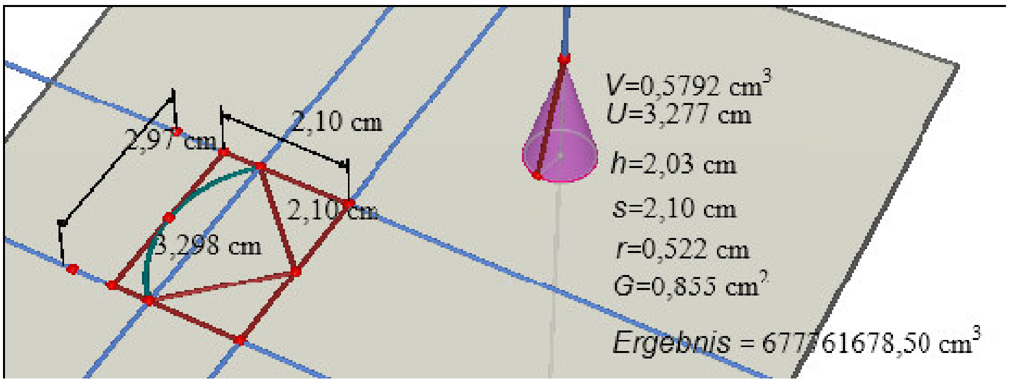
4 Programm-Tauglichkeitstest an Beispielen

Mit GAM und Archimedes können zwar Messungen aber weder grafische noch manuelle Berechnungen durchgeführt werden. Die Genauigkeit der Berechnungen mit Cabri-3D ist von der Wahl der Konstruktion mit Raumkoordinaten abhängig, die im Lehrplan nicht thematisiert wird. Lediglich CAD-3D liefert zufriedenstellende Berechnungsergebnisse, setzt allerdings grundsätzlich das simultane Arbeiten in (mindestens) zwei Rissen voraus, was ebenfalls nicht gelehrt wird. Mit Archimedes können Körper und Flächen grundsätzlich nicht maßstäblich genau dargestellt werden.

(i) Messen, Berechnen und Zeichnen von Prismen

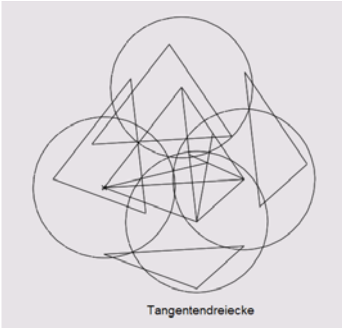
Die einzelnen Grundkörper sind bei GAM als Schnittkörper von Quadern mit selbstdefinierten Schnittebenen konstruierbar. Die Erzeugung weiterer Schrägbilder ist nach der entsprechenden Drehung um eine Koordinatenachse möglich. Im zweiten Fall muss zusätzlich ein Quader in der Form der „Nut" konstruiert, an die richtige Position verschoben und in einer Boolschen Operation vom Ausgangsquader subtrahiert werden. Alle diese Konstruktionen setzen geometrische Kenntnisse voraus, die im Lehrplan nicht thematisiert werden.

(ii) Regenmesser

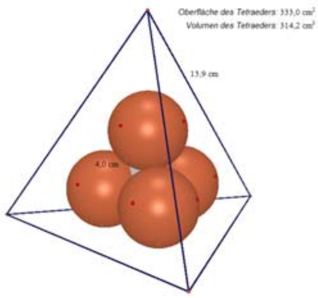


Keines der getesteten Programme leistet eine ausreichende Unterstützung der praktischen Schülerlösung, Archimedes scheitert bereits an der Definition der Grundfläche eines Kegels. Nahe liegende grafische Lösungen der Berechnungen, wie sie z. B. mit Cabri-3D erzeugt werden können, sind leider bestenfalls annähernd richtig und können der Überprüfung manueller Berechnungen dienen.

(iii) Kugelverpackung



GAM-Lösung



Cabri-3D-Lösung

Mit allen getesteten Programmen ließ sich die Konstruktion der Verpackung, die ohne diese Computerwerkzeuge eine erhebliche Herausforderung darstellt, ohne jede Zwischenberechnung rein grafisch bewältigen. Am komfortabelsten gelang das mit den intuitiv zu bedienenden dynamischen Programmen. Die genaueste Lösung zur Berechnung liefert GAM, die Länge der Tetraederkante kann hier gemessen, daraus aber weder Oberfläche noch Volumen berechnet werden.

5 Schlussbemerkungen

Keine der für die Realschullehrpläne (nicht nur in Hessen!) typischen Aufgaben lässt sich von Schülerinnen und Schülern mit den ausgewählten Raumgeometrie-Programmen adäquat bearbeiten. Das für deren Nutzung erforderliche Vorwissen über elementare raumgeometrische Elemente, Begriffe, Beziehungen und Darstellungen ist teils unzureichend, teils überhaupt nicht Gegenstand der Lehrpläne.

Die vom Schwerpunkt der jeweiligen Software abhängige Automatisierung von Berechnungen und Darstellungen ermöglicht die Verlagerung des Schwerpunktes des Raumgeometrieunterrichtes auf die geforderte Schulung der Raumvorstellung. Durch die intuitive Bedienbarkeit gelingt dies mit den dynamischen Systemen anschaulicher und besser. Eine gegenseitige Annäherung von Lehrplänen und Raumgeometriesoftware wäre zu begrüßen, allerdings nicht (nur) zur Lösung alter Aufgaben mit neuen Werkzeugen, sondern auch für neue Herausforderungen, die die durch den Einsatz räumlicher Software neu entstandenen Freiräume und Möglichkeiten zur selbstständigen Erfassung von komplexen raumgeometrischen Zusammenhängen nutzen.

Literatur

Hessisches Kultusministerium. (o.J.). *Lehrplan Mathematik. Bildungsgang Realschule. Jahrgangsstufen 5 bis 10*. Wiesbaden: Hessisches Kultusministerium.

Probst, B. (2008). *Computer-Einsatz von Aufgaben zur Raumgeometrie - Entwicklung einer den hessischen Lehrplan kennzeichnenden Aufgabensammlung und Tauglichkeitstest von schulgeeig-neten 3D-Programmen.* Zulassungsarbeit 1. Staatsexamen, Justus-Liebig-Universität Gießen.

Laura MARTIGNON, Ludwigsburg

Moderierte Sektion: Mathematik und Gender

Barbie, die Puppe die im Jahr 2009 fünfzig Jahre alt wurde, sagte im Monat August des Jahres 1992, als sie durch einen relativ einfachen Mechanismus einen Repertoire von 260 Sätzen aussprechen konnte: "Mathematik ist sehr schwierig; lass uns lieber einkaufen gehen“ („Math is tough; let’s rather go shopping“). Daraufhin protestierte Die Gesellschaft der Akademikerinnen Amerikas in aller Öffentlichkeit. Als Folge dieses Protests wurde aus dem Repertoire der Barbie Puppe, die im Oktober 1992 neu produziert wurde, dieser Satz eliminiert. Die Akademikerinnen Amerikas schrieben in ihrem Protest: „Weiblichkeit scheint dem Produzenten der Barbie Puppe dadurch charakterisiert, dass Mädchen sich so verhalten als seien sie mathematisch inkompetent“. Das Bild von Mathematik und das Bild von Weiblichkeit schienen damals, nicht nur in den USA sondern auch in Europa, orthogonal zueinander zu stehen.

Glücklicherweise hat sich seit dem Jahr 1992 in diesem Kontext vieles geändert. Heute erscheint es nicht mehr verwunderlich, dass beispielsweise Deutschlands „nächstes Topmodel des Jahres 2007“ Barbara Meier, eine begeisterte Mathematikstudentin ist. Auch in Fernsehsendungen ist der Prototyp der Mathematik Lehrerin nicht mehr die strenge Frau mit dicker Brille und grauem Kostüm.

Über der Beziehung von Mädchen zur Mathematik wird aber immer noch in der Öffentlichkeit leidenschaftlich diskutiert und zwar auf allen Ebenen, sei es bei Talkshows in Fernesehsendungen als auch in wissenschaftlichen Abhandlungen. Die Diskussion beinhaltet aber zwei Ebenen, die zwar miteinander korrelieren, dennoch verschiedenen Problemen zuzuordnen sind: Einerseits wird die Unterrepräsentation von Frauen an denjenigen hohen Positionen, die eine gute mathematische Ausbildung verlangen, seit Jahrzehnten unter die Lupe genommen. Andererseits wird aber auch die Beziehung von Mädchen zur Mathematik untersucht, wobei man stets davon ausgeht, sie sei, im Durchschnitt, weniger positiv als die der Jungen.

Das Jahr 2009 ist nicht nur das fünfzigste Jubiläum der Barbie Puppe sondern auch das zwanzigste Jubiläum des Arbeitskreises Frauen und Mathematik der Gesellschaft für die Didaktik der Mathematik. Die moderierte Sektion zu „Mathematik und Gender“ hatte also auch die Funktion, die an dem Thema interessierten Frauen zu versammeln und mit ihnen, explizit und implizit, dieses Jubiläum zu zelebrieren. Die Sektion war schwerpunktmäßig didaktischen Fragen gewidmet: Welche sind Erkenntnisse aus der empirischen Forschung zu Mathematik und Gender, die einen geschlechter-sensitiven Unterricht unterstützen können?

Die Vorträge berücksichtigten den Tatbestand, dass Geschlechterunterschiede im Mathematikverständnis in verschiedenen Zusammenhängen, innerhalb und außerhalb des wissenschaftlichen Diskurses, konstatiert worden sind und werden. Diese Unterschiede verlangen nach guten Rezepten für die Entwicklung einer neuen Sensibilität im Umgang mit beiden Geschlechtern im mathematischen Unterricht.

Das zahlreiche Publikum nahm angeregt an den Diskussionen teil und die Sektion war erfolgreich. Es wurde klar, dass die Kernfragen zu „Mathematik und Gender“ weiterhin hochaktuell sind. Vor allem wurde auch deutlich, dass die Diskussion über Gender und Mathematik ein wohl etablierter Bestandteil der Aktivitäten der Gesellschaft für die Didaktik der Mathematik geworden ist.

Andrea BLUNCK, Hamburg

GenderMathematik – ein Projekt zur Verbesserung der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik

In diesem Beitrag soll das vom BMBF geförderte neue Forschungsprojekt „GenderMathematik: Genderkompetenz als innovatives Element der Professionalisierung der LehrerInnenausbildung für das Fach Mathematik“ vorgestellt werden. Es handelt sich um ein Verbundprojekt im Rahmen des Programms „Hochschulforschung“. Beteiligt sind neben der Universität Hamburg (Andrea Blunck, Professorin für Mathematik und Gender Studies, Department Mathematik) noch die Universitäten Bielefeld (Dr. Anina Mischau, Interdisziplinäres Zentrum für Frauen- und Geschlechterforschung IFF, Gesamt-Projektleitung) und Gießen (Dr. Sabine Mehlmann, Arbeitsstelle Gender Studies). Die Laufzeit des Projekts ist Oktober 2008 bis Dezember 2010.

1. Einordnung

Die Lehramtsausbildung im Fach Mathematik wird in letzter Zeit wieder verstärkt kritisiert und für verbesserungswürdig angesehen. So entdeckt auch die Deutsche Mathematiker-Vereinigung das Thema: In ihrer Pressemitteilung vom 24.2.2009 „Neue Lehrer braucht das Land“ (DMV 2009) sagt der DMV-Präsident Prof. Dr. Wolfgang Lück: „Der Lehrerberuf ist enorm wichtig und sollte von uns allen positiv bewertet werden. (...) Auch die Lehrerausbildung muss besser werden“.

Schon 2000/2001 forderten Wissenschaftsrat und Kultusministerkonferenz eine „Professionalisierung der Lehramtsausbildung“ (siehe Terhart 2000, Wissenschaftsrat 2001), d.h. eine Verbesserung der pädagogisch-fachdidaktischen Ausbildung, eine stärkere Ausrichtung an der Berufspraxis sowie eine Orientierung des Studiums an für den Lehrerberuf entscheidenden Schlüsselkompetenzen.

Hier will das Projekt „GenderMathematik“ einen Beitrag leisten und insbesondere Genderkompetenz als eine solche Schlüsselkompetenz in die Ausbildung hineinbringen.

Nach wie vor sind im deutschsprachigen Raum die Schulfächer entlang vorherrschender Geschlechterstereotype in „männliche“ und „weibliche“ Domänen aufgeteilt, und zwar sowohl was Kompetenz- und Interessensentwicklung von Schülerinnen und Schülern angeht als auch hinsichtlich ihrer Motivation sowie ihres Selbstvertrauens und ihrer Selbstkonzepte.

Die Mathematik ist hierbei dem „männlichen“ Wissensrevier zuzuordnen. Mathematiklehrkräfte wirken mit bei der Inszenierung der Geschlechter und der Reproduktion geschlechterstereotyper Trennlinien. Somit ist eine

Sensibilisierung angehender MathematiklehrerInnen für die Genderthematik dringend erforderlich, zumal sie auch als MultiplikatorInnen wirken und das Mathematikbild der nachfolgenden Generationen prägen.

Zum Thema Gender und Mathematikdidaktik siehe vertiefend z.B. Niederdrenk-Felgner 2001.

2. Ziele, Arbeitsschritte und erste Ergebnisse

Wie bereits oben angerissen, sind die wesentlichen Ziele des Projekts die Überwindung der asymmetrischen Geschlechterkultur im Fach Mathematik, der Abbau von Geschlechterstereotypisierungen auf Seiten der Lehrpersonen, die Sensibilisierung von Lehramtsstudierenden der Mathematik sowie der Aufbau von Genderkompetenz bei diesen Studierenden.

Geplant sind folgende Arbeitsschritte:

1. Bestandsaufnahme des Status quo: Inwieweit ist Genderkompetenz bereits an einzelnen Hochschulen in die Lehramtsausbildung im Fach Mathematik implementiert? Ferner erfolgt hier auch eine Bestandsaufnahme der relevanten Literatur.

2. Entwicklung eines Modulelements „Genderkompetenz in der Mathematik“ für die Lehramtsausbildung.

3. Modellhafte Erprobung und Evaluation des Moduelements an acht ausgewählten Hochschulen.

Der erste Arbeitsschritt ist inzwischen weitgehend abgeschlossen. Wie zu erwarten war, finden sich Schlagworte wie „Geschlechtergerechtigkeit“, „Gender Mainstreaming“ etc. zwar in einschlägigen Gesetzestexten (Hochschulgesetz, Schulgesetz u.ä.) und anderen offiziellen Verlautbarungen der Bundesländer und der Hochschulen, jedoch i.a. nicht in Zusammenhang mit Hochschullehre und Lehramtsausbildung.

Unsere Recherche ergab, dass in es im Bereich Mathematik bzw. Mathematikdidaktik nur an sehr wenigen Standorten Lehrveranstaltungen für Lehramtsstudierende gibt, die „Gender“ thematisieren. Die Neustrukturierung der Studiengänge scheint hier nichts geändert zu haben.

Erwähnt werden sollen die PH Ludwigsburg, wo „Gender und Mathematikdidaktik“ im Rahmen des Pflichtmoduls „Vertiefung Fachdidaktik“ wählbar ist und auch regelmäßig von Prof. Dr. Laura Martignon angeboten wird, sowie die Universität Oldenburg, wo im Professionalisierungsbereich für Studierende mit dem Berufsziel Lehramt das Wahlmodul „Mathematik: Genderforschung“ genannt wird.

3. Das Modulelement

Nächster Arbeitsschritt ist jetzt die Konzeption des Genderkompetenz-Modulelements, d.h. einer Lehrveranstaltung (Arbeitstitel „Mathematik, Schule und Geschlecht“), die dann im Wintersemester 2009/10 an acht deutschen Hochschulen erprobt werden soll. Die beteiligten Hochschulen sind die Universität Augsburg, Universität Bielefeld, Universität Bremen, Universität Gießen, Universität Hamburg, Universität Lüneburg, PH Ludwigsburg, Universität Potsdam.

Die in Zusammenarbeit mit ExpertInnen aus verschiedenen Bereichen entstehenden Lerneinheiten dienen dem Ziel der Entwicklung von Genderkompetenz bei den Studierenden. Genderkompetenz definieren wir dabei als aus drei Bereichen bestehend: Genderwissen, Handlungskompetenz sowie Sozial- und Selbstkompetenz.

Genderwissen umfasst das Wissen um die soziokulturelle Konstruktion von Geschlecht, ihre Auswirkungen auf gesellschaftliche Strukturen, Institutionen und individuelles Handeln, ihre Auswirkungen auf die Entwicklung wissenschaftlicher Disziplinen und vergeschlechtlichter Fachkulturen, vor allem im Fall des Fachs Mathematik.

Handlungskompetenz meint methodisch-didaktische Kompetenzen, insbesondere in Bezug auf die geschlechtergerechte Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen.

Besonders wichtig ist uns die Sozial- und Selbstkompetenz: Hier geht es darum, die geschlechtsbezogene Selbstreflexion der Studierenden anzuregen und eine solche Selbstreflexion auch in der (zukünftigen) beruflichen Praxis nutzbar zu machen. Außerdem geht es um die gezielte Sensibilisierung der Studierenden für die Genderproblematik im „heimlichen Lehrplan“, vor allem die vielleicht unbewussten, geschlechterstereotypen Wahrnehmungen, Einstellungen und Verhaltenserwartungen von Lehrkräften.

Nach der Erprobung der Lehrveranstaltung an den acht genannten Hochschulen soll diese evaluiert und überarbeitet werden. Langfristiges Ziel ist die Implementierung der Lehrveranstaltung in Studiengänge. Denkbar ist auch der Einsatz im Referendariat oder in der Lehrerfortbildung.

Literatur

DMV (2009): Pressemitteilung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung: Neue Lehrer braucht das Land. Berlin, 24.2.2009, http://dmv.mathematik.de/informationendmv/presseinformationen/presseinformationen-archiv/483-240209-neue-lehrer-braucht-das-land.html (letzter Zugriff: 7.5.2009)

Niederdrenk-Felgner, C. (2001): Die Geschlechterdebatte in der Mathematikdidaktik. In: Hoppe, H., Kampshoff, M. & Nyssen, E. (Hrsg.): *Geschlechterperspektiven in der Fachdidaktik* (S. 123 - 144). Weinheim: Beltz.

Terhart, E. (Hrsg.) (2000): *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland*. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission. Weinheim: Beltz.

Wissenschaftsrat (2001): Empfehlungen zur künftigen Struktur der Lehrerbildung. Drucksache 5065/01, Berlin/Köln, 16.11.2001, http://www.wissenschaftsrat.de/texte/5065-01.pdf (letzter Zugriff : 7.5.2009)

Renate MOTZER, Augsburg

„Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugung zu erzwingen.“ - Was denken Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse über dieses Zitat von Fermat?

Mathematik ist eine exakte Wissenschaft. Ihre Aussagen basieren auf Beweisen. Aus Definitionen und Axiomen werden weitere Eigenschaften hergeleitet und logisch erschlossen. Beweisen ist also eine fundamentale Tätigkeit von Mathematikern. Im Mathematikunterricht allerdings steht gewöhnlich die Anwendung bestimmter (bewiesener) Regeln im Mittelpunkt. Es fragt sich, wie viel Bewusstsein Schülerinnen und Schüler von der Bedeutung des Beweisens besitzen und was sie über das Beweisen denken.

Anhand des im Titel genannten Zitates beschrieben Schülerinnen und Schüler der 8.Klasse im Schuljahr 2005/06, was sie mit Beweisen innerhalb und außerhalb der Mathematik verbinden. In einer früheren Untersuchung (vgl. Motzer 2006) konnte ein kleiner geschlechtsspezifischer Unterschied beobachtet werden: Mädchen interpretierten das Überzeugen häufiger so, dass der Sachverhalt anderen verständlich gemacht werden soll. Jungen ist es eher wichtig, dass am Ende feststand, sie haben Recht. Es sollte nun untersucht werden, ob sich diese Unterscheidung bestätigen lässt.

Der Auftrag an die Schülerinnen und Schüler lautete:

„Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugung zu erzwingen.“

Schreibe einen kurzen Aufsatz, in dem du zu dieser Aussage des Mathematikers Fermat Stellung nimmst.

Beziehe dich dabei vor allem auf das Beweisen in der Mathematik. Du kannst aber auch Vergleiche zu Beweisen in anderen Bereichen (z.B. im Alltag oder vor Gericht) anstellen.

Folgende Fragestellungen können Anhaltspunkte für dich sein:

Was heißt für dich „Überzeugen“?

Meinst du, dass es stimmt, was Fermat sagt? Warum könnte es stimmen? Warum nicht?

Was könnte beim Beweisen sonst noch wichtig sein?

Die Fragen waren so formuliert, dass sie nicht unbedingt beantwortet werden mussten, sondern nur als Anhaltspunkt dienten. Viele Schülerinnen und

Schüler arbeiteten direkt die Fragen nacheinander ab, viele behandelten aber auch nur einen Aspekt des Beweisens oder nahmen zu anderen Gesichtspunkten des Beweisens oder des Mathematikunterrichts Stellung.

Insgesamt nahmen 155 Jungendliche aus 6 Klassen teil, 36 Jungen und 26 Mädchen aus 2 gemischten Klassen und 93 Mädchen aus 4 reinen Mädchenklassen. Alle Schülerinnen und Schüler hatten sich in diesem Schuljahr schon mit geometrischen Beweisen beschäftigt, bei den meisten lag diese Beschäftigung aber schon ein paar Monate zurück.

Der Schwerpunkt der Befragung galt dem Zusammenhang von Beweisen und Überzeugen. Dieser Zusammenhang war vermutlich im Unterricht noch nicht thematisiert worden (die meisten Schulbücher tun dies zumindest nicht).

Bei den Antworten konnte zwar die in der Ausgangsthese gestellte Unterscheidung nicht eindeutig repliziert werden, aber es konnten doch einige geschlechtsspezifische Tendenzen beobachtet werden. So ist vielen Mädchen das soziale Miteinander beim Finden und Vermitteln von Beweisen wichtig und ihnen missfällt die Vorstellung von Zwang. Manchen Jungen dagegen geht es eher um den Wahrheitsaspekt.

Etliche Schülerinnen bringen Vorschläge zum Umformulieren von Fermats Zitat: „Das Wesen des Beweisens ist es Überzeugung zu gewinnen“, wird von mehreren Mädchen genannt. Eine andere Schülerin schlägt vor: „Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugung zu erlangen.“ Sie denkt dabei an den Beweisenden wie an diejenigen, denen der Beweis vorgeführt wird.

In eine andere Richtung passt der Vorschlag: „Das Wesen des Beweisens ist es, auf Tatsachen aufzubauen.“

Von den 36 Jugendlichen, die sich am Wort „erzwingen“ stören, denken einige jedoch, dass es immer noch sein kann, dass jemand eine beweisende Argumentation nicht anerkennen kann oder will, vielleicht weil er sie nicht wirklich versteht. Solch ein Mensch sollte nicht gezwungen werden. Dass in solch einem Fall die Aussage Fermats nicht zutrifft, beschreibt eine andere Schülerin: „Die Aussage von Fermat könnte auch nicht stimmen, wenn man trotz eines Beweises persönlich nicht überzeugt ist.“

Weiterhin könnte es sein, dass man von etwas Falschem überzeugt werden soll. Diese Gefahr sehen 6 Jungen und 10 Mädchen. Dass einen jemand im Alltag und manchmal auch in der Mathematik von etwas Falschem überzeugen kann, was einem nur bewiesen erscheint ohne es wirklich zu sein, ist für sie immer mit zu bedenken. Als Beispiele werden hier vor allem falsche Gerichtsurteile angeführt, z.B. aufgrund sogenannter Indizienbeweise. Ein konkretes Beispiel aus der Mathematik wird nicht gegeben. Vermutlich ist den Jungendlichen keines bekannt. Dass es so etwas aber auch in der Mathematik geben kann, formuliert eine Schülerin explizit.

Eine Schülerin beschreibt ihre Kritik an mathematischen Beweisen (deren Richtigkeit sie nicht in Frage stellt) so: „Beweise lassen dem menschlichen Geist keine Freiheit mehr. Und das ist doch schlecht, oder?“ Ihre Nachbarin ergänzt: „Sie beschränken einen darauf etwas glauben zu müssen.“ Diese Schülerinnen sehen also nicht den Vorteil von sicherem Wissen, auf dem man aufbauen kann, den 2 Jungen und ein anderes Mädchen betonen.

Eine andere Schülerin führt aus: „Meiner Meinung nach ist die ganze Mathematik auf Beweisen aufgebaut und allein dies beweist, dass die meisten Mathematiker vielleicht kluge Köpfe, ja, aber sture und ‚erzwingende’ Köpfe sind.“ Freilich fügt sie beschwichtigend dazu: „Aber wie auch immer, zumindest in dieser Welt sind Beweise mehr als nur wichtig.“

Im Sicherheitsaspekt sieht ein Junge das eigentliche Wesen des Beweisens: „Es ist das Ziel des Beweisens jemanden zu überzeugen, aber ich glaube nicht, dass es ebenso das Wesen des Beweisens ist. Ich finde, das Wesen des Beweisens ist eine Behauptung 100% richtig und vor allem nachvollziehbar zu begründen. Man beweist ja um etwas sicher zu wissen, warum es so ist und nicht hauptsächlich um eine andere Person davon zu überzeugen.“

Dass es auch für einen selbst gut sein kann zu wissen, dass etwas stimmt, wozu man den anderen überreden will, bemerkt eine Schülerin: „Überzeugen heißt für mich, einem Menschen klar machen, dass es wirklich stimmt, so dass ich auch kein schlechtes Gewissen dabei haben muss.“

Weitere Aspekte des Beweisens, die genannt werden, sind:

Beweise müssen nachvollziehbar sein (von beiden Geschlechtern gleichermaßen vertreten).

Beweise dienen dem Rechthaben (überproportional von Jungen vertreten).

Beweisen geschieht zusammen mit anderen und für andere („Wissen mit anderen teilen“) (wird vor allem von Mädchen betont).

Beweise zeigen die Richtigkeit und Unveränderlichkeit der Aussage (von einzelnen Jungen beschrieben).

Beweise haben eine Bedeutung für die Zukunft, denn sie geben ein sicheres Fundament zum Weiterarbeiten (von einem Jungen und einem Mädchen herausgestellt).

Eine Schülerin sieht den Zusammenhang zwischen Überzeugen und Beweisen andersrum: „Um zu beweisen, muss man nicht überzeugen, aber um zu überzeugen, muss man beweisen.“

Für einen Schüler hat Beweisen auch etwas mit Schönheit zu tun: „Für mich ist Beweisen nicht nur zum Überzeugen da. Es ist einfach schöner, wenn man etwas nicht einfach nur behauptet, sondern auch beweisen kann. ... Es macht Spaß andere Lösungswege zu finden.“

Ähnliche Aspekte, die zunächst nur den Beweisenden selbst betreffen, werden auch von anderen genannt. Zwei Jungen und einige Mädchen betonen, dass man erst einmal selbst von einem Beweis überzeugt sein muss. Ein Junge beschreibt den Prozess von der eigenen Vermutung zum Beweis, der ihm die Sicherheit bringt, dass seine Vermutung stimmt.

Beweise sollen dazu helfen, die eigene Freude und Lust zu übertragen. Jedenfalls liest sich Fermats Zitat für eine Schülerin so: „Es kommt so rüber, als ob Fermat versucht die Freude und Lust an Mathe zu übertragen.“ Auch 7 Schülerinnen anderer Klassen führen aus, dass Beweisen Spaß machen soll, vor allem dass das Überzeugen der anderen helfen soll, die eigene Begeisterung und den Spaß am Finden der Aussage weiterzugeben.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass von den Schülerinnen und Schülern fast alle Aspekte des Beweisens genannt werden, die man auch in der Literatur findet (vgl. Kuntze 2006,S.153ff). Diese sollten auch im Unterricht berücksichtigt werden.

Literatur:

Kuntze, Sebastian (2006). Themenstudienarbeit, Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren, München

Motzer, Renate (2006). Soziale Bezüge beim mathematischen Beweisen sehen – Verschiedene Akzente bei Mädchen und Jungen, in: Laura Martignon, Cornelia Niederdrenk-Felgner und Rose Vogel (Hrsg.), *Mathematik und Gender*, Hildesheim, Franzbecker Verlag

Motzer, Renate (2008). „Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugung zu erzwingen.“ - Was denken Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse über dieses Zitat von Fermat? , in: Laura Martignon, Cornelia Niederdrenk-Felgner und Rose Vogel (Hrsg.), *Mathematik und Gender*, Hildesheim, Franzbecker Verlag

Motzer, Renate (2006). Soziale Bezüge beim mathematischen Beweisen – Unterschiedliche Akzente in den Arbeiten von Jungen und Mädchen in: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*, Hildesheim, Franzbecker Verlag

Helga JUNGWIRTH, München

Computer und Geschlecht – eine hochaktuelle Frage für Unterricht und LehrerInnenbildung

Wie für andere Fächer wurden und werden auch für den Mathematikunterricht Konzepte für den Einsatz des Computers (inkl. symbolischer Taschenrechner) entwickelt und deren Realisierungen in Hinblick auf die Gestaltung der unterrichtlichen Prozesse und den Gewinn für das Lernen von Mathematik untersucht ([2]; [10]).Von der Verwendung des Computers werden ganz generell wichtige Impulse zur Innovation des Unterrichts erwartet, auch wenn der Computer heute nicht mehr als direkter und allein maßgeblicher Auslöser für positive Veränderungen angesehen wird.

Bislang noch wenig Raum nimmt – trotz der zunehmenden Computernutzung – in der mathematikunterrichtsbezogenen Empirie die Auseinandersetzung mit Geschlechteraspekten ein. Arbeiten, die die Geschlechterthematik aufgreifen, werden vorrangig in einem psychologischen bzw. insbesondere sozialpsychologischen Rahmen durchgeführt, in dem die Aufmerksamkeit nicht einzelnen Fächern und möglichen Wechselwirkungen zwischen Fach und Computer gilt ([1]). Vor dem Hintergrund, dass die Mathematik eine Tradition als „männlicher" Bereich hat, deren Spuren sich auch im heutigen Unterricht noch verfolgen lassen, erscheint angesichts des innovativen Potenzials des Computers aber gerade ein fachspezifischer Blick als besonders lohnend: Vermag der Computer die Tradition außer Kraft zu setzen? Aus dieser Überlegung entstand ein Forschungsprojekt ([7]; mathematikbezogen [4]) innerhalb der Forschungsinitiative „Gender IT!" des österreichischen BM für Bildung und Wissenschaft, in dem computerbasierter Mathematik- und Physikunterricht (Physik gilt ja noch deutlich mehr als männlich) untersucht wurde.

Eine Studie über computerbasierten Mathematik- und Physikunterricht und ihre Erkenntnisse

Die allgemeine Frage wurde zugespitzt auf eine vergleichende Betrachtung von „Bezügen" auf Mathematik/Physik und Computer und deren möglicher Verbindung mit Geschlecht. Theoretischer Ausgangspunkt ist die Position, dass durch Handeln Gegenstände produziert sowie Bezugnahmen auf bereits vorliegende Gegenstände realisiert werden ([8]). Mit Gegenständen sind dabei sowohl materielle als auch gedankliche Objekte gemeint. Die immer wieder gleiche Verwendung von Gegenständen durch eine Vielzahl von Menschen etabliert feste Arten von Bezügen, die dann auch gleichsam mit den Gegenständen einhergehen und als Vorbild für den Umgang mit ihnen dienen. Allerdings werden Bezüge immer wieder aufs Neue in der zwischenmenschlichen Interaktion hervorgebracht: Dort werden sie dargestellt, ausgetauscht, umgeformt oder besiegelt. Die Interaktionsbeteiligten bewerkstelligen dies auf ihre Art, wobei es grundsätzlich zwei Modi des Tätigseins gibt: verbal und praktisch (d.h. durch Hantieren bzw. körperliche Bewegung). Analysen des interaktiven Handelns bilden dann die Basis für die Rekonstruktion von Gegenstandsbezügen.

Der Zugang zu Geschlecht erfolgte in der Studie aus einer konstruktivistischen Perspektive (u.a. [3]). Danach ist Geschlecht ein gesellschaftliches Ordnungsprinzip, dem Menschen wie kulturelle Objekte (von Kleidungsstücken über Verhalten bis zu wissenschaftlichen Disziplinen) unterworfen werden (können), das wirksam ist, insofern es zur Anwendung gebracht wird, und sich dabei in der Klassifikation als weiblich bzw. männlich äußert. Was in der Alltagssicht z.B. geschlechtsspezifische Handlungsweisen im Unterricht sind, wird aus dieser Perspektive zu einer Methode, mit der auf anderen Wegen klassifizierte Personen ihre Geschlechtszugehörigkeit vervollständigen; also erst recht zu Frauen/Männern bzw. Mädchen/Buben werden. Der Vorteil dieser Position ist, dass von diversen Prozessen der Differenzierung statt von einer basalen Differenz ausgegangen wird, womit Heterogenität und Veränderbarkeit von geschlechtlichen Phänomenen vorbedacht werden.

Datenbasis der Studie waren Videoaufzeichnungen von rund 40 Stunden alltäglichem, computerbasiertem Mathematik- bzw. Physikunterricht an höheren Schulen in Österreich; gehalten von versierten Lehrkräften in Klassen, die mit der unterrichtlichen Nutzung des Computers mehr oder weniger vertraut waren. Im Mathematikunterricht bedeutete – an dieser Stelle wird nur auf den Mathematikunterricht eingegangen – dies hauptsächlich Einsatz von CAS bzw. entsprechenden Taschenrechnern.

Drei Typen von Gegenstandsbezügen konnten rekonstruiert werden: Wissensrelationen, die den vielfach in der mathematikdidaktischen Literatur angesprochenen „normalen“ Umgang mit den Unterrichtsgegenständen in Form von Konzeptualisierungen und routinemäßigen Erledigungen bilden; Werturteile, in denen (explizit) Positionen gegenüber den Unterrichtsgegenständen eingenommen und Emotionen sichtbar werden; und Zuständigkeiten, in denen es um die Verantwortung für Wissen bis hin zum Kampf um seinen Besitz geht. Von seiner Ausrichtung her kann der beobachtete Unterricht zusammenfassend als „technologisch überformte Praxis“ bezeichnet werden ([5]), denn faktisch wird die Implementierung von Aufgabenlösungen im Computer als Ziel etabliert.

Unter dem Geschlechteraspekt betrachtet zeigen sich lokale Kopplungen von Gegenstandbezügen mit Geschlecht: Der Unterricht stellt sich als Geschehen dar, in dessen neutralen Verlauf es punktuell zur Geschlechterdifferenzierung kommt mit dem Effekt, dass dabei die Unterrichtsgegenstände als männlich reproduziert werden. Allerdings ist diese Aussage zu gewichten:

Erstens ist der Bezugstyp Zuständigkeit maßgeblich und zweitens lassen sich spezifische Anregungssituationen rekonstruieren. Es sind vorrangig mathematikunspezifische Aktivitäten, an denen Geschlecht zur Geltung gebracht wird; das eigentliche mathematische Potenzial der verwendeten Programme ist im Vergleich unerheblich. Das bedeutet, dass der Computer in seiner Funktion als technisches Gerät Geschlecht virulent werden lässt. Sozial gesehen sind es bestimmte Situationen, in denen sich das ereignet: solche, die ein besonderes Kompetenzgefälle zeigen bzw. auf Hilfestellung angelegt sind und insofern zwei Arten von Positionen anbieten. Eine derartige Grundstruktur begünstigt eine Geschlechterdifferenzierung entlang der Kompetenzlinie (männlich – kompetent, weiblich – inkompetent).

Anknüpfend an den Ausgangsgedanken lässt sich also formulieren, dass der Computer im beobachteten Mathematikunterricht die Tradition der Mathematik nicht aufgehoben, sondern vielmehr über seine Techniknähe noch seine eigene Tradition als männlich eingebracht hat.

Möglichkeiten der geschlechtlichen Neutralisierung von Gegenstandsbezügen im Unterricht

Sieht man geschlechtlich neutrale Bezüge auf die Unterrichtsgegenstände als wünschenswert an, stellt sich die Frage nach Wegen, Geschlechterdifferenzierungen möglichst hintan zu halten. Die folgenden Vorschläge setzen direkt an den Forschungsergebnissen an. Danach erscheint es günstig, für Hilfesituationen eine andere Praxis im Klassenzimmer zu installieren: kein eigeninitiiertes Intervenieren der Helfenden, und auch wenig im praktischen Modus. Auch über das Helfen hinaus wäre eine „Vermathematisierung“ der Computernutzung im Sinne einer Beschreibungs- bzw. Begründungspflicht auch bei Manipulationen günstig. Darüber hinaus ist auf die Bildung von monogeschlechtlichen Arbeitsgruppen bzw. Sitzbereichen im Klassenzimmer zu verweisen sowie auf die didaktische Standardforderung, dass so viele Computer wie Lernende vorhanden sein sollen.

Möglichkeiten einer fruchtbaren LehrerInnenbildung

In [7] wird davon ausgegangen, dass die Spannung zwischen wissenschaftlichem, fachdidaktischem Wissen und dem professionellen Wissen der

Lehrkräfte stets ein sehr produktives Potenzial hat, nicht zuletzt in dem komplexen Fall der Thematisierung von Geschlechteraspekten. Es geht in der LehrerInnenbildung um eine Begegnung von Wissensformen, vergleichbar mit dem Aufbau eines kubistischen Bildes ([9]): Es gibt zwei nicht vereinheitlichbare Perspektiven. Wohl aber kann die andere zumindest probeweise einmal eingenommen, d.h. von den Lehrkräften im Unterricht bei der wissenschaftlichen Anleihe genommen werden. Methodisch lässt sich in der LehrerInnenbildung daran anknüpfen, dass die Unterrichtspraxis von (angehenden) Lehrkräften in Erzählungen präsent wird ([6]; zur Veränderung von Praxis generell [11]). Wenn die Erzählungen geeignet konkrete Bezugspunkte haben, ist eine Voraussetzung für eine fruchtbringende Auseinandersetzung gegeben. Wichtig ist also der Fallbezug, und die wirksamste Variante dabei ist die Arbeit am Video des eigenen Unterrichts. Die Auseinandersetzung selbst braucht die Verbindung mit inhaltlich-methodischen Fragen der Unterrichtsgestaltung. Mit Blick auf die wissenschaftlich-fachdidaktische Seite ist es günstig, wenn deren Aussagen ebenfalls ein passendes, erzählerisches Format haben.

Literatur

[1] Cooper, J. & Weaver, K.D. (2003). Gender and computers. Understanding the digital divide. Mahwah: NJ: Erlbaum

[2] Guin, D., Ruthven, K. & Trouche, L. (Eds.) (2005). The didactical challenge of symbolic calculators. New York: Springer

[3] Hirschauer, S. (1994). Die soziale Fortpflanzung der Zweigeschlechtlichkeit. Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie, 46, 668-692

[4] Jungwirth, H. (2008). On the role of computers and complementary situations for gendering in mathematics classrooms. ZDM, 40(4), 579-590

[5] Jungwirth, H. (2006). Die Intervention des Computers. In: Jungwirth, H. & Krummheuer, G. (Hg.), Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht. Münster: Waxmann, 119-152

[6] Jungwirth, H. (2004). Veränderung und Reproduktion des Gewöhnlichen: Lehrerpraktiken in Neuerungskontexten. JMD, 25(2), 87-111

[7] Jungwirth, H. & Stadler, H. (2009). Wie kommt Geschlecht an Fach und IT? Eine Studie über computerbasierten Mathematik- und Physikunterricht. Münster: Waxmann

[8] Oerter, R. (1982). Interaktion als Individuum-Umwelt-Bezug. In: Lantermann, E.D. (Hg.), Wechselwirkungen. Psychologische Analysen der Mensch-Umwelt-Beziehung. Göttingen: Hogrefe, 101-127

[9] Radtke, F.-O. (1988). Strukturdeutung pädagogischer Situationen. Zur Begründung eines Konzepts sozialwissenschaftlich fundierter Fortbildung von Lehrerinnen und Lehrern. Habilitationsschrift. Bielefeld

[10] Weigand, H.-G. (2006). Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe. Evaluation eines Schulversuchs. JMD, 27(2), 89-112

[11] Wyssusek, B. (2004). Wissensmanagement komplex. Perspektiven und soziale Praxis. Berlin: Erich Schmidt Verlag

Michael MEYER, Dortmund

Moderierte Sektion: Begriffsbildung im Mathematikunterricht

Michael MEYER, Dortmund

Sprachspiele im Mathematikunterricht

Viele Begriffsbildungsprozesse bestehen darin, dass die Bedeutung von Worten auf sprachlicher Basis initiiert, ausgehandelt und gefestigt wird. Der vorliegende Beitrag widmet sich diesen Prozessen und schlägt ein Modell zu ihrer Analyse vor. Den theoretischen Hintergrund der Betrachtung bildet die Sprachspielphilosophie Ludwig Wittgensteins. Anhand einer Unterrichtsszene werden erste Ergebnisse der Analysen aufgezeigt.

1. „Begriffe“ im Mathematikunterricht

Um im Mathematikunterricht Worte wie „Bruchzahl“ oder „Kommutativgesetz“ verwenden zu können, müssen die Schüler eine Bedeutung dieser Worte kennen. Die Aushandlung von Bedeutungen erfolgt häufig auf sprachlicher Basis: „Mathematics begins and proceeds in language, it advances and stumbles because of language, and its outcomes are often assessed in language” (Durkin und Shire, 1991, S. 3).

In der mathematikdidaktischen Literatur werden verschiedene Arten von Begriffsbestimmungen unterschieden. Winter (1983) führt u.a. die *exemplarischen* und die *explizit-definitorischen* Begriffsbestimmungen auf. Bei exemplarischen Begriffsbestimmungen werden Begriffe durch Realhinweise verdeutlicht und durch das Herausarbeiten von (gemeinsamen) Eigenschaften spezifiziert. Die explizit-definitorischen Begriffsbestimmungen sind in der Hochschulmathematik prominent: Begriffe werden durch Definitionen geschärft. Diese Definitionen führen die Bedeutung des Neuen auf etwas Bekanntes zurück.

Die Analyse der Begriffsbildung im Mathematikunterricht ist Gegenstand vieler Studien (u.a. Steinbring 1997). In diesem Beitrag wird ein Modell beschrieben, welches die Bildung neuer Begriffe im Unterrichtsgespräch zu verstehen verhelfen soll. Die theoretische Grundlage für die Analysen bildet die Sprachspielphilosophie Ludwig Wittgensteins. Dieser Artikel präsentiert Ausschnitte, indem Begriffsbestimmungen fokussiert und erste Analyseergebnisse präsentiert werden.

2. Sprache als Spiel

In seiner späteren Philosophie beschreibt Wittgenstein eine pragmatische Beziehung von Ausdrücken und der ihnen situationsspezifisch zugewiesenen Bedeutung. Er lehnt jede Form einer Beziehung zwischen Worten und dahinter liegenden fixen Bedeutungen ab. Die Bedeutung von Ausdrücken ist nicht etwas, das zwischen verschiedenen Menschen geteilt gelten muss:

„Language is a universal medium – thus it is impossible to describe one's own language from outside: We are always and inevitable within our own language […]. Knowledge appears as knowing, and knowing is always performed in language games. Language as languaging or playing a language game is equal to constituting meaning and, thus, constituting objects. There are no objects without meaning, and meaning is constituted by a special use of language within a respective language game." (Schmidt 1998, S. 290)

Die Bedeutung sprachlicher Ausdrücke wird generiert durch ihre Verwendung im „Sprachspiel". Ein Sprachspiel im Sinne Wittgensteins ist nicht durch die herkömmliche Verwendung des Begriffs „Spiel" zu verstehen. Wir können – zumindest in erster Instanz – nicht entscheiden, ob wir an dem Spiel teilhaben wollen oder nicht. Problematisch ist, dass Wittgenstein nicht erklärt, was er als „Sprachspiel" versteht. Wir werden sehen, dass dies eine Konsequenz seines Verständnisses von Begriffsbildung ist: Er verwendet die Worte und versucht nicht, sie auf bereits Bekanntes zurückzuführen. Beispiele für Sprachspiele sind: „Befehlen und nach Befehlen handeln", „Berichten eines Hergangs" und „Hypothesen aufstellen und prüfen" (PU, §23). Zudem nennt er „auch das Ganze: der Sprache und der Tätigkeiten mit denen sie verwoben ist, das ‚Sprachspiel' " (PU, §7).

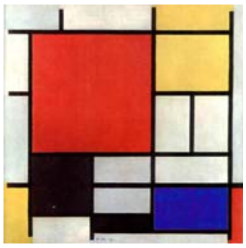
Die Verwendung sprachlicher Ausdrücke ist beeinflusst von einer Vielzahl verschiedener Sprachspiele, die eine zeitliche und kontextuelle Spezifik aufweisen. Diese Besonderheiten sind bedingt durch das Begriffsbildungsverständnis Wittgensteins. Worte haben entsprechend diesem Verständnis keine Bedeutung an sich, keinen objektiven Inhalt. In verschiedenen Sprachspielen können verschiedene Bedeutungen von Worten auftreten. Man denke zum Beispiel an die polysemantische Verwendung des Wortes „Satz" im Deutsch- bzw. Mathematikunterricht.

Die Bedeutung von Worten ist nicht feststehend, sondern bedingt durch ihren Gebrauch im jeweiligen Sprachspiel: „Man kann für eine große Klasse von Fällen der Benützung des Wortes „Bedeutung" – wenn auch nicht für alle Fälle seiner Benützung – dieses Wort so erklären: Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache" (Wittgenstein PU, §43). Worte spiegeln demzufolge also weder eine Bedeutung noch einen objektiven Inhalt an sich wider. Die Bedeutung eines Wortes kann nur das Erfassen des Gebrauchs dieses Wortes im jeweiligen Sprachspiel erkannt werden. Der Gebrauch muss dabei nicht auf ihre Anwendung beschränkt sein, denn selbst wenn wir Worte exemplifizieren, gebrauchen wir sie.

Ziel der Studie ist die Analyse des Sprachspiels Mathematikunterricht. Ein Schwerpunkt wird die Analyse von Begriffsbildungsprozessen sein. Die folgende Analyse behandelt einzelne Momente solcher Prozesse.

3. Analyse realer Begriffsbestimmungen

Am Beispiel einer Unterrichtsszene aus einer vierten Grundschulklasse werden im Folgenden Arten der Begriffsbestimmung aufgezeigt. Die Mathematikstunde beginnt damit, dass die Lehrerin das Wort „Geometrie“ an die Tafel schreibt und die Schüler zunächst frei assoziieren lässt. Anschließend schreibt sie bei unveränderter Aufgabenstellung für die Schüler die Worte „senkrecht“, „parallel“ und „rechter Winkel“ an die Tafel. Nachdem die Schüler eine Mindmap zu dem Begriffen erstellen sollten, hängt die Lehrerin ein Bild (s. Abb. rechts) an die Tafel, an dem die Schüler die verschiedenen geometrischen Ausdrücke (u.a. „rechter Winkel“) erklären sollen. Hierauf kommt Jan an die Tafel:



„(*verfolgt mit einem Stift eine vertikale Linie*) senkrecht ist dieses hier. (*mit dem Stift verfolgt er jetzt eine horizontal verlaufende Linie*) parallel dieses hier. rechter Winkel ist so was hier. (*verfolgt zwei senkrecht aufeinander stehenden Linien*)“

Mittels der Beispiele verdeutlicht Jan, dass er den Ausdruck „rechter Winkel“ aus einem vorherigen Sprachspiel kennt. Die Worte erhalten in der offiziellen Unterrichtsinteraktion eine exemplifizierte Bedeutung. Der Gebrauch, den der Schüler veröffentlicht, muss natürlich nicht implizieren, dass es keinen anderen Gebrauch dieses Ausdrucks gibt. Jedoch ist es zu diesem Zeitpunkt dieser Gebrauch und somit diese *exemplifizierte* Bedeutung, den der Ausdruck „rechter Winkel“ in der Interaktion erhält.

Der Unterricht wird fortgesetzt, indem die Schüler eine Mindmap zu den an der Tafel aufgeschriebenen Ausdrücken erstellen sollen. In dem darauf folgenden Unterrichtsgespräch wird durch das erneute Zeigen auf Beispiele für den Ausdruck „rechter Winkel“ das bestehende Sprachspiel fortgeführt. Im Anschluss an das zweite Beispiel setzt folgendes Gespräch ein:

Tim	ach so. diese Ecke von rechts (*zeichnet das Zeichen für den rechten Winkel ein*)
L	genau. mach mal– mach mal ganz n bisschen fetter, damit man es sieht. so gut jetzt
Tim	das ist ein linker Winkel (*zeigt auf den Nebenwinkel des zuvor als „rechten Winkel“ bezeichneten Winkels*)

In dieser kurzen Szene zeigen sich zwei Formen der Begriffsbildung: Zunächst erklärt Tim, warum die vorherigen Beispiele den Ausdruck „rechter Winkel“ verdeutlichen können. Er abstrahiert von den konkreten Beispielen indem er den Ausdruck „rechts“ mit einem Gebrauch dieses Wortes aus einem anderen Sprachspiel in Verbindung bringt. Tim zieht hierzu aus den gezeigten Beispielen etwas Gemeinsames. Nach Winter (1983, S. 187f) kann der bisherige Verlauf der Begriffsbestimmung als „exemplarisch“ bezeichnet werden.

Der Begriff „linker Winkel“ wird von Tim relativ zu dem Begriff „rechter Winkel“ eingeführt nachdem er für diesen eine (vorläufige) Definition gefunden hat. Durch die Verwendung des bekannten Begriffspaares „rechts-links“ (im Sinne einer Richtungsangabe) wird eine implizite Einführung deutlich. Relativ zu der von Winter (1983, S. 193f) als „explizit-definitorisch“ bezeichneten Begriffsbestimmung kann hier von einer *implizit-definitorischen* gesprochen werden. Auch kann die Verwendung des Wortes „linker Winkel“ als das Ziehen einer möglichen Konsequenz des Begriffs „rechter Winkel“ betrachtet werden. Entsprechend dieser Interpretation würde Timo nicht nur einen neuen Begriff einführen, sondern auch ein tiefes Verständnis für einen bereits bestehenden Begriff zeigen (s. Brandom 2004).

4. Fazit und Ausblick

Die Sprachspielphilosophie Wittgensteins ermöglicht neue Perspektiven zur Analyse von Unterrichtsinteraktionen. Ein Ziel der Analysen empirischer Unterrichtsszenen ist, verschiedene Gebrauchsformen von Worten und das Sprachspiel „Mathematikunterricht“ leitende Regeln herauszuarbeiten, um nicht nur die Realität des Mathematikunterrichts besser zu verstehen, sondern auch, um dieses Verständnis zur Konstruktion von Lernumgebungen zu nutzen.

5. Literatur

Brandom, R.B. (2004). *Begründen und Begreifen*. Frankfurt: Suhrkamp.

Durkin, K. & Shire, B. (1991). *Language in mathematics education – research and practise*. Milton Keynes England: Open UP.

Schmidt, S. (1998). Semantic Structures of Word Problems. In: C. Alsina u.a. (Hg.), *ICME 8*. Sevilla: S.A.E.M. 'Thales', S. 385-395.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. In: *ESM*, 32, 49-92.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 3, 175-204.

Wittgenstein, L. (1984). *Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt: Suhrkamp.

Stephan HUßMANN, Florian SCHACHT, Dortmund

Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen

Der vorliegende Beitrag stellt einen theoretischen Rahmen vor, vor dessen Hintergrund Prozesse der individuellen Begriffsbildung strukturiert und analysiert werden. Das Ziel einer solchen Untersuchung liegt einerseits in einem besseren Verständnis individueller Begriffsbildungsprozesse und damit verbunden in der Identifizierung überzeugender Festlegungen, die Schülerinnen und Schüler im Laufe von Begriffsbildungsprozessen eingehen, in der Identifizierung stabilisierender Fehlvorstellungen und dem Sichtbarmachen von Konzeptwechseln. Neben der Beschreibung der Lernendenperspektive dient diese Analyse andererseits der Untersuchung und Entwicklung des „begrifflichen Potentials“ von Lernumgebungen.

Der inhaltliche Fokus dieser Studie liegt auf der diskreten Mathematik, hier auf Eigenschaften von aufspannenden Bäumen in zusammenhängenden Graphen (vgl. HUßMANN et al. 2007). Ausgangspunkt sind *intentionale Probleme* (Hußmann 2003), die von Studierenden des Lehramtsstudiums in Gruppen selbst organisiert bearbeitet und deren Ergebnisse in Forschungsheften dokumentiert und reflektiert werden. Die Bearbeitung der Probleme macht die Entwicklung von entsprechenden mathematischen Verfahren und Begriffen notwendig, so dass die Forschungshefte einen Blick in die individuellen Begriffsbildungsprozesse gestatten.

Das folgende Beispiel zeigt einen Begriffsbildungsprozess, in dem das Problem einer optimalen Erneuerung eines Telefonnetzes mit der Entwicklung des Begriffes eines aufspannenden Baumes beantwortet werden kann. Es zeigt sich, dass die zur Verfügung gestellte Situation Behauptungen und Festlegungen initiiert, die den Begriffsbildungsprozess strukturieren, hinsichtlich sowohl von Gelingensbedingungen als auch von Sichtbeschränkungen. Der starke Zusammenhang von Situation und entwickelten Begriffsschema und die deutliche Gliederung der im Prozess formulierten Festlegungen legen die Verwendung der Theorie der Conceptual Fields nach VERGNAUD und der Theorie des Inferentialismus nach Brandom zur Rekonstruktion der Begriffsbildungsprozesse nahe.

VERGNAUD (1992, S. 306) formuliert eines der Hauptanliegen mathematikdidaktischer Forschung so: „The problem of making explicit the operational invariants involved in schemes is one of the main problems of mathematical education“. Der Begriff des Schemas, den Vergnaud nutzt, geht hierbei auf Piaget zurück, der sich seinerseits wieder auf Kant bezieht und damit eine “invariant organization of behavior for a certain class of situations” (Vergnaud 1992, S. 301) meint. Insofern sind die wesentlichen Merkmale solcher Schemata sog. *operationale Invarianten,* die einer Klasse von entsprechenden Situationen assoziiert sein sollen. Unseren Handlungen bzw. den operationalen Invarianten liegen gleichsam Behauptungen zugrunde, die wahr oder falsch sein können. Solche Behauptungen nennt Vergnaud *theorems-in-action*. Jede Behauptung wiederum lässt sich als Baustein eines Begriffs verstehen. Gleichzeitig sind Begriffe wesentliche Elemente von Behauptungen. „There is a dialectical connection between theorems and concepts“ (ebd.). *Concepts-in-action* nennt Vergnaud Festlegungen, mit denen Kategorien geschaffen werden , „that enable the subject to (…) pick up the most adequate selection of information according to the situation and scheme involved” (1996, S. 225).

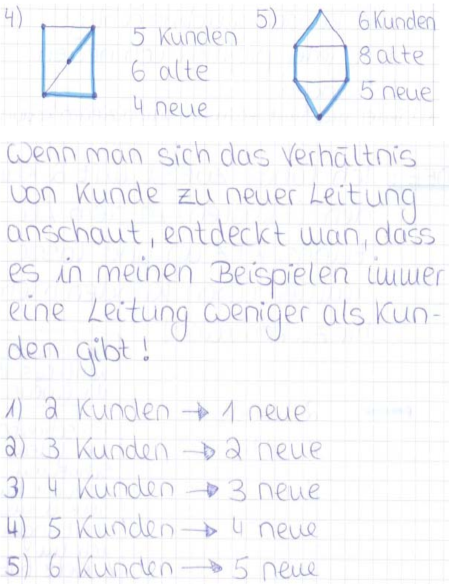


Abbildung 1: Kategorie des linearen Zusammenhangs als concept-in-action

Abb. 1 zeigt, wie sich eine Studierende zu Beginn des Bearbeitungsprozesses des oben beschriebenen Problems auf die Kategorie des linearen Zusammenhangs als *concept-in-action* festlegt und dieses nutzt. Dieses *concept-in-action* ist hier wesentlicher Bestandteil der von ihr im Weiteren formulierten Behauptungen, welche sie z.T. explizit darlegt: „dass es in meinen Beispielen immer eine Leitung weniger als Kunden gibt“ (vgl. Abb. 1). Eine wichtige Rolle in diesem Zusammenhang spielt die Situation und die hierin genutzten Objekte, denn es zeigt sich, dass nicht nur die spezifische Situation die Auswahl der Kategorien bzw. der *concepts-in-action* beeinflusst, es verdeutlicht darüber hinaus, inwiefern die Identifikation gewisser Objekte und Zusammenhänge mit ihren Eigenschaften und Beziehungen den individuellen Begriffsbildungsprozess erst ermöglichen (vgl. auch Vergnaud 1999, S. 177). Insofern spielen für das Verständnis von Begriffsbildungsprozessen neben den individuellen *Schemata* insbesondere die *Referenz*, also die Situationen und Objekte, eine zentrale Rolle.

Die Theorie Vergnauds zeigt die strukturellen Zusammenhänge zwischen individueller Begriffsbildung und den umgebenden Referenzen. Sie zeigt aber nur unscharf das Beziehungsgeflecht zwischen den einzelnen Festlegungen und Behauptungen. Dieses sichtbar zu machen, bedarf es der

Explikation der feinen Nahtstellen, die das Zusammenhangsgefüge repräsentieren und sich in Gestalt von Gründen und Implikationen zeigen.

BRANDOM (1991, S. 71) schreibt dazu: „Einen (…) Begriff zu begreifen oder zu verstehen heißt, die Inferenzen, in die er verwickelt ist, praktisch zu beherrschen“, d.h. zu wissen, was aus den Festlegungen bzw. Behauptungen als die zentralen Bausteine von Begriffen folgt bzw. durch welche Festlegungen sie gleichsam impliziert werden und welche Festlegungen ausgeschlossen sind. Begriffsbildungsprozesse verstehen meint vor diesem Hintergrund also insbesondere das inferenzielle Beziehungsgeflecht, die zum großen Teil implizit eingegangenen Festlegungen, explizit zu machen. In diesem Sinne ermöglicht die Brandomsche Theorie nicht nur einen Perspektivwechsel, sondern die erkenntnistheoretischen Stoßrichtungen von Brandom und Vergnaud zeigen sich als überaus kohärent.

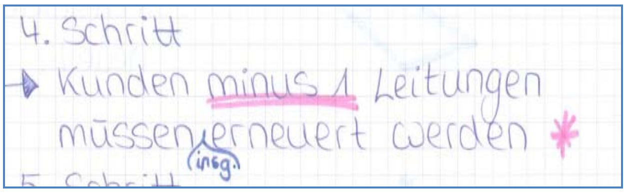


Abbildung 2: Beispiel implizit anerkannter theorems-in-action

Abbildung 3: Explizite Proposition

Der Ausschnitt aus einem von der Studierenden formulierten Algorithmus zur Aufdeckung von geeigneten Bäumen (vgl. Abb. 3) verdeutlicht den Aspekt der inferentiellen Gliederung: Die Idee des linearen Zusammenhangs als das hier zugrunde liegende *concept-in-action* wird als Abbruchkriterium für eine dem Algorithmus von Kruskal ähnliche Strategie genutzt. D.h. in einem Graphen mit n Knoten bricht der Algorithmus ab, sobald n-1 Knoten erneuert wurden. Hier wird deutlich, dass die Studierende (hier: implizit) die Festlegung eingeht, dass der entdeckte Zusammenhang nicht nur für die gefundenen Beispiele (vgl. Abb. 1), sondern für beliebige (zusammenhängende) Graphen mit n Knoten gilt. Darüber hinaus dient diese Festlegung der Studierenden als Begründung für die Funktionsweise des Algorithmus: Der Algorithmus bricht ab, wenn n-1 Kanten erneuert wurden, **weil** ein Baum in einem zusammenhängenden Graphen mit n Knoten n-1 Kanten hat. Die Festlegung in diesem Sinne zu verwenden offenbart allerdings nur „eine Richtung“ inferentieller Relationen. Was an dieser Stelle gleichsam noch fehlt, sind die Berechtigungen **für** diese Festlegungen, also diejenigen Behauptungen, **aus denen** die verwendete Behauptung, das *theorem-in-action* (vgl. Abb. 4) folgt, mithin also ein Beweis für das *theorem-in-action*. Den erbringt die Studierende im nächsten Bearbeitungsschritt. Der Referenzkontext liefert insofern Anlässe, die z.T. impliziten *concepts-in-action* (hier die Kategorie des linearen Zusammenhangs) in eine propositionale Struktur zu bringen, sie damit gleichsam als Element des inferentiellen Beziehungsgeflechtes explizit zu machen und somit das Begriffsgefüge zu (re-)strukturieren.

Ausblick: Die anschließende Perturbation (vgl. Abb. 5) stellt einen weiteren entscheidenden Schritt im Begriffsbildungsprozess dar: Hier werden die operationalen Invarianten und insofern auch die bisher eingegangenen Festlegungen und Behauptungen entlang der Referenzkontexte neu strukturiert. Die Studierende identifiziert eine Klasse von Situationen, für die das bisher genutzte *concept-in-action* nicht geeignet ist. Der Begriffsbildungsprozess vollzieht sich in diesem Beispiel entlang der Explikation implizit eingegangener Festlegungen.

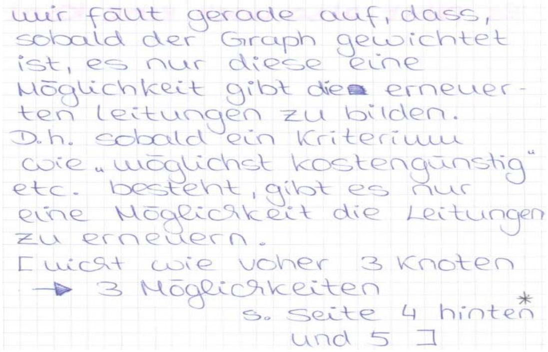


Abbildung 4: Identifikation einer "neuen" Klasse von Situationen

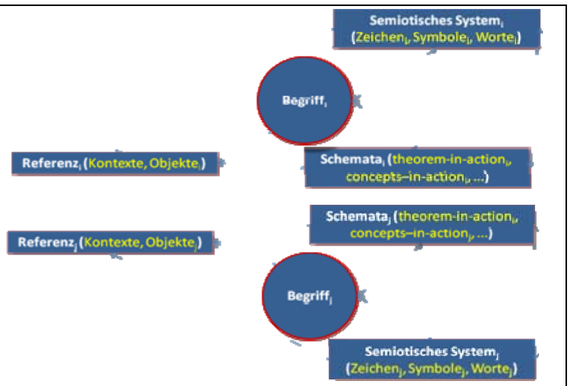


Abbildung 5: Darstellung des "Begriffsnetzes" am Ende des hier beschriebenen Begriffsbildungsprozesses

Hier deutet sich an, inwiefern individuelle Begriffsbildungsprozesse durch „making explicit the operational invariants involved in schemes" (Vergnaud 1992, S. 306) und der Identifikation Verwebung verwandter operationaler Invarianten - sowohl in langfristiger als auch in kurzfristiger Perspektive - nachgezeichnet werden können.

Literatur

BRANDOM, Robert (2001): Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

HUßMANN, Stephan (2003): Mathematik entdecken und erforschen. Berlin: Cornelsen.

HUßMANN, Stephan / LUTZ-WESTPHAL, Brigitte (Hrsg.) (1997): Kombinatiorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht. Wiesbaden:Vieweg.

VERGNAUD, Gérard (1992): Conceptual Fields, Problem-Solving and Intelligent Computer-Tools. In De Corte, Erik / Linn, Marcia / Mandl, Heinz / Verschaffel, Lieven (Hrsg): Comptuter-based learning environments and problem-solving. Berlin, Springer. S. 287-208.

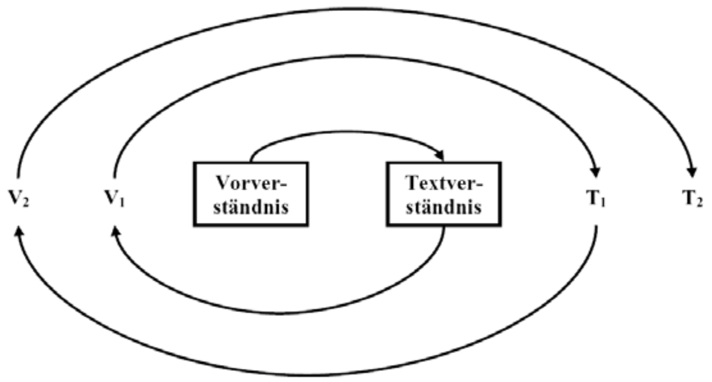
VERGNAUD, Gérard (1996): Education, the best portion of Peaget's heritage. In: Swiss Journal of Psychology 55 (2/3). S. 112-118.

VERGNAUD, Gérard (1999): A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. In: Journal of Mathematical Behavior, 17 (2). S. 167-181.

Michael MEYER, Dortmund und Marcus SCHÜTTE, Frankfurt

Moderierte Sektion: **Theoriebildung in der Interpretativen Unterrichtsforschung**

Die Unterrichtswirklichkeit zu erfassen, ist eine wesentliche Aufgabe der Interpretativen Unterrichtsforschung. Die Wirklichkeit des Mathematikunterrichts ist vielfältig. U.a. ist sie bestimmt von den Schülerkognitionen, den verschiedenen Formen von Interaktionen und den genutzten Lehrwerken. Die Hermeneutik, deren theoretische Grundlagen u.a. auf Gadamer (1960) zurückzuführen sind, bildet das Fundament für das Herauslesen von „Bedeutung“ aus all diesen Bereichen. Die nebenstehende Abbildung zeigt den hermeneutischen Zirkel, den Gadamer für die Analysen von Texten – seien dies Transkripte oder Schulbücher – beschrieben hat.



Der hermeneutische Zirkel nach Gadamer (1960, S. 250ff)

Innerhalb der Mathematikdidaktik wird seit ca. 20 Jahren intensiv Interpretative Unterrichtsforschung betrieben. Götz Krummheuer zeigte in seinem Vortrag verschiedene Entwicklungslinien der vergangenen Jahre auf. Auch wenn einige Veränderungen zu verzeichnen sind, ist der Kern unverändert geblieben: Dokumente wie Wortprotokolle oder Schulbücher dienen dazu, das Verständnis von Mathematik, wie es zwischen den Lernenden und Lehrenden emergiert bzw. wie es durch das Schulbuch initiiert wird, zu erfassen. Einige für die Interpretationen charakteristische Fragestellungen sind: Welche Deutungen von Mathematik lassen sich bei den Kindern aufgrund ihrer Äußerungen und Handlungen erkennen? Wie wird die Bedeutung von Dingen im untersuchten Unterricht zwischen den Beteiligten ausgehandelt? Welches Verständnis von Mathematik wird durch das Schulbuch vermittelt? Die Anwendung welcher theoretischen Perspektive verhilft, neue Erkenntnisse aus dem Unterrichtsgeschehen zu ziehen?

In der Vortragssektion wurden neben dem Überblicksbeitrag von Götz Krummheuer vier weitere Studien präsentiert. Die Inhalte variierten stark. Die Forschungsgegenstände waren:

- Transkripte von Interviews mit Schülern
- Transkripte von Unterrichtsgesprächen

- Ausschnitte aus Schulbüchern

Zu interpretieren bedeutet auch immer, eine theoretische Perspektive einzunehmen, welche die zu gewinnenden Erkenntnisse zwar filtert, diese jedoch gleichzeitig hervorhebt und handhabbar macht. Für die Analysen in den Beiträgen der moderierten Sektion wurden die folgenden Ansätze genutzt:

- Partizipationstheorie (s. Beitrag von Birgit Brandt)
- kognitiv-tätigkeitsorientierter Ansatz (s. Beitrag von Angelika Bikner-Ahsbahs)
- philosophische Logik (s. Beitrag von Michael Meyer)
- Bildungssprache (s. Beitrag von Marcus Schütte)

Die theoretische Perspektive verhilft, die Geschehnisse im Unterricht begründet zu erklären. Die begründbaren Aussagen sollen jedoch nicht auf eine spezielle, dokumentierte Unterrichtssituation, z.B. der Situation am 04. März 2009 in der Klasse 7b der Obernbergschule in Oldenburg, begrenzt bleiben, sondern tendenziell für eine große Anzahl von Unterrichtsstunden gelten. Der entscheidende Schritt besteht also darin, ausgehend von den Beobachtungen neue theoretische Ansätze zur generieren, die von den dokumentierten Phänomenen abheben und einen Allgemeinheitsanspruch beinhalten, etwa indem Potenzial zur Veränderung des bestehenden Alltags des Mathematikunterrichts aufgezeigt wird. Innerhalb der Sektion wurden folgende neue theoretische Konzepte präsentiert:

- Strukturierungen von Problemlöseprozessen (s. Beitrag von Birgit Brandt)
- Konzept der Interessenslage (s. Beitrag von Angelika Bikner-Ahsbahs)
- Optionen zur Gestaltung von Entdeckungsaufgaben (s. Beitrag von Michael Meyer)
- Implizite Pädagogik (s. Beitrag von Marcus Schütte)

Literatur:

Gadamer, H.-G. (1960): Wahrheit und Methode. Tübingen: Mohr.

Birgit BRANDT, Frankfurt a. M.

Kollektives Problemlösen – eine partizipationstheoretische Perspektive

In der mathematikdidaktischen Diskussion wird in den letzten Jahren immer wieder betont, dass ein Lernen auf eigenen Wegen mit einem Lernen von- und miteinander verbunden werden soll. Im Mathematikunterricht der Grundschule finden sich zunehmend aktiv-entdeckende Unterrichtangebote, aber eher in Form individualisierender Differenzierung und weniger in einer durch Kommunikation und Kooperation geprägten Unterrichtskultur. In einem Forschungsprojekt zum kollektiven Problemlösen soll die Aufgabenkultur, die sich für den Mathematikunterricht der Grundschule aus dem Ansatz der „substanziellen Aufgabenformate" (z.B. Wittmann 1995) heraus ausgebildete hat, in kooperativen bzw. kollektiven Lernarrangements[1] im Unterrichtsalltag eingebunden werden. In der forschungsmethodologisch als *Design-Based-Research* angelegten Studie sollen diese Realisierungen im Unterrichtsalltag genutzt werden, um Wechselbeziehungen zwischen kooperativen und fachlichen Aspekten der Bearbeitungsprozesse zu beleuchten. Grundlage für die Analyse von Strukturen und Strukturierungen entsprechender Lernformen bildet das partizipationstheoretische Modell fachlichen Lernens (Krummheuer & Brandt 2001).

1. Lerntheoretische Überlegungen

In der Diskussion über kooperative bzw. kollektive Lernarrangements lassen sich sehr unterschiedliche lerntheoretische bzw. pädagogische Verankerungen ausmachen. In Hinblick auf fachliche Lernprozesse ist insbesondere die konstruktivistische Perspektive auf Lernen als aktiver Aneignungsprozess des Lernenden in der Auseinandersetzung mit Lernmaterialien und im sozialen Austausch mit anderen bedeutend. Eher kognitionstheoretischen Ansätzen zufolge dienen die Kleingruppen den Lernenden dabei als Ort, in dem die eigenen, subjektiven Kognitionen auf Viabilität erprobt werden können. Die Kommunikation mit anderen bietet das Potenzial für kognitive Konflikte, die zu einer Weiterentwicklung der individuellen Kognitionen führen können; Kleingruppenarbeit schafft in diesem Sinne vor allem bessere Lernbedingungen durch verbesserte Möglichkeiten zur tätig-produktiven Partizipation im Sinne eines Ideen*austauschs*. Unter sozial-konstruktivistischer Perspektive wird soziale Interaktion als konstitutives Element des Lernprozesses beschrieben, also das Miteinanderagie-

[1] Aus Platzgründen kann auf die hiermit angesprochene Unterscheidung zwischen „cooperation" und „collaboration" nicht näher eingegangen werden.

ren als unabdingbare Voraussetzung für das Lernen verstanden. Diese Perspektive auf Lernprozesse ist eng mit dem interaktionistischen Paradigma verbunden. Die individuelle Kognition ist dabei an kollektive Prozesse der Erzeugung als geteilt geltender Deutungen gebunden. Unterrichtsgeschehen als spezifische Interaktion ist hier ein Ort der gemeinsamen Bedeutungskonstruktion unter spezifischen institutionellen Rahmenbedingungen. Kleingruppenarbeit schafft in diesem Sinne vor allem bessere Lernbedingungen durch verbesserte Möglichkeiten zur tätig-produktiven Partizipation im Sinne einer gemeinsamen Ideen*entfaltung*. Dies schließt für die Zuhörenden günstige Gelegenheiten zum Wechseln in eine tätig-produktive Partizipation mit ein.

2. Partizipationsstrukturen verschiedener Kooperationsformen

In Hinblick auf kooperative bzw. kollektive Lernformen wird nun bedeutsam, in welcher Weise die Lernenden durch bestimmte Strukturvorgaben an den Ideen anderer partizipieren können und sollen bzw. inwieweit hier eine gemeinsame Ideenentwicklung gefordert und gefördert wird. Im Folgenden sollen zwei im Mathematikunterricht der Grundschule erprobte Kooperationsformen dahingehend beleuchtet und verglichen werden: die *mathematische Schreibkonferenz* und das *Gruppenpuzzle*.

In *(mathematischen) Schreibkonferenzen* werden zunächst individuelle Eigenproduktionen entwickelt, die dann nach bestimmten Vorgaben in der Redaktionssitzung besprochen werden. Die Gruppenarbeit setzt nach einer individuellen Erarbeitungsphase an. Gemeinsam werden individuelle Ideen verhandelt und besprochen, immer mit dem Ziel, diese in ihrem Kern zu verstehen und ggf. (in ihrer Darstellung) zu verbessern. Eine Zusammenführung der Ideen in einer gemeinsamen Gruppenproduktion ist nicht vorgesehen. Vielmehr soll nach der Besprechung in der Kleingruppe eine individuelle Überarbeitung zur Vorbereitung der Präsentation im Plenum erfolgen. Somit ist diese Kooperationsform durch Ideen*präsentation* und -*austausch* gekennzeichnet, in dem die Lernenden eher rezipierend Anteil an der Idee anderer haben. Produktive Beiträge zu den Ideen anderer sind auf Anregungen und Korrekturen ausgerichtet, nicht auf eine grundsätzliche Neuorientierung der vorgestellten Ideen.

Für das *Gruppenpuzzle* werden in der Literatur verschiedene Varianten beschrieben. In dieser Kooperationsform werden zunächst in Expertengruppen unterschiedliche Teilthemen, Sichtweisen oder Lösungsansätze erarbeitet und diese dann in den nachfolgenden Stamm- oder Vermittlungsgruppen gegenseitig vorgestellt und ausgetauscht. Dabei kommen dann Lernende zusammen, die zuvor in verschiedenen Expertengruppen gearbeitet haben.

Dabei ist es möglich, in den Expertengruppen ohne individuelle Vorarbeit sofort mit der gemeinsamen Auseinandersetzung an der Problemstellung zu starten. In dieser Gruppenphase sollte es also idealtypisch zu einer gemeinsamen Ideen*entwicklung* kommen: Ausgehend von einem gemeinsamen Ausgangsproblem soll durch die Verknüpfung individueller Lösungsansätze eine gemeinsamen Gruppenlösung gefunden werden, die von allen getragen und verstanden wird. In der sich anschließenden Vermittlungsphase der Stammgruppen werden hingegen wieder Ideen eher separat nebeneinander gestellt – als Ideen*präsentation* und *-austausch*. An diesen Ideenaustausch lässt sich in der Stammgruppe eine Vertiefungsphase anfügen, in der die verschiedenen Ansätze der Expertengruppen für die gemeinsame Bearbeitung einer weitergehenden Problemstellung genutzt werden.

2. Partizipationsstrukturierungen in Gruppenprozessen

Mit Blick auf die *situativen Gruppenprozesse* bieten sich den Lernenden somit unterschiedliche Partizipationsmöglichkeiten an: In der Kooperationsphase der Schreikonferenz werden Eigenproduktionen der einzelnen Lernenden vorgestellt und eventuell weiter verhandelt; die Grundstruktur der Partizipation an den *Ideen der anderen* ist somit – ähnliche wie in der Vermittlungsphase beim Gruppenpuzzle – als „Teilhabe“ (Miller 1982, 9) angelegt. In der kollektiven Erarbeitung oder Weiterentwicklung im Gruppenpuzzle ist die Partizipation hingegen eher als „Teilnahme“ (ebenda) vorstrukturiert. Wie sich diese Unterscheidungen in den von den Beteiligten gemeinsam erzeugten Kooperationsstrukturierungen in der Interaktion wieder finden und welche Wechselbeziehungen sich dabei ergeben, ist jedoch nur empirisch klären. Hier gilt es, die Strukturierungsprozesse der Beteiligten nachzuzeichnen.

Zur Beschreibung dieser Strukturierungsprozesse wird auf das bereits für mathematische Unterrichtsprozesse entwickelte Instrument der Partizipationsanalyse zurückgegriffen (Krummheuer & Brandt 2001). Dieses Analyseinstrument stellt sowohl für die Produktion als auch für die Rezeption ein abgestuftes Kategoriensystem bereit (vgl. Brandt 2006, Brandt & Tatsis 2009):

<table>
<tr><td>Kreator</td><td>Traduzierer</td><td>Paraphrasierer</td><td>Imitierer</td></tr>
<tr><td colspan="4">→ Abnehmende produktive Verantwortlichkeit</td></tr>
<tr><td>Gesprächspartner</td><td>Zuhörer</td><td>Mithörer</td><td>Lauscher</td></tr>
<tr><td colspan="4">→ Abnehmende Adressierung / rezeptive Zugriffsmöglichkeit</td></tr>
</table>

Erste Analysen von Interaktionsprozessen aus verschiedenen Phasen im Gruppenpuzzle zeigen durchaus recht unterschiedliche Interaktionsmuster. So lässt sich in der gemeinsamen Lösungsfindung in der Expertengruppe eine Phase der Ideen*produktion* erkennen, in der zunächst verschiedene Ansätze relativ unverbunden eingebracht werden („Brainstorming“), der sich dann eine Ideen*konkretisierung* eines einzelnen Beitrags anschließt („Klärung“). Diese Phasen sind durch eine hohe interaktive Dichte gekennzeichnet, in der sich deutlich wechselnde Gesprächspartnerschaften ausbilden. Hingegen sind die Interaktionsprozesse in der Vermittlungsphase durch längere Erklärungen von einem Lernenden mit einer festen Zuhörerschaft („Vortrag“) gekennzeichnet. Durch eine adressierte Versprachlichung der in den Expertengruppen entwickelten Lösungen bietet die Vermittlungsphase gerade dem „Vortragenden“ günstige Lerngelegenheit, jedoch kaum aktiv-tätige Partizipationsmöglichkeiten an den Ideen anderer. Aus partizipationstheoretischer Perspektive wird hier der „Experteneffekt“ (Borsch u.A. 2007) erkennbar, demzufolge sich bei den Lernenden bezogen auf die verschiedenen Expertenthemen messbare Unterschiede im Lernerfolg je nach Gruppenzugehörigkeit zeigen.

Zu klären bleiben die Wechselbeziehungen verschiedener Interaktionsmuster einerseits zu verschiedenen Kooperationsphasen und -strukturen, andererseits auch zu Gruppenzusammensetzungen und individuellen Partizipationsvorlieben. Dabei werden auch Fragen der Selbstwahrnehmung und -darstellung im Mathematikunterricht angesprochen (Brandt & Tatsis 2009). Weiter zeigt sich, dass für die Analyse besonders dichter Phasen der gemeinsamen Ideenentfaltung eine Ausdifferenzierung des Kategoriensystems zwischen „Paraphrase und Traduktion“ (Krummheuer & Brandt 2001) notwendig wird.

Literatur

Borsch, F., Gold, A., Kronenberger, J. & Souvignier, E. (2007): *Der Experteneffekt: Grenzen kooperativen Lernens in der Primarstufe?* In: Unterrichtswissenschaft 35(3), 203-214.

Brandt, B. (2006): Kinder als Lernende im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Jungwirth, H. und G. Krummheuer (Hg.): *Der Blick nach innen. Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht*. Münster: Waxmann, 19-51.

Brandt, B. & Tatsis, K. (2009): *Using Goffman's concepts to explore collaborative interaction processes in elementary school mathematics.* Erscheint in: Research in Mathematics Education 11(1).

Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001): *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule.* Weinheim: Beltz.

Miller, M. (1986): *Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie.* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Wittmann, E.Ch. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In: Müller, K. P. (Hg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, 528-531.

Michael MEYER, Dortmund

Die Erarbeitung mathematischer Zusammenhänge – Analyse von Schulbüchern

In einem Gemeinschaftsprojekt analysierten wir (s. Meyer und Voigt 2008) Aufgaben, die zur Erarbeitung mathematischer Zusammenhänge in Schulbüchern der Sekundarstufe I eingesetzt werden. In diesem Beitrag werden die Methode und einzelne Ergebnisse der Analyse vorgestellt, wobei der Schwerpunkt der Betrachtung auf dem Entdecken solcher Zusammenhänge liegt.

1. Einleitung

Die Schulbücher der Sekundarstufe I befinden sich im Spannungsfeld zwischen einem für alle verbindlichen Aufbau der Mathematik und den Ansprüchen an die Eigenaktivität der Schüler. Dies äußert sich häufig darin, dass mathematische Zusammenhänge zunächst in einleitenden Aufgaben von den Schülern entdeckt werden können, bevor sie dann explizit präsentiert werden. In Meyer und Voigt (2008 u.a.) untersuchten wir die „Einstiegsaufgaben“ (Rezat 2008) aus Schulbüchern nach ihren Potentialen zum Entdecken, Prüfen und Begründen von mathematischen Zusammenhängen.

Der Gestaltung der einleitenden Aufgaben kommt ein großes Gewicht zu, denn von ihnen hängt ab, ob sich der mathematische Zusammenhang (im Folgenden auch „Merksatz“ genannt) a) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit entdecken lässt bzw. b) ob sich mit dem Merksatz auch eine Idee für den nachfolgenden Beweis entdecken lässt und/oder c) wie groß die Plausibilität ist, die der Merksatz durch die Entdeckung gewinnen kann. Auch wenn sich in Schulbüchern der Sekundarstufe I die zu behandelnden Merksätze relativ leicht identifizieren lassen, bedarf es einer Analyse der Aufgaben(folge) auf der Schulbuchseite um zu erfahren, welche Wege der Erkenntnisgewinnung von den Schülern erwartet werden bzw. welche Wege den Schülern bei der Bearbeitung der Aufgaben nahe liegen. Insbesondere der zweite Teil bereitet erhebliche methodologische Probleme, denn will man bei der Schulbuchanalyse das Lehren und Lernen von Mathematik in den Blick nehmen und sich nicht auf äußere Merkmale beschränken, so muss man sich hermeneutischer Methoden bedienen (vgl. Wagemann 1981).

Zur Klärung der genannten Punkte wurde ein Begriffsnetz verwendet, welches sich bereits in der mathematikdidaktischen Forschung etabliert hat (u.a. Voigt 2000; Hoffmann 2001; Meyer 2007): Die Theorie der Abduktion des amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce.

2. Theoretischer Hintergrund – Abduktion

Die Abduktion bildet die dritte elementare Schlussform neben der Deduktion und der Induktion. Durch eine Abduktion finden wir ausgehend von einem beobachteten Phänomen eine ursächliche Erklärung: Mittels der tentativen Unterstellung eines Gesetzes wird ein konkreter Fall vermutet, der das Resultat hat entstehen lassen können. Das Gesetz ist vor der kognitiven Generierung einer Abduktion nicht gegeben: Auch ein anderes Gesetz könnte ursächlich für das beobachtete Phänomen gewesen sein. Die Unterstellung des Gesetzes bedingt die logische Feststellung des Phänomens als ein Resultat des Gesetzes (s. auch Meyer 2007, Meyer und Voigt 2008).

Phänomen (Resultat):	$R(x_0)$	Resultat:	$R(x_0)$
Gesetz:	$\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$	Gesetz:	$\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$
Fall:	$F(x_0)$	Fall:	$F(x_0)$

Abb. 1: Die kognitive Generierung einer Abduktion (links) und deren öffentliche Darstellung (rechts)

Betrachten wir hierzu ein Beispiel: Der Winkelsummensatz für Vierecke wird in dem Schulbuch „Mathematik heute 7“ (Realschule, NRW, Griesel und Postel 2001, S. 107f) vorbereitet, indem untersucht werden soll, ob man aus deckungsgleichen Vierecken ein Parkett herstellen kann. Gleich große Winkel sind hierzu mit derselben Farbe zu färben und aneinander zu legen. Der Arbeitsauftrag endet mit der Anweisung, dass die Schüler einen Zusammenhang entdecken sollen.

Bei solchen Arbeitsanweisungen können Schüler vieles entdecken. Wird die Entdeckung des Winkelsummensatzes angezielt, so müssen die Schüler ausgehend von der konkreten Parkettierung erkennen, dass die an einer Ecke zusammenstoßenden, verschiedenfarbigen Winkel den Innenwinkeln des zu Beginn gewählten Vierecks entsprechen (für eine ausführlichere Analyse s. Meyer und Voigt 2008, S. 130f). Entsprechend würde den Schülern folgende Abduktion die Entdeckung des Satzes ermöglichen:

Resultat:	An den Ecken der Parkettierung ergeben vier verschiedenfarbige Winkel einen Vollwinkel.
Gesetz:	Wenn die Innenwinkel eines beliebigen Vierecks zusammengefügt werden, ergeben sie einen Vollwinkel.
Fall:	Die vier verschiedenfarbigen Winkel an jeder Ecke sind die Innenwinkel des zu Beginn gewählten, konkreten Vierecks.

Abb. 2: Eine Abduktion zur Entdeckung des Winkelsummensatzes

3. Optionen zur Gestaltung von Entdeckungsaufgaben

In Meyer (2007) wurde dargestellt, dass die Abduktion die charakteristische Schlussform für das Entdecken ist. Die Existenz von nur einer gegebenen Prämisse verdeutlicht, dass für die Entdeckung eines Merksatzes in den einleitenden Aufgaben Phänomene bereitgestellt oder vom Schüler erarbeitet werden sollten, die durch die Abduktion als ein Resultat des zu entdeckenden Zusammenhanges erscheinen (im Folgenden wird die logische Unterscheidung zwischen Phänomenen und Resultaten vernachlässigt). Die folgenden Optionen zeigen mögliche Unterschiede hinsichtlich der Anzahl und der Struktur der Resultate zur Entdeckung eines Merksatzes.

Option 1: Entdeckung an einem speziellen Resultat

Die Resultate, die zur Entdeckung eines Merksatzes erarbeitet werden, können Anlass geben, nicht nur den intendierten, sondern auch einen anderen Merksatz zu entdecken. Sollen die Schüler zum Beispiel ein regelmäßiges Viereck zur Parkettierung verwenden, kann der entstandene Vollwinkel auch durch nicht-verschiedenfarbige Innenwinkel zusammengesetzt werden. Entsprechend können die Schüler auch nicht-intendierte Zusammenhänge zur Lösung der Aufgabe verwenden, z. B. „wenn ein rechter Winkel viermal aneinandergesetzt wird, dann ergibt sich ein Vollwinkel“. Bei der Entdeckung an einem speziellen Resultat besteht also die Möglichkeit, dass auch andere mathematische Zusammenhänge als die intendierten zur Erklärung des Resultates genutzt werden.

Option 2: Entdeckung an einem typischen Resultat

Erfolgt die Entdeckung an einem typischen Resultat, so erhält der zu erkennende Merksatz mehr Plausibilität, weil er nicht mit einem anderen konkurriert. Zum Beispiel wird in dem Parkettierungsbeispiel ein Viereck gewählt, bei dem sich ein Vollwinkel nur dann ergibt, wenn alle vier verschiedenen Winkel aneinandergelegt werden müssen.

Option 3: Entdeckung an mehreren Resultaten

Bei den ersten beiden Optionen wird jeweils ein Beispiel zur Entdeckung eines Merksatzes genutzt. Die Entdeckung kann jedoch eine größere Plausibilität erhalten, wenn mehrere Vierecke und somit mehrere Parkettierungen zur Entdeckung beitragen.

Option 4: Entdeckung an einer Klasse von Resultaten

Bilden die Resultate eine ganze Klasse, erhält die Entdeckung eine besondere Plausibilität. Bei dem Beispiel des Winkelsummensatzes für Vierecke ist es jedoch nicht möglich, eine ganze Klasse von Vierecken zu verwenden.

Option 5: Entdeckung mit latenter Beweisidee

Einleitende Aufgaben können nicht nur den mathematischen Zusammenhang entdecken lassen, sondern auch eine Idee für dessen nachfolgenden Beweis liefern. Der Winkelsummensatz für Vierecke lässt sich beispielsweise entdecken, indem die Schüler in ein konkretes, vorgegebenes Viereck eine Diagonale einzeichnen und dann den Winkelsummensatz für Dreiecke anwenden sollen. Die Anwendung des Winkelsummensatzes für Dreiecke kann den folgenden Beweis orientieren, wenn die Schüler die Unabhängigkeit vom konkreten Vorgehen erkennen. Die Beweisidee bleibt vorerst latent, weil die Schüler sie erkennen müssen.

4. Fazit

Die präsentierten Optionen zeigen aus philosophisch-logischer Perspektive Möglichkeiten der Gestaltung von Aufgaben zur Entdeckung von Merksätzen (eine an didaktischen Prinzipien orientierte Aufgabenkonstruktion findet sich in Büchter und Leuders 2005). Will man einen Merksatz mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit entdecken lassen, so müssen den Schülern Resultate dieses Satzes gegeben sein oder von ihnen erarbeitet werden können. Je nach Art und Struktur der Resultate kann die Plausibilität, die der Merksatz durch seine Entdeckung erhält, potentiell gesteigert oder verringert werden. Wenn in dieser Erarbeitung die entscheidenden Schritte zum Beweis des Merksatzes im Konkreten angewendet werden, muss der Schritt zum nachfolgenden Beweis nicht groß sein.

Literatur

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen.

Griesel, H. & Postel, H. (Hg., 2001). *Mathematik heute 7*. RS, NRW. Hannover: Schroedel.

Hoffmann, M. (2001). Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 22(3/4), S. 231-251.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Meyer, M. & Voigt, J. (2008). Entdecken mit latenter Beweisidee. Analyse von Schulbuchseiten. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 29(2), S. 124-151.

Rezat, S. (2008). Die Struktur von Mathematikschulbüchern. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(1), S. 46-67.

Voigt, J. (2000). Abduktion. In: *BzM*. Hildesheim: Franzbecker, S. 694-697.

Wagemann, E. (1981). Überlegungen und Anregungen zum nicht-quantitativen Vergleichen von mathematischen Schulbüchern. In: Glatfeld, M. (Hg.): *Das Schulbuch im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.

Marcus SCHÜTTE, Goethe-Universität Frankfurt.

Sprachliche Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen im Grundschulmathematikunterricht

Einleitung

Die Schülerschaft in deutschen Schulen ist aufgrund dauernder Zuwanderung durch Mehrsprachigkeit und unterschiedliche kulturelle Hintergründe geprägt; aktuell hat nahezu ein Drittel aller Schülerinnen und Schüler in deutschen Schulen einen Migrationshintergrund. Dieser Umstand wäre nicht weiter bedenkenswert, wenn alle Schülerinnen und Schüler die gleichen Chancen auf eine erfolgreiche Schullaufbahn hätten. Das ist jedoch nicht der Fall (vgl. OECD 2006, S. 30).

Was sind jedoch die Ursachen für die schlechten Schulleistungen und geringen Bildungschancen von Kindern mit Migrationshintergrund im deutschen Schulsystem? Die Ergebnisse von internationalen Vergleichsstudien wie PISA 2003 sowie IGLU legen den Schluss nahe, dass schlechtere Bildungschancen und Schulleistungen – auch die im Fach Mathematik – von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund vorwiegend auf außerhalb der Schule liegende Ursachen, wie z.B. den sozioökonomischen Hintergrund oder die im Elternhaus gesprochene Sprache, zurückzuführen sind. Nach diesen Ergebnissen gibt es einen Zusammenhang zwischen der „Umgangssprache im Elternhaus“ und den sprachlichen und mathematischen Kompetenzen der Jugendlichen. Jugendliche, deren Umgangsprache im Elternhaus nicht der Unterrichtssprache entspricht, erzielen in den PISA-Tests in allen Domänen geringere Kompetenzwerte (vgl. PISA-Konsortium Deutschland 2004, S. 259 f.).

Ein Zusammenhang zwischen den schlechten Schulleistungen bzw. geringeren Bildungschancen von Schülerinnen und Schülern und außerhalb der Schule liegenden Faktoren, wie z.B. der Sprache im Elternhaus ist plausibel, aber es ist gleichwohl nicht anzunehmen, dass die Gestaltung des Unterrichts keinen Einfluss auf diese Resultate hat. Ziel der Untersuchung die dem vorliegenden Beitrag zugrunde liegt ist es demnach im Unterricht selbst liegende Gründe auszumachen, die für das schlechtere Abschneiden von Schülerinnen und Schülern verantwortlich sind, die unter den Bedingungen sprachlich-kultureller Pluralität lernen.

Methodisches Vorgehen

Als empirische Grundlage der zugrundeliegenden Untersuchung dienen Videoaufnahmen alltäglichen Grundschulmathematikunterrichts. Zur Analyse der sprachlichen Gestaltung des Grundschulmathematikunterrichts wurden Instruktionsphasen ausgewählt, in denen ein neuer mathematischer Begriff eingeführt wird. In diesen Phasen kommt der sprachlichen Gestaltung des Unterrichts eine besondere Bedeutung zu, da es um den erstmaligen Aufbau von subjektiv Neuem für die Schülerinnen und Schüler geht. Die Videoaufzeichnungen fanden in drei Klassen der Jahrgangsstufe 4 zweier Hamburger Grundschulen mit einem Migrationsanteil von ca. 80 % unter den Schülerinnen und Schülern der Klassen statt.

Der Einfluss der Sprache auf schulisches Lernen

Ein entscheidender Ansatz, um die Bildungschancen von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund und denen mit niedrigerem sozioökonomischen Status in deutschen Schulen zu verbessern, scheint es, ihren Zugang zur Sprache und den Regeln der Interaktion im Unterricht zu verbessern. Aber welche sprachlichen Fähigkeiten gilt es konkret zu verbessern?

Laut Gogolin wird ein normativer Anspruch des deutschen Schulsystems an alle Schülerinnen und Schüler herangetragen, dass diese die im Unterricht gepflegten Sprachvarianten der Schule produktiv und rezeptiv beherrschen. Ein solcher Modus der Sprache der Schule wird von Gogolin (2006, S. 82) „Bildungssprache“ genannt (vgl. den Begriff „Cognitive Academic Language Proficiency“, Cummins 2000, S. 57 ff.). Das entscheidende Charakteristikum der Bildungssprache des Unterrichts stellt ihre konzeptionelle Schriftförmigkeit dar, wodurch sie ein hohes Maß an Informationsdichte und eine Situationsentbundenheit aufweist. Hierdurch unterscheidet sie sich signifikant von alltäglicher mündlicher Kommunikation. Als kompetent in einer Bildungssprache lassen sich Schülerinnen und Schüler verstehen, wenn sie fähig sind, abstrakte Begriffe unabhängig vom Kontext zu verstehen und in schriftförmig geprägter dekontextualisierter Form zu beschreiben. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, ob und wie die Lehrenden durch ihre Handlungen allen Schülerinnen und Schülern gleichermaßen vielfältige Gelegenheiten zum Lernen von Mathematik ermöglichen.

Vorherrschendes Strukturmerkmal der Analysen: Implizitheit

Als Ergebnis der Analysen der zugrundeliegenden Untersuchung konnten strukturelle Gemeinsamkeiten in der sprachlichen Gestaltung des Unterrichts rekonstruiert werden. Bei der Einführung der neuen mathematischen Begriffe lässt sich rekonstruieren, dass die Bedeutungen der Begriffe sowie inhaltliche Bezüge zwischen den neu zu lernenden mathematischen Begriffen oder zu bereits bekannten alltagssprachlichen Begrifflichkeiten nicht oder nur implizit hergestellt werden. Die Bedeutungen oder Bezüge werden nicht explizit von den Lehrpersonen in den Unterrichtsdiskurs aufgenommen und finden so in der Interaktion des Klassengesprächs keine Berücksichtigung. Dadurch bleiben die Begriffe untereinander unverbunden. Ein ähnliches Bild zeigt sich dabei, wie die Lehrpersonen auf sprachliche Besonderheiten bei der Einführung der neuen mathematischen Begriffe eingehen. Die Lehrpersonen verweisen nicht explizit auf grammatische Strukturen, in die die neuen mathematischen Begriffe eingebettet werden, oder darauf, welche bedeutungstragenden Bestandteile die Begriffe prägen. Eine Einbettung der mathematischen Begriffe in eine formale Bildungssprache, um so vom Speziellen zum Allgemeineren abstrakte Begriffe dekontextualisiert beschreiben zu können, ist nicht erkennbar.

Das Konzept einer Impliziten Pädagogik

Die Handlungen der Lehrpersonen zur sprachlichen Gestaltung des Unterrichts lassen sich anhand eines von mir entwickelten theoretischen Konzepts erklären, das ich als *Implizite Pädagogik* (vgl. Schütte 2009) bezeichne. Nach dieser Impliziten Pädagogik besteht die Aufgabe von Lehrpersonen vorwiegend darin, Lernenden eine Lernumgebung bereitzustellen und in dieser zu begutachten, wie sich ihre angeborenen individuellen Fähigkeiten und ‚Talente' entwickeln. Eine solche Form des Lehrens könnte man als „pathologische Form von offenen Unterrichtskonzepten" verstehen. In ihnen füllen die Lehrpersonen, trotzdem sie teilweise frontal unterrichten und eher ‚geschlossene Interaktionsformen' der Unterrichtsgestaltung wählen, nicht die Rolle des in der Interaktion fortgeschrittenen Individuums aus, welches die Lernenden fördert in der Entwicklung fortzuschreiten. Eine solche Implizite Pädagogik folgt dem Grundgedanken, dass Schülerinnen und Schüler sich allein aufgrund ihrer mitgebrachten Fähigkeiten Bedeutungen erschließen können oder sich zugrunde liegende inhaltliche und sprachliche Zusammenhänge für die Lernenden ‚wie von selbst' ergeben.

Konsequenzen

Durch das implizite Vorgehen innerhalb eines Unterrichtsdiskurses mit formal ungeformten Redeweisen besteht die Möglichkeit, dass die Bedeutungsentwicklung der neuen mathematischen Begriffe seitens der Lernenden gefährdet ist und so ein Verständnis der mathematischen Begriffe erschwert wird. Bedeutungen oder Konzepte lassen sich nicht imitieren, sondern müssen aktiv von Schülerinnen und Schülern konstruiert werden. Es bedarf im Sinne des theoretischen Konzepts der „Zonen der nächsten Entwicklung" (vgl. Wygotski 1969, 237 ff.) expliziter verbaler Hilfestellungen durch ein in der Entwicklung fortgeschrittenes Individuum – hier die Lehrperson –, um Schülerinnen und Schüler zu befähigen, die Bedeutung neuer Begriffe zu konstruieren.

Der Unterrichtsdiskurs des analysierten Unterrichts weist zudem durch die vorwiegende Verwendung einer informellen Alltagssprache der Lehrperson sowie durch Implizitheit und Kontextgebundenheit der Inhalte Charakteristika eines alltäglichen Diskurses auf. Es lässt sich auf der Basis der Arbeiten von Gogolin (2006) die Hypothese aufstellen, dass formalsprachliche Kompetenzen, die in diesem alltäglichen Diskurs nicht vermittelt werden, in Momenten der Leistungsbewertung z.B. bei Klassenarbeiten und dem Verstehen oder Produzieren von Texten leistungsrelevant werden. Auf diese Anforderungen der deutschen Schule scheint der vorliegende Unterricht nicht zu vorzubereiten. Bildungssprachliche Kompetenzen, d.h. schriftsprachlich geprägte Textkompetenzen, die Kinder befähigen könnten thematisch wie sprachlich durchkomponierte Fachtexte sinnentnehmend zu lesen, gemäß einer Aufgabenstellung zu verarbeiten und darauf aufbauend mündliche und schriftliche Texte zu produzieren, werden in dieser Art des Unterrichts nicht vermittelt. Es ist jedoch davon auszugehen, dass viele der Kinder als einzigen möglichen Ort zum Lernen einer formalen Bildungssprache die Institution Schule und als einziges Vorbild die Lehrperson haben. Die Lehrpersonen bieten ihnen so kein geeignetes Vorbild und die Schule keinen geeigneten Ort zum Lernen einer formalen Bildungssprache an. Insofern versagt das System der Schule darin, seinen nicht privilegierten Teilnehmerinnen und Teilnehmern den Zugang zu einer erfolgreichen weiteren Schullaufbahn zu eröffnen. So erlangen nicht bzw. weniger der Unterricht, die Qualifikation der Lehrenden und ihre Anstrengungen den entscheidenden Einfluss auf einen möglichen Schulerfolg, sondern vor allem die mitgebrachten Fähigkeiten der Kinder. Bestehende soziale Verhältnisse in der Schülerschaft werden hiernach reproduziert.

Literatur

Cummins, J. (2000): *Language, Power and Pedagogy. Bilingual Children in the Crosstire.* Clevedon u. a.

Deutsches PISA-Konsortium (2004): *Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Münster und New York: Waxmann.

Gogolin, I. (2006): Bilingualität und die Bildungssprache der Schule. In: Mecheril, P. und Quehl, T. (Hrsg.): *Die Macht der Sprachen. Englische Perspektiven auf die mehrsprachige Schule.* Münster: Waxmann: S. 79–85.

OECD (Hrsg.) (2006): *Where immigrant students succeed. A comparative review of performance and engagement in PISA 2003.* OECD Publishing.

Schütte, M. (2009): *Sprache und Interaktion im Mathematikunterricht der Grundschule. Zur Problematik einer Impliziten Pädagogik für schulisches Lernen im Kontext sprachlich-kultureller Pluralität.* Münster: Waxmann. Im Erscheinen.

Wygotski, L. S. (1969): *Denken und Sprechen.* Frankfurt a Main: Fischer Taschenbuch.

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

Interessenlage und Erkenntniszugang

Ich berichte über das deutsch-israelisches Projekt *effective knowledge construction in interest-dense situations*, das von der German-Israeli-Foundation gefördert wird. In diesem Projekt geht es um die genauere Untersuchung von Prozessen der Wissenskonstruktion bei Individuen und Schülerpaaren in so genannten interessendichten Situationen. Diese Situationen sind in unterschiedlichen Klassengesprächen als Situationen identifiziert worden, die alle auf das Sehen von Strukturen hinauslaufen. Sie können in Prozessen kollektiver Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen als Situationen emergieren, die geprägt sind von intensiver Involviertheit der Lernenden, einem zunehmend tiefer gehenden Prozess der Wissenskonstruktion und begleitender impliziter oder expliziter Wertschätzung der mathematischen Inhalte oder Aktivitäten durch die Lernenden. Interessendichte Situationen enthalten ein hohes Potenzial zur Initiierung von Interessenerfahrungen, in der Regel als Erfahrungen situationalen Interesses (Mitchell 1993). Ziel dieses Projektes ist es zwei Formen der Wissenskonstruktion in ein Modell zu integrieren, und zwar das individuumzentrierte Modell RBC+C (Dreyfus 2008) und das SVSt-Modell kollektiver epistemischer Handlungen, das Prozesse der Wissenskonstruktion durch die Erkenntnishandlungen Sammeln und Verknüpfen mathematischer Bedeutungen und Struktursehen kennzeichnet (Bikner-Ahsbahs 2005). Das RBC+C-Modell kennt drei Phasen. Wissenskonstruktion beginnt mit einem Konstruktionsbedürfnis. Das wird als Antrieb zur Wissenskonstruktion verstand. Das konstruierte Wissen wird anschließend konsolidiert.

In einem erste Schritt innerhalb des Projektes haben die beiden Teams Daten des jeweils anderen Teams gemäß der eigenen Fragestellungen und ergänzend gemäß Fragen des anderen Teams analysiert. In unserem Fall waren es die Fragen:

- Zeigen die Lernenden Interessehandlungen?
- Wie sind diese auf die Wissenskonstruktion und ihre Erkenntnisbasis bezogen?
- Wie hängt dies mit dem Bedürfnis für eine neue Konstruktion zusammen?

1. Methodologischer Ansatz

Das deutsche Team bekam ein Transkript aus einer Aufgabenbearbeitung zweier Schüler R und Y der siebten Klasse zum doppelten Distributivgesetz. Es verfolgt einen interpretativen Ansatz sozialer Prägung. Die Analyse besteht aus dem ersten Schritt der semiotischen Sequenzanalyse (Bikner-Ahsbahs 2008), das heißt: es werden Bedeutungen aus der sozialen Interaktion der beiden Schüler R und Y sequenziell auf den drei Sprechaktebenen lokutional, illoutional und perlokutional (Davis 1980) systematisch und interpretativ rekonstruiert. Lokutional meint das, was gesagt wird, illokutional das, was erzählt wird dadurch, dass man etwas sagt, und perlokutional meint die Ebene der intendierten und faktischen Wirkungen. Der Verlauf der Wissenskonstruktion auf der lokutionalen Ebene bildet den Prozess der Wissenskonstruktion in Hinblick auf die mathematischen Inhalte ab, der auf der illokutionalen und perlokutionalen Ebene führt zur Rekonstruktion der die fachliche Wissenskonstruktion begleitenden Situationskonstruktionen einschließlich der individuellen Aspekte wie den Absichten, Vorlieben, Wirkungen der Handlungen.

2. Ergebnisse

Die Analyse des Transkripts zeigt unterschiedlich ausgerichtete Präferenzen. Ys Aufmerksamkeit ist auf Algebra ausgerichtet und Rs auf die Arbeit mit dem Computer. Beides ist durch die Aufgabe bedingt: Es geht um das doppelte Distributivgesetz, das mit einer aufbereiteten Excel-Lernumgebung erkundet werden kann. Die Separierung der Vorlieben der beiden Schüler ist so klar, dass man hier von einer situativ geprägten Trennung bevorzugter Arbeitsweisen und Inhalte sprechen kann. R ist situational an der Arbeit am Computer interessiert und Y an algebraischen Arbeitsweisen. Postuliert man die Existenz einer individuellen Interessenlage, die aus den situativen Bedingungen emergiert und in diesem Fall zwei Formen annimmt, werden zahlreiche Merkmale dieser Episode verständlich und erklärbar. Eine interpretative Analyse des Transkripts vertieft rückwirkend das Verständnis des Begriffs *Interessenlage*.

Die individuelle Interessenlage ist ein individueller Filter für das Aufgabenverständnis, sie bestimmt die verwendete Fachsprache mit ihrem Zeichensystem, die Arbeitsweise, das Handeln, wie und worin man sich involviert, welche Erkenntnisquellen herangezogen werden und welche Strukturen überhaupt wahrgenommen werden. Die Schüler zeigen situationales Interesse innerhalb ihrer Interessenlage. Unterschiedliche und stark separierte Interessenlagen wie im vorliegenden Fall stellen eine Hürde dar, eine Basis für gemeinsames Arbeiten zu finden. Sie stellen aber auch eine Quelle für vertieftes und erweitertes Verstehen dar, weil unterschiedliche Interessenlagen den jeweils anderen dazu veranlassen nachzufragen. Auch das Bedürfnis für eine neue Konstruktion ergibt sich aus der aktuellen Interessenlage, in dieser Szene z.B. als tiefes Interesse, ein algebraisches Muster zu finden (Y, Zeile 90), als situationales Interesse, wenn einem bewusst wird, dass ein mathematisches Gesetz das Problem lösen könnte (Y in 262), und als situationales Interesse auf dem Weg, ein mathematisches Muster zu finden (intrinsisch angeregt bei R in 165, extrinsisch angeregt, als der Interviewer in den Zeilen 262-263 sagt „you almost got it“). Im folgenden Beispiel soll exemplarisch gezeigt werden, wie getrennte Interessenlagen wirksam werden.

Beispiel: R und Y haben folgende Rechtecke (genannt seals) in einer Exceldatei mit mehreren Aufgaben zur Verfügung gestellt bekommen..

7	13
9	15

Rectangle 1

3	9
5	11

Rectangle 2

Tabelle 1: “The seals” auf dem Arbeitsblatt

Zwei der Aufgaben sind die folgenden:

1. In the spreadsheet, build a ‘seal’ of expressions for such rectangles. For this purpose, enter any number in the left upper cell and write appropriate expressions for the other three numbers in the seal.

   Verify your ‘seal’: Enter the numbers **7** and **3** in the upper left cell and check whether the above rectangles result.
2. Try to find as many properties as possible common to all rectangles of this type.

Transkriptausschnitt:

61 R: We don’t need the sum. Write down, the difference between X1 and X2 will always be 2.

62 Y: But why? I won’t write it without understanding it! What is X1 and what is X2?

R nutzt die für Excel übliche Schreibweise der Zellbezüge auch für die Variable X. Das kann Y offenbar nicht verstehen. Er weigert sich, diese zu übernehmen. R erläutert Y, dass man auch A, B oder C hätte nehmen können. Y akzeptiert dies zwar, bleibt aber irritiert:

71 Y: [Continues writing;] The difference between X what?

72 R: X1 and X2

73 Y: You know that if I write X1 it’s like X times 1, and if I write X2 it’s like X times 2.

In Zeile 73 wird dann deutlich, worin die Irritation besteht: Y interpretiert X1 als X mal 1.

Offenbar bestimmt die aktuelle Interessenlage den gesamten Interpretationsrahmen, das heißt die Sprache, den Zeichengebrauch, aber auch die Art des Handelns. Fast natürlich ist es dann, dass Y der ist, der das Distributivgesetz durch algebraische Umformungen findet und R der, der durch Exploration mit dem Computer einen Zusammenhang mit speziellen Zahlen sieht:

165 R: Ah! I got it! I think that ... [types into the upper left cell the number 2] one second. I'll check and then, I'll tell you whether what I think is really correct [goes on typing in the upper cell the number 8]. Eight, that's it! I know the formula. You take two numbers that complete to 10 and then, it's the same.

3. Resummee

Wozu ein neuer Interessenbegriff? Kommt man nicht mit Begriffen wie Präferenz und situationales Interesse aus? Ich denke - nein, denn das Konzept der Interessenlage kann z.B. erklären, wie situationales Interesse entsteht, welche Erkenntnismittel verwendet werden und welcher Art die Erkenntnisprodukte sind. Die Interessenlage von R in der vorliegenden Situation wird durch das Arbeiten mit dem Computer bestimmt und wird in dieser Szene zu einem Katalysator für das situationales Interesse, mathematische Gesetzmäßigkeiten explorativ zu finden. So nutzt R den Computer als Werkzeug zur Exploration mathematischer Probleme (Erkenntnisquelle). Dies führt probierend zu Hypothesen (Erkenntnisprodukte), die wiederum mit dem Computer getestet werden. Auch Y entwickelt situationales Interesse daran, mathematische Gesetzmäßigkeiten zu finden, das aber anders ausfällt als bei R: sein Zugang ist algebraisch.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2008). Erkenntnisprozesse – Rekonstruktion ihrer Struktur durch Idealtypenbildung. In: H. Jungwirth, G. Krummheuer: Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht. Münster: Waxmann, 105-144.

Davis, St. (1980). Perlocutions. In J. R. Searle, F. Kiefer & M. Bierwisch (Eds.), *Speech act theory and pragmatics* (S. 37-55). Dordrecht, London: D. Reidel Publishing Company.

Dreyfus, T, Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2001). Abstraction in Context: A case of peer interaction. *Cognitive Science Quaterly*, 1, 307-358.

Mitchell, M. (1993). Situational Interest. Its Multifaceted Structure in the Secondary School Mathematics Classroom. *Journal of Educational Psychology*, 85(3), 424–436.

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

Moderierte Sektion: Heterogenität als Herausforderung und Chance für das Mathematiklernen in der Primarstufe

Das Thema „Heterogenität" ist im Zusammenhang mit Lehr- und Lernprozessen kein brandneues. Lehrerinnen und Lehrer standen schon immer vor der Herausforderung, dass ihre Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Lern- und Leistungsdispositionen sowie personale und soziale Voraussetzungen mitbringen. Während lange Zeit versucht wurde, möglichst homogene Lerngruppen zusammenzustellen, indem man sich bei der Bildung von Schulklassen an Kriterien wie Alter und Leistung orientierte, zeichnen sich – zumindest in der Primarstufe – Veränderungen ab: Statt dem Versuch der Nivellierung werden bestehende Unterschiede nicht nur anerkannt, sondern als besondere Lernchance betrachtet. Durch die – bildungspolitisch forcierte - Reformierung der Eingangsstufe, ist das Thema Heterogenität und der Umgang mit ihr in den Focus pädagogischer und fachdidaktischer Diskussion gerückt. In der pädagogischen Literatur findet man eine Fülle von Konzepten zur Organisation von Lernen in heterogenen Gruppen (z. B.: Laging 2007³, Burk u. a. 1998, Burk 1996). Darüber hinaus werden auch konkrete Beispiele für die Gestaltung von Lernanlässen gegeben. Auffällig ist allerdings, dass sich die Beispiele häufig auf Sachthemen oder Themen aus dem Deutschunterricht beziehen, sehr selten aber auf die Gestaltung mathematischer Lernprozesse (vgl. Faust-Siehl 2001).

Es bleibt die zentrale Frage: **Wie können mathematische Lernprozesse in heterogenen Klassen aus fachdidaktischer Perspektive fruchtbar angeregt werden?**

Der Mathematikunterricht in der Grundschule hat sich in den letzten beiden Jahrzehnten deutlich verändert: Die aktive Auseinandersetzung der Kinder mit mathematischen Sachverhalten und der Austausch von Ideen und Lösungswegen sind zu zentralen Elementen geworden. Ebenso das Finden eigener Lösungswege, das Untersuchen und Entdecken von Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten sowie das Begründen und Kommunizieren. Alle diese Aspekte dürfen beim Mathematiklernen in heterogenen Gruppen nicht in den Hintergrund treten. Wäre dies der Fall, dann würde es „zu einem Rückfall in überwunden geglaubte Formen des reproduktiven Lernens" (Wittmann & Müller 2005, 5) kommen und somit auch aus lernpsychologischer Perspektive zu einem deutlichen Rückschritt.

Ein adäquater Umgang mit der Heterogenität stellt also für das Mathematiklernen in der Primarstufe eine große Herausforderung und eine ebensogroße Chance dar. Wie diese Herauforderungen und Chancen aussehen können, wird in den nachfolgenden Beiträgen auf unterschiedliche Weise betrachtet und diskutiert. Dabei wird sowohl der Makroblick auf inhaltliche und konzeptionelle Fragen als auch der Mikroblick auf konkrete Lernprozesse eingenommen.

- *Renate Rasch* verdeutlicht zunächst an konkreten Beispielen die unterschiedlichen Vorgehensweisen gleichaltriger Kindern beim Lösen von Textaufgaben. Dran anschließend erfolgt die Vorstellung eines Unterrichtskonzepts zum Umgang mit Textaufgaben, in dem die Heterogenität konstruktiv für den Lernprozess genutzt wird.
- *Beat Wälti* geht den Fragen nach, wie Lernprozesse in einer heterogenen Gruppe adäquat begleitet und beurteilt werden können. Nach der allgemeinen Vorstellung verschiedener Bausteine zur ganzheitlichen Beurteilung wird eine mögliche Vorgehensweise am Beispiel einer Lernumgebung konkretisiert.
- *Elisabeth Rathgeb-Schnierer* und *Charlotte Rechtsteiner-Merz* stellen eine inhaltlich offene Konzeption für das Mathematiklernen in der jahrgangsgemischten Eingangsstufe vor. Die drei sich wechselseitig ergänzenden Bausteine wurden so entwickelt, dass die Balance zwischen individuellem und gemeinsamem Lernen gewährleistet ist.
- *Birgit Gysin* gibt einen Einblick in ihre empirische Untersuchung von Lerndialogen bei der Partnerarbeit von Kindern in jahrgangsgemischten Tandems. Im ersten Teil des Beitrags werden diese Lerndialoge pädagogisch und mathematikdidaktisch verortet, bevor im zweiten Teil auf die Forschungsfragen eingegangen wird.

Literatur

Burk, K. (1996) (Hrsg.). *Jahrgangsübergreifendes Lernen in der Grundschule. Mehr gestalten als verwalten. Teil 12.* Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule e.V.

Burk, K., Mangelsdorf M., Schroeler, U. & al. (1998) (Hrsg.). *Die neue Schuleingangsstufe. Lernen und Lehren in entwicklungsheterogenen Gruppen.* Weinheim & Basel: Beltz.

Faust-Siehl, G. (2001). Die neue Schuleingangsstufe in den Bundesländern. In G. Faust-Siehl & Speck-Hamdan, A. (Hrsg.), *Schulanfang ohne Umwege* (S. 194 – 252). Frankfurt am Main: Grundschulverband – Arbeitskreis Grundschule e.V.

Laging, R. (2007³) (Hrsg.). *Altersgemischtes Lernen in der Schule. Grundlagen. Schulmodelle. Unterrichtspraxis*. Hohengehren: Schneider-Verlag.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2005). *Mathematiklernen in jahrgangsbezogenen und jahrgangsgemischten Klassen mit dem Zahlenbuch*. Leipzig: Klett.

Renate RASCH, Landau

Heterogenität beim Bearbeiten von Textaufgaben

Seit vier Jahren begleite ich gemeinsam mit Lehrenden und Studierenden ein Projekt, das Lernvoraussetzungen für das Bearbeiten von Textaufgaben in allen Jahrgangsstufen der Grundschule erfassen und Schlussfolgerungen für eine möglichst optimale Unterrichtsumgebung - aufbauend auf den Voraussetzungen der Lernenden - ermöglichen soll. In 20 bis 30minütigen Interviews wurden die Kinder zunächst beim Textaufgabenlösen beobachtet und ihre Lösungskompetenzen festgehalten. Auf dieser Basis wurde ein Unterrichtskonzept entwickelt, das der unterschiedlichen Leistungsfähigkeit der Kinder beim Textaufgabenlösen entgegen kommen soll.

1. Lösungserfolg und Misserfolg analysieren

Analysiert man das Lösungsverhalten von Dritt- und Viertklässlern, wird deutlich, wie unterschiedlich die Voraussetzungen sind, auf denen die Lernenden ihre Überlegungen aufbauen. Die Analyse des Lösungsverhaltens bei den folgenden Textaufgaben wies allerdings nicht nur auf individuelle Unterschiede hin. Auch der bisherige Umgang mit Textaufgaben im Unterricht spiegelte sich deutlich wider.

Aufgabenbeispiel 1: *Seit ich die neue Schule besuche, muss ich 8 km mit dem Bus fahren. Mein Papa fährt viermal so weit zur Arbeit. Wie weit ist sein Weg?* (Kl. 3, 4)

72% der Dritt- und Viertklässler konnten die Aufgabe erfolgreich bearbeiten. Schaut man genauer auf die fehlerhaften Überlegungen, so zeigte sich, dass das Operationsverständnis für die Multiplikation vor allem im dritten Schuljahr noch nicht stabil ist - etwa bei der Hälfte der falschen Lösungen wurden die beiden Zahlen addiert. Die anderen Fehler entstanden hauptsächlich durch unsichere Einmaleinskenntnisse. Die Kinder, bei denen die Fakten nicht gespeichert waren, griffen beim Multiplizieren teilweise auf schrittweises Addieren zurück. Die größere Kraftanstrengung für das Rechnen führte zu einer Verlängerung der Lösungszeit. Die fitten Kinder benötigten für eine solche Aufgabe 1 Minute, die Kinder mit Rechenproblemen durchschnittlich 2 Minuten.

Aufgabenbeispiel 2: *Endlich Wochenende und ich darf mal am Abend fernsehen. In der Fernsehzeitung waren für den Film 130 min angegeben. Aber schon zur Hälfte der Zeit schlief ich ein. Wie viele Filmminuten habe ich verpasst?* (Kl. 3)

Nur 52% der Drittklässler konnten die Frage richtig beantworten. Die Schwierigkeit bestand darin, die Hälfte von 130 zu finden. Mit der 100 gelang dies allen, aber die Suche nach der Hälfte von 30 gestaltete sich teil-

weise schwierig. Einige Kinder waren der Meinung, dass man von dieser Zahl keine Hälfte finden könne. Bereitgelegtes Material wurde nicht oder nicht zielführend genutzt. Interessant war auch die Beobachtung, dass nur 20% der erfolgreichen Kinder die Division nutzten. Die Zahl 130 wurde schrittweise im Kopf zerlegt - notiert wurden in der Regel Subtraktionen. Dies ist auch ein Hinweis darauf, dass Lernende mitunter Schuljahre brauchen, um die Operationen zweiter Stufe, die Multiplikation und Division, zum einen inhaltlich und zum anderen auf der symbolischen Stufe zu verinnerlichen. Vor allem bei leistungsschwächeren Kindern wurde deutlich, dass sie durchaus einen adäquaten Rechenweg finden, es aber nicht schaffen, ihre Rechnungen auf der symbolischen Ebene abzubilden. So errechnete bspw. ein leistungsschwacher Schüler die Lösung 70 (Er hatte im Kopf versucht 100 und 30 entsprechend zu zerlegen.). Auf die Frage nach der Rechenaufgabe, die er notieren könnte, antwortete er nach kurzem Überlegen „70 · 1“. Auch bei dieser Aufgabe unterschieden sich erfolgreiche und weniger erfolgreiche Kinder bezüglich der Lösungszeit. Die sicheren Rechner benötigten ca. eineinhalb Minuten, bei den weniger fitten Kindern waren es durchschnittlich 3 Minuten.
Aufgabenbeispiel 3: *Tim und Paul haben zusammen 30 Legosteine. Tim hat 6 mehr als Paul. Wie viele hat Tim? Wie viele hat Paul?* (Kl.3, 4)
38% der Dritt- und Viertklässler waren bei dieser problemhaltigen Textaufgabe erfolgreich. Die fehlerhaften Lösungsüberlegungen ähnelten sich. Die Kinder bauten ihre Rechnungen vor allem auf vertrauten Denkschritten auf. Am häufigsten kam die Lösung vor: „Paul hat 9 und Tim hat 21.“ Es wurde die Hälfte von 30 gebildet und dann zur 15 sechs dazu- bzw. von 15 sechs weggenommen. Die erfolgreichen Kinder konnten sich eher von den gegebenen Zahlen lösen und Verknüpfungen probierend-reflexiv erzeugen. Eine Schülerin erklärte ihr Vorgehen so: „Ich habe erst beiden 10 gegeben, dann beiden 2 und Tim dann noch 6.“ Auch für die erfolgreichen Kinder verlängerte sich bei dieser Aufgabe die Lösungszeit deutlich. Sie benötigten durchschnittlich 6 Minuten. Bei den leistungsschwächeren Kindern gab es bezüglich der Lösungszeit kein einheitliches Bild. Ein Teil dieser Leistungsgruppe nutzte mehr Zeit (bis 9 Minuten). Andere Kinder sahen den Problemgehalt nicht und beendeten die Lösungsaktivitäten recht schnell (nach ca. 2 Minuten).
Fasst man die insgesamt gemachten Beobachtungen zusammen (hier wurden nur einige Ergebnisse vorgestellt), wird deutlich, dass die Unterschiede zum einen an den Rechenkompetenzen und am Operationsverständnis festzumachen sind und zum anderen an den Unterstützungskomponenten, die die Lernenden beim Bearbeiten von Textaufgaben für sich aktivieren konnten (z. B. Handlungen mit Material, lautes Denken, begleitende Notizen).

Defizite bei der Unterstützung der eigenen Lösungssuche ließen sich bei allen Leistungsgruppen beobachten.

2. Lernvoraussetzungen aufgreifen

Ein Teil der oben aufgeführten Erscheinungen lässt sich nur bedingt beeinflussen. Wir können aus einem Kind, das Mühe mit dem Rechnen hat, keinen perfekten Kopfrechner machen. Ebenso ist es eher unwahrscheinlich, dass Lernende mit einem Operationsverständnis, das noch stark vom additiven Denken abhängig ist, schnell ein situatives Denken erreicht, das Multiplikationen und Divisionen auch auf mathematisch-formaler Ebene einsichtig macht. Allerdings können wir die Kinder mit Kopfrechenproblemen entlasten, indem wir alternativ Textaufgaben mit ‚einfachen Rechenzahlen' anbieten und sie früh darin bestärken, die tatsächlich im Kopf stattgefundenen Rechnungen zu notieren.
Um an Lernvoraussetzungen optimal anknüpfen zu können, reicht der Blick auf die Dritt- und Viertklässler nicht aus. Für das Nachdenken über Lernumgebungen für das Lösen von Textaufgaben, zogen wir zunächst die spontanen Anfangsfähigkeiten (vgl. Hasselhorn 2005) der Schulanfänger heran. Diese ursprüngliche Heterogenität machte uns darauf aufmerksam, wie wichtig es ist, Lerngelegenheiten unter Gleichaltrigen bewusst zu initiieren. Bei den Schulanfängern fanden wir zahlreiche Voraussetzungen, die aufgegriffen und gefördert werden können. Die folgenden Beobachtungen wurden zu Schulbeginn in der dritten und vierten Schulwoche im Rahmen von Interviews gemacht. Aufgefallen ist uns beispielsweise Joyce, die den Textaufgaben mit einer hohen Lösungsaktivität begegnete. Spontan schrieb sie die Zahlen, die sie hörte, auf und unterstützte diese frühe Schriftlichkeit durch Zeichnungen. Sie nutzte ikonische Darstellungen wie Strichlisten oder ähnliches. Dies war bei anderen Schulanfängern noch nicht zu beobachten. Uns fielen Kinder auf, die mit den bereitgelegten Arbeitsmitteln besonders geschickt umgingen. Sie stellten die Mengen strukturiert dar und konnten Verknüpfungen einsichtig repräsentieren. Gabor, der einzelne Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 10 schon automatisiert hatte, konnte - wie einige andere Kinder auch - nach dem Hören der Aufgabe selbst entscheiden, ob der Kopf zum Rechnen und Zählen ausreicht oder ob das bereitliegende Material zur Unterstützung hinzugezogen werden sollte. Einzelne Kinder bewiesen ein ausdauerndes Lösungsverhalten, wenn es um probierende Lösungsaktivitäten bei problemhaltigen Textaufgaben ging. Sie unterstützten ihre Überlegungen, indem sie zwischen Veranschaulichungshilfen wechselten (z. B. nutzten sie erst die vertrauten Finger, dann das bereitgelegte Arbeitsmaterial usf.).

3. Unterrichtskonzepte entwickeln

Diese Beobachtungen veranlassten dazu, Unterrichtsumgebungen zu initiieren, die die Gleichaltrigen voneinander lernen lassen, so dass die vorhandenen Lösungskompetenzen einzelner Kinder andere Lernende anregen können und nicht verloren gehen. Die Rolle der Lehrkraft besteht unter anderem darin, dieses Lernen zu organisieren und es nicht dem Zufall zu überlassen. Verschiedene Unterrichtskonzepte dieser Art wurden schon erfolgreich in der Schulpraxis evaluiert. (vgl. u. a. Hengartner/Hirt/Wälti 2006) Wir erproben zur Zeit ein Unterrichtskonzept, dass den Umgang mit Textaufgaben gliedert in:

1 Textaufgabe(n) vorstellen; 2 Individuelles Lösen; 3 Austausch mit Gleichaltrigen (mit einem oder mehreren Partnern); 4 Reflexion auf der Grundlage der Schülerprodukte (gesteuert durch die Lehrperson in einer der folgenden Unterrichtsstunden).

Diese Struktur soll einen Rahmen sowohl für individuelles Denken als auch für das Lernen unter Gleichaltrigen bilden. Die Lernchancen (individuelles Lernen, Lernen unter Gleichaltrigen, Lernen von der Lehrperson) und die damit verbundenen Zeiträume sollen von den Kindern möglichst flexibel genutzt werden können. So können die Lernenden selbst entscheiden, ob sie ihre individuelle Lösungsarbeit nach dem Hören der Textaufgabe beginnen oder ob sie noch weitere Orientierung brauchen. Hierfür gibt es die Option, gemeinsam mit der Lehrperson noch im Eingangskreis zu verweilen, um die Aufgabe weiter zu durchdenken. Auch das Ende der individuellen Lösungsarbeit, um sich mit Gleichaltrigen zu besprechen, können die Kinder im Rahmen des möglichen Zeitlimits selbstbestimmt entscheiden. Der Organisation eines solchen Unterrichts liegt die Sicht zugrunde, dass die Schülerinnen und Schüler einerseits vieles voneinander lernen können andererseits aber auch Fähigkeiten im Aufbauen und Verfolgen eigener Denkwege entwickeln sollten. Aufgabe der Lehrperson muss es bspw. sein, in den Reflexionsphasen auf mathematisch-symbolische Darstellungsformen aufmerksam zu machen (vgl. Stern 1998), um auch diesbezüglich eine Weiterentwicklung zu initiieren.

Literatur

Hasselhorn, M. (2005). Lernen im Altersbereich zwischen 4 und 8 Jahren. In M. Titus & al. (Hrsg.), *Bildung. 4-bis8-jährige Kinder* (S. 314 - 354). Münster: Waxmann.

Hengartner, E/Hirt, U./Wälti, B. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte.* Zug: Klett und Balmer.

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter.* Lengerich: Pabst Publisher.

Beat WÄLTI, Thun

Lernprozesse begleiten, Produkte der Kinder beurteilen

Im Mathematikunterricht werden heute vermehrt Lernumgebungen eingesetzt, deren Bearbeitung zu individuell geprägten Arbeiten führt. Was im eigentlichen Unterricht jedoch «zählt» sind meist nicht Eigenproduktionen, sondern ausschließlich die bei Tests erzielten Zensuren. Zudem überprüfen die Testaufgaben häufig einseitig operative Fertigkeiten.

Den Überlegungen der Kinder und den verschiedenen im Unterricht entstehenden Produkten sollte grundsätzlich und beim Einsatz von Lernumgebungen im Speziellen mehr Wertschätzung und damit auch mehr Gewicht zukommen: Bei der Steuerung des weiteren Unterrichts, durch gezielte Auswertungen und persönliche Feedbacks sowie durch ein ganzheitliches, förderorientiertes Beurteilungskonzept.

Die nachfolgenden Ausführungen zeigen Möglichkeiten zur förderorientierten Beurteilung und zur Beurteilung im Mathematikunterricht mit Lernumgebungen. Sie wurden in einem Nachfolgeprojekt zum Projekt «Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte» der pädagogischen Hochschule Aargau erfolgreich erprobt.

1. Beurteilungsmosaik

Die folgenden sechs Bausteine sind Grundlage für eine möglichst ganzheitliche Förderung und Beurteilung. Zu Beginn eines Schuljahres wird die Beurteilung geplant, wobei jeder Baustein mindestens 2x / Schuljahr berücksichtigt wird (vgl. nachfolgender Abschnitt).

Produkte entstehen im Rahmen von offenen Aufgabenstellungen oder während der Arbeit an Lernumgebungen. Die Schülerinnen und Schüler werden beim Festhalten ihrer Gedanken und Strategien begleitet.

Gespräche zwischen Lehrperson und Kind erfolgen zu Schülerprodukten oder zu Lehrplanthemen. Die Gespräche sollen gleichermaßen vorhandene Konzepte stärken und Fehlvorstellungen aufdecken. Sie haben im Wesentlichen diagnostische Funktion und bilden eine Grundlage für die Unterrichtsplanung und die Lernbegleitung.

Handlungen mit mathematischem Gehalt werden im Verlaufe des Unterrichts beobachtet, so etwa beim Spielen, Messen, Auszählen von Mengen oder beim Protokollieren eines Ablaufs. Beobachtungskriterien ermöglichen die Beurteilung von Handlungen.

Lernzielkontrollen (Tests) werden in der Regel quartalsweise durchgeführt (also zwei je Semester).

Selbstbeurteilung: Etwa einmal je Quartal schätzen sich die Kinder, z.B. aufgrund eines Tests oder ihrer Arbeit an einer Lernumgebung und mit Hilfe von Kriterien selbst ein. Die Selbstbeurteilung kann in einem zweiten Schritt mit einer Fremdbeurteilung von Kolleginnen oder Kollegen verglichen werden.

Spontane Beobachtungen der Lehrperson sowie weitere Beobachtungsanlässe sind jederzeit möglich.

2. Beurteilungsanlässe

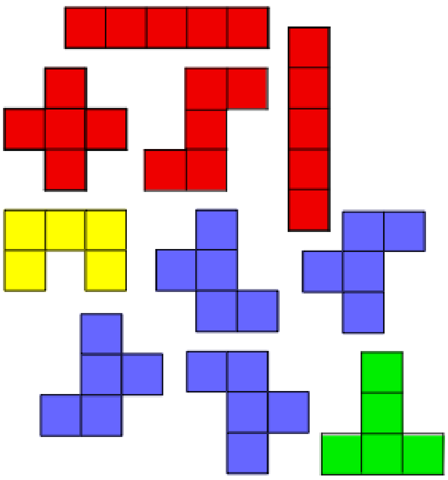
Beurteilungspläne je Schuljahr geben Auskunft über Reihenfolge und Art der einzelnen Anlässe. Der nachfolgende Ausschnitt aus einem Beurteilungsplan für das 1. und 2. Quartal einer 3. Klasse zeigt beispielhaft auf, dass mathematische Kompetenzen bereits bei der Planung der Anlässe möglichst breit gefördert und beobachtet werden sollen.

3. Sj / 1.Q	Inhalte	Kriterien
3.1.1A GE Interview	Grosse Zahlen, Stellenwertsystem	Stellenwertsystem bzgl. 1000er-Raum verstehen, Beziehungen auf dem Zahlenstrahl erkennen.
3.1.2A LU Zahlen abbauen	Zahlenmauer, Zahlenfolgen Bd.1	Addieren, subtrahieren und Auffälligkeiten beschreiben.
3.1.3S LU Netze knüpfen	Multiplikation Bd.1	Zu einer vorgegebenen Multiplikation (Produkt > 25) verwandte Aufgaben darstellen
3.1.4G LU Spiel mit Formen	Pentomino, Kombinatorik Bd. 2	Symmetrien feststellen, Figuren finden, Rätsel herstellen.
3.1.5S HA Messprotokoll	Längenmasse, Messen ZB3S.17	Schätzfragen stellen und beantworten
3.1.6A TE	Lernzielkontrolle 1	
3. Sj / 2.Q	**Inhalte**	**Kriterien**
3.2.1A LU Zahlen und Ziffern	Ziffern, Zahlen, Stellenwertsystem, Bd.1	Rätsel formulieren und mit Hilfe des 1’000er Buches lösen.
3.2.2A LU Geldbeträge bilden	Proportionalität, Grössen Bd.1	Kriteriengestützt Geldbeträge finden und ordnen.
3.2.3G HA Spiegeln	Spiegeln, Symmetrien, Skizzieren	Symmetrisch ergänzen, Fehler finden, Spiegel ausrichten.

Zur Illustration dient die Lernumgebung «Pentominos auf der 100er-Tafel». Die Kinder wurden in die Lernumgebung eingeführt, indem sie den Stab aus fünf Quadraten auf die Zahlfelder 1, 2, 3, 4, 5 legten und die Summe berechneten. Es wurde gemeinsam untersucht, wie sich die Summe ändert, wenn ein Pentomino um ein Feld nach links (-5), rechts (+5), oben (-50) oder unten (+50) verschoben wird.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Danach wurden die Kinder während ca. 70 Minuten auf ihre eigenen Entdeckungsreisen geschickt, wobei die Kriterien zur Beurteilung ihrer Arbeit bekannt gegeben wurden. Zwei grundlegende Kriterien (A und B) sollten möglichst alle Kinder erfüllen, Kriterien +C und +D sind anspruchsvoller und richten sich an Kinder, die die Grundanforderungen gut bewältigen.



Nebenstehende Steine können in den abgebildeten Positionen so gelegt werden, dass sich die Summe 180 ergibt (siehe Kriterium +C untenstehend)

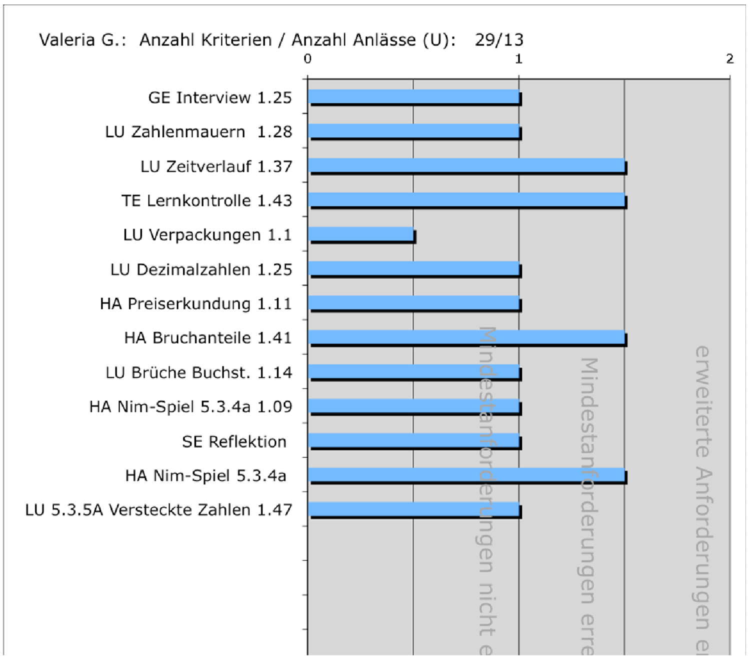
3.3.4A LU	Kriterien	n.e	e	Bemerkungen
Pentominos auf der 100er Tafel Datum:	A (Einfache) Pentominos in 5er und 50er Schritten systematisch verschieben und Summen berechnen. B Summen ableiten (z.B. verschiebe das Pentomino so, dass die Summe um 60 größer wird) dieses Kriterium wird mit der Klasse erarbeitet			Mindestanforderungen

	+C Mit einem Pentomino exakt die Summe 180 legen. +D Zwei verschiedene Pentominos mit gleicher Summe neben einander legen			Erweiterte Anforderungen
	Anzahl Kriterien	0 / 1 / 2 / 3 / 4		

Wer die beiden grundlegenden Kriterien (A und B) nicht erfüllt, kann diese in einer der folgenden Lektionen jeweils nachreichen.

3. Semesterbeurteilung

Im Verlauf eines Semesters werden so 10 – 12 Beurteilungsanlässe zu jeweils 1 – 3 Lektionen in den Unterricht integriert.



Die Leistungen der Lernenden werden dabei in Säulendiagramme übersetzt. Aufgrund solcher Säulendiagramme werden dann letztendlich die gesetzlich geforderten Zahlennoten gesetzt. Abgebildet ist ein Profil einer gut durchschnittlichen Schülerin.

Es bleibt abzuwarten, in welchem Ausmaß eine Beurteilung, die sich am Unterricht bzw. an didaktisch sinnvollen Lernanlässen und nicht an Testwerten orientiert, Kinder wirklich zu einem besseren Verständnis von Mathematik führt. Gesichert scheint uns aufgrund der Erfahrungen jedoch die Feststellung, dass Stärken und Defizite der Kinder gerade dank der ganzheitlichen Beurteilung deutlicher zum Vorschein kommen und so im Unterricht gewinnbringend aufgenommen werden können.

Literatur

Hirt, Ueli und Wälti, Beat (2008). *Lernumgebungen für den Mathematikunterricht, natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Band 2.* Seelze/Velber: Kallmeyer.

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten
Charlotte RECHTSTEINER-MERZ, Weingarten

Gemeinsam, aber nicht im Gleichschritt – eine Konzeption für das Mathematiklernen in der jahrgangsgemischten Eingangsstufe

Das Lernen in heterogenen Gruppen kann aus unterschiedlichen Perspektiven betrachtet werden: Im Beitrag richten wir den Fokus nicht auf grundlegend konzeptionelle oder organisatorische Aspekte, sondern auf die Gestaltung von Lernsituationen. Ausgehend von Praxisbeobachtungen fasst Faust-Siehl (2001, 202f) vier verschiedene Gestaltungsmöglichkeiten solcher Lernsituationen zusammen: selbst geleitetes, individuelles Arbeiten, themenbezogene „Kurse", Abteilungsunterricht innerhalb des Klassenverbands und gemeinsame Unterrichtssituationen. Über die Ausprägung der einzelnen Gestaltungsvarianten in der Praxis gibt es in der Literatur kaum Daten. Bei Roßbach (2007³, 80) lassen sich Angaben finden, aus denen mit aller Vorsicht geschlossen werden kann, dass das gemeinsame Lernen in heterogenen Lerngruppen (33%) seltener praktiziert wird als der Unterricht in jahrgangsbezogenen Abteilungen (44%). Nach Aussage von Faust-Siehl (2001) bereitet bei der Gestaltung gemeinsamer, differenzierter Lernsituationen „der üblicherweise lehrgangsmäßig aufgebaute Mathematikunterricht" (a. a. O., 206) die größten Schwierigkeiten.

1. Mathematiklernen in jahrgangsübergreifenden Gruppen

Ansätze zum Mathematiklernen in jahrgangsübergreifenden Gruppen finden sich sowohl explizit in der didaktischen Literatur als auch implizit in publizierten Schulbüchern.

	inhaltlich geschlossen	inhaltlich offen
individuelles Lernen	• kleinschrittiges Vorgehen • Musterlösungen • Einzelarbeit anhand vorsturkturierter Arbeitsmaterialien → Zahlreiche Unterrichtswerke	(Entwicklungsbedarf)
gemeinsames Lernen	(nicht realisierbar)	• Parallelisierung der Lerninhalte • Lernangebote mit natürlicher Differenzierung • Kommunikation → Lernumgebungen (Nührenbörger/Pust 2006; Hengartner u.a. 2006; Hirt u. Wälti 2008)

Abb. 1: Ansätze zum Mathematiklernen in heterogenen Gruppen

Ordnet man die vorhandenen Ansätze anhand der Kriterien *individuelles* und *gemeinsames Lernen* sowie *inhaltliche Geschlossenheit* oder *Offenheit*, so fällt auf, dass grundsätzlich zwei verschiedene Gruppen von Ansätzen existieren.

Die eine Gruppe hat ihren Schwerpunkt auf dem individuellen Lernen und kann als inhaltlich geschlossen bezeichnet werden. Sie lässt sich u. a. charakterisieren durch Kleinschrittigkeit und Musterlösungen. Ihr Ziel ist das Üben von Rechenfertigkeiten anhand vorstrukturierter Arbeitsmaterialien. Diese Ansätze finden sich in zahlreichen Schulbuchwerken (vgl. Abb. 1).

Die andere Gruppe von Ansätzen lässt sich in Koordinate gemeinsames Lernen und inhaltlich offen einordnen (vgl. Abb.1). Gekennzeichnet sind sie durch die Parallelisierung der Inhalte, natürliche Differenzierung und die Anregung zur Kommunikation (vgl. Nührenbörger & Pust 2006; Hengartner u. a. 2007; Hirt & Wält 2008).

Zwei Bereiche bleiben momentan offen (vgl. Abb. 1): Gemeinsames Lernen inhaltlich geschlossen zu organisieren, ist im Hinblick auf eine heterogene Gruppe nicht realisierbar. Man findet diese Form im Abteilungsunterricht (s. o.), also wenn versucht wird, die Heterogenität zu reduzieren. Individuelles Lernen an inhaltlich offenen Aufgaben stellt allerdings einen wichtigen Bereich innerhalb einer konsistenten Konzeption zum Mathematiklernen in jahrgangsgemischten Klassen dar. In diesem Bereich herrscht noch Entwicklungsbedarf.

2. Bausteine der Konzeption

Die nachfolgend vorgestellte Konzeption ist im Bereich des inhaltlich offenen Mathematiklernens anzusiedeln. Dabei werden sowohl Lernangebote für das gemeinsame als auch das individuelle Lernen beschrieben. Das Ziel ist die Balance zwischen individuellem und gemeinsamem Mathematiklernen an inhaltlich offenen Aufgaben- und Problemstellungen. Die Konzeption wurde im Rahmen einer schulinternen Curriculumsentwicklung entworfen und erprobt. Sie basiert auf vier von Schütte (2004, 3ff) formulierten didaktischen Leitideen: Mathematik wird aus der Kinderperspektive aufgebaut, das Lernen ist in sinnstiftende Kontexte eingebunden, Lernen auf eigenen Wegen wird ermöglicht und die Kommunikation zwischen den Lernenden wird gefordert und gefördert.

Bezogen auf die Unterrichts- und Aufgabenkultur lassen sich aus diesen Leitideen Folgerungen ableiten, die für unsere Konzeption grundlegend sind:

- Herausfordernde Aufgaben, die verschiedene Zugänge und Lösungswege sowie die Durchdringung der mathematischen Struktur auf verschiedenen Niveaus ermöglichen, stehen im Mittelpunkt aller Bausteine.
- Der Entwicklung eigener Ideen und Lösungswege wird permanent angeregt und der Austausch im sozialen Kontext gefordert und gefördert.

Die von uns entwickelte Konzeption für das Mathematiklernen in der jahrgangsgemischten Eingangsstufe besteht aus drei Bausteinen: dem gemeinsamen Lernen an offenen Lernangeboten, dem eigenständigen Lernen und dem Lernen in Kleingruppen.

Gemeinsames Lernen an offenen Lernangeboten: Für diesen Baustein wurden 32 offene Lernangebote ausgewählt, die im Laufe der Eingangsstufe von jedem Kind zwei Mal durchlaufen werden. Die Lernangebote lassen sich den Bereichen Arithmetik, Geometrie, Umgang mit Größen und Stochastik zuordnen und sind so konzipiert, dass sowohl strukturorientierte, als auch anwendungsorientierte Problemstellungen auftauchen (vgl. Abb. 2). Sie sind nach dem Spiralprinzip aufgebaut, so dass innerhalb jedes einzelnen Lernangebots vorausschauendes und rückblickendes Lernen möglich wird.

	Strukturorientierung	Anwendungsorientierung
Arithmetik	Strukturierte Aufgabenserien untersuchen und erfinden	Rechengeschichten erfinden
Größen	Geldbeträge strukturiert legen	Wir kaufen ein: bezahlen-wechseln-herausgeben
Geometrie	Aktivitäten am Tangram	Geometrische Körper erforschen
Stochastik	Würfeln mit zwei Würfeln	Buchstaben zählen

Abb. 2: Auswahl der Lernangebote

Eigenständiges Lernen: Der Baustein gliedert sich in zwei Bereiche: das Lernen in heterogenen Tandems und das individuelle Lernen.

Beim Lernen in heterogenen Tandems arbeiten immer zwei Kinder zusammen: ein Kind, das am Anfang des Lernprozesses steht und ein fortgeschrittenes. Für die Arbeit stehen Karteikarten mit Lernangeboten zur Verfügung, die zur eigenständigen Auseinandersetzung mit dem jeweiligen mathematischen Sachverhalt anregen. Mit Hilfe von Bildern und knappen Anweisungen können sich die Lernenden die Aufgabe selbst erschließen. Die Lernangebote sind so konzipiert, dass sie Handlungen ermöglichen und natürliche Differenzierung implizieren. Da auf jeder Karteikarte der intensive Partneraustausch angeregt wird, ist auch beim eigenständigen Lernen in heterogenen Tandems die Vor- und Rückschau jederzeit möglich. Die Karteikarten umfassen eine Vielzahl an Themen, wie beispielsweise das Erfinden von Analogieaufgaben, das Strukturieren von Anzahlen und das geschickte Zählen, das Erfinden von Aufgabenfamilien oder Aktivitäten zum Thema „Symmetrie".

Der Baustein des eigenständigen Lernens umfasst auch das individuelle Arbeiten im so genannten Basisheft. Darin befinden sich Fragestellungen zum Aufbau des Zahl- und Operationsverständnisses, zur Entwicklung strategischer Werkzeuge und zur Schulung des Zahlenblicks. Die einzelnen Aufgabenstellungen fordern zu eigenen Lösungswegen heraus, lenken den Blick vermehrt auf die Strukturen und regen dadurch zur Reflexion an.

Lernen in Kleingruppen: Das Lernen in leistungshomogeneren Kleingruppen stellt den kleinsten Baustein dar. Auch hier arbeiten die Kinder gemeinsam an offenen Lernangeboten, wobei die Themen – im Vergleich zum ersten Baustein – jahrgangsspezifischer gestaltet sind. Da sich die Gruppenzusammenstellung am Lern- und Leistungsstand der Kinder orientiert, erfolgt diese flexibel in Abhängigkeit vom Thema und den spezifischen Intentionen.

Alle drei dargestellten Bausteine sind durch ein Berichtsheft verknüpft. Dieses dient als Protokoll über die erarbeiteten Themen, zum Austausch mit den Eltern und zur Orientierung für die Kinder während des Schuljahres.

Literatur

Faust-Siehl, G. (2001). Die neue Schuleingangsstufe in den Bundesländern. In G. Faust-Siehl & A. Speck-Hamdan (Hrsg.), *Schulanfang ohne Umwege* (S. 194 – 252). Frankfurt am Main: Grundschulverband – Arbeitskreis Grundschule e.V.

Hengartner, E. & al. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Zug: Klett u. Balmer.

Hirt U. & B. Wälti (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürlich differenzieren für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze: Klett-Kallmeyer.

Nührenbörger, Marcus u. Pust, Sylke (2006). *Mit Unterschieden rechnen.* Seelze: Klett-Kallmeyer.

Roßbach, HG (2007^3). Empirische Vergleichsuntersuchungen zu den Auswirkungen von jahrgangsheterogenen und jahrgangshomogenen Klassen. In R. Laging (Hrsg.). *Altersgemischtes Lernen in der Schule. Grundlagen. Schulmodelle. Unterrichtspraxis* (S. 80 – 91). Hohengehren: Schneider-Verlag.

Schütte, S. (2004). Den Mathematikunterricht aus der Kinderperspektive aufbauen. In W. Haller & S. Schütte: *Die Matheprofis 1. Lehrermaterialien.* (S. 3 – 7) München; Düsseldorf ; Stuttgart: Oldenbourg.

Birgit GYSIN, Ludwigsburg

Lerndialoge von Kindern in einem jahrgangsgemischten Anfangsunterricht Mathematik – Chancen für eine mathematische Grundbildung

Innerhalb der Mathematikdidaktik haben sich seit geraumer Zeit bestimmte Grundüberzeugungen dazu herausgestellt, wie Kinder Mathematik lernen. Dazu gehört die Sicht auf das Kind als Konstrukteur seines Wissens, das sich die Lerninhalte **aktiv-entdeckend** aneignet, genau so wie die Auffassung vom Lernen als eine **soziokulturell geprägte Tätigkeit**. Aus diesen beiden grundlegenden Überzeugzungen leiten sich Vorstellungen von einer veränderten **Unterrichtskultur** ab, die sich beispielsweise auf die Lehrerrolle, auf den Umgang mit Fehlern und auch auf die im Unterricht praktizierte Aufgabenkultur beziehen. Wenn diese drei Grundfesten mathematischer Bildungsprozesse berücksichtigt werden, ist wohl immer guter Mathematikunterricht möglich. Mit der Jahrgangsmischung soll an diesen Grundfesten nicht gerüttelt werden, vielmehr tritt sie als schulisches Merkmal hinzu. Sie bildet quasi eine besondere Hintergrundfolie für die in der Schule stattfindenden Lernprozesse. Mit meiner Untersuchung gehe ich daher nicht der Frage nach, ob und inwiefern Kinder in der Jahrgangsmischung besser als in herkömmlichen homogenen Klassenverbänden Mathematik lernen können. Stattdessen richte ich den Blick darauf, welche besonderen Chancen sich in einer jahrgangsgemischten Zusammensetzung im Hinblick auf das Lernen von Mathematik ergeben können.

1. Pädagogische Verortung

Zu den Charakteristika jahrgangsgemischter Lerndialoge gehört es, dass das Mit- und Voneinanderlernen im Kontext klarer Rollen stattfindet (Laging 1995). Das ältere wird vom jüngeren Kind per se als Leistungsträger akzeptiert und die Rollen müssen nicht fortwährend neu ausgehandelt werden. Hinzu kommt, dass die Kinder unterschiedliche schulmathematische Erfahrungen mitbringen. Das ältere Kind hat schon einmal von schulischer Seite Anregungen zu mathematischen Inhalten erhalten, die das jüngere Kind so und in der Schulsituation noch nicht erfahren hat. Damit ist eng die Tatsache verbunden, dass die Kinder unterschiedlich stark schulisch sozialisiert sind. Das ältere Kind hat schon längere Zeit ein zielorientiertes, intentionales Lernen erlebt, während das jüngere noch dem intuitiven, eher unbeabsichtigten und beiläufigen Lernen aus der Kindergartenzeit näher steht. Diese besonderen Bedingungen beeinflussen, wie das jüngere und das ältere Kind jeweils ihren ‚bildungsbiografischen Teppich' weben. Auf ihm treten Muster zu jedem Entwicklungs- und Bildungsbereich zu Tage (Röbe 2008).

Der besonderen Heterogenität in der Jahrgangsmischung werden von pädagogischer Seite besondere Chancen zugeschrieben: Sie sei nicht nur Motor für das soziale, sondern auch für das sachbezogene Lernen. Günstige Lernausgangslagen seien dabei in einer jahrgangsübergreifenden Praxis in erster Linie auf Grund der folgenden zwei Aspekte gegeben: In einer Situation ohne großen Konkurrenzdruck werde das Helfen und gegenseitige Erklären zu einer Selbstverständlichkeit. Indem unterschiedliche Niveaustufen zu einem Unterrichtsinhalt parallel angeboten werden, können die Kinder in die Zone der früheren oder auch der nächsten Entwicklung eintauchen. Man geht davon aus, dass es den Kindern im Zuge dieses ‚lebendigen Spiralprinzips' erleichtert werde, ihr individuelles Wissensnetz zu knüpfen – indem sie sich voraus- und rückblickend orientieren können (Laging 1995).

Zu den der Jahrgangsmischung zugeschriebenen Chancen im Hinblick auf das sachbezogene Lernen gibt es bisher noch wenige Forschungsergebnisse. Es steht nach wie vor die Forderung im Raum, die pädagogischen Erwartungen an die Altersmischung mit fachdidaktischen Forschungsbefunden und Erfahrungsberichten abzusichern. In diese Forschungslücke zielt mein Untersuchungsinteresse, wenn ich der Leitfrage nachgehe, wie Kinder in einem jahrgangsgemischten Anfangsunterricht voneinander und miteinander Mathematik lernen.

2. Mathematikdidaktische Verortung

Das von Seiten der Pädagogik konstatierte Forschungsdesiderat haben von mathematikdidaktischer Richtung her bisher Marcus Nührenbörger und Cordula Schülke aufgegriffen. Bei Nührenbörger (2007) stehen Dimensionen der Intervention von Lehrkräften während der Partnerarbeit von jüngerem und älterem Kind im Vordergrund. Schülke (2007) widmet sich in erster Linie den reflexiven mathematischen Fähigkeiten von Schülern im jahrgangsgemischten Unterricht; und dies unter besonderer Berücksichtigung der Frage, wie sich der Rollenwechsel im Laufe von zwei Jahren vom jahrgangsjüngeren zum jahrgangsälteren Kind auf die Entwicklung der Reflexionsfähigkeiten auswirkt. Diese bisher getätigten Untersuchungen und mein Forschungsvorhaben eint derselbe Forschungsgegenstand: Lernprozesse von Paaren, die sich aus jahrgangsjüngerem und –älterem Kind zusammensetzen. Jedoch werden unterschiedliche Perspektiven auf diesen Gegenstand eingenommen: So stand die Arbeit eines Paares in Abhängigkeit von der Lehrerintervention im Mittelpunkt oder es wurde ein Bezug zu den von den Kindern entwickelten Reflexionsfähigkeiten hergestellt. Bei meiner Untersuchung liegt dagegen der Schwerpunkt auf der Erforschung des Geschehens in den Lerndialogen selbst. Inwiefern lassen sich tatsächlich die von pädagogischer Seite her beschriebenen günstigen Lernausgangslagen antreffen und von den Kindern für ihr Lernen von Mathematik nutzbar machen?

An den zwei Schulen, an denen die Untersuchung stattfindet, setze ich gemeinsame Lernangebote für die Erst- und Zweitklässler ein. Innerhalb jedes Lernarrangements ist eine Phase der Partnerarbeit vorgesehen, die bei immer denselben vier Paaren per Video aufgezeichnet wird. Dabei lege ich Lernumgebungen zu Grunde, die eine Verzahnung der Leitideen ‚Zahl' und ‚Muster und Strukturen' aufweisen (vgl. Bildungsplan B-W. 2004). Die Lernumgebungen plane ich in Anlehnung an Vorschläge aus der Literatur. Diese gilt es jedoch gegebenenfalls dahingehend weiterzuentwickeln, dass nicht nur die aktiv-entdeckende Komponente berücksichtigt wird, sondern auch sinnvolle Gesprächsanlässe gegeben sind.

Welche theoretischen Entwicklungslinien lassen sich beim Aspekt des ‚Voneinander und Miteinander' verfolgen? Andrea Peter-Koop (2005), Martina Röhr (1995) und Daniela Götze (2007) befassen sich alle in irgendeiner Form mit der Kommunikation unter Schülern. Im Rahmen meiner Analyse war von Interesse, wo die Autorinnen Schwerpunkte setzen und welcher Ansatz sich für meine Untersuchung als tragfähig erweisen könnte. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bei Peter-Koop die Interaktion, bei Röhr der Inhalt der Interaktion - die Kooperation - und bei Götze beide Aspekte in Form des mathematischen Gesprächs im Mittelpunkt der Betrachtung stehen. Zum jetzigen Zeitpunkt schätze ich es so ein, dass sowohl der interaktive als auch der kooperative Gehalt einer Gesprächssituation zwischen Erst- und Zweitklässlern für die Beantwortung meiner Leitfrage (s. o.) relevant sein werden. Daher stütze ich mich für den theoretischen Hintergrund des ‚Voneinander und Miteinander' schwerpunktmäßig auf Götze. Dies findet in der folgenden Ausdifferenzierung der Leitfrage seinen Niederschlag.

3. Forschungsfragen

- Sind die **lernförderlichen Gesprächsmerkmale** in jahrgangsgemischten Tandems anzutreffen? Welche sind dominant? Welche Bedingungen begünstigen das Auftreten dieser Merkmale?
- Welche **Verstehenszugänge** zu einem mathematischen Inhalt werden beim jüngeren und welche beim älteren Kind deutlich?
- Lassen sich in den Äußerungen bzw. in den Aktivitäten der Schüler **Zonen der nächsten / früheren Entwicklung** erkennen? Für wen und in-

wiefern erweist sich das Zurück- bzw. das Vorausschauen als gewinnbringend?

- Gibt es für den jahrgangsgemischten Anfangsunterricht weitere **sinnvolle Planungselemente für mathematische Gespräche** unter Kindern?

Im Unterschied zu Götze handelt es sich bei meinem Untersuchungsvorhaben um eine besondere Form des Gesprächs – einen Dialog. Dies gilt es bei der theoretischen Fundierung der Arbeit zu berücksichtigen: Den Begriff des ‚Lerndialogs' werde ich dabei zum einen bei Martin Buber (1923) verorten, der den Dialog als ein elementares anthropologisches Anliegen bezeichnet und ihm eine besondere Dynamik im polaren Spannungsraum zwischen Ich und Du zuschreibt. Gallin und Ruf (1998) sprechen von einer Spannung im Dialog des Einzelnen zwischen singulärer und regulärer Welt, die die Triebfeder allen Lernens ist. Der individuelle Lerndialog kann dabei durch den Dialog zwischen zwei Personen angeregt werden.

Literatur

Bildungsplan für die Grundschule Baden-Württemberg (2004).

Buber, M. (1923): *Ich und du*. Leipzig: Insel Verl.

Gallin, P./ Ruf, U. (1998): *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz* .Seelze: Kallmeyer.

Götze, D. (2007): *Mathematische Gespräche unter Kindern. Zum Einfluss sozialer Interaktion von Grundschulkindern beim Lösen komplexer Aufgaben*. Hildesheim: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 55).

Laging, R. (1995): Altersgemischte Gruppen in der Grundschule. Untersuchungen zur Veränderung sozialer Beziehungen. In: Eberwein, H.; Mand, J. (Hg): *Forschen für die Schulpraxis. Was Lehrer über Erkenntnisse qualitativer Sozialforschung wissen sollten.* (S. 117 – 136). Weinheim.

Nührenbörger, M. (2007): Unterrichtsgespräche zwischen Schülern und Lehrkräften in jahrgangsgemischten Kleingruppen. In: Möller, K. / Hanke, P. u.a. (Hg): *Qualität von Grundschulunterricht entwickeln, erfassen und bewerten.* (S. 245 – 248). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Peter-Koop, A. (2006): Grundschulkinder bearbeiten Fermi-Aufgaben in Kleingruppen. Empirische Befunde zu Interaktionsmustern. In: Rathgeb-Schnierer, E. / Roos, U. (Hg): *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht.* (S. 41 – 56). München, Düsseldorf, Stuttgart: Oldenbourg.

Röbe, E. (2008): Frühpädagogische Förderung als grundlegende Bildung. In: *Lehren und Lernen*, Jg. 34, H. 10, 9 – 14.

Röhr, M. (1995): *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Wiesbaden: DUV Dt. Univ.-Verl.

Schülke, C. (2007): Reflexive mathematische Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im jahrgangsgemischten Unterricht. In: Möller, K. / Hanke, P. u.a. (Hg): *Qualität von Grundschulunterricht entwickeln, erfassen und bewerten.* (S. 249 – 252). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Stephanie SCHULER, Gerald WITTMANN, Schwäbisch Gmünd

Moderierte Sektion: Untersuchungen zur frühen mathematischen Bildung

Nach 30 Jahren ist mit PISA die frühe mathematische Bildung wieder ins Blickfeld der fachdidaktischen Forschung gerückt. Stand damals – geprägt durch die Forschungen Piagets – die Förderung logischer Operationen wie Seriation, Klassifikation, Eins-zu-Eins-Zuordnung und Mengeninvarianz im Vordergrund (vgl. z.B. Neunzig 1972), so kann man in der jüngeren Forschung verschiedene Ansätze und Schwerpunktsetzungen ausmachen.

Aus der psychologischen Grundlagenforschung kommend wird das Konzept der *Vorläuferfertigkeiten* vertreten (vgl. Krajewski & Schneider 2006). Diese Vorläuferfertigkeiten, im Wesentlichen Zahl- und Mengenwissen, verweisen statistisch auf den Leistungserfolg in der Schule. Fördermaßnahmen erfolgen gezielt und punktuell; es wird versucht, Defizite im Zahl- und Mengenwissen möglichst früh zu diagnostizieren und entsprechend auszugleichen.

In der Fachdidaktik wird davon abweichend oftmals der Begriff *Vorläuferfähigkeiten* verwendet (vgl. Peter-Koop & Grüßing 2007), der in der Begrifflichkeit weniger die Automatisierung als vielmehr das Verstehen betont. Verbreitung hat inzwischen auch das Konzept der *Basiskompetenzen* oder *Grunderfahrungen* gefunden, das eine breite Förderung vielfältiger Inhalte und Kompetenzen verfolgt im Unterschied zu einer Fokussierung auf den Zahlbegriffserwerb (vgl. Lorenz 2005, Steinweg 2008). Mathematische Lernangebote und Fördermaßnahmen erfolgen langfristig und in bestehenden Strukturen und Arbeitsweisen. Dabei steht die Erforschung gängiger Kindergartenpraxen im Hinblick auf die mathematische Bildung und die theoretisch und empirisch gestützte Auswahl günstiger Praxen noch weitgehend aus.

Forschung zur frühen mathematischen Bildung ist auch international gesehen eine junge Forschungsrichtung und stellt sich folglich als noch wenig strukturiert und ausdifferenziert dar. Im Bewusstsein einer gewissen Vorläufigkeit lassen sich dennoch verschiedene Forschungsfelder unterscheiden, denen sich auch die Vorträge der moderierten Sektion zuordnen lassen: (1) Entwicklungsforschung, (2) Kompetenzerhebung und Diagnose, (3) empirische Evaluation und (4) Erforschung von Alltagspraxen (für eine ausführlichere Darstellung vgl. Schuler & Wittmann 2009). Diese Aufzählung von Forschungsfeldern erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit und kann in Zukunft durch weitere Felder ergänzt werden, die zum jetzigen

Zeitpunkt aufgrund des Mangels an (abgeschlossenen) Forschungsarbeiten noch nicht sichtbar sind.

Ziel der moderierten Sektion ist es durch die Bündelung von Vorträgen, einen möglichst breiten Einblick in aktuelle Untersuchungen und Forschungsprojekte zu ermöglichen. Das Spektrum der Forschungsfragen umfasst dabei die Messung von Kompetenzen im Kindergarten und am Schulanfang, die Entwicklung und Evaluation von Materialen, Lernumgebungen und Förderkonzepten, die Analyse mathematischer Spiel- und Lernprozesse im Kindergarten und in der Familie, sowie die Entwicklung und Evaluation von Konzepten zur Aus- und Fortbildung von Erzieherinnen. Die zugrunde liegenden Forschungsparadigmen sind sowohl qualitativ als auch quantitativ.

Literatur

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht 53(4), S. 246–262.

Lorenz, Jens Holger (2005). Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen im Vorschulalter. In: Hasselhorn, M., Schneider, W. & Marx, H. (Hrsg.). Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen: Hogrefe, S. 29–48

Neunzig, W. (1972). Mathematik im Vorschulalter. Freiburg.

Peter-Koop, Andrea & Grüßing, Meike (2007). Bedeutung und Erwerb mathematischer Vorläuferfähigkeiten. In: Brokmann-Nooren, C., Gereke, I., Kiper, H. & Renneberg, W. (Hrsg.). Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 153–166.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1975). Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart: Klett-Cotta.

Schuler, S. & Wittmann, G. (2009). Forschung zur frühen mathematische Bildung. Bestandsaufnahme und Konsequenzen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Hildesheim: Franzbecker.

Steinweg, A. (2008). Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In: Hellmich, F. & Köster, H. (Hrsg.). Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 143–159.

Jens HÖNTGES, Frederike GÜNTHER & Frank HELLMICH, Vechta

Diagnose mathematischer Basiskompetenzen im Kindergarten

Die Förderung mathematischer Basiskompetenzen im Kindergarten wird spätestens seit der Veröffentlichung der Ergebnisse aus den international vergleichenden Schulleistungsstudien der letzten Jahre diskutiert. All jene Schülerinnen und Schüler, die längere Zeit eine vorschulische Institution besucht hatten, zeigten in der Regel auch bessere Kompetenzen in den einzelnen Lernfeldern als ihre Klassenkameradinnen und -kameraden (vgl. z.B. Bos, Lankes, Schwippert, Valtin, Voss, Badel & Plaßmeier, 2007, S. 138; Prenzel, Heidemeier, Ramm, Hohensee & Ehmke, 2004, S. 274f.). Vor diesem Hintergrund wurden auf der Basis eines gemeinsamen Beschlusses der Jugend- und der Kultusministerkonferenz (2004) für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen Bildungspläne für den vorschulischen Bereich in den einzelnen Bundesländern veröffentlicht. Nahezu einheitlich wird hier gefordert, ausgehend von den mathematischen Kenntnissen und Vorerfahrungen der Kinder individualisierte Förderkonzepte in den vorschulischen Alltag zu integrieren. Der Diagnose der Eingangsvoraussetzungen der Kinder wird dabei ein besonderer Stellenwert beigemessen, um – orientiert an den Stärken und Schwächen der Kinder einerseits und ihrem Vorwissen und ihren mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten andererseits – die Entwicklung zentraler mathematischer Basiskompetenzen im vorschulischen Bereich zu ermöglichen. In dem vorliegenden Beitrag wird vor diesem Hintergrund ein diagnostisches Inventar („Diagnose mathematischer Basiskompetenzen“; DMB) vorgestellt, das von uns entwickelt und an einer Stichprobe von insgesamt N=355 Kindern des vorschulischen Bereichs in Hinblick auf Möglichkeiten und Grenzen evaluiert worden ist.

1. Mathematiklernen im vorschulischen Bereich

Folgt man aktuell formulierten Bildungsplänen für den Kindergarten, so wird deutlich, dass zu einem Mathematikcurriculum für den vorschulischen Bereich zentrale Elemente gehören sollten, die sich auf Inhalte aus den Lernbereichen Arithmetik, Geometrie, Größen, Muster und Strukturen sowie Daten/ Umgang mit Wahrscheinlichkeit erstrecken (vgl. National Association for the Education of Young Children/National Council of Teachers of Mathematics, 2003). Dabei werden unter mathematischen Basiskompetenzen all jene Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie Wissensausschnitte verstanden, die ein grundlegendes Fundament für das Mathematiklernen darstellen und bereits für Kinder im Vorschulalter in alltäglichen Situationen nutzbar sind. Mit mathematischen Basiskompetenzen werden damit nicht nur Fähigkeiten beschrieben, die das Mathematiklernen im Anfangsunterricht der Grundschule vorbereiten und dem entsprechend als Voraussetzungen für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen zu verstehen sind. Mathematische Basiskompetenzen stellen vielmehr integrale Bestandteile eines Mathematikcurriculums über verschiedene Stufen der Entwicklung von Kindern dar. So werden beispielsweise im Lernbereich Arithmetik verschiedene Basiskompetenzen zu einem grundlegenden Curriculum für den vorschulischen Bereich gezählt, wie zum Beispiel die Entwicklung von Zahlvorstellungen, Zählen, Anbahnung eines Mengenverständnisses sowie Addieren und Subtrahieren. Im Lernbereich Geometrie geht es um das Kennenlernen, Unterscheiden und Vergleichen zwei- und dreidimensionaler Figuren, die Beschreibung und Erklärung räumlicher (Lage-) Beziehungen oder die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Im Lernbereich Größen lernen die Kinder verschiedene Größenbereiche kennen, wie beispielsweise Längen, Volumen, Gewichte, Flächen etc., sie entwickeln Größenvorstellungen und messen Größen durch direkte und indirekte Vergleiche. Im Lernbereich Muster und Strukturen vergleichen, klassifizieren, ordnen und sortieren sie Objekte nach verschiedenen Kriterien (z.B. Form, Farbe oder Anzahl), sie beschreiben Muster, Strukturen und Relationen und erkennen in ersten Schritten Veränderungen bei einfachen mathematischen Sachsituationen. Den Umgang mit Daten aus der Umwelt erlernen sie schlussendlich dadurch, dass sie Fragen aus unterschiedlichen alltäglichen Sachsituationen ableiten und mit Hilfe eigener oder gegebener Datensammlungen beantworten. Erfahrungen mit Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sammeln sie in elementaren Spielsituationen (vgl. hierzu auch Steinweg, 2008).

2. Diagnose mathematischer Basiskompetenzen

Die Diagnose mathematischer Basiskompetenzen von Kindern und die Bestimmung ihrer individuellen Lernausgangslagen gelten als wichtige Voraussetzungen, um individuelle Förderangebote ableiten zu können. Durch den Einsatz von formellen Diagnoseverfahren wird Frühpädagoginnen und -pädagogen ermöglicht, individuelle Basiskompetenzen von Kindern in Abgleich mit denjenigen Gleichaltriger zu betrachten und Entwicklungsniveaus zu bestimmen. Zurzeit sind – mit wenigen Ausnahmen – kaum Instrumente zur Erfassung mathematischer Basiskompetenzen von Kindern des vorschulischen Bereichs vorhanden (vgl. für einen Überblick Hellmich & Jansen, 2008). An dieser Stelle setzt der hier vorliegende Beitrag an. Der DMB-Test enthält Aufgabenstellungen zu den Inhaltsbereichen Arithmetik, Geometrie, Größen, Muster und Strukturen sowie Daten und Umgang mit Wahrscheinlichkeit. Im Lernbereich Arithmetik werden Zählfähigkeiten im

Zahlenraum bis Zwanzig, das Erkennen von Zahlsymbolen und Mengen-Zahlen-Zuordnungen abgefragt. Darüber hinaus sind Aufgabenstellungen zum Kardinal- und Ordinalzahlaspekt enthalten sowie Aufgaben zum Addieren und Subtrahieren (mit und ohne der Möglichkeit des Abzählens). Aufgabenstellungen, die dem Lernbereich Geometrie zuzuordnen sind, thematisieren das Erkennen von Lagebeziehungen, das Identifizieren ebener Figuren und räumlicher Orientierungen. Im Themenfeld Muster und Strukturen ist von den Kindern verlangt, Objekte nach verschiedenen Kriterien zu sortieren und Muster in einer geeigneten Weise fortzusetzen. Im Lernbereich Größen sollen die Kinder zum einen Längen vergleichen und zum anderen Flächeninhalte der Größe nach sortieren. Fähigkeiten im Lernbereich Daten und Umgang mit Wahrscheinlichkeit werden erhoben, indem die Kinder Daten aus Tabellen entnehmen und diese anwenden. Bei einer anderen Aufgabe bestimmen sie elementare Wahrscheinlichkeiten (vgl. im Detail Hellmich & Jansen, 2008). Der DMB-Test sollte in den Institutionen des vorschulischen Bereichs im Rahmen von Einzelinterviews durchgeführt werden; die Dauer der Durchführung erstreckt sich dabei ungefähr auf zwanzig Minuten.

3. Ergebnisse aus einer Evaluationsstudie

An der Evaluationsstudie sind insgesamt N=355 Kinder, davon 172 Mädchen und 183 Jungen, im Alter von drei bis sieben Jahren aus 23 Kindergärten in Nordhein-Westfalen beteiligt gewesen. Das Alter der Kinder variiert zwischen drei und sieben Jahren. Die Evaluation des Testinstruments verdeutlicht, dass von einer großen Variabilität mathematischer Basiskompetenzen bei den an der Untersuchung beteiligten Kindern auszugehen ist (M=0,64; SD=0,18; MIN=0,10; MAX=1,00). Die empirischen Ergebnisse geben dabei Aufschluss darüber, dass eine Normalverteilung bei dem Test nicht vorliegt (Kolmogorov-Smirnov-Z=0,07; df=355; $\underline{p}\leq.001$). Allerdings zeigen weiterführende Analysen, dass die Testaufgaben allesamt auf einem Faktor laden; insgesamt weist das Testinstrument dabei eine gute Reliabilität auf (α=.80). Signifikante Unterschiede werden zwischen vier-, fünf- und sechsjährigen Kindern in Hinblick auf ihre mathematischen Performanzen deutlich (Kinder im Alter von vier Jahren: M=0,48; SD=0,16; Kinder im Alter von fünf Jahren: M=0,67; SD=0,14; Kinder im Alter von sechs Jahren: M=0,75; SD=0,13; χ^2 (2, $\underline{N}$=347)=103,58; $\underline{p}\leq.001$). Im Detail wird bei den Analysen deutlich, dass der Test für Kinder im Alter von vier Jahren gut geeignet ist, um mathematische Basiskompetenzen erheben zu können. Dies verdeutlicht ein Test auf Normalverteilung bei dieser Teilstichprobe (Kolmogorov-Smirnov-Z=0,07; df=87; $\underline{p}$=.20). Für die Kinder im Alter von fünf Jahren (Kolmogorov-Smirnov-Z=0,08; df=167; $\underline{p}\leq.05$) und diejenigen im Alter von sechs Jahren kann dies hingegen nicht bestätigt werden (Kolmogorov-Smirnov-Z=0,11; df=93; $p \leq .01$).

4. Zusammenfassung und Diskussion

Vor dem Hintergrund der Etablierung geeigneter Fördermaßnahmen zur Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen im vorschulischen Bereich ist der Einsatz diagnostischer Verfahren eine notwendige Voraussetzung. Das in diesem Beitrag vorgestellte diagnostische Inventar ist – folgt man den empirisch gewonnenen Ergebnissen – insbesondere für Kinder im Alter von vier Jahren geeignet, um mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten zu erfassen. Die Befunde verdeutlichen dabei implizit, von welchen mathematischen Basiskompetenzen bei Kindern auf verschiedenen Stufen ihrer Entwicklung ausgegangen werden kann. Auf diese Weise bietet das Inventar die Möglichkeit, nicht regelhaft zu erwartende Testergebnisse, zum Beispiel bei leistungsschwächeren Kindern, aufzudecken.

Literatur

Beschluss der Jugendministerkonferenz vom 13./14.05.2004 & Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 03./04.06.2004 (2004). *Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen*. Verfügbar über: http://www.kultusministerkonferenz.de (Datum des Zugriffs: 03.02.2009).

Bos, W., Valtin, R., Hornberg, S., Buddeberg, I., Goy, M. & Voss, A. (2007). Internationaler Vergleich 2006: Lesekompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In W. Bos, S. Hornberg, K.-H. Arnold, G. Faust, L. Fried, E.-M. Lankes, K. Schwippert & R. Valtin (Hrsg.), *IGLU 2006. Lesekompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 109-160). Münster u.a.: Waxmann.

Hellmich, F. & Jansen, S. (2008). Diagnose mathematischer Vorläuferfähigkeiten im vorschulischen Bereich. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.), *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 59-81). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

National Association for the Education of Young Children & National Council of Teachers of Mathematics (2002). *Position statement. Early childhood mathematics: promoting good beginnings*. Verfügbar unter: www.neayc.org/resources/position_statements/psmath.htm (Datum des Zugriffs: 03.02.2009).

Prenzel, M., Heidemeier, H., Ramm, G., Hohensee, F. & Ehmke, T. (2004). Soziale Herkunft und mathematische Kompetenz. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 273-282). Münster u.a.: Waxmann.

Steinweg, A. (2008). Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.), *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 143-159). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Thomas LÜTHJE, Lüneburg

Geschlechtsspezifische Unterschiede im Vorschulalter bei der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben

In den letzten Jahrzehnten wurden zahlreiche Untersuchungen zum räumlichen Vorstellungsvermögen veröffentlicht, die in der Mehrheit mehr oder weniger stark ausgeprägte Leistungsvorteile zugunsten männlicher Probanden zeigen. Allerdings treten diese Unterschiede vor dem Eintreten der Adoleszenz kaum in Erscheinung (vgl. Bosco, Longoni & Vecchi 2004). Neuere Untersuchungen weisen zudem darauf hin, dass sich geschlechtsspezifische Unterschiede in den meisten Bereichen des räumlichen Vorstellungsvermögens beträchtlich reduziert haben, zumindest was die Leistung betrifft. Bezogen auf die verwendeten Lösungsstrategien bestehen aber nach wie vor Unterschiede (vgl. Glück, Kaufmann, Dünser & Steinbügl 2005). In einer Interviewstudie mit 65 Kindern im Vorschulalter sollte u.a. diesen Aussagen nachgegangen werden.

Stichprobe

An der Untersuchung im Juni 2007 waren 25 Mädchen und 40 Jungen im Alter von fünf bis sieben Jahren aus vier niedersächsischen Kindergärten beteiligt. Unter den vier Kindergärten befanden sich zwei städtische, von denen einer als gut bürgerlich bezeichnet werden kann und einer in einem eher sozial schwachen Viertel mit relativ hohem Immigrantenanteil liegt. Ausgewählt wurden zudem ein paritätischer Kindergarten, dessen Konzept die sportliche Betätigung der Kinder betont, sowie ein sozial-integrativer Kindergarten mit besonderem Förderkonzept für potentiell begabte Kinder.

Aufgaben

In Anlehnung an ein integratives Strukturmodell von Maier (1999) wurden insgesamt zehn Aufgaben zu verschiedenen Teilkomponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens entwickelt (vgl. Lüthje 2008). Im Folgenden sollen exemplarisch drei Aufgaben vorgestellt werden, bei denen vielfältige Lösungsstrategien erkennbar waren. Jede der Aufgaben bestand aus fünf Subaufgaben.

Aufgabe 1: Bei dieser Aufgabe wurde den Kindern ein Quadrat vorgelegt. Dieses wurde in Anlehnung an eine Untersuchung von Höglinger und Senftleben (1997) als Keks bezeichnet. Anschließend wurden den Kindern nacheinander fünf verschiedene Kekse vorgelegt, bei denen jeweils ein Stück abgebrochen war. Aus einer Auswahl von vier Bruchstücken sollten die Kinder dann dasjenige auswählen, das abgebrochen war (Abb. 1).

Bei dieser Aufgabe soll eine vorgegeben Figur zu einer größeren vervollständigt werden. Damit handelt es sich um eine Aufgabe des Typs *Paper Formboard Task*. Nach Maier (1999) werden Aufgaben dieses Typs traditionell verwendet um den Faktor *Visualization* zu operationalisieren.

Aufgabe 3: Bei dieser Aufgabe haben die Kinder zu entscheiden, ob zwei Würfelkonfigurationen durch *Drehen* oder *Kippen* aufeinander abzubilden sind (Abb. 2). Damit wird im Gegensatz zu Aufgabe 1 bei dieser Aufgabe eine spezifische Lösungsstrategie impliziert.

Diese Aufgabe ist stark an die Aufgaben von Shepard und Metzler (1971) zum Faktor *Mental Rotation* angelehnt.

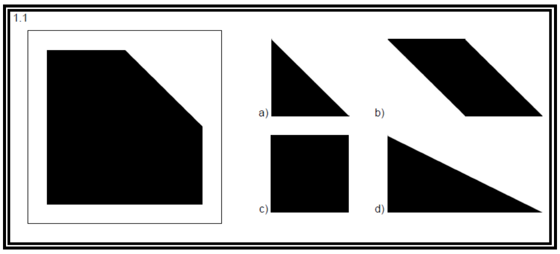


Abb. 1: Aufgabe 1.1

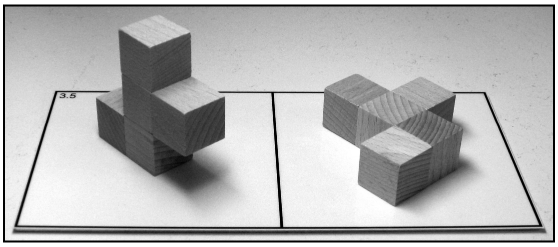


Abb. 2: Aufgabe 3.5

Aufgabe 6: Bei dieser Aufgabe wurden den Kindern zunächst je eine Abbildung eines linken und eines rechten Fußes vorgelegt. Anschließend wurde den Kindern ein weiteres Bild mit einem verdrehten Fuß vorgelegt. Die Kinder haben dann zu entscheiden, welchem der beiden Füßen der verdrehte Fuß entspricht. Die Begriffe *links* und *rechts* wurden auf diese Weise umgangen.

Diese Aufgabe ist ähnlich der Aufgabe *Figures* von Thurstone (1938), die von Maier (1999) dem Faktor *Spatial Relations* zugeordnet wird.

Auswertung

Während der Einzelinterviews wurde ein Protokollbogen geführt, der die schnelle quantitative Auswertung der Lösungsraten ermöglichte.

Für die Auswertung der Lösungsstrategien wurde ein Ebenenmodell verwendet, das im Wesentlichen auf den Kategorien von Barrat (1953) und Schultz (1991) basiert. Dabei werden zunächst analytische und holistische Strategien unterschieden. Auf einer zweiten Ebene werden die holistischen Strategien weiter ausdifferenziert. In Anlehnung an Schultz werden zwei Vorgehensweisen unterschieden, die mit MO (*move object*) und MS (*move self*) bezeichnet werden. Bei der erst genannten Strategie können weiter konkrete (MO:K) und abstrakte Objekte (MO:A) mental bewegt werden. Nach Meinung des Autors dieses Aufsatzes bedarf es bei der erstgenannten Vorgehensweise zusätzlich eines analytischen Prüfschritts, nämlich der

Identifikation des konkreten Objekts. Deshalb stellt diese, bezogen auf die erste Ebene, eine Mischform dar. In Abhängigkeit zu den Distraktoren können alle Lösungsstrategien zudem verifizierend (v) oder falsifizierend (f) sein. Damit ergibt sich das folgende Modell (Abb. 3).

<table>
<tr><td>Ebene 1</td><td colspan="3">Analytische Strategien
(statisch)</td><td colspan="4">Holistische Strategien
(dynamisch)</td></tr>
<tr><td>Ebene 2</td><td colspan="2" rowspan="2">KF
(key feature)</td><td colspan="3">MO
(move object)</td><td colspan="2" rowspan="2">MS
(move self)</td></tr>
<tr><td>Ebene 3</td><td>MO:K
(konkretes Objekt)</td><td colspan="2">MO:A
(abstraktes Objekt)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ebene 4</td><td rowspan="2">KF (v)
(verifiz.)</td><td rowspan="2">KF (f)
(falsifiz.)</td><td>MO:K (v)
(verifiz.)</td><td rowspan="2">MO:A (v)
(verifiz.)</td><td rowspan="2">MO:A (f)
(falsifiz.)</td><td rowspan="2">MS (v)
(verifiz.)</td><td rowspan="2">MS (f)
(falsifiz.)</td></tr>
<tr><td>MO:K (f)
(falsifiz.)</td></tr>
</table>

Abb. 3: Ebenenmodell zur Kategorisierung von Lösungsstrategien

Nicht erkennbare Strategien werden im Folgenden mit (X) gekennzeichnet. Vereinzelt traten auch Ausweichstrategien (AS) auf, die das räumliche Vorstellungsvermögen in keinster Weise beanspruchten. So glaubten einige Kinder in der Abfolge der Antworten ein Muster zu erkennen (richtig, falsch, richtig, …) oder sie bildeten Analogien.

Ergebnisse

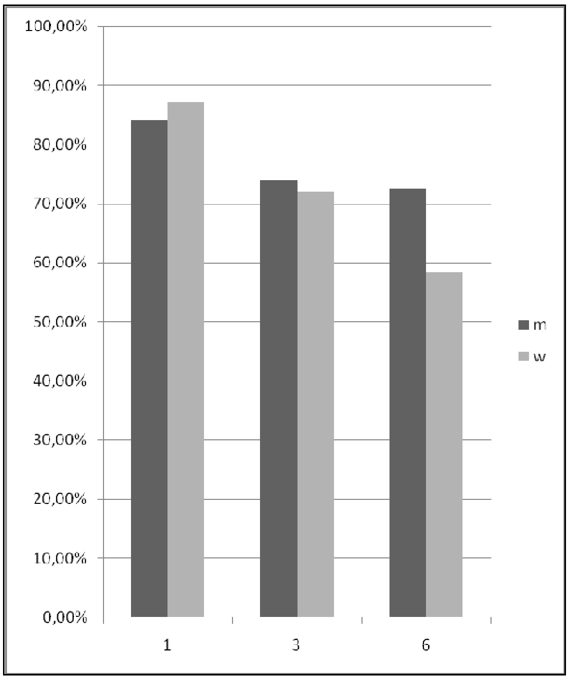


Abb. 4: Geschlechtsspezifische Lösungsraten bei Aufgabe 1, 3 und 6

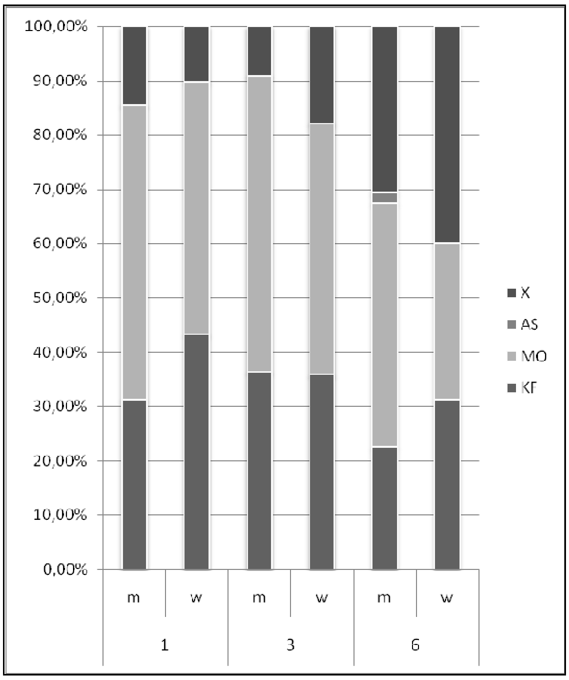


Abb. 5: Geschlechtsspezifische Präferenzen bei der Wahl der Lösungsstrategie

Bezogen auf die Lösungsraten, zeigen sich nur bei Aufgabe 6 signifikante Leistungsunterschiede. Bei Aufgabe 1 und 3 liegen Mädchen und Jungen sehr dicht beisammen. Unterschiede zeigen sich aber bei den erkennbaren

Lösungsstrategien. Während die Jungen bei allen Aufgaben dynamische Vorgehensweisen (MO) präferieren, zeigen Mädchen bei Aufgabe 1 und 6 vergleichsweise oft analytische Lösungsstrategien (KF), obwohl Mädchen bei der Verwendung dynamischer Strategien nicht weniger effektiv sind.

Auch zeigt sich, dass die Jungen flexibler im Umgang mit verschiedenen Lösungsstrategien sind. Zumindest kombinieren sie häufiger analytische und dynamische Vorgehensweisen.

Bei Aufgabe 3, deren Aufgabenstellung bereits ein dynamisches Vorgehen nahelegt, verwenden sowohl Mädchen, als auch Jungen, erstaunlich oft analytische Strategien. Diese werden insbesondere dann verbalisiert, wenn die Objekte nicht zur Deckung zu bringen sind. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Kinder auch bei diesen Aufgaben zunächst dynamisch vorgehen, sie aber nach einer zusätzlichen Begründung suchen, wenn die Objekte nicht aufeinander abzubilden sind.

Auffällig ist zudem, dass Jungen bei allen Aufgaben häufiger konkrete Gegenstände (etwa eine Ente bei Aufgabe 3.5) mit abstrakten Objekten assoziieren. Dies könnte wiederum die Präferenz der Jungen für holistische Strategien erklären.

Die untersuchte Stichprobe ist mit 65 Kindern verhältnismäßig klein und die Ergebnisse sind damit keineswegs repräsentativ. Es zeigen sich aber, insbesondere bei den Lösungsstrategien, bereits im Vorschulalter deutliche Tendenzen, die es im Rahmen weiterer Untersuchungen zu überprüfen gilt.

Literatur

Barrat, E. S. (1953): *An analysis of verbal reports of solving spatial problems as an aid in defining spatial factors.* In: The Journal of Psychology 36, S. 17-25.

Bosco, A., Longoni, A. M., & Vecchi, T. (2004). *Gender effects in spatial orientation.* In: Applied Cognitive Psychology 18, S. 519-532.

Glück, J.; Kaufmann, H.; Dünser, A.; Steinbügl, K. (2005): *Geometrie und Raumvorstellung – Psychologische Perspektiven.* In: IBDG 1, S. 4-11.

Höglinger, S.; Senftleben, H.-G. (1997): *Schulanfänger lösen geometrische Aufgaben.* In: Grundschulunterricht 5, S. 36-39.

Lüthje, T. (2008): Räumliche Fähigkeiten von Kindern im Vorschulalter – Untersuchungsdesign und erste Ergebnisse. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Münster: Martin Stein Verlag, S. 483-486.

Maier, P. H. (1999): *Räumliches Vorstellungsvermögen – Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen.* Donauwörth: Auer Verlag GmbH.

Schultz, K. (1991): *The contribution of solution strategy to spatial performance.* In: Canadian Journal of Psychology 45, S. 474-491.

Shepard, R.; Metzler, J. (1971): *Mental rotation of three-dimensional objects.* In: Science 171, S. 701-701.

Thurstone, L. L. (1938): *Primary mental abilities.* Chicago: University Press.

Oliver THIEL, Berlin

Prozessqualität mathematischer Bildung im Kindergarten

Kinder sind verschieden. So zeigen sich schon zum Schulbeginn erhebliche Unterschiede in ihren mathematischen Kompetenzen (z.B. Schmidt 1982, Rinkens/Hönisch 1997, Grassmann u.a. 2002). Wittmann (2001, 15) schließt daraus, dass schulische Lernschwierigkeiten im Rechnen auch auf eine unzureichende Förderung im Vorschulalter zurückzuführen sind. Aber es gibt unterschiedliche Ansätze, wie die Arbeit an mathematischen Inhalten im Kindergarten aussehen sollte. Zur Beschreibung der Qualität der Arbeit im Kindergarten gibt es ein allgemeines Modell aus der Qualitätsforschung (Roßbach 1993). Dieses Modell ist auch heute noch aktuell (vgl. Tietze/Roßbach/Grenner 2005, 26) und unterscheidet drei Qualitätsbereiche: Strukturqualität, Orientierungsqualität und Prozessqualität. Zur *Strukturqualität* gehören die formale Qualifikation der Erzieherinnen, die Größe der Einrichtung und Gruppen, die Raumgröße und Ausstattung, die Öffnungszeiten und die Altersmischung in den Gruppen. Zur *Orientierungsqualität* gehören die Haltungen der Erzieherinnen. Mit *Prozessqualität* sind die Interaktionen der Kinder mit Gleichaltrigen und Erzieherinnen gemeint, die Qualität der Erfahrungen, die das Kind macht, und der pädagogischen Stimulationen, die es erhält.

1. Untersuchungsdesign

Das Forschungsprojekt *MaBiK* (Mathematische Bildung im Kindergarten, vgl. Thiel 2008) fragt: Welche strukturellen, einstellungsbezogenen und prozessualen Rahmenbedingungen der mathematischen Bildung im Kindergarten wirken sich besonders positiv auf die Entwicklung des mathematischen Denkens der Kinder aus? Dazu wurden Kinder aus Berlin, die einen Kindergarten im letzten Jahr vor ihrer Einschulung besuchen, im Juli und November 2007 und im Mai 2008 zu ihren mathematischen Kompetenzen befragt. 110 Erzieherinnen füllten Fragebögen aus (Thiel 2009). Zusätzlich fanden im Frühjahr 2008 Beobachtungen der Prozessqualität statt. Dabei wurde die ***Do****rtmunder* ***R****ating-Skala zur* ***E****rfassung* ***s****prachförderrelevanter* ***I****nteraktionen* ***(Do-RESI)*** eingesetzt (Fried/Briedrigkeit 2008). Im Rahmen des *TransKiGs*-Projektes wurde diese Skala um den mathematischen und naturwissenschaftlichen Bereich erweitert *(Do-RESI-E)*.

Do-RESI-E besteht aus 34 Beobachtungsitems, die sich auf 6 Dimensionen verteilen: (1) *Organisation*, (2) *Beziehung*, (3) *adaptive Unterstützung*, (4) *sprachlich-kognitive Herausforderung*, (5) *mathematische Kompetenz* und (6) *naturwissenschaftliche Kompetenz*. In *MaBiK* wurde die letzte Dimension nicht berücksichtigt. Die Dimension *mathematische Kompetenz* umfasst 6 Items: „E1. Vorkehrungen für Kinder mit besonderem Interesse an/besonderen Schwierigkeiten in Mathematik", „E2. Spezifisch mathematische Methoden/Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen", „E3. Mathematische Themen erschließen", „E4. Förderung mathematischer Kompetenzbereiche: Raum und Form", „E5. Förderung mathematischer Kompetenzbereiche: Zahlen und Operationen" sowie „E6. Förderung mathematischer Kompetenzbereiche: Größen und Messen". Zu jedem Item gibt es verschiedene Ausprägungen. Sie sind auf einer siebenstufigen, wertenden Skala angeordnet. So wird für das Item E4 (Raum und Form) als *unzureichend* angesehen, wenn in der Einrichtung keine Materialien in geometrischen Formen (z.B. Kugel, Würfel, Pyramide) vorhanden sind. Als *exzellent* gilt u.a., wenn die Erzieherin Angebote macht, die die räumliche Vorstellung der Kinder besonders fördern (z.B. das kreative Schaffen von geometrischen Formen mit Knetmasse oder Ton).

2. Deskriptive Ergebnisse

Von den 54 Erzieherinnen der Untersuchungsstichprobe, die zur Struktur- und zur Orientierungsqualität befragt wurden (Thiel 2008), konnten 23 zur Prozessqualität beobachtet werden. Betrachtet man die *Do-RESI-E*-Dimensionen, so fällt auf, dass diese sehr hoch miteinander korrelieren, was dagegen spricht, dass es sich um unterschiedliche Dimensionen handelt. Die höchsten Werte (zwischen gut (5) und minimal (3)) erzielen die Erzieherinnen in den Dimensionen *Beziehung* (4,64) und *Organisation* (4,41). Bedenklich ist, dass die Erzieherinnen in der *mathematischen Kompetenz* den geringsten Wert (3,19) erreichen, der hoch signifikant unter den Mittelwerten der anderen Dimensionen liegt, obwohl die Erzieherinnen wussten, dass hier der Fokus der Beobachtung lag. Glaubt man dem Wert (und der *Do-RESI-E*-Wertung), so ist die Prozessqualität mathematischer Bildung in den untersuchten Kindertagesstätten nur „minimal".

In den Kindertagesstätten wurden zum Teil sehr unterschiedliche Herangehensweisen an mathematische Bildung beobachtet. Diese lassen sich in die von Schuler (2008, 6) vorgeschlagenen Kategorien einordnen, werden aber von *Do-RESI-E* nur bedingt erfasst.

- *Lehrgang* versus *offenes Angebot*: Es gab eine Kindertagesstätte, in der das Zahlenland von Preiß (2004) durchgeführt wurde. Hier war eine Beobachtung nicht möglich, da das Programm nicht in den Beobachtungszeitraum fiel und deshalb eine Beobachtung abgelehnt wurde. In vielen Kindertagesstätten gab es Vorschulprogramme, in denen die Kinder z.T. Arbeitsblätter bearbeiten mussten. In anderen Einrichtungen wurde die mathematische Förderung in den Alltag der Kinder integriert oder es wurden Spiele mit mathematischen Inhalten angeboten. Diese Unterschiede werden von *Do-RESI-E* leider nicht erfasst.

- *Förderung von Risikokindern* versus *breite Förderung aller Kinder*: Dies wird durch das *Do-RESI-E*-Item E1 erfasst, bei dem die Erzieherinnen einen Mittelwert von 3,39 erreichten. Bei diesem Item war die Streuung am größten. Sie reichte von „unzureichend" (1) bis „exzellent" (7). In vier Einrichtungen wurde das Kalkulie-Trainingsprogramm (Gerlach/Fritz/Ricken/Schmidt 2007) eingesetzt. Wie dieses Programm umgesetzt wurde, konnte jedoch nicht beobachtet werden.
- Förderung *speziell des Zahlbegriffs* versus breite Förderung *verschiedener Inhaltsbereiche*: Dies kann über einen Vergleich der Items E4, E5 und E6 untersucht werden. Alle mathematischen Inhaltsbereiche werden „minimal" gefördert, *Zahlen und Operationen* (Mittelwert 3,30) jedoch signifikant stärker als *Größen und Messen* (2,52). *Raum und Form* (3,04) liegt dazwischen.

3. Zusammenhänge mit den Vorstellungen zur Mathematik

Zum Teil lassen sich Zusammenhänge zwischen der Orientierungsqualität (Thiel 2008, 2009) und der mit *Do-RESI-E* beobachteten Prozessqualität nachweisen: Je stärker Erzieherinnen die Bedeutung von Regeln und Schemata sowie Klarheit und Exaktheit in der Mathematik betonen, desto geringere Werte erzielen sie in allen *Do-RESI-E*-Dimensionen mit Ausnahme der *Beziehung*. Die Korrelation mit der *mathematischen Kompetenz* ist mit -0,79 ($p < 0{,}001$) besonders groß. Je mehr Wert Erzieherinnen auf mathematische Lernprozesse legen, desto besser helfen sie den Kindern mathematische Themen zu erschließen.

Erzieherinnen, für die es in der Mathematik vor allem um Zahlen geht, verwenden nur grammatikalisch sehr einfache Sätze. Erzieherinnen, für die auch Länge und Masse mathematische Themen sind, verbinden Themen miteinander, helfen Kindern mathematische Themen zu erschließen und erklären Zusammenhänge. Je mehr Erzieherinnen der Meinung sind, dass Zeit ein mathematisches Thema ist, desto mehr achten Sie auf ihre Planung und auf Routinen im Tagesablauf. Je mehr Geld bzw. Daten und Zufall als mathematische Themen erkannt werden, desto besser werden den Kindern Lernmöglichkeiten aufgezeigt.

4. Fazit

Um die Prozessqualität mathematischer Bildung im Kindergarten steht es nicht gut. Es gibt Anhaltspunkte dafür, dass dies mit den Einstellungen der

Erzieherinnen zur Mathematik zusammen hängt. Für genauere Analysen reicht das von Frühpädagogen entwickelte Instrument *Do-RESI-E* nicht aus. Es sollte deshalb ein Beobachtungsinstrument entwickelt werden, das mathematikdidaktisch relevante Dimensionen in den Fokus nimmt. Diese Dimensionen können sein: Erfolgt Mathematiklernen situativ oder initiiert? Durch Lehren oder miteinander Lernen? Als Enkulturation oder Akkulturation? Wie steht es um die Balance zwischen Konstruktion und Instruktion? (Vgl. Streit/Royar sowie Tiedemann in diesem Band)

Literatur

Fried, L & Briedrigkeit, E. (2008). *Sprachförderkompetenz.* Berlin: Cornelsen.

Gerlach, M., Fritz, A., Ricken, G. & Schmidt, S. (2007). *Kalkulie Trainingsprogramm Baustein 1.* Berlin: Cornelsen.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., Raudies M. & Thiel, O. (2002). *Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern. Teil 1: Kinderleistungen – Lehrererwartungen.* Potsdamer Studien zu Grundschulforschung. Heft 30. Universität Potsdam.

Preiß, G. (2004). *Leitfaden Zahlenland 1.* Kirchzarten: Zahlenland Prof. Preiß GmbH.

Rinkens, H.-D., Hönisch, K. (1997). *Arithmetische Vorkenntnisse von Schulanfängern.* Hannover: Schroedel.

Roßbach, H.G. (1993). *Analyse von Meßinstrumenten zur Erfassung von Qualitätsmerkmalen frühkindlicher Betreuungs- und Erziehungsumwelten.* Institut für sozialwissenschaftliche Forschung, Münster.

Schmidt, R. (1982). Zählfähigkeit von Schulanfängern – Ergebnisse einer Untersuchung. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 10*, 371-376.

Schuler, St. (2008). Was können Mathematikmaterialien im Kindergarten leisten? – Kriterien für eine gezielte Bewertung. In E. Vasarhélyi (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 13. bis 18. März in Budapest.* Online-Zusatzmaterial verfügbar unter: http://www.-mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU2008/BzMU2008_SCHULER_Stephanie_CD.pdf (Zugriff: 12.03.2009).

Thiel, O. (2008). Was denken Erzieherinnen über Mathematik? In E. Vasarhélyi (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 13. bis 18. März in Budapest* (S. 757-760). Münster: WTM.

Thiel, O. (2009). Teachers' attitudes towards mathematics in early childhood education. *European Early Childhood Education Research Journal* (accepted 6th Feb. 2009).

Tietze, W., Roßbach, H.-G. & Grenner, K. (2005). Kinder von 4 bis 8 Jahren. Zur Qualität der Erziehung und Bildung in Kindergarten, Grundschule und Familie. Weinheim: Beltz.

Wittmann, E.-Ch. (2001). *Ein alternativer Ansatz zur Förderung „rechenschwacher" Kinder.* Online-Publikation verfügbar unter: http://www.mathematik.uni-dortmund.-de/didaktik/mathe2000/pdf/foerderansatz.pdf (Zugriff: 12.03.2009).

Stephanie SCHULER, Schwäbisch Gmünd

Was können Spiele zur frühen mathematischen Bildung beitragen? Chancen, Bedingungen und Grenzen

In diesem Beitrag wird aufgezeigt, inwiefern Gesellschaftsspiele und didaktische Abwandlungen zur frühen mathematischen Bildung beitragen können.

1 Forschungsdesign

Im Forschungsprojekt werden Materialien in einem ersten Schritt im Rahmen einer theoretischen Analyse auf ihre mathematischen Möglichkeiten untersucht und Kriterien zur Auswahl und Bewertung aufgestellt (vgl. Schuler 2008). Neben fachbezogenen Kriterien wie z.B. Teilfähigkeiten des Zahlbegriffserwerbs (vgl. z.B. Resnick 1989) ist eine Passung auf konzeptueller Ebene zu prüfen. In einem zweiten Schritt werden anhand von Videodaten die empirischen Möglichkeiten theoretisch geeigneter Spiele untersucht. Dabei rücken bei der Datenauswertung zunächst mathematische Aktivitäten ins Blickfeld, die im Zusammenhang mit dem Zahlbegriffserwerb stehen. Um Bedingungen für diese mathematischen Aktivitäten zu formulieren, bedarf es einer genauen Beschreibung der Spielsituation und des Kontexts sowie einer Analyse der Interaktion und der Artikulationsformen.

Zahlbegriffserwerb im Kindergarten

1. Theoretische Analyse von Materialien
- Geeignete Materialien?
- Kriterien zur Auswahl und Bewertung?
- Theoretisches Potential?

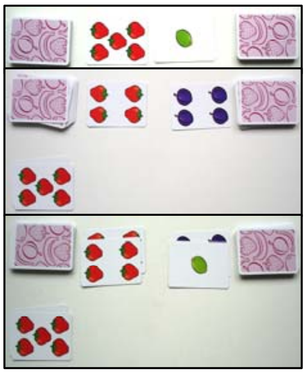
2. Empirische Videostudie
- Empirisches Potential?
- Bedingungen für mathematische Aktivitäten?
- Weitere Kriterien?

Theorie über die Bedingungen eines Spieleinsatzes als Beitrag zur frühen mathematischen Bildung

Der Methodologie der Grounded Theory (vgl. Krotz 2005, Mey & Mruck 2007, Strauss & Corbin 1996) folgend sind Phase 1 und 2 nicht als ein einmaliges Nacheinander zu verstehen, sondern als eine Spirale angelegt, die im Laufe des Forschungsprozesses mehrmals durchlaufen wird. So kommt es zu einer kontinuierlichen Weiterentwicklung der Forschungsfragen und der Kriterien. Ziel der Datenauswertung ist es, mittels der methodischen Instrumente theoretical sampling, theoretisches Codieren und Vergleichen eine Theorie mittlerer Reichweite über die Bedingungen eines Spieleinsatzes als Beitrag zur frühen mathematischen Bildung zu formulieren.

2 Spielidee „Stechen“ – theoretisches und empirisches Potenzial

Anhand des Spiels „Stechen“ wird im Folgenden der Forschungsprozess exemplarisch nachgezeichnet.

Theoretisches Potenzial	Stechen	Spielidee
Mengenvergleich (mehr/ weniger, gleichviel)	++	Die größere Zahl gewinnt. 
Aufsagen der Zahlwortreihe	+	
Abzählen von Objekten (einzeln, weiter, Schritte)	+	
Vorgänger/Nachfolger		
Aufbau Würfelbilder/ Wiedererkennen Würfelbilder	+	
Aufbau anderer Punktbilder/Anordnungen		
Teil-Ganzes-Beziehungen	+	
Zuordnung Zahl-Menge		
Erstes Rechnen		

+: möglich, kann stattfinden ++: zutreffend, wird in hohem Maße unterstützt

Zentrale Anforderung und damit mathematische Möglichkeit des Spiels ist der Mengenvergleich. Dieser kann entweder perzeptiv, d.h. durch Überblicken (mehr/weniger, gleichviel), oder konzeptuell, d.h. unter Rückgriff auf Wissen, dass 5 mehr als 1 oder 4 mehr als 3 ist, vorgenommen werden. Die genaue Anzahlbestimmung ist nur für letzteres notwendig und kann hier wiederum zählend, über das Wiedererkennen von Würfelbildern oder die Simultan- und Quasisimultanerfassung erfolgen. Des Weiteren können die abgebildeten Mengen als Zusammensetzung aus Teilmengen wahrgenommen bzw. betrachtet werden.

Ein stark vereinfachter Transkriptausschnitt illustriert eine typische Spielsequenz: Im „normalen“ Spielverlauf werden Mengen erfasst und verglichen. Artikuliert und expliziert werden diese mathematischen Aktivitäten primär durch Handlungen, teilweise auch verbal in Form von Kommentaren.

Sprecher	Transkript	Paraphrase (Handlung, Gestik, Mimik)	Storyboard
Kim	Eins.. vier.	Sera deckt eine Eins auf. Kim deckt eine Vier auf. Kim nimmt sich die beiden Karten.	 Sera  Kim

Damit sind die Möglichkeiten des Spiels jedoch nicht erschöpft. In manchen Sequenzen kommt es zu einer quantitativen und qualitativen Zunahme verbaler Kommunikation. Spielhandlungen werden durch Gestik und verbale Kommentare in einem größeren Maß expliziert. Zudem treten neben fachliche auch prozessbezogene mathematische Aktivitäten wie Begründen, Vermuten und Vorhersagen Treffen.

Sprecher	Transkript	Paraphrase (Handlung, Gestik, Mimik)	Storyboard
Sera	Hop.	Kim deckt eine Vier auf. Sera deckt eine Fünf auf; Celine schaut beide Karten an, schiebt Seras Karte zu Kim.	 Kim  Sera
Kim	Äähh.	Kim schiebt die zwei Karten mit beiden Händen zurück zu Sera.	
Ephraim	Die hatte vier und die hat fünf.	Ephraim zeigt mit der rechten Hand zuerst auf Kim, dann in Celines Richtung.	

Ausgelöst werden solche Sequenzen z.B. durch Fehler, die für den Spielverlauf relevant sind (s. oben), aber auch durch Probleme im Spielverlauf (Karten gleichmäßig verteilen, Gleichmächtigkeit, Gewinner ermitteln) oder durch Fragen, Impulse und Kommentare der Erzieherin.

3 Chancen, Bedingungen und Grenzen von Spielen

Das mathematische Potenzial eines Spiels bewegt sich in einem Dreieck zwischen den theoretischen Möglichkeiten des Spiels, den Voraussetzungen auf Seiten der Erzieherin und den Spielern bzw. Zuschauern. Folglich ist das mathematische Potenzial keine feste Größe, sondern eingebunden in einen Kontext. Diese noch weiter zu explizierenden Bedingungen zeigen gleichzeitig die Grenzen auf.

Spiel — **Mathematisches Potenzial im Kontext** — Erzieherin

Spieler, Zuschauer

Die Möglichkeiten eines *Spiels* sind einerseits durch die Spielidee und andererseits durch das Spielmaterial gekennzeichnet. Die Spielidee verweist auf typische fachliche Aktivitäten, in unserem Beispiel Anzahlbestimmung und Mengenvergleich. Variationen der Spielidee (z.B. die mittlere Zahl gewinnt) und des Spielmaterials (z.B. Verwendung von Spielkarten mit anderen Anordnungen) ermöglichen andere mathematische Aktivitäten. Auf Seiten der *Erzieherin* unterscheiden wir aufgrund der Datenauswertung drei Voraussetzungen: mathematikdidaktische Kompetenz, Gesprächskompetenz und individuelle Präsenz (für eine genauere Ausführung dieses Punktes vgl. Schuler & Wittmann 2009). Die Frage „Wer hat mehr?“ zielt beispielsweise eher auf fachliche Kompetenzen, wohingegen „Woher weißt du, dass du mehr hast?“ auch prozessbezogene Kompetenzen mit einbezieht. *Spieler und Zuschauer* als Bedingung verweisen darauf, dass es beim Spielen nicht nur um mathematische Aktivitäten, sondern auch um ein soziales Geschehen mit bestimmten Merkmalen geht. Spiele erfordern Spielpartnerschaften, die im Spiel, in unserem Beispiel in einer Konkurrenzsituation mit hohem Zufallsanteil, tragfähig sind. Diese Bedingung wird relativiert durch den sozialen Aufforderungscharakter von Spielen, der einen reduzierten Einbezug von Zuschauern in das Spielgeschehen ermöglicht.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Analyse der theoretischen Möglichkeiten eines Spiels ein sinnvoller und notwendiger Ausgangspunkt ist. Durch die Interpretation der Daten ergeben sich jedoch noch weitere Perspektiven auf die mathematischen Möglichkeiten. So kann das Unterbrechen der Spielroutine zu einer Erweiterung der fachlichen Möglichkeiten und des verbalen Ausdrucks führen und prozessbezogene Möglichkeiten erst in den Blick rücken.

Literatur

Krotz, F. (2005). Neue Theorien entwickeln: Ene Einführung in die Grounded Theory, die Heuristische Sozialforschung und die Ethnographie anhand von Beispielen aus der Kommunikationsforschung. Köln: von Halem.

Mey, G. & Mruck, K. (2007) (Hrsg.). Grounded Theory Reader. Köln: Zentrum für Historische Sozialforschung.

Resnick, L.B. (1989). Developing Mathematical Knowledge, in American Psychologist, 2, S. 162–168.

Schuler, S. (2008). Was können Mathematikmaterialien im Kindergarten leisten? – Kriterien für eine gezielte Bewertung, in Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker (CD-ROM).

Schuler, S. & Wittmann, G. (2009). How can games contribute to early mathematics education? A video-based study. CERME 6, Lyon 2009.

Strauss, A. & Corbin, J. (1996). Grounded Theory. Grundlagen Qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Beltz.

Thomas ROYAR und Christine STREIT, Freiburg

Mathematische Momente im Kindergarten schaffen und (er)fassen

Wie kommt die Mathematik in den Kindergarten? Es besteht mittlerweile zwar durchaus Konsens darüber, dass auch die mathematische Bildung ihren Platz im Kindergarten haben soll – über Inhalte, Ziele und Methoden existieren dagegen noch viele offene Fragen.

Im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes „MATHElino“ wird untersucht, wie Erzieher/innen mathematische Inhalte in den Kindergartenalltag integrieren, wenn sie dabei theoretisch und praktisch begleitet werden.

1. Theoretische Basis

Das „Mathematikbild“, das dem Projekt zu Grunde liegt, ist das der Mathematik als der Wissenschaft der Muster und Strukturen (Wittmann). Die Rolle der Kinder ist diejenige der Kommunikationspartner und aktiv Lernenden (Lengnink 2002). Lernanlässe ergeben sich im Kindergarten situativ, können und sollen aber auch von den Lernbegleiter/innen geschaffen werden (Gerspach 2006).

Bezugnehmend auf die NCTM-Standards für Mathematik erfolgt eine Klassifizierung mathematischer Themen in drei Kernbereiche, nämlich Zahlen, Maß sowie Raum und Form. Die Bereiche „Beziehung und Veränderung“ sowie „Daten und Zufall“ werden nicht eigenständig, sondern integriert betrachtet.[1]
Da im Kindergarten bereits unterschiedliche Methoden etabliert sind, erscheint es sinnvoll, deren Potenzial auch für mathematische Bildungsinhalte zu nutzen. Zu unterscheiden sind hier ungelenktes Freispiel, Impulse durch pädagogische Arrangements bzw. Angebote sowie angeleitete Aufgaben. Damit soll eine Balance zwischen Konstruktion und Instruktion angestrebt werden, denn nur diese eröffnet *Möglichkeiten zum Erwerb anwendbaren Wissens, das zu erfolgreichem Handeln führen kann.* (Mandl et al. 1995).

[1] Das Themenfeld „Beziehung und Veränderung“ ist in allen anderen Bereichen zu finden und deswegen nicht explizit formuliert. Entsprechendes gilt für „Daten und Zufall“, da dieses Themenfeld - wie die Erfahrungen in der Erprobung gezeigt haben - im Vergleich zu den anderen Bereichen im Kindergartenalter eine eher untergeordnete Rolle spielt.

Schließlich sind zwei Sichtweisen auf mathematische Inhalte zu beachten. Im Bildungsplan für Grundschulen in NRW sind diese mit den Begriffen „Anwendungsorientierung“ und „Strukturorientierung“ bezeichnet. Für den Kindergarten lässt sich dies so darstellen, dass Mathematik einerseits im Alltag „präsent“ erscheint, andererseits als geistiges Konstrukt auch gerade durch die Fähigkeit gekennzeichnet ist, sich von Anwendungen zu lösen und in sich selbst sinnstiftend sein zu können.

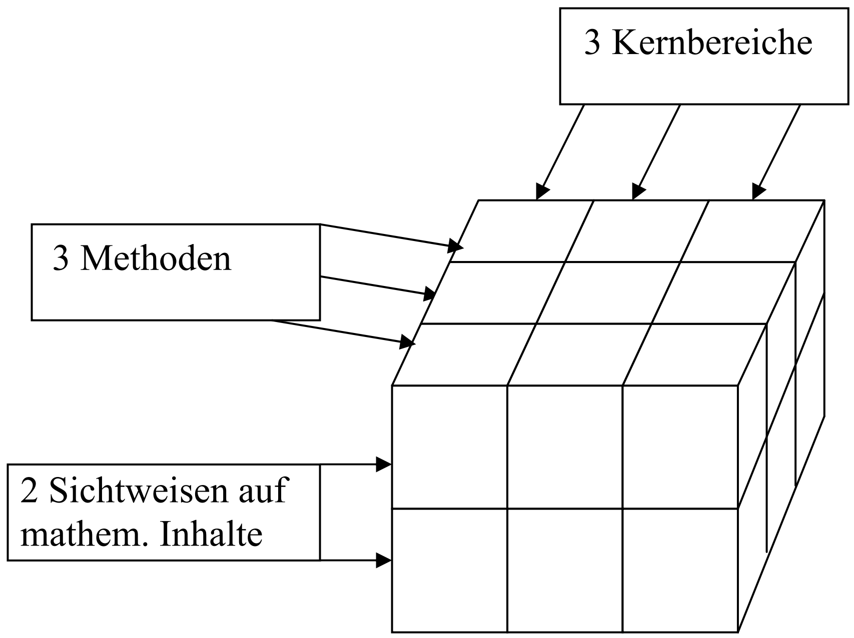


Abb. 1: Dimensionen früher mathematischer Bildung

2. Material

Wir gehen davon aus, dass Kinder im Alter bis zu sechs Jahren zunächst konkreten Phänomenen begegnen sollten. Konkret heißt hier sinnlich erfahrbar – was für die Mathematik zunächst ein Widerspruch ist, da diese selbst ja eben nicht primär sinnlich erfahrbar ist (Lorenz 1997). Sinnlich erfahrbar sind jedoch Materialien, die in sich das Potenzial tragen, zu mathematischen Tätigkeiten wie Ordnen und Sortieren, Herstellen von Beziehungen und Verwendung als Symbole herangezogen zu werden. Gewissermaßen als „Kristallisationspunkte“ wurden solche Gegenstände in einem Materialwagen zusammengestellt: Spielwürfel, Seilreste, Bausteine, Plättchen, geometrische Figuren und Körper, Karten, Messgeräte u. a. (zum Inhalt siehe www.mathelino.de)

3. Forschungsdesign

Theoretische Grundlage ist die Handlungsforschung nach Kurt Lewin (1948), die für die Mathematikdidaktik durch Peter-Koop und Prediger (2005) weiterentwickelt wurde. Die Vorgehensweise ist in folgender Tabelle skizziert:

1	Erfassen der Ausgangslage mittels Fragebogen.
2	**Planen** Die Erzieherinnen planen den Einsatz eines Materials und halten dies auf einer Planungsmatrix fest.
3	**Handeln und Bebachten** Durchführen des geplanten Handelns, Selbstbeobachtung und videogestützte Beobachtung („stimulated recall")
4	**Analysieren und Reflektieren** In gemeinsamen Analysegesprächen wird das Vorgehen reflektiert. Hier ist ein dreistufiges Vorgehen geplant: ▪ Freie Äußerungen ▪ Fokussierte Fragestellungen ▪ Alternativplanungen mit Unterstützung der wiss. Begleitung
5	Ein- bis zweimalige **Wiederholung** der Schritte 2 – 5

Zunächst stehen also nicht die Kinder, sondern die Erzieherinnen im Fokus der Forschung. Die Lernprozesse der Kinder sollen in einem Folgeprojekt, das auf den entwickelten Arrangements aufbaut, untersucht werden.

4. Erste Ergebnisse

Bei den Interviewstudien stellte sich heraus, dass die Erzieherinnen Mathematik in erster Linie mit den Begriffen „Schule" und „Rechnen" in Verbindung brachten und daher einer „Mathematik im Kindergarten" eher skeptisch gegenüberstanden. Diese Einstellung konnte durch entsprechende Fortbildungsangebote zumindest so weit relativiert werden, dass die Bereitschaft zur Mitarbeit im Projekt geweckt wurde.

Die beteiligten Erzieherinnen entwickelten folgende methodische Reihenfolge, die sie dann auch bevorzugt einsetzten:

- Angeleitete, zum Teil recht eng geführte, Beschäftigung mit dem Material im Stuhlkreis
- Freie Beschäftigung mit dem Material, das an einer bestimmten Stelle zur Verfügung steht

– Aufgreifen einzelner Kinderaktivitäten, die in Impulsangebote besonders für ältere Kinder münden

Als noch schwierig erweist sich der Anspruch an die Erzieherinnen, eine vorbereitende schriftliche Planung anzufertigen und auf deren Basis das eigene Handeln zu reflektieren. Die Beobachtung der Kinder (besonders auch die jüngeren), die mit großer Konzentration, Begeisterung und Kreativität auf das Material reagieren, steht für die Erzieherinnen noch deutlich im Vordergrund. Trotz erfahrener und auch so geäußerter Kompetenzerweiterung dauert eine gewisse Unsicherheit weiter an, die noch genauer analysiert werden muss.

Literatur

Gerspach, M. (2006). Elementarpädagogik. Eine Einführung. Stuttgart: Kohlhammer

Lengnink, K. (2002): Mathematisches in der Kommunikation. In: Prediger, Siebel, Lengnink (Hrsg.): *Mathematik und Kommunikation, Verlag Allgemeine Wissenschaft* (S. 121 – 136). Mühltal: Verlag allgemeine Wissenschaft

Lorenz, J. H. (1997). Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig: Westermann.

Mandl, H./ Gruber, H./ Renkl, A. (1995). Situiertes Lernen in multimedialen Lernumgebungen. München: Ludwigs-Maximilian-Universität. Institut für Pädagogische Psychologie und Empirische Pädagogik

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA

Peter-Koop, A.; & Prediger; S. (2005). Dimensionen, Perspektiven und Projekte mathematikdidaktischer Handlungsforschung. In: Eckert, Ela / Fichten, Wolfgang (Hrsg.): *Schulbegleitforschung: Erwartungen – Ergebnisse – Wirkungen* (S. 185-201) Münster: Waxmann

Streit, Christine / Royar, Thomas (2009). Setzen Sie doch mal die mathematische Brille auf. *kindergarten heute 3 / 2009* 8-15

Wittmann, E. Ch. (2005). Eine Leitlinie für die Unterrichtsentwicklung vom Fach aus: (Elementar-) Mathematik als Wissenschaft von Mustern. *Der Mathematikunterricht (MU), Jahrgang 51, 2005, Heft 2/3.*

Christiane BENZ, Karlsruhe

Die MachmitWerkstatt MiniMa als Aus- und Fortbildungsmöglichkeit

Die mathematische Bildung spielt in den letzten Jahren im Elementarbereich zunehmend eine wichtige Rolle. In einer Fragebogenuntersuchung über Vorstellungen von Erzieherinnen über Mathematik im Kindergarten im Raum Karlsruhe (Benz 2008) konnte festgestellt werden, dass ein großer Wunsch nach Fortbildungsmaßnahmen besteht. Im Rahmen des Jahres der Mathematik wurde als Fortbildungsangebot für Erzieherinnen eine MachmitWerkstatt „MiniMa" für 4-8jährige Kinder angeboten, die von der Tschira Stiftung gGmbH gefördert wurde. Diese MachmitWerkstatt wurde gemeinsam mit Studierenden konzipiert und durchgeführt.

Im folgenden Artikel möchte ich zuerst kurz auf die Chancen eingehen, die sich für die Ausbildung angehender Grundschullehrerinnen bei der Konzeption und Durchführung einer MachmitWerkstatt ergeben. Im Anschluss daran werde ich erste Ergebnisse der Evaluation vorstellen.

1. Chancen für die Ausbildung

Nach Selter (2006, 59) können die zentralen Ziele der Lehrerbildung gebündelt werden bezüglich des Erwerbs von Hintergrundwissen:

- über mathematische Phänomene und Theorien sowie die Entwicklung eines *prozessorientierten* Bildes von Mathematik,
- über mathematisches Denken von Kindern sowie die Entwicklung eines *kompetenzorientierten* Bildes von Lernenden,
- über Didaktik und Methodik des Mathematikunterrichts sowie die Entwicklung eines *subjektorientierten* Blicks von Lehr-Lern-Situationen.

Bei der Konzeption der MachmitWerkstatt hatten die Studierenden neben der Konzeption der Spiel- und Erkundungsumgebungen zu den verschiedenen mathematischen inhaltlichen Bereichen die Aufgabe, für die einzelnen mathematischen Bereiche didaktische Poster zu gestalten. Auf den didaktischen Postern wurden die Inhaltsbereiche unter einem prozessorientierten Blick dargestellt. Des Weiteren wurden auf weiteren Postern allgemeine Prinzipien der Mathematikdidaktik unter dem Aspekt der Kompetenzorientierung und Subjektorientierung vorgestellt. Neben dem Erwerb des Hintergrundwissens bei der Konzeption der MachmitWerkstatt ergaben sich bei der Durchführung weitere Möglichkeiten, vor allem im Hinblick auf die Entwicklung eines kompetenzorientierten und subjektorientierten Blicks.

Die Kindergruppen wurden von einem Tandem von Studierenden begleitet, das die Kinder zunächst kurz in die Spielumgebung einführte. Anschließend konnten sich die Kinder mit den Materialien frei beschäftigen, wobei sie durch die Studierenden begleitet und unterstützt wurden. Bei den meisten Kindergruppen hatten wir die Erlaubnis zu filmen. Die Studierenden hatten so die Möglichkeit, über die nicht planbaren Lehr-Lern-Situationen im Anschluss zu reflektieren. Dadurch konnte den beiden Polen der Unterrichtstätigkeit von unmittelbarer Involviertheit und kritischer Reflektiertheit Rechnung getragen werden (vgl. Steinbring 2003). Die Studierenden hatten die Chance die Lehr-Lernsituationen als System verschiedener Variablen wahrzunehmen. So konnte im kritischen Nachdenken aus der Distanz die eigene Tätigkeit reflektiert werden.

2. Möglichkeiten für die Fortbildung

Im folgenden Abschnitt möchte ich anhand der Leitgedanken Prozess-, Kompetenz- und Subjektorientierung die Evaluation vorstellen, da diese Leitgedanken sich nicht nur auf die Schule, sondern auch auf den Elementarbereich beziehen sollten.

Die Erzieherinnen wurden vor und nach dem Besuch der MachmitWerkstatt anhand eines Fragebogens befragt. Dabei wurde der empirisch erprobte Fragebogen aus der in der Einleitung vorgestellten Untersuchung verwendet (Benz 2008). Eröffnet wurde die MiniMa mit einem Expertenworkshop, der aufgrund der großen Teilnehmerzahl dann jedoch als Vortrag mit Workshopanteilen gestaltet werden musste. Die Erzieherinnen bekamen vor ihrem Workshopbesuch oder ihrem ersten Besuch mit den Kindern bei der Machmitwerkstatt einen Fragebogen zugesandt, den sie entweder zum Workshop oder zum ersten Besuch mitbrachten. Nach dem Besuch bekamen sie die gleichen Fragen nochmals. Ergänzt wurde der Fragebogen um einige Fragen speziell zur Rückmeldung zur MachmitWerkstatt.

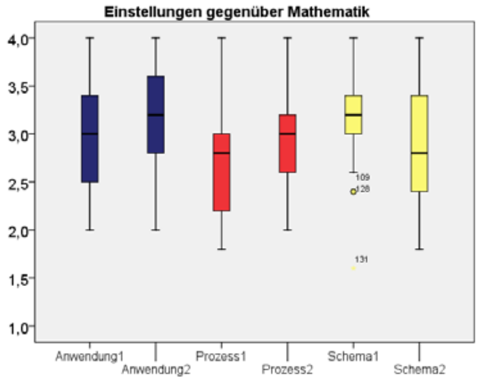
130 Fragebögen wurden beim Workshop und beim ersten Besuch der MiniMa abgegeben. 85 Fragebögen wurden nach dem Besuch der MiniMa zurückgesandt. 62 Personen beantworten beide Fragebögen.

Zunahme eines prozessorientierten Blicks auf die Mathematik

Im Fragebogen wurden den Erzieherinnen mehrere Aussagen zu verschiedenen Einstellungen gegenüber Mathematik angeboten, bei denen sie ihre Zustimmung in einer mehrstufigen Antwortskala von 1 (trifft in keiner Weise zu) bis 4 (trifft voll und ganz zu) angeben konnten. Jeweils 5 Aussagen konnten dem schematisch-formalen Aspekt[1] (z.B. Mathematik verlangt

[1] Bei der Einteilung wurde auf die Kategorisierung von Grigutsch et al (1998) zurückgegriffen, wobei der

logische Präzision), dem Prozesscharakter (z.B. Probleme lösen ist ein Hauptbestandteil von Mathematik) und dem Anwendungsaspekt (z.B. Mathematik schult Fähigkeiten, die einem im Alltag helfen) zugeordnet werden.



Mittelwerte (Median) bei Aussagen zu Einstellungen gegenüber Mathematik, N=62

Wie an dem Schaubild zu sehen ist, hat der Median des Anwendungsaspekts und des Prozessaspekts nach dem Besuch der MiniMa zugenommen. Beim arithmetischen Mittel (M_{A1} =2.95, SD=0.7; M_{A2}=3.13, SD=0.9; M_{P1}=2.68, SD=0.6; M_{P2}=2.92, SD=0.6) können die Veränderungen nach dem Wilcoxon Test[2] als signifikant (Anwendungsaspekt p=0.02; Prozessaspekt p=0.000) bezeichnet werden, wobei die Zunahme beim Prozessaspekt als höchst signifikant bezeichnet werden kann. Ebenso kann die Abnahme des arithmetischen Mittels beim schematischen Aspekt (M_{S1}=3.17 SD=0.6; M_{S2}=2.86 SD=0.7) als höchst signifikant bezeichnet werden (p=0.000).Vor dem Besuch der Ausstellung war beim schematischen Aspekt das arithmetische Mittel am höchsten mit 3.17, der Prozessaspekt hatte das niedrigste arithmetische Mittel mit 2.86. Nach dem Besuch der MiniMa kann man jedoch feststellen, dass nun das arithmetische Mittel des schematischen Aspekts nur noch 2.86 beträgt und das arithmetische Mittel des Prozessaspekts mit 2.92 nun höher als der des schematischen Aspekts ist. In der Machmitwerkstatt konnten die Erzieherinnen Mathematik als Tätigkeit erleben und somit nahm der Prozessaspekt in ihrem Mathematikbild zu.

Entwicklung von Subjektorientierung

Nach den Aussagen über verschiedene Sichtweisen von Mathematik wurden die Befragten mit Aussagen zum Erwerb mathematischen Wissens konfrontiert. Bei den Aussagen, die sich eher auf behavioristische Lerntheorien beziehen und den instruktiven Aspekt betonen, ergab sich vor dem

---

formale und schematische Aspekt zusammengefasst wurde. Die Zusammenfassung wurde durch eine Faktorenanalyse verifiziert. Bei jedem Faktor konnte eine höchst signifikante Interkorrelation zwischen jedem Item dieser Faktoren festgestellt werden.

[2] Nichtparametrischer Test für Mittelwertvergleiche für abhängige Stichproben.

Besuch der MachmitWerkstatt das arithmetische Mittel von 2.6 (SD=0.6) und nach dem Besuch der MiniMa von 2.5 (SD=0.5). Hier zeigt sich ein minimaler Rückgang. Bei den Aussagen, die den konstruktiven Aspekt des Wissenserwerbs betonen, gaben die Erzieherinnen schon vor dem Besuch der MiniMa eine größere Zustimmung. Dort wurde ein Wert von 3.35 erreicht (SD=0.5). Beim zweiten Fragebogen ergab sich bei den konstruktiven Aussagen das arithmetische Mittel von 3.50 (SD=0.5). Die Zunahme kann nach dem Wilcoxon Test als signifikant p=0.05 bezeichnet werden.

Entwicklung von Kompetenzorientierung

Den Erzieherinnen wurden weiterhin negativ formulierte Items bezüglich Fehler vorgelegt. Vor dem Besuch der MiniMa ergab sich bei der Aussage „Das Wichtigste ist, ein korrektes Ergebnis zu erreichen" das arithmetische Mittel von 2.52. Nach dem Besuch war das arithmetische Mittel bei 2.31. Bei der Aussage „Fehler zu vermeiden, ist wichtig", konnte auch eine Abnahme von 2.12 auf 1.81 verzeichnet werden.

3. Zusammenfassung

Es ist bekannt, dass sich Einstellungen nicht schnell ändern. Ein Besuch der MachmitWerkstatt kann und soll nicht eine fundierte Fortbildung ersetzen. Was durch die Evaluation allerdings gezeigt werden konnte, ist, dass Erzieherinnen durch einen gemeinsamen Besuch mit Kindern in einer MachmitWerkstatt beginnen können, eine andere Sichtweise zu entwickeln. Das gemeinsame Entdecken von Mathematik mit den Kindern, die Möglichkeit zur Beobachtung der Kinder, die Information durch didaktische Poster hat einige Erzieherinnen angeregt neu nachzudenken über Mathematik und Kinder im Hinblick auf die formulierten Leitideen Prozess-, Kompetenz- und Subjektorientierung.

Literatur

Benz, C. (2008). Zahlen sind eigentlich nichts Schlimmes. In E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik* (S. 43-46). Münster: Stein.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Toerner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. Journal für Mathematik-Didaktik 19 (1), 3-39.

Selter, C. (2006). Adressaten- und Berufsbezug in der Lehrerbildung. *journal für lehrerInnenbildung, H. 2*, 57 - 64.

Steinbring, H. (2003). Zur Professionalisierung des Mathematiklehrerwissens – Lehrerinnen reflektieren gemeinsam Feedbacks zur eigenen Unterrichtstätigkeit. In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule – Ein Arbeitsbuch* (S. 195 - 220). Seelze: Kallmeyer.

Kerstin TIEDEMANN, Frankfurt a. M.

Von verschwundenen Würfelaugen und Baseballkappen für Gürteltierbabys – Vorschulkinder und ihre Eltern im mathematischen Diskurs

Wird Mathematiklernen als das Hineinwachsen in eine mathematische Kultur verstanden, so wird ersichtlich, dass das Mathematiklernen von Kindern keinesfalls auf bewusst gestaltete pädagogische Situationen in Kindergarten oder Schule begrenzt ist. Unter dieser theoretischen Perspektive öffnet sich der Blick für einen Sozialisationsraum, der besonders im Hinblick auf frühe mathematische Erfahrungen von entscheidender Bedeutung ist: die Familie. So zeigen Street, Baker und Tomlin (2005) in einer qualitativen Studie, dass die Familie und die dort erfahrene mathematische Sozialisation erheblichen Einfluss auf das Gelingen des Schulstarts haben. In der Erklärung dieses Zusammenhangs betonen die britischen Forscher, dass der ausschlaggebende Aspekt nicht die konkreten inhaltlichen Anregungen seien, sondern der familiale Diskursstil.

Vor diesem Hintergrund wird im Folgenden ein Promotionsprojekt vorgestellt, das auf den familialen Diskursstil fokussiert. Im Blickpunkt steht dabei die elterliche Unterstützung in mathematischen Diskursen mit Vorschulkindern. Wie begleiten Eltern ihre Kinder auf dem Weg in die Mathematik?

1. Mathematiklernen

Der Weg in die Mathematik ist ein Weg der Entdeckungen, der Erfahrungen, aber auch der Irritationen. Er ist ein Weg des Lernens, der von Eltern auf sehr unterschiedliche Weisen begleitet wird. Bevor nun die elterliche Unterstützung in den Blick rückt, soll zunächst der zugrunde gelegte Begriff von Mathematiklernen geklärt werden. Er bildet den Rahmen der Arbeit.

Im Anschluss an Sfard (2002) wird Lernen als eine Veränderung der Partizipation verstanden. Damit geht es ausdrücklich nicht um die Rekonstruktion kognitiver Prozesse, sondern um die Analyse von Diskursen. Denn nach Sfard (2002) bedeutet Mathematiklernen, dass Kinder in zunehmendem Maße kompetente Teilnehmer mathematischer Diskurse werden.

2. Funktionalität elterlicher Unterstützung

Im Prozess des so verstandenen Mathematiklernens sind Eltern ihren Kindern bedeutende Diskurspartner. Im Anschluss an Hausendorf und

Quasthoff (1996) soll die elterliche Unterstützung in der hier vorgestellten Arbeit unter funktionaler Perspektive beleuchtet werden.

Die Linguisten Hausendorf und Quasthoff (1996) untersuchen die Entwicklung kindlicher Erzählkompetenzen im Diskurs mit Erwachsenen, wobei sie für ihre Arbeit eine besonders enge Anbindung an die ethnomethodologische Konversationsanalyse beanspruchen. Damit ist die Ausrichtung ihrer Analyse bereits dahingehend konturiert, dass es ihnen stets um die einst von Jefferson formulierte fundamentale Frage der Konversationsanalyse geht: How does it work? (Hausendorf & Quasthoff, 1996) In diesem Duktus fragen Hausendorf und Quasthoff nach der Organisation alltäglicher Interaktion, wobei sie dem interaktiven Paradigma folgend von einer steten Ko-Konstruiertheit interaktiver Strukturen ausgehen. Die Idee der Konversationsanalyse von der sequentiellen Verkettung einzelner Beiträge durch Zugzwänge liefert laut Hausendorf und Quasthoff genau die Begrifflichkeiten, die es einem ermöglichen nachzuzeichnen, wie sich Erwartungen von Erwachsenen an der Oberfläche des Diskurses manifestieren.

Diese Perspektive scheint für den hier gewählten Zusammenhang der elterlichen Unterstützung in mathematischen Diskursen ebenfalls geeignet. Schließlich fasst die ethnomethodologische Konversationsanalyse in Übereinstimmung mit dem zuvor beschriebenen Begriff von Mathematiklernen nach Sfard Kinder als gleichberechtigte, aktive Diskursteilnehmer auf (Hausendorf & Quasthoff, 1996; Sfard, 2002). Vor diesem Hintergrund strebt die hier skizzierte Arbeit danach, die folgende erste Forschungsfrage zu beantworten: Wie ist die elterliche Unterstützung funktional für die Partizipation des Kindes?

3. Elterliche Konzepte von Mathematiklernen

Beobachtet man Eltern in mathematischen Diskursen mit ihren Kindern, so zeigen sich nicht nur sehr unterschiedliche Funktionalitäten der Unterstützung, sondern es schimmern gerade darin auch sehr unterschiedliche Konzepte von Mathematiklernen durch.

Um diese zu beschreiben, soll auf zwei theoretische Entwürfe von Bishop (1988 & 2002) zurückgegriffen werden, für die er die Begriffe Enkulturation und Akkulturation prägte.

Zunächst konzipiert er Mathematiklernen als einen Prozess der Enkulturation (Bishop, 1988). Darunter versteht Bishop das kontinuierliche Hineinwachsen in eine mathematische Kultur, von welcher das Kind in seinem Alltag auf natürliche Weise umgeben ist. Die Erwachsenen, die das Kind bei diesem Prozess begleiten, sind selbst Teil dieser mathematischen Kultur und markieren Mathematik als Bestandteil ihres Alltags.

Kontrastierend stellt Bishop (2002) Mathematiklernen später als einen Prozess der Akkulturation dar. Dieser Begriff meint ebenfalls das Hineinwachsen in eine mathematische Kultur, allerdings wird diese als vom eigenen Alltag abgeschnitten wahrgenommen. Mathematiklernen bedeutet unter dieser Perspektive, dass Kinder unter Anleitung die Mathematik partiell ihrer bereits existierenden Alltagskultur hinzufügen. Die Erwachsenen, die das Kind bei diesem Prozess begleiten, sind selbst nicht Teil der mathematischen Kultur, sondern führen den Nachwuchs ein Stück weit in die Mathematik ein.

Um dem bereits dargelegten Anspruch der Diskursorientierung gerecht zu werden, sollen Bishops Konzepte im Anschluss an Frade & Faria (2008) auf der Mikroebene des Diskurses konkretisiert werden und das Vokabular für die Beantwortung der zweiten Forschungsfrage bieten: Welche elterlichen Konzepte von Mathematiklernen zeigen sich in mathematischen Diskursen mit Vorschulkindern?

4. Forschungsdesign

Mit den zwei genannten Forschungsfragen wird zur Zeit eine Videostudie durchgeführt, an der zehn Familien teilnehmen, welche allesamt der Mittelschicht zuzuordnen sind. Mit jeder dieser Familien werden fünf Termine gestaltet, die sich über das letzte Vorschuljahr der Kinder erstrecken. Diese Anlage als Längsschnittstudie soll zu einem vielfältigen Bild der elterlichen Unterstützung in mathematischen Diskursen verhelfen und darüber hinaus auch mögliche Veränderungen der Unterstützungsfunktionen sichtbar werden lassen.

Um mathematische Diskurse in der Familie dem Forscherblick zugänglich zu machen, wurden Interaktionsanlässe ausgewählt, die typischerweise Teil des familialen Alltags sind: Bilderbücher und Spiele. Bei der Auswahl des Materials wurde darauf geachtet, dass es sich um handelsübliche Bücher und Spiele ohne gezielt didaktischen Charakter handelt und dass vielfältige mathematische Aspekte enthalten sind.

Mit diesem Material werden dann möglichst offene Familientermine gestaltet. So bestimmen die Familien, was sie spielen oder lesen, worüber sie dabei sprechen, nach welchen Regeln sie spielen, wie oft sie ein Buch anschauen und wann sie aufhören. Ebenfalls steht es ihnen frei, eigene Bücher und Spiele einzubringen.

Alle Termine werden gefilmt und anschließend nach Unterstützungssituationen durchsucht. Diese ausgewählten Unterstützungssequenzen werden transkribiert und dann im Hinblick auf die skizzierten Forschungsfragen analysiert.

5. Aktueller Stand der Arbeit

Im gegenwärtigen Prozess der Datenerhebung wurden nach dem ersten Termin vier Familien ausgewählt, die in Zukunft Gegenstand detaillierter Fallanalysen werden sollen. Kriterium der Auswahl war eine möglichst deutliche Unterscheidung hinsichtlich der eröffneten theoretischen Perspektiven, d.h. hinsichtlich der Funktionalität elterlicher Unterstützung und der darin sichtbaren elterlichen Konzepte von Mathematiklernen. Diese theoriegeleitete Auswahl der sog. Fokusfamilien ermöglicht schließlich eine komparative Analyse.

In der Betrachtung elterlicher Unterstützungsfunktionen zeigen die ersten Daten, dass die Eltern in ihrem Diskursverhalten zwei grundsätzlich unterschiedliche Orientierungen zeigen. In zwei Fokusfamilien scheint die Funktion der elterlichen Unterstützung vorrangig darin zu liegen, dem Kind etwas zu lehren, wohingegen die Funktion in den beiden anderen Fokusfamilien primär in der Herstellung eines reibungslosen Miteinanders liegt, wodurch der Spiel- oder Leseprozess an sich in den Mittelpunkt rückt.

Ebenso deutlich unterscheiden sich die Konzepte von Mathematiklernen, die in den familialen Diskursen sichtbar werden. Zwei Fokusfamilien konturieren Mathematiklernen eher als einen akkulturativen Prozess, die anderen zwei gegenteilig als einen enkulturativen Prozess.

Diese ersten Einsichten belegen die Fruchtbarkeit der gewählten theoretischen Perspektiven und dienen als Grundlage im Fortgang der Arbeit.

Literatur

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Bishop, A. J. (2002). Mathematical acculturation, cultural conflicts, and transition. In G. de Abreu et al. (Hrsg.), *Transitions between contexts of mathematical practices* (S. 193 - 212). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Frade, C. & Faria, D. (2008). Is mathematics learning a process of enculturation or a process of acculturation? In *Proceedings of the Fifth Interantional Mathematics Education and Society Conference.*

Hasusendorf, H. & Quasthoff, U. (1996). *Sprachentwicklung und Interaktion*. Opladen: Westdeutscher Verlag.

Street, B., Baker, D. & Tomlin, A. (2002). *Navigating numeracies: Home/ school numeracy practivces*. Dordrecht: Springer.

Sfard, A. (2002). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 46, 1-12.

Meike GRÜSSING, Kiel

Mathematische Kompetenz im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule: Erste Befunde einer Längsschnittstudie

Mit der Einführung von Bildungs- und Orientierungsplänen für die vorschulische Bildung wird auch der Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen im Elementarbereich verstärkt Bedeutung beigemessen. Verschiedene Studien belegen darüber hinaus die Bedeutung der Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen vor Schulbeginn. Krajewski (2005) konnte im Rahmen einer Längsschnittstudie zur Früherkennung von Rechenschwäche nachweisen, dass sich ein erheblicher Teil der Mathematikleistung am Ende von Klasse 4 bereits im letzten Kindergartenjahr anhand des mengen- und zahlenbezogenen Vorwissens vorhersagen lässt. Dornheim (2008) stellt in einer Studie zur Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche heraus, dass das spezifische Zahlenwissen im Vorschulalter der Hauptprädiktor für Rechenleisung im Grundschulalter ist. Gleichzeitig deuten die Ergebnisse verschiedener Studien (z.B. Kaufmann, 2003; Krajewski, 2008) darauf hin, dass sich ein frühzeitiges Erkennen von Ursachenfaktoren für potenzielle Schwierigkeiten beim Mathematiklernen und eine daran anknüpfende frühe Förderung positiv auf die Lernbiographie auswirken können.

Die Ergebnisse dieser Studien bekräftigen die Bedeutung einer frühen Diagnostik und einer darauf aufbauenden Förderung mathematischer Basiskompetenzen. Allerdings sind in den genannten Studien in der Regel sehr umfangreiche diagnostische Instrumentarien zum Einsatz gekommen, die in dieser Weise für den alltäglichen Einsatz in der Kindertagesstätte nur bedingt geeignet sind. Es besteht ein Bedarf an diagnostischen Instrumenten für den Einsatz in der alltäglichen Praxis sowie an Förderkonzepten, die mit den pädagogischen Ansätzen der Kindertagesstätten abgestimmt sind.

Vor diesem Hintergrund ist es das Ziel der diesem Beitrag zugrunde liegenden Studie, mathematische Kompetenzen von Kindern vom letzten Kindergartenjahr bis zum Ende des zweiten Schuljahrs mit Hilfe von verschiedenen diagnostischen Instrumenten zu erfassen und zu beschreiben. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf der Erprobung eines für die Praxis geeigneten Instruments für die Diagnose vorschulischer mathematischer Basiskompetenzen. Darüber hinaus werden Möglichkeiten einer vorschulischen mathematischen Förderung potenzieller „Risikokinder“ im Hinblick auf Schwierigkeiten beim Mathematiklernen erprobt.

Insbesondere in Bezug auf das letztgenannte Ziel ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Welche Effekte der vorschulischen mathematischen Förderung potenzieller „Risikokinder“ in Bezug auf das schulische Mathematiklernen ergeben sich unmittelbar vor der Einschulung?
- Wie nachhaltig erweist sich die vorschulische Förderung bei der Überprüfung der Mathematikleistung am Ende von Klasse 1 sowie am Ende von Klasse 2?
- Zeigen sich Unterschiede bezüglich der Leistungen in Abhängigkeit von der Art der Förderung in externer Einzelförderung oder integriert in den Kindergartenalltag durch die Erzieherin?

Im Rahmen dieser Studie wurden verschiedene standardisierte und nicht-standardisierte Tests und Interviewverfahren eingesetzt. Zur Erfassung mathematischer Basiskompetenzen ein Jahr vor der Einschulung sowie direkt vor der Einschulung wurde neben dem Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) (van Luit, van de Rijt & Hasemann, 2001) das Elementarmathematische Basisinterview (EMBI) (Peter-Koop, Wollring, Spindeler & Grüßing, 2007) verwendet. Dieses kompetenzorientierte Interview ermöglicht durch den Einsatz verschiedener Materialien in allen Teilbereichen handlungsgestützte Formen der Darstellung und ist daher besonders für jüngere Kinder geeignet. Darüber hinaus enthält das Interview einen zusätzlichen speziellen Vorschulteil.

An der ersten Erhebung haben 947 Kinder aus 35 Kindertagesstätten teilgenommen. Auf Grundlage der Befunde des OTZ und des EMBI-Vorschulteils wurden 73 Kinder identifiziert, bei denen aufgrund ihrer gering entwickelten mathematischen Basiskompetenzen Schwierigkeiten beim schulischen Mathematiklernen zu erwarten waren. Für die Förderung dieser „Risikokinder“ in Bezug auf das spätere Mathematiklernen wurde bewusst kein explizites Trainingsprogramm entwickelt. Stattdessen stand die Arbeit mit individuellen Förderplänen auf Grundlage der diagnostischen Befunde im Vordergrund (vgl. Peter-Koop, Grüßing & Schmitman gen. Pothmann, 2008). 14 Kinder wurden in Einzelförderung durch Studierende gefördert, 53 weitere im Kindergarten durch Erzieherinnen, die durch die Studienleiterinnen in regelmäßigen Treffen unterstützt wurden. Für sechs weitere Kinder liegen keine Angaben zu Art und Umfang der Förderung in den Einrichtungen vor. Eine Kontrollgruppe konnte aus forschungsethischen Gründen nicht gebildet werden.

Zum Vergleich der Leistungen ein Jahr vor Schulbeginn und unmittelbar vor Schulbeginn werden die Daten des EMBI Vorschulteils herangezogen. Direkt vor Schulbeginn ergeben sich bereits deutliche Deckeneffekte. Im unteren Leistungsbereich differenziert das Interview jedoch sehr gut. Es zeigen sich bei maximal 11 erreichbaren Rohpunkten signifikante Verbesserungen in den Leistungen der potenziellen „Risikokinder“ vom ersten Messzeitpunkt (M = 4,57; SD = 1,72) zum zweiten Messzeitpunkt direkt vor Schulbeginn (M = 7,70; SD = 1,74). Innerhalb der Gruppe der „Risikokinder“ ist der Leistungszuwachs in der Gruppe der Kinder mit Migrationshintergrund am größten. Hinsichtlich der Art der Förderung lassen sich keine Unterschiede erkennen. Die Kinder, die durch die Fachkräfte im Kindergarten gefördert wurden, zeigen gleiche Leistungszuwächse wie die Kinder, die in Einzelförderung mit Studierenden gearbeitet haben.

Durch den Verzicht auf eine Kontrollgruppe kann ein eindeutiger Effekt der Förderung unter Ausschluss weiterer Faktoren nicht belegt werden. Es wird jedoch deutlich, dass die als potenzielle „Risikokinder“ identifizierten Kinder einen erheblichen Leistungszuwachs in Bezug auf ihre mathematischen Basiskompetenzen zeigen. Sie haben ein spezifisches Vorwissen erworben, von dem angenommen werden kann, dass es eine bedeutende Voraussetzung für schulisches Mathematiklernen darstellt.

Zur Überprüfung der Mathematikleistungen am Ende von Klasse 1 und 2 wurden der DEMAT 1+ und der DEMAT 2+ (Krajewski, Küspert & Scheider, 2002; Krajewski, Liehm & Schneider, 2004) eingesetzt. Die Ergebnisse beider Tests sind in Tabelle 1 dargestellt. Es wurden jeweils ganze Klassen einbezogen, so dass sich die Stichprobe erheblich vergrößert. Am Ende des ersten Schuljahrs konnten jedoch nur noch 40 der ursprünglich 73 als „Risikokinder“ identifizierten Schülerinnen und Schüler erfasst werden. Ein großer Teil der Kinder war noch nicht eingeschult, besuchte eine Vorschulklasse oder eine Förderschule oder konnte aus anderen Gründen nicht mehr getestet werden. Bis zum Ende des zweiten Schuljahrs verringert sich die Zahl der erfassten „Risikokinder“ weiter.

Stichproben 2007 (2008)	**DEMAT 1+ (2007)** (max. 36 Punkte)		**DEMAT 2+ (2008)** (max. 36 Punkte)	
	M	SD	M	SD
Insgesamt: *n = 1916 (1832)*	25,55	7,30	20,69	8,59
Risikokinder: *n = 40 (30)*	18,55	7,66	11,65	9,12
mit Migrationshintergrund: *n = 15 (11)*	18,93	7,99	15,64	10,26
ohne Migrationshintergrund: *n = 25 (19)*	18,32	7,62	9,34	7,77

Tabelle 1: Ergebnisse des DEMAT 1+ und DEMAT 2+

Erwartungsgemäß schneiden die Risikokinder in allen Bereichen schwächer ab als die Gesamtgruppe. Betrachtet man die unterschiedlichen Leistungsgruppen in Bezug auf den DEMAT 1+, so befinden sich in der Gruppe der 25% leistungsschwächsten Kinder am Ende von Klasse 1 noch 20 der 40 „Risikokinder". 19 weitere Kinder lassen sich in die mittleren 50% des Leistungsbereichs einordnen. Ein Kind gehört sogar zu den 25% leistungsstärksten Kindern. Am Ende des zweiten Schuljahrs lassen sich noch 10 Kinder in die mittleren 50% des Leistungsbereichs einordnen. Ein Kind gehört weiterhin zu den leistungsstärksten Kindern.

Auf Grundlage der bisherigen Ergebnisse dieser Studie erscheint die weitere Untersuchung von Möglichkeiten einer Förderung mathematischer Basiskompetenzen auf der Grundlage individueller Förderpläne durch entsprechend fortgebildete Fachkräfte in Kindergärten als lohnenswert. Die zuvor hinsichtlich des schulischen Mathematiklernens als „Risikokinder" identifizierten Kinder zeigen bis zum Schulbeginn erhebliche Leistungszuwächse. Kinder mit Migrationshintergrund profitieren offenbar besonders von der Förderung. Es sind jedoch weitere Studien nötig, um die Zusammenhänge des Kompetenzerwerbs bei Kindern im Elementarbereich und beim Übergang in die Grundschule genauer zu verstehen.

Literatur

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos.

Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Effekte vorschulischer mathematischer Förderung am Ende des ersten Schuljahres: Erste Befunde einer Längsschnittstudie. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 1, 65-82.

Kaufmann, S. (2003). *Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen*. Frankfurt/Main.

Krajewski, K. (2005). Vorschulische Mengenbewusstheit von Zahlen und ihre Bedeutung für die Früherkennung von Rechenschwäche. In Hasselhorn, M., Marx, H. & Schneider, W. (Hrsg.), *Diagnostik von Mathematikleistungen*. Göttingen, 49-70.

Krajewski, K. (2008). Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen. In: Petermann, F. & Schneider, W. (Hrsg.), *Angewandte Entwicklungspsychologie*. Göttingen, 275-304.

Krajewski, K.; Küspert, P. & Scheider, W. (2002). *DEMAT 1+. Deutscher Mathematiktest für erste Klassen*. Göttingen.

Krajewski, K.; Liehm, S. & Schneider, W. (2004). *DEMAT 2+. Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen*. Göttingen.

Peter-Koop, A; Wollring, B.; Spindeler, B. & Grüßing, M. (2007). *Elementarmathematisches Basisinterview (EMBI).* Offenburg.

Peter-Koop, A.; Grüßing, M. & Schmitman gen. Pothmann, A. (2008). Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten: Befunde zur vorschulischen Identifizierung und Förderung von potenziellen Risikokindern in Bezug auf das schulische Mathematiklernen. *Empirische Pädagogik*, 22(2), 209-244.

van Luit, J. E. H.; van de Rijt, B. A. M. & Hasemann, K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung* (OTZ).Göttingen.

Stephanie SCHULER, Gerald WITTMANN, Schwäbisch Gmünd

Forschung zur frühen mathematischen Bildung – Bestandsaufnahme und Konsequenzen

In diesem Beitrag werden mathematikdidaktische Arbeiten zur Frühen Bildung im Hinblick auf drei Fragen analysiert:

- Welche mathematikdidaktischen Forschungsfelder zur frühen Bildung lassen sich ausmachen?
- Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Forschungsfeldern und wo zeigt sich weiterer Forschungsbedarf?

1 Felder mathematikdidaktischer Forschung

Derzeit sind im Bereich der frühen mathematischen Bildung vier Forschungsfelder zu erkennen: (1) Entwicklungsforschung, (2) Kompetenzerhebung und Diagnose, (3) empirische Evaluation und (4) Erforschung von Alltagspraxen.

Forschungsfeld 1: Entwicklungsforschung

In diesem Feld bildet die Entwicklung verschiedener Arten von Materialien, Lernangeboten sowie Lehrgängen und Förderprogrammen einen ersten Schwerpunkt (für eine detaillierte Darstellung vgl. Schuler 2008). Darüber hinaus gibt es an den NCTM Standards orientierte Curricula, die langfristig angelegt sind und den gesamten Vorschulbereich in altershomogener Organisation umfassen (Clements & Sarama 2003, Greenes u. a. 2004).

Forschungsfeld 2: Kompetenzerhebung und Diagnose

Untersuchungen zur *Kompetenzerhebung* insbesondere in den 1980er und 1990er Jahren zeigen die arithmetischen und geometrischen Kompetenzen von Schulanfängern, aber auch eine große Heterogenität diesbezüglich auf (Schmidt & Weiser 1982, Grassmann 1995, Selter 1995, Caluori 2004). Diese Studien zielen nicht auf die frühe Bildung, sondern sollen Argumente für eine Weiterentwicklung des Anfangsunterrichts empirisch stützen. Typische Methoden sind Bildsachaufgaben und Interviews.

Im Bereich der *(Individual-)Diagnostik* lassen sich standardisierte Instrumente (wie der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung; van Luit u.a. 2001) und eher informelle Instrumente (wie das Elementarmathematische Basisinterview; Peter-Koop u. a. 2007) unterscheiden. Beide Formen können einerseits bei statistischen Erhebungen auch in größeren Populationen und mit mehreren Messzeitpunkten eingesetzt, andererseits aber auch für individualdiagnostische Zwecke herangezogen werden. Grundlage dieser Instrumente sind Analysen von Vorläuferfähigen bzw. Basiskompetenzen zum Zahlbegriffserwerb.

Forschungsfeld 3: Empirische Evaluation

Dieses Forschungsfeld zielt auf den Nachweis kurzfristiger und langfristiger Effekte von Förderprogrammen, Trainings und Lehrgängen einerseits (Krajewski 2008, Quaiser-Pohl 2008) sowie von Curricula, Förderkonzepten und der Dokumentation von Lernprozessen andererseits (Clarke u. a. 2008, Clements & Sarama 2007, Gasteiger & Steinweg 2007).

In der methodologischen Orientierung handelt es sich dabei fast durchgängig um quantitative Studien, die einem klassischen vergleichenden Design mit Vor- und Nachtest sowie z. T. auch einem Follow-up-Test folgen. Das Ziel ist der Nachweis von Lerneffekten eines inhaltlichen oder eines methodischen Konzepts, gelegentlich auch der Vergleich zweier Konzepte.

Forschungsfeld 4: Erforschung von Alltagspraxen

Ziel der Forschungsarbeiten in diesem Feld ist die Erfassung des Status quo in den Kindergärten, eine Beschreibung des Alltags und günstiger Praxen. Die Studien sind überwiegend qualitativ ausgerichtet und im Vergleich zum letzten Forschungsfeld gibt es noch wenige (abgeschlossene) Forschungsarbeiten. Forschungsfragen sind z. B. folgende:

– Mit welchen Materialien und in welchen Situationen sind mathematische Aktivitäten im Kindergartenalltag zu beobachten? (Ginsburg u. a. 2004)
– Welche Kontextfaktoren und Bedingungen für derartige mathematische Aktivitäten lassen sich ausmachen? (Ginsburg u. a. 2004, Schuler & Wittmann 2009, Schuler 2009)
– Welche Art der Instruktion, Anleitung wird praktiziert, welche wirkt sich förderlich auf mathematische Aktivitäten aus? (Carlsen u. a. 2009, Tirosh u. a. 2009, van Oers 1996/2004)

Methodologisch sind diese Studien dem qualitativen Paradigma zuzuordnen. Methodisch wird Videotechnik zur Aufzeichnung von Alltagssituationen, aber auch von gezielt arrangierten Gesprächssituationen und Interviews, eingesetzt. Die Datenauswertung erfolgt häufig mittels qualitativer Inhaltsanalyse mit anschließenden deskriptiven statistischen Verfahren, mittels Interaktionsanalyse oder Grounded Theory. Es wird versucht, auch nonverbale Kommunikation und Handlungen zu berücksichtigen. Mathematische Aktivitäten lassen sich in einem Dreieck von Materialien, Erzieherin/Eltern und Spielpartner/Interaktionspartner verorten. Dabei wird von vielen Autoren die zentrale Rolle der Erzieherin betont und versucht, diese genauer zu beschreiben.

2 Entwicklungslinien und Ausblick

In einer engen wechselseitigen Beziehung stehen die Forschungsfelder 2 und 4. Einerseits dienen umfangreiche Leistungserhebungen der Normierung diagnostischer Tests (van Luit u. a. 2001), andererseits werden spezielle diagnostische Instrumente entwickelt, um (Förder-)Maßnahmen im Hinblick auf die Lernerfolge der betreffenden Kinder evaluieren zu können (Clarke u. a. 2008; Peter-Koop u. a. 2007). Die Studien folgen jeweils klassischen quantitativen Designs.

Ein Zusammenhang findet sich auch zwischen den Forschungsfeldern 1 und 4: An Entwicklungsforschungsprojekte schließt sich eine empirische Evaluation an; dies kann sich auf Material- und Lehrgangsentwicklung (Quaiser-Pohl 2008) oder auf Curricula (Clements & Sarama 2007) beziehen. Aber auch die umgekehrte Reihenfolge im Forschungsprozess tritt auf, wenn die Material- und Lehrgangsentwicklung der Kompetenzerhebung folgt oder zumindest maßgeblich von dieser beeinflusst worden ist (Krajewski u.a. 2007).

Keine Zusammenhänge lassen sich bislang zwischen den Forschungsfeldern (1) und (4) ausmachen, was ursächlich wohl darauf zurückzuführen ist, dass es bislang in beiden Feldern nur wenige abgeschlossene Projekte gibt. Dabei wäre gerade eine Verknüpfung dieser beiden Forschungsfelder viel versprechend: Seitens der didaktischen Entwicklungsforschung wird kaum an bestehende, aus der Praxis erwachsende Materialien und Lernangebote angeknüpft. Die Besonderheit der Bildungssituation im vorschulischen Bereich, die insbesondere auch stark vom jeweiligen Kindergartenkonzept abhängt, findet deshalb nur unzureichend Eingang in die Entwicklungsforschung. Ein Aufgreifen der schon bestehenden Ansätze könnte ferner den Eingang didaktischer Entwicklungsforschung in die Praxis erleichtern und beschleunigen.

Literatur

Caluori, F. (2004). Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern. Theoretische Modelle und empirische Befunde. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Carlsen, M., Erfjord, I. & Hundeland P. S. (2009). Orchestration of mathematical activities in the kindergarten: The role of questions. CERME 6, Lyon 2009.

Clarke, B., Clarke, D., Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Mathematische Kompetenzen von Vorschulkindern: Ergebnisse eines Ländervergleichs zwischen Australien und Deutschland. In: Journal für Mathematik-Didaktik 29(3/4), S. 259–286.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). Effects of a Preschool Mathematics Curriculum: Summative Research on the Building Blocks Project. In: Journal for Research in Mathematics Education 38(2), S. 136–163.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2003). Building blocks of early childhood mathematics. In: Teaching children mathematics 9(8), S. 480–484.

Gasteiger, H. & Steinweg, A. S. (2007). Zwischenstandsbericht. Wissenschaftliche Begleitung der Implementierung der Lerndokumentation Mathematik im Rahmen des Projekts TransKiGs für das Land Berlin.

Ginsburg, H. P., Inoue, N. & Seo, K.-H. (2004). Young children doing mathematics: observations of everyday activities. In: Copley, Juanita V. (Ed.). Mathematics in the early years. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 88–99.

Grassmann, M. u. a. (1995). Arithmetische Kompetenzen von Schulanfängern – Schlussfolgerungen für die Gestaltung des Anfangsunterrichts. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 23(7), S. 302–321.

Greenes, C., Ginsburg, H. P. & Balfanz, R. (2004). Big math for little kids. In: Early childhood research quaterly 19, S. 159–166.

Krajewski, K. (2008). Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen. In: Petermann, Franz (Hrsg.). Angewandte Entwicklungspsychologie. Göttingen: Hogrefe, S. 275–304.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2007). Mengen, zählen, Zahlen (MZZ). Cornelsen: Berlin.

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B. & Grüßing, M. (2007). Elementarmathematisches Basisinterview. Mildenberger: Offenburg.

Quaiser-Pohl, C. (2008). Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten im Kindergarten mit dem Programm „Spielend Mathe“. In: Hellmich, F. & Köster, H. (Hrsg.). Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften. Heilbrunn: Klinkhardt, S. 103–125.

Schmidt, S. & Weiser, W. (1982). Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. In: Journal für Mathematikdidaktik 3(2), S. 227–263.

Schuler, S. (2009). Was können Spiele zur frühen mathematischen Bildung beitragen? Chancen, Bedingungen und Grenzen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Schuler, S. (2008). Was können Mathematikmaterialien im Kindergarten leisten? – Kriterien für eine gezielte Bewertung, in Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker (CD-ROM).

Schuler, S. & Wittmann, G. (2009). How can games contribute to early mathematics education? A video-based study. CERME 6, Lyon 2009.

Selter, Ch. (1995). Zur Fiktivität der Stunde Null im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Mathematische Unterrichtspraxis 16(2), S. 11–19.

Tirosh, D., Tsamir, P. & Tabach, M. (2009). Can you do it in a different way? CERME 6, Lyon 2009.

Van Luit, J. E., Van de Rijt, B. A. M. & Hasemann, K. (2001). Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ). Hogrefe: Göttingen.

Van Oers, B. (2004). Mathematisches Denken bei Vorschulkindern. In: Fthenakis, W. E. & Oberhuemer, P. (Hrsg.). Frühpädagogik international. Bildungsqualität im Blickpunkt. VS Verlag für Sozialwissenschaften: Wiesbaden, S. 313–329.

Van Oers, B. (1996). Are you sure? The promotion of mathematical thinking in the play activities of young children. European Early Childhood Education Research Journal 4(1), S. 71–89.

Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Moderierte Sektion: Die Vielfältigkeit der Mathematik und/oder Informatik-Didaktik

Bereits Ende der 80er und anfangs der 90er Jahre präsentierten engagierte Mathematikdidaktiker(innen) (vgl. Fuchs (1994), Knöss(1989), Schwill (1993)) Antworten auf die vielfältigen Fragen zum Einsatz von Computern im Unterricht. Strukturelle schulorganisatorische Fragen waren aber in deutschsprachigen Ländern, insbesondere Österreich, derart dominant, dass diese Beiträge der Fachdidaktiker(innen) an der Schulpraxis weitestgehend vorübergingen. Das Hauptaugenmerk in der Entwicklung lag in der „Aufrüstung / Nachrüstung" von Lehrer(innen) im Bedienen der Computer bzw. Kommunizieren mit dem Computer. Methodische Hilfestellungen gab es allenfalls für interessierte Lehrer(innen) in Aus- bzw. Fortbildungskursen, in denen aufbereitetes, allenfalls ausgesuchtes Unterrichtsmaterial erfahrener Kolleg(innen) angeboten wurde. Die Didaktik blieb zunächst (wieder einmal) auf der Strecke.

Durch zahlreiche (fach-)didaktische Arbeiten gegen Ende der 90er Jahre, sowie durch strukturelle Maßnahmen (z.B. Einrichtung von Lehrstühlen für Didaktik der Informatik, Lehrpläne für das Unterrichtsfach Informatik) angeregt, erfolgte jedoch auch in der Informatik eine stärkere Hinwendung zur Didaktik. Die enge Verflechtung von Mathematik- und Informatikdidaktik, die sich auch personell nachvollziehen lässt, hat dazu beigetragen, dass Mathematikdidaktiker einen nicht unwesentlichen Beitrag zur Informatikdidaktik geleistet haben und auch heute noch immer leisten. Vier charakteristische Stationen dieses gemeinsamen Weges lassen sich feststellen, wie dies auch Fuchs in seinem Beitrag zu dieser moderierten Sektion dargestellt hat:

1. Computer-Nutzung im (Mathematik-)Unterricht
2. (Fundamentale) Ideen als Auslöser einer „Emanzipation"
3. Informatische Bildung
4. Informatische Kompetenzen – Hinwendung zu Schüler(innen)

Gerade in der Hinwendung zu Schüler(innen) kann man heutzutage viele Parallelen in den beiden fachdidaktischen Wissenschaftsbereichen feststellen. Puhlmann (2008) empfiehlt eine Strukturierung nach Inhalts- und Prozessbereichen.

Dabei spielt die Frage nach Kompetenzen, die einerseits (punktuell) überprüfbar, andererseits prozessbezogen erworben werden sollten eine entscheidende Rolle. Nicht zuletzt durch die Entwicklung von Bildungsstandards in Mathematik und Informatik (inbesondere für österreichische Schulen) ist der Begriff der Modellbildung in beiden fachdidaktischen Wissenschaften ein aktuell intensiv diskutierter Begriff.

Unterschiede, Gemeinsamkeiten aber auch Ergänzungen der verschiedenen Begriffsbedeutungen werden im Beitrag von Siller erläutert. Mit Hilfe aktueller fachdidaktischer Literatur wird die Notwendigkeit eines klar definierten Modellbildungsbegriffes in beiden Fächern gezeigt.

Die Kombination der beiden (unterschiedlichen) Sichtweisen führt zu interessanten Ansätzen und Betrachtungsweisen. Ziel der moderierten Sektion ist es die partnerschaftlichen Aspekte hervorzuheben, um auch ein kompletteres Bild zum Technologieeinsatz im Unterricht beizutragen. Zukünftige Entwicklungen sollen durch Diskussionen dieser moderierten Sektion vorangetrieben werden. Um dem Thema Vielfältigkeit gerecht zu werden, wurde auch von Haslauer ein weiterer aktueller Forschungsschwerpunkt Fachdidaktik – Rechenschwäche – vorgestellt, der in der zukünftigen Entwicklung der Fachdidaktik Mathematik, allenfalls auch Informatik Einzug halten wird.

Literatur

Fuchs, K. J. (1994): Didaktik der Informatik: Die Logik fundamentaler Ideen. In: Medien und Schulpraxis, 4+5/1994, S. 42-45.

Knöss, P. (1989): Fundamentale Ideen der Informatik im Mathematikunterricht. Dt. Universitätsverlag.

Puhlmann, G. (2008): Bildungsstandards Informatik. http://www.didaktik.mathematik. Uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/ Fortbildugen/3ILTB_Puhlmann_ Bildungsstandards. pdf (14.3.2009)

Reiter, A. (1990): EDV / Informatik im österreichischen Bildungswesen. In: Reiter, A; Rieder, A (Hrsg).: Didaktik der Informatik, Verlag Jugend & Volk, Wien.

Schwill, A. (1993): Fundamentale Ideen der Informatik. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 93/1, S. 20-31.

Karl Josef FUCHS, Salzburg

MATHEMATIK- / INFORMATIKDIDAKTIK – Über den gemeinsamen Weg zweier Wissenschaften

Vor etwa 40 Jahren wurden in Österreich Studiengänge aus Computerwissenschaften und Informatik zusätzlich zu den naturwissenschaftlichen Studien aus Mathematik, Physik, Chemie oder Biologie als technische Studienrichtungen aufgenommen. Mitte der 80er Jahre war zwar der Druck auf die Allgemeinbildende Höhere Schule so groß, dass das Unterrichtsfach Informatik als Pflichtfach in der 9. Schulstufe eingeführt wurde, ein Lehramtsstudium für Höhere Schulen an den Universitäten wurde allerdings nicht eingerichtet. Es dauerte weitere 15 Jahre bis man schließlich auf der Basis des UniSTG98 das Lehramtsstudium aus Informatik und Informatikmanagement als ‚reguläres' Kombinationsfach an drei österreichischen Universitäten belegen konnte.

Zirka zehn weitere Jahre sind mittlerweile vergangen. Ich meine, dass nun ein geeigneter Zeitpunkt gekommen ist, um inne zu halten. Allerdings nicht, um in Erinnerungen zu verhaften, sondern vor allem um aus der Analyse des Vergangenen zukünftige Aufgaben für die Weiterentwicklung der Mathematik- und Informatikdidaktik zu formulieren. Die damit einhergehende Zusammenführung jeweils spezifischer Sichtweisen sowie das Aufzeigen von Gemeinsamkeiten in den Strukturen (Fuchs 2008; Fuchs, Siller 2009) erscheinen mir nämlich mittlerweile dringend notwendig um die nach der Emanzipation der Informatikdidaktik immer größer werdende Kluft zwischen den Forschungsgemeinschaften der Mathematik- und Informatik-didaktik zu schließen.

1. Computer Nutzung im Mathematikunterricht

Die Anfangsphase der Integration des Computers blieb im Wesentlichen auf den Mathematikunterricht beschränkt. In den fachdidaktischen Publikationen wurden Vorschläge zur Gestaltung des Unterrichts mit Computern präsentiert. Es handelte sich um die Kodierung einfacher mathematischer Verfahren wie dem Lösen einer quadratischen Gleichung oder der Implementierung des Primzahlsiebs des Erathostenes.

Mit dem Computer Unterstützten Unterricht (CUU) war ausschließlich Programmierunterricht gemeint. Die Diskussionen über die Vorteile und Nachteile einzelner Programmiersprachen (Schlagwort: Strukturierte Programmierung) waren dominanter als die Diskussion Informatischer Konzepte. Der Computer wurde weitestgehend nur als Rechenwerkzeug zur Automatisierung von Routinetätigkeiten und weniger als Lernmedium gesehen.

2. Ideen als Auslöser der Emanzipation

Mit der These *Problemlösen, das mit der Kodierung beginnt, ist nicht genetisch* wies ich im Gefolge der Diskussionen über die LOGO - Philosophie (Bender 1987), (Ziegenbalg 1987) mit einem Beitrag im Journal für Didaktik der Mathematik (Fuchs 1988) auf die einseitige Konzentration in der Computer Nutzung als reine Programmierphilosophie hin. Die Kodierung sollte nur als ein Schritt im Zyklus des Problemlösens gesehen werden, nämlich als Stufe der Implementierung. Die einzelnen Schritte des Problemlösens wurden mittlerweile als Kern in die komplexere Leitidee der *Modellierung* für einen zeitgemäßen Mathematik- und Informatikunterricht aufgenommen (Siller 2008).

3. Als deutlicher Hinweis auf die Bedeutung von Ordnungsprinzipien für einen sinnvollen Einsatz des Computers im Mathematikunterricht muss die Arbeit von Petra Knöß (1989) gesehen werden. *Modularisierung* und *Strukturierung (Kontroll- und Datenstrukturen)* sind wesentliche Elemente einer planvollen *Algorithmisierung*. Als wegbereitend für die Emanzipation einer Fachdidaktik Informatik als selbstständige Wissenschaft sehe ich den Beitrag von Andreas Schwill (1993) im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik an. *Der Informatikunterricht soll sich nach den langlebigen Grundprinzipien und Denkweisen der Informatik ausrichten* lautet seine Forderung.**Informatische Bildung**

Mit dieser Aufforderung wurde aber nicht nur die Informatikdidaktik als eigenständige Wissenschaft begründet. Sie leitete vielmehr noch die Diskussion über eine zeitgemäße Informatische Bildung ein, wodurch die Fachdidaktik Informatik aufgefordert wurde bzw. ist, eine Struktur zu liefern. Das Konzept einer Informatischen Bildung, das sich bisher stark an der Programmierung orientierte (GI Empfehlungen 1976) wurde abgelöst durch ein Konzept, das im Wesentlichen auf drei Säulen beruht (orientiert an Hubwieser 2007)

- Schulung von Bedienerfertigkeiten

Damit wurde vor allem auch dem sinnstiftenden Umgang mit allgemeinen Anwendersystemen wie Tabellenkalkulations-, Textverarbeitungs-, Präsentationssoftware sowie spezifischen Anwendersystemen wie Computer Algebra Systemen (CAS), Dynamische Geometrie Software (DGS), Computer Aided Design (CAD) Rechnung getragen.

- Einsatz des Computers als Lehr- / Lernmedium

Die Palette der Einsatzmöglichkeiten reicht vom Einsatz spezieller Simulationsprogramme zum Studium von Umweltphänomenen (etwa Auswirkungen rigoroser Wildbachverbauung auf starke Regenfälle (Muren, Hochwasser)) bis hin zur Begleitung und Unterstützung der Lehre durch Content Management Systeme.

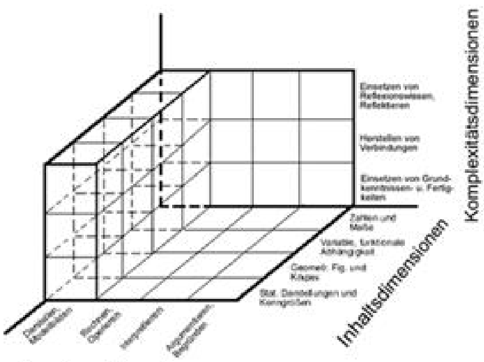
- Die Formulierung zeitloser Grundprinzipien der Informatik

Darunter fallen Ideen der *Modellierung* in ihren unterschiedlichen Implementierungsausprägungen (*zustandsorientiert, imperativisch - prozedural, funktional, objektorientiert*) oder etwa auch die Idee der *Strukturierten Zerlegung*.

4. Kompetenzmodelle *oder* Die Hinwendung zu Schüler(innen)

Moderne Fachdidaktiken zeichnen sich aber neben der Präsentation von Bildungskonzepten durch eine stärkere Berücksichtigung der Fertigkeiten und Fähigkeiten aus, die die Schüler(innen) durch den Unterricht in den einzelnen Fächern erwerben und erweitern sollen.

Mathematische und Informatische Kompetenzmodelle stimmen in den beiden Grunddimensionen weitestgehend überein. Besteht das Modell in der Mathematik aus der Inhaltsdimension, der Handlungsdimension und der Komplexitätsdimension,



Modell Mathematischer Kompetenzen (Heugl, Peschek 2007)

so werden die Informatischen Kompetenzen ebenfalls über eine Inhaltsdimension und eine Prozessdimension, die der Handlungsdimension der Mathematik entspricht, beschrieben.

Modell Informatischer Kompetenzen (aus: Puhlmann, H. 2008)

Im Beitrag richtete ich meinen Blick auf die Vergangenheit und zuletzt auf aktuelle Entwicklungen in der Gegenwart. Für die Diskussion der daraus zu ziehenden Schlüsse für die Zukunft blieb aufgrund der Auflagen für den Umfang kein Platz. Ableitungen müssen daher an dieser Stelle den Leser(inne)n selbst überlassen werden.

Literatur

Bender, P. (1987). Kritik der LOGO – Philosophie. Journal für Didaktik der Mathematik, H 1 / 2, 3 – 103.

Fuchs, K. (1988). Erfahrungen und Gedanken zu Computern im Unterricht. Journal für Didaktik der Mathematik, H 2 / 3, 247 – 256.

Fuchs, K. J. (2008). Teacher Studies in Austria – Bridging the Gap between Mathematics and Informatics Education. Informatics Education Europe III, Universitas Forsari Venice, 52 – 66.

Fuchs, K.J.; Siller, H-S. (2009). The Complexity of Mathematics and Informatics Education's Theoretical and Practical Face. International Journal for Arts and Sciences, Las Vegas Conference

Heugl, H.; Peschek, W. (2007): Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07. Institut für Didaktik der Mathematik – AECC für Mathematik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung Alpen-Adria-Universität (Hrsg.), Klagenfurt.

Hubwieser, P. (2007). Didaktik der Informatik. Grundlagen, Konzepte und Beispiele. Berlin: Springer Verlag.

Knöß, P. (1989). Fundamentale Ideen der Informatik im Mathematikunterricht. Deutscher Universitätsverlag.

Puhlmann, H. (2008). Bildungsstandards Informatik. http://www.didaktik.mathematik.Uni-wuezrburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Fortbildungen/3ILTB_Puhlmann_Bildungsstandards.pdf (14.3.2009)

Siller, H-S. (2008). Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik. Aachen: Shaker Verlag.

Ziegenbalg, J. (1987). Anmerkungen zur „Kritik der LOGO – Philosophie“. Journal für Didaktik der Mathematik, 4, 305 – 313.

Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Der Begriff „Modellbilden“ in der Mathematik- bzw. Informatikdidaktik

Liest man fachdidaktische Literatur aufmerksam durch und beschäftigt sich eine Weile mit verschiedenen Konzepten, so stößt man sicherlich einmal auf den Begriff der Modellbildung. Dieser Begriff wird nun schon seit einigen Jahrzehnten in den Fachdidaktiken diskutiert und erfreut sich, auch durch die Diskussion um Bildungsstandards ausgelöst, wieder einer intensiven (wissenschaftlichen) Diskussion. Zahlreiche Expert(inn)en setzen sich mit diesem Thema auseinander und versuchen mit unterschiedlichen Sichtweisen dieses didaktische Gebiet zu bearbeiten. Zahlreiche Vorträge in Arbeitsgruppen wie z.B. auf der ICME 2008 (TSG 21), der CERME (WG 11), aber auch die moderierten Sektionen der jährlich stattfindenden GDM-Tagung, siehe Borromeo Ferri / Greefrath / Maaß bzw. Leiß / Reiss / Schukajlow / Zöttl, zeigen die Bedeutung dieses Themas für die Mathematikdidaktik. Aber auch in anderen Fachdidaktiken ist der Begriff der Modellbildung von großer Bedeutung. Ich möchte dabei meinen Fokus auf die Informatikdidaktik richten.

In beiden Disziplinen, sowohl der Mathematikdidaktik, als auch der Informatikdidaktik meint man in der Regel mit dem Begriff Modellbilden den Vorgang der Konstruktion eines Modells, dass einen bestimmten Sachverhalt mustergültig aber vereinfacht widerspiegelt. Ein wesentliches Kennzeichen um zwischen dem Original und dem Modell unterscheiden zu können ist die bestehende „Verkürzungsrelation“.

Möchte man das deutsche Wort Modell näher erläutern, so bietet sich die Charakterisierung von Stachowiak (1973) an, der in seinem Werk „Allgemeine Modelltheorie“ eine fächerunabhängige Sichtweise dargelegt hat: „Das deutsche Wort Modell besitzt ursprünglich, d.h. vor der neuerlichen Erweiterung und Präzisierung seines Begriffsinhalts, dieselbe Bedeutung wie seine Übersetzungsäquivalente modèle und modello, und zwar sowohl im physiko-technischen wie im künstlerischen Bereich mit der bekannten zweifachen Doppelbedeutung:

1. Modell als a) Abbild von etwas sowie b) Vorbild für etwas,

2. Modell als c) Repräsentation eines bestimmten Originals (im Sinne von a) und b)) sowie d) in Malerei und Plastik, vom vorgenannten Wortgebrauch abweichend, als weibliches oder männliches Individuum an dem sich die künstlerische Nachbildung eines Menschen (…) orientiert.“

Für Stachowiak gibt es drei Hauptaugenmerke des allgemeinen Modellbegriffs, die natürlich dann in die einzelnen Fachdisziplinen für die jeweiligen Bedürfnisse erläutert werden müssen (1973):

- Abbildungsmerkmal
- Verkürzungsmerkmal
- Pragmatisches Merkmal

In den nachfolgenden Kapiteln möchte ich den Begriff der Modellbildung kurz für die beiden Fächer Mathematik und Informatik charakterisieren und im letzten Kapitel versuchen die unterschiedlichen Modellbildungsbegriffe zu vereinigen.

1. Modellbilden in der Mathematik

Die Mathematik kann dazu verwendet werden, um eine abstrakte aber präzise Modellierung unserer realen Umwelt zu erzeugen. Mit Hilfe der Gleichungen, Funktionen o.ä, welche das mathematische Modell beschreiben, kann dann gerechnet werden, um Analysen zu erstellen, Beeinflussungspotentiale zu ermitteln oder Reaktionen vorherzusagen.

Bereits 1977 konnte man einen Modellierungskreislauf in der didaktischen Literatur finden. Dieser wurde von Pollak (1977) erstellt. Aus meiner Sicht würde ich dies als den Ausgangspunkt für die fachdidaktische Diskussion in Mathematik bezeichnen. Denn viele weitere Fachdidaktiker haben sich in der Folge mit dem Begriff der Modellbildung bzw. des Modellbildungskreislaufes auseinandergesetzt. Erwähnen möchte ich hier insbesondere Müller und Wittmann (1984), Blum (1985), Fischer und Malle (1985), Schupp (1987), Borromeo Ferri (2006) sowie Blum und Leiß (2007). Das Anliegen all dieser Didaktiker war es, den Begriff der Modellbildung aus mathematisch-didaktischer Sicht noch besser zu untersuchen, bzw. noch nicht beachtete Komponenten einzubringen, um zu einem umfassenden, aber präzisen Begriff der Modellbildung zu gelangen.

In meiner Auseinandersetzung wurde ich von allen diesen Auffassungen des Modellbildungsbegriffes beeinflusst. Der Modellbildungskreislauf, der aus meiner Überzeugung die bislang umfangreichste Beschreibung darstellt, stammt von Blum und Leiß (2007). Aufgrund des, wie ich annehme, allgemeinen Bekanntheitsgrades diese Modellbildungskreislaufes verzichte ich an dieser Stelle auf eine grafische Darstellung.

Den Begriff der Modellbildung findet man auch immer wieder im Zusammenhang mit der Diskussion um Bildungsstandards. Der Begriff wird hier, zumindest in Österreich, sehr eng gefasst, nicht zuletzt um die Überprüfbarkeit einer exakt definierten mathematischen Kompetenz zu gewährleisten. Der Begriff selber, um den die Fachdidaktiker(innen) jahrzehntelang gerungen haben, leidet natürlich unter solchen „Beschneidungen“. Hier sollte in jedem Fall darauf geachtet werden, dass Prüfungssituation und Unterrichtssituation gezielt auseinandergehalten werden. Darauf muss bereits in der Lehrerausbildung und Lehrerweiterbildung Rücksicht genommen werden, um auch der Lehrerschaft verständlich mitzuteilen, dass es möglich ist, kreative mathematische Tätigkeiten im Unterricht durchzuführen und trotzdem bei Standards-Überprüfungen erfolgreich zu bestehen.

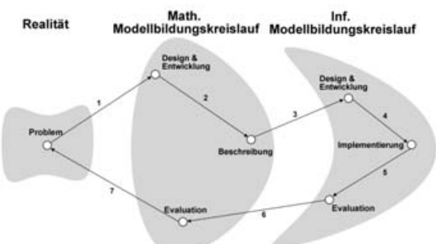
2. Modellbilden in der Informatik

Die Wurzeln des Unterrichtsfaches Informatik können zweifelsohne in der Mathematik gefunden werden. Nähere Ausführungen dazu finden sich in Siller (2008). Somit ist es auch nicht weiter verwunderlich, dass man in beiden Wissenschaften einen Modellbildungsbegriff finden kann, der viele Gemeinsamkeiten aufweist. In der Informatik möchte man ebenfalls wie in der Mathematik Abstraktionen durchführen und diese automatisieren. In der Informatik kümmert man sich in erster Linie um die Konstruktion von passenden Modellen zu einer (bestimmten) Repräsentation der Problemstellung. Allerdings kann die Informatik vor allem dann eingesetzt werden, wenn die Mathematik bereits Modelle bereit gestellt hat. Mit Hilfe der Informatik kann man Modelle erstellen, die es ermöglichen, die Modelle, die in der Mathematik erstellt wurden, zu berechnen. Informatische Modelle unterstützen den Modellierer v.a. bei der Beherrschung, allenfalls effizienten Nutzung, von komplexen Prozessen und Strukturen. Grafisch ist dies von Thomas (2000) und Schwill (1995) aufbereitet worden.

Eines der Hauptziele der Informatik ist es, Modelle zu erstellen, die sich vom Original nur geringfügig unterscheiden und mittels Computern ausgeführt werden können. Man könnte auch sagen, man erzeugt durch die Nutzung der Modelle eine virtuelle Realität.

3. Modellbilden – Zusammenführung der beiden Fächer

Wie in Kapitel 2 bereits deutlich geworden ist, kann die Informatik dann eingesetzt werden, wenn eine mathematische Modellierung bereits vorliegt. In welcher Art die weitere Modellierung in der Informatik stattfindet (imperativ-prozedural, funktional, objektorientiert) hängt von der Implementierung, aber auch Fähigkeiten des Modellierers ab. Wichtig dabei ist jedoch zu erkennen, dass der Einfluss von Technologie die Modellierungskompetenz, insbesondere den Modellierungskreislauf, beeinflusst.



Greefrath / Siller (2008) haben dies in einem ersten Versuch dargestellt. Die Beeinflussung durch die Hinzunahme von Technologie wird von uns auch weiterverfolgt, da hier sicherlich zukünftig noch intensive didaktische Forschung notwendig ist, wie bereits in Siller / Greefrath (2009) ersichtlich wird.

Literatur

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion, Math. Semesterber. 32 (2), pp. 195-232.

Blum, W. & Leiss D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example “Filling up”. In Haines et al. (Eds.), Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood Publishing.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process, ZDM 38 (2), pp. 86-95.

Fischer, R. & Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik, Mannheim Wien Zürich: Bibliographisches Institut.

Greefrath, G.; Siller, H.-St.(2008). The concept of Modelling in Mathematics and Informatics. In: Haapasalo, L.; Hvorecky, J. (Hrsg.): Essentials for Bringing Real-World Problems into Maths Education

Müller, G.; Wittmann, E. Ch. (1984). Der Mathematikunterricht in der Primarstufe, Braunschweig Wiesbaden: Vieweg.

Pollak, H. O. (1977). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects (Including Integrated Courses), Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education, Karlsruhe, 255-264

Schupp, H. (1987). Applied mathematics instruction in the lower secondary level: between traditional and new approaches. In: Blum, Werner et al. (Hrsg.): Applications and modelling in learning and teaching mathematics, 37. Chichester: Horwood.

Schwill, A. (1995). Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik, in: Hischer, H.; Weiß, M. (Hrsg.): Fundamentale Ideen, p. 18–25, 1995

Siller, H.-St. (2008). Informatics – A Subject Developing Out of Mathematics. In: HPM-confercence-proceedings, Mexico City

Siller, H.-St.; Greefrath, G. (2009): Mathematical Modelling in Class Regarding To Technology. In: CERME-post-conference-proceedings, Lyon

Thomas, M. (2000). Modellbildung im Schulfach Informatik, in: Hischer, H. (Hrsg.): Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht, Hildesheim: Franzbecker, 39-46.

Martin WINTER, Vechta

Moderierte Sektion: Förderung mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung in Kindergärten: eine Initiative „von unten"

Im Zuge der Forderung nach einer Intensivierung mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung bereits im Vorschulalter[1] geraten KiTas unter zunehmenden Druck. Die öffentliche Kritik über Ausbildungs- und Kompetenzmängel trägt dabei nicht zur Motivation der Erzieherinnen bei. Diese gestehen durchaus ein, über spezifisch naturwissenschaftliche oder erst recht mathematische Fragestellungen zu wenig informiert zu sein. Gleichwohl fühlen sie sich angesichts oft langjähriger pädagogischer Erfahrung in der Arbeit mit Kindern zu Unrecht abqualifiziert. Angesichts der Arbeitsbedingungen, die zu wenig Raum für umfangreiche Fortbildungsmaßnahmen zulassen, und unter materiell z.T. völlig unzulänglicher Ausstattung fühlen sie sich zugleich überfordert, manche Anforderungen im KiTa-Alltag umzusetzen.

Auf diesem Hintergrund hat sich in der Stadt Lohne (Ol.) unter dem Namen LIFE e.V.[2] eine Elterninitiative konstituiert. Diese hat bei der Stadt Mittel eingeworben, um in KiTas Projekte mit mathematisch-naturwissenschaftlichen Aspekten zu fördern. Ausschlaggebend für die Initiatoren war dabei, dass bei der „normalen" finanziellen Ausstattung für die KiTas monatlich lediglich etwa 0,50 € pro Kind zur Verfügung stehen, die im KiTa-Alltag für Verbrauchsmaterial verwendet werden können. Fordert man also von KiTas die Durchführung besonderer Projekte, so ist sicher zu stellen, dass dazu die finanziellen Möglichkeiten gesichert werden. Die Konzentration auf mathematisch-naturwissenschaftliche Aspekte wird damit begründet, dass dieser Bereich besonders defizitär und zugleich von zukunftsweisender Bedeutung ist.

Seit 2007 werden Mittel zur Förderung in den KiTas Verfügung gestellt. Bedingung der Stadt ist eine externe Qualitätssicherung der Maßnahmen, zu der die Universität Vechta die wissenschaftliche Begleitung durch das Institut für Didaktik der Mathematik der Naturwissenschaften und des Sachunterrichts[3] übernimmt. Ferner werden in die Begleitung Lehrkräfte

---

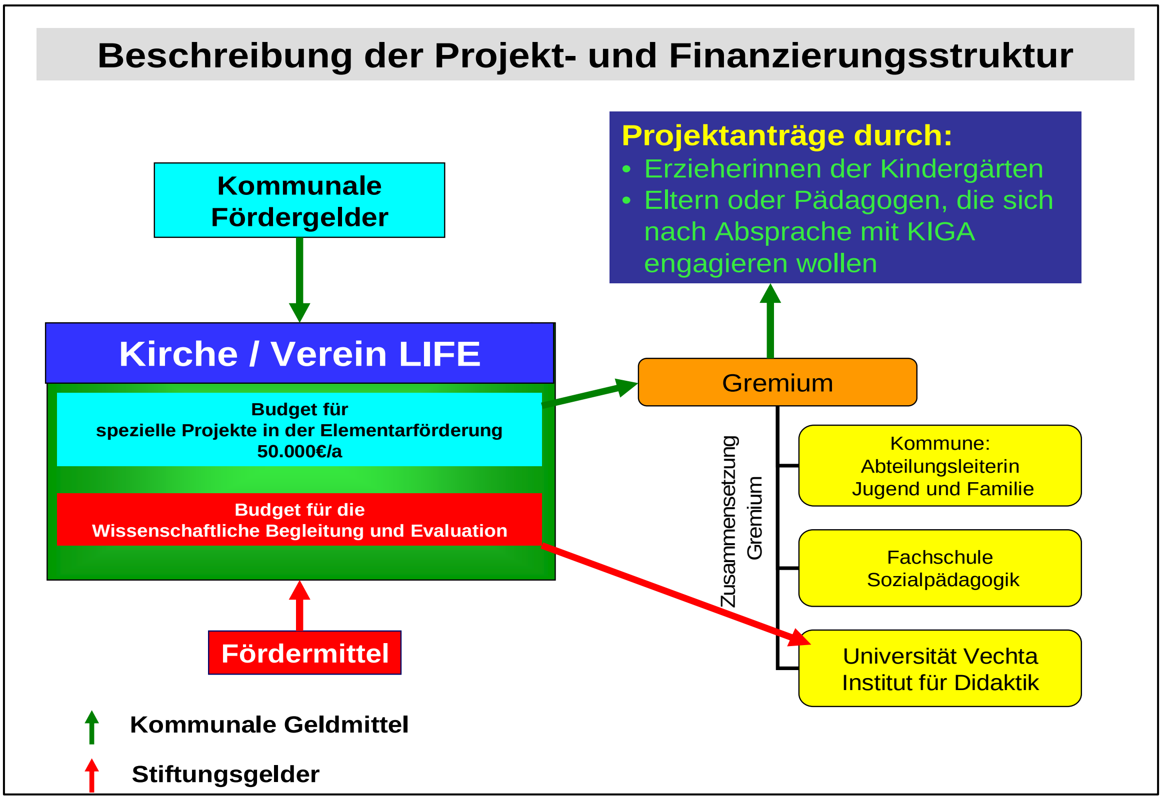
[1] vgl. Nds. Kultusministerium (2004): Orientierungsplan für Bildung und Erziehung im Elementarbereich niedersächsischer Tageseinrichtungen für Kinder

[2] „Lohner Initiative zur Förderung des Elementarbereichs"

[3] Verantwortlich für den mathematischen Bereich Prof. Dr. M. Winter, für den naturwissenschaftlichen Bereich Prof. Dr. S. Wittkowske, Didaktik des Sachunterrichts

der Fachschule für Sozialpädagogik Marienhain, Vechta, einbezogen. An dieser Fachschule ist die Erzieherinnenausbildung der Region angesiedelt.

Bei der Projektförderung geht die Initiative davon aus, dass mit den finanziellen Mitteln zusammen mit begleitender Öffentlichkeitsarbeit ein Anreiz für die Erzieherinnen geschaffen wird, aktiv zu werden und sich in Fragestellungen mit mathematisch-naturwissenschaftlichen Aspekten einzuarbeiten. Gezielte Fortbildungsangebote dienen dabei als Impulse. Für die Angebote selbst werden Referenten mit oder ohne Unterstützung der Universität Vechta eingeladen. Die Antragstellung durch die Erzieherinnen unterliegt gewissen Regeln, unter anderem der Verpflichtung zur Dokumentation des Projekts sowie des Nachweises der Mittelverwendung. Die Vergabe erfolgt durch ein Gremium, in dem Vertreter von LIFE e. V., den Kooperationspartnern sowie der Stadt Lohne über die Anträge beraten und beschließen (vgl. Abbildung).



Quelle: LIFE e.V.

In der Sektion der diesjährigen Tagung werden in einem ersten Vortrag (M. Winter) Erfahrungen aus der wissenschaftlichen Begleitung der Initiative vorgestellt. In einem zweiten Vortrag stellt eine Mitarbeiterin der Universität Vechta (M. Teutenberg) ein Projekt vor, das im Rahmen der geförderten Maßnahmen unter engeren Forschungsperspektiven in einem Kindergarten durchgeführt wurde.

Informationen zu LIFE e.V. : www.lohne-life.de

Martin WINTER, Vechta

Mathematisch-naturwissenschaftliche Projekte in Kindergärten: Evaluation einer Elterninitiative

In Lohne (Ol.) fördert die Initiative LIFE e.V. mathematisch-naturwissenschaftlich geprägte Projekte in KiTas. Die durch die Stadt Lohne finanzierten Maßnahmen werden durch die Universität Vechta evaluiert[1].

1. Elemente der Arbeit der Initiative LIFE e.V.

LIFE bietet unter anderem Impulsveranstaltungen zur Fortbildung von Erzieherinnen an. Die Initiative wird begleitet durch intensive Öffentlichkeitsarbeit, geplant sind auch Angebote für Eltern. In der Perspektive wird die Anlage einer Datenbank mit den Projektkonzepten angestrebt. Kern der Arbeit ist jedoch die Finanzierung der von Erzieherinnen initiierten Projekte.

2. Projektanträge und Mittelvergabe

Die finanzielle Unterstützung bietet einen Anreiz zur Planung von Projekten; die Beantragung erfolgt durch Erzieherinnen. Dabei sind die Planung mit didaktischen Überlegungen, Zielsetzungen und Kostenplanung darzustellen. Über den Antrag entscheidet ein Gremium, das durch Vertreter von LIFE, der Stadt, der Fachschule für Erzieherinnen sowie der Universität Vechta besetzt ist. Nach methodisch-didaktischer Beratung durch Lehrkräfte der Fachschule sowie ggf. fachlicher Beratung durch die Wissenschaftler werden die Mittel vergeben. Die KiTas verpflichten sich zu Dokumentation sowie dem Verwendungsnachweis für die finanziellen Mittel.

3. Besondere Bedingungen der wissenschaftlichen Begleitung

Die Rahmenbedingungen relativieren die Möglichkeiten zur Umsetzung eigener Forschungsintentionen, denn

- die Projekte beruhen auf externer Initiative, die wissenschaftliche Begleitung beschränkt sich zunächst auf ein Konzept zur Evaluation,

- die Anzahl von Projekten in den in KiTas ist beträchtlich; daraus resultiert ein kapazitäres Problem; abgesehen von exemplarischen intensiveren Begleitungen muss die Evaluation auf der Grundlage der Dokumentation durch die Erzieherinnen stattfinden,

- der zeitliche Ablauf der Projekte wird durch die KiTas bestimmt; daraus resultieren Probleme der zeitlichen Koordinierung

[1] s. Winter, M.: Sektion: Förderung mathematisch-naturwissenschaftlicher Früherziehung : eine Initiative „von unten“ – im vorliegenden Band.

4. Instrumente der Evaluation und besondere Forschungsinitiativen

Die Evaluation wird auch seitens der Stadt als „begleitende" Evaluation verstanden. Dieses beinhaltet die Beteiligung bei der Mittelvergabe sowie die Beratung. Ggf. ist auch eine Intervention denkbar, wenn Vorhaben aus fachinhaltlichen oder didaktischen Erwägungen problematisch erscheinen[2].

Basis für die (vorläufig) abschließende Evaluation gegenüber der Stadt sind neben im Einzelfall detaillierteren Beobachtungen der Projektabläufe die Dokumentation der Projekte und Befragungen der Erzieherinnen. Das Fach Mathematik hat daneben in weitem Umfang das Elementarmathematische Basisinterview (EMBI) eingesetzt. Die Ergebnisse dieser Diagnostik lassen Rückschlüsse über das globale Leistungsspektrum in den KiTas erkennen. Messbare Lernfortschritte, die kausal auf die Beteiligung an Projekten zurück zu führen wären, werden in diesem Zusammenhang nicht erwartet.

In begrenztem Rahmen werden Projekte durch die Universität selbst initiiert. Diese sind als Interventionsstudien mit spezifischen Forschungsfragen geplant. Ziel ist dabei die Verallgemeinerbarkeit für die Alltagsarbeit in den KiTas. Es wird aber der Eindruck vermieden, dass mit diesen Projekten die Initiativen der Erzieherinnen durch Maßnahmen „von oben" ersetzt werden. Ein Beispiel einer derartigen Studie liefert M. Teutenberg (in diesem Band).

5. Beispiele durchgeführter Projekte

Aus der beträchtlichen Anzahl durchgeführter Projekte seien einige hervorgehoben. Allen ist gemeinsam, dass sie in das jeweilige Profil der Einrichtung eingebettet sind und sich die Erzieherinnen einem ganzheitlichen Bildungsauftrag verpflichtet fühlen. Mathematische Aspekte sind in unterschiedlicher Weise in den Blick genommen worden. An den Projekten waren Kinder in unterschiedlichen Gruppierungen beteiligt: Manche Gruppen wurden ausschließlich von Kindern im letzten Jahr vor der Einschulung gebildet, es gab aber auch altersgemischte Gruppen unter Einschluss von „Integrationskindern" bzw. Kindern unter drei Jahren.

5.1 Kindergarten St. Maria Goretti Lohne: Geheimnis der Steine

Die Erkundung ihrer Eigenschaften und Strukturen von Steinen ebenso wie ihre Verwendung standen im Vordergrund. Insofern bildeten eher naturwissenschaftliche Gesichtspunkte die Basis der Erfahrungen der Kinder, auch ohne dass diese Aspekte im Detail reflektiert wurden. Gleichwohl gab es eine Reihe von mathematischen Aspekten in den Aktivitäten, einige seien

---

[2] So wurde z.B. eine Häufung verschiedener, parallel in einem engen Zeitraster geplanter Projekte nicht für sinnvoll erachtet. Durch ein Beratungsgespräch konnte für eine sinnvolle „Entzerrung" gesorgt werden.

genannt: Steine wurden in unterschiedlicher Verwendung zur Gestaltung wahrgenommen, in Mustern von Pflasterungen oder Mauerwerk. „Interessante“ Steine wurden gesammelt, gezählt, Anzahlen wurden verglichen. Steine wurden nach Beschaffenheit sortiert (=klassifiziert), nach Größe oder Gewicht angeordnet. Die Aspekte wurden von Erzieherinnen bewusst in die Planung eingebracht und/oder in der Arbeit mit den Kindern wahrgenommen und artikuliert.

5.2 Kindergarten St. Barbara Lohne: Türme und Brücken

Zeitliche Bedingungen erzwangen die Konzentration auf Erfahrungen mit „Türmen“. Es standen neben physikalischen und gestalterischen Aspekten vor allem geometrische Erfahrungen im Vordergrund, insbesondere in der Unterscheidung von Bauteilen, sowie der Funktionalität geometrischer Elemente für die Konstruktion und Stabilität. Ebene Figuren wie Kreis, Dreieck, Quadrat und Rechteck wurden bewusst wahrgenommen und benannt. Geometrische Körper Würfel, Quader und Zylinder kamen als Bestandteile, bzw. in Form von Pappschachteln etc. als Baumaterial vor. In Messungen fanden Kinder elementaren Zugang zu Längen und -einheiten.

Da die Kinder Objekte auch in gemeinsamen Aktivitäten herstellten, kam es insbesondere zum sprachlichen Austausch über Planungen und Strategien bei der Auswahl und Verwendung von Bestandteilen zum Bau von Türmen.

5.3 Kindergarten St. Gertrud Lohne: Anziehung und Schwerkraft

Mit unterschiedlichen Kugeln wurde auf unterschiedlichem Untergrund experimentiert; schließlich wurden Kugelbahnen von Kindern hergestellt. Neben physikalisch-technischen Aspekten waren geometrische Erfahrungen möglich. Die besonderen Eigenschaften der Kugel standen im Vordergrund. Mit der unterschiedlichen Neigung der Bahnen („schiefe Ebene“) wurden intuitiv Erkenntnisse zum Winkelbegriff gewonnen („Neigungswinkel“). Indem Kinder in sprachlichen Beschreibungen „Beschleunigung“ und „Geschwindigkeit“ auf ihrem Niveau erfasst haben, hatten sie zugleich Gelegenheit zur Wahrnehmung funktionaler Zusammenhänge.

5.4 Kindergarten St. Michael Lohne: Was Kinderhände können

Dieses Projekt umfasste einen weiten Rahmen ganzheitlicher Aspekte, von der sinnlichen Wahrnehmung bis hin zu sozial-emotionalen Aspekten. Bezüglich der Mathematik wurden die Möglichkeiten des Zählens unter Beteiligung der Finger stark in den Vordergrund gerückt, aber auch die Möglichkeiten der Gestaltung, die man mit den Händen hat: Dies lenkte den Blick auch auf geometrische Formen und Körper.

5.5 Kindergarten St. Franziskus Lohne: Messen, Wiegen und Vergleichen - mit Zahlen lässt sich viel erreichen

Ausgehend vom Umgang mit Zahlen und Mengen wurden Zählfertigkeiten geübt. Kinder wurden mit Ziffern und zugehörigen Zahlwörtern vertraut. Sie erfuhren die Bedeutung der Zahlen im Kontext von Messvorgängen. Messungen beschränkten sich dabei nicht auf Längen, es wurden in „Umschüttexperimenten“ auch Erfahrungen im Vergleich von Volumina und Gewichten gemacht. Die Aktivitäten wurden so angelegt, dass Kinder auch in vielfältigen Bewegungen Erfahrungen mit ihrem ganzen Körper und „mit allen Sinnen“ machen konnten. Erfahrungen mit geometrischen Figuren und Formen waren dabei eingeschlossen, wenn auch der Aspekt des Gebrauchs von Zahlen immer wieder in den Mittelpunkt rückte

5.6 Besondere Projekte: Denkexperten – Schnecke, Stein und Löwenzahn

Auf Projekte mit besonderem Interventionsdesign sei hier nur verwiesen: Zum mathematisch-orientierten Projekt s. TEUTENBERG; dieses wie auch das naturwissenschaftlich orientierte Projekt zur Frage des „Lebendigen“ wurden unter intensiveren Beobachtungen und zeitlich dichter durchgeführt, zielten aber auch auf eine mögliche Integration in den KiTa-Alltag.

6. Erfahrungen

Die Erfahrungen mit „LIFE“ zeigen bei den Erzieherinnen ein hohes Maß an Motivation. Durch die Akzeptanz ihrer eigenen Initiative fühlen sie sich ernst genommen, auch die finanzielle Unterstützung wird als Respekt vor der Bedeutung der erzieherischen Arbeit angesehen. Die Dokumentationen lassen erwarten, dass es zu einer verstärkten Vernetzung der Erfahrungen der beteiligten Erzieherinnen in den Einrichtungen kommt. Die Dokumentationen werden als Impulse verstanden und können zur Erleichterung eigener Folgeplanungen aufgegriffen werden.

Die Auseinandersetzung mit den Themen wird von den Erzieherinnen als Erweiterung der eigenen beruflichen Qualifikation wahrgenommen. Dies erscheint mit Bezug auf die unmittelbare Praxiswirksamkeit effektiver als „von oben verordnete“ Fortbildung, deren Umsetzung ungewiss bleibt.

Die unterschiedlichen Ansätze in der Durchmischung von Altersgruppen bleiben in ihren Auswirkungen noch ein offenes Arbeitsfeld.

Schon jetzt aber lässt sich bilanzieren, dass diese „Initiative von unten“ Modellcharakter für die Qualitätsentwicklung von Elementarerziehung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Schwerpunkt haben kann.

Merle TEUTENBERG, Vechta

Schlussfolgerndes Denken handlungsorientiert entwickeln und fördern.

1. Projekte in Kindertagesstätten

Die Initiative LIFE e.V. (vgl. M. Winter, in diesem Band) fördert naturwissenschaftliche und mathematische Projekte finanziell. Ziel ist es, mehr mathematische Inhalte in den Kindergarten zu bringen, um mathematische Bereiche spielerisch zu fördern. Auch das im Folgenden dargestellte Projekt wurde durch die Elterninitiative ermöglicht.

2. Stellenwert des schlussfolgernden Denkens

Das Projekt „Denkexperten“ soll schlussfolgerndes Denken bei Kindern entwickeln, ausbauen und fördern. Es geht dabei um aussagenlogische Begriffe, wie *und*, *oder*, *entweder…oder* und *nicht*, die auch im Alltag eine große Rolle spielen. Der Begriff „Schlussfolgerndes Denken“ kann folgendermaßen beschrieben werden: „Man [kommt] von etwas Gegebenem zu etwas Neuem“ (Oerter/ Dreher, 1998). Drei Bestandteile sind ausschlaggebend für dessen Bedeutung. Diese drei Bestandteile tauchen sinngemäß auch in einer Definition von Logik auf: „Logik ist die Wissenschaft des Wörtchens „also“, d.h. die Wissenschaft, die zu systematisieren versucht, unter welchen Bedingungen eine Behauptung, einen gültigen Schluss hervorgebracht zu haben, als gerechtfertigt gelten kann“ (Strohbach, 2005). Der Zusammenhang besteht zwischen Begriffen wie „Behauptung“ und „etwas Gegebenem“: Es gibt eine Grundlage, von der man ausgeht. Diese muss überprüft werden, *Bedingungen* und Regeln werden eingehalten. Der Weg („man kommt“), die Einhaltung der Regeln bringt als Ergebnis („etwas Neues“), bzw. lässt einen gültigen Schluss zu. Beide Zitate können schwer voneinander abgegrenzt werden. Der Begriff „schlussfolgerndes Denken“ wird jedoch seltener verwendet als die Begriffe „Logik“ oder „logisch“. Letztere werden oft unüberlegt benutzt, in anderen (häufig auch falschen) Kontexten. An dieser Stelle soll die Verwendung des Begriffs „Schlussfolgerndes Denken“ festgelegt werden, wobei dieser den engen Zusammenhang zur Logik nicht außer Acht lassen darf.

Schlussfolgerungsprozesse bei Kindern sind schwer zu erfassen, da die verbalen Äußerungen oft nicht so differenziert sind, wie bei Erwachsenen. Um aber diese Prozesse sichtbar zu machen, müssen die Denkleistungen der Kinder über Handlungen dargelegt werden. Benötigt werden also Spiele und Materialien, die Schlussfolgerungsprozesse von den Kindern verlangen.

3. „Denkexperten – Die Welt gehört denen, die neu denken!“

3.1 Forschungsdesign

Beim Projekt „Denkexperten“ handelt es sich um eine Interventionsstudie. Es wird zu Beginn der Untersuchung, sowie nach dieser ein Test mit jedem Probanden durchgeführt, um die Kompetenzen im Bereich „Schlussfolgerndes Denken“ zu erheben.

Es gibt eine Projektgruppe und eine Vergleichsgruppe (s. dazu 3.4). Nur die Projektgruppe wird während des Projekts durch die Erzieherinnen instruiert.

3.2 Vor- und Nachtest

Bei dem Vor- und Nachtest, an dem beide Gruppen teilnahmen, handelt es sich um ein materialorientiertes Einzelinterview. Dieses wurde in Anlehnung an das EMBI[1] eigenständig entwickelt. Um eine Überforderung der Probanden zu verhindern, wurden Abbruchkriterien formuliert. Anhand dieser kann auch schnell eine (mögliche) Steigerung im Nachtest erkannt werden, da Vor- und Nachtest inhaltlich identisch sind.

Inhaltlich geht es um die bereits genannten aussagenlogischen Begriffe, die mittels der „Logischen Blöcken“[2] abgefragt werden. Als weiteren Schwerpunkt müssen die Probanden logische Reihen nachlegen und fortsetzen. Die Anforderung liegt zum einen in der Beachtung mehrerer Eigenschaften zugleich, zum anderen aber auch in der Kombination verschiedener Begriffe, z.B. „Nicht rund und nicht dick“, also dünne Dreiecke *und* Vierecke.

Durch die Interviewsituation werden die Kinder im Gespräch aufgefordert bestimmte Plättchen in einen Karton zu legen (s. Bsp.). Diese Handlungen zeigen, ob das Kind aussagenlogische Begriffe korrekt verstanden hat, also einen logischen Schluss ziehen konnte.

3.3 Arbeitsphasen

Die Arbeitsphasen wurden nur in der Projektgruppe durchgeführt. Hier wurden die Kinder in drei leistungshomogene Gruppen eingeteilt. Die Erzieherinnen gestalteten in den jeweiligen Gruppen, die sich zu einer Teamsitzung getroffen haben, den Einstieg, sowie die Reflexion. Sie standen den Kindern bei Fragen zur Seite und gaben Impulse.

Der Aufbau und Ablauf der Arbeitsphasen wurde durch das jeweilige Material charakterisiert. Es gab drei unterschiedliche Materialen, die alle die aussagenlogischen Begriffe thematisieren. Zudem gibt es zu jedem Material

---

[1] ElementarMathematische BasisInterview, vgl. dazu: Peter-Koop et.al. (2007).

[2] Logische Blöcke sind geometrische Formen mit unterschiedlichen Eigenschaften.

ein Handbuch, welches Aufgaben beinhaltet, die in ihrer Schwierigkeit und Komplexität ansteigen. Um einen Austausch über das Problem zu ermöglichen, wurde mit folgenden Materialien meist in Partnerarbeit gespielt:

Das kleine Denkspielbuch – Probieren und Kombinieren: Es bereitet die Kinder auf die Arbeit mit problemhaltigen Aufgaben vor und weckt die Experimentierfreude der Kinder. Es gibt explizit Aufgaben, die sich mit aussagenlogischen Begriffen spielerlisch befassen.

Jambo Kenya: Aufgrund der Aufmachung ein sehr motivierendes Spiel, welches zudem viele Kompetenzen aufgreift und fördert. Die Schwierigkeit steigert sich von Spielplan zu Spielplan und verlangt stets Neues von den Kindern. Neben Wahrnehmung und Raum-Lage- Beziehungen werden das vorausschauende und schlussfolgernde Denken geschult. Das Spiel verlangt (auch) die Beachtung mehrerer Eigenschaften zu gleich.

Logik Vario Jr.[3]: Ein variationsreicher Spielplan, durch den unterschiedliche aussagenlogische Begriffe miteinander verknüpft werden können. Dieses ist von den drei verwendeten Materialien das Spiel mit dem komplexesten Hintergrund und mit hohen mathematischen Anforderungen an die Kinder.

Diese Spiele wurden über sechs Wochen angeboten, d.h. für jedes Spiel war eine Dauer von zwei Wochen vorgesehen.

3.4 Probanden

Die Probanden der Projektgruppe stammen aus dem Lohner Kindergarten St. Barbara. Der Kindergarten arbeitet sehr offen und gruppenübergreifend. In zwei von insgesamt vier Kindergartengruppen sind Kinder mit Störungen im Bereich der Wahrnehmung. Am Denkexperten- Projekt haben 32 Kinder, davon 12 Mädchen und 20 Jungen teilgenommen, davon zwei mit Wahrnehmungsstörungen. Das Durchschnittsalter der Teilnehmer/innen liegt bei 5,6 Jahren. Die Probanden aus der Vergleichsgruppe sind aus dem Kindergarten Regenbogen, Rhauderfehn. Auch hier wird gruppenübergreifend gearbeitet. Der Vor- und Nachtest konnte mit insgesamt 21 Probanden[4] durgeführt werden, davon waren 9 Mädchen und 12 Jungen. Ein Kind weist Störungen in der Wahrnehmung auf. Durchschnittlich waren die Kinder 5,9 Jahre alt.

Der Verschiebung des Durchschnittsalters kann durch einen unterschiedlichen Untersuchungszeitraum erklärt werden. In Lohne begann die Untersuchung Ende August, dauerte bis Ende Oktober. In Rhauderfehn

---

[3] Nach Vorlage von *Logik Vario* (1975), Ellrott, Freund und Sorger.
[4] Eigentlich 26 Kinder, jedoch waren zum Nachtest fünf Probanden krank.

wurde Anfang November mit dem Vortest begonnen und im Januar mit dem Nachtest abgeschlossen. Der Untersuchungszeitraum dauerte jeweils 10 Wochen, die sich aus einer Woche Vortest, sechs Wochen Projektzeit in Lohne, bzw. sechs Wochen „Kindergartenalltag" in Rhauderfehn, zwei Wochen Ferien (Herbst- , bzw. Weihnachtsferien) sowie einer Woche Nachtest zusammensetzen.

4. Erste Erkenntnisse

Aufgrund der, im Januar 2009 abgeschlossenen Datenerhebung können nur erste Eindrücke aus den Untersuchungen vermittelt werden. Es hat sich jedoch gezeigt, dass die Kinder alle mit Aufgaben, die Schlussfolgerungsprozesse verlangen in einem bestimmten Umfang umgehen können. Die Betrachtung mehrerer Eigenschaften (s. o.g. Bsp.) fällt vielen Kindern sehr schwer.

Anhand der formulierten Abbruchkriterien ist eine Steigerung in der Projektgruppe zu erkennen. Diese Steigerung zeigt sich jedoch nicht in der Vergleichsgruppe.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Diese Ergebnisse zeigen, dass Kinder in der Lage sind, sehr anspruchsvolle Aufgaben mit Schlussfolgerungscharakter zu lösen. Im Hinblick auf die Arbeit im Kindergarten bedeutet dies, die Erzieher/innen zu motivieren und ebenfalls mit Blick auf die mathematischen Anforderungen, die das Projekt verlangt, zu instruieren. Mögliche Ängste vor dem Thema Mathematik müssen genommen und abgebaut werden. Nur so kann auch den Kindern Mathematik als etwas vermittelt werden, was Spaß macht – vor allem wenn Handlungsorientierung im Vordergrund steht.

Literatur

Ellrott, D., Freund, H., Sorger, P. (1975): Logik Vario. Freiburg i.B.: Verlag Herder.

Müller, G., Wittmann, E. (2008): Das kleine Denkspielbuch – Probieren und Kombinieren. Donauwörth: Kallmeyer Lernspiele.

Müller, R. (2003): Jambo Kenya. Moers: Akzente Verlag.

Oerter, R., Dreher, M. (1998): Entwicklung des Problemlösens. In: Oerter, R., Montada, L. (1998): Entwicklungspsychologie. Weinheim: Beltz (S. 561 – 621).

Peter-Koop, A. et.al. (2007): ElementarMathematische BasisInterview. Offenburg: Mildenberger.

Strohbach, N. (2005): Einführung in die Logik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Reimund ALBERS, Bremen

Mathematik Neu Beginnen - Neue Wege in der Grundschullehrerinnenausbildung

Die Ausbildung von zukünftigen Grundschullehrerinnen mit dem fachlichen Schwerpunkt Mathematik muss anderen Grundsätzen folgen als die Ausbildung von Mathematikern oder Gymnasiallehrern. Umfragen unter Studierenden[1] zeigen, dass die Grundschulstudierenden sich einen starken Praxisbezug wünschen. Dieses sollte sowohl für die didaktischen Veranstaltungen gelten wie auch für die Fachveranstaltungen.

Auf letzteres zielt ein Reformprojekt an der Universität Bremen, das von der Deutschen Telekom-Stiftung gefördert wird. Unter der Leitung von Professor Heinz-Otto Peitgen werden die ersten beiden Semester der fachlichen Ausbildung in Mathematik für angehende Grundschullehrerinnen inhaltlich wie auch methodisch neu gestaltet.

Inhaltliche Umgestaltung

a) Orientieren am schulischen Curriculum

Das Studium soll die angehenden LehrerInnen auf ihren Beruf vorbereiten, diesen Anspruch soll auch die fachliche Ausbildung erfüllen. Daher ist es notwendig, dass die im Studium behandelten mathematischen Themen in Verbindung zu den schulischen Themen stehen. Direkt nachvollziehbare Verknüpfungen mit dem schulischen Alltag steigern die Motivation der Studierenden, sich mit den fachlichen Inhalten auseinander zu setzen. Da in den Veranstaltungen zur „Elementarmathematik" in Bremen zukünftige Grund- und SekundarschullehrerInnen ausgebildet werden, ist es bei einer fachlichen Analyse notwendig, die Inhalte von Klasse 1 bis 10 zu berücksichtigen. Dazu wurde der Rahmenplan Grundschule Mathematik der vier norddeutschen Länder und der Bildungsplan Mathematik für die Sekundarschule im Land Bremen analysiert.

b) Kernthemen

Hier wollen wir bewusst die klassisch-fachliche Einteilung (Analysis, lineare Algebra, ...) aufbrechen. Die Inhalte sollten in Kernthemen organisiert werden, die ein vernetztes Arbeiten zulassen. Numerisch-algebraisches und grafisch-geometrisches Arbeiten wurden so weit es ging miteinander verbunden. Zu jedem Kernthema wurde aufgezeigt, wie es mit den schulischen

---

[1] Georg Lilitakis, *Untersuchung zur Entwicklung von Kompetenzen und Einstellungen bei Studierenden des Fachs Mathematik für das Lehramt an Grundschulen an der Universität Kassel*, Sektionsvortrag auf dieser GDM-Tagung 2009

Themen in Verbindung steht. Zusätzlich wurde so kontrolliert, dass alle Bereiche der schulischen Themen abgedeckt werden. Dabei wurde allerdings der gesamte Bereich Daten - Zufall - Wahrscheinlichkeit herausgelassen, da dieser in einer gesonderten Veranstaltung im 4. Semester behandelt wird.

Kernthemen (Workshops, 4 SWS)	
Wintersemester	**Sommersemester**
• Platonische Körper	• Abbilden von Funktionsgraphen
• Stellenwertsysteme	• Dimension
• goldener Schnitt und Pascal-sches Dreieck	• Elemente der Geometrie (Schustermesser)

c) Lehrer unterrichten (zukünftige) Lehrer

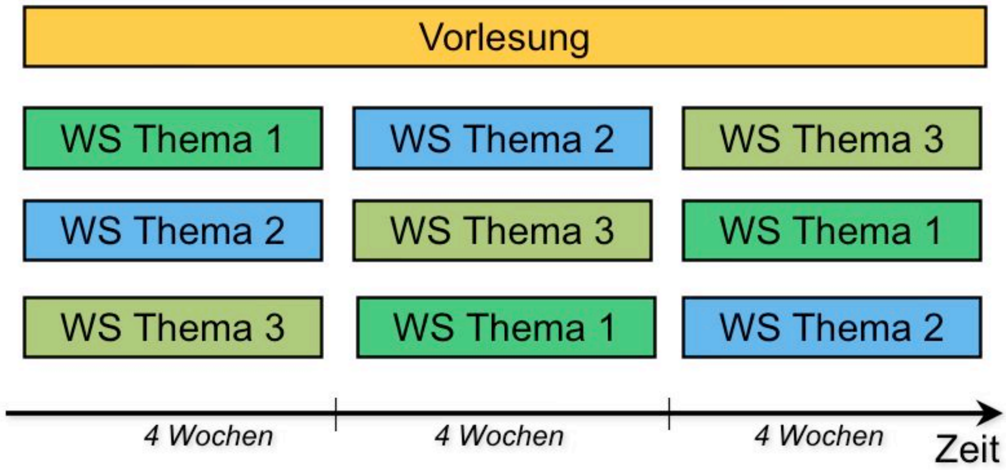
Die Arbeit in den Workshops (s.u.) soll von LehrerInnen geleitet werden, die aktiv in der Schule tätig sind. So ist sichergestellt, dass die Lernformen an der Praxis der Schule orientiert sind und immer wieder authentische Bezüge zum Unterrichtsalltag hergestellt werden. Im Vordergrund soll aber stets das Erarbeiten von fachmathematischen Inhalten stehen. Diese Form des Erarbeitens wurde in der Überzeugung gewählt, dass die Fachausbildung Vorbildcharakter haben muss, da sich Studierende stark an den erlebten Lehrformen orientieren.[2]

Themen der Vorlesung (2 SWS)	
Wintersemester	**Sommersemester**
• Grundlagen der Logik	• Folgen und Reihen
• Vollständige Induktion	• Verknüpfen von Spiegelungen
• Kongruenzrechnung	• analytische Geometrie (Abbildungen)
• Kombinatorik	• Funktionen und Gleichungen

[2] „teachers teach as they were taught, not how they were taught to teach“ (Th.Cooney. H.Wiegel)

Organisatorisch-methodische Umgestaltung

Die Lehrveranstaltung wird so umgestaltet, dass die Rolle der Vorlesung mit ihrer Einbahnkommunikation zurückgedrängt wird (2 SWS) zugunsten von Workshops (4 SWS), in denen die Kernthemen erarbeitet werden. Die gemeinsame Vorlesung bleibt grundlegenden Inhalten vorbehalten. Sie soll die deduktive Arbeitsweise aufzeigen, so dass dieses klassisch-mathematische Vorgehen ebenfalls einen Raum bekommt.



Für die Workshops werden die Studierenden in klassenähnliche Gruppen (ca. 25 Studierende) aufgeteilt, in denen das aktive Arbeiten im Vordergrund steht. Diese Lernprozesse sind wesentlich geprägt durch entdeckendes Lernen und die Einbeziehung des Computers. Beide Aspekte sollen im eigenen Lernprozess erfahren werden.

Die Lehrerteams sind pro Semester spezialisiert auf ein Workshopthema. Daher starten die drei Studierendengruppen gleichzeitig mit jeweils einem anderen Thema und wechseln alle vier Wochen das Workshopthema und damit auch die unterrichtenden Lehrerteams. Folglich durchläuft jede Studierendengruppe die drei Workshops in einer anderen Reihenfolge. Das ist praktisch durchführbar, da die Workshopthemen in sich geschlossene Einheiten bilden. Zudem ist es für die Lernenden eine interessante Erfahrung, dass mathematische Bildung nicht notwendiger Weise sequentiell aufgebaut werden muss, sondern in selbstständigen Blöcken organisiert werden kann. Erfahrungen mit diesem Organisationskonzept in bereits durchgeführten Lehrerfortbildungen (NSF-Projekte in Florida) zeigen, dass in der Anfangsphase den Studierenden der Überblick über den gesamten Stoff fehlen wird, sich dieses aber nach dem ersten Wechsel, also nach ca. 4 Wochen, praktisch von selbst klären wird. Besonders in dieser ersten Phase kommt der gemeinsamen Vorlesung eine wichtige, verbindende Funktion zu.

Praktischer Ablauf und derzeitiger Stand

Der essentielle Punkt dieses Projektes war die Auswahl der Lehrkräfte, die in den Workshops tätig werden sollten. Durch die enge Verbindung der Universität Bremen mit den Schulen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich durch verschiedene Angebote der Kooperationsstelle Schule-Universität gibt es in Bremen einen großen Pool engagierter Lehrkräfte, die Kontakt zur Universität haben. Aus diesen wurden zu Beginn des Schuljahres 2007/08 neun Lehrkräfte ausgewählt. Dabei ist es ein wesentliches Element dieses Projekts, dass sowohl Grundschullehrerinnen als auch Lehrkräfte aus der gymnasialen Oberstufe mitarbeiten. Erstere verkörpern die Schulform, auf die die Ausbildung im Wesentlichen abzielt. Der Erfahrungsschatz dieser Lehrkräfte soll sicherstellen, dass die Arbeit in den Workshops mit der Grundschulmathematik in Kontakt steht. Die SekundarschullehrerInnen stellen sicher, dass die Studierenden, die im Normalfall vor gut einem halben Jahr die Schule verlassen haben, inhaltlich dort abgeholt werden, wo sie realistischer Weise stehen.

Diese Lehrkräfte wurden im Schuljahr 07/08 in die zu unterrichtenden Workshop-Themen eingeführt. Im aktuellen Schuljahr 08/09 sind nun die Lehrkräfte zum Teil vom Unterricht befreit, so dass die Arbeit im Projekt erheblich intensiviert werden konnte. Zurzeit (März 2009) sind die Materialien für die Workshops (Skripte, Übungsaufgaben, Arbeitsblätter, Computerdateien) des kommenden Sommersemester vorbereitet, die Erstellung der Materialien für das Wintersemester ist eingeleitet.

Weitere Informationen zum Projekt findet man unter

`http://www.cevis.uni-bremen.de/Mathematik_Neu_Beginnen.html`

Literatur

Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg (LISUM Bbg), *Rahmenplan Grundschule Mathematik* (länderübergreifendes Projekt)

Der Senator für Bildung und Wissenschaft Bremen (2006), Mathematik, *Bildungsplan für die Sekundarschule, Jahrgangsstufe 5 - 10*

Bender, P., Beyer, D., Brück-Binninger, U., Kowallek, R., Schmidt, S., Sorger, P., Wielpütz, H., Wittmann, E.Ch. (1999), Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer, *Journal für Didaktik der Mathematik, Jhrg. 20, Heft 4, S. 301-310*

Ziegler, G., Weigand, H.-G., a Campo, A. (2008), *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik*

Gabriella AMBRUS und Ödön VANSCÓ, Budapest

Modellierungs- und Anwendungsaufgaben im Unterricht und in der Lehreraus- und Fortbildung – Wirkungen eines Lehrerfortbildungskurses auf die Teilnehmer

Im modernen Mathematikunterricht spielen Kompetenzen und Anwendungen der Mathematik eine zentrale Rolle. Es wird aber weniger diskutiert, wie Lehrer dabei effektiv unterstützt und diese Themen im Rahmen der Lehrerausbildung zunächst intensiver behandelt werden können.
Auf diese Ziele wird bei einem Fortbildungskurs konzentriert, welcher im Rahmen des EU-Projektes „LEMA"[1] letztes Jahr organisiert wurde, und dessen Inhalte von einem internationalen Team (Experten aus Deutschland, England, Frankreich, Spanien, Zypern, und Ungarn) gemeinsam ausgearbeitet wurden.
Im Oktober 2008 endete der erste praktisch durchgeführte Kurs in Ungarn, an dem neben Lehramtstudentinnen auch Grundschullehrerinnen und MathematiklehrerInnen teilgenommen haben, die in den oberen Klassen der achtklassigen Grundschule (Jahrgänge 5 bis 8) oder in der Sekundarstufe unterrichten. Die Erfahrungen und Resultate, die aus den Rückmeldungen der Teilnehmer und der Kursleiter gesammelt und gemeinsam ausgewertet werden, dienen auch als Basis für die endgültige Zusammenstellung der Kursinhalte.
Aus diesen Erfahrungen werden hier Änderungen in den folgenden Bereichen diskutiert:

1. Kenntnisse über Modellieren
2. selbst angewandte Unterrichtsmethode
3. Bild über Mathematikunterricht

Zur Untersuchung wurden folgende Materialien verwendet:

- Analyse einiger Teilen eines Pre- und Posttests
- Interviews mit Lehrerinnen

---

[1] LEMA: Learning and Education in and through modelling
Partners of the project: Katja Maaß & Barbara Schmidt, University of Education Freiburg, Richard Cabassut, IUFM, Strasbourg, Fco. Javier Garcia & Luisa Ruiz, University of Jaen, Nicholas Mousoulides, University of Cyprus, Anke Wagner, University of Education, Ludwigsburg, Geoff Wake, The University of Manchester, Ödön Vancsó & Gabriella Ambrus, Eötvös Loránd University, Budapest.

- Aufnahmen von Stunden, wo Modellierungsaufgaben bearbeitet wurden
- Modellierungsaufgaben, die während und nach dem Kurs angefertigt wurden
- Gespräche, Schlussbesprechung am letzten Kurstag

Die folgende Analyse beschreibt die relevanten Wirkungen, weitgehende Folgerungen können allerdings daraus nicht gezogen werden. Es können aber bestimmte Tatsachen festgestellt und gestärkt, einfache Zusammenhänge aufgedeckt werden.

I. Bedingungen, Methoden

a) Pre- und Posttest

Zum Ausarbeiten und theoretischen Hintergrund des Testes siehe Katja Maaß & Johannes Gurlitt 2009.
Es wurde ausgefüllt

- Vor dem Beginn des Kurses von den Teilnehmern (Pretest)
- Am letzten Kurstag (Posttest)
- um mindestens 3 Monate nach dem Kurs (Follow-up Test)
- Auch von einer Kontrollgruppe (Kontrolltest)

in allen Partnerländer.
Zu dieser Analyse werden die (ungarischen) Antworten auf relevante Teile aus dem Pre- und Posttest verwendet.
Bei der Auswertung ist eine Methode von Scheffé (Fazekas 2003) auch angewandt worden, die geeignet ist, beim Test die Erwartungswerte von zwei Normalverteilten Stichproben mit verschiedenem Umfang und unbekannten Standard Abweichungen zu vergleichen
b) Interviews mit Lehrerinnen, Stundenaufnahmen in allen Partnerländern wurden gemacht.
In Ungarn wurden aus Freiwilligen der Kursteilnehmer vier Lehrerinnen ausgewählt.
Gesichtspunkte dafür waren:

- Möglichst verschiedene Aktivität und Einstellung während des Kurses
- Nicht nur aus Budapest
- Möglichst Arbeit mit verschiedenen Jahrgängen

So entstanden Videoaufnahmen von 5 Stunden, daraus nur 3 in Budapest, mit einer Gruppe (11. Jahrgang, Gymnasium) zwei Stunden, mit drei Klassen (4. Jahrgang, 5. Jahrgang, 7. Jahrgang) je eine Stunde.

Nach den Videoaufnahmen wurden mit Hilfe von im Voraus festgelegten Fragen Interviews (etwa 20 Minuten) mit den Lehrerinnen geführt.

Bei dieser Analyse wurden die Erfahrungen der Aufnahmen und Antworten auf bestimmten Interviewfragen auch in Betracht gezogen.

- Aus Umfangsgrund werden die Resultate aus dem Materialien hier nicht mitgeteilt können aber bei den Autoren erreicht werden.

II Analyse der Resultaten

1. Kenntnisse über Modellieren

Anmerkungen:

- Die Teilnehmer können zwischen Modellierungs- und Nicht-Modellierungsaufgaben gut unterscheiden.
- Obwohl sich viele Teilnehmer in Vorbereitung von Modellierungsaufgaben sicher fühlen, und solche auch sogar selbst erstellen, wollen sie in den Videostunden lieber mit bekannten Aufgaben arbeiten.
- Problematisch ist noch das Unterrichten von konkreten mathematischen Inhalten mit Modellierungsaufgaben –bestärkt auch durch Gespräche.

2. Änderungen der Unterrichtsmethoden

Anmerkungen:

- Die relativ wenigere Modellierungsstunden im Posttest sind teils gewiss der Tatsache zu danken, dass viele der Teilnehmer in Pretest noch nicht wussten, worum es eigentlich ging.
- Modellierungsaufgaben werden eher durch herkömmliche Methoden unterrichtet. Viele kennen wenige kooperative Techniken bzw. haben auch Abneigung dagegen, auch wenn sie diese kennen.
- Die im Kurs erworbenen Kenntnisse werden eher in die eigene schon vorhandene Methode eingebaut (auch nach den Gesprächen).
- Da die anderen Stunden noch nach den traditionellen Methoden laufen, ist es problematisch, wie die Modellierungsstunden organisiert werden können, wie Schüler in den Stunden „behandelt” werden sollen. Die Schüler sind auch unerfahren, wie sie sich in solchen Stunden benehmen sollen. (auch nach den Gesprächen)

3. Bild über Mathematikunterricht

Anmerkungen:

- Im Hinblick auf die Schulpraxis ist die Wirkung des Kurses weniger bedeutend als in Hinsicht der Kenntnisse übers Modellieren.
- Der Zusammenhang zwischen Mathematik und Alltag scheint weniger wichtig zu sein.

Es zählen hier die ungarischen Traditionen die beim Unterricht eher theoretische Mathematik bevorzugen.
Auch die Interviews zeigten: in der Mathematik ist logisches Denken, Entwicklung der Persönlichkeit wichtig.

Zusammenfassend können folgende festgestellt werden:
- Die Teilnehmer konzentrieren sich eher auf die Unterrichtsaufgaben, auf die Praxis als auf die Theorie.
- Lücken in den Kenntnissen konnten durch den Kurs ersetzt werden. Viele Zweifel und Ratlosigkeit wurden auch behoben.
- Die eigene Unterrichtsmethode beeinflusst beträchtlich – wie es auch zu erwarten war – darum ist die Änderung hier geringer.
- Teils den Vorigen ist zu danken, dass die relativ guten Kenntnisse übers Modellieren in der Praxis der Teilnehmer weniger betont erscheinen. (Wenige Modellierungsstunden, traditionelle Methoden, …)
- Es ist auch im Kursmaterial wichtig, eher auf die Unterrichtstraditionen zu bauen und ausgehend aus den Traditionen des Unterrichtes der lebensnahen Probleme neue Kenntnisse übers Modellieren zu erwerben.
- Eine positive Erfahrung ist, dass die Modellierungsaufgaben auch beim traditionellen Unterricht in die Unterrichtspraxis gut eingebaut werden können.
- Diese Erfahrungen sind mit innovativen, interessierten LehrerInnen erworben – es ist noch nicht bekannt, wie andere (die Mehrheit) reagieren werden.
- Es wird interessant sein, die Erfahrungen von anderen Ländern zu kennen und zu vergleichen. Es kommt noch später, der Vergleich begann aber schon „in Paaren” (z.B. deutsch-französisch).

Literatur

Fazekas, I (ed.) (2003). Bevezetés a matematikai statisztikába (Einführung in die mathematische Statistik) Kossuth Universitätsverlag Debrecen.

Maaß, K., Gurlitt, J. (2009). Designing a Teacher-Questionnaire to Evaluate Professional Development about Modelling, *Conference-Volume der CERME 2009 Lyon*

Stefanie ANZENHOFER, Würzburg

Musikalische Graphen im fächerübergreifenden Mathematik- und Musikunterricht

Ausgangspunkt dieses fächerübergreifenden Ansatzes für den Mathematik- und Musikunterricht sind graphische Darstellungen aus beiden Bereichen, die wechselseitig analysiert und interpretiert werden sollen.

Im *Mathematikunterricht* haben das Verständnis und die Fähigkeit Graphen zu interpretieren beim Umgang mit Funktionen und Relationen eine große Bedeutung. Mit ihrer Hilfe lassen sich Beziehungen und Abhängigkeiten klassifizieren sowie Veränderungen qualitativ und quantitativ erfassen. Für Lernende bilden diese Darstellungen einen Zugang zum Verständnis dieser Begriffe, sind aber auch Werkzeuge beim Problemlösen und für den Begriffserwerb. Dennoch ist hinlänglich bekannt, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten beim Lesen und Interpretieren von Graphen haben.

Im *Musikunterricht* zählt Musik lesen und notieren zu den Grundkompetenzen[1], da die Notenschrift einerseits einen Zugang zu eigenständigem Musizieren bietet, andererseits eine Hilfe beim Hören, Interpretieren und Analysieren von Kompositionen darstellt.

Abb. 1 Ausschnitt aus dem Phlegmatiker (Die vier Temperamente op. 81) von Heinz Kratochwil

Im Laufe der Musikgeschichte entstanden unterschiedliche Notationsformen aus Kompositions- und Weitergabegründen. Seit Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelten Musiker aufgrund neuer klanglicher und kompositorischer Anforderungen verschiedenste graphische Notationen, bei denen graphische Elemente die Standardnotation komplett ersetzen oder diese erweitern. Wie im Beispiel von Heinz Kratochwil ersichtlich (siehe Abb. 1) wird, können gewisse Ähnlichkeiten zu Funktions- oder Relationsgraphen auftreten.

[1] Wenn in diesem Artikel von Grundkompetenzen im Musikunterricht gesprochen wird, so erfolgt dies mit Bezug auf Jank (2005).

Ein Zugang zur Neuen Musik des 20. Jahrhunderts und den dazu gehörenden graphischen Notationen bleibt Schülerinnen und Schülern aufgrund der Komplexität dieser Musik jedoch meist verwehrt [vgl. Ditter-Stolz 1999, Nimczik 2005].

Durch eine Interpretation von mathematischen Graphen als Zeit-Tonhöhen-Diagramme können diese mathematischen Darstellungen mit verschiedenen musikalischen Grundkompetenzen – Musik hören und beschreiben, Musik lesen und notieren, Musik in einen Kontext setzen sowie Musik erfinden – verknüpft werden. Auf diese Weise entstehen *musikalische Graphen,* mit denen folgende Aufgabenfelder verbunden werden können: *Graphen hören*, *Graphen lesen und schreiben*, *mit Graphen interpretieren und analysieren* sowie *mit Graphen komponieren*.
Auf diese Weise wird einerseits ein Verständnis für die mit Graphen zusammenhängenden Begriffe sowie eine Unterstützung der Entwicklung der drei Aspekte des funktionalen Denkens [vgl. Vollrath 1989] beabsichtigt; andererseits wird eine Hinführung zu Neuer Musik über den Bezug zu graphischen Notationen angestrebt.

Im Folgenden soll das Arbeiten mit musikalischen Graphen anhand von ausgewählten Beispielen näher erläutert werden. Die Umwandlung der Tonhöhen wird durch das DGS Cinderella[2] ermöglicht.

1. Graphen hören

Einen Aufgabentyp beim *Graphen Hören* stellt das Wiedererkennen von Standardfunktionen dar. Nachdem eine eindeutige Zuordnung von Funktionswert und Tonhöhe durch bloßes Hören nicht möglich ist, reicht eine ausschließliche Betrachtung von einzelnen Wertepaaren nicht aus.
Beim Beispiel des Logarithmus $f(x) = \ln x$ kann die genaue Lage im Koordinatensystem nicht bestimmt werden. Eine genauere Analyse des Änderungsverhaltens erlaubt jedoch die Typisierung dieser Funktion, da ein solches anfangs steiles und dann immer flacher werdendes Wachstum von allen den Schülerinnen und Schülern bekannten Graphen charakteristisch für den Logarithmus ist. In anderen Fällen erweisen sich weitere Eigenschaften als geeignete Identifikatoren. Am Beispiel $g(x) = \cos(x)$ wird deutlich, dass Charakteristika wie Beschränktheit, Periodizität und Symmetrie ausschlaggebende Faktoren darstellen können.
Aufgrund der andersartigen Zugangsweise zu Funktionsgraphen ergibt sich für Schülerinnen und Schüler folglich die Notwendigkeit das Änderungsverhalten und die Eigenschaften einer Funktion näher zu betrachten und diese Aspekte für ihre Argumentationen zu nutzen. Die Lernenden müssen

[2] Alle Dateien finden Sie auf www.dmuw.de/mitarbeiter/anzenhofer.

sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Funktionstypen bewusst machen, um beim *Graphen Hören* ihre Wahrnehmung auf diese Gesichtspunkte lenken zu können.

2. Mit Graphen Analysieren und Interpretieren

Diese Ähnlichkeit zu Funktionsgraphen in verschiedenen graphischen Notationsweisen bietet die Möglichkeit, Schülerinnen und Schülern diese ihnen unbekannten Notationsformen auf eine ihnen bekannte Weise zu deuten und zu interpretieren. Durch einen Rückgriff auf derartige Musikbeispiele soll einerseits der Einstieg in das praktische Musizieren mit graphischen Notationen erleichtert werden und andererseits die Option geschaffen werden, Funktionsgraphen in anderen Feldern wiederzuerkennen und das dazu gehörende Wissen (Definition von Funktion, Funktionstypen, Änderungsverhalten, Eigenschaften von Funktionen,…) zu übertragen. Hierbei stellt sich die Frage, inwiefern Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über Funktionen nutzen, um diese graphischen Notationen musikalisch interpretieren zu können und welches Wissen sie gegebenenfalls aufgreifen.

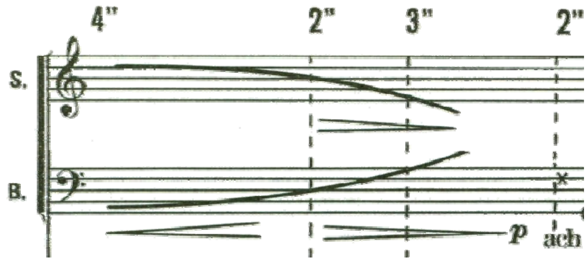


Abb. 2: Ausschnitt aus der Sopran- und Bassstimme aus dem Phlegmatiker

Am Ausschnitt aus dem Phlegmatiker (siehe Abb. 1) lässt sich bei der Bassstimme (siehe Abb. 2) eine Verbindung zu einer Exponentialfunktion erkennen. Demzufolge ist bei der musikalischen Interpretation auf einen kontinuierlichen anfangs langsam dann immer schneller höher werdenden Klang zu achten. Die Sekundenangaben erfordern zudem eine genaue Zeit-Tonhöhen-Zuordnung. Beim Ensemblemuszieren ist gar auf eine Beziehung zwischen der Sopran- und Bassstimme zu achten, da der Sopran eine Transformation der Bassstimme darstellt und somit die gleiche Bewegung in der Zeit allerdings in die entgegengesetzte Richtung vollziehen muss.

3. Mit Graphen komponieren

Im Mittelpunkt dieses Arbeitsfeldes steht das Entwerfen von Klangcollagen. Ein kreatives Arbeiten mit Graphen wird dahingehend verfolgt, dass die Lernenden Funktionsgraphen entwerfen, mithilfe derer sie Veränderungen in bestimmten Situationen wiedergeben sollen. Der Klang des Funktionsgraphen soll ein Element dieser Klangcollage darstellen; Situationsgeräusche, Klangeffekte, Musik oder Texte sollen die situative Wirkung dieses Moments verstärken. Nach der Definition von Drevdahl (1956) erfüllt diese Aufgabe die Anforderung einer kreativen Tätigkeit.

Am Beispiel der „gefühlten Zeit“ soll diese Arbeitsweise näher ausgeführt werden. In gewissen Situationen, wie bei einem Gesangsauftritt (einige Minuten davor und danach), vergeht die Zeit nach dem Gefühl nicht kontinuierlich. Sie verläuft beispielsweise teils doppelt oder halb so schnell wie in Wirklichkeit. Diese subjektive Wahrnehmung wird nun in einem Funktionsgraphen wiedergegeben (siehe Abb. 3).

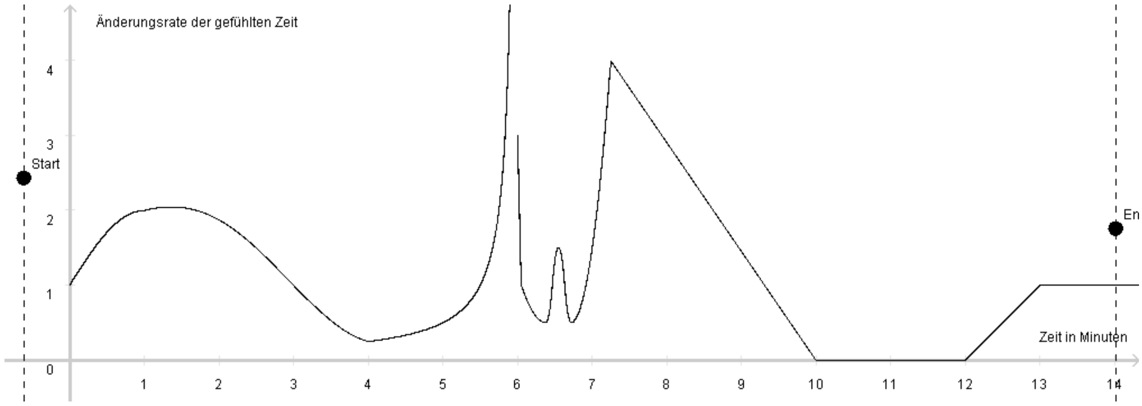


Abb. 3: Graph zur Wiedergabe des Vergehens von gefühlter Zeit

Der Klang dieses Graphen kann nun beispielsweise mit Alltagsgeräuschen wie Herzschlag oder Applaus, Klangeffekten wie Dynamik-, Klangfarbenveränderung oder Stereoeffekten sowie Musik oder gesprochenem Text untermalt werden, so dass ein *situativer Eindruck des Moments* geschaffen wird. Auf diese Weise stellt das Arbeiten mit Graphen, verknüpft mit musikalischer Ausdrucksfähigkeit, die Basis für kreatives Arbeiten dar.

Diese Beispiele zeigen, dass mithilfe des auditiven Moments und des Einfließens des Kreativitätsaspekts ein anderer Zugang zu Graphen zu erwarten ist.

In einer empirischen Studie in einer 10. Jahrgangsstufe des Gymnasiums (G8) soll dies mit qualitativen Methoden getestet werden.

Literatur

Drevdahl, J.E. (1956). Factors of importance for creativity. *Journal of Clinical Psychology*, 12, S. 21-26

Jank, W. (2005). Aufbauender Musikunterricht. In W. Jank (Hrsg.), *Musik-Didaktik* (S. 92-122). Berlin: Cornelsen-Verlag.

Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. http://cinderella.de, 17.03.2009.

Kratochwil, H. (1972). Der Phlegmatiker. In H. Kratochwil, *Die vier Temperamente* (S. 1f.). Wien: Verlag Doblinger.

Nimczik, O. (2005). Neue Musik. In W. Jank (Hrsg.), *Musik-Didaktik* (S. 92-122). Berlin: Cornelsen-Verlag.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *JMD*, 10, S. 3-37.

Sergey ATANASYAN, Moscow

Additional geometrical disciplines in preparation of the teachers of mathematics

The Russian system of education is in the process of reforming nowadays. The general secondary school education will be replaced by the system of profile preparation, and the system of higher education will transform to the multilevel preparation of the students according to the Bologna process. The profile preparation of the pupils of school assumes their profound specialization in the senior classes on the appropriate scientific direction, in particular in the field of physical and mathematical education. It is supposed, that the profile school educational process will be conducted by masters of education (or mathematics). Therefore, in master programs at pedagogical universities, it is necessary to give masters - future teachers of mathematics deep mathematical knowledge and also skills necessary for successful work with the pupils of profile physical and mathematical classes. Such opportunity is provided by system of disciplines of choice of the students, and to such disciplines, according to the curriculum, up to 40 % of educational time is allocated. The offered disciplines will give the future teacher of mathematics a material that can be used for preparation of mathematical courses at the profile school.

Proceeding from the purposes and tasks of offered disciplines, contents and methods of teaching should satisfy to the following requirements.

First, the subject matter should be based on the school program and on the facts stated in the school textbooks, i.e. on the material which is accessible and can be mastered by the pupils. Second, the statement of a material should be in a sufficient measure strict and correct. Third, it is necessary to acquaint the students with methods of teaching of these disciplines, appropriate for the school complexity level. Fourth, it is necessary to connect the contents of these disciplines with elementary mathematics, to show, how to prepare the pupils of profile classes to understanding of ideas and methods of mathematical researches, to mastering university courses of higher mathematics.

As a matter of fact, the offered programs of geometrical disciplines of choice represent the adapted to school course sections of geometry, usually studied by students of Russian pedagogical universities. To such sections one can attribute constructive geometry, i.e. theory of solving tasks on construction figures on a plane by compasses and ruler, foundations of projective geometry, namely properties of the central projection and following from them model of a projective plane - extended Euclidean plane complemented by infinitely distant points, properties of axonometry and Monge's method of representing spatial bodies on a plane. Consider in more detail three syllabuses of offered disciplines.

Analytical methods at solving tasks of elementary geometry.

The program of a course is designed for 8 lectures and 10 practical lessons (exercises). In Russian school textbooks on geometry the foundations of vector algebra and analytical geometry are considered. In particular, properties of scalar product of vectors are considered, the equations of a straight line and a circle on a plane and planes and spheres in space are deduced. All reasonings are carried out in rectangular Cartesian system of coordinates. The large number of stereometric tasks is based on calculation of angles between straight lines and planes in space, i.e. tasks using properties of vector products of vectors. Therefore, in addition to the brief survey of a material of the school program close to the theme of the discipline, the basic attention should be given to the tasks aimed at overcoming these difficulties. It is offered to reduce tasks of finding the equation of a plane defined by three points to the determination of the nonzero solution of homogeneous system of three linear equations with four unknowns by coefficients of equations. For the solving of tasks on finding of angles between planes and straight lines and between two planes in the space it is necessary to prove (by methods stated in the school textbooks) the statement that the vector with coordinates equal to coefficients of the equation of a plane, is perpendicular to this plane. One of the basic skills, which should be mastered by the students on the exercises, is a choice of convenient rectangular Cartesian system of coordinates, on which the complexity of calculations depends.

Geometry of complex numbers.

The course is designed for 16 lectures and 8 practical lessons (exercises). The basic idea of a course is to acquaint the students and school pupils with geometrical interpretation of two-dimensional algebras of complex, dual and double numbers, and also with analytical methods of study of geometrical properties of figures by means of these algebras. According to the school program, the pupils are familiar with algebra of complex numbers of a kind $a+bi,\ i^2=-1$. In the offered discipline future masters study properties of interpretation of complex numbers by points of the plane where by the known rule ($a+bi \Leftrightarrow M(a;b)$) to each complex number the point of the plane, namely of the so-called complex plane is put in a correspondence. The questions of correspondence between geometrical transformations of the plane and appropriate properties of functions of complex variables are considered.

The concept of a dual number $a+b\varepsilon,\ \varepsilon^2=0$ is introduced. The properties of geometry of the plane of dual numbers are considered. On this plane the metrics of a Galilean plane is introduced, and the connection between geometry of this plane and properties of rectilinear movement in the mechanics of Galilei and Newton is established. The statements interpreting analogies and explaining distinctions between properties of figures on Galilean and Euclidean planes are proved. The algebraic properties of double numbers $a+be,\ e^2=1$ are studied. On a plane of double numbers the pseudoeuclidean metrics is introduced, and the properties of figures on this plane are considered. The properties of straight lines and circles, and also geometrical transformations by means of algebra of double numbers are studied.

Axiom of parallelism and elements of geometry of Lobachevsky.

The course is designed for 8 lectures and 8 practical lessons (exercises). The basic purpose of a course is to show the students and pupils a place and meaning of the axiom of parallelity in the logical construction of Euclidean planimetry, and also to acquaint them with some facts of geometry of Lobachevsky, or, that is the same, with hyperbolic geometry. It is well-known that the attempts of the proof of the fifth postulate of Euclid have very interesting history closely connected to the history of the development of the civilization. The following scheme of the construction of the discipline is offered. First, it is necessary to acquaint pupils with the history of attempts of the proof of the fifth postulate of Euclid. In these attempts, the statements equivalent to the axiom of parallelity were used. We list them:

1. The sum of angles of a triangle on a plane is equal to the straight angle.
2. The statement of Poseidonius: “On a plane, there exist three collinear points belonging to one half-plane and equidistant from a given straight line".
3. The statement of Wallis: “On a plane, there exist two similar but not equal triangles”;
4. The statement of Farkas Bolyai: “Around any triangle, it is possible to circumscribe a circle";

5. The statement of Legendre: "The perpendicular to the side of an acute angle crosses its second side".

The proofs of equivalence of these statements to the axiom of parallelity are carried out. The axiom of parallelity of Lobachevsky is formulated, and it follows from it, that on a plane of Lobachevsky negations of above-mentioned statements are true. The pupils get acquainted with a model of Cayley-Klein where points of a plane of Lobachevsky are interpreted as internal points of a circle.

The experience of studying these disciplines by students and teaching in profile classes shows their efficiency. These courses acquaint students and pupils with a material connected with the school program, but extending its framework, stimulate their great interest to geometry.

Astrid BECKMANN, Schwäbisch Gmünd

Fächerübergreifender Unterricht zwischen Mathematik und Biologie – Ernährungskreis, Ähnlichkeit und Allometrie

1 Hintergrund

1.1 Übersicht

Fächerübergreifender Unterricht zwischen Mathematik und Biologie wird üblicherweise mit Themen wie Bakterienwachstum oder Fibonaccizahlen bei Pflanzen in Verbindung gebracht. Im Rahmen des europäischen Projekts ScienceMath wurden weitere Beziehungen analysiert, zu Unterrichtsmodulen ausgearbeitet und schulisch erprobt. Zwei Beispiele werden skizziert: Das erste Beispiel betrifft den Erwerb von Kompetenzen im Zusammenhang mit Kreisdiagrammen durch den Ernährungskreis der Deutschen Gesellschaft für Ernährung. Das zweite Beispiel befasst sich mit Ähnlichkeit und Allometrie bzw. Proportionen in der Geometrie und im Tierreich.

1.2 Philosophie des ScienceMath-Projekts

Das ScienceMath-Projekt verfolgt einen fächerübergreifenden Ansatz mit den Naturwissenschaften, meist Physik, aber auch Chemie und Biologie. Durch außermathematische Bezüge sollen die Schülerinnen und Schüler Mathematik angemessen, bedeutungsvoll und interessant erfahren; das Lernen in Zusammenhängen soll zu einem intuitiven mathematischen Verstehen beitragen. Mit Hilfe naturwissenschaftlicher Kontexte und Methoden soll einerseits die oft beobachtete Kluft zwischen formaler Mathematik und authentischer Erfahrung geschlossen, andererseits die Vielseitigkeit mathematischer Begriffe erfahren werden. Mathematische Inhalte können dadurch wirklichkeitsnah und in sinnvollen Zusammenhängen gelernt werden; die Realität der Schülerinnen und Schüler kann mit mathematischer Einsicht erweitert werden.

Die im Folgenden skizzierten fächerübergreifenden Unterrichtsmodule sind Beispiele dafür. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie eine Diskussion anregen, in der mathematische und biologische Aspekte eng verflochten sind.

2 Unterrichtsmodul Ernährungskreis

2.1 Ausgangslage

Die Ergebnisse der aktuellen Kinder- und Jugendgesundheitssurveys (KIGGS, Kurth & Schaffrath 2007) verdeutlichen die besorgniserregende Entwicklung und die Notwendigkeit für dringenden Handlungsbedarf und Präventionsmaßnahmen: Immer mehr Jugendliche ernähren sich falsch und sind übergewichtig. Eine zentrale Rolle kommt hier den Schulen zu (Jerusalem 2003), da durch sie alle Jahrgänge einer Region erfasst werden können. So werden seit ca. 15 Jahren an den deutschen Schulen gesundheitsfördernde Aktivitäten angeboten, die sich vorwiegend auf Suchtprävention und die Förderung von körperlicher Bewegung und gesunder Ernährung beziehen (Groß et al. 2008). Im vorliegenden Unterrichtsprojekt wurde eine Maßnahme zum Thema „gesunde Ernährung“ entwickelt und mit Schülerinnen und Schülern erprobt. Das Besondere ist der fächerübergreifende Ansatz für einen Unterricht zwischen Mathematik und Biologie

2.2 Die Unterrichtskonzeption

Ziel des Unterrichtsmoduls zwischen Mathematik und Biologie ist – aus Sicht des Biologieunterrichts - die Thematisierung gesunder Ernährung mit Hilfe des von der deutschen Gesellschaft für Ernährung empfohlenen Ernährungskreises. Danach stellt der Ernährungskreis die optimale Verteilung von Lebensmitteln im Rahmen einer vollwertigen Ernährung dar. Die einzelnen Kreissegmente verdeutlichen durch ihre Größe die Mengen, die pro Nahrungskategorie täglich aufgenommen werden sollten. Es ist ein „Modell für die Ernährung gesunder Erwachsener“, das „eine bedarfsgerechte und ausreichende Zufuhr von Nährstoffen, Ballaststoffen und sekundären Pflanzenstoffen“ sicherstellt (DGE 2005, S. 18, vgl. Abbildung 1).

Abb. 1: Ernährungskreis der Deutschen Gesellschaft für Ernährung e.V. (DGE 2005)

Aus Sicht des Mathematikunterrichts wird der Ernährungskreis genutzt, um an Hand eines hochaktuellen und schülerorientierten Themas in die Darstellungsform der Kreisdiagramme einzuführen und dabei Prozentrechnung anzuwenden.
Das Modul gliedert sich in die folgenden Teile:
Der Einstieg erfolgt über eine vor geschaltete Hausaufgabe, bei der die Schülerinnen und Schüler in einer Tabelle mit Spalten der verschiedenen Ernährungskategorien jeweils in Gramm notieren, was sie an einem Tag gegessen haben. Die Frage, inwieweit ihre Ernährung mit dem von der Deutschen Gesellschaft für Ernährung empfohlenen Essverhalten übereinstimmt, motiviert einen Vergleich und damit die Konstruktion eines eigenen Ernährungskreises. Dafür sind die Gesamtmenge und die prozentualen Anteile zu berechnen und in Winkelmaße zu übertragen (Grundlagen Kreisdiagramm). Im folgenden Unterrichtsverlauf werden an Hand von weiteren Ernährungstabellen, etwa mit gleichen prozentualen Anteilen, aber unterschiedlicher Gesamtmenge, die Grenzen eines Kreisdiagramms diskutiert.
Den Abschluss des Unterrichtsmoduls bildet eine Präsentationsphase, die auch zu einer Diskussion über die Alltagstauglichkeit des Ernährungskreises und zur Konzeption von eigenen Ernährungsregeln anregt.

3 Unterrichtsmodul Proportionen

3.1 Hintergrund

Masse bzw. Volumen und Oberfläche sind charakteristische Größen, die Rückschlüsse auf das Leben und Verhalten von Tieren zulassen. Entscheidend ist insbesondere das Verhältnis von Volumen (Masse) zu Oberfläche, was sich in verschiedenen biologischen Konsequenzen zeigt. Beispiele:

- Es gibt Insekten mit unterschiedlichem Schlankheitsgrad, aber gleicher Masse.
- Insekten sind klein, während Tiere, deren Sauerstoffversorgung über das Blut erfolgt, sehr groß werden können.
- Kleine und große Tiere unterscheiden sich in der relativen Körperkraft.
- Im Tierreich gibt es statt exakter Ähnlichkeit eher Allometrien. Das heißt, dass ähnlich wirkende Tiere, wie zum Beispiel Hauskatze und Tiger oder Jungtier und Alttier, durchaus unterschiedliche Proportionen, etwa bei den Organen, Kopf usw. haben (vgl. Abbildung 2).

Abb. 2: Allometrien: Jung- und Alttier (www.pixelio.de, ID 235810)

3.2 Die Unterrichtskonzeption

Die Unterrichtskonzeption besteht aus verschiedenen Arbeitsblättern/ Stationen mit mathematischem und biologischen Inhalt. Themen sind zentrische Streckung, Verhältnisse zwischen Längen, Oberflächen und Volumen, Formunterschiede volumengleicher Körper mit unterschiedlicher Oberfläche wie bei Würfel und Quader bzw. Libelle und Käfer, mathematischer Vergleich ähnlich wirkender Tiere und Diskussion der entdeckten Allometrien vor dem biologischen Hintergrund.

Anmerkungen:

- Entwicklung und Leitung des Unterrichtsmoduls Ernährungskreis: Annika Grube (vgl. Grube 2008).
- An der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd, an der die Unterrichtsmoduln entwickelt wurden, befasst sich ein größer angelegtes Projekt darüber hinaus mit der Untersuchung psychosozialer Faktoren und der Wechselwirkung zwischen Ernährung, Bewegung und psychologischen Komponenten (Kohlmann et al. 2008).
- Eine ausführliche Darstellung der Unterrichtsmodule mit Arbeitsblättern und Erfahrungsberichten findet sich unter: www.sciencemath.ph-gmuend.de

Literatur

Beckmann, A. (2003). Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Bd 1, (Franzbecker)

Deutsche Gesellschaft für Ernährung e.V. Bonn (2005). CD: DGE- Ernährungkreis – Wegweiser für eine vollwertige Lebensmittelauswahl.

Groß, C. et al. (2008) Praxis der Gesundheitsförderung an Schulen in Ost-Württemberg. In: Prävention und Gesundheitsförderung 2008. S. 1-10

Grube, A. (2008). Der DGE-Ernährungskreis als Thema im fächerübergreifenden Mathematikunterricht der Realschule –In: Beckmann, A. (Hg.): Ausgewählte Unterrichtskonzepte in unterrichtlicher Errobung. Band 5. (Franzbecker).

Kohlmann, C.-W. et al (2008). Stress, coping, and health behaviors – Health psychology at the University of Education Schwäbisch Gmünd, Zeit. für Gesundheitsps. 16/3. S. 235-238

Kurth., B.-M. et al (2007). Die Verbreitung von Übergewicht und Adipositas bei Kindern und Jugendlichen in Deutschland. Ergebnisse. Bundesgesundheitsblatt – Gesundheitsförderung – Gesundheitsschutz 50. S. 736-743

Weigand et al. (2007) vgl. www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de

Vollrath & Weigand (2007). Algebra in der Sekundarstufe, 3. Aufl., Heidelberg (Spektrum)

Ralf BENÖLKEN, Münster

Mathematisch begabte Mädchen im Grundschulalter

Im Folgenden werden Grundpositionen zur Existenz, Ableitbarkeit und Überprüfbarkeit möglicher Besonderheiten mathematisch begabter[1] Mädchen im Grundschulalter gegenüber mathematisch begabten Jungen und gegenüber durchschnittlich begabten Kindern entwickelt, die eine wesentliche Grundlage für die Systematisierung und Wertung entsprechender Theorieansätze aus Mathematikdidaktik und Bezugsdisziplinen innerhalb meines Promotionsprojekts darstellen. Dieses Forschungsvorhaben integriert Aspekte der Frauen- und Begabungsforschung. Dabei geht es nicht um die soziokulturelle Konstruktion von Geschlecht i.S. der „*Gender Studies*“, sondern um eine Hypothesengenese aus begabungstheoretischer Sicht auf der Basis eines theoretisch-analytischen Vorgehens mit dem Ziel, tatsächlich feststellbare Aspekte aufzudecken, die eine adäquate Identifikation und Förderung mathematisch begabter Mädchen verhindern bzw. gewährleisten. Die Annahme solcher Besonderheiten ergibt sich aus der häufig beobachtbaren Unterrepräsentanz von Mädchen in Projekten zur Förderung mathematisch begabter Grundschulkinder (vgl. Benölken 2008a).

Neuere Ansätze zu Geschlechtsunterschieden gehen von der Existenz unabhängiger maskuliner und femininer Merkmale aus, die sich nicht widersprechen und kombiniert werden können. Persönlichkeitseigenschaften, die m.E. während der Entwicklung mathematischer Begabungen im Sinne **co-kognitiver Katalysatoren** wirken können**,** wie Wettbewerbsdenken oder Dominanz ordnet man eher Jungen zu, Mädchen hingegen eher Sanftmut oder Nachgiebigkeit. Beiden Geschlechtern werden z.B. Freundlichkeit und Verlässlichkeit zugeschrieben (vgl. Bischof-Köhler 2006, S. 17 - 19).

Bzgl. **allgemeiner kognitiver Fähigkeiten** ergab die bekannte Studie von Maccoby & Jacklin (1974) Geschlechtsunterschiede in den folgenden Bereichen: Mädchen überträfen Jungen bei verbalen Fähigkeiten, Jungen Mädchen bei visuell-räumlichen und bei mathematischen Fähigkeiten. Außerdem seien Jungen physisch und verbal aggressiver. Geschlechtsunterschiede im motivational-emotionalen Bereich ergab die Revision von Block (1976), was wiederum auf o.g. Besonderheiten bei co-kognitiven Faktoren hindeutet (z.B. beim Selbstvertrauen). Hyde (1981) bzw. Hyde et

---

[1] Unter einer mathematischen Begabung verstehe mit Käpnick & Fuchs ein „*sich dynamisch entwickelndes Potential von individuell geprägten, weit überdurchschnittlichen mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen und sich hiermit in wechselseitigen Zusammenhängen entwickelnden begabungsstützenden bereichsspezifischen Persönlichkeitseigenschaften.*“ (Fuchs 2006, S. 68; siehe auch Käpnick 2006, S. 60)

al. (2008) stellten Unterschiede nur in verbalen und mathematischen Leistungen bzw. zunehmende diesbzgl. Nivellierungen fest. Ähnliche Ergebnisse lieferte auch die Mehrzahl neuerer Studien. Dies liegt u.a. mitunter darin begründet, dass IQ-Tests zur Messung des allgemeinen Intelligenzniveaus auf möglichst geringe Geschlechtsunterschiede hin konstruiert sind. Deren fähigkeitsorientierte Teilaufgaben deuten aber auf geschlechtsspezifische Vorteile in einzelnen Bereichen hin (vgl. z.B. Alvarez 2007, S. 76).

Bei **verbalen Fähigkeiten** belegen die meisten Untersuchungen, u.a. auch die PISA-Studien, eine Überlegenheit der Mädchen gegenüber Jungen (z.B. Prenzel et al. 2005; eine Übersicht geben Wieczerkowski & Prado 1992, S. 44). Bei begabten Kindern ist dieser Trend weniger ausgeprägt (ebenda).

Untersuchungen zu Fähigkeiten im **räumlichen Vorstellungsvermögen** dokumentieren eine tendenziell kulturunabhängige Überlegenheit von Jungen gegenüber Mädchen (z.B. Linn & Petersen 1985; Geary & DeSoto 2001). Derartige Geschlechtsunterschiede sind bei begabten Kindern ebenfalls weniger ausgeprägt (vgl. Wieczerkowski & Prado 1992, S. 44).

Die Befunde zu **fähigkeitsbezogenen Geschlechtsunterschieden im mathematischen Bereich** sind nicht eindeutig und werden unterschiedlich interpretiert, was die folgenden Exempel belegen:

- Brunner et al. (2007) stellten bei Neuntklässlern Geschlechtsunterschiede in der mathematischen Leistungsfähigkeit zugunsten der Jungen fest.
- Hyde et al. (1990) fanden in einer Metaanalyse sehr geringe Geschlechtsunterschiede in mathematischen Fähigkeiten. Es zeigte sich jedoch eine steigende Überlegenheit des männlichen Geschlechts mit zunehmendem Alter. Ähnliche Befunde lieferten z.B. Nachfolgeuntersuchungen (Hyde et al. 2008) und internationale Vergleichsstudien (vgl. Hanna 2000). Für das Grundschulalter deuten Studien darauf hin, dass im 1. Schuljahr keine, im 2. und 3. aber Unterschiede zugunsten der Jungen auftreten (z.B. Kesting 2005).
- Ausgeprägte Differenzen finden sich in den Extrembereichen mathematischer Fähigkeiten bei überdurchschnittlich Leistungsstarken zugunsten bzw. bei überdurchschnittlich Leistungsschwachen zuungunsten der Jungen (z.B. Brody et al. 1994).
- Verschiedene Studien deuten zwar darauf hin, dass Jungen leicht höhere Kompetenzen im mathematischen Problemlösen besitzen (vgl. z.B. Hyde et al. 1990; Prenzel et al. 2005) und entsprechend besser bei Problemlöseaufgaben (z.B. Hyde et al. 1990) sowie bei „schwierigeren" Aufgaben abschneiden, Mädchen aber besser bei Rechenaufgaben (vgl. die Übersicht bei Viet & Gosmann 1991, S. 3 - 5).

- Viele Autoren vertreten die Ansicht, es gebe mehr sprachbegabte Frauen und mehr mathematisch begabte Männer (z.B. Alvarez 2007, S. 76).
- Einige Studien deuten auf eine Kulturspezifik geschlechtsspezifischer Leistungsdifferenzen in der Mathematik (z.B. Brandon & Jordan 1994).

Diese Befunde legen insgesamt m.E. nahe, dass die vergleichsweise seltenere Hinwendung von Mädchen und Frauen zur Mathematik, insbesondere die seltenere Identifikation mathematisch begabter Mädchen, eher nicht mit einem geringeren mathematikspezifischen Fähigkeitspotenzial zu erklären ist. Verschiedene Belege gibt es demgegenüber für geschlechtsspezifisch variierende Präferenzen von Denkstilen u.Ä. (z.B. Schwank 2003).

Zusammenfassend interpretiere ich die vorgestellten Erkenntnisse aus begabungstheoretischer Sicht wie folgt: Es gibt noch zu konkretisierende **vielfältige und vielschichtige Unterschiede zwischen den Geschlechtern bei i.S. co-kognitiver Katalysatoren wirkenden Persönlichkeitseigenschaften und motivationalen Faktoren**, die sich auf die Entfaltung mathematischer Begabungen auswirken können. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der meisten Studien ist festzustellen, dass im Durchschnitt **keine wesentlichen Geschlechtsunterschiede bzgl. des mathematischen Fähigkeitspotenzials** existieren. Dies schließt nicht aus, dass geschlechtsspezifisch variierende Schwerpunkte bei kognitiven Strukturen u.Ä. auftreten können. Darüber hinaus sehe ich in Einklang mit aktuellen Erkenntnissen der Begabungsforschung die Entfaltung von Persönlichkeitseigenschaften und kognitiven Begabungen unter einem wesentlichen **Einfluss des sozialen Umfelds**, z.B. durch Bekräftigungseffekte. Die Gesamtheit dieser drei Faktoren steht bereits im Grundschulalter in einem **komplexen wechselseitigen Bedingungsgefüge**.

Dieser Ansatz impliziert, dass mathematisch begabte Mädchen nur einer ganzheitlichen Sichtweise auf ihre Persönlichkeit entsprechend gefördert werden können. Derartige Aspekte sind bisher wenig erforscht, können m.E. aber aus bereits vorliegenden Erkenntnissen theoretisch-analytisch abgeleitet und empirisch erforscht werden (erste Ergebnisse gibt Benölken 2008a; 2008b; 2009).

Literatur

Alvarez, C. (2007): Hochbegabung, DTV: München.

Benölken, R. (2009): Begabungs- und geschlechtsspezifische Besonderheiten bei mathematischen Selbstkonzepten. In: Fritzlar, T.; Heinrich, F. (Hrsg.,2009): Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkennen und fördern (in Vorbereitung).

Benölken, R (2008a): Attributionsmuster mathematisch potenziell begabter Mädchen im Grundschulalter. In: Fuchs, M.; Käpnick, F. (Hrsg.,2008): Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft, Lit: Berlin, S. 84-102.

Benölken, R. (2008b): Besonderheiten mathematisch begabter Mädchen im Grundschulalter. In: Vásárhelyi, É. (Hrsg.,2008): Beiträge zum Mathematikunterricht 2008: WTM-Verlag: Münster, S. 327-330.

Bischof-Köhler, D. (2006): Von Natur aus anders - Die Psychologie der Geschlechtsunterschiede, 3., überarbeitete und erweiterte Auflage, Kohlhammer: Stuttgart.

Block, J. (1976): Issues, problems and pitfalls in assessing sex differences: A critical review of the psychology of sex differences. In: Merrill-Palmer Quarterly 22, S. 283-308.

Brandon, P. R.; Jordan, C. (1994): Gender differences favoring Hawai'i girls in mathematics achievement: Recent findings and hypotheses. In: ZDM 26.1, S. 18-21.

Brody, L. E.; Barnett, L. B.; Mills, C. J. (1994): Gender differences among talented adolescents. In: Heller, K. A.; Hany, E. A. (Hrsg.,1994): Competence and responsibility. The third European Council for High Ability, Hogrefe & Huber: Seattle, S. 204-210.

Brunner, M.; Krauss, S.; Kunter, M. (2007): Gender differences in mathematics: Does the story need to be rewritten?. In: Intelligence (2007), doi10.1016/j.intell.2007.11.002

Fuchs, M. (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen, Lit: Berlin.

Geary, D. C.; DeSoto, M. C. (2001): Sex Differences in Spatial Abilities Among Adults from the United States and China - Implications for Evolutionary Theory. In: Evolution and Cognition, Vol. 7, No. 2, S. 172-177.

Hanna, G. (2000): Declining Gender Differences from FIMS to TIMSS. In: ZDM 1 (2000), S. 11-17.

Hyde, J. S. (1981): How large are cognitive gender differences? In: American Psychologist 36, S. 892-901.

Hyde, J. S.; Lindberg, S. M.; Linn, M. C.; Ellis, A. B.; Williams, C. C. (2008): Gender Similarities Characterize Math Performance. In: Science 321, S. 494f.

Hyde, J. S.; Fennema, E.; Lamon, S. J. (1990): Gender Differences in Mathematics Performance: A Meta-Analysis. In: Psychological Bulletin 107, S. 139-155.

Käpnick, F. (2006): Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschulkinder. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, Franzbecker: Hildesheim u. a., S.59f.

Kesting, F. (2005): Mathematisches Vorwissen zu Schuljahresbeginn bei Grundschülern der ersten drei Schuljahre - eine empirische Untersuchung, Franzb.: Hildesheim u. a.

Linn, M. C.; Petersen, A. C. (1985): Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. In: Child Development 56, S. 1479-1498.

Maccoby, E. E.; Jacklin, C. N. (1974): The psychology of sex differences, Stanford University Press: Stanford.

Prenzel, M.; Baumert, J.; Blum, W.; Lehmann, R.; Leutner, D.; Neubrand, M.; Pekrun, R.; Rost, J.; Schiefele, U. (Hrsg.,2005): PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?, Waxmann: Münster u. a.

Schwank, I. (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: ZDM 35.3, S. 70-78.

Viet, U.; Gosmann, U. (1991): Untersuchungen über bereichsspezifische Defizite von Jungen und Mädchen im Mathematikunterricht, Osnabrücker Schriften zur Mathematik: Osnabrück.

Wieczerkowski, W.; Prado, T. (1992): Begabung und Geschlecht. In: Hany, E. A.; Nickel, H. (Hrsg.,1992): Begabung und Hochbegabung. Theoretische Konzepte, empirische Befunde, praktische Konsequenzen, Huber: Bern u. a., S. 39-57.

Christine BESCHERER und Christian SPANNAGEL, Ludwigsburg

Kognitive Meisterlehre beim Mathematiklernen

Wie kann man lernen so zu denken wie „richtige Mathematiker"? Ein Ansatz, der Ende der 80er Jahre von Collins, Brown und Newman für die Grundschule entwickelt wurde, ist die kognitive Meisterlehre (*cognitive apprenticeship*). Genauso wie man bei einem Schreinermeister in die Lehre geht, um das Schreinern zu lernen, so müssen Kinder bei „Meisterinnen und Meistern des Denkens" in die Lehre gehen, um Schreiben, Lesen und Rechnen zu lernen. Wie lässt sich dieser Ansatz auf das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I im Kontext mathematisch-naturwissenschaftlicher Experimente übertragen? Dazu wird zunächst auf zentrale Fragestellungen des Experimentierens im Mathematikunterricht eingegangen, bevor die kognitive Meisterlehre und das Projekt KoMM vorgestellt werden.

1. Experimentieren im Mathematikunterricht

Beim Experimentieren im Mathematikunterricht ergeben sich Untersuchungsfelder auf sehr unterschiedlichen Niveaus.

- Experimente an sich können sowohl zum Überprüfen von Hypothesen („Alle Dreiecke im Kreis, deren eine Seite durch den Mittelpunkt geht, sind rechtwinklig.") als auch in Form explorativer Experimente („Mit welchen ebenen Figuren kann man parkettieren?") zum Generieren von Hypothesen dienen (vgl. Steinle, 2008).
- Beim Experimentieren in mathematischen Kontexten ergeben sich verschiedene Besonderheiten. So sind in Mathematik Gedankenexperimente ein wichtiger Bestandteil mathematischen Denkens. Diese unterscheiden sich selbstverständlich grundsätzlich von naturwissenschaftlichen Experimenten, die z. B. mit Abweichungen gemessener Werten von erwarteten Werten umgehen müssen. Weiter dienen mathematische Experimente oft ‚nur' der Generierung oder Veranschaulichung von Beweisideen. Um die Gültigkeit der Behauptung allgemein zeigen zu können, bedarf es trotzdem noch eines (formalen) Beweises.
- Im Mathematikunterricht haben Experimente sehr unterschiedliche Funktionen. So dienen sie häufig nur der Generierung von Daten (vgl. Ludwig & Oldenburg, 2007), um daran z. B. funktionale Zusammenhänge zu untersuchen. Damit ist eine Ergebnisoffenheit der Experimente meist ausgeschlossen. Auch werden im konkreten Unterricht oft den Lernenden kaum eigene Entdeckungen ermöglicht, sondern meist nur das – mehr oder weniger motivierte – Nachvollziehen der vorgegebenen Schritte.

Grundsätzlich ist Experimentieren im Mathematikunterricht immer Teil des entdeckenden Lernens oder auch des forschenden Lernens. Für beide Konzepte sind klare Strukturen bei der Konzeption der Lernumgebungen notwendig.

2. Kognitive Meisterlehre

Die Grundidee von Collins, Brown und Newman (1989) in der Entwicklung des *cognitive apprenticeship*-Ansatzes war die Verbindung der Methoden formaler schulischer Bildung mit denen der Berufsausbildung. Dazu entwickelten sie ein „Rahmenwerk für ideale Lernumgebungen“, das aus vier Teilen besteht:

- Inhalte: Neben Fachwissen, das sich aus Fakten- und Konzeptwissen sowie prozeduralem Wissen zusammensetzt, sind heuristische Strategien zum Problemlösen, Kontrollstrategien und Lernstrategien zentrale Lerninhalte.
- Lehrmethoden: Die Lehrmethoden sollten so gewählt werden, dass die Lernenden die Möglichkeit haben, Experten beim Problemlösen zu beobachten, selbst aktiv Probleme zu lösen und Problemlöse-Strategien zu entdecken bzw. selbst zu entwickeln.

Die sechs beschriebenen Methoden bestehen aus:

- *Modeling* – hier führt der Experte vor, wie er ein – mehr oder weniger – komplexes Problem löst. Dabei erklärt der Experte, warum er was wie macht und auch z.B. warum er etwas anderes nicht macht.
- *Coaching* – der Lehrende beobachtet die einzelnen Lernenden beim konkreten Lösen von Problemen und unterstützt sie dabei durch Tipps, Feedback, Erinnerungen und weiteren Aufgaben, so dass sich ihre Problemlösefertigkeiten weiterentwickeln.
- *Scaffolding* und *Fading* – *Scaffolding* bezieht sich auf die Unterstützung der Lernenden durch den Lehrenden, z. B. mit Hilfe von Tippkarten, Ausführen von Lösungsschritten, die für die Lernenden noch nicht leistbar sind, oder das Zurverfügungstellen von Teilergebnissen. Das *Fading* ist das langsame Zurückziehen der Unterstützung durch den Lehrenden. Je weiter die Lernenden im Lernprozess fortschreiten, umso mehr zieht sich der Lehrende zurück.

- *Articulation* – umfasst jegliche Methode, welche die Lernenden dazu bringt, ihr Wissen, ihre Begründungen oder ihre Problemlösestrategien zu artikulieren.
- *Reflection* – ermöglicht es den Lernenden, ihre Problemlöseprozesse zu reflektieren und zu vergleichen. Dazu gehören verschiedene Techniken der Reproduktion und der „Wiederholung" der Problemlöseschritte sowohl der Lernenden wie die der Experten.
- *Exploration* – beinhaltet das Anstoßen eigener Problemlöseprozesse, -strategien oder auch Fragestellungen. Die Explorationsphase kann in die höchste Form des *Fading* münden, nämlich dem Rückzug sowohl beim Problemlösen wie auch beim Stellen von Problemaufgaben. Trotzdem unterstützt der Lehrende selbstverständlich weiterhin die Lernenden beim Problemlösen im Sinne von *Coaching*, *Articulation* und *Reflection*.

– Sequenzierung: Die Lernumgebungen sollten so gestaltet werden, dass die Komplexität der Aufgaben bzw. der Mikrowelten mit der Zeit zunimmt. Ebenso nimmt die Vielfalt der Aufgaben und der Kontexte zu, aber auch die Vielfalt der zum Lösen notwendigen Fertigkeiten und Fähigkeiten. Allgemeine Fähigkeiten sollten stärker betont werden als spezifische Fähigkeiten. So könnte z. B. mit Hilfe von *Scaffolding*-Methoden – oder dem Einsatz von Technologie – die Lernenden von trickreichen Umformungen beim Bestimmen von Integralen entlastet werden. Die Lernenden können sich hierdurch erst eine Vorstellung des Gesamtkonzepts „Integrieren" machen, bevor sie sich in die Details der Lösungsverfahren vertiefen.

– Soziale Einbindung: Das situierte Lernen stellt ein Hauptelement des Rahmenwerks dar, weil Lernende dabei in sozialen Kontexten Wissen konstruieren. Die Expertenkultur umfasst sowohl die Rolle der Lehrenden beim *Modeling* wie auch die Entwicklung der Lernenden zu Experten. Weitere Kennzeichen guter Lernumgebungen sind das Vorliegen intrinsischer Motivation und das sinnvolle Nutzen sowohl von Kooperations- wie auch Wettbewerbssituationen.

Auch wenn die Darstellung diese Rahmenkonzepts nur linear möglich ist und der Begriff „Sequenzierung" eine strenge Reihenfolge nahelegt, ist die kognitive Meisterlehre nicht als „Einbahnstraße" zu sehen. Natürlich können Lernende nicht eigene Problemaufgaben und Lösungsstrategien erfinden, wenn sie noch überhaupt keine Vorstellung zu bestimmten Inhaltsgebieten haben, aber auch wenn sie schon ein gewisses Basiswissen haben, kann immer wieder eine *Modeling*-Phase notwendig sein. Der Lehrende kann dies dann für die gesamte Lerngruppe oder auch im Rahmen des *Coaching* nur für einzelne Lernende einsetzen.

3. Projekt KoMM

Das Projekt KoMM (*Kognitive Meisterlehre beim Mathematiklernen*) mit dem Untertitel *Methoden und Techniken zur Umsetzung und Unterstützung des Cognitive Apprenticeship Ansatzes am Beispiel der Auswertung von Daten aus Experimenten* ist Teil des vom Land Baden-Württemberg finanzierten strukturierten Promotionskollegs *Mathematisch-naturwissenschaftliches Lernen in lebensnahen Anwendungskontexten.* An diesem Promotionskolleg sind die Pädagogischen Hochschulen Ludwigsburg, Schwäbisch Gmünd und Weingarten mit den Fächern Physik, Chemie, Biologie, Deutsch, Psychologie, Informatik und Mathematik beteiligt. Es hat im Februar 2009 begonnen und ist auf ca. 3 Jahre konzipiert.

4. Ausblick

Im Teilprojekt KoMM werden in den nächsten drei Jahren Lernumgebungen und entsprechende Materialien – sowohl mit als auch ohne Computertechnologie – für das Experimentieren im Mathematikunterricht entwickelt. Dabei sollen insbesondere geeignete Methoden für *Modeling*-, *Coaching*- und *Scaffolding*-Phasen getestet und beschrieben werden, sowie sinnvolle Anregungen der Artikulation und Reflexion. Aus Machbarkeitsgründen beschränken sich die Inhaltsbereiche auf die Planung naturwissenschaftlicher Experimente (z. B. Messgenauigkeit, Messwiederholungen, usw.), die Auswertung der erhobenen Daten, auf ausgewählte innermathematische Experimente, aber auch auf die Bedienung von Tabellenkalkulationssystemen und anderer Software.

Literatur

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453–494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007). Experimentieren. Themenheft *mathematik lehren*, 141.

Steinle, F. (2008). Explorieren – Entdecken – Testen. *Spektrum der Wissenschaft,* 9, 34–41

Albrecht BEUTELSPACHER, Gießen

Das Mini-Mathematikum in Gießen

Im Mathematikum in Gießen wird ein separater Bereich für vier- bis achtjährige Kinder eingerichtet. Dies ist weltweit das erste mathematische Museum für Kinder (www.minimathematikum.de).

1. Entstehung

Das Mathematikum in Gießen ist seit seiner Eröffnung im Jahr 2002 eine Erfolgsgeschichte. Schon die quantitativen Zahlen sprechen eine beredte Sprache: Jedes Jahr besuchen etwa 150.000 Menschen jeden Alters und jeder Vorbildung das Mathematikum, wobei 40% der Besucher als Schulklassen kommen, und 60% Privatbesucher sind, zu einem großen Teil Familien. Damit gehört das Mathematikum zu den 3% besucherstärksten Museen Deutschlands.

Aber auch die Qualität der Besuche ist bemerkenswert. Die Begeisterung der Besucher ist unübersehbar (und unüberhörbar). Die Besuche dauern lange, mindestens zwei Stunden, und viele Besucher kommen wieder. In Gießen und Umgebung wird das Mathematikum auch von der Bevölkerung hervorragend angenommen: „Wenn wir Besuch bekommen, gehen wir ins Mathematikum“, ist eine Aussage, die oft zu hören ist.

Schon vor einigen Jahren war zu beobachten, dass sich die untere Altersgrenze der Besucher immer weiter senkt: Immer häufiger kommen auch Kinder in den ersten Grundschuljahren und Vorschulkinder ins Mathematikum. Wenn diese mit der Familie das Mathematikum besuchen, ist das kein Problem. Schulklassen mit sehr jungen Kindern und KiTa-Gruppen haben allerdings keine ideale Besuchssituation: Man kann die Gruppe kaum zusammenhalten, und es gibt keinen Rückzugsraum.

Daher entstand schon Anfang 2007 die Idee eines „Mini-Mathematikums“, das heißt eines separaten Bereichs für vier- bis achtjährige Kinder mit speziell für diese Altergruppe entwickelten Exponaten. Damit verbunden war auch ein Entwicklungskonzept: Wie das „große“ Mathematikum sollten die Exponate zunächst in temporären Ausstellung und einer Wanderausstellung getestet werden.

Im Winter 2007/2008 und 2008/2009 wurde daher jeweils eine Ausstellung für vier- bis achtjährige Kinder im Mathematikum in Gießen gezeigt. Im Jahr 2008 wurde im Rahmen des „Jahrs der Mathematik“ eine Deutschlandtour organisiert, die vom BMBF und der Deutschen Telekom Stiftung finanziert wurde, und für die Ministerin Ursula von der Leyen die Schirmherrschaft übernommen hat.

Alle Ausstellungen waren außerordentlich erfolgreich, und zwar sowohl bei den Kindern, als auch bei den Erzieherinnen und Erziehern, Eltern und Betreuern.

Ab Mai 2009 ist das Mini-Mathematikum im Dachgeschoss des Mathematikums Gießen dauerhaft zu sehen.

2. Die Exponate

Die Exponate des Mini-Mathematikums sind genau so seriös und herausfordernd (und technisch hervorragend) wie die Exponate im „großen" Mathematikum. Natürlich sind die Exponate in ihrer Größe und auch in ihrer Komplexität an die Zielgruppe angepasst. Aber manche Exponate sind in manchen Aspekten noch pfiffiger als die „großen" Exponate. In jedem Fall sind anbiedernde „Baby-Exponate" ausgeschlossen.

Zu den Exponaten gehören:

- Das *Spiegelhäuschen*. Ein waagrechter Spiegel, der auf dem Boden liegt, wird durch einen innen verspiegelten „Giebel" vervollständigt. Die Kinder (nicht die Erwachsenen!) können in dem Häuschen sitzen oder liegen und sehen sich oben und unten unendlich oft gespiegelt.
- Der *Knobeltisch*. Auf einem sechseckigen Tisch werden sechs Knobelspiele angeboten, zum Beispiel eine dreiteilige Kugelpyramide, ein zweiteiliger Würfel, und ein Dreieck aus drei Teilen.
- Das Exponat *Wir bauen eine Stadt*. Auf einer Rückwand ist der Schattenriss einer Stadt aufgezeichnet. Die Kinder sind aufgefordert, mit Bauklötzen die Häuser der Stadt nachzubauen.
- Der *Zahlentisch*. Auf einer kreisförmigen Platte sind die Zahlen 1 bis 12 zu lesen. Daneben kann man durch ein „Bullauge" jeweils einen Gegenstand sehen, der diese Zahl in besonderer Weise verwirklicht. Beispiele: 4 = Jahreszeiten, 6 = Würfel, 10 = zehn Finger, 12 = Uhr.
- *Gegenstände fühlen*. Unter einem runden Tisch kann man Küchengeräte fühlen, die eine „mathematische Form" haben. Dann kann man ein Plättchen, auf dem dieses Gerät abgebildet ist, an die richtige Stelle legen.

Bei jedem Exponat ist eine kleine Tafel. Auf dieser steht, auf ein Minimum reduziert, was man machen soll. Neben der verbalen Version ist auch eine Zeichnung zu sehen, so dass auch die Kinder sofort verstehen, was zu tun ist.

3. Pädagogisches Konzept

Das Lernmodell des Mathematikums ist weder Instruktion („Ich erzähl Dir etwas“) noch Imitation („Ich zeig Dir, wie es geht“), vielmehr ist jeder Besucher ein Forscher. Jedes Exponat zeigt ein Problem, das es zu lösen gilt. Das Entscheidende ist, dass die Besucher (kleine und große) selbst auf die Lösung kommen; die Betreuer geben höchstens sensible Hinweise und Tipps. Dadurch sind auch die Erfolgserlebnisse so stark, denn die Besucher haben es ja alleine geschafft.

Den Exponaten des Mini-Mathematikums – wie auch denen des Mathematikums – liegt die Überzeugung zugrunde, dass die mathematischen Phänomene das eigentlich Spannende sind. Es wird bewusst auf scheinbare „Motivation“ (Lichteffekte, grelle Farben, Sound, Nebel usw.) verzichtet. Im Gegenteil: der mathematische Effekt wird so gezeigt, dass möglichst wenig Ablenkung entsteht.

Organisiert ist das Mini-Mathematikum so, dass es vormittags für angemeldete Gruppen reserviert ist. Jede Gruppe hat den Raum und eine Betreuerin eineinhalb Stunden für sich. Der Besuch beginnt mit einer Einführung (bei der die Kinder auf dem Boden sitzen), dann werden die Exponate gezielt in Gruppen erforscht, und am Ende gibt es noch ein Abschlussgespräch.

Nachmittags, an den Wochenenden und in den hessischen Schulferien ist das Mini-Mathematikum für das allgemeine Publikum, insbesondere für Familien geöffnet.

Die Exponate sind bewusst so konzipiert, dass sie die Schulmathematik nicht vorwegnehmen, insbesondere gibt es keine „Rechenexponate“.

4. Gründe für ein Mathematikum in Gießen

Für die *Kinder* ist das Mini-Mathematikum ein Bereich, in dem sie altersgemäß lernen können. Sie werden ernst genommen, das Lernen geschieht „automatisch“, d.h. weitgehend nonverbal, sie haben einen ersten Kontakt mit der Wissenschaft.

Für die *Eltern* ist das Mathematikum ein Ort für vor- und außerschulische Bildung, in dem ihre Kinder in spielerischer, aber seriöser Weise mit Mathematik in Verbindung gebracht werden. (Übrigens ist immer wieder festzustellen, dass das Mini-Mathematikum den Eltern und Großeltern fast so viel Freude macht wie den Kindern.)

Für die *Stadt Gießen* und die Region bedeutet das Mini-Mathematikum deutschlandweite Sichtbarkeit und eine weitere Stärkung des Alleinstellungsmerkmals „Mathematikum“.

Für die *Universität* bietet das Mini-Mathematikum ideale Forschungsmöglichkeiten. Überdies bietet sich für viele Studierende die Möglichkeit, im Mathematikum zu arbeiten, und damit frühzeitig Erfahrung im Umgang mit Kindern zusammeln.

Für das Mathematikum ist das Mini-Mathematikum eine ideale Ergänzung, die eine weitere Profilierung der Marke „Mathematikum" bedeutet und übrigens auch die wirtschaftliche Situation des Mathematikums stabilisiert.

Ulrich BÖHM, Darmstadt

Ein Online-Lehrerfortbildungskurs zum mathematischen Modellieren

Unter der Leitung von Frau Prof. Dr. Regina Bruder bietet die AG Didaktik des FB Mathematik der TU Darmstadt seit 2005 halbjährige Online-Fortbildungskurse für Mathematiklehrkräfte an, vgl. auch Polushkina et al. (2008). Der Kurs zum mathematischen Modellieren, wurde vom hessischen Kultusministerium als Wahlmodul zur Umsetzung der Bildungsstandards in Hessen in Auftrag gegeben und im vergangenen Herbst erstmals erprobt. Dem didaktischen Rahmenkonzept des Kurses liegt eine moderat konstruktivistische Sicht zugrunde und gliedert die Lerninhalte nach Weinert (1999, S. 33f) in intelligentes Wissen, Metakompetenz und Handlungskompetenz. Durch eine teletutorielle Betreuung wird den Kursteilnehmern individuelles Feedback z.B. als Rückmeldung zu eingereichten Modulaufgaben geben. Der Online-Kurs zum Modellieren gliedert sich in sechs Module. Tabelle 1 stellt eine Übersicht der Kursinhalte dar.

Modul I	Warum und wozu mathematisches Modellieren im MU? (u.a. Humenberger & Reichel 1995, Maaß 2007)
Modul II	Was ist mit math. Modellieren gemeint? - Modellierungsprozess und Modellierungskompetenzen (u.a. Blum & Leiß 2005, Maaß 2007)
Modul III	Aufgaben zum Fördern von Modellierungskompetenzen (u.a. Maaß 2007, Herget, Jahnke & Kroll 2001)
Modul IV	Methodische Hinweise zur Förderung von Modellierungskompetenzen im Unterricht (Maaß 2007, Blum 2007)
Modul V	Diagnose und Bewertung (u.a. Hußmann, Leuders & Prediger 2007, Maaß 2007)
Modul VI	Zusammenfassung und Ausblick

Tabelle 1: Übersicht über die Module des Kurses „Mathematisches Modellieren“.

Modultext, Aufgabe und individuelles Feedback

An Hand der folgenden Aufgabe wird exemplarisch die Vorgehensweise für ein individuelles Feedback zu einer Bearbeitung einer Kursteilnehmerin vor dem Hintergrund des Basistextes im ersten Modul dargestellt.

Aufgabe (Warum ist Modellieren sinnvoll?)
Auf einem Elternabend möchten Sie darstellen, warum math. Modellieren eine wichtige allgemeine mathematische Kompetenz ist. Wie argumentieren Sie?
Eingereichte Bearbeitung
Schüler und Schülerinnen verbinden mit Mathematik oft ein stumpfes Abarbeiten von Aufgabenpäckchen ohne weiteren Sinn. (…) Die übliche Frage ist „wozu machen wir das denn überhaupt?“. Textaufgaben sind gehasst, da die Schülerinnen

> und Schüler schnell durchschauen, dass diese oft nur „künstlich“ in Worte eingekleidet werden.
> Konfrontiere ich sie jedoch mit wirklichen Problemen, wie z. B. Kostenrechnungen oder Preisüberlegungen für das nächste Klassenfest, entsteht eine intrinsische Motivation. Die Schülerinnen und Schüler sind begeistert, es wird geplant, probiert und Plakate gemalt. Der Sinn für das Rechnen liegt auf der Hand. In der sonst so „unmotivierten“ 11. Klassenstufe hat eine Schülerin, die mathematisch eher im Bereich 4-5 einzustufen ist, motiviert durch eine Wasserverbrauchsaufgabe selbst eine neue Aufgabenstellung für die Klasse entworfen.
> Da höhere Motivation höhere Leistungen bedingen, möchte ich in meinem Unterricht auch alltagsorientierte Aufgaben stellen. So wie Mathematik entstanden ist, nämlich aus konkreten Alltagsproblemen, möchte ich ihre Tochter bzw. ihren Sohn an die Mathematik heranführen.

Zunächst weist die Kursteilnehmerin auf Motivationsprobleme im aktuellen Mathematikunterricht hin. Vor diesem Hintergrund möchte die Lehrkraft durch einen historisch genetischen Zugang Sinnstiftung erreichen. In der Argumentation verweist die Lehrkraft auf Erfahrungen in ihrem eigenen Unterricht. Weitere Argumente, die im Basistext genannt werden, wie z.B. Realitätsbezüge als Beitrag zur Erschließung eines umfassenden Mathematikbildes im Sinne der Grunderfahrungen nach Winter (1996) sind in der Bearbeitung nicht zu finden. Diese Perspektive wurde im Modultext ausdrücklich dargestellt und auch in der Aufgabenbearbeitung erwartet. Im Feedback liegt nun der Schwerpunkt auf einer positiven Verstärkung der Bearbeitung der Kursteilnehmerin. Vor dem Hintergrund der Bearbeitung mit dem Bezug zur eigenen Unterrichtspraxis ist ein positives Feedback einfach zu formulieren. Der „fehlende“ Aspekt eines umfassenden Mathematikbildes wird als konstruktiver Hinweis für ein weiteres Argument angeboten. Ein defizitorientiertes Feedback wird also bewusst vermieden.

Lernzielkategorien und Lernzuwachs

An einem zweiten Beispiel wird die Aufgabenbearbeitung einer Kursteilnehmerin vor dem Hintergrund der Lernzielkategorien interpretiert und kurz auf die Frage nach dem Lernzuwachs im Kurszeitraum eingegangen.

> **Aufgabe (Diagnoseaufgabe)**
> Stellen Sie in Ihrem Unterricht eine Modellierungsaufgabe als Diagnoseaufgabe im Sinne der drei Kriterien für Diagnoseaufgaben aus dem Modultext (Modul V).
> Welche Erkenntnisse über die Schülerleistungen haben Sie gewonnen und welche Konsequenzen hat das für Ihre weitere Unterrichtsplanung?
> Kommentieren Sie kurz Ihr Vorgehen und Ihre Erfahrungen mit der gewählten Form der Diagnose. Welche Vor- und Nachteile hat Ihrer Meinung nach diese Form der Diagnose?
>
> **Eingereichte Bearbeitung einer Teilnehmerin**

Aufgabe: Wie lang ist der Streifen einer Zahnpastatube mit 125ml Inhalt?

> Da ich in der ersten Klausur schon einmal eine überbestimmte Aufgabe gestellt hatte (…), ging es mir nun bei den Fermiaufgaben darum, inwieweit sich die Schülerinnen und Schüler darauf einlassen würden, selbständig Annahmen zu treffen. (…) Die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler trafen die Angaben bezüglich des Durchmessers eines Zahnpastastreifens. Eine Gruppe überlegte, wie lange eine Tube normalerweise reiche, bis sie leer sei und schätzte die Länge des Streifens über die Anzahl des Zähneputzens und die Länge eines Streifens auf der Zahnbürste ab. (…)
> Die Interpretation ihrer Ergebnisse wurde von den Schülerinnen und Schülern gut beherrscht. (z. B. konnte es nicht sein, dass der Streifen 10 km lang ist.)
> Die Schülerinnen haben sich schnell darauf eingelassen, Annahmen zu treffen. Einfache mathematische Modelle wie z.B. Zylinder bzw. Geradengleichungen können sie auf Modellierungsaufgaben anwenden. (…)

In der Aufgabenbearbeitung lassen sich zunächst zahlreiche Begriffe identifizieren, die im Rahmen des Kurses in verschiedenen Modulen behandelt wurden. So stellt z.B. „FERMI-Aufgabe“ einen Aufgabentyp dar, der im Modul III genannt wurde. „Annahmen treffen“, „Interpretieren“ und der Bezug auf mathematische Modelle bezieht sich auf Teilhandlungen des Modellierungsprozesses. Diese Verwendung der Begriffe lässt sich als Beleg für den Erwerb von intelligentem Wissen interpretieren. Reflexionselemente nehmen in der Aufgabenbearbeitung einen großen Anteil ein. Die Aufgabenauswahl wird begründet und Schülerlösungen werden kommentiert. Diese reflektierte Diskussion fällt in die Kategorie des Meta-Wissens. Die Aufforderung, die Aufgabe in der Klasse zu erproben soll den Erwerb der Handlungskompetenz unterstützten. In der Aufgabenstellung und der Bearbeitung dieser Aufgaben lassen sich somit Elemente aller drei Lernzielkategorien identifizieren.

Rückschlüsse auf den Lernzuwachs im Kurszeitraum können anhand einer Repertory Grid Befragung im ersten Modul und dem Vergleich späterer Aufgabenbearbeitungen gezogen werden. Aus der Bearbeitung im ersten Modul geht klar hervor, dass der Aufgabentyp der FERMI-Aufgabe und deren Funktion im Rahmen des Kompetenzerwerbs zum Modellieren unbekannt war. Zur Aufgabe „Wie viele Zahnärtze gibt es in Darmstadt?“ schrieb dieselbe Lehrkraft am Kursbeginn:

> Die Zahnarztaufgabe kann eigentlich nur im Internet gelöst werden, indem die SuS auf einer geeigneten Seite die Anzahl der Zahnärzte addieren. Einen weiteren mathematischen Bezug sehe ich nicht. Kreativität sehe ich nicht, auch keine Verknüpfungen von Lösungen.

Forschungsfragen für ein Promotionsvorhaben

Bei der Entwicklung des Kurses zeigte sich, dass in der fachdidaktischen Literatur inzwischen zahlreiche Aufgaben und einzelne Hinweise auf das methodische Vorgehen zur Förderung von Modellierungskompetenzen zu finden sind. Ein umfassendes Unterrichtskonzept für einen langfristig angelegten Kompetenzaufbau zum mathematischen Modellieren gibt es dagegen noch nicht. Diese Tatsache ist die Begründung für folgende Forschungsfrage, der ich in meinem Promotionsvorhaben nachgehen möchte:

Wie kann der Kompetenzerwerb zum Mathematischen Modellieren sinnvoll über mehrere Klassenstufen hinweg im MU gestaltet werden?

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist zunächst eine genauere inhaltliche Bestimmung erforderlich: Wesentliche Aspekte hier sind die Frage nach dem Zielniveau von Teilkompetenzen zum Modellieren bzw. notwendigen Grundlagen für das erfolgreiche Modellieren in verschiedenen Kontexten und mit verschiedenen mathematischen Mitteln. Aufbauend auf dieser inhaltlichen Klärung folgen Fragen nach dem methodischen Vorgehen zur Unterstützung des Kompetenzerwerbs.

Literatur

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer? In Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Abgerufen am 26.02.2009 von http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2007/Blum.pdf

Blum, W. und Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren, 128*,18-21.

Greefrath, G. (2007). *Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben*, Köln: Aulis Verlag Deubner.

Herget, W., Jahnke, T., und Kroll, W. (2001). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen.

Humenberger, H., und Reichel, H. (1995). *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht.* Mannheim. BI-Wissenschaftsverlag.

Hußmann, S., Leuders, T. und Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen - Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule, 4,* 1-8.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Polushkina, S., Reibold, J., Bruder, R. (2008). Online-Lehrerfortbildungen an der Technischen Universität Darmstadt. In Vásárhelyi, E. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Abgerufen am 26.02.2009 von http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU2008/BzMU2008_POLUSHKINA_Svetlana%20&%20REIBOLD_Julia%20&%20BRUDER_Regina.pdf

Weinert, F. (1999). Die fünf Irrtümer der Schulreformer. *Psychologie heute*, *26*, 28 - 34.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *DMV*. 35-41.

Dagmar BÖNIG, Neele RÖBBELING, Gundel TIMM, Bremen

Erprobung und Evaluation einer Lernumgebung zur Kombinatorik in Kl 1/2

Zahlreiche Studien belegen inzwischen, dass sich Kinder einer jeden Klasse auch im Hinblick auf ihre mathematischen Leistungen z.T. sehr deutlich unterscheiden. Dennoch fällt es gerade im Fach Mathematik vielen Lehrerinnen und Lehrern nicht leicht Lernprozesse so anzuregen und zu organisieren, dass ihre „bildungsrelevanten Wirkungen auch tatsächlich alle Kinder erreichen" (Krauthausen, Scherer 2007, S. 225). Im Rahmen eines Schulbegleitforschungsprojekts[1] entwickeln wir Lernumgebungen, die es Kindern mit unterschiedlichen Voraussetzungen ermöglichen sollen dieselbe Aufgabenstellung auf verschiedenen Lernniveaus zu bearbeiten (Prinzip der „natürlichen Differenzierung"). Wir knüpfen damit an dem Schweizer Projekt „Mathematische Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte" an, die eine große Anzahl von Vorschlägen für zentrale Themenkreise der Grundschulmathematik veröffentlicht haben (Hengartner & al. 2006, Hirt, Wälti 2008). Die gewählten Lernumgebungen werden in den drei Bremer Grundschulen erprobt, deren Einzugsgebiete sich bewusst sehr stark unterscheiden. Über die Mitarbeit von Studierenden sind wir in der Lage, exemplarisch die Lernentwicklung einzelner Kinder zu analysieren, die bezogen auf die mathematischen Leistungen einen Querschnitt der jeweiligen Lerngruppen repräsentieren.

In diesem Beitrag stellen wir eine Lernumgebung zur Kombinatorik vor, die wir in einem ersten und zwei zweiten Schuljahren erprobt haben und gehen abschließend kurz auf die Lernentwicklung der Kinder ein.

Lernumgebung Kombinatorik

In unserem Schulbegleitforschungsprojekt benutzen wir den Begriff der mathematischen Lernumgebung in dem von Wollring (2008) explizierten Sinne, wobei die Kriterien der Differenzierung und Evaluation besondere Relevanz haben.

Aufgrund der in der Literatur dokumentierten Erfahrungen mit der Behandlung kombinatorischer Fragestellungen in der Grundschule (z.B. Neubert 2003) beschränken wir uns auf den Aufgabentyp der Permutation (Variation ohne Wiederholung) mit drei bzw. vier Elementen[2]. Die Lernumgebung erstreckt sich über acht Unterrichtsstunden, die im

---

[1] Das Projekt läuft von 2007 – 2010 und wird finanziert durch die Senatorin für Bildung und Wissenschaft Bremen.

[2] Eine Liste aller verwendeten Aufgaben stellen wir auf Anfrage gerne zur Verfügung.

dreiwöchigen Rhythmus stattfinden. Um den Kindern genügend Zeit für eine selbstständige Auseinandersetzung zu geben, übernehmen wir einen Vorschlag von Rasch (2001) und stellen pro Unterrichtsstunde nur eine Aufgabe. Die Kinder haben dann die Möglichkeit verschiedene Lösungswege zu beschreiten: mit oder ohne Material, auf zeichnerischer oder symbolischer Ebene. Zu Anfang ist für jedes Kind so viel Material vorhanden, dass alle Kombinationen gelegt werden können. Darüber hinaus werden die Kinder ermuntert den gewählten Weg schriftlich zu erläutern und dies zusammen mit den gefundenen Lösungen in ihrem „Kombinatorik-Heft" festzuhalten. Um keinen Lösungsweg vorzugeben (Anzahl der Lösungen, Richtung der Notation, …) besteht dieses Heft lediglich aus Blankopapier. Es dient primär als Dokumentation für das jeweilige Kind, kann später aber auch als Veranschaulichung des eigenen Lösungsweges z.B. in einer Strategiekonferenz einbezogen werden. Solche Konferenzen finden entweder mit der ganzen Klasse oder auch nur mit einer Teilgruppe von Kindern statt und bieten ein Forum sich über die verschiedenen Lösungswege auszutauschen, aber ggf. auch weiterführende Fragestellungen aufzuwerfen.

Kriterien für die Analyse der Lernentwicklung der Kinder

Die Analyse der Lernentwicklung basiert in dieser Lernumgebung i.W. auf den in den Lernheften dokumentierten Arbeitsergebnissen der Schülerinnen und Schüler und wird ergänzt durch unterrichtliche Beobachtungen der am Projekt beteiligten Studierenden. Dabei haben wir folgende Aspekte als Indikatoren für Lernfortschritte gewertet:

- Zunahme der Anzahl richtiger Lösungen
- Elaborierung bisheriger Bearbeitungswege bzw. Erweiterung des Strategierepertoires
- Transferleistungen (Erkennen und ggf. Nutzen struktureller Gemeinsamkeiten beim Lösen von Aufgaben; eigenes Konstruieren strukturgleicher Aufgaben)
- Entwickeln bzw. Ausdifferenzieren verbaler Beschreibungen

Lösungswege der Kinder

Die freie Wahl der Artikulationsunterstützung eröffnet den Kindern genügend Freiraum, so dass eine große Bandbreite von Wegen über ein probierendes Herantasten bis zu einem sehr strukturierten Vorgehen zu Tage tritt. Diese Vielfalt lässt sich anhand einer von Hoffmann (2003) veröffentlichten Kategorisierung gut ordnen. Hoffmann unterscheidet zunächst zwischen Mikro- und Makrostrategien. Während Mikrostrategien lediglich das Finden mehrerer Lösungsmöglichkeiten gestatten, lassen sich mit Makrostrategien alle Lösungen erzeugen[3].

Insgesamt konnten wir in allen Klassen ein zumindest in Teilen systematisches Vorgehen im Sinne der Mikrostrategien rekonstruieren. Ob den Kindern diese Strategien im Bearbeitungsprozess bewusst waren, lässt sich abschließend nicht klären, sie können auch zufällig entstanden sein. Ein wiederholtes Auftauchen der entsprechenden Muster bei der Bearbeitung nachfolgender Aufgaben haben wir aber als Indikator für ein nicht-zufälliges Anwenden gewertet. Die verwendeten Strategien entsprechen vielfach nicht den in Mathematiklehrbüchern für die Grundschule verwendeten Anordnungen. Darüber hinaus gibt es in allen Klassen Schülerinnen und Schüler, welche die Makrostrategie des Tachometerzählprinzips (vgl. Hoffmann 2003) entdecken und aufgabenadäquat nutzen.

Gerade zu Beginn des Lernprozesses hat die Handlungskompetenz der Kinder Priorität. Die Verbalisierungskompetenz entwickelt sich vielfach erst ganz allmählich und bedarf neben ausreichender Übungsangebote der ermunternden Unterstützung durch die Lehrperson. Als besonders lernförderlich erweist sich die kompetenzorientierte Würdigung der verschiedenen Lösungsansätze im Unterricht. Die Diskussion über die beschrittenen Lösungswege ermöglicht und fördert dann ein Hinwenden zu effektiveren Strategien. Diesen Prozess durchläuft ein jedes Kind allerdings gemäß seiner Lernvoraussetzungen bzw. individuellen Lernfortschritte. Bei den von uns beobachteten Kindern konnten wir im Verlauf der acht Stunden eine zunehmende Sicherheit im Umgang mit den benutzten Strategien oder eine Erweiterung des Repertoires von Mikrostrategien feststellen. Das Ausmaß der Fortschritte in diesem Bereich variierte jedoch stark.

Mit der selbstständigen Konstruktion eines kombinatorischen Kontextes (Erfinde eine ähnliche Aufgabe) waren alle Kinder im ersten Schuljahr überfordert. Im zweiten Schuljahr gelang dies einigen Kindern, die bereits sicher das Tachometerzählprinzip anwendeten.

Beschreiben und Begründen

Während sowohl Erst- wie Zweitklässler die tragfähige Strategie des Tachometerzählprinzips entdecken, gibt es deutliche Unterschiede in der Verbalisierungskompetenz. Eine schriftliche Formulierung ihres Lösungsweges ist selbst für die Kinder im zweiten Schuljahr schwierig. Sie müssen sich vieler, zum Teil intuitiver Entscheidungen und Vorgehensweisen in

3 Auf die Darstellung der vorkommenden Strategien müssen wir hier aus Platzgründen verzichten.

ihrem Lösungsprozess bewusst werden und sie in Worte fassen. So gibt es etliche Schülerinnen und Schüler, die zwar alle möglichen Kombinationen finden, aber ihren Weg noch nicht verbal beschreiben können. Mündliche Erläuterungen gelingen den Kindern in aller Regel leichter als schriftliche. Manche Bemerkungen in den Kombinatorik-Heften verdeutlichen das Bemühen um eine Begründung, wenngleich die Antwort keinen erklärenden Wert besitzt („Ich finde keine mehr." oder „Sonst wären welche doppelt."). Wir finden aber auch Ansätze von weitergehenden Beschreibungen, vornehmlich bei leistungsstärkeren Kindern, die bereits alle Lösungen finden.

Fazit

Die hier vorgestellte Lernumgebung zur Kombinatorik bietet Kindern unterschiedlichen Leistungsniveaus viel Freiraum für eigenständiges Problemlösen. Durch den Einsatz strukturgleicher Aufgaben können sie allmählich ihre eigenen Bearbeitungswege elaborieren und unterstützt durch den kommunikativen Austausch in den Konferenzen auch ihre Verbalisierungskompetenzen auf- bzw. ausbauen. Im Sinne eines spiraligen Vorgehens greifen wir diese Lernumgebung in Klasse 2 bzw. 3 erneut auf, rücken aber einen anderen Aufgabentyp ins Zentrum der Betrachtungen.

Literatur

Hengartner, E., Hirt, U., Wälti, B. & Primarstufenteam Lupsingen (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Verlag Klett und Balmer

Hirt, U., Wält, B. (2008): *Lernumgebungen im Mathematikunterricht*. Seelze: Friedrich Verlag

Hoffmann, A. (2003). *Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker Verlag

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. 3. Aufl., München: Elvesier

Neubert, B. (2003). Gute Aufgaben zur Kombinatorik in der Grundschule. In Ruwisch, S.; Peter-Koop, A. (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. (S. 89-101). Offenburg: Mildenberger Verlag

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule – Eine Studie zur Herangehensweisen von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert.* Hildesheim: Franzbecker Verlag

Wollring, B. (2008). Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In Kasseler Forschergruppe (Hrsg.), *Lernumgebungen auf dem Prüfstand. Bericht 2 der Kasseler Forschergruppe Empirische Bildungsforschung Lehren – Lernen – Literacy* (S. 9-26). Kassel: Kassel University Press GmbH.

Manfred BOROVCNIK, Klagenfurt

Am Schnittpunkt von empirischer Forschung und Unterricht in elementarer Wahrscheinlichkeit

In der empirischen Forschung zum Verständnis von Wahrscheinlichkeit werden Items verwendet, die als eindeutig lösbar unterstellt werden. Aus dem Lösungsverhalten und den Antworten in Nachfolge-Interviews versucht man zu interpretieren, inwieweit Probanden über geeignete Auffassungen von Wahrscheinlichkeit verfügen.

Solche Aufgaben kann man auch im Unterricht der elementaren Wahrscheinlichkeit einsetzen. Durch Drehen und Wenden der Aufgaben und vielfältiger Lösungen dazu kann man zeigen, dass die direkte Deutung der Antworten – auch im scheinbar „vernünftigen“ Gespräch so leicht nicht ist. Dadurch wird klar, dass vordergründig falsche Ansichten doch einen „guten“ Kern haben. Insgesamt entsteht damit ein vielfältiges Bild von Wahrscheinlichkeit, das Verständnis ermöglichen kann.

1. Der Stellenwert von Intuitionen für die Akzeptanz des Gelernten

Ursprünge der Wahrscheinlichkeit in der Antike gehen zurück in mythische Bereiche. Wollte man den Willen der Gottheiten erkunden, so war der Zufall immer im Spiel. Berühmt ist das Orakel von Delphi. Die Priesterin Pythia nimmt ein kultisches Bad und begibt sich dann, begleitet von zwei Priestern, in den Apollo-Tempel, wo sie sich über einer Erdspalte, aus der süßliche Dämpfe emporsteigen, in Trance bringt. Dann wirft sie 4-5 Astragali (Knöchelchen aus dem Sprunggelenk von Schafen) und sagt die Zukunft voraus. Ärmere Leute konnten nur Ja-nein-Fragen stellen. Dann griff die Pythia in einen Behälter mit weißen (ja) und schwarzen (nein) Bohnen (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Orakel_von_Delphi).

Abb. 1a: Antiker Umgang mit Zufall

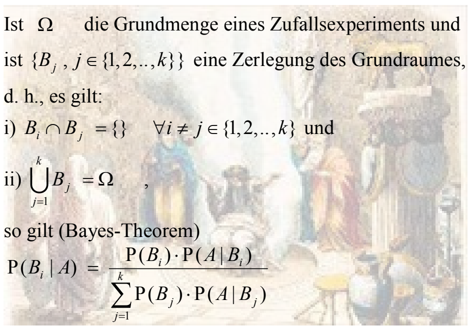


Abb. 1b: Moderner Umgang mit Zufall

Zufall wurde vornehmlich in weiblichen Gottheiten personifiziert. So teilte Tyche aus ihrem Füllhorn je nach Laune Wohltaten oder Prüfungen aus. Waren heikle Entscheidungen zu treffen, so bediente man sich des Zufalls.

Glücksspiel wurde derart überzogen, dass man „nichts“ dabei fand, sich selbst als Einsatz zu setzen, wenn man alles Geld schon verspielt hatte – sollte man dann verlieren, so akzeptierte man das als Gottesurteil. Zufall spielte aber auch in der Justiz eine Rolle, so ist die römische Justitia als Göttin der Gerechtigkeit dargestellt, die blind – ohne Ansehen der Person ein gerechtes Urteil fällt. Und auch hier wird der Zufall assoziiert. Noch heute wird eine Entscheidung als „gerecht“ empfunden, wenn man – blind – in eine Urne hineingreift und …

Zufall und Kausalität sind in den Wissenschaften vordergründig konfligierende Ordnungsmuster. Wenn etwas Zufall ist, dann kann keine kausale Ordnung dahinter stecken. Der Laplacesche Dämon war der Versuch einer Lösung der Widersprüche: Nur wer die Struktur und die physikalischen, kausal verstandenen Gesetze im Hintergrund nicht kennt, ist auf Wahrscheinlichkeiten angewiesen (und mag sich damit auch ganz gut orientieren). Die moderne Physik verstrickt sich dagegen immer mehr im Zufall: alle Kausalität wird wegdefiniert durch stochastische, also zufällige Gesetze. Aber kann irgendjemand diese Gesetze auch noch verstehen? Oder noch wichtiger: akzeptieren?

Die Mathematik geht – genauso wie die Pythia der Antike – in der begrifflichen Durchdringung von Zufall „geheimnisvolle“ Wege, die selten wirklich verstanden werden. Als Beispiel sei die elementare Bayes-Formel (Abb. 1b) herangezogen. Was bedeuten diese Aussagen, ja was ist eine Wahrscheinlichkeit überhaupt? Empirisch gut belegt ist folgendes „Missverständnis“: Krankheit KK habe eine Verbreitung von 0,1%; die Diagnose eine Sicherheit von 99%, d. h., hat die Person KK, so ergibt sich mit 99% Sicherheit die Diagnose positiv. Weiters ist die Spezifität der Diagnose 2%, d. h., liegt KK nicht vor, so hat man 2% Risiko, eine positive Diagnose zu erhalten. **„Ja, dann ist eine positive Person zu 99% krank“**

Hier drängt sich ein kausales Denkmuster in den Vordergrund. Die einzig ursächlich zu verstehende Zahl ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Befundes, wenn KK vorliegt. Alle anderen Informationen sind so „blass“, dass sie nicht „akzeptiert“ werden. Selbst wenn jemand formal die Aufgabe richtig lösen würde, für sich privat würde er die Lösung anzweifeln und auf die oben zitierte Antwort ausweichen.

Noch stärker als der kausale Bezug ist der Zusammenhang von Zufall mit Gottesentscheidungen. Nicht nur im Falle, dass man die Begriffe schlecht verstanden hat, drängen sich diese Denkmuster in den Vordergrund. Fischbein (1987) spricht in diesem Fall von primären und sekundären Intuitionen und der Notwendigkeit, primäre Vorstellungen im Unterricht aufzugreifen und sie bewusst zu verändern, damit man sie in sekundäre Intuitionen verfeinern kann. Primäre Intuitionen sind hartnäckig, Gelerntes hat immer Nachrang. Je mehr man dies anerkennt, desto größer die Chancen, Lernende dauerhaft – im Sinne der „Wissenschaft“ – zu beeinflussen.

2. Feedback für alle Beteiligten im Lernprozess

Was bedeutet: $\boxed{\mathbf{P(Kopf)} = \tfrac{1}{2} \;-\; \mathbf{P(GAU)} = \mathbf{10^{-15}}}$? Selbst beim Münzwerfen ist so eine elementare Wahrscheinlichkeitsaussage schwierig zu interpretieren. Wenn man „verliert“, kommt immer die Frage hinzu, „warum denn ich?“ – also die Nähe zum „Gottesurteil“. Viel schwieriger wird es, wenn Wahrscheinlichkeiten sehr klein, aber die damit verbundenen Konsequenzen sehr groß sind, wie etwa bei atomaren Kernkraftwerken für den „größten anzunehmenden Unfall“. Hier kann man nur irrationale Einschätzungen erwarten. Im Unterricht bindet man Wahrscheinlichkeit ganz eng an die Deutung als relative Häufigkeit, eine solche Deutung versagt aber in diesen Zusammenhängen völlig. Hier handelt es sich um Expertenurteile, die man in qualitative Wahrscheinlichkeiten ummünzt.

Das Verständnis der elementarsten Einheit, der Wahrscheinlichkeit einer einfachen Aussage, ist mithin bereits schwierig zu interpretieren, numerische Bewertungen werden kaum akzeptiert. Es gibt vielerlei Störgrößen, die das „Bild“ bereichern. Einige davon sind sehr tief verwurzelt: Gottesurteil, Weltbild, Emotion, große Risiken sind nur einige davon.

Im Unterricht geht man den Intuitionen gerne aus dem Weg: Man führt rasch auf die „sichere“ Mathematik, auf präzisere Begriffe hin, in der Hoffnung, dass sich die schwammigen Vorstellungen später wie von selbst durch den Umgang mit den präzisen Begriffen der Mathematik klären.

Dabei werden durchaus äußerliche „Erfolge“ erreicht, Lernende lernen spielend die schwierigsten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, aus den kompliziertesten Modellen „Eigenschaften“ abzuleiten. Aber wir machen uns was vor: Wie empirische Untersuchungen immer wieder belegen, greifen im Ernstfall Lerner auf ihre „rohen“ Strategien zurück oder interpretieren die Aufgaben oder ihre Ergebnisse nach ihren privaten Vorstellungen um. Sie lernen „how to answer if you must“ – und lösen ihre Probleme weiterhin mit ihren intuitiven Strategien (siehe Gigerenzer & Brighton, 2009).

3 Einbindung empirischer Forschung in den Anfangsunterricht

Der Autor hat wiederholt Items aus empirischer Forschung in die Unterweisung in elementarer Wahrscheinlichkeit eingebaut (siehe Borovcnik, 2003, 2009) – und zwar an der Universität. Lyso (2008) geht in ähnliche Richtung. Es kann dabei festgehalten werden, dass die Auswahl der Beispiele relativ unwesentlich ist. Es zählt, *wie* man damit umgeht.

Im Unterricht verhält man sich – im Gegensatz zur empirischen Forschung – nicht neutral. Man wird vielmehr die Interview-Situation (auch in der Gruppe) gezielt ausnützen, um die Lernenden mit weiteren Varianten zu konfrontieren, welche die von ihnen geäußerten Vorstellungen herausfordern, sodass sie ihre Grenzen kennen lernen. Wie schnell „eindeutig lösbare" Items, welche klar erschließen sollen, ob jemand einen Begriff verstanden hat, in einsichtiger Weise *mehrfach* analysiert werden können und welche „Fallen" sich daraus für eine sachgerechte Interpretation von Antworten ergeben, das kann man in Bentz & Borovcnik (1991) nachlesen.

Ein kleiner Vorgeschmack: Denken und Handeln sind zwei ganz verschiedene Herangehensweisen: Jemand kann auf der Ebene des Reflektierens zur – korrekten – Einschätzung der gleichen Wahrscheinlichkeit zweier Wahlmöglichkeiten kommen. Wenn jedoch eine Wette abzuschließen ist (Handeln), ist dieselbe Person bereit, höchst unfaire Bedingungen zu akzeptieren, damit sie auf eine bestimmte der beiden Optionen setzen kann. Klar, wenn man dann nachfragt, warum das so ist, verlässt man die Ebene einer rationalen Kommunikation und kann wirklich nicht mehr nachvollziehen, was nun wer wirklich meint. Den Anfang macht das auch im Sinne des Probanden unsinnige Verlangen des Interviewers, die getroffene Wahl zu begründen – was ja nicht geht, wenn man schon weiß, dass die beiden Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind.

Später verweist man auf diese Anfangserlebnisse, ohne sich unnötig aufhalten zu müssen, weil ja die Vermittlung von Techniken auf dem Plan steht.

Literatur

Borovcnik, M. (2003). *Interviews zum Wahrscheinlichkeitsverständnis als Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Klagenfurt: Unveröffentlichtes Manuskript.

Borovcnik, M. (2009). *Mehrfachanalyse von Items zum Wahrscheinlichkeitsverständnis*. Klagenfurt: Unveröffentlichtes Manuskript.

Borovcnik, M., Bentz, H. J. (1991). Empirical Research in Understanding Probability. In R. Kapadia, M. Borovcnik (Hrsg.), *Chance Encounters* (73–106). Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.* Dordrecht: D. Reidel.

Gigerenzer, G., Brighton, H. (2009). Homo Heuristicus: Why Biased Minds Make Better Inferences. *Topics in Cognitive Science* 1, 107–143.

Lyso, K. (2008). Strengths and Limitations of Informal Conceptions in Introductory Probability Courses for Future Lower Secondary Teachers. *ICME 11, Topic Study Group 13: Research and development in the teaching and learning of probability*. http://tsg.icme11.org/tsg/show/14#prog (Datum der Einsichtnahme: 15. 3. 2009).

Thomas BORYS, Karlsruhe

Codierungen im Spiegel der fundamentalen Ideen der Mathematik

Täglich sind wir in unserem modernen Leben von Codierungen jeglicher Art umgeben. Beispielsweise begegnet man ihnen im Supermarkt in Form von Strichcodes, in Aufzügen, bei denen die Stockwerksangaben auch in Blindenschrift angegeben sind, auf Online-Tickets z.B. der Bahn als Aztec-Code oder der Lufthansa in Form der PDF 417, als Geheimcodes, wenn ein Schüler Sie z.B. mit den Worten „Gulewu Telewen Talewag" begrüßt und eigentlich nur „Guten Tag" sagen möchte, im Umfeld des Computers z.B. ASCII, JEPG, MPEG, MP3 etc. .

Nun stellt sich die Frage, inwiefern man Codierungen für den Mathematikunterricht nutzen kann.

Diese Frage soll exemplarisch an der Huffman-Codierung und den Verschlüsselungsschablonen nach Fleissner unter Zuhilfenahme der fundamentalen Ideen der Mathematik beantwortet werden.

1. Begriffsbestimmung: Codierung

Eine sehr gute Definition des Begriffs Codierung findet man bei Schulz:

„Seien A und B nichtleere Mengen und N$\in \mathbb{N}$; dann lässt sich eine injektive Abbildung $\underline{c}: A \to \bigcup_{i=1}^{N} B^i$ (*Codierung des Alphabets* A durch Wörter über B)

zu einer Abbildung $\underline{c}^*$ von der Menge A* der Wörter über A in die Menge B* fortsetzen indem sukzessive jeder Komponente das Bild unter $\underline{c}$ zugeordnet wird, genauer: $\underline{c}^* : \underline{c}^*(a_1 a_2 .. a_n) := \underline{c}^*(a_1)\, \underline{c}^*(a_2) .. \underline{c}^*(a_n)$ $(und\, \underline{c}^*(\emptyset) = \emptyset)$.

$\underline{c}^*$ heißt wie $\underline{c}$ Codierung, das Bild von $\underline{c}$ Code, seine Elemente Codewörter."

Codes haben verschiedene Aufgaben, eine davon ist die Geheimhaltung von Nachrichten. Dies ist eigentlich der zentrale Gegenstandsbereich der Kryptologie, daher sollen in der folgenden Diskussion kryptologische Verfahren als Sonderformen von Codierungen berücksichtigt werden.

Durch die Identifikation von Codierungen mit injektiven Abbildungen wird schon an dieser Stelle sehr deutlich, dass Codierungen Funktionen sind und sie somit als Illustratoren der fundamentalen Idee des funktionalen Zusammenhangs im Mathematikunterricht eingesetzt werden können.

2. Fundamentale Ideen der Mathematik

Das Konzept der fundamentalen Ideen ist eine schon lange bzw. immer noch viel diskutierte Thematik in der Mathematikdidaktik. Schon Anfang des 20. Jahrhunderts forderte der englische Mathematiker A.N. Whitehead, dass sich der Unterricht an wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung orientieren soll.

Ein weiterer wichtiger Vertreter des Konzepts der fundamentalen Ideen ist J. S. Bruner, der in seinem Buch „The Process of Education“ aus dem Jahre 1960 fordert: “It is simple enough to proclaim, of course, that school curricula and methods of teaching should be geared to the teaching of fundamental ideas in whatever subject is being taught.”

Im Verlauf der didaktischen Diskussion ergaben sich verschiedene Sammlungen fundamentaler Ideen für die Mathematik und ihre Teilgebiete. Eine gute Übersicht hierzu findet man z.B. bei Heymann, Schweiger oder Vohns.

Um die Frage, in wie weit Codierungen zur Illustration fundamentaler Ideen der Mathematik beitragen können, wird folgender eigener Katalog fundamentaler Ideen verwendet: *Algorithmus, funktionaler Zusammenhang, mathematisches Modellieren, Zahl, Messen* und *Ordnen* (das beinhaltet das geometrische Strukturieren und das logische Ordnen). Bei diesem Katalog handelt es sich um eine erste Arbeitsversion. Ihm liegen die Sammlungen fundamentaler Ideen von Schreiber, Tietze/Kilka/Wolpers, Humenberger/Reichel und Heymann zu Grunde.

3. Die Huffman-Codierung im Spiegel der fundamentalen Ideen der Mathematik

Der Huffman-Code wurde im September 1952 von D. Huffman in seinem Artikel mit dem Titel „A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes” veröffentlicht. Für eine genaue Darstellung sei auf diesen Artikel verwiesen.

Mit der Huffman-Codierung kann die fundamentale Idee des *Algorithmus* konkretisiert werden, denn sie kann durch eine endliche Folge von eindeutig bestimmten Elementaranweisungen, die den Lösungsweg vollständig beschreiben, dargestellt werden. Sie arbeitet mit Baumstrukturen, die eines der wesentlichen Hilfsmittel der diskreten Mathematik sind. Die Huffman-Codierung liefert als Endergebnis einen Codebaum, wobei das Endergebnis nicht eindeutig ist, denn es existieren mehrere Codebäume mit den gleichen Eigenschaften. Im Gegensatz dazu stehen die meisten Algorithmen des Mathematikunterrichts in der Schule, welche üblicherweise mit Zahlen arbeiten und grundsätzlich ein eindeutig bestimmtes Endergebnis besitzen z.B. der euklidische Algorithmus.

Die fundamentale Idee des *funktionalen Zusammenhangs* findet sich bei der Huffman-Codierung gleich in mehrfacher Hinsicht: Zur Gewinnung der Huffman-Liste werden den Buchstaben Häufigkeiten, jedem Knoten werden summierte Häufigkeiten und jeder Kante im Codebaum wird ein binäres Zeichen „0“ oder „1“ zugeordnet. Das Endergebnis, die gewonnene Codetabelle, stellt eine Funktion der Zeichen einer Nachricht zu einem binären Code dar.

Die fundamentale Idee der *Zahl* spielt beim Huffman-Verfahren eine entscheidende Rolle. So werden Zahlen in mehrfacher Hinsicht verwendet, jeweils in Verbindung mit einem anderen Zahlaspekt. Zur Erstellung der Häufigkeitsliste muss bestimmt werden, mit welcher Anzahl die jeweiligen Buchstaben in der Nachricht vorkommen. Diesem Vorgang liegt der Kardinalzahlaspekt zu Grunde. Statt mit absoluten Häufigkeiten, kann man bei der Huffman-Codierung auch mit relativen Häufigkeiten arbeiten, was dem Bruchzahlaspekt - relativer Anteil nach Günther Malle - entspricht. Anschließend werden die Buchstaben nach ihren Häufigkeiten geordnet, dies entspricht dem Ordinalzahlaspekt. Schließlich findet sich der Rechenzahlaspekt bei der Addition der verschiedenen Häufigkeiten.

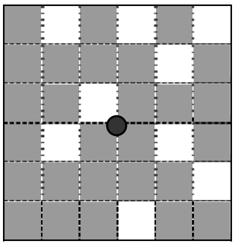
Durch die Überlegungen zum Informationsgehalt einer Nachricht und zur Optimalität der Codewortlänge kann durch die Huffman-Codierung ein Beitrag zur fundamentalen Idee des *Messens* geleistet werden.

Zur fundamentalen Idee des *Ordnens* kann das Thema der Huffman-Codierung in zweierlei Hinsicht beitragen. Einerseits wird durch das Sortieren der Zeichen nach ihren Häufigkeiten eine Ordnung hergestellt (siehe Idee der Zahl), andererseits erfolgt eine Ordnung durch das Anordnen der Zeichen in Form von Knoten innerhalb eines Graphen.

4. Verschlüsselungsschablonen nach Fleissner im Spiegel der fundamentalen Ideen der Mathematik

E. Fleissner von Wostrowitz beschreibt in seinem Handbuch zur Kryptographie von 1881, wie man Verschlüsselungsschablonen zur Permutation von Buchstaben eines Textes verwenden kann. Ein geeignetes Beispiel für den Unterricht stammt von Jules Verne aus seinem Roman „Matthias Sandorf“ (siehe folgende Abbildung).

Zur Verschlüsselung werden die freien Felder nacheinander mit den Buchstaben des Klartextes beschriftet. Sind die Felder ausgefüllt wird die Schablone um ihren Mittelpunkt um 90° gedreht und die neuen freien Felder werden ausgefüllt. Das wird noch zweimal wiederholt, dann hat man meistens das gesamte Quadrat ausgefüllt. Der Geheimtext wird spaltenweise ausgelesen. Ist der Klartext zu kurz, ergänzt man ihn mit einer sinnlosen Folge von Buchstaben, ist er zu lang, so verwendet man ein zweites Quadrat. Für weitere genauere Beschreibungen sei auf Fleissner verwiesen.



Bei Ver- und Entschlüsselung handelt es sich um einen *algorithmischen* Vorgang, der händisch ausgeführt werden kann. Die fundamentale Idee des *funktionalen Zusammenhangs* findet sich beim Ergebnis des Verschlüsselungsvorgangs wieder, denn mit ihm wird der Klartext durch den Geheimtext ersetzt. Erreicht wird dies durch eine Permutation der Buchstaben. Da die Verschlüsselung durch Drehung der Schablone erfolgt, kann der geometrische Begriff der Drehung auf besondere handelnde Art und Weise dargestellt werden. Durch die Beantwortung der Frage nach der Konstruktion einer funktionierenden Verschlüsselungsschablone wird die fundamentale Idee des *Ordnens* vertieft. Berechnet man die Anzahl der verschiedenen funktionsfähigen Verschlüsselungsschablonen, ist man im Bereich der fundamentalen Idee der *Zahl.*

Insgesamt wird deutlich, dass es sich lohnt, Codierungen unter dem Blickwinkel der fundamentalen Ideen der Mathematik in Augenschein zu nehmen. Codierungen stellen somit eine Bereicherung für den Mathematikunterricht dar.

Fleissner von Wostrowitz, E. (1881). *Handbuch der Kyptographie.* Wien: K. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim: Beltz Verlag

Huffman D. (1952). *A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes*, Prococeedings of the I.R.E., pp. 1098-1101

Schreiber, A. (1979). *Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Didaktik.* In: mathematica didactica 2, 165-171

Schweiger, F. (1992). *Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik.* Journal für Mathematikdidaktik (13), 2/3 S. 207-214

Schulz, R.-H. (2003). *Codierungstheorie*. 2. Auflage, Wiesbaden: Vieweg

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.) (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II* Band 1. 2. Auflage, Wiesbaden: Vieweg

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht*. Norderstedt: BoD

Thomas BORYS / Christian STELLFELDT, Karlsruhe

Computer und Codierung - Selbsteinschätzungen und Kenntnisse von Studienanfängerinnen und -anfängern

Zu Beginn der Vorlesungszeit des Wintersemesters 2007/2008 wurden an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe 549 Studierende im ersten Semester zu ihren Kenntnissen über Computer und Codierung/Verschlüsselung schriftlich befragt. Bei der Studie handelte es sich um eine Vollerhebung der gesamten Studienanfängerinnen und -anfängern des Lehramts an Grund-, Haupt- und Realschulen, unabhängig von der Fächerkombination. Die Ergebnisse bestätigen die Vermutung, dass die Meisten von den beiden Themenbereichen weniger Kenntnisse als erwartet hatten.

1. Ergebnisse anderer Studien

Eurostat: Nach einer am 20.06.2006 von Eurostat, dem Statistischen Amt der Europäischen Gemeinschaften, veröffentlichten Statistik haben in der EU 37% aller Einwohner laut Selbsteinschätzung keine Computerkenntnisse. Dieser Prozentsatz liegt bei Frauen mit 39% etwas höher als bei Männern (34%). In Deutschland liegt dieser Wert bei 20%, in Österreich bei 31%. Nur geringe Computer-Grundkenntnisse trauen sich in der EU 15% zu, in Deutschland sind es 23% und in Österreich 12%. Sehr gut schätzen dagegen ihre Kenntnisse 22% der EU-Bürger insgesamt und auch 22% der Deutschen, aber wiederum 31% der Österreicher ein. Untersucht wurden im Jahr 2005 16- bis 74-jährige in der EU.

IT-Fitness-Studie: Am 2. Dezember 2007 führte Forsa im Rahmen der Initiative IT-Fitness eine repräsentative Umfrage zum Thema Computerkenntnisse durch. Befragt wurden 1001 Schülerinnen und Schüler zwischen 14 und 20 Jahren. Dabei stellte sich heraus, dass 28% der Schüler an deutschen Schulen nach eigenen Angaben im Unterricht gar nicht mit dem Computer arbeiten. Weitere 36% nutzen einen Rechner weniger als zwei Schulstunden pro Woche. Immerhin 35% nutzen ihn mehr als zwei Stunden. Am häufigsten wird der Computer im Fach Informatik eingesetzt. Andere Fächer wie Wirtschaft (20%), Physik (19%) oder Mathematik (18%) folgen erst mit großem Abstand. 58% der Schüler geben an, dass sie sich ihre Kenntnisse selbst beibringen. Nur etwa ein Drittel aller Schülerinnen und Schüler sind der Meinung, dass die entsprechenden Kenntnisse von Lehrern vermittelt werden.

PISA 2006: In Deutschland wird der Computer im Unterricht am wenigsten regelmäßig eingesetzt. Nur 31% aller Schülerinnen und Schüler verwenden den Computer in der Schule regelmäßig. Der OECD-Durchschnitt liegt bei

56%, in Ungarn sogar bei 85%. Betrachtet man den Computereinsatz in den verschiedenen Schularten der einzelnen Bundesländer, so stellt sich heraus, dass in den Haupt- und Realschulen der Computer viel stärker als im Gymnasium eingesetzt wird (Ausnahme: Mecklenburg-Vorpommern und Sachsen-Anhalt). Dieser Aspekt ist für die Lehrerbildung der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe insofern relevant, da die meisten Absolventen mit gymnasialer Vorbildung ihr Studium beginnen und später i.d.R. aber in Haupt- und Realschulen unterrichten werden. In Bezug auf das Geschlecht kann man sagen, dass Jungen trotz identischer Nutzungsprofile über deutlich höhere Basiskenntnisse verfügen. Wie bei der IT-Fitness-Studie kommt auch die PISA-2006-Studie zu der Erkenntnis, dass unsere Schülerinnen und Schüler ihre Computerkenntnisse hauptsächlich autodidaktisch erwerben.

2. Erste Ergebnisse der Studie an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe

Die Ziele unserer Studie waren zunächst die Bestandsaufnahme der Computerkenntnisse aller Studierenden im ersten Semester sowie eine Verbesserung bzw. Ausrichtung des Lehrangebots. Dabei ging es uns um übergeordnete Fragestellungen mit folgenden Inhalten:

- Mit welchen Voraussetzungen in Bezug auf Computerkenntnisse kommen die Anfängerinnen und Anfänger zu uns?
- Wie schätzen die Anfängerinnen und Anfänger ihre Kenntnisse im Umgang mit dem Computer selbst ein?
- Welche Computerkompetenzen wollen unsere Studierenden vertiefen?
- Wie intensiv haben die Anfängerinnen und Anfänger den Computereinsatz im Unterricht in den einzelnen Schulfächern erlebt?
- Welche Computeranwendungen wurden im Mathematikunterricht verwendet?
- Sind die Computerkenntnisse vom Geschlecht, vom Studiengang oder vom erfahrenen Unterricht abhängig?

In der Freizeit wird der Computer von den Studienanfängerinnen und -anfängern hauptsächlich für Kommunikation (98%), Informationsbeschaffung bzw. Recherche im Internet (96%) und Textverarbeitung (95%) verwendet. Ein großer Teil der Studierenden (71%) kreuzte auch Bildbearbeitung an, wobei anzunehmen ist, dass unter Bildbearbeitung lediglich die Bildbetrachtung verstanden wurde. Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm arbeiten nur 38% aller Studierenden in ihrer Freizeit, das Erstellen eigener Programme ist bei den Studierenden völlig in den Hintergrund geraten: nur 2% kreuzten diesen Punkt an.

Die Frage nach der schulischen Nutzung des Computers gibt einen ersten Überblick, an welche computerbezogenen Inhalte der zurückliegenden Schulzeit die Studierenden des ersten Semesters sich noch erinnern können. Die Antworten lassen auch Rückschlüsse zu, wie intensiv der Computer in der Schulzeit der Studierenden, die vornehmlich an baden-württembergischen Gymnasien die Hochschulreife erlangten, genutzt wurde. Am meisten wurden hier Textverarbeitung (96%), Informationsbeschaffung bzw. Recherche im Internet (92%), Präsentation (74%) und Kommunikation (70%) genannt. Von der Präsentation abgesehen, werden in der Freizeit und in der Schule mehr oder weniger die gleichen Computeranwendungen durchgeführt.

Weniger als die Hälfte der Studierenden (45%) kann sich an die Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms in der Schulzeit erinnern. Das Erstellen eigener Programme ist eher in den Hintergrund geraten (8%), außerdem scheint das Arbeiten mit Computeralgebra Systemen in baden-württembergischen Gymnasien nicht sehr intensiv zu sein, nur 7% machten hier ein Kreuz. Dynamische Geometriesysteme sind bei den Studierenden noch weniger bekannt, lediglich 6% kreuzten dieses Feld an.

Am meisten wurde der Computer erwartungsgemäß in den Fächern Informatik und ITG verwendet. Außerdem in Fächern wie Deutsch (60%), gefolgt von den Fremdsprachen (47%), Geschichte/Gemeinschaftskunde (42%), Biologie (37%) und zu 36 % auch in Mathematik.

Für die Lehrerbildung ist die Frage nach den Selbsteinschätzungen besonders aufschlussreich. Für die Anwendungen Textverarbeitung und Kommunikation/Internet geben jeweils über 90% der Studierenden an, dass sie über mindestens gute Kenntnisse verfügen. Die Präsentation wird von über 70% der Studierenden mindestens gut beherrscht. Enttäuschend ist allerdings, dass über zwei Drittel der Studienanfängerinnen und -anfänger wenige oder gar keine Kenntnisse im Bereich der Tabellenkalkulation haben. Erschreckend ist auch, dass CAS und DGS bei den Studierenden weitgehend unbekannt sind. Jeweils ca. 84% gaben an, dass sie über die beiden Anwendungen keine Kenntnisse verfügen.

Wie bei der IT-Fitness- und der PISA-2006-Studie auch, gaben die meisten Studierenden (72%) an, dass nur ca. ein Viertel ihrer gesamten Computerkenntnisse in der Schule erworben wurden.

Im Rahmen unserer Umfrage wurden die Studierenden zusätzlich auch nach ihren Kenntnissen im Bereich der Codierung und Verschlüsselung befragt. Bekannt sind PIN, ISBN und TAN; weitgehend unbekannt sind EAN, Unicode, ASCII, Cäsar, RSA und Enigma. Außerdem ist das Thema „Verschlüsselung" im Schulunterricht ebenfalls weitgehend unbekannt.

Im letzten Teil der Studie wurde am Beispiel der Tabellenkalkulation untersucht, ob es Zusammenhänge zwischen dem Geschlecht und der Computernutzung in der Freizeit, in der Schule und der Selbsteinschätzung gibt und ob eine Verwendung des Computers im vergangenen schulischen Mathematik- oder ITG-Unterricht zu einer Verbesserung der Selbsteinschätzung der Kenntnisse im Bereich der Tabellenkalkulation führte.

Alle fünf Hypothesen wurden mit dem Chi-Quadrat-Test ausgewertet. Es hat sich ergeben, dass die Tabellenkalkulation in der Freizeit und der Schule mehr von Studienanfängern genutzt wird, als von Studienanfängerinnen.

Außerdem schätzen sich im Umgang mit Tabellenkalkulation Studienanfänger besser als Studienanfängerinnen ein.

Leider hat sich auch ergeben, dass die Selbsteinschätzung im Umgang mit der Tabellenkalkulation unabhängig vom Computereinsatz des bisherigen Mathematikunterrichts ist. Die Verwendung von Tabellenkalkulationsprogrammen im Mathematikunterricht hat sich also leider nicht nachhaltig ausgewirkt. Erfreulich ist aber, dass der Computereinsatz im Fach ITG sich sehr wohl positiv auf die Selbsteinschätzung der Tabellenkalkulation auswirkte.

Dies waren erste Ergebnisse der Studie, die mit Studienanfängerinnen und -anfängern durchgeführt wurde. Um Nachprüfen zu können, ob sich durch das Studium die Selbsteinschätzungen und Computerkenntnisse verbessert haben, wäre es interessant, die gleiche Studie mit Studierenden, die sich am Ende ihres Studiums befinden, durchzuführen. Für einen weiteren Vergleich könnte man die Studie auch mit ausgebildeten Lehrerinnen und Lehren am Ende der 2. Ausbildungsphase und mit Lehrerinnen und Lehren, die bereits einige Berufsjahre vorzuweisen haben, durchführen.

Eurostat (2006). *Mehr als ein drittel der EU-Bevölkerung haben keine Computerkenntnisse*. http://epp.eurostat.ec.europa.eu (zu letzt eingesehen: 26.02.2009)

IT-Fitness-Intitiative (2007). *Computereinsatz im Unterricht.* http://www.it-fitness.de (zu letzt eingesehen 26.02.2009)

Prenzel, M.& al. (Hrsg.), *PISA 2006: Die Ergebnisse der dritten internationalen Vergleichsstudie.* Münster: Waxmann.

Prenzel, M.& al. (Hrsg.), *PISA 2006 in Deutschland: Die Kompetenzen der Jugendlichen im dritten Ländervergleich.*. Münster: Waxmann.

Matthias BRANDL, Augsburg

Lernumgebungen zur Begabtenförderung am Gymnasium

1. Begabte fördern – Warum?

Der Deutsche Philologenverband hat am 08.01.2008 in einer Presseerklärung auf einen „Missklang" in der Verhältnismäßigkeit hinsichtlich Förderung schwacher vs. begabter Schüler hingewiesen:

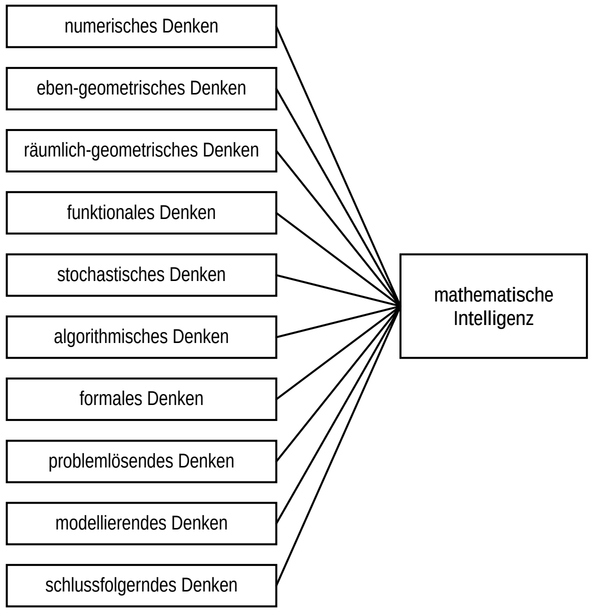
„Deutschland tut zu wenig für seine besonders begabten und hochbegabten Schülerinnen und Schüler. […] Zu Recht haben die Anstrengungen in den letzten Jahren vor allem der zu großen Gruppe von Risikoschülern gegolten, die bei den internationalen Tests nicht einmal die Kompetenzstufe 1 erreicht haben. […] Für die zu besonderen Leistungen fähigen Spitzenschüler gibt es bisher zu geringe spezielle Förderung, zu wenig Pluskurse und Zusatzangebote. Das Bekenntnis zur individuellen Förderung muss aber diese Schülergruppe mit einschließen und darf sich nicht auf Angebote für schwächere Lernende beschränken!"

2. Begabte fördern – Wen?

Um (hoch)begabte Schüler zu identifizieren bieten sich traditionell herkömmliche IQ-Tests an. Der damit gemessene Intelligenzquotient (IQ) wird als normalverteilt mit Mittelwert 100 und Standardabweichung 15 angenommen. Als hochbegabt wird gemeinhin jemand bezeichnet, dessen IQ um mindestens 2 Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt liegt, also mindest 130 beträgt.

Unter obiger Annahme der Normalverteilung ergibt sich damit in einer (hinreichend großen) Stichprobe ein Anteil von 2% Hochbegabten. Eine einfache Überlegung in Form einer Fermi-Aufgabe lässt uns abschätzen, wie viele Schüler dies pro Gymnasium sind: z.B. hat das Bundesland Bayern 12 Millionen Einwohner; 2% davon ergeben 240.000 potenziell hochbegabte Personen. Nehmen wir an, dass solch ein Begabter etwa ein Sechstel seines Lebens in der Schule verbringt, so landen wir bei aktuell 40.000 hochbegabten Schülern. Vermutlich besuchen nicht alle ein Gymnasium, aber vielleicht etwa 25.000. Bei rund 400 Gymnasien in Bayern ergeben sich am Ende etwa 60 hochbegabte Schüler pro Gymnasium – was durchaus eine nennenswerte Anzahl und beileibe keine verschwindende Randgruppe ist.

An der Universität Augsburg arbeiten wir mit folgendem differenzierten Modell mathematischer Begabung, das als theoretische Grundlage mehrerer Projekte dient:



Dieses Modell lässt sich für schulische Diagnose- und Förderzwecke in ein umfassenderes Modell für mathematische Begabung (wie z.B. das „Münchner Hochbegabungsmodell“ in Heller, K., Perleth, C. (2007)) einbetten, das neben sprachlichen Fähigkeiten auch die Trennung von Begabung und Leistung berücksichtigt.

3. Begabte fördern – Wie?

Die Förderung mathematisch begabter Schüler kann zum einen über Zusatzangebote an der Schule (sog. Enrichmentprogramme wie Pluskurse, Begabtenzüge,…) oder Binnendifferenzierung bzw. offene Arbeitsformen im regulären Mathematikunterricht geschehen (vgl. z.B. Bruder, R. (2006) und Ulm, V. (2007)). Die folgenden beiden kurz skizzierten Unterrichtseinheiten eignen sich je nach Umsetzung für beiderlei Wege und decken gleichzeitig einen Großteil der in Abschnitt 2 angesprochenen Facetten mathematischer Intelligenz ab. Im Anschluss wird das Konzept einer „Mathematischen Landkarte“ vorgestellt, das es dem Schüler erlaubt, mathematisches Wissen in einem historischen Kontext zu vernetzen.

3.1 Von Kegeln zu höheren algebraischen Kurven und wieder zurück

Ausgangspunkt der Unterrichtseinheit/Lernumgebung Brandl, M. (2008a) ist eine harmlos erscheinende Aufgabe, in deren Zentrum die Maximierung eines Kegelvolumens steht. Das Problem wird zunächst praktisch, dann theoretisch angegangen und entwickelt sich schließlich zu einer verblüffenden Fundgrube geometrischer Zusammenhänge. Im Laufe der Beschäftigung mit den verschiedenen Aspekten des Themas ergeben sich anspruchsvolle Fragestellungen und überraschende Zusammenhänge.

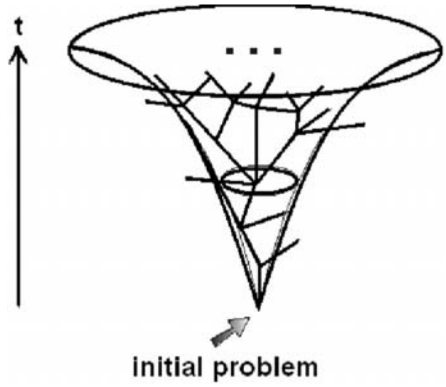
Die Schüler werden ausgehend von einer Reihe realer Papierkegel unterschiedlicher Öffnungswinkel auf den nicht-linearen Zusammenhang zwischen dem Volumen eines Kegels und seinem Öffnungswinkel geführt. Nachdem dies rein intuitiv festgestellt wird, taucht dieser Aspekt in der algebraischen Herleitung der entsprechenden Formel wieder auf. Durch Spiegelung des Graphen der Volumenfunktion an den Koordinatenachsen entsteht eine Kurve, die im Weiteren durch elementare Umformungen vorbei an der Lemniskate von Jakob Bernoulli hin zur Tschirnhaus-Kubik führt. Die Kurven sollen dabei mit einem CAS erzeugt werden. Die Eigenschaft der Tschirnhaus-Kubik als Katakaustik der Parabel lässt sich dabei sehr einfach und schön mit einem dynamischen Geometrieprogramm darstellen. Über die Kegelschnitte kommt der Schüler von der Parabel zurück zu seinem Ausgangskörper – dem Kegel. Dieser Zirkel zeigt dem Schüler einen großen Zusammenhang im Gebäude der Mathematik auf und soll ihn ermuntern, selbstständig auf weitere Entdeckungsreisen zu gehen.

Eine detaillierte Ausarbeitung der Thematik findet sich in Brandl, M. (2008c).

3.2 Geometrie mit POV-Ray – platonische Körper und dichteste Kugelpackungen

In der Lernumgebung Brandl, M. (2008b) klären die Schüler ausgehend von der Betrachtung einer Kugel im Raum die ersten geometrischen Überlegungen durch Anfertigung von geeigneten Schnittbildern. Dadurch werden Probleme der räumlichen Geometrie auf elementargeometrische Fragestellungen in der Ebene reduziert. Parallel wird das kostenlose 3D-Programm POV-Ray zur Visualisierung herangezogen, das bereits in Filler, A. (2007) hinsichtlich seines didaktischen Potenzials im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II untersucht und empfohlen wurde. Als Grundlage wird die Datei basis.pov zur Verfügung gestellt, welche einen Hintergrund, eine geeignete Kameraperspektive und eine Lichtquelle erzeugt. Darauf aufbauend sollen die Schüler mit Hilfe geeigneter Funktionen wie sphere{}, cone{} oder cylinder{} einen neuen Körper sukzessive zusammenbauen und darstellen. Der Körper entsteht durch geschicktes Aufsetzen von Kegeln auf die Kugel. Hierdurch entstehen glatte Übergänge, so dass die paarweise Verbindung von je zwei Kegelspitzen einen neuen Körper (Oktaeder) entstehen lässt, in den die Kegel-Kugel-Kombination „nahtlos verpackt“ ist. Die Frage nach einem „dichten“ Ausfüllen des Oktaeder-Gitters mit sechs kleinen Kugeln führt nach der geometrischen und computergrafischen Lösung auf das Problem nach der dichtesten Kugelpackung. Die Schüler sollen hierzu selbstständig recherchieren, ihre Funde präsentieren und eine dieser Packungen mit POV-Ray realisieren.

3.3 Mathematischen Landkarten



Mit dem Begriff „Mathematische Landkarte“ bezeichnen wir eine (gerade im Entstehen begriffene) online-Lernumgebung, die mathematische Inhalte in einem kausal-historischen Kontext darstellt. Konkret handelt es sich um eine Art „virtuellen Baum“ ähnlich zur MathMap des Mathematical Atlas (http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/mathmap.htm), aber mit einer zusätzlichen zeitlichen Komponente und schulmathematischen Inhalten. Damit wird dem Schüler eine unterstützende Lernstruktur in Form eines „Gerüsts“ geboten, das mathematische Lerninhalte in ihrem Evolutionsprozess miteinander vernetzt und ihre Bedeutung ausgehend von einem Initialproblem aufzeigt. Als Beispiel für einen geeigneten Inhalt einer Mathematischen Landkarte verweisen wir auf Brandl, M. (2009).

Literatur

Brandl, M. (2009). The vibrating string – an initial problem for modern mathematics; historical and didactical aspects. In *Proceedings of the 18th Novembertagung* (S.79-98). Berlin: logos Verlag.

Brandl, M. (2008c). Kegel, Ellipse und Tschirnhaus-Kubik – eine Metamorphose. Preprint des Instituts für Mathematik der Universität Augsburg. Nr. 28/2008. http://www.opus-bayern.de/uni-augsburg/volltexte/2008/1303/

Brandl, M. (2008b). Geometrie mit POV-Ray – platonische Körper und dichteste Kugelpackungen. Unterrichtseinheit bei lehrer-online im Rahmen des Portals „Begabte fördern“. http://www.lehrer-online.de/platonische-koerper-povray.php

Brandl, M. (2008a). Von Kegeln zu höheren algebraischen Kurven und wieder zurück. Unterrichtseinheit bei lehrer-online im Rahmen des Portals „Begabte fördern“. http://www.lehrer-online.de/675751.php

Bruder, R. (2006). Erläuterungen zu Modul 1 – Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht. http://sinus-transfer.de

Filler, A. (2007). *Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie.* Humboldt-Universität Berlin: Habilitationsschrift.

Heller, K., Perleth, C. (2007): Talentförderung und Hochbegabung in Deutschland. In Heller K., Ziegler, A. (Hrsg.): *Begabt sein in Deutschland* (S.139-170). Berlin: LIT Verlag.

Ulm, V. (2007). *Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen.* Seelze: Kallmeyer.

Thorsten BRAUN & Engelbert NIEHAUS, Koblenz/Landau

Maxima4School: Chancen und Grenzen von OpenSource-Computeralgebrasystemen im Unterricht

OpenSource-Software kann ohne lizenzrechtliche Einschränkung und Lizenzkosten an beliebig vielen Rechnern an der Schule und an jedem heimischen Rechner der SchülerInnen eingesetzt werden. Neben dieser Entlastung des Bildungsetats bzw. der durch die Erziehungsberechtigten aufzubringenden Ausbildungskosten stellt sich nun prinzipiell die Frage, welche Chancen und Grenzen die OpenSource-Nutzung im Bereich der Computeralgebrasysteme (CAS) besitzt. Zielsetzung ist es, durch das Portal Maxima4School die Möglichkeiten der Verwendung von OpenSource-CAS-Software im Unterricht zu fördern. Ferner wird im Sinn des OpenSource-Gedankens „freies Nehmen und Geben“ gezeigt, wie kooperative Entwicklung von Unterrichtsinhalten die fachdidaktisch motivierte Verwendung von Maxima unterstützen kann.

1. OpenSource CAS Maxima im Mathematikunterricht und soziale Verantwortung

Größter Vorteil des OpenSource CAS Maxima gegenüber den kommerziellen Computeralgebrasystemen wie z.B. Maple oder Derive ist natürlich, dass keine Anschaffungs- und Lizenzkosten an den Hersteller zu entrichten sind. Gerade in der heutigen Zeit, in der die Schulen mit einem knappen Bildungsbudget haushalten müssen, kann die Anschaffung von Programmen an den teuren Schullizenzen scheitern. Weiterhin können sich die Lehrerinnen und Lehrer, die CAS Maxima im Unterricht benutzen möchten, dieses bei ihrer Vorbereitung zu Hause auf ihrem eigenen Rechner kostenlos verwenden. Auch die Schülerinnen und Schüler können sich Maxima auf ihrem Computer zu Hause installieren, ohne dass ihre Eltern ihnen das Programm kaufen müssten, was gerade bei sozial schwachen Familien nicht möglich wäre. So können die Schülerinnen und Schüler Gelerntes aus dem Unterricht zu Hause nachbereiten. In diesem Fall ist es den Lehrerinnen und Lehrern sogar möglich den Schülerinnen und Schülern eine Hausaufgabe aufzugeben, deren Bearbeitung eine Benutzung von Maxima erfordert, was bei kommerziellen Programmen in der Regel scheitert, da dies den meisten Schülerinnen und Schüler nicht zur Verfügung steht, da sie es sich aufgrund der hohen Kosten nicht anschaffen.

Auch wird man durch die Verwendung von einem OpenSource Programm seiner sozialen Verantwortung als Lehrerin bzw. Lehrer gerecht und verleitet die Schülerinnen und Schüler nicht zur Verwendung von illegalen Versionen (Raubkopien) der jeweiligen benutzten Programme. Gerade diesem Punkt kommt in der heutigen Zeit, wenn es um Softwarelizenzen

und deren illegalen Benutzung geht, eine große Bedeutung zu, welche sich die Schülerinnen und Schüler oftmals nicht bewusst sind.
Ein weiterer Vorteil von Maxima ist die Unabhängigkeit vom Betriebssystem. So gibt es jeweils eine eigene Version von Maxima für Windows, MacOS und Linux. Daher können auch Schülerinnen und Schüler, welche keinen Windows Computer zu Hause haben, Maxima ebenfalls verwenden. Außerdem wird Maxima von seiner Entwickler-gemeinschaft ständig weiterentwickelt und verbessert. Bei kommerziellen Programmen sind nicht notwendigerweise auch Aktualisierungen kostenfrei erhältlich.

2. Chancen und Grenzen der Maxima-Nutzung im Unterricht

Der sinnvolle Einsatz, sowie die Chancen und Grenzen, eines CAS im Mathematikunterricht wurden bereits hinlänglich erörtert und sollen an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden. (siehe Pallack, [5]).
Vielmehr geht es nun darum, die Chance und Grenzen der Maxima Nutzung gegenüber der Verwendung von kommerziellen Computer-algebrasystemen im Unterricht aufzuzeigen. Jede Software hat für die Erreichung von Lernzielen Vor- und Nachteile, die nicht von einer Optionsvielfalt abhängen, sondern von maßgeschneiderten Interaktions-möglichkeiten im Rahmen des Lernprozesses.
Die erfolgreiche Nutzung von CAS ist durch zwei Fragen gekennzeichnet. Wie können bestimmte Lernziele durch den Einsatz von CAS im Allgemeinen erreicht werden? Welche Qualität hat dabei die Nutzung von von der Software Maxima im Vergleich zu anderen CAS. Mit dem Ziel, dass Lehrerinnen und Lehrern erfolgreich Lernziele erreichen wollen, sind die lizenzrechtlichen Vorteile, möglichen fehlenden Optionen von OpenSource-Produkten gegenüberzustellen. Die Erreichung der Unterrichtsziele soll dabei auf die Verwendung von OpenSource-Produkten beschränkt bleiben. Beziehungen zu anderen OpenSource Produkten, wie z.B zur dynamischen Geometriesoftware GeoGebra oder zum Tabellenkalkulationsprogrammen OpenOffice Calc sollen hergestellt und deren Grenzen analysiert werden. Aus dieser Auseinandersetzung ergibt sich die Möglichkeit, dass Lehrerinnen und Lehrer Ideen bzw. Wünsche zur Veränderung gewisser Anwendungen in Maxima an die Maxima-Entwicklergemeinschaft herantragen, damit diese in Nachfolgeversionen berücksichtigt werden.
Didaktische Bewertungskompetenz von Maxima kann so in einen Optimierungsprozess der Software durch Vernetzung mit der Entwicklergemeinde realisiert werden. Eine beeindruckende Funktions-vielfalt von kommerziellen Computeralgebrasystemen ist didaktischen Anwendungsszenarien mit wenigen Interaktionsmöglichkeiten gegenüber-zustellen, in denen Maxima ebenbürtig ist.

Eine Grenze der Maxima Nutzung im Unterricht besteht sicherlich in der begrenzten Hilfe, die in Maxima zur Verfügung steht und nicht auf die didaktische Anwendung optimiert ist. Außerdem ist diese in englischer Sprache verfasst. Möchten die Lehrende und/oder Lernende Maxima bei einem mathematischen Problem nutzen, bei dem ihnen nicht klar ist, wie die Eingabebefehle in Maxima dafür lauten, wird es für sie schwierig diese herauszufinden. Doch genau an diesem Punkt setzt das Portal Maxima4School an. Hier wird nicht nur eine Hilfe für die allgemeine Maxima Nutzung und die dazugehörigen Befehle gegeben, sondern sollen ausgehend von verschiedenen Themen im Unterricht der sinnvolle Maxima Einsatz erarbeitet und didaktisch aufbereitet werden.

3. Wiki-Nutzung im Maxima4School-Portal

Zielsetzung ist die Herstellung einer kooperativen Arbeitsumgebung mit interessierten Lehramtsstudierenden, sowie Lehrerinnen und Lehrern, um Unterrichtsideen zu entwickeln und zu testen. Hergestellte Produkte, wie Arbeits- und Unterrichtsmaterialien können von jedem genutzt und weiter entwickelt werden. Lehramtsstudierende sind es gewohnt, fertige ausgearbeitete Hausarbeiten den Dozenten zur Beurteilung vorzulegen. Die Nutzung eines Wiki erfordert ein prototypisches Denken und Arbeiten, beim dem die Studierenden auch unfertige Ideen der Nutzergemeinschaft zur Verfügung stellen. Diese unfertigen Ideen müssen dann im Mathematikunterricht bezogen auf den Maximaeinsatz bewertet und analysiert werden. Danach können die Ergebnisse wieder im Wiki veröffentlicht und gegebenenfalls die Arbeits- und Unterrichtsmaterialien angepasst werden.

4. Leistungsbewertung der Wiki-Nutzung im Maxima4School-Portal

Aufgabe des Wiki im Maxima4School-Portal ist es den Lehrerinnen und Lehrern Unterrichtsentwürfe zur Verfügung zu stellen, wie sie Maxima sinnvoll in ihren Unterricht integrieren können. Der große Vorteil eines Wiki im Gegensatz zu Unterrichtsplanungen als Download auf einer herkömmlichen Homepage besteht darin, dass die Unterrichtsentwürfe nach Verwendung in einer Unterrichtsstunde bei aufgetretenen Problemen von den Lehrerinnen und Lehrern selbst im Wiki verändert werden können und somit auch alle anderen Nutzern von dieser Erfahrung profitieren.
Voraussetzung für die Benutzung des Wikis ist es allerdings, dass die Benutzer sich etwas mit dem Wiki-Quellcode und dem TeX-Satz für die Eingabe von mathematischen Ausdrücken auskennen. Dies kann unter Umständen dazu führen, dass die Lehrerinnen und Lehrer ihre Erfahrungen aus ihrem Unterricht den anderen Benutzern nicht zur Verfügung stellen werden, da sie diese nicht beherrschen.
Eine Integration in universitäre Ausbildungsprozesse der Lehramts-

studierenden, wie entwickelte Unterrichtsideen von Lehrerinnen und Lehrern genutzt, bewertet und angepasst werden, ist erforderlich. Durch die Wechselwirkung von unterrichtlicher Nutzung und den von Lehrerinnen und Lehrern eingetragenen Verbesserungsvorschlägen bzw. Kritikpunkten erhalten im Wiki auch die Lehramtstudierenden eine qualifizierte Rückmeldung von erfahrenen Lehrerinnen und Lehrern zu ihren Unterrichtsideen und können diese selbst noch weiterentwickeln oder korrigieren ohne selbst in einer Schule gewesen zu sein, um diese auszuprobieren. Sollte der Unterrichtsentwurf von mehreren Lehrerinnen und Lehrern getestet werden, erhalten die Lehramtsstudierenden sogar eine breitgefächerte Rückmeldung aus verschiedenen Klassen und Schulen, was Sie durch eigenen Arbeitseinsatz nur schwer hätten erreichen können.

5. Fazit

Insgesamt kann durch den Einsatz von OpenSource CAS im Mathematikunterricht und die nachhaltige Dokumentation im Wiki Lehrerinnen und Lehrern die Unterrichtsgestaltung mit OpenSource-Maxima erleichtert werden. Auch den Schülerinnen und Schülern können sich ohne die lizenzrechtlichen Einschränkungen in der Unterrichts-nachbereitung, neue Möglichkeiten ergeben. Durch ein Portal wie Maxima4School werden diese noch erweitert und mit der Lehrerbildung an der Universität verknüpft. Sicherlich haben OpenSource Produkte Nachteile gegenüber manchen kommerziellen Produkte, die gegenüber den lizenzrechtlichen Vorteilen im konkreten thematischen Einsatz in der Schule abgewägt werden müssen.

6. Literatur

[1] Ingelmann, Maria; Bruder, Regina: CAS-Einsatz in der Sekundarstufe I, Darmstadt, (2008).

[2] Niehaus, Engelbert: Einsatzmöglichkeiten und Probleme mit einem Wiki im Rahmen von fächerübergreifenden mathematikdidaktischen Lehrveranstaltungen, Koblenz/Landau, (2007).

[3] OpenSource-Entwicklerteam.(2006), MediaWiki, http://www.mediawiki.org, (URL geprüft am 15.01.2009)

[4] Pallack, Andreas: Mit CAS zum Abitur, Soest, (2007).

[5] Schneider, Edith: Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht, Müchen, (2002).

[6] Wiki-Nutzer, (2006), Diskussionsbereich zum Begriff “OpenSource” in Wikipedia,(URL geprüft am 15.01.2009), http://de.wikipedia.org/wiki/Diskussion:Open_Source.

Hans-Joachim BRENNER, Erfurt

Das Elementarisierungs- und Trivialisierungsproblem im Mathematikunterricht

Erfolgreiches Lernen von Mathematik erfordert Möglichkeiten, sich die inneren Zusammenhänge der mannigfaltigen Tatsachen erarbeiten zu können und „das Wesen der Mathematik, das besonders in ihren Beweismethoden zutage tritt“ (Naas/Tutschke 1986, S. 3), kennenzulernen. Es ist „ein argumentatives Unterrichtsklima zu schaffen, in dem Begründungen mathematischer Aussagen und rationale Argumentationen selbstverständlich sind.“ (Reiss 2002, S. 30) In meinem Beitrag zeige ich damit zusammenhängende Probleme auf und unterbreite Vorschläge.

1. Mein Anliegen

Defizite und Probleme des Mathematikunterrichts wurden vielfach untersucht und benannt (z.B. Borneleit 2000). Ich möchte verstärkte Aufmerksamkeit zum einen auf das Problem der Entgeometrisierung (Arnold 1997; im Folgenden gehe ich nur auf Defizite bei der Nutzung von Methoden der analytischen Geometrie ein; bezüglich der elementaren Geometrie sind sie noch größer) und Algebraisierung der Schulmathematik und zum anderen auf die Vernachlässigung des theoretischen Lernens (Brückner 2008) lenken und die bekannten Vorschläge durch neue Überlegungen ergänzen. Dabei lasse ich mich auch von Jahnkes Bemerkungen (Jahnke 2008) leiten: „Hence, to understand the essence of mathematical proof we need to overcome the limits of everyday thinking. … Instead of simply denying the procedures of everyday thinking we should create situations in which students can make substantial experiences with checking the generality of statements. Thus, we would propose to have an interplay of empirical work and theoretical argumentation rather than telling our pupils that in mathematics we don‘t bother about empirical reality.” Trotz der vielen Bemühungen, dem Argumentieren/Begründen/Beweisen gebührende Aufmerksamkeit zu schenken (siehe auch Wittmann/Müller), hat sich die Situation nicht wesentlich verbessert. Nach wie vor sind erhebliche Anstrengungen diesbezüglich nötig. Mein Augenmerk liegt dabei auf der Erarbeitung von geistigen Werkzeugen für diese Tätigkeiten, um ein Verständnis der Zusammenhänge zu ermöglichen („Wie kommt das?“ Walsch 1992).

2. Begriffserklärungen

Unter dem *Elementarisierungsproblem* verstehe ich die mangelnde Vielfalt bei der Wahl der Begründungsgrundlage für mathematische Sachverhalte im Mathematikunterricht und dem daraus erwachsendem ersten Aspekts des *Trivialisierungsproblems*, womit ich die oft sinnentleerte Reduzierung der Bestätigung von Aussagen durch *algorithmisches Umformen algebraischer Terme* meine. (Man vergleiche z.B. die Herangehensweise bei der Einführung der Produkte von Vektoren in hiesigen Schulbüchern mit dem in [1].) Der zweite Aspekt des Trivialisierungsproblems, den ich ansprechen möchte, ist der *durch unzureichende Förderung und Forderung des theoretischen Lernens zu eng begrenzte Bereich mathematischer Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe II*.

3. Ausgangspunkte

In ihrer Expertise sprechen Borneleit et. al. (Borneleit 2000, S. 6) bezüglich der traditionellen Unterrichtspraxis von einer einseitigen (zumindest impliziten) Orientierung an der Grunderfahrung G2 (Winter 1996), die zur systematischen Vernachlässigung der anderen beiden Grunderfahrungen führte. Dieser Einschätzung ist entgegenzuhalten, dass gerade beim Ermöglichen von lokalem deduktivem Denken erhebliche Defizite bestehen. *Größeres Augenmerk sollte der Herleitung von Eigenschaften mathematischer Objekte und deren tatsächliche Nutzung in Argumentationen gelten*.
Danckwerts und Vogel (Danckwerts 2006, S. 5) stellen fest, dass die Kalkülorientierung der Analysis naturgemäß algebraintensiv ist und sehen die Tendenz der Vernachlässigung von echten Anwendungen und heuristischem Arbeiten vor allem als Reflex auf die Schwierigkeiten, die dem mathematischen Gegenstand der Analysis innewohnen. Dem Genannten möchte ich hinzufügen, dass noch stärker anschauliche Begründungen und Herleitungen sowie die Erarbeitung von Begriffen und Methoden anhand von physikalischen Problemen in die Diskussion gebracht werden sollten. Und weiterhin, dass die Fähigkeit des Deduzierens im Modellbildungsprozess an Bedeutung gewinnt (und nicht verliert, S. 198). Insgesamt ist den Herleitungen von mathematischen Aussagen mehr Aufmerksamkeit zu schenken.

4. Beispiele zum Problem der Elementarisierung

Ich bemühe mich, Beispiele vorzustellen, von denen ich hoffe, dass Kolleginnen und Kollegen bereit sind, sie für ihren Unterricht aufzugreifen.
(1) Gegeben ist ein Problem, das zu der Gleichung $x + x : 2 = 2160$ führt (bevor effektive Algorithmen erarbeitet wurden). Der Schüler sollte sich anhand von geeigneten Aufgaben erarbeitet haben, dass der linke Term folgende *Eigenschaft* hat $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Mithilfe dieser Eigenschaft (Additivität) und der Methode des falschen Ansatzes wird die Lösung ermittelt. Der Sachverhalt wird dabei auch „durch geometrische Bilder belebt“ (Klein 1911, S. 105) – zum Beispiel durch Streifen fester Breite und variabler Länge. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus Monotonieüberle-

gungen. Bei der Lösung von Gleichungen sollte die Beantwortung von Fragen im Vordergrund stehen. Wie kann ich eine Lösung ermitteln? Gibt es noch mehr Lösungen? Wie kann man *zeigen*, dass alle Lösungen gefunden wurden? Die Erarbeitung von Algorithmen ist ein wichtiges Ziel der Mathematik, aber nur bedingt eines des Mathematikunterrichts. Und die Anwendung von Algorithmen (was *muss* ich tun?) ist in erster Linie eine Tätigkeit für Computer.

(2) $\sin(4x) - \sin(x) = 0$. Bei der Lösung werden die *Symmetrieachsen des Graphen* (bzw. des Einheitskreises) und die Periodizität der Funktion genutzt. Man zeichnet den Graphen der Sinusfunktion in mehreren Perioden, wählt sich ein Argument *x* und zeichnet die Strecke ein, deren Länge den Sinuswert repräsentiert (also $P(x;0), Q(x;\sin x)$). Jetzt sucht man (auf all das und andere Wege kommen die Schüler ganz allein) weitere Argumente, die den gleichen Funktionswert besitzen. Können diese Argumente das Vierfache des gewählten Arguments sein? Wenn das stimmt, dann müssen *x* und *4x* zum Beispiel symmetrisch zu $\pi : 2$ liegen, also $(x + 4x) : 2 = \pi : 2$. Welche Lagen sind noch möglich? Haben wir wirklich alle Lösungen gefunden? Möglichkeiten zur Diskussion und Argumentation ergeben sich, wenn ein Algorithmus eben unbekannt ist.

(3) Lösen einer Extremwertaufgabe: Gesucht sind die Maße eines Balkens mit rechtwinkligem Querschnitt bei fester Diagonalenlänge (Höhe *h*, Breite *b*, Diagonalenlänge *d*), wenn die Tragfähigkeit maximal sein soll (Keunecke 2008). $y = f(h,b) = h^2 \cdot b \to \max$, wenn $h^2 + b^2 = d^2$ Den üblichen Lösungsmethoden und dem *f', f''*- Algorithmus sollten folgende Überlegungen vorangehen, wobei die Argumentation auf der *Nutzung der Eigenschaften der Parabel und Hyperbel* beruht. Wird $z = h^2$ substituiert (man erhält besonders einfache Funktionen; ohne geht es genauso gut), so folgt $b = y : z$ und $b = \sqrt{d^2 - z}$, wobei y als Konstante angenommen wird. Im *z-b*-Koordinatensystem sind die Graphen Hyperbeln (für verschiedene y-Werte, wobei auch Hyperbeln mit im konkreten Beispiel nicht erreichbaren Werten eingezeichnet werden) bzw. eine Parabel.

Die Bedeutung der einzelnen Kurven und Schnittpunkte bzw. der nicht vorhandenen Schnittpunkte von Hyperbeln mit der Parabel ist zu klären. Notwendig für das Annehmen des extremalen Wertes ist die Berührung der Kurven (weil …). Aus der Gleichheit der Anstiege der Tangenten und unter Beachtung von $y_0 = z \cdot b$ folgt, $z = h^2 = 2b^2$. Die ersten Überlegungen dieser Art haben die Schüler in Klasse 9 bei isoperimetrischen Problemen kennengelernt. (Man kann die verallgemeinerbaren Überlegungen fortführen - Lagrangesche Multiplikatoren.)

5. Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten

In den Diskussionen zum konstruktivistischen Lernen ist dem dialektischen Verhältnis von Lehren und Lernen zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt worden. „Der Konstruktivismus verabschiedet sich von der Hoffnung auf Wahrheiten und objektive Resultate. Wenn der Konstruktivismus eine Relationstheorie ist, sind in der Tat neue Perspektiven, nicht aber eindeutige Antworten zu erwarten." (Arnold/Siebert 2006) Stärkere Beachtung sollte finden, dass Lerntätigkeit und ihre Ausbildung „kein rein individuelles Phänomen ist und nicht spontan – sozusagen aus sich heraus – entsteht, sondern als Bestandteil der gesellschaftlichen Kultur vom Individuum selbst angeeignet werden muss … Eine Form oder Variante einer so verstandenen Tätigkeits- und Ausbildungsstrategie haben wir als Aufsteigen vom Allgemeinen zum Konkreten bezeichnet." (Lompscher 2000). Die Lehrstrategie besteht aus zwei wesentlichen Schritten: „Die erste ist die Ausbildung der sogenannten Ausgangsabstraktionen, die zweite ist das Studium konkreten Lehrstoffs mit Hilfe dieser Abstraktionen entsprechend den Lernzielen und –inhalten so weit, wie die Ausgangsabstraktion trägt." (Lompscher 1996) Besondere Bedeutung kommt der aktiven Ausbildung der Ausgangsabstraktion zu. Sie dient als Orientierungsgrundlage zur Aufdeckung des Wesentlichen bei unterschiedlichen Erscheinungen. Dabei ist es auch möglich, dass „der (abstrakte) Begriff vorangestellt ist, der Lernende „entleiht" ihn sich der Wissenschaft. Er nutzt ihn bei der Erarbeitung und Bearbeitung des Konkreten. Dadurch wird ausgehend vom theoretischen Begriff sein Inhalt erschlossen durch die Übertragung auf das Konkret-Praktische." (Brückner 2008) Als Beispiel dafür sehe ich das Unterrichtskonzept zur Einführung in die Integralrechnung von M. Pratusevich (Der MU, 2/2008, S. 25-32) an. „Ohne Beweis wird die Tatsache mitgeteilt, dass krummlinige Trapeze, die durch stetige Funktionen begrenzt werden, einen Flächeninhalt haben, der *die üblichen Eigenschaften hat*. … Auf der Grundlage des Flächenbegriffs wird nun bewiesen, dass der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes als Funktion des rechten Randes der Figur eine Stammfunktion zur Ausgangsfunktion ist." In diesem Zusammenhang ist auch L. Führers Forderung nach mehr „Top-down-Ansätzen" zu beachten.

Literatur

Alexandroff, Markuschewitsch, Chintschin (1969), Enzyklopädie Elementarmathematik

V.I. Arnold, On teaching mathematics, http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

J. Lompscher 2000, http://www2.hu-berlin.de/leibniz-sozietaet/bildung/lompscher.htm

J. Lompscher 1996, http://de.scientificcommons.org/joachim_lompscher

A. Brückner 2008, http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/new/index_f-bzmu.html

Astrid BRINKMANN, Münster

Die schönsten Mathematikaufgaben – Ein Projekt zum Jahr der Mathematik 2008

1. Projektidee und -durchführung

Zur Vermittlung, Übung oder Festigung vieler mathematischer Inhalte oder Fähigkeiten eignen sich verschiedene Aufgaben. Warum sollte man also nicht solche wählen, die gefallen?

Das Jahr der Mathematik 2008 diente als Anlass zum Projekt „Gesucht: Die schönsten Mathematikaufgaben“, im Rahmen dessen Aufgabenfavoriten von Schüler/innen zusammengetragen wurden. Hierfür sind Lehrer/innen in Deutschland dazu aufgerufen worden, z. B. am Ende des Schuljahres, ihre Schüler/innen zu fragen, welche der im Unterricht behandelten Mathematikaufgaben diese am schönsten fanden. Die Rückmeldungen der Schüler/innen sollten unter Angabe der Schule, der Schulform, der Klassenstufe, des verwendeten Schulbuchs sowie weiterer verwendeter Materialien an die Projektleitung (Astrid Brinkmann, Universität Münster) eingeschickt werden.

Die Projektziele und Erwartungen waren:
a) lokal (für einzelne Lerngruppen bzw. auf der Ebene einzelner Schulen):
- Sensibilisierung von Mathematiklehrenden und auch –lernenden für die Betrachtung des Aspekts der mathematischen Ästhetik
- Einholen von Sichtweisen der Lernenden
- Einfluss auf eine zukünftig motivierendere Unterrichtsgestaltung
- Einfluss auf das Bild von Mathematik, das Lernende haben

b) auf Projektebene:
- Forschungsinteresse:
  - Gibt es einen gewissen Konsens bzgl. dessen, was Schüler/innen (einer bestimmten Altersstufe und/oder Schulform) als schöne Mathematikaufgaben angeben?
  - Entstammen die angegebenen Aufgaben eher dem verwendeten Schulbuch oder eher zusätzlich verwendeten Unterrichtsmaterialien?
  - Wie verteilen sich die genannten Aufgaben auf die mathematischen Inhaltsbereiche (Geometrie, Algebra, Stochastik, …), die in der Schule behandelt werden?
  - Lassen sich bestimmte gemeinsame Charakteristika der genannten Aufgaben ausmachen, d. h., kann man Merkmale für die Ästhetik finden?
  - Welche Aufgabenkontexte werden bevorzugt?
  - Welche Aufgabentypen sind besonders beliebt?

- Veröffentlichung der zusammengetragenen Ergebnisse als Sammlung schönster Aufgaben
- Berücksichtigung der Ergebnisse bei der Gestaltung von Unterrichtsmaterialien, insbesondere von Schulbüchern (Idealfall)

Die Bekanntmachung des Projekts und der damit verbundene Aufruf zum Einsenden schönster Aufgaben erfolgten über verschiedene Schienen. Insbesondere wurde über das Projekt durch einen Flyer (http://www.math-edu.de/SchoeneAufgaben-I.pdf) informiert, der u. a. auch an ca. 450 Schulen im Regierungsbezirk Münster verschickt wurde. Informationen erfolgten ferner in der MNU-Zeitschrift, auf diversen Internetseiten zum Jahr der Mathematik, über eine Rundmail an die GDM-Mitglieder, auf verschiedenen Veranstaltungen für Mathematiklehrer/innen. Eine Meldung über das Projekt durch die dpa hatte zur Folge, dass in vielen deutschen Zeitungen sowie einigen Zeitschriften über das Projekt berichtet wurde. Des Weiteren ist ein Wettbewerb, „Wer kennt hübsche Aufgaben?“, durch die Westfälischen Nachrichten (Tageszeitung) ausgelobt worden, mit Prof. Dr. A. Beutelspacher als Jurymitglied und attraktiven Preisen für die besten Einsendungen (1. Preis: Fahrt zum Mathematikum in Gießen für eine Schulklasse). Das Projekt ist im Rahmen des Wettbewerbs „Mathe erleben“, ausgelobt vom BMBF, mit einem Preis ausgezeichnet worden; Berichte über diesen Preis lieferten gleichzeitig ebenfalls Hinweise auf das Projekt.

Die vielfältige Öffentlichkeitsarbeit und vor allem die Pressemeldungen haben dazu geführt, dass nicht alle Einsendungen der zunächst gewünschten Norm entsprachen. Viele Einzelpersonen, vor allem Eltern, Rentner, Hochschullehrer, haben durch ihre Beiträge die Sammlung der Aufgabenfavoriten von Schüler/innen ergänzt. Auch sind die Aufgaben nicht immer mit dem Attribut „schön“ versehen worden, sondern mit verwandten Eigenschaften wie interessant, spannend, hübsch, nett, beste Aufgaben. Die Angabe der Quelle, aus der die Aufgaben entnommen wurden, fehlt auch oft.

2. Vorgeschichte und begleitende Studien

In der Literatur wird Ästhetik als richtungweisendes Element im mathematischen Denken und Arbeiten hervorgehoben (Brinkmann 2006); eine neue Interview-Fallstudie zeigt, dass das Schönheitsempfinden auch heute in kreativen Arbeitsprozessen namhafter Mathematiker oft eine große Rolle spielt (Brinkmann & Sriraman 2009). Der Gedanke liegt daher nahe, dass auch Schüler/innen im Unterricht mathematische Schönheit erfahren und schätzen lernen sollten. Hierbei könnte auch eine langfristig positive Einstellung zur Mathematik aufgebaut werden. Diesem Unterrichtsziel wird aber international noch wenig Bedeutung zugemessen.

Erste Untersuchungen zum mathematischen Schönheitsempfinden von Schüler/innen sind dem hier vorgestellten Projekt vorangegangen (vgl. z. B. Brinkmann 2006), weitere wurden im Jahr 2008 durchgeführt bzw. begonnen, teils im Rahmen von Bachelor-Arbeiten am IDM der Universität Münster (A. Kampmann, K. Koop, A. Gerick, F. Schrameyer). Insgesamt wurden mehr als 1.500 Schüler/innen der Sekundarstufen aus Schulen verschiedener Schulformen befragt, wobei u. a. Charakteristika schöner Aufgaben aus Schülersicht mittels Auswahllisten (mit zugelassener Mehrfachauswahl) und Freitextangaben erkundet wurden, und auch, was für Aufgabentypen als schön empfunden werden. Ferner wurden die Schüler/innen aufgefordert, Beispiele für schöne Aufgaben aufzuschreiben, so dass u. a. auch untersucht werden konnte, welche mathematischen Inhaltsbereiche in diesem Zusammenhang bevorzugt vorkommen, und auch Hinweise auf ansprechende nichtmathematischen Inhalte geliefert wurden.

3. Kennzeichen schöner mathematischer Aufgaben

In der Literatur nennen Mathematiker bzw. Naturwissenschaftler als besondere Charakteristika schöner Aufgaben: Einfachheit, Klarheit, Eleganz, Vernetztheit/Komplexität, Ordnung aus dem Chaos, Struktur, Symmetrie / unvollkommene Symmetrie, Überraschungseffekt. Für Schüler/innen kommen weitere Aspekte zum Tragen, mit unterschiedlicher Gewichtung.

Die in Abschnitt 2 aufgeführten Studien haben ergeben, dass für etwa 80% der befragten Schüler/innen Aufgaben mit einem *interessanten Thema* schön sind. Ein weiteres Kriterium von Bedeutung ist eine gewisse Kombination von Komplexität und Einfachheit der Aufgabe: „*Die Aufgabe sieht schwer aus, ist aber einfach.*" Dies Kennzeichen wurde von rund 75% der Hauptschüler, 80% der Realschüler und 65% der Gymnasiasten angekreuzt. Etwa 65% aller Schüler/innen gaben *Einfachheit* als Merkmal an, ca. 60% kreuzten „*Es sind mehrere Teilaufgaben zu berechnen um die Aufgabe zu lösen.*" an, und ca. 55% „*Die Aufgabenstellung kenne ich bereits*."

Realitätsbezug („*Die Aufgabe hat mit alltäglichen Dingen zu tun.*") ist ein weiteres wichtiges Merkmal schöner mathematischer Aufgaben, angegeben von rund 60% der Hauptschüler, 70% der Realschüler und 75% der Gymnasiasten. Auch der *Überraschungseffekt* („*Die Lösung der Aufgabe ist überraschend.*") ist von der Mehrheit der Schüler/innen (ca. 60%) als Merkmal einer schönen Aufgabe angegeben worden.

Freitextangaben der befragten Schüler/innen deuten darauf hin, dass ein *Gefühl von Sicherheit und Erfolg* mit über den empfundenen Schönheitsgrad einer Aufgabe entscheiden: Eine schöne Aufgabe sollte einfach sein, im Sinne von „einfach genug, um vom Schüler gelöst werden zu können", allerdings nicht zu einfach, denn dies wäre langweilig – eine Aufgabe ist schöner, wenn man überlegen muss, wenn mehrere Teilschritte erforderlich sind. Natürlich ist der Grad der Einfachheit/Komplexität einer schönen Aufgabe abhängig von der jeweiligen Leistungsstärke des Lernenden.

Bezüglich des *Aufgabentyps* zeigen sich ohne weitere Differenzierung keine eindeutigen Präferenzen hinsichtlich des Aspekts „schöne Aufgabe". Es können nur Tendenzen angegeben werden: Für 50% - 60% aller Schüler/innen sind Spiele, Zeichenaufgaben und Scherzaufgaben schöne Aufgaben, für 40% - 50% aller Schüler/innen Textaufgaben, Rechen-/Päckchenaufgaben, Denk-/Knobelaufgaben und für 28% - 40% aller Schüler/innen Projektaufgaben bzw. Schätzaufgaben (bei durchschnittlich etwas mehr als 3 Nennungen pro Schüler/in). Unter Berücksichtigung der Altersgruppe der Schüler/innen bzw. der Schulform zeigt sich, dass *Spiele* von über 90% der Fünft- und Sechstklässler angegeben werden, *Zeichenaufgaben* insbesondere von jüngeren Schüler/innen an Haupt- und Realschulen, *Denk-/Knobelaufgaben* insbesondere von jüngeren Schüler/innen an Gymnasien.

Die in den Studien befragten Schüler/innen der Sek. I haben größtenteils Aufgabenbeispiele aus denjenigen Inhaltsbereichen angegeben, die zeitnah vorher in der Schule behandelt worden sind; die im Rahmen des Projekts zusammengetragenen schönsten Aufgaben lassen sich allerdings *verschiedensten mathematischen Inhalten und Inhaltsbereichen*, die in den unterschiedlichen Jahrgangsstufen in der Schule behandelt werden, zuordnen. Die vorkommenden *nichtmathematischen Inhaltsbereiche* sind sehr *vielfältig*: Tiere (insbesondere bei jüngeren Schüler/innen), Sport, Comicsfiguren (Asterix u. a.), witzige Personen, Filmhelden, Wahrheit, Gerechtigkeit, Lebensmittel u. v. a. m. Der Nützlichkeitsaspekt ist dabei nicht vorrangig; witzige, scharmante, phantasievolle, nicht alltägliche Darstellungsweisen kennzeichnen die eingesendeten Aufgaben. Als schön erscheinen insbesondere auch *in Geschichten verpackte Aufgaben* und *die Aufgabe selber eine Aufgabe zu konstruieren*. Besonders reizvoll sind Aufgaben, deren Lösungen *der menschlichen Intuition widersprechen*.

Literatur

Brinkmann, A. (2006). Erfahrung mathematischer Schönheit. In A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann, S. Prediger (Hrsg.), *Realitätsnaher Mathematikunterricht – von Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, 203–213.

Brinkmann, A. & Sriraman, B. (2009). Aesthetics and Creativity: An Exploration of the Relationships between the Constructs. Erscheint in: B. Sriraman, S. Goodchild (Eds.) Festschrift celebrating Paul Ernest's 65th Birthday. Information Age Publishing.

Folien zum Vortrag: http://www.math-edu.de/Vortraege.html

Regina BRUDER, Darmstadt; Timo LEUDERS, Markus WIRTZ, Freiburg

Ein diagnostisches Kompetenzstrukturmodell für ein heuristisches Arbeiten mit Repräsentationen von Funktionen und seine empirische Überprüfung

1. Ziele des Projektes HEUREKO und Fragestellung

Ziel des von der DFG im Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ seit 2007 geförderten Projektes ist die Konstruktion und Überprüfung eines Kompetenzmodells für das mathematische Problemlösen und Modellieren von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I in solchen Situationen, in denen Prozesse des Wachstums und der Veränderung mathematisch erfasst werden. Zentrale Bedeutung für Problemlösen und Modellieren in diesen Zusammenhängen besitzt die heuristische Verwendung der fundamentalen mathematischen Darstellungsarten „numerisch“, „graphisch“, „symbolisch“ und „verbal“ sowie der Wechsel zwischen ihnen. National und international bewährte theoretische Fähigkeitsmodelle aus der Mathematikdidaktik werden operationalisiert und in Form eines Kompetenzstrukturmodells empirisch überprüft. Langfristiges Ziel ist die Bereitstellung eines empirisch fundierten Instrumentariums für die Schulpraxis zur Diagnostik der Stärken und Schwächen von Lerngruppen und Individuen im Inhaltsbereich „Funktionale Veränderung“, eine Bestimmung von Förderbedarf und Abbildung von Kompetenzentwicklungen.

Das zu entwickelnde Modell fokussiert – im Gegensatz zu large scale Studien – auf einen engen aber curricular zentralen Teilbereich der mathematischen Kompetenzentwicklung. Über viele Schuljahre hinweg werden sukzessive verschiedene Darstellungsarten eingeführt und der Bereich der verfügbaren Modelle wird vom linearen bis zum exponentiellen Wachstum vergrößert. Zielperspektive des zu entwickelnden Instrumentes ist daher die Messung langfristiger Kompetenzentwicklungen.

Im Projekt HEUREKO soll folgende Frage beantwortet werden: Welche Kompetenzstruktur lässt sich im Inhaltsbereich „Funktionale Veränderung“ bezüglich der heuristischen Verwendung von funktionalen Repräsentationen aus theoretischen und empirischen Erkenntnissen gewinnen und mit Methoden der Item-Response-Theory psychometrisch modellieren?

3. Theoretischer Hintergrund

In der fachdidaktischen Literatur spielen mathematische Darstellungsformen und der Wechsel zwischen ihnen eine zentrale Rolle. Wesentliche grundsätzliche Beiträge zu mathematischen Darstellungsformen liefern z.B. Kaput (1985), Goldin (1998) und bezogen auf Funktionen u.a. Sierpinska (1992). Die Interpretation und wechselseitige Übersetzung der Darstellungsformen Term, Tabelle, Graph und Wortvorschrift wird als mathematische Schlüsselfähigkeit angesehen (Swan, 1985) und ist damit auch im Fokus der meisten Lehr- und Lernkonzepte in diesem Bereich (Barzel, Hußmann & Leuders, 2005). Zur Begründung der Relevanz des gewählten Themenfeldes „Wachstum und Veränderung“ können Argumentationen von Winter (1995) herangezogen werden, zum funktionalen Denken insbesondere Vollrath (1989) und zu den Repräsentationsformen und -wechseln auch Ainsworth (1999). Die Nutzung von verschiedenen Darstellungsformen als heuristische Hilfsmittel zum mathematischen Problemlösen findet man bei Polya (1949). Insbesondere die Wechsel zwischen verbalen Repräsentationen der Realsituation und numerischen, grafischen und algebraischen mathematischen Modellen lassen sich anhand des Modellierungskreislaufs (Blum, 2002) beschreiben. Um die Schüleraktivitäten beim Umgang mit den verschiedenen Darstellungsformen differenziert beschreiben zu können, werden Erkenntnisse aus dem Tätigkeitskonzept (u.a. Lompscher & Irrlitz 1985, Bruder & Brückner 1989) herangezogen. Zur Variation der Aufgabenschwierigkeit sind ferner Parameter für kognitive Anforderungsniveaus hilfreich (Bruder 1981). Alle genannten Konzepte wurden genutzt, um Ansätze für mögliche Kompetenzstrukturen im fokussierten Themenfeld zu finden.

Für die Itemkonstruktion ergibt sich die folgende Tabelle als Orientierungsrahmen. In der ersten Projektphase mit Fokus auf Klasse 7 und 8 wurden aus curricularen Gründen der Bereich der symbolischen Darstellung sowie eher technische Darstellungswechsel zunächst ausgespart. Zudem war festzustellen, dass die meisten Aufgaben nicht eindeutig determinieren, welche Übersetzungsrichtungen bei der Bearbeitung stattfinden, daher wird z.B. nicht zwischen grafisch→situativ und situativ→grafisch unterschieden.

Repräsentationswechsel	**Kognitive Elementarhandlungen**		
	Erkennen	Erzeugen	Begründen
situativ – grafisch (S↔G)			
situativ – numerisch (S↔N)			
graphisch – graphisch (G↔G)			
numerisch – numerisch (N↔N)			
numerisch – graphisch (N↔G)			

Zusätzlich werden innerhalb der Zellen berücksichtigt: die Art des Kontextes und der Mathematisierungsaufwand, die verbale Komplexität der Aufgabenstellung, die Verarbeitungskomplexität (wie viele Verarbeitungsschritte sind notwendig) und die Entscheidungskomplexität (Grad der Offenheit), sowie der Bekanntheitsgrad, der Ausführungsaufwand und die Fehleranfälligkeit.

4. Untersuchungsdesign

Im Sinne der curricularen Nähe wurden auf der Basis regulärer Schulbuchaufgaben Items für alle relevanten Darstellungswechsel konstruiert, durch think-aloud Interviews validiert und pilotiert. Es wurden u.a. passende Parallelitems erzeugt, etwa solche, die von derselben Realsituation ausgehend zur Problemlösung entweder mittels Tabelle oder Graf aufforderten. Die Items wurden in einem Multimatrix-Blockdesign in 40 Klassen in Baden-Württemberg und Hessen (N=872) zusammen mit einem Schüler- und Lehrerfragebogen zur Erfassung von Moderatorvariablen eingesetzt.

5. Ergebnisse

In einer Dimensionsanalyse wurden drei konkurrierende Modelle gegeneinander getestet.

Modell 1 „*Repräsentationswechsel*“ (4D) mit der Annahme: Die Kompetenz des Problemlösens mit funktionalen Repräsentationen wird bestimmt durch die spezifischen Wechsel zwischen Repräsentationstypen. Die Fähigkeit der Übersetzung zwischen grafischer respektive numerischer Darstellung und Situation sowie die Verarbeitung innerhalb der Repräsentationen lassen sich psychometrisch trennen.

Modell 2 „*Repräsentationstypen*“ (2D) mit der Annahme: Wesentliche, trennbare Komponenten der Kompetenz des Problemlösens mit funktionalen Repräsentationen sind durch den Repräsentationstyp bestimmt. Dabei spielt die Tatsache, ob eine Übersetzung zwischen Realsituation und mathematischem Modell stattfinden muss, keine entscheidende Rolle. Hieraus resultiert ein zweidimensionales Modell (im Wesentlichen G vs. N).

Modell 3 „*Repräsentationsunabhängige Kompetenz*“ (1D): Schließlich dient uns die Annahme, dass der betrachtete Bereich wesentlich als ein einziges Fähigkeitskonstrukt aufzufassen ist, als Vergleichsmodell.

Die empirische Überprüfung der Passung der konkurrierenden Modelle zu den Daten ergab folgendes Bild:

Modell	**-2 log L**	**AIC_c**
Repräsentationsunabhängig (1D)	29908.91	29985
Repräsentationstypen (2D)	29898.38	29975
Repräsentationswechsel (4D)	29866.82	29943

L bezeichnet die Likelihood des Modells, der informationstheoretische Kennwert AIC_c beschreibt die Modellpassung unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Zahl geschätzter Parameter. Er wird durch das passendere Modell minimiert. Der Abstand von 32 zum nächst schlechteren Modell ist signifikant auf dem 5%-Niveau.

Hinsichtlich der Modellpassung erweist sich im Vergleich mit den Alternativmodellen das vierdimensionale Modell als das beste Modell für den betrachteten Kompetenzbereich „Problemlösen mit Repräsentationen bei funktionaler Veränderung". Die Unterscheidung der vier spezifischen Typen von Repräsentationswechseln erlaubt eine differenzierte Beschreibung der Kompetenzstruktur, die in der Folge auch für Zwecke pädagogischer Diagnostik genutzt werden kann. Weitere Analysen der Kompetenzstrukturen und -typen und deren Zusammenhang mit Moderatoren werden an anderer Stelle berichtet.

Literatur

Ainsworth, S.E., (1999). A functional taxonomy of multiple representations. *Computers and Education, 33(2/3),* 131-152.

Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005a). Der "Funktionenführerschein". *Praxis der Mathematik in der Schule*. *47 (2),* 20-25.

Blum, W. et al. (2002). Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. In: *Educational Studies in Mathematics* 51, 149-171.

Bruder, R. (1981). Zur quantitativen Bestimmung und zum Vergleich objektiver Anforderungsstrukturen von Bestimmungsaufgaben im Mathematikunterricht.- In: *Wiss. ZS d. PH Potsdam*, 25(1981)1, S.173-178

Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht - ein allgemeiner Ansatz.- In: *Pädagogische Forschung,* Berlin 30 (1989) 6, S.72-82

Goldin, G.A. (1998): Representational systems, learning and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *17 (2),* 137-165.

Kaput, J.J. (1985): Representation and problem solving, methodological issues related to modelling. In: E.A. Silver (Hrsg.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. S. 381-398. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lompscher, J. & Irrlitz, L. (1985). *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit*. Berlin: Volk und Wissen.

Polya, G. (1949): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Tübingen und Basel: Francke.

Sierpinska, A. (1992): On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E. & Harel, G. (Hrsg.). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. S. 25-58. USA: Mathematical Association of America.

Swan, M. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik,(10)*, 3-37.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*. 37–46.

Nils BUCHHOLTZ & Björn SCHWARZ, Hamburg

Vergleich des mathematischen und fachdidaktischen Wissens zum Thema "Argumentieren und Beweisen" von Lehramtsstudierenden in Deutschland, Hongkong und Australien

1. Design der Studie

Die hier vorgestellte Studie ist eine qualitative Vertiefungs- und Ergänzungsstudie zu der internationalen Vergleichsstudie MT21 (Mathematics Teaching in the 21st Century), die die Wirksamkeit der Mathematiklehrerausbildung in den Blick nimmt.

Die Ergänzungsstudie wurde in Hongkong, VR China, Taiwan, Australien und Deutschland durchgeführt und fokussiert die Mikroebene von MT21, d.h. den individuellen Kompetenzerwerb in der universitären Phase der Lehrerausbildung.

Konkret werden umfangreiche Aussagen von Lehramtsstudierenden ausgewertet, die Aufschluss darüber geben, wie das von Lehramtsstudierenden während ihrer Ausbildung erworbene Professionswissen konstituiert ist und in welcher Form Verknüpfungen zwischen einzelnen Bereichen dieses Professionswissens erkennbar sind.

Den theoretischen Hintergrund liefert dabei die Konzeptionalisierung des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern nach Shulman (1986) in Ergänzung durch Bromme (1995), ergänzt durch die Einbeziehung der Konzeption der mathematischen und mathematikdidaktischen Beliefs nach Grigutsch, Raatz und Törner (1998).

Befragt wurden im deutschen Sample 79 Lehramtsstudierende aus Studiengängen für alle Schulstufen mittels eines Fragebogens mit domänenübergreifenden offenen Aufgaben. Im Hongkonger Sample beläuft sich die Zahl der Probandinnen und Probanden auf 84, im australischen Sample nahmen 46 Lehramtsstudierende an der Befragung teil.

Die Auswertung der Fragebögen erfolgte mit der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2000), genauer mittels Rückgriffs auf die Methode der strukturierenden Inhaltsanalyse (deduktive Kategorienanwendung, skalierendes Strukturieren).

Erste Ergebnisse sind bereits veröffentlicht (Schwarz, Kaiser & Buchholtz, 2008; Schwarz et al., 2008).

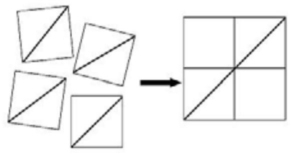
2. Mathematischer und fachdidaktischer Inhalt zum Argumentieren und Beweisen

Den Probandinnen und Probanden war im Rahmen der Befragung folgende Aufgabe gestellt worden:

Betrachten Sie den folgenden Satz:

Verdoppelt man die Seitenlängen eines Quadrats,

so verdoppelt sich auch die Länge jeder Diagonale.



Folgender präformaler Beweis ist gegeben:

Man verwendet quadratische Plättchen, die gleich groß sind. Legt man vier Plättchen zu einem Quadrat, erhält man ein Quadrat, dessen Seitenlängen doppelt so lang sind wie die eines Plättchens. Man erkennt sofort, dass auch jede Diagonale doppelt so lang ist wie die eines Plättchens, da jeweils zwei Diagonalen von zwei Plättchen direkt aneinander stoßen.

Die Unterscheidung zwischen einem formalen und einem präformalen Beweis innerhalb dieser Aufgabe ist sehr bedeutungsvoll und gibt in den Ergebnissen auch Aufschluss über länderspezifische Unterschiede sowohl im Fachwissen als auch im fachdidaktischen Wissen.

Auf den Bereich des *fachmathematischen Wissens* erstrecken sich dabei folgende Teilaufgaben:

> b) Formulieren Sie einen formalen Beweis für den obigen Satz
>
> f) Können der präformale und der formale Beweis des […] Satzes über die Länge der Diagonalen eines Quadrats jeweils auf beliebige Rechtecke verallgemeinert werden? Bitte begründen Sie kurz.

Auf den Bereich des *fachdidaktischen Wissens* erstrecken sich folgende Teilaufgaben:

> d) Kann ein präformaler Beweis als einzige Beweisform im Mathematikunterricht ausreichend sein? Bitte begründen Sie Ihre Position!
>
> e) Benennen Sie kurz die Vor- und Nachteile eines formalen und eines präformalen Beweises!

In der Auswertung der Ergebnisse wurden gemäß dem Antwortverhalten der Probandinnen und Probanden zunächst quantitativ die absoluten Häufigkeiten der Codierungen für jedes Sample separat erfasst und in Hinblick auf Besonderheiten im Anschluss qualitativ untersucht. Aus diesem Vergleich der drei Samples konnten daraufhin individuelle Charakteristika der einzelnen Samples herausgestellt werden.

3. Zusammenhang des Fachwissens und des fachdidaktischen Wissens im Bereich „Argumentieren und Beweisen“ in den einzelnen Samples

Das deutsche Sample zeichnet sich im fachmathematischen Teil durch deutliche Präferenzen für das präformale Beweisen aus. Oft waren die Studierenden einerseits nicht in der Lage, einen korrekten formalen Beweis zu führen, andererseits wurde die Verallgemeinerbarkeit des formalen Beweises manchmal nicht erkannt oder es wurde nur der präformale Beweis verallgemeinert. Diese Präferenz für das präformale Beweisen setzt sich – im Gegensatz zu Präferenzen im Hongkonger Sample – angefangen im unteren Leistungsbereich im oberen Leistungsbereich fort. Die Defizite im Fachwissen führen aber nicht unbedingt dazu, dass dem präformalen Beweisen in der didaktischen Reflexion eine Vorrangstellung eingeräumt wird. Erwartungen, dass die fachdidaktische Reflexion über die Nützlichkeit des präformalen Beweisens die fachdidaktische Reflexion über die Notwendigkeit der Vermittlung des formalen Beweisens in den Hintergrund treten lässt, bestätigten sich nicht. Es zeigte sich vielmehr, dass sich die Studierenden über die verschiedenen Niveaustufen der Beweise durchaus im Klaren sind und den Einsatz von präformalen und formalen Beweisen von den kognitiven Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler abhängig machen. Hier wird die didaktische Reflexion also nicht durch das Fachwissen dominiert, sondern eher durch schülerorientierte fachdidaktische Überlegungen wie etwa Anschaulichkeit und Verständnisförderung, aber auch die Gefahr, durch das präformale Beweisen verfrüht Evidenzen als Beweise zu akzeptieren, bestimmt.

Das Hongkonger Sample zeigt diesbezüglich ein anderes Bild. Das fachmathematische Wissen zeigt sich hier von allen drei Samples am deutlichsten ausgeprägt, formales Beweisen bereitete den Probandinnen und Probanden kaum Probleme. Diese starke Ausprägung des Fachwissens ist es denn allerdings auch, die die fachdidaktischen Überlegungen zum präformalen und formalen Beweisen stark beeinflusst. Es zeigte sich eine deutliche Präferenz des formalen Beweisens im Fachwissen und auch im fachdidaktischen Wissen. Die didaktische Reflexion über den Einsatz von präformalen und formalen Beweisen erfolgt im Kontext der Fachmathematik, also des

Fachwissens. Präformale Beweise sind dementsprechend zwar bekannt und werden – vor allem im oberen Leistungsbereich – auch wegen ihrer Einfachheit geschätzt, nicht ohne jedoch durch einen formalen Beweis ergänzt zu werden, der im Sinne einer Vermittlung eines formalen Mathematikbildes seine didaktische Berechtigung erhebt. Im unteren Leistungsbereich sind dabei sowohl die fachmathematischen als auch die fachdidaktischen Überlegungen von der Ansicht geprägt, präformales Beweisen sei kein wissenschaftlich angemessenes mathematisches Vorgehen und sollte deshalb auch nicht im Unterricht thematisiert werden.

Das australische Sample zeigt ebenfalls eine deutliche Ausprägung des Fachwissens, allerdings lässt sich keine eindeutige Präferenz für eine bestimmte Beweisart ausmachen. Der Einfluss des stark ausgeprägten fachlichen Wissens auf das fachdidaktische Wissen lässt sich dennoch dahingehend feststellen, dass die fachdidaktischen Überlegungen zum präformalen Beweisen zwar aus einer Perspektive der Lernenden als für Schüler(innen) sehr nützlich angesehen werden, ihre Bewertung aber letztendlich auch im Kontext der Vermittlung eines formalen Mathematikbildes geschieht, da das formale Beweisen als eine unabdingbare Ergänzung zum präformalen Beweisen angesehen wird.

Literatur

Bromme, R. (1995). What exactly is ‘pedagogical content knowledge’?—Critical remarks regarding a fruitful research program. In S. Hopmann & K. Riquarts (Eds.), *Didaktik and/or Curriculum* (pp. 205–216). Kiel: IPN.

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal fur Mathematik-Didaktik, 19* (1), 3–45.

Mayring, P. (2000). Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Schwarz, B., Kaiser, G. & Buchholtz, N. (2008). Vertiefende qualitative Analysen zur professionellen Kompetenz am Beispiel von Modellierung und Realitätsbezügen. In: Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer – Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und –referendare – Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung.* Münster: Waxmann Verlag (S. 391 - 424).

Schwarz, B., Leung, I. K. C., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J., Vale, C. (2008). Future teachers’ professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in tree countries. In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education 40 (5)* (S. 791-811).

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2),* 4–14.

Michael BÜRKER, Freiburg

Die Finanzkrise als Impuls für mathematikdidaktische Überlegungen

1. Einleitung:

Die Folgen der Finanzkrise bekommen die Menschen weltweit in Form einer tiefgreifenden Wirtschaftskrise mit all ihren Erscheinungen wie Kurzarbeit, erhöhter Arbeitslosigkeit und wirtschaftlichem Rückgang zu spüren. Wir können zwar in diesem Vortrag dem äußerst komplizierten Ursachengeflecht dieser Krise nicht nachgehen. Einige Punkte seien aber kurz skizziert:

- Immobilienkrise in den USA
- Psychologische Faktoren wie Geld- und Profitgier
- Hohe Komplexität bei Geldanlagen und im Kreditwesen
- Hohe Bereitschaft für riskante Geldanlagen bei Bankmanagern
- Fehlendes Fachwissen bei den Verantwortlichen
- Mangelhafte Vorschriften und Kontrollstrukturen im Finanzsystem

Die Frage besteht für uns Mathematikdidaktiker, was wir in Schule und Hochschule Tätigen tun können, um langfristig und nachhaltig den genannten Punkten entgegenwirken zu können. Unsere Möglichkeiten sind in dieser Beziehung sicher sehr begrenzt. Zwei Ebenen, auf denen wir tätig werden können, sollen hervorgehoben werden.

Zum Einen eine allgemeine psychologisch-bildungswissenschaftliche Ebene:

Bildung ist grundsätzlich der wissenschaftlichen Redlichkeit verpflichtet und transportiert im Kern ethisch motivierte Grundsätze mit, z. B. im Fach Ethik oder Religion die Frage nach der Profitgier. Auch im Fach Mathematik tragen wir dazu bei, wissenschaftliche Redlichkeit vorzuleben und an die Jugendlichen weiterzugeben: Zum Beispiel ist das Aufstellen von Behauptungen an strenge Regeln des Beweisens geknüpft. Dies unterstützt das allgemeine Bildungsziel, die Schülerinnen und Schüler zu mündigen und verantwortlich denkenden Menschen in einer immer komplizierteren Welt zu erziehen.

Zum Anderen können wir auf der fachlichen Ebene mindestens auf einem der Schule angepassten Niveau elementare Finanzströme untersuchen und modellieren. Darum soll es in diesem Vortrag gehen. Genauer geht es darum, die Modellierungswerkzeuge für Spar- und Tilgungsvorgänge zu schärfen, sowohl unter dem Einsatz von Rechenhilfsmitteln wie dynamischer Geometrie-Software als auch ohne diese in Form von überschlägigen Faustregeln, die es erlauben, die Verdopplungszeit von Geldanlagen und die Tilgungszeit eines Darlehens in Sekundenschnelle wenigstens abzuschätzen.

Empirische Grundlage dieses Vortrags ist ein Unterrichtsversuch zweier Studierender in meinem Seminar „Medieneinsatz im Mathematikunterricht", durchgeführt im Februar 2009 am Berthold-Gymnasium Freiburg in einer 13. Klasse. Thematisch wurde außerdem eine Aufgabe des baden-württembergischen Zentralabiturs aus dem Jahr 2000 herangezogen, in der es um die Tilgungszeit eines Darlehens ging.

2. Faustregeln bei Sparvorgängen

Für die Verdopplungszeit bei Sparvorgängen mit Zinseszins (Zinssatz p%) erhält man bekanntlich die Gleichung $2 = 1 \cdot (1 + p\%)^n$ und daraus $n = \ln 2 / \ln (1 + p\%)$.
Bei kleinem p ($p < 10$) kann $\ln(1 + p\%)$ näherungsweise durch p% ersetzt werden, wodurch sich für kleine p die Faustformel

$$\textbf{Verdopplungszeit} \approx \textbf{70/p}$$

ergibt .

Bei einem Zinssatz von 5% erhält man daher eine Verdopplungszeit von rund 14 Jahren (genauer Wert 14,2). Diese Faustformel können wir später bei Tilgungsvorgängen nutzen, weil wir einen Tilgungsvorgang auf einen Sparvorgang zurückführen.

3. Sparvorgänge mit regelmäßiger Sparrate

Ist a_0 das Anfangsguthaben, p% der Jahreszinssatz, r die Sparrate am Ende eines jeden Jahres, so erhält man das Guthaben a_n nach n Jahren mit Hilfe der Formel (wir schreiben im Folgenden p_ an Stelle von p%):

$$a_n = (a_0 + r / p\_) \cdot (1 + p\_)^n - r / p\_.$$

Normalerweise wird diese Formel mit Hilfe der abbrechenden geometrischen Reihe hergeleitet. Da wir die obige Formel auch für die 10. Klassenstufe herleiten wollen, vermeiden wir die geometrische Reihe und benutzen außer elementaren algebraischen Umformungen nur die explizite Formel für das exponentielle Wachstum.

Rekursiver Ansatz: $a_{n+1} = a_n + a_n \cdot p\_ + r$

p_ vor die Klammer: $= a_n + p\_ \cdot (a_n + r/p\_)$

Addieren von r/p_ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$a_{n+1} + r/p\_ = a_n + r/p\_ + p\_\cdot(a_n + r/p\_)$$

$a_n +$ r/p_vor die Klammer: $$a_{n+1} + r/p\_ = (a_n + r/p)\_ \cdot(1 + p\_)$$

Dies ist eine rein multiplikative Rekursionsgleichung wie beim exponentiellen Wachstum, womit man

$$a_n + r/p\_ = (a_0 + r/p\_)(1 + p\_)^n$$

oder (*) $$a_n = (a_0 + r/p\_)(1 + p\_)^n - r/p\_$$

erhält. Wir können dies als einen einfachen Sparvorgang ohne Sparrate mit dem Anfangsguthaben $a_0 +$ r/p_ interpretieren, bei dem wir „am Schluss" noch r/p_ abziehen. Wir können also unsere Faustformel für die Verdopplung nach 70/p Jahren heranziehen. Legt jemand z. B. 1000 Euro an und zahlt jährlich 100 Euro bei einem Zinssatz von p_ = 5% ein, so ist r/p_ = 2000. Das Anfangsguthaben ist a_0+ r/p_ = 3000. Es verdoppelt sich nach ca. 14 Jahren. Das Guthaben beträgt nach rund 14 Jahren gemäß Formel (*) rund 6000 € - 2000 €, also 4000 €.

3. Tilgungsvorgänge

Bei Tilgungsvorgängen ist r die Rückzahlrate am Ende eines jeden Jahres und a_n der Restschuldenstand nach n Jahren. Die Rekursionsgleichung lautet dann $$a_{n+1} = a_n + p\_\cdot a_n - r.$$

Die explizite Form ergibt sich aus der Gleichung (*), indem wir r durch –r ersetzen: (*-) $$a_n = (a_0 - r/p\_)(1 + p\_)^n + r/p\_.$$

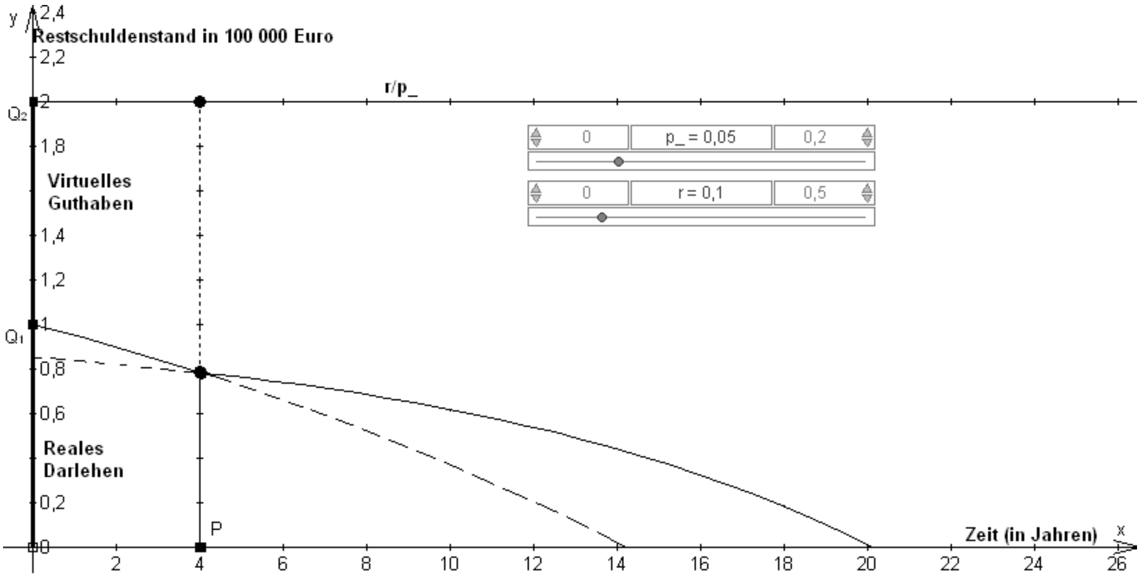
Diese Formel wurde den Schülerinnen und Schülern mit etwas anderen Bezeichnungen mitgeteilt, und zwar ohne Herleitung, weil die obige kurze Herleitung noch nicht bekannt war. Zur Einstimmung in die Thematik wurde den Schülern des Kurses ein Film mit dem Titel „Die Simpleshow erklärt die Finanzkrise" gezeigt [1]. In diesem Film wird der Fall eines (fiktiven) Angestellten Klaus in einer Kleinstadt in den USA vorgestellt, der wie die meisten Personen in den USA sehr leicht, d. h. ohne Eigenkapital an einen Kredit für den Kauf eines Hauses kommt. Die Bank hat als Sicherheit nur, dass der Kreditnehmer im Moment der Kreditaufnahme einen Arbeitsplatz mit einem regelmäßigen Einkommen hat, außerdem den Immobilienwert des Hauses. Solange die Immobilienwerte steigen, ist dies kein Problem. Aber wenn diese sinken, erhöht die Bank die Zinsen. Kommt noch eine Erhöhung der Zinsen auf dem Finanzmarkt dazu, kann dies fatale Folgen für den Kreditnehmer haben. Dies kann mit dynamischer Geometrie-Software mit Hilfe der Schieberegler eindrucksvoll dargestellt werden.

Beispiel: Jemand nimmt ein Darlehen von 100 000 Euro bei einem Zinssatz von 5% auf. Er bezahlt am Ende eines jeden Jahres einen Betrag von 10 000 Euro.

a) Bestimme die Tilgungszeit für p_ = 5%.

b) Bestimme die Tilgungszeit, wenn sich nach 4 Jahren der Zinssatz auf 10% erhöht (bei unveränderter Rückzahlrate r).

Es ist r/p_ = 200000. Die Formel für den Restschuldenstand a_n nach n Jahren ist $a_n = (a_0 - r/p\_)(1+p\_)^n + r/p\_$.



Die Differenz r/p_ - a_0 (in unserem Beispiel 100000 Euro, anschaulich die Strecke Q_1Q_2) lässt sich als „virtuelles Guthaben“ interpretieren, das exponentiell anwächst. Dieses Guthaben wächst so lange, bis das reale Darlehen vollständig getilgt ist, bei unserem Zahlenbeispiel also, bis sich das virtuelle Guthaben verdoppelt hat. Wir können somit unsere Faustregel verwenden: Die Verdopplungszeit bei p_ = 5% beträgt dann rund 70/p, also 14 Jahre. Dies ist gerade die Tilgungszeit des Darlehens, wie man auch an der gestrichelten Kurve ablesen kann. Mit Dynageo kann man die Erhöhung des Zinssatzes gut modellieren:

Nach 4 Jahren steigt der Zinssatz plötzlich auf 10%, der Schieberegler p_ wird entsprechend eingestellt. Die Kurve zeigt dann einen flacheren Verlauf und die Tilgungszeit ist entsprechend größer, bei diesem Beispiel etwa 20 Jahre.

Literatur:

[1] http://www.videogold.de/die-simpleshow-erklaert-die-finanzkrise/

Rami CHAHIN, Bei PENG, Roberto REALE, Felix RÜHLING,Oldenburg

Mathematische Prinzipien hinter den musikalischen Kompositionen für die Eröffnung der Tagung

Vorbemerkung: Bei der Eröffnungsveranstaltung der 43. Jahrestagung für Didaktik der Mathematik erklangen vier Uraufführungen von Kompositionen, die sich explizit mathematischer Prinzipen bedienten. Die Komponistin und die Komponisten erläutern hier die mathematischen Hintergründe ihrer Werke.

Rami CHAHIN: „Sudoku" – for solo Cello

This work was composed for the „Tagung für Didaktik der Mathematik" at Carl von Ossietzky Universität in Oldenburg in March 2009. The reason of writing this work is to form a musical piece built entirely on a mathematical systematic idea, Sudoku being the best example.

It is a composition built on a scale that consists of 9 main pitches. Each main pitch again is divided into 9 fraction pitches which results in 81 microtones instead of 12 semitones. The scale, fractions and the duration are built by using the exponential equation. This means that the duration of any Sudoku, the repetition of the pitches and its fragments and tension will be fixed even if we play these Sudoku in different ways. This could be a good idea for a group of musicians to play different Sudokus together but still finishing at the same time.

As a matrix I used (x,y,z): x represents the main pitch, y is the fraction within this pitch and its dynamics, and z is the duration of the tone. So if the first matrix will be (5,6,1) it defines the first note as (5,6,1) = (pow(2, (5th note– second octave, pow(2, (42 / 81))* 130.812 = 187.39 Hz f , 0.11 duration per sec.).

The second step is to ease the work for musicians, by converting the main 9 notes scale into the normal 12 notes. We divide the 12 notes normal scale to 6*12= 72 fractions obverses 81 fraction notes from the 9 notes main scale; that would give us contact notes:

C = (1,1), E = (4,1), G# = (7,1).

Are there any spiritual sides in this work? - When the musician plays this piece, he/she should behave, feel and think as if she were a Sudoku player. So the first three lines of the work she should play it in wandering and mystery. The second three lines she should perform it as if she were involved in the game, and the last three lines will be the feeling of solving the game, trust and victory.

Bei PENG: „Traum im Schweigen“ – für Violoncello und Flügel

Als Chinesin, die seit sieben Jahren in Deutschland lebt, fühle ich mich in der chinesischen und deutschen Kultur gleichermaßen zu Hause. Daher ist es mir in meinen Kompositionen ein Anliegen, beide Kulturen auf der musikalischen Ebene zu verbinden.

Da meine Komposition ein Auftragswerk ist, welches mit Mathematik verbunden sein soll, hatte ich die Idee, eine mathematische Form durch Musik darzustellen. Dies sollte aber in einer möglichst ausgeglichenen Form realisiert werden, damit weder die mathematische Form die musikalische Komposition vordergründig dominiert, noch andersherum die musikalische Form die mathematische Ausgangsform unkenntlich macht.

Meine Komposition weist zwei Stimmen auf, eine für Violoncello und eine für Flügel: Für die Stimme des Violoncellos habe ich mich an der Zahl π orientiert. Mit anderen Worten: Ich habe mir die ideale Form des Kreises ausgesucht, die schon von den alten Griechen immer wieder thematisiert wurde. In der asiatischen Kultur steht der Kreis für Einheit und Leerheit und damit potentielle Fülle – und Schweigen. Das Schweigen hat auch in der klassischen europäischen Kultur einen hohen Stellenwert. Ich habe einen Abschnitt der Dezimalbruchentwicklung der transzendenten Zahl π in musikalische Intervalle übersetzt. Das bedeutet, dass ich zum Beispiel die Zahl 3 als Terz (dabei standen zwei Möglichkeiten zur Auswahl, kleine und große Terz), die Zahl 1 als Prime und die Zahl 4 als Quarte übersetzt habe. Die theoretisch unendliche Melodie, die sich aus der Übersetzung von π in eine musikalische Tonfolge ergibt, habe ich zu kleinen Konstellationen von Tongruppen geformt. Die Stimme des Flügels repräsentiert eine andere Denkform des Kreises – es handelt sich um den Kreis der 64 Hexagramme des Buches der Wandlungen. Dieses Kreis-System aus Trigrammen und Hexagrammen verschlüsselt die hochkomplexen Formen urtümlicher chinesischer Mathematik: Binäre Zahlenlogik, Fibonaccireihe und vieles mehr sind hier verborgen. Nach meinem eigenen System übersetze ich die Hexagramme in musikalische Harmonien. Diese Harmonien werden auf dem Flügel durch Akkorde, Cluster und zusätzliche Klänge realisiert.

Ich verstehe die beiden Stimmen als musikalisches Gleichnis zweier sich begegnenden Menschen, die aus unterschiedlichen Kulturen stammen. Im interkulturellen Austausch entdecken sie ihr gemeinsames Urmotiv.

Roberto REALE: „Non tornare piu“- Chaostheorie und Musik

Die Mathematik hat seit jeher eine große Rolle in der Musik gespielt: Viele grundlegende musikalische Theorien sind mathematischer Natur und stammen aus der griechischen Antike. J.S. Bachs Kompositionen sind für ihre Verbindungen zur Mathematik bekannt. Die Klaviersonaten Mozarts (vgl. Putz, 1995) und auch verschiedene Werke Bartoks (vgl. Lendvai, 1971) verwenden den goldenen Schnitt als gestalterisches Mittel.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelte sich bei einigen Komponisten der konkrete Wunsch die Wahl der Parameterwerte einer Komposition nicht der Phantasie, Willkür oder Inspiration des Komponisten selbst zu überlassen. Die Chaostheorie als kompositorisches Gestaltungsmittel wurde entdeckt und auf zwei unterschiedliche Arten von Komponisten angewandt. Die einen verwenden in ihren Werken keine technischen Details einer bestimmten mathematischen Theorie, sondern lassen sich von dieser inspirieren oder empfinden diese nach. Demgegenüber stehen diejenigen Komponisten, die sich strikt an mathematische Formeln halten und sämtliches kompositorisches Material aus diesen generieren (z.B. logistische Gleichung).

In dem Stück „Non tornare piu“ für Cello wird die Nichtlinearität/ Diskontinuität des Schmetterlingseffekts (Lorenz, 1963) musikalisch nachempfunden. Eine sich zunächst kontinuierlich entwickelnde Struktur (kleines Motiv aufsteigender Töne) wird durch ein unvorhergesehenes musikalisches Ereignis (Intervalle/ Akkorde) minimal verändert. Diese minimalen Veränderungen wiederholen sich fortan in unregelmäßigen Abständen und übernehmen dabei zunehmend die Kontrolle über die ursprüngliche Struktur, bis diese nicht mehr erkennbar ist. Die neue Struktur erreicht schließlich einen Kulminationspunkt, aus dem wiederum eine völlig neue musikalische Textur entsteht, die mit der vorhergehenden nichts mehr zu tun hat.

Literatur

Lendvai, E. (1971). Béla Bartók: *An Analysis of his Music*, intro. by Alan Bush. London: Kahn & Averill.

Lorenz, Edward N. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Athmospheric Science, Vol. 20, No. 2*, pp. 130-141.

Putz, John F. (1995). The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart. *Mathematics Magazine, Vol. 68, No. 4*, pp.275-282.

Felix RÜHLING: „Pressure“ - Im Spannungsfeld zwischen Musik und Mathematik

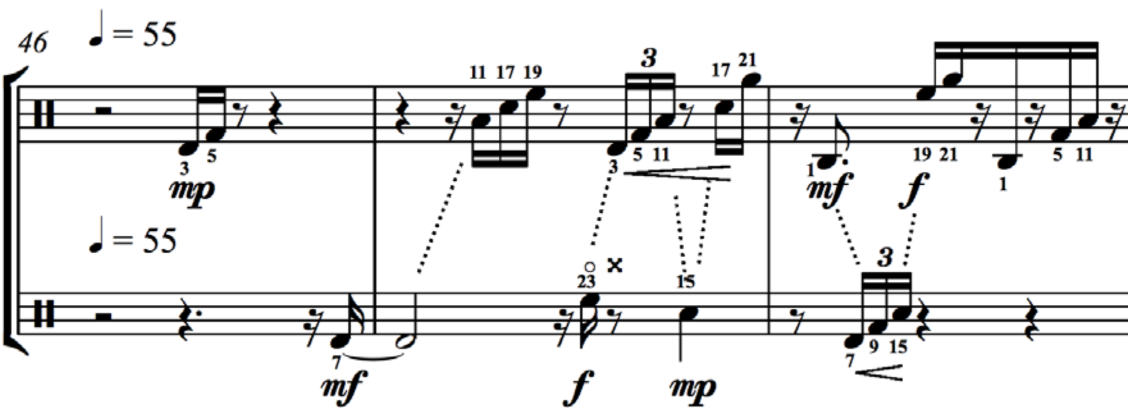
Im Folgenden möchte ich kurz auf einige Aspekte meiner Komposition „Pressure“ eingehen, welche anlässlich der Eröffnung der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik an der Carl-von-Ossietzky-Universität in Oldenburg entstanden ist.

Die Komposition ist für zwei Schlagzeuger geschrieben, wobei immer einer die Mathematik, und einer die Musik vertritt. Da in diesem Rahmen die mathematischen Aspekte der Komposition wohl am interessantesten sind, werde ich mich darauf beschränken, einen kurzen Einblick in deren Beschaffenheit zu geben.

Ich habe mich entschieden, nicht wie im Serialismus alle Dimensionen einer Stimme durch mathematische Algorithmen zu determinieren, sondern mich dabei auf die Klangabfolge zu beschränken. Diese wird aus der Folge der Primzahlen generiert, indem durch Modulo-Rechnung die Primzahlen auf eine gewünschte Menge an Zahlen, und von dort auf die entsprechende Menge an Klängen abgebildet werden. Wenn zwölf verschiedene Klänge zu verteilen sind bedeutet das konkret:

$$p \bmod 26 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\} \qquad p \in \{\text{Primzahlen}\} \setminus \{2, 13\}$$

Am Notenbeispiel sieht das dann wie folgt aus (hier die Abbildung der Primzahlen bis 89):



Hiermit knüpfe ich an die Hilbert‘sche Forderung an, dass wir statt Punkt, Gerade oder Ebene jederzeit auch Tisch, Stuhl oder Bierseidl sagen können müssen … oder halt Klänge.

Christina COLLET, Darmstadt

Welche Effekte können mit Lehrerfortbildungen zum Problemlösen im Mathematikunterricht erzielt werden?

1. Theoretischer Hintergrund

Mathematische Probleme zu lösen fällt Schülern häufig schwer. In der mathematikdidaktischen Literatur werden Problemlösekompetenzen neben anderen Kompetenzen, wie z.B. Modellieren und Argumentieren, als bedeutende prozessbezogene Kompetenzen angesehen, die es im regulären Mathematikunterricht zu fördern gilt. Zum Fördern von Problemlösefähigkeiten existiert bereits eine Vielzahl von Studien (z.B. Kilpatrick, 1985). Dagegen gibt es nur wenige Studien, die Fördermöglichkeiten für Problemlösekompetenzen im regulären Mathematikunterricht untersuchen und an einer größeren Schülerstichprobe erproben, wie z.B. die Studien zur Unterrichtsmethode IMPROVE (vgl. z.B. Mevarech & Kramarski, 1997). Forschungsdesiderate bestehen insbesondere hinsichtlich Studien, die Effekte von Lehrerfortbildungen sowohl bei Schülern als auch bei Lehrkräften untersuchen (vgl. Fishman et al., 2003). Aufbauend auf diesen Resultaten und Forschungsdesideraten wurde in unserem sechsjährigen von der DFG geförderten Projekt (vgl. Komorek et al., 2007) ein Unterrichtskonzept zum Fördern von Problemlösefähigkeiten in Verbindung mit Selbstregulation entwickelt und im Rahmen einer Feldstudie mit 49 Lehrkräften und deren Schülern im regulären Mathematikunterricht erprobt.

Das Unterrichtskonzept zum Problemlösenlernen basiert auf der Annahme, dass mangelnde geistige Beweglichkeit teilweise kompensiert werden kann durch bewusstes Erlernen heuristischer Vorgehensweisen im Mathematikunterricht, die zu vergleichbaren Ergebnissen führen wie unbewusste Denkabläufe bei ausgeprägter geistiger Beweglichkeit. Zentrale Idee des Unterrichtskonzepts zum Fördern von Problemlösekompetenzen nach Bruder (2003) ist eine Förderung geistiger Beweglichkeit der Schüler durch eine Ausbildung von Teilhandlungen des Problemlösens in Verbindung mit heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien („Wirkprinzip heuristischer Bildung“). Bruder (2003) schlägt dazu ein Phasenmodell zum Ausbilden von Problemlösefähigkeiten vor, das unterschiedliche Bewusstheitsgrade umfasst. Eine Förderung von Problemlösefähigkeiten im Mathematikunterricht nach diesem Modell kann als langfristiger Lehr- und Lernprozess angelegt werden, der vier Phasen umfasst:

Phase 1 – Gewöhnen an heuristische Vorgehensweisen: Die Schüler werden intuitiv an heuristische Vorgehensweisen gewöhnt. Die Lehrkraft verwendet in dieser Phase typische Fragestellungen zum Problemlösen, ohne jedoch die Strategie bewusst zu machen.

Phase 2 – Bewusstmachen heuristischer Vorgehensweisen: Anhand eines markanten Beispiels werden unterschiedliche Vorgehensweisen der Schüler verdeutlicht. Die Schüler lernen verschiedene heuristische Vorgehensweisen zum Lösen der Aufgaben kennen.

Phase 3 – Bewusste Übungsphase: In dieser Phase werden die kennen gelernten heuristischen Vorgehensweisen mit variierendem Schwierigkeitsgrad der Aufgaben zumindest zeitweilig bewusst geübt.

Phase 4 – Unterbewusste Nutzung heuristischer Vorgehensweisen: Ziel dieser Phase ist es, die kennen gelernten Strategien flexibel, bewusst oder unterbewusst zum Lösen von Problemen in unterschiedlichen Kontexten einzusetzen.

Dieses Unterrichtskonzept verfolgt die Ziele, dass Schüler lernen, mathematische Fragen zu stellen, dass Schüler heuristische Vorgehensweisen kennen und anwenden können und dass Schüler Anstrengungs- sowie Reflexionsfähigkeit für ihr eigenes Vorgehen entwickeln.

2. Methode

Zur Untersuchung von Effekten unterschiedlicher Lehrerfortbildungen wurde ein komplexes Fortbildungsdesign mit vier Trainingsmodulen entwickelt. Ziel war es, verschiedene Fortbildungsvarianten (PL: Problemlösen; SR: Selbstregulation; PS: Kombination; KG: Kontrollgruppe) und deren Wirkungen auf die Problemlöse- und Selbstregulationsfähigkeiten bei Schülern zu studieren. Die Projektlehrkräfte, die in der 7. und 8. Klasse unterrichteten, wurden zu Beginn des Schuljahres 2004/2005 zu ihrem jeweiligen Fortbildungsmodul fortgebildet. Sie sollten die Fortbildungsinhalte mit Materialunterstützung über das Schuljahr in ihren regulären Mathematikunterricht integrieren. Zur Analyse der Effekte auf Lehrer- und Schülerseite wurde eine Vielzahl von Instrumenten eingesetzt. Mit den Instrumenten Lehrerbefragung, Repertory Grid Befragung, Stundenberichte und Arbeitsmaterialien wurden Effekte auf der Seite der Lehrkräfte analysiert. Die Einstellungen und die Selbstregulationsfähigkeiten der Schüler wurden mit einer Prä-Post-Befragungen und deren Problemlösefähigkeiten mit Prä-Post-Follow-up-Tests erfasst. Im Fokus dieses Beitrags steht eine Förderung von Problemlösefähigkeiten im Mathematikunterricht, die mithilfe standardisierter Stundenberichte studiert wurde. Hierbei sollten die Lehrkräfte über einen Zeitraum von ca. 10 Wochen Stundenberichte über ihren Mathematikunterricht in ihrer Projektklasse führen.

3. Ergebnisse

Durch die Vielzahl der auf Lehrer- und Schülerseite eingesetzten Instrumente konnten in der Feldstudie eine Reihe von Effekten auf unterschiedlichen Ebenen aufgezeigt werden, die im Folgenden kurz skizziert werden.

Effekte der Fortbildungen auf der Ebene der Lehrkräfte

Auf der Ebene der *Meinungen und Einschätzungen* der Lehrkräfte zeigte sich, dass die Lehrkräfte die Fortbildung als gewinnbringend ansahen und sich ihre Einstellungen zu binnendifferenzierten Lernangeboten sowie zu kognitiven Anforderungen an und zum Umgang mit Hausaufgaben positiv verändert haben. Die zweite Ebene der Evaluation bezieht sich auf das *Wissen der Lehrkräfte über Konzeptinhalte*. Diesbezüglich wurde festgestellt, dass die Lehrkräfte durch die Fortbildungen Wissen über heuristische Vorgehensweisen, über Elemente zum Fördern selbstregulierten Lernens und über Aufgabenmerkmale erworben haben. Auf einer dritten Ebene wurde das *Lehrerhandeln* im regulären Mathematikunterricht studiert, das mithilfe von Stundendokumentationen und einzureichenden Lehr- und Lernmaterialien erfasst wurde. Die Befunde der Studie zeigen diesbezüglich eine Umsetzung von Konzeptinhalten im Mathematikunterricht. Auf der vierten Ebene wurden die *Schülerleistungen* analysiert. Die Ergebnisse der Studie zeigen deutliche Leistungsentwicklungen bezogen auf Problemlösen und einen vermehrten Einsatz heuristischer Vorgehensweisen durch die Schüler im Post-Test. Es zeigt sich eine signifikante Überlegenheit des reinen Problemlösetrainings bezogen auf den Einsatz heuristischer Vorgehensweisen gegenüber den Gruppen PS und SR. In einer Follow-up-Untersuchung ein Jahr nach Ende des Projektjahres konnte eine Stabilität der Problemlösefähigkeiten der Schüler nachgewiesen werden (vgl. Collet & Bruder, 2008).

Effekte der Fortbildungen auf der Ebene der Schüler und des Unterrichts

Zudem wurde in der Studie der Frage nachgegangen, welche Aspekte des Mathematikunterrichts einen Einfluss auf die Entwicklung der Problemlösefähigkeiten, insbesondere heuristische Vorgehensweisen, der Schüler haben. Die Grundlage der Datenanalyse bildeten die von 38 Lehrkräften eingereichten 1296 Stundenberichte. Mit den Stundenberichtsdaten wurden Korrelations-, multiple Regressions- und Mehrebenenanalysen durchgeführt (vgl. Collet, 2009). Die Ergebnisse einer Mehrebenenanalyse zeigen, dass Problemlösefähigkeiten im Mathematikunterricht gefördert werden können durch eine bewusste Vermittlung heuristischer Vorgehensweisen, die mit den Stundenberichten erfasst wurde,

4. Diskussion der Studie

Mithilfe der Stundendokumentationen konnte analysiert werden, dass sich die geistige Beweglichkeit der Schüler fördern lässt durch eine Vermittlung heuristischer Vorgehensweisen im Mathematikunterricht, womit das Wirkprinzip heuristischer Bildung nach Bruder (2003) erstmals empirisch belegt wurde. Des Weiteren konnten wesentliche kognitive und nichtkognitive Komponenten erfolgreichen Problemlösens identifiziert werden. Die Studie zeigt insgesamt umfangreiche Effekte auf Lehrer- und Schülerseite und bringt damit für die mathematikdidaktische Forschung neue Erkenntnisse über eine erfolgreiche Förderung von Problemlösefähigkeiten auf der Basis eines an einer größeren Lehrer- und Schülerstichprobe positiv evaluierten Unterrichtskonzepts.

Literatur

Bruder, R. (2003): Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. *Material im Rahmen des BLK-Programms „SINUS" zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"*. Kiel: IPN.

Collet, C. (2009): Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen zu Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation. In: Heinze, A. & Krummheuer, G. (Hrsg.): *Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik*, 2, Münster: Waxmann.

Collet, C. & Bruder, R. (2008): Langzeitstudie zu einer Lehrerfortbildung zum Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker, S. 87-90.

Fishman, B. J., Marx, R. W., Best, S. & Tal, R. T. (2003): Linking teacher and student learning to improve professional development in systemic reform. In: *Teaching and Teacher Education*, 19, S. 643-658.

Kilpatrick, J. (1985): A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In: Silver, E. (Hrsg.): *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum, S. 1-15.

Komorek, E., Bruder, R., Collet, C. & Schmitz, B. (2007): Contents and results of an intervention in maths lessons in secondary level I with a teaching concept to support mathematic problem-solving and self-regulative competencies. In: Prenzel, M. (Hrsg.): *Studies on the educational quality of schools. The final report on the DFG Priority Programme.* Münster: Waxmann, S. 175-196.

Mevarech, Z. R. & Kramarski, B. (1997): IMPROVE: a multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. In: *American Educational Research Journal*, 34(2), S. 365-394.

Christina DRÜKE-NOE, Universität Kassel

Ein prüfender Blick auf (kompetenzorientierte?) Klassenarbeiten

Die zur Konzeption, Durchführung, Korrektur und Besprechung von Klassenarbeiten aufgewendete Zeit, aber auch ihre Relevanz für die schulische Laufbahn der Schülerinnen und Schüler rechtfertigen, sich genauer mit dem auseinanderzusetzen, was Klassenarbeiten abprüfen. Der vorliegende Artikel untersucht diese Frage anhand des COACTIV[1]-Datensatzes und zeigt auf, welche Kompetenzprofile Klassenarbeiten aufweisen bzw. inwieweit sie als kompetenzorientiert gelten können.

1. Funktionen von Tests/ Leistungsüberprüfungen

Klassenarbeiten sind als schulinterne Tests ein wesentliches Instrument zur schriftlichen Erhebung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen und sollen, ergänzt durch schulexterne Formen der Leistungsmessung, Aufschluss über den Leistungsstand einer Klasse geben und zudem erlauben, auf breiter Basis individuelle Leistungen der Schülerinnen und Schüler zu diagnostizieren (vgl. u. a. Schrader, F.-W. & Helmke, A., 2001, Rheinberg, 2001). Klassenarbeiten dienen außerdem dazu, Fördernotwendigkeiten festzustellen, sie bilden einen wesentlichen Teil der Bewertungs- und Beratungsgrundlage der Schülerinnen und Schüler und bieten nicht zuletzt einen Impuls zur Reflexion des Unterrichts(-erfolgs).

Um für eine umfassende Diagnose geeignet zu sein, sollten einzelne Klassenarbeiten und sollte insbesondere eine Folge von Klassenarbeiten ein breites Spektrum von prozessbezogenen Kompetenzen aufweisen und unterschiedliche kognitive Niveaus angemessen berücksichtigen. Klassenarbeiten dieser Art sollen als *kompetenzorientiert* bezeichnet werden, analog zu sog. kompetenzorientierten Aufgaben (vgl. Blum, 2006).

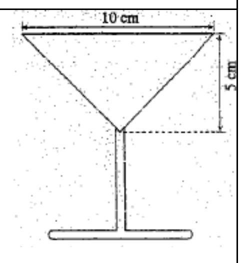
Eine noch umfassendere Leistungsbeurteilung kann gelingen, wenn solche kompetenzorientierten Klassenarbeiten durch externe Tests ergänzt werden, denen sachbezogene und kriteriale Normen zugrunde liegen, so dass Lehrkräfte in geeigneter Weise verschiedene Tests zur Einschätzung des tatsächlichen und des absoluten Leistungsniveaus ihrer Schülerinnen und Schüler kombinieren können.

---

[1] In dieser, im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms *Bildungsqualität von Schule* (BIQUA) geförderten Studie zum *Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz* (COACTIV), unter der Projektleitung von Jürgen Baumert, Werner Blum und Michael Neubrand, wurden alle gestellten Klassenarbeiten und eine Auswahl der Hausaufgaben und der Unterrichtsaufgaben (9. und 10. Schuljahr) eingesammelt und mithilfe eines in COACTIV entwickelten Schemas klassifiziert (vgl. Jordan & al., 2006).

2. Grundlagen der Analysen

Die hier vorgestellten Untersuchungsergebnisse beziehen sich auf einen Teil der Klassenarbeiten, die im Rahmen der COACTIV-Studie eingesammelt und klassifiziert wurden. Es werden die Klassenarbeiten der zehnten Klassen jener 178 Lehrkräfte betrachtet, die zu beiden Messzeitpunkten 2003 und 2004 an der COACTIV-Studie teilgenommen haben. Alle Klassenarbeiten einer Lehrkraft - meistens sind dies vier Klassenarbeiten - werden dabei zu einer sog. *Masterklassenarbeit* (kurz: MKA) zusammengefasst. Ziel ist es, auf diese Weise das im Verlauf des zehnten Schuljahres im Rahmen aller Klassenarbeitsaufgaben realisierte Kompetenzspektrum, welches sich aus den mathematischen Tätigkeiten und ihren jeweiligen Niveaus zusammensetzt, zu erfassen. Hierbei werden die vier in COACTIV erfassten mathematischen Tätigkeiten *Innermathematisches Modellieren*, *Außermathematisches Modellieren*, *Mathematisches Argumentieren* und *Gebrauch mathematischer Darstellungen* betrachtet. Die vier möglichen kognitiven Niveaus, stellvertretend am Beispiel des mathematischen Argumentierens benannt, stehen für Standardbegründungen (Niveau 1, d. h. einfaches Niveau), mehrschrittige Argumentationen (Niveau 2, mittleres Niveau) bzw. für die Entwicklung komplexer Argumentationen oder das Beurteilen von Argumenten (Niveau 3, höheres Niveau). Die Zuweisung von Niveau 0 bedeutet, dass die betreffende mathematische Tätigkeit zur Bearbeitung einer Aufgabe nicht oder in nur sehr geringem Maße erforderlich ist (vgl. Jordan & al., 2006). Nachfolgend wird eine Klassenarbeitsaufgabe im vorgestellten Sinne exemplarisch bezüglich der mathematischen Tätigkeiten und ihrer kognitiven Niveaus betrachtet.

<table>
<tr><td colspan="2">Ein kegelförmiges Sektglas hat einen oberen Durchmesser von 10 cm und eine Kegelhöhe von 5 cm. Das Glas wird so mit Flüssigkeit gefüllt, dass diese 2,5 cm hoch steht.</td></tr>
<tr><td>a) Wie viel Prozent des Glases sind gefüllt?</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>b) In das so gefüllte Glas wird eine kugelförmige Murmel mit einem Radius von 1,0 cm gelegt. Um wie viel Zentimeter nimmt dabei die Höhe des Flüssigkeitsspiegels zu?</td></tr>
<tr><td>c) Untersuche, ob die Murmel vollständig mit Flüssigkeit bedeckt ist.</td></tr>
</table>

Zur Bearbeitung der drei Teilaufgaben sind im Wesentlichen außermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau sowie der Gebrauch mathematischer Darstellungen auf einfachem Niveau erforderlich. Teilaufgabe a) erfordert zudem innermathematisches Modellieren auf einfachem Niveau. Argumentationen (mittleres Niveau) finden nur bei Teilaufgabe c) statt.

3. Ergebnisse der Analyse der Masterklassenarbeiten

Im Folgenden werden die Ergebnisse der nicht schultyp-spezifischen Analysen vorgestellt. Es wird aufgezeigt, auf welchen Niveaus die mathematischen Tätigkeiten bei der Bearbeitung der Klassenarbeitsaufgaben ausgeführt werden und wie sich die kognitiven Niveaus auf die MKA verteilen.

	Prozentualer Anteil aller MKA, die bei keiner/ einer/ zwei/ drei/ vier mathematischen Tätigkeiten das jeweilige kognitive Niveau realisieren				
	keinmal	einmal	zweimal	dreimal	viermal
Niveau 0	0%	0%	0%	1%	**99%**
Niveau 1	1%	1%	9%	**45%**	**44%**
Niveau 2	6%	**23%**	**42%**	**22%**	7%
Niveau 3	**76%**	**19%**	5%	0%	0%

Diese Tabelle zeigt die globale Tendenz, dass die überwiegende Mehrheit der MKA Aufgaben enthält, deren Bearbeitung alle oder zumindest drei verschiedene mathematische Tätigkeiten höchstens auf niedrigem kognitivem Niveau erfordern, d. h. Standardmodellierungen (außer- und innermathematisch) sowie Standardargumentationen oder -darstellungen. Nur sehr wenige MKA verlangen überhaupt bei der Bearbeitung der zugehörigen Aufgaben eine oder mehrere mathematische Tätigkeiten auf höherem kognitivem Niveau. Dieses Ergebnis wird nachfolgend niveauspezifisch mit Bezug zu einzelnen mathematischen Tätigkeiten detailliert.

Eine genauere Betrachtung von Niveau 2 zeigt, dass deutlich weniger als die Hälfte aller MKA (42%) zwei mathematische Tätigkeiten auf diesem Niveau erfordern. Zumeist treten außer- und innermathematisches Modellieren kombiniert auf und seltener außermathematisches Modellieren zusammen mit Argumentieren. Wird Niveau 2 bei drei mathematischen Tätigkeiten realisiert (22% aller MKA), bilden außer- und innermathematisches Modellieren zusammen mit Argumentieren den größten Anteil. Lediglich etwa 7% der MKA beanspruchen alle vier mathematischen Tätigkeiten auf diesem Niveau. Darüber hinaus wird in jenen MKA, in denen Niveau 2 realisiert wird, nur selten zusätzlich auch noch Niveau 3 realisiert.

Die Tendenz der Fokussierung auf wenige mathematische Tätigkeiten verstärkt sich bei einer genaueren Betrachtung jener MKA, die Niveau 3 realisieren. Besonders auffällig ist, dass dieses höhere Niveau in etwa drei Viertel der MKA (und damit immerhin über einen Zeitraum von einem Schuljahr mit einer Vielzahl von Themengebieten) nicht vorkommt, was einer anzustrebenden ausgewogenen Verteilung der mathematischen Tätigkeiten auf allen kognitiven Niveaus und damit einer intendierten Kompetenzorientierung widerspricht. Wird Niveau 3 wenigstens einmal umgesetzt (19% aller MKA), so geschieht dies vorwiegend beim innermathematischen Modellieren (59% dieser MKA), in etwa einem Drittel dieser MKA beim Argumentieren und in ca. 9% beim außermathematischen Modellieren.

4. Fazit

Zusammenfassend ist eine eher geringe Ausprägung der Kompetenzorientierung der untersuchten Klassenarbeiten festzustellen. Vorwiegend werden Aufgaben zum inner- und außermathematischen Modellieren gestellt, während solche zum Gebrauch mathematischer Darstellungen und insbesondere zum mathematischen Argumentieren nur eine untergeordnete Rolle spielen. Werden in einer MKA mehrere mathematische Tätigkeiten auf einfachem oder auf mittlerem Niveau realisiert, fehlt in der überwiegenden Mehrzahl der MKA Argumentieren. Auf höherem Niveau kommt Argumentieren nur in ca. 9% aller MKA vor, ein weiterer Beleg dafür, dass diese mathematische Tätigkeit insbesondere auf diesem kognitiven Niveau unterrepräsentiert ist. Aufgaben auf höherem kognitivem Niveau kommen generell selten vor (vgl. dazu auch Kunter, 2006 und Jordan & al., 2008). Insgesamt erscheint die Aufgabenkultur in Klassenarbeiten nur wenig ausgewogen, und das mögliche Kompetenzspektrum wird nur unzureichend abgebildet.

Literatur

Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. In W. Blum & al. (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M, Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. In R. Biehler & al. (Hrsg.), *JMD 29*, 83-107.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M., Kunter, M. (2006). Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben. Materialien aus der Bildungsforschung. Berlin: Max-Planck-Institut.

Kunter, M. & al. (2006): Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lern-Prozesse. In M. Prenzel & al. (Hrsg.), *PISA 2003: Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres* (S. 161-194). Münster: Waxmann.

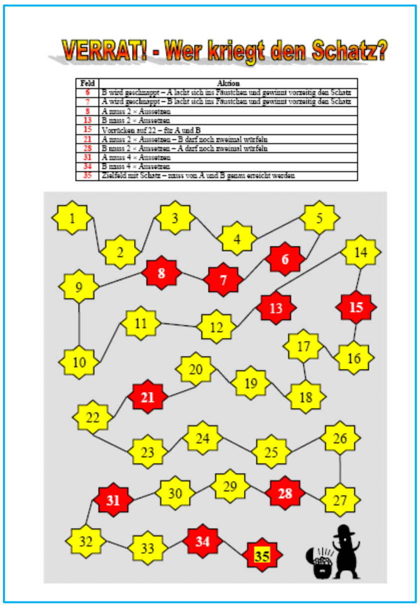
Rheinberg, F. (2001). Bezugsnormen und schulische Leistungsmessung. In Franz E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 59-71). 2. Aufl. 2002. Weinheim: Beltz.

Schrader, F.-W., Helmke, A. (2001) Alltägliche Leistungsbeurteilung durch Lehrer. Ebd. (S. 45-58).

Andreas EICHLER, Münster & Frank FÖRSTER, Braunschweig

Verrat! – Stochastische Modellbildung bei einem merkwürdigen Brettspiel

Spielend in die stochastische Modellbildung? Ein Ansatz dazu wird im Folgenden skizziert.



VERRAT! ist ein Würfelspiel für 2 Personen. Die Schülerinnen und Schüler kriegen den Auftrag, paarweise jeweils 10 Partien zu spielen. Wie bei einem Würfelspiel zu erwarten, gewinnt manchmal der eine Spieler (A), manchmal der andere (B). Fasst man aber alle Spiele einer Klasse zusammen, so zeigt sich, dass A wesentlich häufiger gewinnt als B – beispielsweise bei 20 Schülern, also 100 Spielen: 58 Siege von A, 34 Siege von B und 8 Unentschieden (d.h. A und B kommen mit der gleichen Wurfzahl ins Ziel). Dieses Ergebnis lässt sich unterschiedlich interpretieren. Glück bzw. Zufall oder ein unfaires Spiel?

Feld	Aktion
6	B wird geschnappt – A lacht sich ins Fäustchen und gewinnt vorzeitig den Schatz
7	A wird geschnappt – B lacht sich ins Fäustchen und gewinnt vorzeitig den Schatz
8	B muss 2 × Aussetzen
13	A muss 2 × Aussetzen
15	Vorrücken auf 22 – für A und B
21	A muss 2 × Aussetzen – B darf noch zweimal würfeln
28	B muss 2 × Aussetzen – A darf noch zweimal würfeln
31	A muss 4 × Aussetzen
34	B muss 4 × Aussetzen
35	Zielfeld mit Schatz – muss von A und B genau erreicht werden

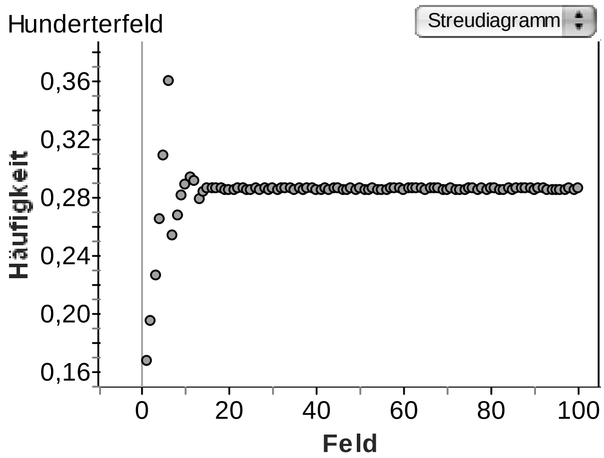
Tabelle 1: Spielregeln des Brettspiels „Verrat!“

Der zunächst einzig feststellbare Unterschied ist, dass beide Mitspieler die jeweils identischen Aktionsfelder an unterschiedlichen Stellen des Spielplans haben. Eine Simulation (1 Mio. Versuche) des Spiels zeigt dennoch:

- A gewinnt 53,0% der Spiele,
- B gewinnt 35,5% der Spiele,
- Unentschieden in 11,4% der Spiele.

Woran kann das trotz gleicher Aktionsfelder liegen? Die einzige schlüssige Antwort lautet, dass es unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten geben muss, die Aktionsfelder zu erreichen. Das wirft die Frage auf, wie groß diese Wahrscheinlichkeiten, ein bestimmtes Feld zu treffen, eigentlich sind.

Wir haben zunächst die Fragestellung vereinfacht, indem wir alle Aktionsfelder und das Zielfeld zunächst vernachlässigt haben (leeres Spielfeld). Wie groß ist die nun Wahrscheinlichkeit, das 1., 2., 3., … Feld im Verlaufe des Spiels zu treffen?



Man sieht anhand des Ergebnisses einer Simulation: Es gibt zu Beginn starke Schwankungen in den relativen Häufigkeiten. Die relative Häufigkeit für das Treffen des ersten Feldes liegt wie erwartet bei 1/6 (rund 17%). Die Häufigkeit wächst zunächst von Feld zu Feld, erreicht bei Feld 6 einen Maximalwert von rund 36% und fällt bei Feld 7 auf rund 25% drastisch ab. Das 7. Feld wird also bis auf die drei Anfangsfelder deutlich seltener getroffen. Dies steht in deutlichem Widerspruch zur Intuition der meisten Befragten, die der 7 als wahrscheinlichster Zahl bei zweimaligem Würfeln auch eine hohe Treffer-Wahrscheinlichkeit zusprechen. Ab Feld 7 erfolgt ein erneutes Anwachsen. Einen Einbruch in den Häufigkeiten gibt es auch zwischen Feld 12 und 13, wenn dieser auch geringer ist als zwischen Feld 6 und 7.

Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich für die ersten Felder auch berechnen:

- $P(1) = \mathbf{1}/6$
- $P(2) = \mathbf{1}/6 + \mathbf{1}/6^2$
- $P(3) = \mathbf{1}/6 + \mathbf{2}/6^2 + \mathbf{1}/6^3$
- $P(4) = \mathbf{1}/6 + \mathbf{3}/6^2 + \mathbf{3}/6^3 + \mathbf{1}/6^4$
- $P(5) = \mathbf{1}/6 + \mathbf{4}/6^2 + \mathbf{6}/6^3 + \mathbf{4}/6^4 + \mathbf{1}/6^5$
- $P(6) = \mathbf{1}/6 + \mathbf{5}/6^2 + \mathbf{10}/6^3 + \mathbf{10}/6^4 + \mathbf{5}/6^5 + \mathbf{1}/6^6$

Das Erreichen des 1. Feldes ist allein mit einer 1 im ersten Wurf möglich, das Erreichen des 2. Feldes mit einer 2 im ersten Wurf oder jeweils einer 1 in den ersten beiden Würfen, das Erreichen des 3. Feldes mit den Wurffolgen (3), (1,2), (2,1), (1,1,1). Das bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Feld zu erreichen, additiv zusammensetzt aus verschiedenen Wahrscheinlichkeiten, das Feld in einer *festen* Wurfzahl zu erreichen. Dadurch lässt sich auch der „Einbruch“ der Wahrscheinlichkeiten nach dem 6. Feld erklären. Hier fällt in der Summe der Wahrscheinlichkeiten ein Summand weg. So ist es möglich, das 6. Feld mit 1 bis 6 Würfen zu erreichen, für das 7. Feld benötigt man dagegen mindestens zwei Würfe. Das Phänomen, dass sich die Mindestwurfanzahl erhöht, wiederholt sich alle sechs Felder. Bei den ersten dieser Übergänge, wie von Feld 6 auf Feld 7, sind diese Sprünge deutlich, dagegen später kaum noch sichtbar.

In den Formeln scheint zunächst die folgende einfache Struktur sichtbar zu werden: Die Wahrscheinlichkeit, das Feld m zu erreichen, ist für die Felder 1 bis 6 (wenn man die Summanden geeignet zusammenfasst),

$$\frac{1}{6}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\cdot\frac{1}{6^i} \qquad \left[=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)^{m-1}\right].$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Feld 7 zu erreichen ist

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7-1}\binom{7-1}{i}\cdot\frac{1}{6^i}=\frac{1}{6}\sum_{i=0}^{7-1}\binom{7-1}{i}\cdot\frac{1}{6^i}-\frac{1}{6}.$$

Die Möglichkeit einer expliziten, direkten Berechnung der Wahrscheinlichkeiten scheint in den Bereich des Möglichen gerückt zu sein. Die naheliegende Vermutung, dass beim Übergang vom 12. auf das 13. Feld allein der zweite Summand der obigen Summe wegfällt, erweist sich aber als falsch. Die Struktur ist (leider) deutlich komplexer, wie bereits die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, das 8. Feld zu treffen, zeigt. Die (falsche) Vermutung für die Wahrscheinlichkeit, das Feld 8 zu erreichen wäre:

$$\cancel{1\cdot\frac{1}{6^1}}+7\cdot\frac{1}{6^2}+21\cdot\frac{1}{6^3}+35\cdot\frac{1}{6^4}+35\cdot\frac{1}{6^5}+21\cdot\frac{1}{6^6}+7\cdot\frac{1}{6^7}+1\cdot\frac{1}{6^8}.$$

Tatsächlich setzt diese Formel aber einen „7-seitigen Würfel“ voraus, da hier sieben Möglichkeiten, mit zwei Würfen eine 8 zu erhalten, berücksichtigt werden: (1,7), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (7,1). Die beiden Möglichkeiten (1,7) und (7,1), jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/6, müssen daher gestrichen werden (vgl. folgende Formel). Mit dem normalen Würfel hat die korrekte Berechnungsformel für Feld 8 daher folgende Gestalt:

$$\cancel{1\cdot\frac{1}{6^1}}+\underbrace{\cancel{2\cdot\frac{1}{6^2}}+5\cdot\frac{1}{6^2}}+21\cdot\frac{1}{6^3}+35\cdot\frac{1}{6^4}+35\cdot\frac{1}{6^5}+21\cdot\frac{1}{6^6}+7\cdot\frac{1}{6^7}+1\cdot\frac{1}{6^8}$$

Die naheliegende Idee, alle diese „Korrekturterme“ ebenfalls in Form einer Summe zusammenzufassen, führt zu einer expliziten Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für die Felder 1 bis 12. Ab dem 13. Feld werden aber „Korrekturen für die Korrekturterme“ nötig, da auch diese Korrekturterme von (n – 1)-seitigen Würfeln ausgehen. Kurz gesagt: Alle 6 Felder kommt ein weiterer Korrekturterm (in Form einer Summe) hinzu.

Da die explizite Darstellung dieser Summe von Summen zwar möglich, aber komplex ist (für Schüler zu komplex) und die damit mögliche Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, ein bestimmtes Feld zu treffen, nur von einem Computer-Algebra-System zu leisten ist, haben wir nach alternativen Formen gesucht, diese Wahrscheinlichkeiten exakt zu berechnen. Hierbei haben wir sowohl das Hunderterfeld als auch komplexere Brettspiele mit Hilfe rekursiver (Excel) und iterativer (Markov-Ketten) Berechnungen analysiert (zu den Ergebnissen vgl. Eichler/Förster, 2008).

Diese Ergebnisse dieser Analyse haben wir genutzt um unser unfaires Spiel „Verrat!" zu konstruieren: Ein wesentlicher Unterschied ergibt sich bereits durch die Platzierung des Ausscheidenfeldes auf Feld 6 bzw. Feld 7.

Durch das unterschiedliche Feld für das Ausscheiden, haben sich aber auch die Trefferwahrscheinlichkeiten für die folgenden Felder verändert – und zwar unterschiedlich für Spieler A und B. Wir sind prinzipiell so vorgegangen, dass wir „positive" Aktionsfelder für A auf Felder mit einer relativ hohen und für B mit einer relativ geringen Trefferwahrscheinlichkeit gelegt haben. Insgesamt ergaben sich somit die folgenden simulierten Trefferwahrscheinlichkeiten (Die Angaben in Klammern sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten, das Feld zu treffen, wenn die Figur zuvor nicht ausgeschieden ist.):

Aktion	**Feld für A**	**Treffer-WK (%)**	**Feld für B**	**Treffer-WK (%)**
Spielende	7	25,4	6	36,0
2 × Aussetzen	13	18,7 (25,1)	8	19,4 (30,3)
7 Felder vor	15 (auf 22)	21,8 (29,2)	15 (auf 22)	18,4 (28,8)
2 × Aussetzen	21	13,5 (18,1)	28	19,7 (30,8)
Noch 2 × Würfeln	28	23,1 (31,0)	21	11,7 (18,3)
4 × Aussetzen	31	21,6 (29,0)	34	33,5 (52,3)

Tabelle 2: Trefferwahrscheinlichkeiten beim Brettspiel „Verrat!"

Die Werte der Simulation konnten auch theoretisch bestätigt werden. Das Spiel ist zwar nicht optimiert, d.h. es ließen sich noch „heimtückischere" Varianten erstellen. Allerdings haben wir auch Wert darauf gelegt, dass die Ungleichheit nicht allzu deutlich in den Regeln abzulesen ist.

Weitere, über diese Eingangsskizze hinausgehende Ergebnisse der stochastischen Modellbildung zur Analyse von Brettspielen, sind in der nachfolgend genannten Literatur enthalten.

Literatur

Eichler, A., Förster, F. (2008): „Ein Märchenspiel" - Stochastische Modellbildungen bei einem „merkwürdigen" Brettspiel. In: Eichler, A./Förster, F. (Hrsg.) (2008): ISTRON - Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht - Band 12: Die Kompetenz Modellieren: Konkret oder kürzer. Hildesheim: Franzbecker, S. 107-139

Petr EISENMANN, Ústí n. L. (Tschechische Republik)

Ein Beitrag zur Entwicklung funktionalen Denkens der Studenten

Der Goldberg (Zlatý vrch, 657 m) bei Böhmisch-Kamnitz in Nordböhmen ist eine auffällige Bergkuppe und traditionelles Ziel bei Streifzügen im Lausitzer Gebirge. Wahrscheinlich um 1870 wurde an seinem südöstlichen Abhang ein Steinbruch angelegt. Die in ihm aufgeschlossenen Basaltsäulen waren gut entwickelt und nur wenig zersprungen, so dass man hier bis zu 6 m lange Stücke brechen konnte. Wegen der großen Beständigkeit des Basaltes gegen Meerwasser sollen sie nach Holland zum Bau von Pieren ausgeführt worden sein. Endgültig wurde das Brechen der Säulen im Jahre 1973 eingestellt, als der Abbau so weit fortgeschritten war, dass eine einheitliche Steinbruchwand mit bis zu 30 m langen, vollkommen entwickelten Basaltsäulen erreicht war. Heute ist der Steinbruch schon aufgelassen, der Goldberg steht unter Naturschutz und seit 2002 führt an ihm der Naturlehrpfad " Rund um den Kaltenberg " (Okolím Studence) vorbei.

Der Mathematiker kann sich beim Anblick der Form der Basaltsäulen (s. Abb. 1) vorstellen: „Hier steht vor mir eine Funktionsschar.“ In diesem Beitrag wird versucht, diese Funktionen durch eine Vorschrift zu beschreiben. Wir werden dabei nur die Elementarkenntnise aus der Differentialrechnung der Funktionen einer Veränderlichen voraussetzen (s. z. B. Jahnke & Wuttke, 2002).

Die einfachste Variante ist, eine ganze rationale Funktion, also eine Polynomfunktion, zu benützen. Hinsichtlich der Form der Basaltsäulen kann hier ein Polynom dritten Grades genügen, also

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ .$$

Plazieren wir die Wendestelle der Funktion y in den Nullpunkt. Daraus folgt

$$y(0) = 0 \ , \ \text{also} \ d = 0 \ .$$

Die Funktion y muss offensichtlich streng monoton steigend sein. Ihre Ableitung

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

muss also positiv sein. Das können wir einfach folgenderweise erzielen:

$$b = 0 \ , \ a > 0 \ , \ c > 0 \ .$$

Abb. 1

Diesen Bedingungen entspricht auch die nächste Forderung: Der Graph von der Funktion *y* muss über dem Intervall (-∞,0) rechtsgekrümmt und über dem Intervall (0,∞) linksgekrümmt sein. Es muss also gelten

$$y'' = 6ax < 0 \quad \text{für alle } x < 0$$

$$y'' = 6ax > 0 \quad \text{für alle } x > 0 \;.$$

Aus Abb. 1 ist ersichtlich, dass die Tangente an den Graphen von *y* im Nullpunkt mit der positiven Richtung der *x*-Achse den Winkel ungefähr 70° einschließen sollte. Es soll annähernd gelten

$$y'(0) = tg\,70° \;.$$

Daraus folgt $c = 3$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also bisher:

$$y = ax^3 + 3x \ .$$

Zur Bestimmung von a benutzten wir im Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe das Programm Mathematica. So bestimmten wir $a = 0{,}05$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also:

$$y = 0{,}05x^3 + 3x \ .$$

Als abschließenden Schritt müssen wir jetzt aus dieser Funktion eine Funktionsschar konstruieren, die der Abb. 1 entspricht. Die Ableitung der Funktion y (also auch die Steigung der Tangente an den Graphen von dieser Funktion) ist für alle $x \in R$ größer als 1. Den Scharparameter müssen wir also in das Argument einlegen. Die Funktionsgleichungen haben also die Form

$$y = 0{,}05(x+n)^3 + 3(x+n)$$

mit dem Scharparameter $n = 0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots$. Abb. 2 zeigt einige Graphen dieser Funktionsschar.

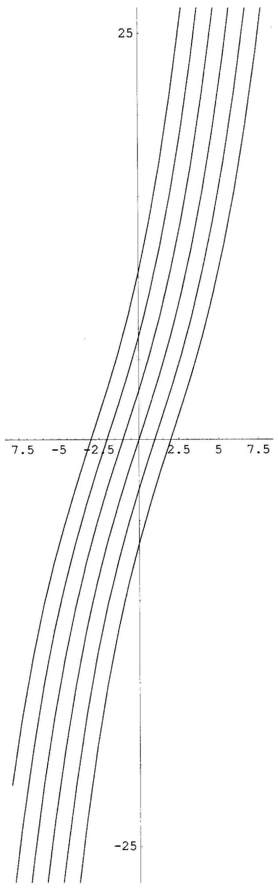


Abb. 2

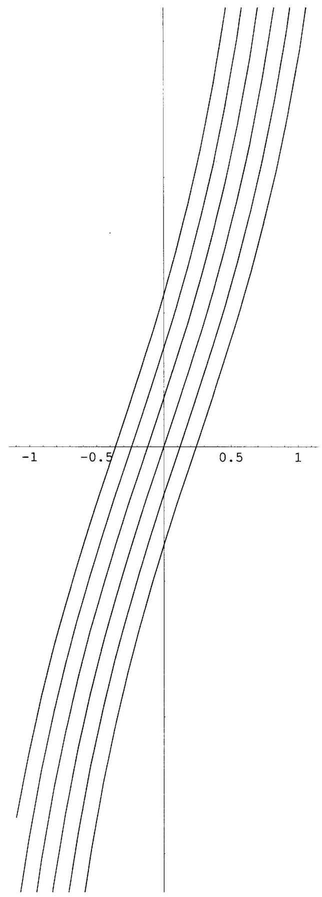


Abb. 3

Eine weitere Variante die Funktionsschar zu wählen, schlugen die Schüler selbst im Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe vor. Sie riefen sich am Ende der vorigen Phase die Tangensfunktion ins Gedächtnis zurück. Diese Funktion erfüllt ohne weitere Modifikationen alle Bedingungen für die gesuchte Abhängigkeit. Die einzig notwendige Korrektur war hier die Änderung der ersten Ableitung im Nullpunkt. Die vorgeschlagenen Funktionsgleichungen haben also die Form

$$y = 3tg(x + n)$$

mit dem Scharparameter n = 0, 0,1, – 0,1, 0,2, – 0,2, 0,3, … . Abb. 3 zeigt einige Graphen dieser Funktionsschar.

Literatur

Jahnke, Th., Wuttke, H. (2002). *Mathematik. Analysis.* Berlin: Cornelsen.

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Düsseldorf

Das methodische Dreieck: Medien-Methoden-Kompetenzen

Lernen wird heutzutage als ein individueller und kooperativer Konstruktionsprozess verstanden, in dem (Vor-)Wissen und Instruktion eine bedeutende Rolle spielen. Lehrer haben dabei die Aufgabe, Lerngelegenheiten für Schüler zu schaffen. Der Lernprozess wird R. Cohn folgend im Spannungsfeld des ‚didaktischen Dreiecks' Schüler-Lehrer-Thema gesehen. Die Inhalts-Sicht steht dabei im Vordergrund.

In der Folge von PISA und Bildungsstandards sind Kompetenzen stärker in den Fokus gerückt. Sie müssen auf geeignete Weise mit geeigneten Werkzeugen erworben werden; Kompetenzen, Medien und Methoden sind nicht isoliert zu sehen, sondern miteinander verwoben. Dies führte uns dazu, ein kompetenzorientiertes methodisches Dreieck zu postulieren (Elschenbroich/ Heintz).

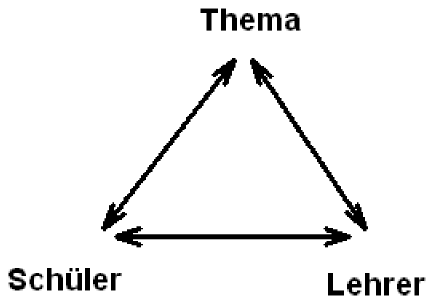


Abb. 1: Didaktisches Dreieck

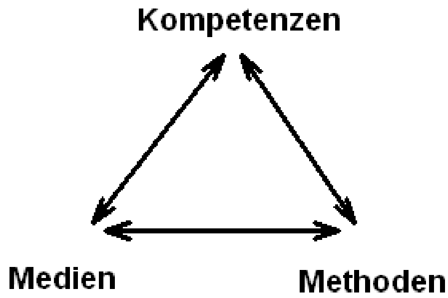


Abb. 2: Methodisches Dreieck

Medien

Mit Medien sind natürlich nicht nur sogenannte ‚neue' Medien gemeint, sie stehen aber in diesem Beitrag im Vordergrund. Technisch sind sie nicht mehr neu, aber es gibt noch keine Normalität ihres Einsatzes in der Schule. Sie bieten in verstärktem Maße die Auswahl des eigenen Lernwegs, Flexibilisierung der Lernzeit und Individualisierung des Lerntempos und sind durch rechnergestützte Handhabung, Digitalität der Daten und Interaktivität im Umgang mit diesen Daten gekennzeichnet.

Das Spektrum reicht von der mathematischen Lernsoftware (vom Internet-Applet bis zur digitalen Lernumgebung) über mathematische Werkzeuge (z. B. Dynamische Geometrie, Tabellenkalkulation, Computeralgebra) bis zu fachübergreifenden Werkzeuge (z. B. Textverarbeitung, Mindmap-Programme, Präsentationsprogramme, Internet-Browser, Lernplattform, Forum …).

Methoden

Eine Methode kann als ein Weg zum Erreichen der angestrebten Kompetenzen verstanden werden. Eine sichere Beherrschung von Methoden, von geeigneten Medien unterstützt, ist für einen erfolgreichen Lernprozess wichtig. Als besonders wirksam haben sich Methoden kooperativen Lernens erwiesen. Das ‚*Ich-Du-Wir* Prinzip' vollzieht sich in einem Dreischritt *Selber Denken - Austauschen - Vorstellen* und unterscheidet sich durch die wichtige Ich-Phase deutlich von der üblichen Gruppenarbeit, in der häufig ein Meinungsführer die anderen Gruppenmitglieder dominiert.

Kompetenzen

Mathematische Kompetenz ist „die Fähigkeit, mathematisches Denken zu entwickeln und anzuwenden, um Probleme in Alltagssituationen zu lösen" und wird in inhaltsbezogene und allgemeine, prozessbezogene Kompetenzen untergliedert. Unter *Lernkompetenz* versteht man „die Fähigkeit, einen Lernprozess zu beginnen und weiterzuführen und sein eigenes Lernen, auch durch effizientes Zeit- und Informationsmanagement, sowohl alleine als auch in der Gruppe, zu organisieren." (*Amtsblatt der Europäischen Union)*

Folgende Lernkompetenzen tauchen in allen Fächern immer wieder auf:

- Strukturieren (von der Tafel über die Kartenabfrage bis zur digitalen Mindmap)
- Recherchieren (vom Schulbuch über die Bibliothek bis zum Internet)
- Kooperieren (vom Lernplakat in Präsenzphasen bis zur Lernplattform im Netz)
- Produzieren (vom Heft über Office-Anwendungen bis zur Video- oder Audiodatei)
- Präsentieren (von der OHP-Folie bis zur multimedialen Präsentation)

(*Medienberatung NRW*)

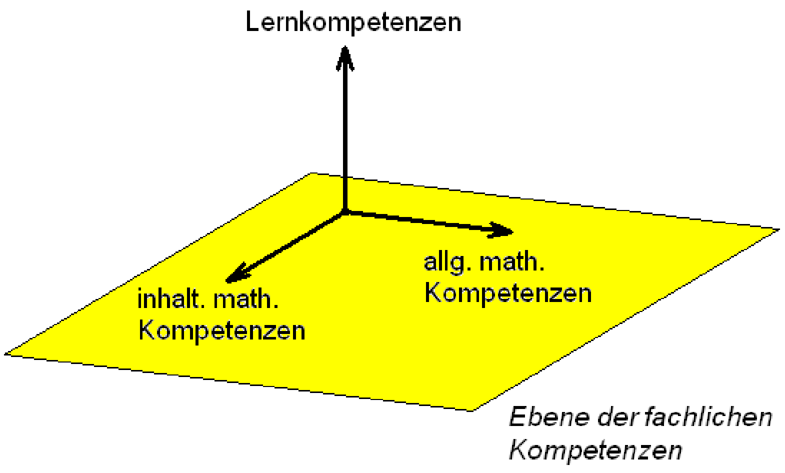


Abb. 3 Mathematische Kompetenzen und Lernkompetenzen

Diese Lernkompetenzen entstehen durch eine souveräne, eigenständige Beherrschung von geeigneten Methoden (mit geeigneten Werkzeugen, klassischen wie neuen) und sie sind immer mit Inhalten verbunden!
Ich sehe diese Lernkompetenzen in einem Kompetenzschema als eigene Dimension (vgl. Abb. 3), auch wenn sie nicht immer trennscharf zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind. Auf diese Weise wird es nämlich möglich, sie Fächer übergreifend zu verstehen und konzeptionell zur Aufgabe zu machen.

Konzeptentwicklung

Eine erfolgreiche Schulentwicklung erfordert konzeptionelles Arbeiten sowohl auf der Ebene der Schule wie auf Ebene der Schulträger.

In einem Softwarekonzept geht es um eine verbindliche Festlegung der digitalen Werkzeuge (z. B. DGS, Tabellenkalkulation, Funktionenplotter, CAS). Beim Medienkonzept müssen über das eigene Fach hinaus Festlegungen bzgl. Software und Lernkompetenzen und deren verlässlicher Behandlung mit Fach und Zeitpunkt getroffen werden. Im Lernmittelkonzept fassen die Fachkonferenzen Beschlüsse zum fachlichen Einsatz von Medien und zu Lernmittel-Sets.

Die Schulträger erstellen auf Grundlage der Medienkonzepte der Schulen einen kommunalen Medienentwicklungsplan. Dazu gehören pädagogische, bauliche, technische Komponenten. Es geht darum, den IT Support zu definieren und zu sichern, die IT-Ausstattung nicht nur technisch, sondern pädagogisch zu sehen und ein Gesamtkonzept vom Schulbuch bis zur vernetzten Schule zu entwickeln.

Ein modernes Arbeiten mit digitalen Medien stellt Anforderungen an die Ausstattung der Schulen (die noch lange nicht überall erfüllt sind):

- Jede(r) muss eine eigene Benutzerkennung besitzen
- Jede(r) muss über einen eigenen Datenbereich verfügen
- Jede(r) muss Zugriff auf Kommunikationsdienste haben
- Für alle muss die durchgängige Zugänglichkeit und Verfügbarkeit der Daten zu jeder Zeit an jedem Lernort gewährleistet sein. *(Keil 2006*).

Schulministerien und Schulbuchverlage stehen ebenfalls vor großen Aufgaben, um passende Inhalte anzubieten und auffindbar zu machen. Von der *Such*maschine (‚googeln' mit Tausenden von Resultaten) müssen wir zu einer pädagogischen *Finde*maschine kommen, die ein gezieltes und erfolgreiches Suchen von Unterrichtsmaterialien bietet. Die gefundenen Materialien müssen dann ohne starke Bindung an Programme und Plattformen einsetzbar sein.

Für das erfolgreiche Finden braucht es geeignete Metadaten und ein passendes Suchen in einer entsprechenden Datenbank. Die Lösung bzgl. der flexiblen Einsetzbarkeit besteht in einer Standardisierung (z.B. gemäß SCORM). All dies ist ein Arbeitsfeld der Medienberatung NRW zusammen mit Schulbuchverlagen, IT-Dienstleistern, den Kommunen, dem Schulministerium NRW und anderen Bundesländern.

Resümee

In der Interaktion Lehrer-Schüler spielt nicht nur das Thema/ der Inhalt eine wichtige Rolle. Die Bedeutung von Medien und Methoden wird aber oft unterschätzt oder ignoriert. Doch auch ein Methoden-Zentrismus sowie eine Technik-Fixierung verhindern ihrerseits ein fruchtbares Miteinander. Die Methoden sind der Weg und moderne Medien die Werkzeuge, um Kompetenzen zu entwickeln.

Das Zusammenspiel von Inhalten und Kompetenzen, von didaktischem und methodischem Dreieck kann in einem Prisma bildlich visualisiert werden.

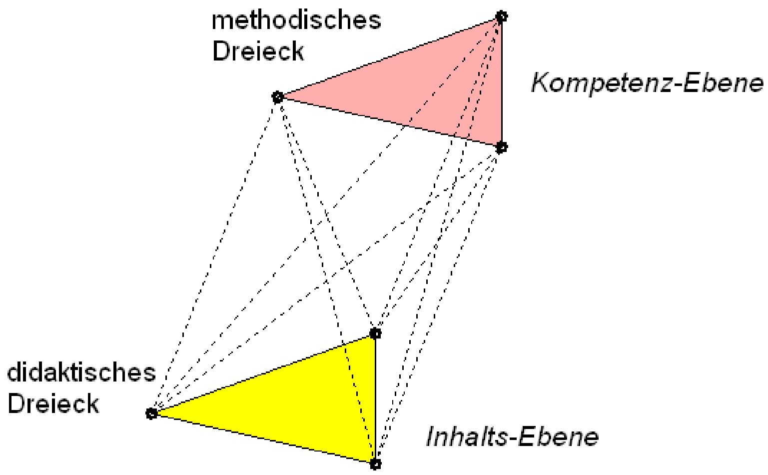


Abb. 4: Prisma des Lernens

Literatur

Barzel, B./ Büchter, A./ Leuders, T. (2007): Mathematik-Methodik. Cornelsen Scriptor

Elschenbroich, H.-J./ Heintz, G. (2008): Medien-Methoden-Kompetenzen. Der Mathematikunterricht 6/2008. Friedrich Verlag

Elschenbroich, H.-J. (2007): Lernmittelkonzept Mathematik. Medienberatung NRW.

Empfehlung des Europäischen Parlaments und Rates vom 18. Dezember 2006 zu Schlüsselkompetenzen für lebensbegleitendes Lernen. Amtsblatt der Europäischen Union, 30.12.2006, L 394/10f

Keil, R. (2006): Zur Rolle interaktiver Medien in der Bildung.

Giering, B./ Paschenda, K./ Schmidt, J./ Westhoff, J. (2008): Lern-IT NRW. Medienberatung NRW.

Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Komplexe Zahlen: Vermittler zwischen Algebra und ebener Geometrie in der Lehrerausbildung

Sollen angehende Mathematiklehrer sich in ihrer Ausbildung mit komplexen Zahlen befassen? Können komplexe Zahlen irgendeine Relevanz für die Schulmathematik beanspruchen? In der Sekundarstufe I tauchen sie nirgends auf, und in der gymnasialen Oberstufe können sie gegen die Dominanz von Analysis, analytischer Geometrie und Stochastik trotz des empfehlenswerten Schulbuchs von Cornelia Niederdrenk-Felgner (2004) nicht bestehen. Funktionentheorie bzw. komplexe Analysis als fester Bestandteil im Studium angehender Diplom-Mathematiker oder Master sind sehr anspruchsvoll. Lediglich Ingenieursstudenten lernen schon frühzeitig in ihrem Studium komplexe Zahlen als nützliches Darstellungsmittel kennen und lernen damit zu rechnen. Die Ausbildung von angehenden Lehrern legt hingegen weniger Wert auf das Einüben von Rechenroutinen als vielmehr auf die Begegnung mit Mathematik als Prozess. Da mag entschiedenes Plädoyer für komplexe Zahlen in der Ausbildung von Lehrern der Sekundarstufen 1 und 2 überraschen.

1. Mathematik als kumulative Wissenschaft

Mathematik ist eine höchst kumulative Wissenschaft, deren Erkenntnisse stark aufeinander aufbauen und zueinander bezogen sind. Mathematisches Denken ist Denken in Zusammenhängen. Das Herstellen von Querbezügen zu schon Gelerntem ist wesentlich, um neues mathematisches Wissen aufzubauen. Wenn Lernende die Verbindungen und den Zusammenhang einzelner Teilgebiete erfahren, lernen sie nicht nur besser Mathematik, sondern sie erfahren zugleich die Nützlichkeit mathematischer Ideen. Basierend auf komplexen Zahlen können in besonderer und zugleich recht elementarer Weise vielfältige Vernetzungen zwischen den beiden ältesten Teilgebieten der Mathematik hergestellt werden: Geometrie und Algebra.

Aufbauend auf komplexen Zahlen lassen sich wichtige Zusammenhänge zwischen Geometrie, Algebra und Zahlentheorie herstellen sowie anwendungsbezogene Probleme aus Physik (z.B. Schwingungsvorgänge, Beschreibung von Bahnkurven) und Technik (z.B. Strömungslehre) elegant beschreiben. Viele klassische Probleme der Mathematik, die z.T. schon seit der Antike formuliert waren, konnten mit Hilfe komplexer Zahlen und komplexer Funktionen im 18. und 19. Jahrhundert auf elegante Weise gelöst werden. Das erste Auftreten komplexer Zahlen geht zwar bis in die Renaissance zurück, wo man vorsichtig mit komplexen Zahlen rechnete, ohne sie wirklich anzuerkennen. Auch die allgemeine Suche nach Lösungen quadratischer oder kubischer Gleichungen zu Zeiten Cardanos konnte den komplexen Zahlen keine allgemeine Anerkennung verschaffen. Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts gelang keine exakte Begründung der Theorie der imaginären Zahlen. Jedoch die immer erfolgreicher werdenden Arbeiten mit diesen Zahlen, ihre gute Verwendbarkeit, die mögliche Darstellung in der Ebene und schließlich die Gültigkeit des Fundamentalsatzes, den man mit ihnen beweisen konnte, verhalfen zum Durchbruch. Erst allmählich wurde man im 18. Jahrhundert bereit, komplexen Zahlen – wie übrigens auch der Null und den negativen Zahlen – ein „Bürgerrecht" in der Mathematik einzuräumen (Führer, 2001).

2. Komplexe Zahlen und Algebra

Die Entwicklung der komplexen Zahlen ist aufs Engste verknüpft mit der Entwicklung der Theorie zur Auflösung von algebraischen Gleichungen. Fragen der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen haben historisch in der Entwicklung der Algebra eine zentrale Rolle gespielt. Dazu gehören sowohl die Lösungsformeln von Cardano und Ferrari für Gleichungen 3. und 4. Grades sowie die Resultate von Abel und Galois über die Nichtauflösbarkeit algebraischer Gleichungen höheren Grades. Der Fundamentalsatz der Algebra weist die komplexen Zahlen schließlich als algebraisch abgeschlossenen Körper aus. Eine Beschäftigung mit komplexen Zahlen und Abbildungen der komplexen Zahlenebene ist auch für angehende Lehrerinnen und Lehrer bedeutsam: Über den Tellerrand der bisherigen Zahlbereiche hinauszuschauen hilft, ein tieferes Verständnis der bisher vertrauten Zahlen zu erwerben und die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen zu verstehen. Jenseits der reellen Zahlen besitzen plötzlich auch Gleichungen der Form $x^2+1 = 0$ Lösungen. Bei der Suche nach Lösungen von Gleichungen 2., 3. oder 4. Grades finden altbekannte Rechenmethoden wie das quadratische Ergänzen oder Koeffizientenvergleiche neue Anwendung. Über die Euler-Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ verlieren jetzt viele transzendente Funktionen wie die Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen etc. die Begrenztheit ihres Definitionsbereiches und sind für alle Werte der Gaußschen Zahlenebene definiert.

3. Komplexe Zahlen und Geometrie

Komplexe Zahlen erweisen sich als hervorragend geeignete Darstellungsmittel zur Algebraisierung von Fragen der ebenen Geometrie. Im Gegensatz zur Vektorgeometrie beschränkt sich ein auf komplexen Zahlen basierter Zugang zur Geometrie nicht nur auf lineare geometrische Objekte, sondern öffnet uns die mathematische wie ästhetische Vielfalt gekrümmter Objekte wie z.B. Ellipsen, Hyperbeln, Spiralen und vieles andere mehr. Auch ein kleiner Ausflug in die Welt der Fraktale ist mit Hilfe komplexer Zahlen möglich.

Erst Anfang des 19. Jahrhunderts wurden die Zweifel eines Cardano, Descartes, Leibniz oder Newton, ob die komplexen Zahlen wirklich existierten, endgültig beiseite geschoben. Sie funktionierten nicht nur gut, man erkannte dass man sie auch als geometrische „Größen"“ veranschaulichen kann, nämlich sowohl als Vektoren in der Ebene wie auch als Drehstreckungen.

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl *a* bewirkt eine Drehstreckung in der komplexen Ebene, und jede ganze lineare Funktion der komplexen Ebene $w = az + b = a(z - z_0) + z_0$ kann als Drehstreckung mit Streckfaktor *r*, Drehwinkel φ und Zentrum z_0 angesehen werden, wobei $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, siehe Abbildung 1. Diese Feststellung liefert einen direkten Zugang zur Abbildungs- und Ähnlichkeitsgeometrie.

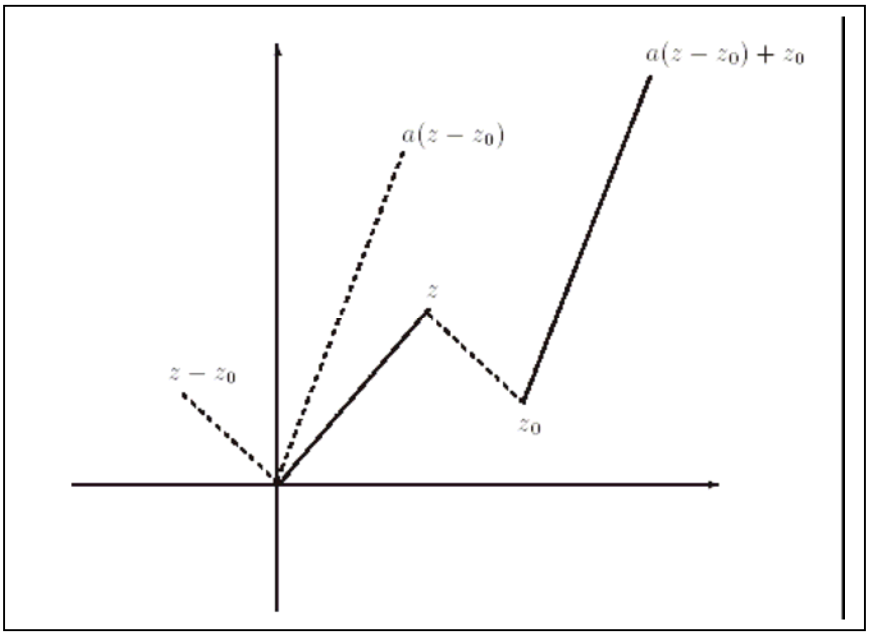


Abb. 1: *Ganze lineare Funktion in der Gaußschen Ebene kann als Drehstreckung gedeutet werden.*

Aus den reichhaltigen Möglichkeiten, Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene mit Hilfe komplexer Zahlen darzustellen, mögen folgende Beispiele hier exemplarische Erwähnung finden:

- Man betrachte die Ortlinie der Menge aller Punkte, deren Summe / Differenz / Quotient / Produkt zu zwei gegebenen Punkten, z.B. +1 und –1, festen Abstand *d* haben:

- Summenkonstanz $|z-1| + |z+1| = d$ *Ellipse*
- Differenzenkonstanz: $|z-1| - |z+1| = d$ *Hyperbel*
- Quotientenkonstanz: $|z-1| / |z+1| = d$ *Apollonius-Kreis*
- Produktkonstanz $|z-1| \cdot |z+1| = d$ *Cassinische Kurven*

– Spiralen haben die Menschen schon immer fasziniert. Sie sind außerordentlich beeindruckende und ästhetisch attraktive Gebilde, für die sich die Menschheit zu allen Zeiten interessiert hat. Als parametrisierte Kurven in der Gaußschen Ebene lassen sich Spiralen einfach ausdrücken mittels der Gleichung $z(t)=f(t)e^{it}$, wobei die Funktion f den Typus der Spirale näher charakterisiert:

- $f(t) = at$ *Archimedische Spirale*
- $f(t) = e^{at}$ *logarithmische Spirale* (Spiralis mirabislis)
- $f(t) = a/t$ *hyperbolische Spirale*

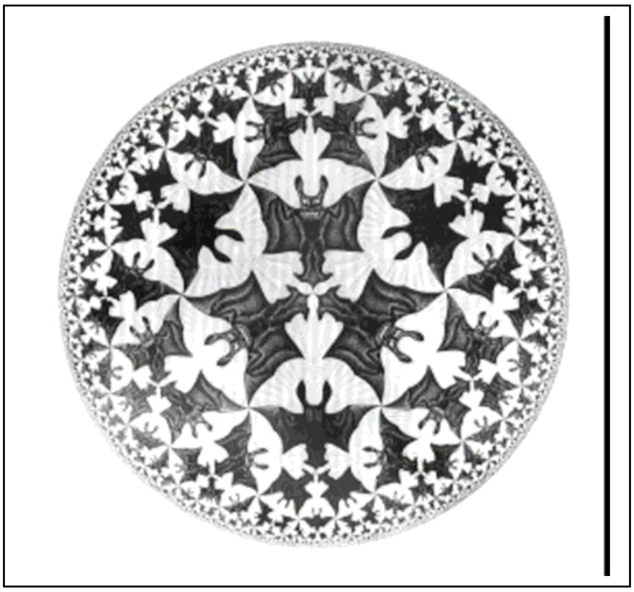


Abb. 2: „Engel und Teufel“ von M.C. Escher

– Inversionen oder Spiegelungen am Kreis sind ästhetisch sehr reizvoll, und bilden z.B. die Grundlagen für Kreisfraktale, wie sie bei Bildern des niederländischen Künstlers M.C. Escher (Abbildung 2) zu sehen sind. Geometrisch über Konstruktionen am Thaleskreis lassen sich Spiegelungen am Kreis mit Hilfe komplexer Zahlen wie folgt ausdrücken:

$$z=|z|e^{i\varphi} \rightarrow z' = 1/|z|\, e^{i\varphi}$$

Literatur:

Engel, J. (2009). *Komplexe Zahlen und ebene Geometrie*. Oldenbourg: München.

Führer, L. (2001). Kubische Gleichungen und die widerwillige Entdeckung der komplexen Zahlen. *Praxis der Mathematik 43*(2), 57-67.

Niederdrenk-Felgner, C. (2004). *Komplexe Zahlen*. Klett: Stuttgart.

Martin EPKENHANS, Münster

Computeralgebra- ein Werkzeug aus der Mathematik für die Mathematik- Entwicklung einer Leitidee für den Unterricht

1. Einleitung

Computeralgebrasysteme haben Einzug in Schulbücher, Lehrpläne und zentrale Prüfungen gefunden. In Anbetracht dieser Entwicklung gehört es zu den selbstverständlichen Aufgaben der Didaktik, diese unterrichtlichen Veränderung zu begleiten und Lehrkräften didaktische Konzepte zur Integration von Computeralgebrasystemen in den Unterricht an die Hand zu geben. Dabei muss aus Sicht der Mathematik beachtet werden, dass es sich bei Computeralgebrasystemen nicht nur um ein Werkzeug für den Unterricht handelt, sondern dass dieses Werkzeug viel Mathematik enthält. Das exemplarische Herausarbeiten der Computeralgebra im Unterricht vertieft das Verständnis von Mathematik und kann andere Zugänge zum mathematischen Arbeiten eröffnen.

2. Computeralgebra und Computeralgebrasysteme

Liest man die Kapitelüberschriften im Buch „Modern Computer Algebra“, [3] so glaubt man eher ein Buch über die Geschichte der Mathematik als ein Buch über ein modernes Arbeitsgebiet der Mathematik in der Hand zu halten. Die Überschriften lauten: Euclid, Newton, Gauß, Fermat und Hilbert. Auf dem Buchrücken heißt es „…(an) introduction to the algorithmic basis of the mathematical engine in computer algebra systems“. Die Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM nennt als „Konkrete Beispiele für Problemstellungen in der Computeralgebra: das Rechnen mit beliebig langen Zahlen, mit Symbolen, Unbestimmten und Polynomen, das Faktorisieren von Zahlen und Polynomen, das Differenzieren von Polynomen und anderen Funktionen, das wesentlich schwierigere Auffinden von Stammfunktionen und das exakte Lösen polynomialer Gleichungssysteme oder von Differentialgleichungen“. Diese kurzen Beschreibungen zeigen deutlich, welch großer mathematischer Gehalt der Computeralgebra innewohnt. Oberschelp [2] spricht bei Computeralgebrasystemen von der „integrierten Implementierung mathematischer Theorien“. Neben den bekannten im Unterricht eingesetzten Systemen gibt es spezielle Systeme zur algebraischen Geometrie, algebraischen Zahlentheorie, kommutativen Algebra, Singularitätentheorie, Gruppentheorie… Die dynamische Geometrie wird teilweise auch im Bereich Computeralgebra eingeordnet.

3. Abgrenzung zur Tabellenkalkulation

Aktuell sind Tabellenkalkulationsprogramme, dynamische Geometriesoftware und Computeralgebrasysteme die speziellen Softwareprodukte, die im Mathematikunterricht zur Unterstützung der mathematischen Begriffsbildung und Problemlösung eingesetzt werden und daher einer didaktischen Analyse bedürfen. In der Verbreitung und Zielsetzung unterscheiden sich Tabellenkalkulationsprogramme stark von den anderen beiden Systemen. Sind letztere vornehmlich auf die Benutzung im Bereich der Mathematik (Ausbildung, Forschung, etc.) ausgerichtet, so sind Tabellenkalkulationsprogramme für die Anwendung außerhalb der Mathematik konzipiert. Ihre Aufgabe ist es, in wiederholten Anwendungssituationen die Benutzer von mathematischen Überlegungen und Rechnungen zu befreien (z.B. Rechnungen, Tilgungspläne, etc.). Daher bedarf der unterrichtliche Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen einer anderen Akzentuierung und teilweise auch anderer didaktischer Orte.

4. Geschichte der CAS-Didaktik

Seit Entstehen der Computeralgebrasysteme und deren zunächst vereinzelten Einzug in den Unterricht hat sich die Didaktik speziell den Themen Aufgabenentwicklung mit CAS, neue Aufgabenkultur, Begriffsbildung mit CAS, Einbeziehung neuer Unterrichtsinhalte und Streichung bzw. neue Akzentuierung alter Inhalte durch die Nutzung von CAS, Vergleich der verschiedenen Systeme, CAS und zentrale Prüfungen und Veränderung von Unterrichtsmethoden durch CAS befasst. Teilweise sind auch die Diskussionen um die Einbeziehung informatischer Inhalte in den Mathematikunterricht an dieser Stelle zu nennen. Dabei steht die Betrachtung von Computeralgebrasystemen als existente Werkzeuge häufig im Vordergrund. Prägend in der didaktischen Diskussion waren dabei sicherlich die Fragen „Wie viel Termumformung braucht der Mensch?“, bzw. „Rettet die Ideen!- Rettet die Rezepte?“ Eine Antwort auf die letzte Frage lautet: „Rettet die Rezepte, die Ideen tragen“.[1]

5. Computeralgabrasysteme und das Bild von Mathematik

Hinter jeder Unterrichtsdidaktik für Mathematik steht ein Bild von Mathematik. Mathematik wurde und wird immer von innermathematischen Fragestellungen und Fragen aus Anwendungsgebieten vorangetrieben. Nicht immer ist die Antwort auf die Frage, in welchem Fachunterricht ein bestimmtes Problem, zu deren Lösung mathematische Kompetenzen gehören, behandelt werden soll, leicht zu entscheiden. Speziell in Bildungsgängen an Berufsschulen wird daher folgerichtig der eigenständige Mathematikunterricht zu Gunsten einer Lernfelddidaktik aufgehoben. Computeralgebra ist nun ein zutiefst innermathematischer Gegenstand. Eine exemplarische Behandlung ihrer Inhalte kann nur im Mathematikunterricht sinnvoll verwirklicht werden und fördert das Entstehen eines möglichst umfangreichen und aktuellen Bildes von Mathematik bei Schülerinnen und Schülern.

6. Eine Leitidee- Das Delegationsprinzip

Bei der Schaffung von Computeralgebrasystemen delegiert man mathematische Tätigkeiten an Computer. Welche Voraussetzungen müssen hierzu erfüllt sein? Welche Anforderungen werden an die Verfahren gestellt? Wie kann man ausgewählte mathematische Themen anders behandeln, wenn nicht das Üben am Ende der Entwicklung von Verfahren steht, sondern das Verfahren an eine Maschine delegiert wird? Welche Veränderungen ergeben sich, wenn man selbst nicht mehr Herr des Verfahrens ist?

7. Unterrichtsbeispiele

Das Delegationsprinzip soll nun am Lösen quadratischer Gleichungen illustriert werden. Quadratische Gleichungen werden traditionell durch die quadratische Ergänzung, die p-q Formel oder die a-b-c Formel gelöst. Bei der quadratischen Ergänzung lernen die Schülerinnen und Schülern ein Verfahren, das auf einem kleinen Trick basiert und die binomische Formel rückwärts benutzt. Führt die Rechnung auf einen Term der Form $(x-a)^2=b<0$, so bricht man das Verfahren ab, da keine reelle Lösung existiert. Führt man dieses Verfahren allgemein an einer (normierten) quadratischen Gleichung durch, erhält man als Ergebnis die a-b-c-Formel (p-q-Formel). Auch wenn man somit die Lösungen scheinbar direkt hinschreibt, empfinden Schülerinnen und Schüler diese Formeln nicht unbedingt als eine Verkürzung der Rechnung, da die Formeln gewöhnlich zwei Lösungen enthalten und nicht direkt in den Taschenrechner eingegeben werden können. Nach Einsetzen der konkreten Koeffizienten muss zunächst die Diskriminante berechnet werden, dann stellt man fest, ob es überhaupt Lösungen gibt, und im letzten Schritt werden die numerischen Werte dann bestimmt. Das Verfahren bricht man ab, sobald der Wert „unter der Wurzel" (Schülerjargon) negativ ist. Streng genommen haben die Schülerinnen und Schüler bis zu dieser Stelle Termumformungen außerhalb der reellen Zahlen, in den ihnen unbekannten komplexen Zahlen vorgenommen, eigentlich ein aus ihrer Sicht unzulässiger Weg. Ein auch im reellen Zahlbereich korrekter Weg ist die Bestimmung der Anzahl der Lösungen mit Hilfe der Diskriminanten vor Beginn der numerischen Bestimmung der Lösungen. Dieser Weg wird vielfach von Schülerinnen und Schülern als unnötig eingestuft.

Wie kann man nun den Unterricht anders gestalten, wenn man die Lösung quadratischer Gleichungen mit Hilfe von CAS durchführt? Ein CAS kann nur das, was der Mensch ihm beigebracht hat. Daher ist es weiterhin sinnvoll im Unterricht aus einer Problemstellung heraus Lösungen und Lösungswege zu finden. Computeralgebrasysteme erfordern allgemeine Verfahren bzw. Formeln. Die Lösung sollte sich möglichst deterministisch aus den Eingabedaten bestimmen lassen. Da man in der Schule gewöhnlich in den reellen Zahlen rechnet, kann die Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen haben. Da man nach der Delegation der Bestimmung der Lösungsmenge nicht mehr Herr des Verfahrens ist, müssen entsprechende Tests bezgl. der Lösbarkeit, die zu einer benutzerfreundlichen Ausgabe führen, eingebaut werden. Der Diskriminantentest bekommt ebenso wie die Lösungsformeln einen neuen Sinn. Unterrichtlich realisieren könnte man dann dieses Verfahren mit einem Tabellenkalkulationsprogramm. Ebenso kann an dieser Stelle bei der Begründung der Korrektheit des Verfahrens der Sinn von Äquivalenzumformungen verdeutlicht werden.

In einem nächsten Schritt kann man Polynomgleichungen vom Grad <3 systematisch untersuchen lassen, um nachfolgend das Verfahren in einem Tabellenkalkulationsprogramm zu realisieren. Hierbei lernt man, dass quadratische Gleichungen und lineare Gleichungen verschiedene Verfahren benötigen und wie entschieden werden kann, welches zu wählen ist.

Nun kann man allgemeine mathematische Prinzipien zur Behandlung von Gleichungssystemen herausarbeiten, die als allgemeine Richtschnur bei der Entwicklung von Verfahren, die delegiert werden, dienen können.

Weitere unterrichtliche Themen, die in diesem Sinne bearbeitet werden, sind der Gaußalgorithmus, Schnittmengenbestimmung geometrischer Objekte und die Ableitung und Integration exemplarischer Funktionsklassen. Dabei muss vielfach eine Systematik zur Einordnung der vorliegenden Probleme in Teilproblemklassen entwickelt werden.

Literatur

[1] Herget, W. (1996). Rettet die Ideen! –Rettet die Rezepte?. *Rechenfertigkeiten und Begriffsbildung- zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen: Bericht über die 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. Franzbecker*.

[2] Oberschelp, W. (1996). Computeralgebrasysteme als Implementierung symbolischer Termalgorithmen. *Rechenfertigkeiten und Begriffsbildung- zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen: Bericht über die Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. Franzbecker.*

[3] Von zur Gathen, J. & Gerhard, J. (1999). Modern Computer Algebra. Cambridge: Cambridge University Press.

Jürgen FLACHSMEYER, Greifswald

Orimathe: Zum Zusammenwirken von Origami und Mathematik

2008 - im vergangenen Jahr der Mathematik – wurden allgemein vielseitige Aktivitäten entfaltet, um die öffentliche Akzeptanz der Mathematik zu befördern und insbesondere bei mehr Jugendlichen Interesse dafür zu erwecken. Das findet im Europäischen Jahr der Kreativität 2009 seine Fortsetzung. Mittels einer gestarteten ***Orimathe-Initiative*** soll das anhand der japanischen Papierfaltkunst Origami erschlossen werden. Durch den handwerklichen Umgang mit form- und farbschönen Faltgebilden gelangt man in natürlicher Weise zum mathematischen Nachdenken und Verstehen. Dem verstandesmäßigen Begreifen geht das tatsächliche Begreifen von unter den eigenen Händen entstehenden, aus Papier gefalteten Objekten voraus. Das Lern- und Lehrverhalten im Mathematikunterricht lässt sich solcherart konsequent bereichern. Der Autor hat dazu verschiedene Schritte unternommen, die seit mehreren Jahren auch Schüler in direkter Begegnung betreffen. Zunächst kamen im Rahmen der Greifswalder Kinder-Universitäten die von sich aus interessierten Schüler. Seit dem letzten Jahr geht der Autor auch in reguläre Klassenverbände, um beim aktuellen Schulstoff für Orimathe zu wirken. Wesentliche Impulse erhielt diese Initiative durch eine Origami-Ausstellung in Greifswald, die vom Institut für Mathematik und Informatik der Universität in Kooperation mit der Universitätsbibliothek durchgeführt und von dem Autor mit dem Greifswalder Falterstammtisch sowie dem Berliner Faltertalent Helmut Gembitzki gestaltet wurde. 3000 Besucher nahmen sie in Augenschein und 270 erprobten sich unter Anleitung in 7 begleitenden Workshops in der Kunst des Origami. 33 Poster zeigten den Betrachtern Brücken zur Mathematik auf. Auch zur Bearbeitung ungelöster Fragen fanden sich darauf Hinweise. ***Orimathe*** ist ein Kunstwort, das aus der Zusammenziehung von Origami und Mathematik gebildet wurde.

Ein Teil der Greifswalder Exponate stand in Oldenburg zur Verfügung, sie konnten allerdings nur 1 ½ Tage gezeigt werden. Ein ausgegebenes Begleitheft von 48 Seiten beinhaltete die Greifswalder Poster und zudem zwei konkrete Beispiele zur schulischen Behandlung. Die erste Darlegung *„Ein gefaltetes Schiff als Beispiel zur Bruchrechnung und zur Ähnlichkeit“* war unter anderem Gegenstand des Oldenburger Vortrages. Dieser umfasste noch mathematische Darlegungen an der Windmühlenfaltung, einem daraus hervorgebrachten Tiergesicht, einem einfachen Fluginsekt und einer gefalteten Möwe.

Das Hauptanliegen zielte darauf ab, zur vielseitigen Mitarbeit aufzurufen, ein umfangreiches Programm zur schulischen Umsetzung von Orimathe anzubahnen. In jeder Klassenstufe bieten sich dafür mannigfache Gelegenheiten. Es betrifft nicht nur die direkt in der Geometrie beheimateten Stoffgebiete. Durch eine Unterbauung mittels Origami macht man vieles weitestgehend sichtbar, was man denkt! Hier folgen zwei Beispiele.

1. Origami-Objekte: Schwimmender Schwan bzw. hockender Vogel

(Für die 1. Klasse geeignet). In ein quadratisches Blatt Faltpapier wird eine *Diagonale* eingefaltet, indem man eine beliebig ausgewählte Ecke des Quadrates auf die Gegenecke bringt und die sich ergebende Papierwölbung glatt streicht. Dabei muss man beachten, dass die Quadratkanten passend aufeinander kommen. Es empfiehlt sich beim Origami die Sprechweise *Kante* anstelle von Seite für die Begrenzungslinien, weil Seite für die O-ber- und Unterseite des Blattes benutzt werden. Schüler der 1. Klasse weisen im korrekten Befolgen der Faltanweisungen (Sorgfalt) große Unterschiede auf! Aber mehrmaliges Wieder-holen der vorzunehmenden Faltungen führt zum baldigen Erfolg. Dabei lässt man die Schüler die Anweisungen für die anderen Mitschüler in ganzen Sätzen sagen (Sprachkultur). Die Anzahlen der Ecken und auch der Kanten eines Quadratblattes werden allgemein richtig erfasst. (Nur einmal hieß es in einer 4-ten Klasse, dass ein Quadrat 6 Ecken hätte, was aber durch nochmalige Aufforderung dann richtig nachgezählt wurde. Sind ihm da die 6 Seitenflächen eines Würfels (der auch behandelt worden war) in die Quere geraten? Beim wieder geöffneten Blatt werden dann von einer Ecke, durch die die eingefaltete Diagonale verläuft, die Kanten auf die Diagonale gefaltet. (Anmerkung: Man hat damit jeweils die beiden 45°-Winkel zwischen Diagonale und einmündender Kante halbiert). Es entsteht ein *Drachen* (Schüler schlagen selber Benennungen für erreichte Zwischenresultate bzw. Endresultate vor, die man manchmal jedoch in gebräuchliche Benennungen umzubilden hat). Jetzt wird der *Drachenkopf* mit der Kopfecke so auf die *lange Diagonale* des Drachens gefaltet, dass die Faltlinie die *kurze Diagonale* des Drachens wird. Den übergekippten Drachenkopf kippt man längs der Basislinie des Kopfes zur anderen Seite des Blattes, so dass der Drachenkopf auf dem ungeschlitzten gleichschenkligen Dreieck liegt. Die beiden Ecken der kongruenten Schenkel faltet man auf den Eckpunkt des Drachenkopfes. Das zusammengefaltete Blatt hat wieder die Kontur eines Drachens mit einem *Schwanzwinkel* von 45° und einem *Kopfwinkel* von 90°. Solche Drachen mit diesen Winkeln treten beim Origami häufig als Zwischenstufen auf. Jetzt faltet man den Drachen längs seiner langen Diagonale zusammen und zieht das Gebilde am aufliegenden Drachenkopf in die in der Abbildung angegebene Form auf. Das Objekt kann man in zweierlei Weise aufstellen. Die natürliche Spreizung der Faltteile sichert einen stabilen Stand. Das links gezeigte Gebilde wird der schwimmende Schwan, wenn man am Hals eine Gegenbruchfaltung anbringt, die den Schnabel liefert. Der Schnabel kann mit der Höhe nach eigenem Dafürhalten angesetzt werden. Das rechts stehende Gebilde wird durch Faltung einer Winkelhalbierenden zu einem hockenden Vogel, dessen Schnabel nach rechts weist. Ohne die letzten Faltungen vorgenommen zu haben, entfaltet man das Gebilde und erkennt das durch die Faltlinien hervorgebrachte Faltmuster im Quadratblatt. Darin sind durch Grautönungen Teilfiguren hervorgehoben.

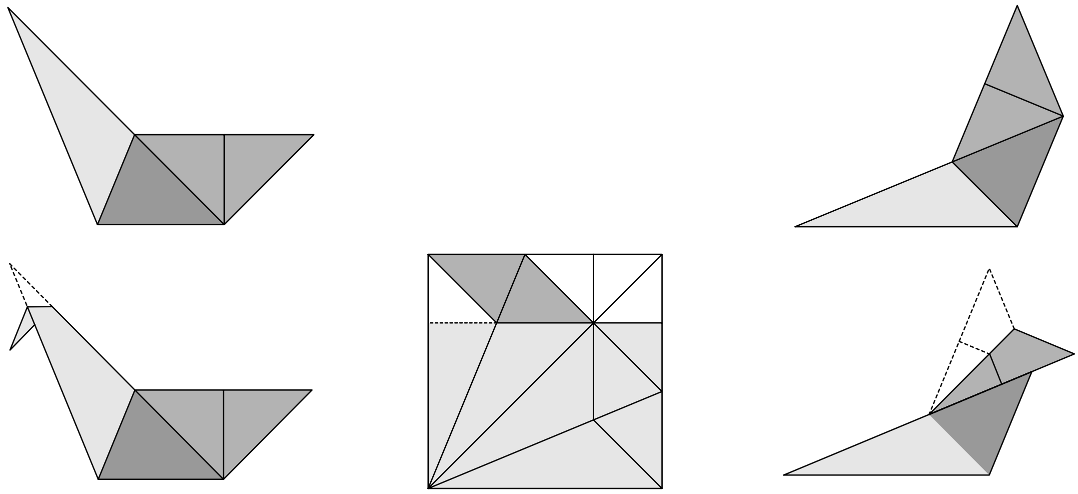


Abb. Die Faltgebilde in seitlicher Ansicht und das Faltmuster mit Hervorhebung von Teilfiguren

Hintergrundwissen des Lehrers: Folgende elementare Teilfiguren sind im Faltmuster zu bemerken: 1) Kongruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke. 2) Kongruente gleichschenklige Dreiecke mit den Winkeln von 45° und 67.5°. 3) Kongruente Dreiecke mit den Winkeln von 22.5°, 45°, 112.5°.

Zwei aneinander grenzende Dreiecke des letzten Typs bilden zusammen einen Drachen mit Schwanzwinkel von 45° und Kopfwinkel von 90° oder aber ein Vogelviereck. Zwei aneinander grenzende Dreiecke des mittleren Typs bilden eine Raute. Ein Vogelviereck und eine angrenzende Raute ergeben einen Drachen mit einem Schwanzwinkel von 45° und einen Kopfwinkel von 135°.

Anmerkung: Die Schüler entwickelten leicht ein intuitives Verständnis für die Kongruenz (Deckungsgleichheit) und für die genannten Figurentypen, ohne dass alle auftretenden Winkelwerte einbezogen wurden. Jedoch herrschte rasch eine Vorstellung für rechte Winkel und die Halbierung von Winkeln mittels Faltung.

2. Origami-Objekte: Quadratische Pyramide und pyramidale Schale

(Für die 10. Klasse geeignet). In ein quadratisches Blatt werden die beiden Diagonalen und die beiden kantenparallelen Mittellinien eingefaltet und das wieder geöffnete Blatt zum Quadrat der viertel Größe zusammen geschoben. Von der offenen Ecke halbiert man jeweils für die Doppellage von links und rechts den 45°-Winkel an der Quadratdiagonale auf der Vorder- und Rückseite. Es entsteht ein mehrfach liegender Drachen mit Kopfwinkel von 90° und Schwanzwinkel von 45°. Den Drachenkopf kippt man an der kurzen Drachen-diagonale über und zieht die Faltkante besonders scharf. Nachdem der Kopf wieder zurückgeführt wurde, richtet man reihum jedes rechtwinklige Dreieck mit einem 22.5°-Winkel auf und drückt das aufgespreizte Dreieck zu einem Drachen nieder. Daraus kann man jetzt die Pyramide formen, wobei sich der quadratische Boden der Pyramide aus dem anfänglichen Drachenkopf ergibt. Die Seitendreiecke sind gleichschenklige Dreiecke mit einem Topwinkel von 45°. Für die pyramidale Schale faltet man die bei der Pyramide nach innen gelangten Halbierungsdreiecke der Seitendreiecke nach außen und kippt sie nach unten und um den Boden herum. Es entsteht ein Pyramidenstumpf.

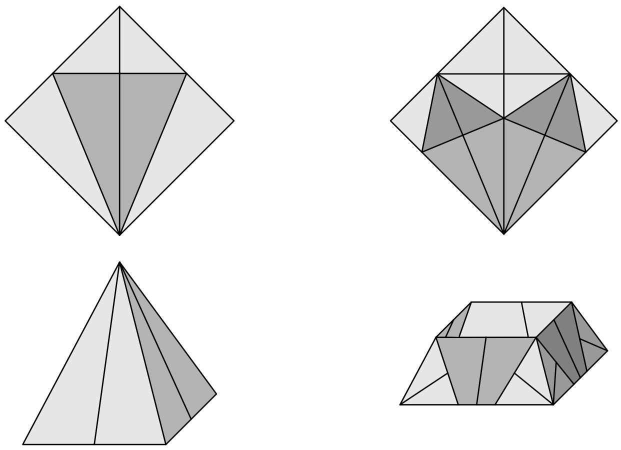


Abb. Die Faltschritte, das Faltmuster und die Pyramide sowie die Schale

Wenn man die Kantenlänge des Ausgangsblattes als 1 nimmt, so wird die Kantenlänge der Grundfläche der Pyramide $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, die Pyramidenhöhe wird $\frac{1}{2}\sqrt{1-(\tan\frac{\pi}{8})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8}}$. Die Länge der schrägen Kanten des Pyramidenstumpfes beträgt die Hälfte der Länge der Grundflächenkante.

Literatur

Flachsmeyer, J. (2008). Origami und Mathematik. Papier falten – Formen gestalten. Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 20. Berlin: Heldermann Verlag.

Albert GÄCHTER, St.Gallen

Der Albtraum eines Mathematikers – und seine Folgen

Zu den faszinierendsten Problemen der Mathematik gehören jene, welche einfach zu formulieren, aber schwierig zu lösen sind. Ein berühmtes Beispiel dieser Art ist das Collatz-Problem. Seit bald 80 Jahren fordert es die Mathematiker heraus. Immer noch ungelöst, enthüllt es aber nach und nach einige seiner Geheimnisse. Leider hat das Problem kaum Eingang in die Schulmathematik gefunden, obwohl es als schönes Lehrstück dafür gelten kann, wie in der Küche der Mathematik gearbeitet wird. Zudem bietet es für Fach- und Abiturarbeiten ein ergiebiges Arbeitsfeld.

Es ist ein weit verbreiteter Irrtum, dass sich Schulmathematik nur mit gesicherten mathematischen Erkenntnissen beschäftigen soll. Den Schülerinnen und Schülern entgeht so der Einblick in die Entstehung einer Theorie. Auch vorläufiges und unvollständiges Wissen über ein Teilgebiet der Mathematik kann wertvoll sein. Die Vorstellung, dass in Themen der Schulmathematik bereits alles gesagt und nichts mehr zu forschen ist, fördert den rein rezeptiven Umgang mit diesem Fach. Es wäre wünschenswert, dass am Gymnasium eine echte Auseinandersetzung mit Methoden und Inhalten bedeutsamer Mathematik erfolgen kann.

Der Albtraum

Die Mathematikerin und Poetin JoAnne Growney aus den USA schrieb vor einigen Jahren das Büchlein «My Dance is Mathematics». Es enthält eine Sammlung mathematischer Gedichte, darunter auch das folgende:

Mathematician's Nightmare (nightmare = Albtraum)

Suppose a general store,
items with unknown values
and arbitrary prices
rounded for ease to
whole-dollar amounts.

Each day Madame X,
keeper of the emporium,
raises or lowers each price,
exceptional bargains
and anti-bargains.

Even-numbered prices
divide by two,
while odd ones climb

by half themselves
then half a dollar more
to keep the numbers whole.

Today I pause before
a handsome beveled mirror
priced at twenty-seven dollars.
Shall I buy or wait
for fifty-nine days
until the price is lower?

Ein wirklich ungewöhnlicher Laden, den Madame X hier führt. Einerseits gibt es nur Preise in ganzen Dollars. Andererseits erfahren die Preise jeden Tag eine Änderung. Geradzahlige Artikelpreise werden am nächsten Tag halbiert, ungeradzahlige um die Hälfte erhöht und mit einem halben Dollar zusätzlich aufgestockt. Lohnt es sich, für den Kauf eines 27 Dollar teuren Spiegels 59 Tage zu warten?

Im Folgenden müssen leider aus Platzmangel wenige Stichworte zu den Strategien genügen.

Strategie 1: Mache einige (gut gewählte) Beispiele!

Beispiele sind kleine mathematische Experimente. Sie helfen mit, das Problem besser zu verstehen und allfällige Besonderheiten aufzuspüren.

Startzahl 20: 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
Startzahl 27: 27, 41, 62, 31, 47, 71, 107, 161, …

Strategie 2: Mathematisiere und verwende passende Werkzeuge!

Unter Mathematisierung versteht man die Umsetzung eines in der Umgangsprache formulierten Problems in die mathematische Fachsprache. Werkzeuge bestimmen stets den Problemlösevorgang mit und sind deshalb sehr sorgfältig auszulesen.

$$T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}:$$

$$T(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \quad \text{(fallender Schritt)} \\[2ex] \dfrac{3n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \quad \text{(wachsender Schritt)} \end{cases}$$

Als Werkzeuge eignet sich eine Tabellenkalkulation oder ein Computer-Algebra-System. $T^{59}(27) = 23$. Nach 59 Tagen liegt der Preis erstmals unter

27 Dollar. Wartet man noch weitere 11 Tage, erwirbt man den Spiegel zum Schnäppchenpreis von 1 Dollar!

Strategie 3: Suche geeignete Informationen!

Die gezielte Suche nach einschlägigen Informationen zum Thema führt in Bibliotheken und ins Internet. Wichtig bei der Recherche ist, die richtigen Fragen in verschiedenen Sprachen zu stellen.

Die Geschichte der Collatz-Folgen ist einzigartig in der Mathematik und bildet auch ein Lehrstück für das Problemlösen.

> **Collatz-Vermutung**:
>
> Für jede natürliche Zahl n gibt es ein k mit $T^k(n) = 1$.

Strategie 4: Löse Teilprobleme und reichere an!

Teilprobleme bereiten mit ihren Lösungen den Boden für eine spätere Lösung des ganzen Problems. Je mehr Eigenschaften bekannt sind und je vielfältiger sich das Verhalten der beteiligten Funktionen zeigt, desto klarer heben sich die Konturen für eine Lösung der Problemstellung ab. Das Ziel ist also die Erzeugung eines reichhaltigen Umfeldes.

Neue Begriffe: Bahnlänge, Spitzenwert, stopping time usw.

Neue Sätze: Zerlegungssatz, Zyklensatz usw.

Strategie 5: Visualisiere – und nochmals: visualisiere!

Der Wert der Visualisierung für neue Ideenbildung ist unbestritten. Eine einseitige Berücksichtigung der Eingangskanäle unserer Sinne schmälert die Erfolgsaussichten.

Vielfältige Darstellungsmöglichkeiten (auch Vertonung der Folge).

Strategie 6: Bearbeite das Umkehrproblem!

Oft lässt sich ein Problem einfacher von hinten nach vorne lösen. Ausgehend vom Endzustand wird der Anfangszustand rekonstruiert.

Wie kommt man im Collatz-Baum zum vorhergehenden Element?

Strategie 7: Rechne auch mit Wahrscheinlichkeiten!

Auf dem Weg zu einer Problemlösung oder zu einem Beweis sind Wahrscheinlichkeitsüberlegungen oft sehr nützlich. Eigenschaften können einer statistischen Analyse unterworfen werden, um Voraussagen zu machen.

Wahrscheinlichkeit für den Wachstumsfaktor der Folge usw.

Strategie 8: Suche aequivalente Problemstellungen!

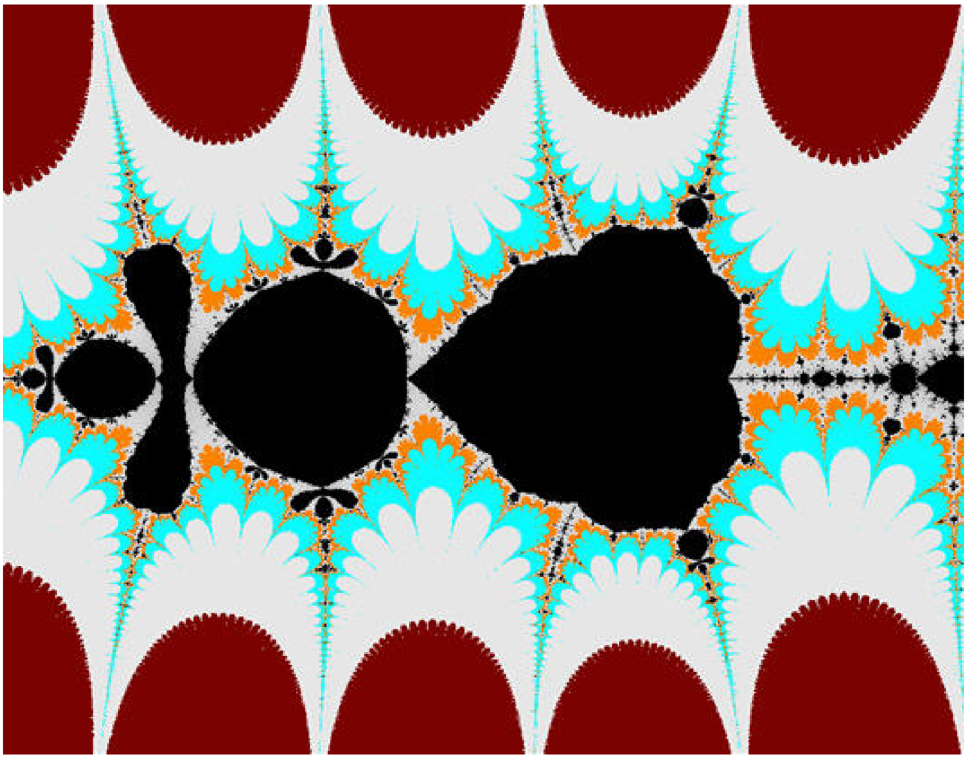
Mit dieser fruchtbaren Strategie transformiert man ein Problem in ein aequivalentes Problem in einem andersartigen mathematischen Gebiet und versucht, es dort zu lösen. Man holt gewissermassen das Problem in ein «Gärtchen», wo man sich besser auskennt und wo andere Werkzeuge verfügbar sind.

→ holomorphe Funktionen, Automaten (Turing, zelluläre Automaten, Tag)

Strategie 9: Verallgemeinere!

Es gibt Probleme, welche sich in einem grösseren Zusammenhang leichter lösen lassen. Das «Abgrasen» der Umgebung kann neue Ideen und Einsichten zur Folge haben. Oft führen analoge Fragestellungen zu ganz unterschiedlichen Resultaten.

Ausdehnung der Vorschrift auf ganze, reelle und komplexe Zahlen!



Strategie 10: Variiere hemmungslos!

Variatio delectat, sagt der Lateiner. Neben der Freude steht beim Variieren auch der Verständnisgewinn im Vordergrund.

Betrachtung von andern Zuordnungsvorschriften für T(n).

Peter GEERING, Zürich

Sicher rechnen

Schriftliche Normalverfahren

Schriftliche Rechenverfahren gehörten bis vor kurzem noch zum „Kerngeschäft“ der Primarstufe. Welchen Platz sie heute und in Zukunft einnehmen sollen, wird kontrovers diskutiert:

Aus Alltag und Beruf ist das schriftliche Rechnen mit wenigen Ausnahmen praktisch verschwunden. Sicherheit im gestützten Kopfrechnen wäre ein größerer Beitrag zur numerischen Mündigkeit.

Die Verfahren sind Beispiele für Algorithmen, einer zentralen Idee der Mathematik (HEYMANN 1996).

Sie sind auch ein Kulturgut in doppelter Hinsicht: Ihre Ausprägungen sind typisch für verschiedene Regionen, ihre Vermittlung hat aber auch den Schulunterricht über viele Jahre geprägt, ist Teil einer Schulkultur.

Fazit: In der Fachdidaktik hat man die traditionellen Verfahren des schriftlichen Rechnens zwar zu „Beispielen von Algorithmen“ herabgestuft (KRAUTHAUSEN 1993), im Schulalltag bilden sie aber nach wie vor ein Schwergewicht. Ihre Beherrschung kann ein entscheidendes Kriterium für den Übertritt in höhere Schulen sein.

Tradition und neuer Zweck

Die schriftlichen Normalverfahren wurden nicht zu dem Zweck entwickelt, für den sie heute in der Schule eingesetzt werden. Kriterien bei der Entwicklung und Auswahl der Normalverfahren waren:

- Der **Schreibaufwand** soll **minimal** und die Kopfrechenarbeit möglichst einfach sein.
- **Normierung** soll die Instruktion und die Automatisierung erleichtern.
- Die **Grundoperationen** werden **unabhängig** voneinander optimiert und auch instruiert.

Sollen Rechenverfahren als einfach durchschaubare und nachvollziehbare Beispiele von Algorithmen dienen, müssen andere Kriterien im Vordergrund stehen:

- Die schriftlichen Aufzeichnungen sollen den **Rechenweg** festhalten und allfällige Fehler leicht lokalisierbar machen. Kinder mit Speicherproblemen schreiben so viel auf, wie sie für ihre Sicherheit benötigen. Der Schreibaufwand ist zweckentsprechend und individuell.

- Ausgefeilte Algorithmen sind das Ziel einer **Entwicklung**, bei der sich die Kinder einer Klasse in verschiedenen Stadien befinden können. Die Geschwindigkeit, mit der diese Entwicklung durchlaufen wird und wie weit sie geht, hängt von den einzelnen Kindern ab.
- Um das gemeinsame Prinzip des Algorithmus hervorzuheben, müssen die Verfahren der vier Grundoperationen möglichst viele **Gemeinsamkeiten** aufweisen.

Die überlieferten Rechenverfahren enthalten bekannte und akribisch untersuchte Fehlerquellen. Dass sie trotzdem unverändert beibehalten werden, ist doch eigentlich merkwürdig. In jedem handwerklichen Beruf sorgen Verbände und staatliche Stellen für Maßnahmen, damit Gefahrenquellen eliminiert und unnötige Risiken ausgeschaltet werden.

Grundlegende Rechenkompetenzen

Die schriftlichen Normalverfahren basieren auf der Abrufbarkeit von Einspluseins und Einmaleins. Wer diese nicht oder nur fehlerhaft schafft, steht auf verlorenem Posten – und das sind nicht wenige Kinder.

Die Entwicklung alternativer Verfahren verlangt zwar zusätzlich auch analoge Rechensätze in größeren Zahlenräumen (Zehnereinspluseins, Stelleneinmaleins, „Rechenfamilien“), fördert dabei aber auch die Kompetenz im Kopfrechnen mit größeren Zahlen. Beim Üben der schriftlichen Algorithmen ist das nicht der Fall, da große Zahlen mechanisch zerlegt und mit einfachster Kopfrechnung bearbeitet werden.

Prüfen und Bewerten

Traditionell ist die **Rechengeschwindigkeit** ein primäres Ziel und Gegenstand von Prüfungen. Als Bewertungskriterium dient die Anzahl der in einer bestimmten Zeit richtig gelösten Aufgaben – je mehr desto besser. Die Arbeitsgeschwindigkeit und Konzentrationsfähigkeit spielen dabei eine entscheidende Rolle. Solche Prüfungen haben einen ausgeprägten Wettbewerbscharakter.

Ist das primäre Ziel die **Einsicht** in den Algorithmus und die **Sicherheit** im Rechnen, gehören dazu auch Methoden der Selbstkontrolle wie Überschlag oder Zweitrechnung. Geprüft wird die Zuverlässigkeit im Rechnen ohne Zeitdruck. Dazu genügen wenige Aufgaben, die aber alle richtig gelöst werden müssen. Die Arbeitsgeschwindigkeit und die Konzentrationsfähigkeit spielen nur noch eine untergeordnete Rolle. Die Bewertung wird auf die Kategorien erfüllt/nicht erfüllt reduziert. Wer (zusätzlich) Wettbewerb will, kann zählen, wer am meisten Rechnungen hintereinander ohne Fehler rechnen kann.

halbschriftlich – schriftlich: eine Kluft

Damit Kinder die Funktionsweise und die Bedeutung von Rechenalgorithmen erfassen können, wird in den ersten drei Schuljahren an den Voraussetzungen gearbeitet:

- Einsicht in das Prinzip der Zerlegung von Operationen in Teilschritte,
- Verständnis der Zahlschreibweise im Stellenwertsystem,
- Fähigkeit, Rechenschritte zu notieren und zu lesen.

In den ersten drei Schuljahren werden die Kinder dazu ermuntert, eigene Rechenverfahren zu finden, zu entwickeln und auszutauschen. Je mehr sie sich darauf einlassen, desto stärker wirkt dann der Stilbruch, wenn plötzlich ex cathedra verkündet wird, wie „man" schriftlich zu rechnen hat. Es gibt keine mathematische Begründung dafür, weshalb in Deutschland so, in der Schweiz, in den USA und in der Türkei ganz anders gerechnet wird. Ist das Lernziel eine Rechenvorschrift, die insbesondere für schwächere Kinder mit der Vorbereitung wenig bis nichts zu tun hat, wird auch der ganze Entwicklungsgang entwertet. Die Kinder warten dann bis ihnen (von der Lehrperson oder auch von den Eltern oder Geschwistern) gezeigt wird, wie man „richtig" rechnet.

Beispiel: Entwicklung der Multiplikation auf Papier

Wie bei allen Operationen wird bei der schrittweisen Multiplikation (GEERING 2007) einer der Operanden in Stellenwerte zerlegt.

Schritte	**57 · 3 = ?**	das Einmaleins dazu
Zehner multiplizieren	50 · 3 = 150	5 Z · 3 = 15 Z
Einer multiplizieren	7 · 3 = 21	7 · 3 = 21
Teilprodukte **addieren**	**171**	

Schritte	**457 · 3 = ?**	das Einmaleins dazu
Hunderter multiplizieren	400 · 3 = 1200	4 H · 3 = 12 H
Zehner multiplizieren	50 · 3 = 150	5 Z · 3 = 15 Z
Einer multiplizieren	7 · 3 = 21	7 · 3 = 21
Teilprodukte **addieren**	**1371**	

Das Normalverfahren der schriftlichen Multiplikation ist komplex und fehlerträchtig. Es wird viel transparenter und sicherer, wenn die Teilprodukte immer ganz notiert werden. Ein entsprechendes Verfahren kann direkt aus der schrittweisen Multiplikation entwickelt werden.

Multiplikation in der Stellentafel – Kurzform (GEERING 2009)

schrittweise gerechnet und in zwei Stellentafeln notiert

	ZT	T	H	Z	E		ZT	T	H	Z	E
		3	8	1	6	· 5 =					
Tausender		3				· 5 =	1	5			
Hunderter			8			· 5 =		4	0		
Zehner				1		· 5 =				5	
Einer					6	· 5 =				3	0
							1	9	0	8	0

Produkte direkt unter den ersten Faktor geschrieben

ZT	T	H	Z	E	
	3	8	1	6	· 5
1	5				
	4	0			
			5		
			3	0	
1	9	0	8	0	

Kurzform

	3	8	1	6	· 5
	5	0	5	0	
1	4		3		
1	9	0	8	0	

Ergebnis: 3 816 · 5 = **19 080**

			3	8	1	6	· 45
			5	0	5	0	· 5
mal die Einer		1	4		3		
		2	2	4	4	0	· 40
mal die Zehner	1	3		2			
	1	7	1	7	2	0	

Bei der Multiplikation mit mehrstelligen Faktoren verschieben sich die Teilprodukte der höheren Stellen nach links.

Vorteile dieser Schreibweise:

- Das fehleranfällige Speichern und Addieren von Überträgen fällt weg.
- Nur eine schriftliche Addition, von den Multiplikationen ganz getrennt.
- Alle Teilrechnungen des Einmaleins bleiben sichtbar.

Literatur

Geering, P. (2007). *Ich kann Mathematik – Lernbuch 3*. (S. 60/61), Seelze: Lernbuchverlag.

Geering, P. (2009). *Ich kann Mathematik – Lernbuch 4*. (S. 38/41), Seelze: Lernbuchverlag in Vorbereitung.

Heymann, H. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*, Studien zur Schulpädagogik und Didaktik Band 13 (S. 174 ff), Weinheim: Beltz.

Krauthausen, G. (1993). *Für eine Neubestimmung des Stellenwerts der Rechenmethoden*. In: Journal für Mathematik - Didaktik, 3/4/1993 (S. 189-219)

Lothar GERRITZEN, Bochum

Zwanzigeins statt einundzwanzig - Zur Geschichte und Didaktik der verdrehten Zahlensprechweisen

Zahlensprechweise im Deutschen

Die Schreib- und Leserichtung in deutschen Texten schreitet auf Zeilen von links nach rechts voran. Diese allgemeine Regel wird aber nicht stets angewendet. Wenn man eine zweistellige Zahl, die durch die indisch-arabischen Ziffern darstellt ist und deren letzte Ziffer nicht 0 ist, so muss man von rechts nach links lesen. Man spricht auch von Einer-Zehner-Sprechweise einer solchen Zahl. Wenn eine solche Zahl gesprochen wird, etwa dreiundvierzig, und man sie über eine Tastatur in Ziffernform in einen Rechner eingeben soll, so hört man drei, darf nichts eintippen, sondern muss sich diese Zahl merken. Erst wenn man vierzig gehört hat, muss man 4 eingeben und danach kann man versuchen sich an die zuerst gehörte Ziffer 3 zu erinnern, um sie einzugeben.

Wenn man eine mehr als zweistellige Zahl zu lesen oder zu schreiben hat, sind die zu beachtenden Regeln noch komplizierter. Hat man zum Beispiel die Zahl 54321 zu lesen, so muss man die Ziffern in der Reihenfolge 4,5,3,1,2 abarbeiten. Ist man beim Lesen vor der Zahl 5 angekommen, muss man sie überspringen und mit 4 anfangen. Danach muss man rückwärts gehen zur Ziffer 5, wonach man die 4 überspringen muss zur Ziffer 3. Insgesamt kommen bei diesem Lesevorgang 4 Sprünge und 2 Rückwärtswege vor. Man wundert sich, dass diese komplexe Operation doch oft leidlich beherrscht wird.

Es wird auch etliche Kinder irritieren, dass dreitausend die Zahl 3000 und dreihundert 300 bedeuten, während mit dreizehn nicht 30 sondern 13 gemeint ist. Man kann beobachten, dass Zahlenanalphabetismus und Dyskalkulie gravierende gesellschaftliche Probleme sind, die durch diese verdrehte Zahlensprechweise mitverursacht werden.

Stellenwertsystem

Dieses System zur schriftlichen Darstellung von Zahlen wurde etwa im Jahre 500 unserer Zeitrechnung in Indien entdeckt. Die Anfänge dieser Erfindung liegen immer noch weitgehend im Dunkel der Geschichte. Etwa um 800 verbreitete sich dieses System in der islamischen Welt. Durch das im Jahre 1200 geschriebene Buch „Liber Abaci“ von Leonardo von Pisa, auch Fibonacci genannt, wurde es in Italien bekannt. Um 1530 hatte es sich in den meisten europäischen Sprachen nach langen und heftigen Auseinandersetzungen durchgesetzt. Es wurde als Sieg der Arithmetiker über die Abakisten gefeiert.

Die Ausbreitung des indisch-arabischen Stellenwertsystems ist eine der bedeutendsten kulturellen Leistungen der Menschheit. Es ist eine universelle Schreibweise in allen modernen Sprachen und schon deswegen eine Besonderheit ersten Ranges. Die neue Form des Schreibens und Rechnens war Voraussetzung für den Aufschwung von Naturwissenschaften, Wirtschaft und Technik in Europa. In [Y] heißt es auf Seite 539 wörtlich: „Das Stellenwertsystem wurde zu einem der wichtigsten Beiträge des Mittelalters zum intellektuellen Rüstzeug des Mittelalters“. Doch fehlt in weiten Kreisen ein richtiges Bewusstsein dieser Vorgänge, das für den gesellschaftlichen Willen zur Änderung der verdrehten Zahlensprechweise erforderlich sein könnte. Es wird daran gedacht zu beantragen, dass die Ausbreitung und Vermittlung des Stellenwertsystems zum immateriellen Kulturerbe der UNESCO erklärt wird.

Englische Zahlwörter

Im Altenglischen wurde auch stets die Einer-Zehner-Sprechweise von zweistelligen Zahlen verwendet, Man sagte „one-and-twenty“ zu „einundzwanzig“. Nach der etwa hundertjährigen Herrschaft der Normannen in England, in der das Französische die Sprache der Oberschicht war, wurde auch nach französischem Vorbild die Zehner-Einer-Sprechweise für zweistellige Zahlen ab 20 eingeführt und etwa 600 Jahre lang waren beide Sprechweise gebräuchlich. Nachdem in England um 1500 das indisch-arabische Stellenwertsystem eingeführt war, wurde die schwierigere verdrehte Einer-Zehner-Sprechweise ganz allmählich zurückgedrängt bis sie gegen 1700 fast ganz verschwand. siehe [W].

Norwegische Reform

Am 22. November 1950 hat das norwegische Parlament einstimmig beschlossen, eine neue Zahlensprechweise einzuführen. Für zweistellige Zahlen ab 20 wurde die unverdrehte Form zur offiziellen Sprechweise gemacht und löste damit die vorher praktizierte Einer-Zehner Sprechweise ab. Heute ist diese Änderung weitgehend abgeschlossen, wenn auch die alte Art noch gelegentlich verwendet wird. Diese Reform wurde von der norwegischen Wirtschaft vorangetrieben, da man festgestellt hatte, dass die bisherige Zahlensprechweise im Wirtschaftsleben oft Fehler durch Zahlendreher verursacht hat, siehe [G], 95 - 104. Es stellt sich die Frage, wieso die deutsche Wirtschaft eine vergleichbare Initiative bisher nicht eingeleitet hat.

Öffentliche Debatten

Bereits im Jahre 1900 hat W. Foerster den Vorschlag unterbreitet, die Sprechweise der Zahlen an die Schreibweise anzupassen, siehe [H], 67 - 69. [G], 48 - 50 Er wurde später von A. Schülke, [Schü], [G], 51 - 53 und M. Schellenberger unterstützt, [Sche]. [G], 38 – 47.

Seit dem Jahre 2004 gibt es im deutschsprachigem Raum verstärkt Diskussionen über die verdrehte und unverdrehte Zahlensprechweise im Deutschen. Es bildete sich ein Verein „Zwanzigeins“, (www.verein-zwanzigeins.de), der sich für die schreibgerechte Zahlensprechweise einsetzt. Im April 2008 erschien ein Buch, in dem wichtige Fakten und Argumente dieser Debatte zusammengestellt sind, siehe [G]. Eine Google-Suche zum Stichwort „zwanzigeins“ gibt über 2000 Treffer an. In den Medien wurde vielfältig über die Zwanzigeins-Initiativen berichtet.

Didaktische Konzepte

Das praktizierte Konzept zur Unterrichtung der Zahlensprechweise ist dogmatisch und völlig antiquiert. Es wird eingeübt, aber nichts erläutert. Alles soll natürlich und normal erscheinen. Die Lehrpersonen werden mit dem Problem allein gelassen. In Schulbüchern wird das Thema gemieden. Man sollte ein neues Konzept entwickeln. Die Art der Inversionen und Verdrehungen beim Sprechen und Schreiben von Zahlen sollte dargelegt werden. Grundlegende Fakten über die Verbreitung des Stellenwertsystems sollten vermittelt werden. Die schreibgerechte Form sollte, eventuell auch im Sach- oder Englischunterricht behandelt werden.

Unzulängliche Sprache im Mathematikunterricht

Das Verhältnis zwischen allgemeiner Gesellschaft und Mathematik ist einigermaßen schlecht. Mathematiker fühlen sich oft unverstanden und viele Mitglieder der Gesellschaft schalten schnell ab, wenn Mathematiker zu erklären anfangen, da man davon ausgeht, dass man ohnehin nicht viel verstehen wird. Diese genannte Tatsache hat eine Reihe von schädlichen Auswirkungen und man sollte doch den Versuch unternehmen, ein besseres Verhältnis herauszubilden. Mir scheint, dass die im Mathematikunterricht an Schulen und Hochschulen verwendete Sprache oft nicht angemessen ist. Die Zahlensprechweise ist hierfür ein gutes Beispiel, doch gibt es eine Vielzahl ähnlicher Fälle, auch wenn dafür kein verbreitetes Bewusstsein zu existieren scheint. Nehmen wir mal die sogenannten gemischten Zahlen wie 2 1/3. Diese Zahl soll 2+1/3 bedeuten, jedoch versteht man unter 2 x in der Mathematik stets x+x. Bruchrechnung scheint für viele Kinder schwer zu sein und wird durch solche Zweideutigkeiten noch weniger verständlich.

MINT-Initiativen

Spitzenverbände der deutschen Wirtschaft unterstützen seit einigen Jahren mit Hilfe der Arbeitsgemeinschaft SCHULEWIRTSCHAFT eine Reihe von MINT-Initiativen, in denen die Ausbildung in den Fächern Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik qualitativ und quantitativ gestärkt werden sollen. Seit etwa einem Jahr gibt es den Verein „MINT Zukunft", der diese Aktivitäten bündeln, vernetzen und argumentativ stützen soll. In diesem Rahmen ist auch eine MINT-Initiative zur Vertiefung der Debatte über die deutsche Zahlensprechweise angesiedelt.

Zwanzigeins auch mal im Mathematikunterricht

Im Januar 2009 hat der Verein „Zwanzigeins" ein Schreiben an alle Schulministerien der deutschen Länder gerichtet, in dem der Vorschlag unterbreitet wird, jedes Kind in wenigstens einer Unterrichtsstunde seiner Schulzeit mit der unverdrehten Zahlensprechweise bekannt zu machen. Es sollte auch erläutert werden, wieso im Deutschen die Zahlen nicht schreibgerecht gesprochen werden. Die bisherigen Reaktionen sind erstaunlich positiv.

Literatur

[G] Gerritzen, L., Hauenschild, M., Kimmeskamp, P, Voigt, J. (Hrsg) (2008) *Zwanzigeins: Für die unverdrehte Zahlensprechweise: Fakten Argumente Meinungen*, Bochum, Universitätsverlag Brockmeyer

[H] Höfler, A. (1910) *Didaktik des Mathematischen Unterrichts*, Berlin, Verlag Teubner

[Sche] Schellenberger, M. (1953) *Zahlwort und Schriftbild der Zahl*, Leipzig, VEB Bibliographisches Institut

[Schü] Schülke, A.(1915) *Zahlwörter und Positionssystem*, in: Journal für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen begründet 1869 von J.C.V. Hoffmann, 518 – 522, Berlin, Verlag Teubner

[W] Weinstock, H. (2003) *Kleine Schriften: Ausgewählte Studien zur alt-, mittel- und frühneuenglischen Sprache und Literatur*, Heidelberg, Universitätsverlag Winter

[Y] Yfrah, G. (1991) *Universalgeschichte der Zahlen*, Frankfurt, Campus-Verlag

Boris GIRNAT, Münster

Geometrische Weltbilder in der Sekundarstufe I – Eine Klassifikation aus Lehrersicht

Seit einigen Jahren hat der Beliefs-Begriff Einzug in die Lehrerforschung gefunden und wird im deutschen Sprachgebiet häufig mit dem Ausdruck „Weltbilder“ in Verbindung gebracht, den Törner und Grigutsch (1994) geprägt haben. Die Beliefs-Forschung geht davon aus, dass *grundlegende und überdauernde Lehrereinstellungen* einen wichtigen Einfluss auf das Lehren und Lernen von Mathematik haben, und sieht ihr Ziel darin, solche Einstellungen explizit zu machen (Wilson und Cooney 2002).

An dieser Stelle wird eine Klassifikation von Weltbildern vorgestellt, die den bewusst offen gehaltenen Begriff der Beliefs für den Fall der Sekundarstufengeometrie präzisieren soll. Als erste empirische Anwendung wird dargestellt, wie diese Klassifikation bei der Rekonstruktion individueller Lehrercurricula (zu diesem Begriff Eichler 2006) benutzt worden ist. Eine besonders interessante Ausprägung wird dabei inhaltlich näher vorgestellt.

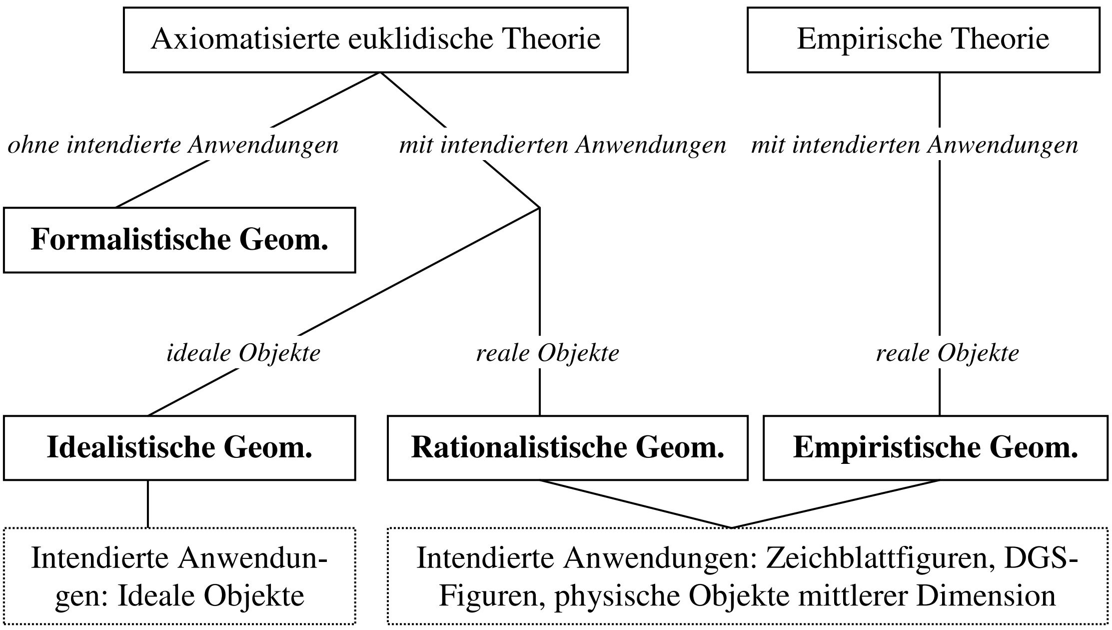
Unsere Klassifikation greift zwei Ideen auf, die bislang vor allem zur Untersuchung von Schülervorstellungen benutzt worden sind: Houdement und Kuzniak (2001) entwickelten die Theorie der geometrischen Arbeitsbereiche, um zu untersuchen, ob Schüler geometrische Probleme *deduktiv-beweisend* oder *experimentell-messend* bearbeiten. Struve (1990) und Andelfinger (1988) konzentrierten sich vor allem auf die Frage, welche *Gegenstandsauffassung* Schüler entwickeln: Verstehen sie geometrische Objekte eher als abstrakte, ideale Gebilde oder eher als empirische Objekte der realen, physischen Welt? Sie kommen zu dem Ergebnis, dass eine empirische Auffassung vorherrsche und sich unterrichtliche Schwierigkeiten oder Rahmungsdifferenzen vor allem dadurch ergäben, dass Lehrer weitgehend eine idealistische Sicht einnähmen und sie früher oder später auch bei ihren Schülern als selbstverständlich voraussetzten, während die Schüler tatsächlich größtenteils in einer empirischen Denkweise verharrten. Beide Studien gehen davon aus, dass unter Lehrern eine idealistische Sichtweise weitgehend selbstverständlich sei (vgl. Andelfinger 1988, S. 108).

Wir greifen die beiden zentralen Ideen der genannten Studien auf – nämlich die *Gegenstandsauffassung* und den *Begründungskontext* – und entwickeln daraus eine Klassifikation, ohne uns zunächst von Vermutungen über ihre empirische Verbreitung unter Lehrern leiten zu lassen. Wir verwenden die sogenannte strukturalistische Wissenschaftstheorie (Stegmüller 1985), um diese Ideen systematisch in einen ausgearbeiteten theoretischen Rahmen einzuordnen, den teilweise auch Struve (1990) benutzt hat.

Dem wissenschaftstheoretischen Strukturalismus zufolge lässt sich jede mehr oder weniger wissenschaftliche Theorie durch zwei Bestandteile charakterisieren, nämlich durch ihre Menge *intendierter Anwendungen* und durch ihre *grundlegenden theoretischen Annahmen* – im Grenzfall höchster Präzision durch ein minimales, vollständiges Axiomensystem, wie es für die Elementargeometrie in verschiedenen Axiomatisierungen der euklidischen Geometrie zur Verfügung steht. Nimmt man eine euklidische Hintergrundtheorie als gegeben an, so gibt es mehrere Möglichkeiten, diese Theorie zu interpretieren, d. h. ihre intendierten Anwendungen festzulegen: Man kann auf Anwendungen verzichten und einen *formalistischen* Standpunkt einnehmen; man kann sie auf *idealistischer* Weise deuten und ideale Objekte als Gegenstand der Geometrie annehmen, welche die euklidischen Axiome ohne Näherung erfüllen, aber nicht physisch existieren; oder man kann als Gegenstand der Geometrie reale, physische Objekte betrachten, auf die sich die euklidische Hintergrundtheorie, ähnlich wie die meisten Naturwissenschaften, nur mit einer gewissen Näherung bezieht.

Eine euklidische Hintergrundtheorie als gegeben anzunehmen, versperrt den Zugang zu einem Fall, der sich gerade bei Schülerstudien als besonders interessant herausgestellt hat. Dies ist der Fall, bei dem keine euklidische Theorie vorab vorliegt, sondern eine geometrische Theorie sich erst im experimentellen Umgang mit räumlichen Objekten ergibt. Aus dem Grund führen wir auch auf der Ebene der grundlegenden theoretischen Annahmen eine Unterscheidung ein, indem wir einmal von einer axiomatisch-euklidischen Geometrie und einmal von einer (inhaltlich wie auch immer gearteten) empirischen Geometrie ausgehen. Im empirischen Fall ist es klar, dass sie sich weder bloß auf ideale Objekte beziehen, noch als eine rein formale Theorie interpretiert werden kann, d. h. ihre intendierten Anwendungen sind wegen ihres experimentell-empirischen Charakters von vornherein auf reale, physische Objekte festgelegt.

Damit treten reale Objekte zweimal als intendierte Anwendungen auf, nämlich einmal im Rahmen einer axiomatisch-euklidischen Theorie und einmal in Verbindung mit einer empirischen. Wir nennen den ersten Fall eine *rationalistische* Geometrie, den zweiten eine *empiristische*, um im Einklang mit erkenntnistheoretischen Positionen des 17. und 18. Jahrhunderts zu betonen, dass im rationalistischen Fall die Theorie unumstößlich als vorab gegeben angesehen und „bloß“ angewandt wird, ohne dass reale Anwendungen die Theorie bestätigen oder falsifizieren könnten, während der empiristische Fall die gegenteilige Annahme macht: Die Theorie wird aus der Erfahrung „entwickelt“ und hat sich experimentell an ihr zu bewähren. Die folgende Grafik gibt eine Übersicht über unsere Klassifikation:



Unsere Klassifikation wird gegenwärtig dazu genutzt, in einer Interviewstudie die individuellen Geometriecurricula von neun Sekundarstufenlehrern zu interpretieren. Dabei lassen sich drei Idealisten und jeweils zwei Formalisten, Rationalisten und Empiristen erkennen, was vor dem Hintergrund von Andelfinger (1988) eine überraschende Bandbreite ist. Auswirkungen des geometrischen Weltbildes lassen sich bei Formalisten, Idealisten und Rationalisten erst nachweisen, wenn Themen wie Anwendungen, Medien, Konstruktionen oder das Problemlösen angesprochen werden. Bei der Begriffsbildung und Erkenntnissicherung sind kaum Unterschiede zu erkennen – was unsere These stützt, dass ihnen zwar verschiedene Gegenstandsauffassungen, aber ein gemeinsames Theorieverständnis zugrunde liegt. Diese drei Richtungen werden hier nicht weiter verfolgt. Es wird vielmehr anhand einer Fallstudie dargestellt, wie sich eine empiristische Sicht auf den entscheidenden Unterschied zu den anderen drei Richtungen auswirkt, nämlich auf das *Theorieverständnis*, also die Art, wie *Begriffe* und *Begründungen* in einer empiristischen Geometrie „aus der Erfahrung" gewonnen werden. Wir zitieren zunächst vier Interviewepisoden:

> Ich verwende gern Zerlegungsbeweise, dass sie [die Schüler] auch irgendwo etwas anfassen können – Mathematik mit allen Sinnen –, dass man also Figuren zerschneidet, zusammenlegt, guckt, was dann passt. […] Wir arbeiten hier mit Euklid, und damit lässt sich auch schon vieles schön veranschaulichen – vor allem dadurch, dass man dadurch auch Beweise führen kann, zum Beispiel Satz des Thales, dass man eben sagt, so, wir bewegen jetzt mal den dritten Punkt dieses Dreiecks auf dem Kreisbogen und gucken uns den Winkel an und stellen eben fest, der ist immer 90°, und nehmen das dann als Beweis. […] Dass man sich π annähert, indem man Umfänge von Kreisen misst, das hatte mein Mathefachleiter auch mal gemacht, hat verschiedene kreisförmige Gegenstände mitge-

bracht. Dann sollten die ausgemessen werden und dann geguckt werden, gibt es da irgendeinen Zusammenhang zwischen dem Umfang und dem Radius, was ich auch für eine bessere Näherung halte, als wenn man sagt, wir gehen jetzt über vom Viereck zum Fünfeck, zum Sechseck, zum Siebeneck;; und das daran darüber das π entsteht. Es ist auch die Frage, ob das dann unbedingt sinnvoll ist, denn wichtig für die Schüler ist es ja später, dass sie Sachen lösen können. Das muss jetzt nicht unbedingt exakt sein, sondern dass die entsprechende Nachkommastelle noch genau ist je nach der Anwendungssituation, π oder Wurzel 2, so genau kann ich ja nicht mehr messen.

Diese Auszüge deuten auf mehreres hin: 1)Begriffe werden operational, ostensiv oder durch Rückgriff auf die Alltagssprache eingeführt, was insbesondere Bewegungs- und Passungsbegriffe einschließt; 2) mathematische Konstanten werden wie Naturkonstanten messend ermittelt, infinitesimale Approximation wird durch Näherungs- und Mittelungsverfahren ersetzt; 3) Beweise haben keinen deduktiven Charakter, sondern erscheinen als empirische Prüfung relativ isolierter Hypothesen und haben Ähnlichkeiten mit der naturwissenschaftlichen Methode des gesteuerten, wiederholbaren Experimentes; 4) Standards der Exaktheit ergeben sich nicht aus mathematischen Gründen, sondern aus Anforderungen eines realen Kontextes und der Messgenauigkeit; 5) eine „Aufgabenorientierung“ scheint erkennbar.

Abschließend kann nur angedeutet werden, dass die hier befragten empiristischen Lehrer auch bei „allgemeineren“ Kompetenzen wie dem Problemlösen, Modellieren, Konstruieren und Argumentieren von den anderen drei Richtungen abweichen – vermutlich weil ein empiristisches Geometriebild manche Voraussetzungen dieser Bereiche vernachlässigt. Inwiefern aber unsere ersten empirischen Ergebnisse verallgemeinerungsfähig sind und wie sich unsere vier Klassen prozentual verteilen, könnte allerdings erst eine umfassendere, repräsentative Studie zeigen.

Literatur

Andelfinger, B. (1988): *Geometrie: Didaktischer Informationsdienst Mathematik*. Soest: Soester Verlagskontor.

Eichler, A. (2006): Individual Curricula – Beliefs behind Beliefs. In A. Rossman & B. Chance (Hrsg.): *ICOTS-7 Conference Proceedings*. Salvador: IASE, CD-ROM.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2001): Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italy (Web).

Stegmüller, W. (1985): Theorie und Erfahrung: Theorienstrukturen und Theoriendynamik. Band 2(2), *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

Struve, H. (1990): *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim, Wien, Zürich: BI Wissenschaftlicher Verlag.

Törner, G., & Grigutsch, S. (1994): „Mathematische Weltbilder“ bei Studienanfängern – eine Erhebung. *Journal für Mathematik-Didaktik*,15 3/4, 211–251.

Stefan GÖTZ, Wien und Jürgen MAASZ, Linz

Bildungsstandards in Österreich – Chance, Risiko oder Sturm im Wasserglas?

Einleitung

2007 hat das Österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik, welches an der Universität Klagenfurt verortet ist, die „Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe" herausgegeben: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf (13.2.2009). Kernstück dieser Schrift ist ein Modell für *mathematische Kompetenzen,* die sich auf mathematische Tätigkeiten, Inhalte sowie auf die Art und Komplexität der erforderlichen Vernetzungen beziehen. Sie werden also durch ein *Tripel* charakterisiert bzw. festgelegt, dessen Komponenten den *Handlungsbereich* (H1 Darstellen, Modellbilden; H2 Rechnen, Operieren; H3 Interpretieren; H4 Argumentieren, Begründen), den *Inhaltsbereich* (I1 Zahlen und Maße; I2 Variable, funktionale Abhängigkeiten; I3 Geometrische Figuren und Körper; I4 Statistische Darstellungen und Kenngrößen) und den *Komplexitätsbereich* (K1 Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten; K2 Herstellen von Verbindungen; K3 Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren) betreffen. Kompetenzen werden generell als *längerfristig* verfügbare kognitive Fähigkeiten verstanden.

Die bildungstheoretische Orientierung besteht aus zwei einander ergänzenden Anforderungen: *Lebensvorbereitung* und *Anschlussfähigkeit*. Sie werden in Hinblick auf die Inhaltsbereiche spezifiziert.

Konkretisiert werden die 4·4·3=48 daraus resultierenden Kompetenzen („Standards") in *(Beispiel-)Aufgaben* (mit Musterlösungen), die zweifache Orientierungsfunktion haben: erstens soll mit ihnen das dreidimensionale Standards-Modell erläutert werden, sie fungieren also als Prototypen. Zweitens sollen die Aufgaben Hinweise auf die bundesweiten Standards-Tests geben, wobei auch die vorgestellten Antwortformate (kurze geschlossene, Multiple-Choice- und offene Antworten) gemeint sind.

Im BUNDESGESETZBLATT FÜR DIE REPUBLIK ÖSTERREICH, Jahrgang 2009, Ausgegeben am 2. Jänner 2009 (Teil II), findet sich nun die „Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur über Bildungsstandards im Schulwesen": http://www.bifie.at/sites/default/files/VO_BiSt_2009-01-01.pdf (13.2.2009). In einer Anlage werden u. a. die Kompetenzen *verbal* als Tätigkeiten beschrieben, die die vier Handlungsbereiche vorgeben, bezogen auf die vier Inhaltsbereiche und kategorisiert nach den drei Komplexitätsbereichen. Dabei ist die Klagenfurter Version 4/07 Vorlage – ein großer Erfolg für die Fachdidaktik im Vergleich zur Genese der Entwürfe von Standards(-Aufgaben) davor (s. u.): http://www.bifie.at/sites/default/files/VO_BiSt_Anlage_2009-01-01.pdf (13.2.2009). Standards-Überprüfungen für die achte Schulstufe sind ab 2011/12 vorgesehen.

Bildungspolitische Implikationen

Standards werden die Rahmenbedingungen mathematikdidaktischer Arbeit nachhaltig beeinflussen. Wenn sich die Mathematikdidaktik nicht nur darauf beschränken will, kommentarlos im gesetzten Rahmen „sine ira et studio“ wissenschaftlich tätig zu sein, sondern auf die Gestaltung selbst Einfluss nehmen möchte, verlässt sie notwendig den Bereich, in dem sie – jedenfalls nach Auffassung von Max Weber oder des im Umfeld des kritischen Rationalismus (Karl Popper u. a.) vertretenen Dezisionismus – wirken bzw. bleiben sollte. Sie betritt das Feld der Politik. Wie erfolgreich kann sie da sein? Es wäre sehr naiv anzunehmen, dass die Bildungspolitik einfach das wissenschaftlich beste mathematikdidaktische Konzept auswählt und dann umsetzt, abgesehen davon, dass es dieses „beste“ Konzept gar nicht gibt (wie die jahrzehntelangen Bemühungen der Mathematikdidaktik gezeigt haben). Einige der vergangenen Ungereimtheiten seien hier ohne Anspruch auf Vollständigkeit angedeutet.

Die Testaufgaben, von deren Qualität bekanntlich sehr viel abhängt, wurden immer wieder von Ad-hoc-Gruppen von LehrerInnen schnell und billig produziert, die mit solcher Arbeit wenig Erfahrung haben. (Der Vorschlag, hochwertige Aufgaben z. B. aus Deutschland zu importieren, wurde aus Kostengründen abgelehnt.) Wie nicht anders zu erwarten, wurden die meisten dieser Aufgaben – z. T. nach sehr teuren Tests mit vielen SchülerInnen – stillschweigend entsorgt und nicht weiter verwendet.

Aufgrund nachhaltigen fachdidaktischen Drucks wurden einige der Testaufgaben als offene Aufgaben gestellt, aber nicht gründlich ausgewertet, weil es eine vom Ministerium beauftragte Institution gibt, die Multiple-Choice-Aufgaben kostengünstig per Computer auswertet und für andere Auswertungen (fachdidaktisch wertvollerer Antwortformate) kein Geld vorhanden ist. Dazu passt auch, dass mit der Testung von Aufgaben vom Ministerium ein Testpsychologe betraut worden ist, der naturgemäß fachdidaktische Aspekte wie Qualität und Validität der Aufgaben, die er methodisch aufwändig testen lässt, nicht beurteilen kann. Dabei sind alle von ihm getesteten Aufgaben streng geheim und damit auch einer fachdidaktischen Analyse entzogen.

Fachdidaktische Implikationen

In Zukunft muss, so haben wir den Eindruck, noch an folgenden Punkten gearbeitet werden: Es besteht völlige Unklarheit darüber, was mit Schulen oder LehrerInnen geschehen soll, die beim Standards-Test schlecht abschneiden. Nach dem derzeitigen Stand der Information passiert gar nichts. Das Spektrum der Möglichkeiten reicht von öffentlichen Rankings über offizielle Mahnungen bis zu Hilfsmaßnahmen, die nicht nur traditionelle LehrerInnenfortbildung umfassen. Fachdidaktik kann und will hier fundierte Beiträge zur Schul- und Unterrichtsentwicklung leisten. *Werner Peschek,* der Leiter des Kompetenzzentrums, und Stefan Götz sehen dazu einerseits die *normative* und die *diagnostische* Funktion der Standards, andererseits die Ebene der *Klasse,* der *Schule* und des *Bildungssystems*. Daraus ergibt sich gedanklich eine *Unterstützungsmatrix* mit sechs Feldern mit teilweise jeweils spezifischen Einträgen.

Auf der *normativen Ebene des Bildungssystems* beispielsweise könnte die *Differenzierung des österreichischen Bildungssystems* in Gymnasium Unterstufe und Hauptschule dazu führen, die bildungstheoretische Orientierung der Bildungsstandards zur Unterscheidung heranzuziehen: s. o. Wohin tendieren die SchülerInnen (nach) der achten Schulstufe in der jeweiligen Schule? – In einen Beruf oder in eine weiterführende Schule? Es wäre interessant, die schon vorliegenden Orientierungsaufgaben danach zu klassifizieren bzw. neue Aufgaben zu finden, die eher auf die eine oder eher die andere Anforderung fokussieren.

Auf der *diagnostischen Ebene der Schule* werden u. a. (schulabhängig unterschiedlich ausgeformte) Fachgruppen bzw. -konferenzen einzelner Schulen darüber beraten, wie die jeweiligen Schulergebnisse unter den gegebenen schulischen Rahmenbedingungen zu bewerten sind, welche schulorganisatorischen und unterrichtlichen Maßnahmen an dieser Schule gesetzt werden können, um schulspezifische Stärken weiter auszubauen bzw. spezifische Defizite abzubauen. Die Schule kann dabei *selbst* entsprechende Diagnoseinstrumente (zu speziellen Fragen/Problemen) entwickeln und diese an ihrer Schule einsetzen. Bei der Entwicklung schulspezifischer Diagnoseinstrumente wie auch bei der Interpretation und Bewertung von Schulergebnissen (bei landesweiten oder auch schulinternen Tests) kann Fachdidaktik beratend und unterstützend mitwirken (vgl. Maaß 2009).

Wenn *schulische Schwerpunktsetzungen* beispielsweise die Stundenanzahl in Mathematik verändert haben, dann ist es angezeigt, hier Ursachen für Defizite oder aber auch überdurchschnittliche Leistungen zu suchen. Im ersten Fall können die Bildungsstandards helfen, Zielvorgaben zu definieren, die es unbedingt zu erreichen gilt. Wenn eine fundierte fachdidaktische

Analyse zeigt, dass innerhalb dieses vorgegebenen schulischen Rahmens einzelne Bildungsstandards, die als Regelstandards vorgegeben sind, im Durchschnitt nicht oder nur schwer erreichbar sind, dann besteht Handlungsbedarf: Das Fach Mathematik muss (wieder) gestärkt werden, sei es von der Stundenzahl her, oder aber, auch das ist denkbar, dass Überbetonungen aufgrund der Schwerpunktsetzung einen Ausgleich verlangen.

Wenn Standards darauf reduziert werden, dass Aufgaben aus einem vorher bekannten Aufgabenpool für den Abschlusstest trainiert werden, können diese Aufgaben noch so gut formuliert sein, die Standards sind dadurch natürlich *nicht* erfüllt: Kompetenzen wie Argumentieren oder Modellieren lassen sich durch Testaufgaben nur zu kleinen und eher unwichtigen Teilen überprüfen. Dabei fällt nach *Eva Sattlberger,* Wien, bei den Orientierungsaufgaben, die auf das *„Argumentieren"* fokussieren und in offene Antwortformate münden, auf, dass unterschiedliche Aufforderungen wie „Zeige", „Begründe", „Begründe mathematisch", „Beschreibe", „Erkläre" durchaus verschiedene Tätigkeiten meinen. Es muss hier wohl erst eine entsprechende Unterrichtskultur zur Orientierung der SchülerInnen (und LehrerInnen!), solche Aufgaben „richtig" zu bearbeiten, mit fachdidaktischer Unterstützung entstehen. Weiters ist nach Sattlberger bei diesen Aufgaben die Argumentationsbasis, also das Exaktifizierungsniveau in der Angabe nicht immer erkennbar. Hier fehlt also noch ein (fachdidaktisch fundierter) Aushandlungsprozess.

Im Gegenteil: Standards sollten (auch) als Chance von LehrerInnen begriffen werden, *Freiräume* im Mathematikunterricht zu definieren.

Resümee und Desiderata

Die Standards stehen zwischen dem, was in den österreichischen Lehrplänen gefordert wird und dem, was derzeit durchschnittlich im Unterricht erreicht wird. M. a. W.: Wenn der Mathematikunterricht für die zehn- bis fünfzehnjährigen SchülerInnen unter dem positiven Einfluss der Standards tatsächlich so stattfände, dass die große Mehrheit von ihnen diese Regelstandards erreicht, würde dies einen großen Fortschritt gegenüber dem Ist-Zustand bedeuten. Aber auch dann wäre keinesfalls alles erfüllt, was in den Lehrplänen eigentlich gewünscht wird, z. B. sind die vielen wichtigen *allgemeinen Unterrichtsziele* ebendort – ein Stichwort dazu sei genannt: Mündige BürgerInnen als Erziehungsziel – davon *nicht* (direkt) berührt.

Literatur

Maaß, J. (2009). Bildungsstandards: Schulen und LehrerInnen brauchen Unterstützung. *GDM-Mitteilungen, 86,* 15 - 19.

Theresa GRADNITZER, Klagenfurt

Mathematikbezogene Beliefs von Eltern

Beliefs von Schüler(inne)n beeinflussen – wie Untersuchungen gezeigt haben – ihr Lernen von Mathematik. Die Beliefs von Schüler(inne)n werden ihrerseits durch verschiedene Faktoren beeinflusst. Ein solcher Faktor sind sicherlich die Beliefs ihrer Lehrer(innen). Wenig untersucht ist bisher die Frage, wie Elternbeliefs die mathematikbezogenen Beliefs ihrer Kinder beeinflussen.

1. Definition von Beliefs

Törner (2000) zitiert Schoenfelds Definition von Beliefs wie folgt:

„Beliefs are mental constructs that represent the codification of people's experiences and understandings. […] People's beliefs shape what they perceive in any set of circumstances, what they consider to be possible or appropriate in those circumstances, the goals they might establish in those circumstances, and the knowledge they might bring to bear in them."

Dies ist eine generelle Beschreibung von Beliefs. In meiner Arbeit interessieren mich besonders die von Törner (2000) beschriebenen fachgebietsspezifischen Beliefs (domain specific beliefs). In meinem Fall ist das Fachgebiet Mathematik und die Beliefs mathematikbezogene Beliefs oder mathematic-related beliefs.

Ich möchte mehr über die Beliefs von Eltern sowie deren Kindern bezüglich Mathematik bzw. Schulmathematik herausfinden. Törner (1996) nennt den Überbegriff des „mathematischen Weltbildes":

„Unter dem ‚mathematischen Weltbild' (kurz: MWB) eines Individuums wollen wir dessen subjektiv implizites Wissen über Mathematik verstehen, das ein weites Spektrum von Vorstellungen umfasst: Es handelt sich also um Systeme von Normen, Überzeugungen, Hintergrundtheorien und (Leit-) Vorstellungen über Mathematik. Sie entstehen aus den Erfahrungen beim Umgang mit Mathematik und bestimmen vielfach, wie man an die mathematische Arbeit herangeht. Vom Ansatz her enthalten mathematische Weltbilder nicht nur kognitive Komponenten, sondern auch affektive Elemente."

Generell ist mein Ansatz, dass ich, fürs erste, unter Beliefs die Einstellungen und Vorstellungen zu Schul-Mathematik verstehe.

2. Motivation

In meiner eigenen Schulpraxis habe ich den Eindruck gewonnen, dass Einstellungen gegenüber Mathematik bzw. Schulmathematik die Schüler(innen) beim Herangehen an Probleme oder im Umgang mit Mathematik beeinflussen. In der Beliefsforschung geht man von noch mehr aus:

„The learning outcomes of students are strongly related to their beliefs and attitudes about mathematics.” (Furinghetti & Pehkonen, 2000)

Es gibt etliche Studien zu Schüler(innen)beliefs, und in diesen Studien sind auch die Einflussfaktoren dieser Schüler(innen)beliefs genannt.

Lehrer(innen)beliefs sind ein wesentlicher Faktor, der Schüler(innen)beliefs beeinflusst, aber auch peer-beliefs, Beliefs von Freunden, Klassenkameraden, Lehrer(inne)n – nicht nur Mathematiklehrer(inne)n – sowie alle um die Kinder herum beeinflussen auf verschiedenste Weise ihre Beliefs, so auch deren Eltern.

Zu Lehrer(inne)n, deren Beliefs zu Mathematik und zu Mathematikunterricht gibt es auch schon einige Untersuchungen, sowie Untersuchungen zum Einfluss der Lehrer(innen)beliefs auf die Schüler(innen)beliefs.

Elternbeliefs sind wenig erforscht, ohne dass klar wäre, dass sie nicht auch eine nennenswerte Rolle spielen. Eltern haben allgemein einen großen Einfluss auf ihre Kinder, und dadurch höchstwahrscheinlich auch bezüglich Mathematik und Mathematiklernen.

Die Eltern haben schon vor der Schulzeit sehr viel Einfluss auf ihre Kinder, auch daher wäre es doch interessant einmal herauszufinden, was Eltern so salopp gesagt „über Mathematik denken“.

3. Vorläufige Forschungsfragen und Methoden

Welche mathematikbezogenen Beliefs haben Eltern, haben deren Kinder, und inwieweit meinen sie selbst, dass sie sich gegenseitig beeinflussen? Zusätzlich würde mich noch interessieren, ob Eltern ihren Kindern andere Beliefs vermitteln, wenn diese Kinder Mädchen oder Buben sind.

Um das herauszufinden, scheint mir die Form eines Interviews am geeignetsten. Ich arbeite qualitativ und führe Interviews mit Eltern und deren Kindern, weil ich zuerst einmal herausfinden möchte, was es an Ein- und Vorstellungen bezüglich Mathematik, und vor allem Schulmathematik, gibt. Da ich aber mit Interviews sicher nur ein paar wenige Ergebnisse erzielen kann, entschied ich mich für die 6. und 7. Schulstufe. Die Gründe, warum ich gerade dieses Alter gewählt habe, sind vielfältig.

Ich nehme an, dass die Einflüsse der Eltern größer sind, solange die Kinder kleiner sind, bzw. haben dann die Schüler(innen) nicht so viele verschiedene Lehrer(innen) genossen, die wiederum Einfluss auf ihre Beliefs hatten. Da mein Interesse der Sekundarstufe I gilt, waren die Schulstufen 5-8 daher besonders interessant, wobei ich 5 wegen der Umstiegsproblematik und 8 wegen der Pubertät ausklammerte.

Um nun in Erfahrung zu bringen, welche Ein-/Vorstellungen bezüglich Mathematik von Eltern und deren Kindern existieren, habe ich einen Interviewleitfaden mit folgenden "Fragen-Kategorien" – sowohl für die Eltern als auch für die Schüler(innen) – angelegt:

- Fragen zur Einstellung zu Mathematik
- Wie viel Mathematik hatten sie selbst in der Schule, und wie wurde sie empfunden?
- Wie viel Mathematik brauchen sie jetzt?
- Soll Mathemathematik unterrichtet werden?
- Schule generell
- Mathematik der Kinder – Interaktion
- Mathematik generell (als Wissenschaft)
- Generelles zu Beliefs

4. Erste Ergebnisse

Aus den bisher geführten Interviews möchte ich hier das Beispiel einer Familie anführen, und zwar die Reaktion auf die allererste Frage: „Wenn Du an Mathematik denkst, was fällt Dir spontan dazu ein?“ (Die Familie hat 3 Kinder, 2 Töchter (12 und 14 Jahre alt) und einen Sohn (1 Jahr alt). Die Transkription ist im Dialekt geschrieben.)

Tochter, 12 Jahre alt: *Zahlen, ganz viele Zahlen. - Meine Mathelehrerin, an die ich nicht so gern denk, weil in der Schule, also ich mag Mathe prinzipiell, aber sie erklärts nicht, wenn sie was – wenn wir was nicht verstehen, dann zuckt sie aus, und macht einfach weiter. Und deswegen mog i – mag ich sie nicht so gern.*

Tochter, 14 Jahre alt: *Meine Lehrerin, und wie sie vor der Klasse steht und sie versucht was zu erklären und keiner versteht was. - Formeln und Zahlen und einfach Rechnen.*

Vater: *Schule, Computer, Programmieren*

Mutter: *<u>wäh!</u> [wie: pfui!] Na fürchterlich – schon – aus der Erfahrung her, irgendwie immer so, ein großes Fragezeichen. Das sich eigentlich erst geklärt hat, dann in der Lehrerausbildung, wo i sag, wo du viele Dinge einfach verstanden hast, die du vorher nur irgendwie automatisch gemacht hast, gell! Also alles immer so nach Schema F, aber verstandesmäßig zu unserer Zeit war das glaub i net so aufgebaut, dass schon darum ging, dass die Kinder das verstehen. Des war das große Problem, glaub i. Vor allen Dingen Division, das is so das große Thema, aber das liegt wahrscheinlich daran, dass ich das jetzt in der dritten Klasse Volksschule gerade angehe mit den Schülern, gell, und das is immer so – och![seufzt] – wenn die Division einmal vorbei is und die Kinder haben das halbwegs gecheckt, dann is so der große Brocken in der Volksschule vorbei, gell. Is halt so.*

Zu bemerken ist hier, dass die Mutter Volksschullehrerin ist und selbst auch Mathematik unterrichtet. Daher war die Reaktion für mich besonders überraschend. Zu späterem Zeitpunkt im Interview war auch noch sehr interessant zu sehen, dass die Mutter zwischen Mathematik und „Rechnen in der Praxis“ unterscheidet, das für sie nicht Mathematik ist.

Es ist auch interessant zu sehen, dass in dieser Familie alle Mitglieder sehr gut über die Einstellungen der anderen Familienmitglieder bezüglich Mathematik Bescheid wissen.

Es müssen noch weitere Interviews geführt werden und der Interviewleitfaden noch weiter mit der Hilfe grundlegender Theorien überarbeitet werden. Allerdings haben schon die ersten Interviews gezeigt, dass dieses Thema sehr fruchtbar sein kann.

Literatur

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2000). A comparative study of students' beliefs concerning their autonomy of doing mathematics. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 8(4)*, 7-26.

Törner, G. (1996). Mathematische Weltbilder von Lehrern. In Müller, K. P. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 30. Bundestagung für Didaktik vom 4. bis 8. März 1996 in Regensburg.* (S. 433 – 436). Franzbecker: Hildesheim.

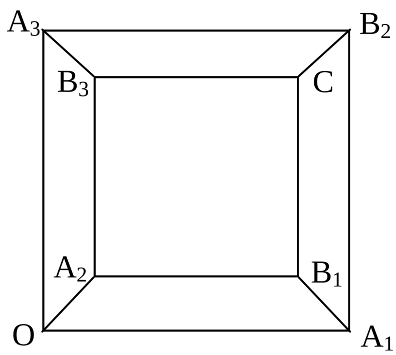
Törner, G. (2000). Kategorisierungen von Beliefs - einige theoretische Überlegungen und phänomenologische Beobachtungen. In Neubrand, M. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 3. März 2000 in Potsdam*. (S. 682 – 685). Hildesheim: div-Verlag Franzbecker.

Günter GRAUMANN, Bielefeld

Der vierdimensionale Würfel -ein Bindeglied zwischen anschaulicher und mehrdimensionaler Geometrie

Bekanntlich kann der vierdimensionale Würfel als Projektion im dreidimensionalen Raum konkret veranschaulicht werden. Anzahlen von Ecken, Kanten, etc. sowie Fragen zu Parallelität und Orthogonalität, die man für ein n-dimensionales Spat nur mit kombinatorischen Mitteln algebraisch erarbeiten kann, lassen sich für den vierdimensionalen Würfel (oder das vierdimensionale Spat) am dreidimensionalen Modell bzw. dessen Darstellung in der Ebene gut nachvollziehen.
Geeignet ist ein solches Thema deshalb als Ergänzung zur Vektorgeometrie in der Sekundarstufe II oder zur Anfängervorlesung über Lineare Algebra in der Hochschule. Über diese Rolle als Bindeglied zwischen Anschauung und abstrakter Geometrie hinaus kann das Thema auch als Einstieg in mehrdimensionale Geometrie und deren algebraische Darstellung genutzt werden, wobei man erfahren kann, dass sich auch von vierdimensionalen Gebilden eine gewisse Anschauung einstellt.

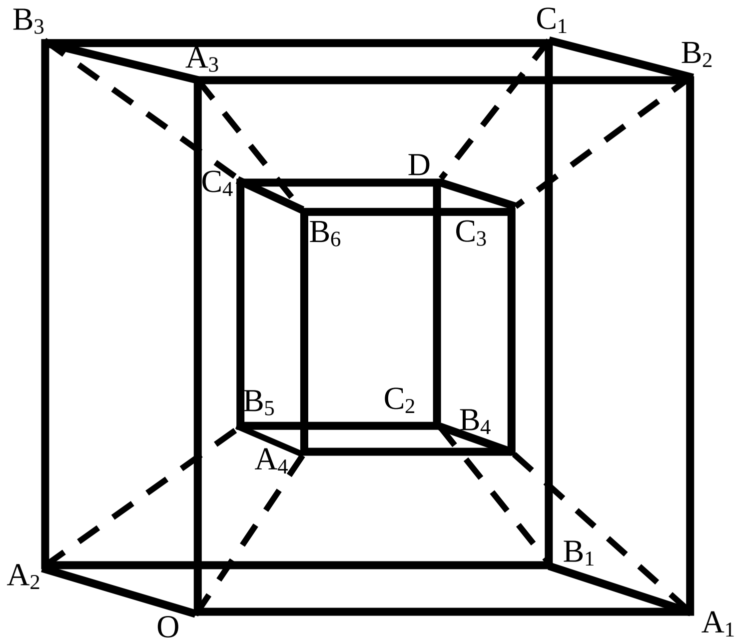
Um die Darstellung des vierdimensionalen Würfels im drei- bzw. zweidimensionalen anschaulichen Raum besser zu verstehen, empfiehlt es sich zunächst kurz mit der ***Darstellung des dreidimensionalen Würfels*** im zweidimensionalen Raum zu beschäftigen. Wir wählen für unseren Zweck eine Projektion entlang einer Mittellinie des dreidimensionalen Würfels.



Zunächst wird daran klar, dass die Ecken von den Vektoren $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ erzeugt werden mit $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$ und $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$. Außerdem wissen wir, dass alle im Bild parallelen Kanten und auch die vier schräg nach hinten verlaufenden Kanten am dreidimensionalen Würfel jeweils zueinander parallel sind. Da auch alle Kanten am Würfel gleichlang sind, stellen die sechs im Bild auftretenden Vierecke Quadrate dar (einige – die trapezförmigen – eben nur perspektivisch verzerrt). Entsprechend können weitere Eigenschaften des dreidimensionalen Würfels an der Darstellung erläutert werden.
Der **4-dimensionale Würfel** wird von vier gleichlangen, paarweise zueinander senkrechten Vektoren $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ im R^4 erzeugt. Bildet man

mit diesen vier Vektoren als Basisvektoren ein Koordinatensystem des R^4, so sehen die ***16 Eckpunkte*** des 4-dimensionalen Würfels wie folgt aus:
(0/0/0/0), (1/0/0/0), (0/1/0/0), (0/0/1/0), (0/0/0/1),
(1/1/0/0), (1/0/1/0), (0/1/1/0), (1/0/0/1), (0/1/0/1), (0/0/1/1),
(1/1/1/0), (1/1/0/1), (1/0/1/1), (0/1/1/1) und (1/1/1/1).
Man kann diese Punkte in zwei Gruppen gliedern, und zwar einmal alle mit einer 0 an der vierten Stelle und zweitens alle mit einer 1 an der vierten Stelle. Wir gliedern damit den 4-dimensionalen Würfel in zwei „dreidimensionale Seiten“ (die hier jeweils einen Würfel bilden) – in Analogie zur Gliederung des dreidimensionalen Würfels in die beiden Seitenflächen der x-z-Ebene und der dazu parallelen Seitenfläche mit y = 1.
Die jeweils 8 Eckpunkte in den beiden dreidimensionalen Seitenflächen werden zunächst untereinander mit Kanten verbunden wie beim dreidimensionalen Würfel; danach kommen dann noch Kanten zwischen den beiden „Seitenwürfeln“ hinzu, und zwar als Verbindung von jeweils (x/y/z/0) mit (x/y/z/1). Insgesamt erhalten wir (12+12+8) also ***32 Kanten***, von denen jeweils 8 zueinander parallel und gleichlang sind.
Aus dieser Überlegung ergibt sich dann auch eine drei- bzw. zweidimensionale Darstellung des Kantenmodells eines 4-dimensionalen Würfels analog zur Darstellung eines dreidimensionalen Würfels in der Ebene aus zwei konzentrischen Quadraten mit Verbindung der jeweils entsprechenden Ecken.

zweidimensionales Bild der Projektion eines vierdimensionalen Würfels in den dreidimensionalen Anschauungsraum



Die 8 Eckpunkte und 32 Kanten kann man an diesem Bild gut sehen und abzählen. Auch kann man parallele Kanten gut erkennen.
Da im vierdimensionalen Raum die gestrichelten Linien durch Verschiebung des Vektors $\overrightarrow{OA_4}$ entstehen, sind auch diese acht alle zueinander paral-

lel. Da alle vier Basisvektoren gleichlang sind, sind im vierdimensionalen Raum alle 32 Kanten gleichlang. Daraus ergibt sich, dass alle Hyperebenenseiten des vierdimensionalen Würfels von dreidimensionalen Würfeln gebildet werden.
Bei dieser Darstellung treten (wie auch bei Projektionen von dreidimensionalen Figuren in die Ebene) Verzerrungen auf; z. B. stellt der von $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_4}$ erzeugte Würfel im Bild einen Pyramidenstumpf dar; er ist aber im vierdimensionalen Raum ein dreidimensionaler Würfel (analog zum Trapez im Bild des dreidimensionalen Würfels weiter oben). Gleiches gilt für die anderen fünf Seitenkörper mit gestrichelten Linien. Zusammen mit dem „inneren" Würfel und dem „äußeren" Würfels erhalten wir also ***8 (dreidimensionale) Würfel***, die die „***Oberfläche***" (d. h. die 3-dimensionale Oberfläche) des 4-dimensionalen Würfels bilden. Wir können diese acht Oberflächenwürfel auch kombinatorisch aus den Basisvektoren bilden, und zwar indem jeweils drei von ihnen einen Würfel erzeugen und jeder dieser Würfel noch verschoben mit dem jeweils vierten Basisvektor auftritt (vgl. etwa am Bild den von $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_4}$ erzeugten Würfel und den Würfel, der durch Verschiebung mit $\overrightarrow{OA_3}$ aus diesem hervorgeht („unten" und „oben").

Im Fall des 4-dimensionalen Körpers gibt es aber auch noch eine „***zweidimensionale Oberfläche***"; sie besteht aus allen Seitenflächen der acht drei-dimensionalen Oberflächenwürfel. Da jede solche Fläche stets in genau zwei der acht Oberflächen-Würfel vorkommt, erhält man (½ · 8 · 6) also ***24*** von den 2-dimensionalen ***Seitenflächen***, die alle zueinander kongruente Quadrate sind. Man kann diese Anzahl aber auch anhand des obigen Bildes bestimmen, z. B. indem man zuerst jeweils die sechs Seitenflächen des inneren und des äußeren Würfels zählt und dann die zwölf Verbindungsflächen zwischen je einer Kante des inneren Würfels mit entsprechender Kante des äußeren Würfel hinzuzählt. Algebraisch erhalten wir die 24 Seitenflächen, indem wir aus jeweils zwei der vier Basisvektoren ein Quadrat erzeugen und dieses dann mit den beiden anderen Basisvektoren sowie deren Summe verschieben. So erhalten wir immer vier parallele Quadrate mit sechs (4 über 2) Basisquadraten.

Betrachten wir nur ***eine Ecke*** (etwa O) so stellen wir fest, dass *von ihr 4 Kanten ausgehen* (etwa OA_1, OA_2, OA_3 und OA_4). Je zwei von ihnen bilden eine 2-dimensionale Seitenfläche, d.h. *die Ecke gehört 6 solcher Seitenflächen an* (etwa OA_1A_2, OA_1A_3, OA_1A_4, OA_2A_3, OA_2A_4 und OA_3A_4 - man veranschauliche sich diese am Bild). Je drei der von dieser Ecke ausgehenden Kanten bilden einen 3-dimensionalen Oberflächen-Würfel (etwa

$OA_1A_2A_3$, $OA_1A_2A_4$, $OA_1A_3A_4$ und $OA_2A_3A_4$); d.h. *die Ecke gehört 4 Oberflächenwürfeln* an.

Wir wollen uns nun noch der Anzahl von ***Diagonalen*** zuwenden. Da in jeder 2-dimensionalen Seitenfläche zwei *„Seitenflächendiagonalen“* vorhanden sind, gibt es von diesen[1] insgesamt *48*. Da in jedem „Oberflächen-Würfel“ vier *„Seitenwürfel-Raumdiagonalen“* vorhanden sind, erhält man insgesamt *32* von ihnen[2].
Im 4-dimensionalen Würfel gibt es aber auch noch *„echte Raumdiagonalen“*, die in keiner Seitenfläche und keinem Oberflächenwürfel liegen. Diese entstehen als Verbindung einer Ecke mit einer anderen Ecke, die mit dieser keinen Oberflächenwürfel gemeinsam hat. Betrachten wir eine Ecke (etwa O) so gehen von ihr – wie oben schon festgestellt – 4 Kanten aus (zu A_1, A_2, A_3 und A_4). Weiterhin gehen durch jede Ecke 6 der zweidimensionalen Seitenflächen, in der von jeder durch diesen Eckpunkt eine Seitenflächendiagonale ausgeht (zu B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 und B_6). Schließlich gehört die Ecke noch 4 Oberflächenwürfeln an, von denen jeder eine dreidimensionale Raumdiagonale durch den fixierten Eckpunkt hat (von O zu C_1, C_2, C_3 und C_4). Damit bleibt nur noch 1 Eckpunkt übrig, der mit der zu Beginn fixierten Ecke keine Verbindung in Form einer Kante, Seitenflächendiagonale oder dreidimensionalen Oberflächenwürfel-Diagonale hat (für O ist das der Eckpunkt D); d. h. *von jeder Ecke geht genau eine „echte Raumdiagonale“ aus*. Da diese genau zwei Eckpunkten angehört und wir 16 Eckpunkte haben, gibt es im 4-dimensionalen Würfel also genau ***8 echte (4-dimensionale) Raumdiagonalen*** (OD, A_1C_4, A_2C_3, A_3C_2, A_4C_1, B_1B_6, B_2B_5, B_3B_4).

Überlegungen zu Orthogonalität, Diagonalquadraten bzw. -würfeln, Teilfiguren, Symmetrien oder Dualgebilden jeweils mit Analogiebetrachtungen zum dreidimensionalen Würfel bieten ein weiteres Feld für Erkundungen mit der Kombination von anschaulichen, an der bildlichen Darstellung orientierten und vektoriellen, abstrakten Überlegungen.

Literatur

GRAUMANN, G. (2009). Spate in drei und mehr Dimensionen. In: Der Mathematikunterricht Jg. 55 · Heft 1 · Februar 2009, S. 16 - 25.

---

[1] Es ist eine gute Übung, diese mittels der Eckpunktbezeichnungen aufzuzählen.
[2] Zur Förderung von Raumvorstellung und Kombinatorik sollten diese in eine Kopie des obigen Bildes eingezeichnet sowie deren Eckpunktbezeichnungen (und vektorielle Bezeichnungen) abgeleitet werden.

Gabriele GRIESHOP, Vechta

Das Projekt „Schulbuch KO“ – Schulbuchaufgaben kompetenzorientiert einsetzen

1. Mathematikunterricht im Spiegel der Bildungsstandards

Die Qualität von Mathematikunterricht wird im Wesentlichen durch drei Aspekte gekennzeichnet (Blum et al. 2006). Neben einer effektiven und schülerorientierten Unterrichtsführung stehen die kognitive Aktivierung der Lernenden und eine fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung im Vordergrund. Letztere zeigt sich dadurch, dass Schülerinnen und Schülern vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzorientierten Tätigkeiten (Argumentieren, Kommunizieren, Modellieren etc.) geboten werden. Laut Blum et al. (2006) sind kompetenzorientierte Aufgaben (Aufgaben zu deren Lösung nicht nur technische Fertigkeiten benötigt werden) das „nahe liegende Vehikel“ zur Realisierung eines solchen Mathematikunterrichtes.

Seit Verabschiedung der Bildungsstandards werden Lehrkräfte mit einer Flut kompetenzorientierter Aufgaben konfrontiert. Doch das bloße Vorhandensein solcher Aufgaben reicht nicht aus, um den Unterricht tatsächlich in den Dienst der (prozessbezogenen) Kompetenzen zu stellen. Wird das Potenzial zur Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen in den Aufgaben nicht erkannt, so kann dieses auch im Unterricht nicht fruchtbar gemacht werden. Für Lehrkräfte bedeutet dies, nicht vordergründig kompetenzorientierte Aufgaben einzusetzen, sondern mit Aufgaben ganz bewusst kompetenzorientiert zu arbeiten. Um ihren Unterricht gemäß den Qualitätsanforderungen zu gestalten, benötigen Lehrkräfte nicht zwingend neues Material, sondern können durchaus übliche Schulbuchaufgaben mit einem Blick durch die Kompetenzbrille betrachtend einsetzen.

2. Projektidee

Mit dem Projekt „Schulbuch KO“ wird grundsätzlich das Ziel verfolgt, mit Schulbuchaufgaben so zu arbeiten, dass Gelegenheiten für kompetenzorientierte Tätigkeiten geschaffen werden. Lehrkräfte sollen sich nicht einfach nur an der Fülle kompetenzorientierter Aufgaben bedienen, sondern sich bewusst mit dem eigenen Schulbuch auseinandersetzen und die Fähigkeit entwickeln, Aufgaben zielgerichtet zu variieren. Das Variieren von Aufgaben stellt eine (wichtige) Facette beim „Arbeiten mit Aufgaben“ (vgl. Bruder 2006) dar. Büchter und Leuders (2005) machen deutlich, dass das zielgerichtete Variieren von Aufgaben ein notwendiges Handwerkszeug für Lehrkräfte ist, um Aufgaben für die eigenen Zwecke aufzuarbeiten.

Ergänzend zu den Schulbüchern bieten Schulbuchverlage Lehrermaterialien an. Während hier detailliert didaktische und methodische Hinweise gegeben werden, fehlt häufig eine kompetenzorientierte Ausrichtung. Dieses Desiderat war ausschlaggebend für die Entstehung dieses Projektes. Es sollten zusätzlich zu den Lehrermaterialien praktikable Instruktionsunterlagen erstellt werden, mit denen Lehrkräften die Möglichkeit gegeben wird, auch anhand des Schulbuchs den Anforderungen der Lehrpläne im Zeitalter der Bildungsstandards gerecht zu werden.

3. Umsetzung der Projektidee

In Kooperation mit einer Lehrkraft des vierten Schuljahres sind gezielt vier aufeinander folgende Aufgaben aus einem Schulbuch (Denken und Rechnen 4, S. 36-37, Westermann Verlag 2006) gewählt worden. Die Auswahl wurde von der Intention geleitet, auf Basis dieser Aufgaben zu jedem der vier prozessbezogenen Kompetenzbereiche (Kommunizieren/Argumentieren, Darstellen, Modellieren, Problemlösen) eine Unterrichtsstunde zu konzipieren. Zu diesem Zweck sind – ohne Beteiligung der Lehrkraft – die ausgewählten Aufgaben analysiert (vgl. Walther 2004) und mit Blick auf die favorisierten Teilkompetenzen variiert worden:

- Ein „Starkes Päckchen“ sollte nicht nur zum Üben von Rechenfertigkeiten genutzt, sondern durch eine Betonung von Muster und Strukturen als Gelegenheit für Tätigkeiten aus dem Bereich „Argumentieren/Kommunizieren“ gesehen werden (mathematische Zusammenhänge entdecken und Vermutungen äußern).

- Eine einfach sprachlich formulierte Sachaufgabe sollte nicht nur gelöst, sondern vielmehr genutzt werden, um Hürden beim Übergang von realen Ausgangssituationen in die Mathematik abzubauen (Kompetenzbereich „Modellieren“).

- Eine „Zahlenjagd“ sollte nicht nur als Kopfrechnen-Übung dienen, sondern genutzt werden, um heuristische Strategien zum Annähern an die gesuchte Zahl offen zu legen („Problemlösen“).

- Ein Säulendiagramm und die dort dargestellten Daten zur Thematik „Verkehrsentwicklung“ sollten zum Kompetenzbereich „Darstellen“ genutzt werden, um Zahlen über Veränderungen erzählen zu lassen.

4. Durchführung des Projektes

Die kooperierende Lehrkraft hat zu diesen Variationen praxistaugliche Instruktionsunterlagen (im Umfang einer DINA4-Seite) mit Angaben zu den intendierten Kompetenzbereichen und konkreten Hinweisen zu den einzelnen Unterrichtsphasen in folgendem Design erhalten:

Ausgewählte Schulbuchaufgabe
Favorisierter prozessbezogener Kompetenzbereich: ● intendierte Teilkompetenz(en) ● Einbezug inhaltsbezogener Kompetenz(en)
Unterrichtsmaterial: ● Folien, Arbeitsblätter etc.
Einstieg: ● konkret vorgefertigter Vorschlag für einen Unterrichtseinstieg
Erarbeitung: ● konkret formulierte Fragestellungen mit entsprechenden Arbeitsblättern
Ergebnissicherung / Reflexionsphase: ● bewusst intensive Reflexionsphase ● Klärung aufgetretender Schwierigkeiten
Kompetenzorientierte Tätigkeiten: ● Beschreibung der zu erwartenden kompetenzorientierten Tätigkeiten für diese Unterrichtsstunde

Die dazugehörigen vier Unterrichtsstunden wurden (nur) auf Grundlage dieser Vorgaben durchgeführt und entlang eines speziellen Beobachtungsbogens mit Blick auf die favorisierten prozessbezogenen Kompetenzen (teilnehmend) beobachtet. Im Fokus der Beobachtung stand zum einen die Umsetzung der Instruktionen und zum anderen die tatsächlich realisierten kompetenzbezogenen Tätigkeiten der Kinder. Eine zweite Lehrkraft der selben Schule hat ohne vorherige Absprache und ohne Instruktion die Schulbuchaufgaben in ursprünglicher Form eingesetzt, allerdings mit dem Wissen um eine kompetenzorientierte Woche. Auch diese Unterrichtsstunden sind teilnehmend beobachtet worden, um vergleichen zu können, wie die entsprechenden Schulbuchaufgaben üblicherweise – nur mit Rückgriff auf die Lehrermaterialien – im Unterricht eingesetzt werden. Im Anschluss sind die Beobachtungsbögen der einzelnen Unterrichtsstunden (instruiert – nicht instruiert) verglichen und reflektierend ausgewertet worden.

Die Auswertung sollte zum einen Aufschluss darüber geben, ob es – im Sinn von Blum et al. (2006) – gelungen ist, mit den Instruktionsunterlagen Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten zu schaffen. Zum anderen sollte der Vergleich (mit und ohne Instruktionen) aufzeigen, ob Handlungsbedarf besteht, Lehrkräfte bei der Planung solcher Lerngelegenheiten zu unterstützen, die Ausgangspunkte für kompetenzorientierte Tätigkeiten darstellen.

5. Ergebnisse und Fazit

Ein Vergleich der teilnehmenden Beobachtungen der instruierten und nicht instruierten Unterrichtsstunden zeigt tatsächlich unterschiedliche kompetenzorientierte Tätigkeiten in den einzelnen Unterrichtsphasen:

- Die Unterrichtseinstiege der instruierten Lehrkraft sind bewusst – zielgerichtet auf die favorisierten Teilkompetenzen – und nicht intuitiv kompetenzorientiert ausgerichtet.
- In den Erarbeitungsphasen führen die weiterführenden Fragen der zur Verfügung gestellten Arbeitsblätter über das Üben technischer Fertigkeiten hinaus zum Kern der intendierten Kompetenzbereiche.
- Die Phasen der Reflexion dienen nicht primär der Ergebnissicherung, sondern werden genutzt, um mit den Kindern zusammen nochmals die kompetenzbezogenen Tätigkeiten zu verinnerlichen.

Diese Ergebnisse zeigen neben der Praxistauglichkeit der Instruktionsunterlagen, dass mit dessen Hilfe tatsächlich kompetenzorientierte Tätigkeiten initiiert werden können. Der Vergleich mit den nicht instruierten Unterrichtsverläufen zeigt, dass es durchaus an Unterstützung (oder einen Blick durch die Kompetenzbrille) bedarf, um Aufgaben bewusst in den Dienst prozessbezogener Kompetenzen zu stellen. Diese Ergebnisse und das positive Feedback der instruierten Lehrkraft geben Anlass, über eine Weiterentwicklung des Projektes und eine Intensivierung der Kooperation Schule-Hochschule nachzudenken. Es ist die Idee einer „Aufgabenwerkstatt“ entstanden, nicht nur für Lehrkräfte in Form einer Lehrerfortbildung, sondern auch für Studierende in Form eines Seminars. Hier kann im Sinn der Empfehlungen von DMV, GDM und MNU („Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik“, Juni 2008) die mathematikdidaktische Basiskompetenz „...bewerten Bildungsstandards, Lehrpläne und Schulbücher und nutzen sie reflektiert für die Unterrichtsgestaltung“ entwickelt werden.

Literatur

Blum, W./Drüke-Noe, C./Hartung, R./Köller, O. (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret - Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. (2006): Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht. Erläuterungen zu Modul 1 – SINUS-Transfer. Quelle: http://www.sinus-transfer.de.

Büchter A./Leuders T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln – Lernen fördern-Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Walther, G. (2004): Gute Aufgaben – Andere Aufgaben. Erläuterungen zu Modul 1 – SINUS-Transfer Grundschule. Quelle: http://www.sinus-grundschule.de.

Roxana GRIGORAŞ, Stefan HALVERSCHEID, Universität Bremen

Mathematisieren ohne Zahlen – eine Fallstudie

Es kommt nicht selten vor, dass sich Schüler bei mathematischen Modellierungsaufgaben fragen, wo sich die mathematischen Merkmale befinden, die für eine sinnvolle Bearbeitung benötigt werden. Dies kommt besonders bei Modellierungsaufgaben vor, bei denen die mathematische Natur in der Aufgabenstellung nicht von vorneherein klar ersichtlich ist. Dieser Beitrag untersucht im Rahmen einer Fallstudie, welche Merkmale bzw. Konzepte einer Modellierungstätigkeit einen mathematischen Charakter verleihen.

1. Theoretischer Hintergrund

Der Vollständigkeit halber soll erst kurz erläutert werden, was bei dieser Studie unter dem Begriff ‚Mathematisieren' verstanden wird. In den meisten Darstellungen von Modellierungskreisläufen werden die reale und mathematische Welt als unterschiedliche Umgebungen angesehen. Der Prozess bzw. die Aktivitäten, die den Übergang von der realen in die mathematische Welt darstellen, werden als Mathematisieren bezeichnet.

Freudenthal (1991) verwendete den Begriff des Mathematisierens sogar außerhalb des Modellierungsbereichs. Dabei vertrat er den Standpunkt, dass es keine Mathematik ohne Mathematisieren gäbe („there is no mathematics without mathematisation"); er hat zwischen horizontalem und vertikalem Mathematisieren unterschieden.

In dieser Studie soll der Begriff „Mathematisieren" anhand des Konzeptes fundamentaler Ideen untersucht werden. Schwill (1993) stellt vier Kriterien auf, anhand welcher entschieden werden kann, ob eine mathematische Idee fundamental ist. Demnach sollte eine fundamentale Idee eine Rekurrenz innerhalb unterschiedlicher Teile der Mathematik haben, sie sollte an verschiedenen Punkten in einem Curriculum wieder auftauchen, sie sollte im historischen Ablauf wieder gefunden werden, und nicht zuletzt sollte sie in entsprechenden Alltagsaktivitäten verankert sein.

Bezüglich der Beziehung zwischen mathematischen Ideen und fundamentalen mathematischen Ideen gibt es häufig mathematische Ideen im Modellierungsprozess, welche nicht unbedingt fundamentale Ideen darstellen. Es gibt Prozesse, welche keine oder kaum formale Mathematik beinhalten. Fundamentale Ideen werden hier als eine Art Bezugsrahmen vorgeschlagen, mit Hilfe welcher die mathematische Natur von Prozessen auf einem bestimmten mathematischen Niveau diskutiert werden kann, selbst wenn der mathematische Charakter nicht unbedingt ersichtlich ist. Schulkinder sind oft nicht in der Lage, Mathematik zu formalisieren, da sie nur begrenzt mathematische Abläufe, Algorithmen, etc. beherrschen. Aus diesem Grunde wird hier vorgeschlagen, nach fundamentalen mathematischen Ideen in ihren Ansätzen zu suchen und diese zu analysieren.

Die folgende Liste ist der Synopse von Schweiger (2006) aus diversen Quellen zu fundamentalen Ideen entnommen: Algorithmus, Charakterisierung, Kombinieren, Gestaltung, *Annäherung*, Erklären, Funktion, *Geometrisieren*, Unendlichkeit, Invarianz, Linearisierung, *Lokalisieren*, *Messen*, *Zählen*, *Optimalität*, Wahrscheinlichkeit, und Formen. Kursiv sind diejenigen fundamentalen Ideen dargestellt, die innerhalb dieser Fallstudie beobachtet wurden. Des Weiteren ist es bisweilen schwierig zu entscheiden, ob alle mathematischen Ideen auf fundamentale Ideen dieser Liste bezogen sind.

2. Untersuchungsdesign und Ziel

Bremer Gymnasialschüler/innen im Alter zwischen 12 und 13 Jahren, ohne Vorbildung im Modellieren, wurden in Teams organisiert, wobei die Teamstärke zwei bis drei Mitglieder betrug. Die Bearbeitung der Aufgabe wurde mit Videokameras im universitären Labor aufgezeichnet. Dabei hatten die Schüler, die sich freiwillig für diese Untersuchung gemeldet haben, ca. 50 Minuten Bearbeitungszeit für folgende Aufgabe zur Verfügung:

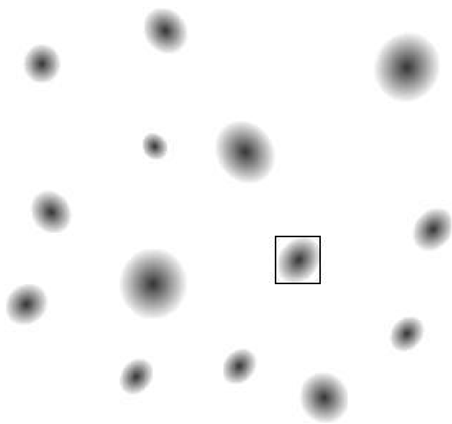


Abb. 1: Kraterlandschaft auf der Marsoberfläche

„Ein Astronaut wird zum Mars geschickt. Sein Landeplatz ist mit einem Quadrat gekennzeichnet und seine Aufgabe besteht darin mit einem Marsmobil auf der Marsoberfläche zu fahren und die Krater zu untersuchen. Du kannst das Marsmobil des Astronauten von der Erde aus steuern. In welcher Reihenfolge würdest du den Astronauten die Krater untersuchen lassen? Finde dabei erst heraus, welche Aspekte zu berücksichtigen sind. Beachte auch, dass der Astronaut wieder zum Landeplatz (Quadrat) zurückkehren muss, da er von dort aus wieder zurück zur Erde fliegt."

Diese Übung hatte zum Ziel zu erforschen, ob fundamentale mathematische Ideen in den Lösungsversuchen der Schüler beobachtet werden konnten. Aus diesem Grunde wurde speziell eine Aufgabe ohne Zahlen (Marsaufgabe) für den Mathematisierungsprozess von Schüler/inne/n gewählt, die Schwierigkeiten beim Formalisieren von Mathematik haben.

3. Ergebnisse

Zwei Lösungsvorschläge von Schüler/inne/n für die oben beschriebene Marsaufgabe sind in Abb. 2 dargestellt. Tatsächlich handelt es sich bei der Marsaufgabe um eine Variante eines ‚Travelling salesman problem' (siehe auch Grigoraş & Halverscheid (2008)), bei der - jeder Krater zu Erkundungszwecken besucht werden muss. Dabei wurde kein Hinweis gegeben, wie oft ein Krater vom Astronauten besucht werden muss. Es handelt sich um ein bekanntes kombinatorisches Optimierungsproblem, bei dem die Schüler/innen beim Lösen völlig allein gelassen und damit konfrontiert wurden herauszufinden, was überhaupt ‚optimal' für sie bedeutet.

Die verschiedenen Farben und Pfeile deuten auf unterschiedliche Routen hin, mit Hilfe derer entschieden wird, welche Route die Beste ist. Die Zahlen in dem rechten Lösungsvorschlag bezeichnen die Reihenfolge in welcher der Astronaut die Krater besuchen sollte. Gleichzeitig stellt dies eine Art Kennzeichnung bzw. Beschriftung der einzelnen Krater dar. Nach einigen Messungen entschieden sich die Kinder für die günstigste Route einer Länge von 29 cm in der Skizze. Daraufhin hatten sie die Idee, auch den Durchschnitt der Abstände zwischen den verschieden Kratern zu berechnen, wobei sie zu dem Resultat 2 cm kamen. Allerdings wussten die Kinder nicht genau, weswegen sie dies berechneten. Deshalb waren sie nicht sicher, wie sie weiter mit diesem engagiert erworbenen Resultat weiter anstellen sollten.

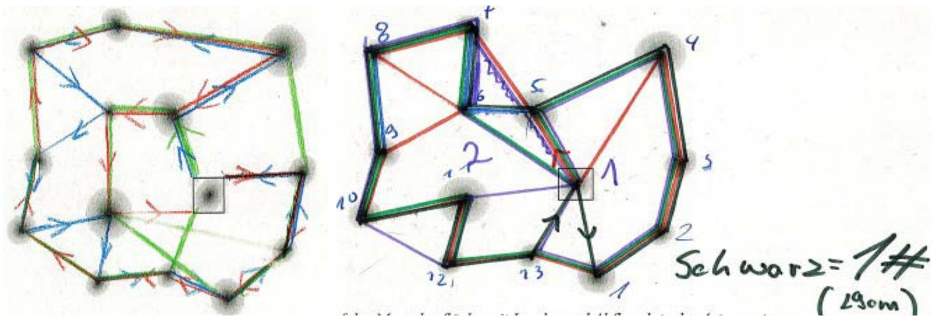


Abb. 2: Zwei Lösungsvorschläge für die Marsaufgabe

Die folgenden Muster wurden während der Bearbeitung beobachtet: die Schüler/innen haben sich selbst immer nur kleine Teilaufgaben auferlegt, ohne sich unbedingt im Klaren zu sein, weshalb sie so verfahren haben, wie beispielsweise beim Errechnen des Durchschnittsabstandes zwischen den Kratern. Was jedoch in den verschiedenen Lösungsansätzen erkannt werden konnte ist, dass fundamentale mathematische Ideen als Startpunkt für die weitere Ausarbeitung und Konkretisierung der Aufgabe benutzt werden.

4. Zusammenfassung

Das Aufgabenkonzept widerspricht gängigen Gewohnheiten aus dem Mathematikunterricht, wobei auch die Bewusstheit des mathematischen Charakters der Aufgabe zwischen den Schüler/inne/n stark variiert. Wenn diese Bewusstheit aber besteht, schien sie dies beim Anfertigen der ‚machbaren' Aufgabenteile zu beflügeln. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass zwei verschiedene Typen des Mathematisierens gegenwärtig waren, nämlich bewusstes und unbewusstes Mathematisieren.

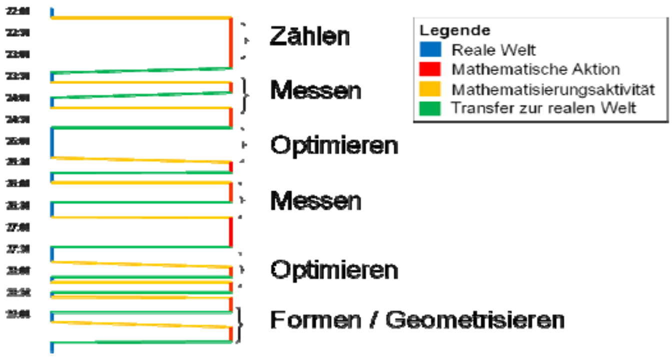


Abb. 3: Schema zum Wechsel zwischen Realität (links) und Mathematik (rechts)

In dieser Fallstudie kamen am häufigsten die fundamentalen Ideen Messen, Zählen, Optimieren und Geometrisieren vor. Dabei überschneiden sich fundamentale Ideen oft, wie beispielsweise Optimieren und Messen, welche nicht selten zusammen vorkommen. Beispielsweise kann das Suchen der Mitte sowohl als Geometrisierung, wie auch als Optimierung betrachtet werden. Dabei kann ein fließender Übergang zwischen Mathematik und Realität bemerkt werden. Das Diagramm in Abb. 3 fasst die Erkenntnisse der Fallstudie zusammen und gibt einen Auszug der Art der geschilderten Abläufe anhand einer Zeitskala (vergleiche auch (Halverscheid, 2008)).

Literatur

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Grigoraş, R. & Halverscheid, S. (2008). Modelling the travelling salesman problem: relations between the world of mathematics and the rest of the world. In Figueras O. & al. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. Vol. 3, (pp. 105-112), Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Halverscheid, S. (2008). *Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments*, Journal for Research in Mathematics Education, 40 (2), 225 – 234.

Schweiger, F. (2006). Fundamental ideas. A bridge between mathematics and mathematical education. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds), *New Mathematics Education Research and Practice* (pp. 63 -73). Sense Publishers.

Schwill, A. (1993). *Fundamentale Ideen der Informatik*, Journal for Research in Mathematics Education, 93(1), 20 – 31.

Thomas HAFNER, Bielefeld

Proportionalität und Prozentrechnung – längsschnittliche Entwicklung elementarer Modellierungskompetenzen

Die curricularen Kerninhalte der Sekundarstufe I *Proportionalität* und *Prozentrechnung* nehmen über den Schulalltag hinaus eine bedeutende Rolle in unserem Leben ein. So begegnet man z. B. Prozentsätzen beim täglichen Einkauf in Form von Mehrwertsteuer, Preisnachlässen oder -steigerungen. Nicht zuletzt aus diesen Beispielen wird deutlich, dass der sichere Umgang dieser Lerninhalte unumstritten zur mathematischen Grundbildung zählt. Daher ist es umso besorgniserregender, dass viele Schülerinnen und Schüler in diesen Bereichen sogar am Ende der Pflichtschulzeit erhebliche Defizite aufweisen (vgl. etwa Berger, 1991).

In diesem Zusammenhang stellen sich folgende Fragen: Wie verläuft die Kompetenzentwicklung in den Inhaltsbereichen *Proportionalität* und *Prozentrechnung* von der 5. bis zur 10. Klasse? Worin liegen besondere Schwierigkeiten beim Lösen entsprechender anwendungsorientierten Aufgaben bei Schülerinnen und Schüler?

Forschungszusammenhang

Vergleichsuntersuchungen wie TIMSS und PISA sind querschnittlich angelegt und geben daher kaum Aufschlüsse über Entwicklungsverläufe mathematischer Kompetenzen sowie mögliche Gründe für Leistungsdefizite (vgl. Pekrun, 2002). Dies war unter anderem Motivation für die von der DFG geförderten Längsschnittstudie *Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA)* (vgl. vom Hofe et al., 2005).

Beginnend mit einer repräsentativen Stichprobe bayerischer Fünftklässler wurde diese zwischen 2002 und 2007 im Jahresrythmus am Ende eines Schuljahres getestet. Die konzeptionelle Leitidee des Mathematikleistungstests versteht mathematische Grundbildung im Sinne von *mathematical literacy* (vgl. OECD, 2003). Hinsichtlich dieser Anforderungen nimmt die prozessbezogene Kompetenz des Modellierens einen zentralen Stellwert ein.

Modellieren und die Rolle von *Grundvorstellungen*

Die Bearbeitung kontextgebundener Problemstellungen vollzieht sich in mehreren aufeinander aufbauenden Schritten. Die einzelnen Stationen und Phasen des zugehörigen Lösungs- bzw. Modellierungsprozesses werden im Modellierungskreislauf in Abb. 1 vereinfacht schematisch und graphisch dargestellt (vgl. Schupp, 1988; vom Hofe, 2003).

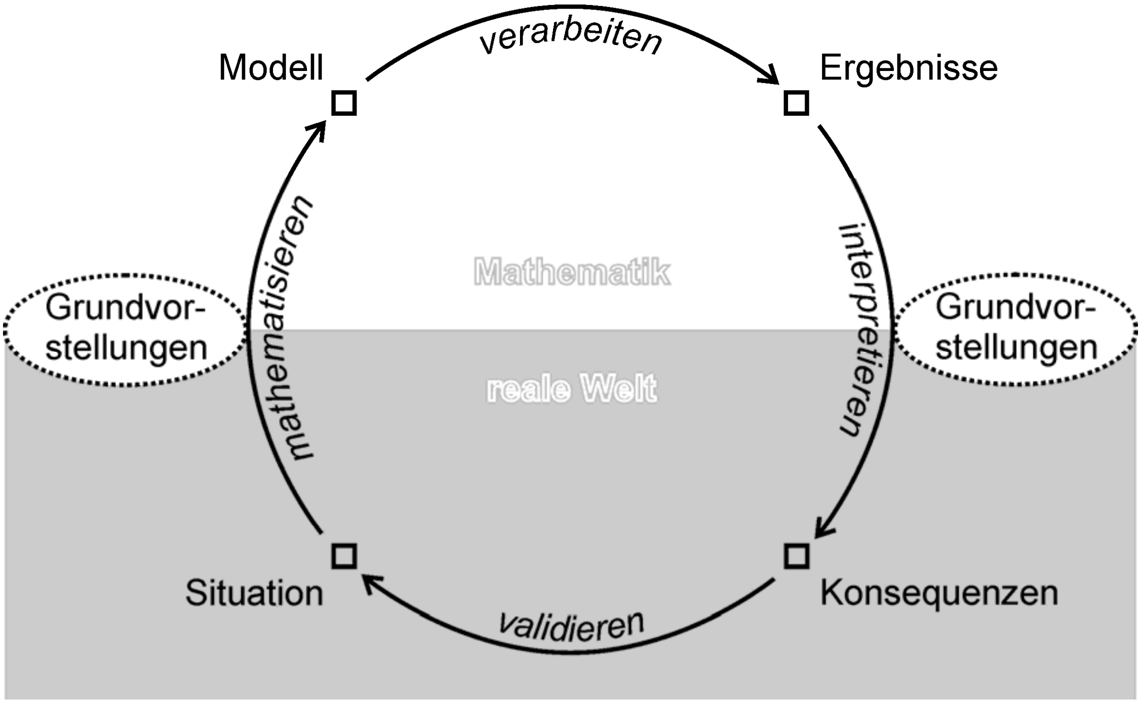


Abb. 1: Modellierungskreislauf mit Grundvorstellungen

Ausgehend von einer problemhaltigen *Situation* aus der *realen Welt* muss diese zuerst in ein *mathematisches Modell* überführt werden. Durch diese Abstraktion wird ein Wechsel von der *realen Welt* in die *Mathematik* vollzogen. Aus den Informationen des Modells lassen sich mathematische *Ergebnisse* ermitteln, die wiederum mit Blick auf die reale Welt *interpretiert* werden müssen. Daraus resultierende *Konsequenzen* für das zu untersuchende Problem werden in einem letzten Schritt *validiert* und auf Plausibilität überprüft.

Um die Übergänge zwischen realer Welt und Mathematik erfolgreich zu gestalten sind *Grundvorstellungen* zu mathematischen Inhalten notwendig. Zur theoretischen Einordnung des Grundvorstellungskonzeptes sei auf vom Hofe (1995) verwiesen.

Im Rahmen dieses Beitrags werden nur Beispiele für Grundvorstellungen zum Prozentbegriff betrachtet. Blum & vom Hofe (2003) stellen diesbezüglich drei unterschiedliche Grundvorstellungen heraus.

– von-Hundert-Vorstellung: Eine Menge G bestehe aus lauter Teilen zu je 100 Einheiten. Unter p% von G versteht man von jedem 100er-Paket p Einheiten.
– Hundertstel-Vorstellung: p% wird als Bruch bzw. Bruchoperator aufgefasst.

– Bedarfseinheiten-Vorstellung: Einer Grundmenge wird der Prozentsatz 100% zugeordnet. Die Grundmenge wird damit in 100 gleich große Teile zerlegt.

Längsschnittliche Kompetenzentwicklung

Aus den bei PALMA erhobenen Längsschnittdaten wird eine eigene Subskala *Proportionalität und Prozent* gebildet. Die Auswertung entsprechender Daten erfolgt nach dem dichotomen Rasch-Modell und erlaubt die längsschnittliche Darstellung der Leistungswerte. Diese Kompetenzentwicklung von 1319 Schülerinnen und Schülern von Messzeitpunkt 1 (MZP 1, 5. Klasse) bis Messzeitpunkt 5 (MZP 5, 9. Klasse) ist in Abb. 2 dargestellt. Nach Beendigung der Pflichtschulzeit konnten zu MZP 6 noch 977 Lernende getestet werden. (Normierung der Leistungswerte: Mittelwert $_{\text{MZP 5}}$ = 1000, Standardabweichung $_{\text{MZP 5}}$ = 100)

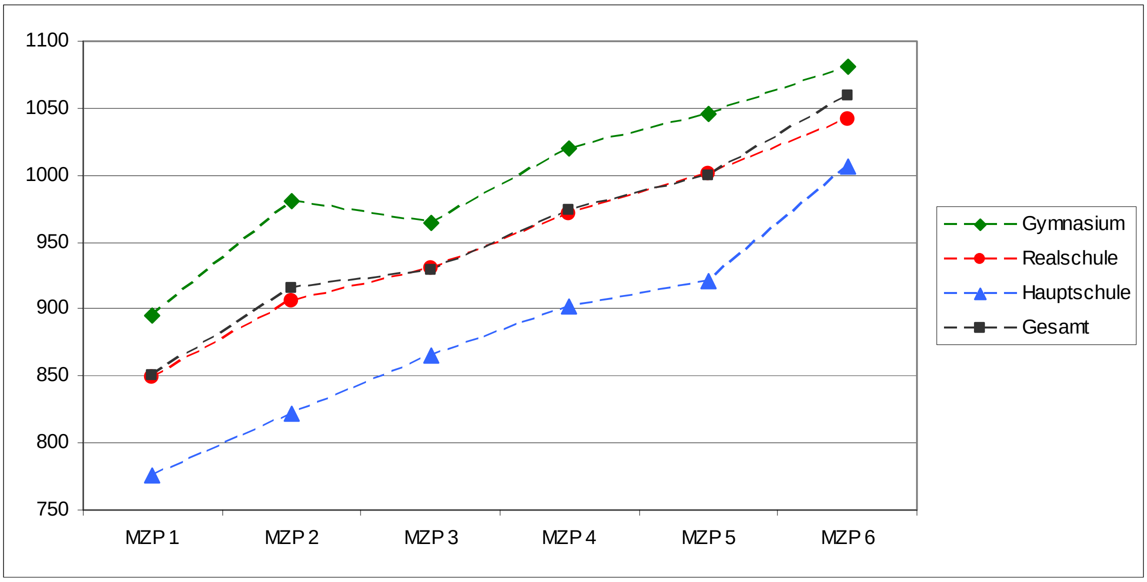


Abb. 2: Kompetenzentwicklung der Subskala *Proportionalität und Prozent*

Erwartungsgemäß erzielen Gymnasiasten im Mittel signifikant höhere Leistungswerte als Schülerinnen und Schüler an Realschulen, die wiederum signifikant bessere Kompetenzwerte als Lernende an Hauptschulen erreichen. Der überdurchschnittliche Kompetenzzuwachs bei der Hauptschule von MZP 5 zu MZP 6 lässt sich dadurch erklären, dass die meisten Schülerinnen und Schüler die Hauptschule nach der 9. Klasse verlassen; bei den verbleibenden handelt es sich um vergleichsweise leistungsstarke Schülerinnen und Schülern, die in einem zehnten Zusatzjahr die Mittlere Reife erlangen können. Während an Haupt- und Realschule zwischen allen Messzeitpunkten signifikante Leistungssteigerungen zu verzeichnen sind, stagnieren die Leistungen am Gymnasium von MZP 2 auf MZP 3. Ein möglicher Grund ist im Lehrplan zu sehen, der die Behandlung der mathematischen Inhalte bzgl. Proportionalität und Prozent ausschließlich in der 6. Jahrgangsstufe vorsieht.

Interviewstudie

Um detaillierte Informationen zum Lösungsprozess bei Schülerinnen und Schülern zu erhalten, wurden zu MZP 2 und MZP 3 je 36 halbstandardisierte Interviews durchgeführt. Die Detailanalysen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

- Hauptprobleme und -schwierigkeiten liegen im Bereich der Übersetzungsprozesse zwischen Realität und Mathematik.
- Typische Fehlstrategien lassen sich auf fehlende oder unvollständig ausgebildete Grundvorstellungen zurückführen.
- In vielen Fällen zeigt sich von der Klasse 6 zu Klasse 7 eine hohe Stabilität von Fehlstrategien.

Literatur

Berger, R. (1991). Leistungen von Schülern im Prozent- und Zinsrechnen am Ende der Hauptschulzeit. Ergebnisse einer fehleranalytisch orientierten empirischen Untersuchung. *Mathematische Unterrichtspraxis, 1*, 12. Jahrgang, 30-44.

Blum, W. & vom Hofe, R. (2003). Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe? *Mathematik lehren, 118,* 9-18.

OECD (2003). The PISA 2003 *Assessment Framework- Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge Skills*. Paris: OECD Publication Service.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe zwischen Theorie und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht, 34,* 5-16.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. *Mathematik lehren, 118,* 4-8.

vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W. & Pekrun, R. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I – theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), *Jahrbuch für pädagogisch-psychologische Diagnostik. Tests und Trends,* Band 4 (S. 263-292). Göttingen: Hogrefe.

Pekrun, R. (2002). Vergleichende Evaluationsstudien zu Schülerleistungen. Konsequenzen für die Bildungsforschung. *Zeitschrift für Pädagogik, 48*, 111-128.

Heike HAHN & Regina MÖLLER, Erfurt

Förderung eines frühen Verständnisses für die fundamentale Idee des Stellenwertprinzips

Ausgangslage und Rahmenbedingungen

Im Jahre 2005 hat die Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung das Verbundprojekt „Stärkung der Bildungs- und Erziehungsqualität in Kindertageseinrichtungen und Grundschule und die Gestaltung des Übergangs“ (TransKiGS) eingerichtet, an dem Thüringen beteiligt ist. Ziel des Projektes ist es, Bildungspläne für Kindertageseinrichtungen und Grundschulen weiterzuentwickeln und die Kooperation zwischen beiden Institutionen zu intensivieren.

In Thüringen schließt das Projekt mehrere Teilprojekte ein, wovon eines der Erarbeitung und Implementation des „Thüringer Bildungsplanes für Kinder bis 10 Jahre“ (Thür. Bildungsplan 2008) gewidmet ist. Ein anderes Teilprojekt befasst sich mit didaktisch-methodischen Konzeptionen zur Umsetzung thematischer Schwerpunkte von Bildungsplänen und der längsschnittlichen Untersuchung der Wirksamkeit von Bildungsinhalten. Bezogen auf die mathematische Bildung liegt die Leitung dieses Moduls in unserer Verantwortung. In Zusammenarbeit mit Tandems (Personengruppen, die aus regional miteinander kooperierenden Erzieherinnen aus Kindertageseinrichtungen und Lehrerinnen aus Grundschulen bestehen) werden die Umsetzung ausgewählter Topics aus dem Thüringer Bildungsplan erprobt sowie Maßnahmen zur Qualifizierung und Fortbildung der beteiligten Personengruppen durchgeführt.

Bei der Entwicklung, Erprobung und Reflexion ausgewählter mathematischer Bildungsinhalte haben wir uns auf verschiedene Schwerpunkte konzentriert; einer davon befasst sich mit der Entwicklung des Zahlbegriffes, insbesondere der Förderung eines frühen Verständnisses für das Stellenwertprinzip. Dazu werden in diesem Beitrag theoretische Begründungszusammenhänge skizziert, die Fortbildungskonzeption im Projekt TransKiGS im Überblick aufgezeigt und schließlich Erfahrungen aus dem Projekt berichtet.

Zum Lernen des Stellenwertprinzips

Obwohl die fundamentale mathematische Idee der Zahl in der Schreibweise des Stellenwertprinzips innerhalb der Mathematik als eine der nützlichsten erachtet wird, ist es auffällig, wie selten sie richtig erklärt werden kann. Befragt man Schüler und Lehrerstudenten nach dem Stellenwertprinzip, erhält man erschreckend wenig gute Antworten. Am häufigsten können sie noch anhand eines Zahlenbeispiels Einer, Zehner, Hunderter oder Tausender in ihrer Stellung ausmachen, also eher die Zahl in ihrer formalen Darstellung beschreiben. Wenig verstanden wird die Idee, dass beispielsweise für das Bündel von 10 Einern eine 1 als Zehner auf der Stelle links davor steht. Der Prozess des Bündelns und des Ersetzens an eine Stelle links daneben ist weder präsent noch anscheinend gut genug verstanden.

Während der Kindergartenzeit lernen die Kinder zu zählen. Sie beginnen mit dem Aneinanderreihen von Zahlwörtern, um dann sukzessive zu erkennen, dass jedem Zahlwort eine bestimmte Anzahl von Objekten zugeordnet ist. Sie lernen, dass man mit der Reihe der Zahlwörter ganz unterschiedliche Objekte zählen kann. Mit dem Ende der Kindergartenzeit haben sie die feste Ordnung der Zahlwörter der ersten zehn oder auch zwanzig Zahlen gelernt. Die kardinale und ordinale Bedeutung der Zahlen hat sich den Kindern beim Erlernen des Zählens aufgrund der Zuordnung zwischen Menge und Zahl sowie der richtigen Reihenfolge der Zahlwörter erschlossen.

Mit der Schulzeit beginnt die Systematisierung und Erweiterung der Zählfähigkeiten im Zahlenraum bis 20. Dass die Zahl 10 die erste zusammengesetzte Zahl ist, die auf dem Prinzip der Bündelung beruht, wird zu wenig ins Blickfeld der Wahrnehmung und des Verständnisses gerückt. Auch Zahlen, die größer als 10 sind, werden meist bezogen auf ihre Anzahl, ihre Ordnung innerhalb der Zahlenreihe sowie in Beziehung zu anderen Zahlen erarbeitet. Da das Stellenwertprinzip von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis der Zahlbildung in verbaler und graphischer Form ist (ungeachtet der Tatsache, dass bei den Zehnerzahlen Sprech- und Schreibrichtung entgegengesetzt sind), erachten wir es als notwendig, die aspektreiche Erschließung der Zahlen um Einsichten in das Stellenwertprinzip frühzeitig zu ergänzen. Für die Behandlung der Zahl 10 als der ersten Zahl, bei der das Bündelungsprinzip unseres Zahlensystems angewendet wird, ist somit die Bedeutung der Null als Zeichen für einen nicht vorhandenen Einer bewusst zu machen. Aufgrund von Handlungserfahrungen im Bündeln und Ersetzen in Verbindung mit der entsprechenden Darstellung erschließt sich den Kindern die bekannte Notation der „10“. (Umfassend wird die Funktion der Null meist erst im Zuge der Zahlbereichserweiterung bis 100 thematisiert.)

Anliegen der gemeinsamen Aktivitäten innerhalb des TransKiGS-Projektes ist es, Spiele, Übungen oder Materialien zu entwickeln, zu erproben und Erfahrungen zu reflektieren, mit denen das Grundprinzip des Bündelns und Ersetzens im Feld links daneben für die Kinder erfahrbar wird. In Verbindung zu passenden Darstellungsformen sind Grundvorstellungen für das Verstehen des Stellenwertprinzips zu schaffen.

Fortbildungskonzeption zum TransKiGS-Projekt

Nach einer Auftaktveranstaltung für alle beteiligten Tandems wurden in den Kindertagesstätten und Grundschulen Personen ausgewählt, die sich im mathematischen Teilprojekt engagieren wollten. Mit dieser Personengruppe führten wir etwa alle 3 bis 4 Monate ganztägige Arbeitstreffen durch, die jeweils in einen Fortbildungsteil, in dem die Erzieherinnen und Lehrerinnen mit den fachlichen Hintergründen des Themas vertraut gemacht wurden, und eine Gruppenarbeitsphase strukturiert waren. Während der Gruppenarbeit wurden erste Ideen für zu entwickelnde Spiele, Übungen oder Materialien zusammengetragen. Schließlich gingen die Tandems mit dem Auftrag nach Hause, ihre Idee zu verfeinern und derart zu konkretisieren bzw. auszuarbeiten, dass ein anwendbares Produkt entstand.

Bei den Überlegungen zur Entwicklung eines Spiels, eines Materials oder einer Übung sollte sichergestellt werden, dass die Beschäftigung mit dem Inhalt an die Alltagserfahrungen und das Vorwissen der Kinder anknüpft. Für das Phänomen der Stellenwerte war es für den Kindergarten wichtig, die Idee des „Bündels und Ersetzens durch“ erlebbar zu machen, um die hinter dem Stellenwertsystem stehende mathematische Idee handelnd zu erschließen. Für den schulischen Anfangsunterricht war es wichtig, die vertiefende Erarbeitung der Zahlen um ein grundlegendes Verständnis des Stellenwertsystems zu ergänzen. Die symbolische Darstellung des Handlungsergebnisses war häufig das Bindeglied zwischen den Handlungserfahrungen und den bisherigen Zahlkenntnissen. Inwiefern dabei sowohl im Kindergarten als auch in der Grundschule mit anderen Systemzahlen als der 10 gearbeitet wurde, entschieden die Tandems selbst.

Spiele, Übungen oder Materialien sind in Hahn & Möller 2008 dokumentiert.

Erfahrungen

Abschließend werden die gemachten Erfahrungen in der Umsetzung der Fortbildungskonzeption kurz aufgezeigt.

a) Erfahrungen von Kindergärtnerinnen und Lehrerinnen

Die Tandems sind i.A. in der Lage, die Folge der Zahlen als eine Abstraktion zu durchschauen, bei der den konkreten Anzahlen von Elementen einer Menge abstrakte Zeichen - durch Symbole und Sprache darstellbar - zugeordnet werden. Die für die Verwendung der Zahlzeichen weiter bestimmende Idee von Bündelung und Stellenwert wird häufig nicht erkannt bzw. die Grundhandlung von Bündelung und Ersetzen bleibt eine Handlungserfahrung, deren Zusammenhang zur symbolischen Notation einer Zahl nicht gleich gesehen wird.

b) Erfahrungen der Tandems in der Arbeit mit den Kindern

Die Grundhandlungen des Bündelns und Ersetzens werden zur spielerischen Erfahrungen und im Zusammenhang mit der entsprechenden Darstellung zum Prüfinstrument zugleich (Wie viele waren es?). Das Zählen in Verbindung mit den Grundhandlungen öffnet den Blick dafür, dass die Handlung stetig fortgesetzt werden kann. Somit machen die Kinder ziemlich selbstständig Erfahrungen mit dem Weiterzählen über die 9, die 19 u.a. hinaus. Sie können diese einfachen Handlungen nachvollziehen und kommen zu immer größeren Zahlen, ohne durch die „künstliche“ Hürde der ersten 10 bzw. 20 Zahlen behindert zu werden.

c) Erfahrungen mit den Fortbildungen der Tandems

In der Reflexion der durchgeführten Fortbildungen wird erkennbar, dass es ein längerfristiger Prozess ist, Erwachsene für die mathematischen Hintergründe der fundamentalen Idee des so vertrauten Stellenwertprinzips zu sensibilisieren. Zudem ist deutlich geworden, dass die eigene fachliche Sicherheit Grundvoraussetzungen für ein professionelles Agieren im vorschulischen und schulischen Bereich ist.

Die Tandems und ihre Entwicklung sich unterschiedlich; das hängt vom Ist-Zustand ab und wird wesentlich von der Situation vor Ort (Kika, Grundschule), der Zusammenarbeit und der Zeit, die für die Fortbildungen und Beratungen aufgewendet wird, beeinflusst.

Anzumerken ist schließlich die Tatsache, dass das Niveau mathematischen Verständnisses frühkindlicher Bildung insgesamt sehr heterogen und deshalb ein Qualifizierungsprogramm notwendig ist.

Literatur

Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn und warum wir rechnen können. Basel u.a.: Birkhäuser

Hahn, H. & Möller, R. (2008): Förderung eines frühen Verständnisses für die fundamentale Idee des Stellenwertprinzips. In: Sache-Wort-Zahl, 36. Jg., H. 93 v. März, S. 4 - 7

Ifrah, G. (1998): Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt a. M.: Campus-Verlag

Menninger, K. (1979): Zahlwort und Ziffer eine Kulturgeschichte der Zahl, Bd. I und II. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht

Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg und Berlin: Spektrum Akademischer Verlag

Thüringer Bildungsplan für Kinder bis 10 Jahre (2008) (hrsg. v. Thüringer Kultusministerium) Berlin und Weimar: Verlag das Netz

Martina HASLAUER, Salzburg

Rechenschwächen – Aspekte eines fördernden und zeitgemäßen Unterrichts in SekI

Öffentlich geführte Diskussionen zum Thema „Dyskalkulie“ und das zunehmende Aufkommen kommerzieller „Dyskalkulie-Institute“ erwecken den Eindruck, die Behandlung dieser Thematik falle nicht in den Zuständigkeitsbereich der Schule, sondern in den Bereich außerschulischer Therapie, um betroffene Schülerinnen und Schüler von dieser „Krankheit“ heilen zu können. (vgl. Schipper 2003) Entgegen dieser Auffassung ist auf die zentrale Rolle des Mathematikunterrichts im Hinblick auf Präventions- und Interventionsmaßnahmen hinzuweisen. Von Bedeutung ist in diesem Zusammenhang inwieweit Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten beim Erlernen grundlegenden mathematischer Fertigkeiten im schulischen Rahmen Förderung erfahren können und wie der Unterricht gestaltet werden muss, um individuelle Förderung möglichst angemessen gewährleisten zu können. Lenart, Holzer & Schaupp (2003) weisen jedoch zurecht darauf hin, dass „der beste Mathematikunterricht nicht verhindern könnte, dass einzelne Kinder besondere Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens haben werden.[…] Wegen des vielfältigen Erscheinungsbildes sind bei massiven Rechenstörungen sowohl zur Diagnose der individuellen Schwierigkeiten […] als auch für eine gezielte Förderung […] eine Einzelbetreuung […] durch eine dafür ausgebildete Person unerlässlich.“

1. Zum Begriff „Rechenschwäche“

Ansätze zu angemessenen Fördermaßnahmen setzen ein adäquates Verständnis von „Rechenschwäche“ bzw. „Dyskalkulie“ voraus. Es ist mir ein besonderes Anliegen anstelle einer pathologisierenden Auffassung von „Dyskalkulie“ eine aus mathematisch-didaktischer Perspektive angemessene Begriffsklärung von „Rechenschwächen als Gesamtsystem“ (Gaidoschik 2002) darzulegen, welche den/die Lerndende/n mit den individuellen Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens, basierend auf Fehlvorstellungen zu mathematischen Grundlagen wie Zahl, Stellenwert und Grundrechenarten, in den Mittelpunkt der Betrachtungen zieht und im Sinne eines systemisch-dynamischen Ursachenmodells, zugleich auf die wechselseitige Bedingtheit gewisser Risikofaktoren, die zum Entstehen einer Rechenstörung beitragen können, hinweist. In der Fachliteratur herrscht weitgehend Einigkeit über die wesentlichen Risikobereiche, wie der/die Lernende und speziell die kognitiven und emotionalen Lernvoraussetzungen, die Schule und speziell der Aufbau des arithmetischen Erstunterrichts und die Familie und die Gruppe der Gleichaltrigen, die sozialen und allgemein psychischen Belastungen. (vgl. Gaidoschik 2002, Schipper 2003)

2. Schlussfolgerungen für Diagnostik und Intervention

Schließlich soll eine angemessene Diagnostik und Intervention auf der Grundlage dieses Modells auch multikonditional angelegt werden. Im Rahmen der Diagnostik im Unterricht kommt der Analyse von Schülerfehlern eine besondere Bedeutung zu, da sich diese nicht nur als Indikatoren von Schülervorstellungen herausstellen, sondern vor allem im Sinne von häufig auftretende Lernschwierigkeiten in bestimmten mathematischen Stoffgebieten Anlass zur fachdidaktischen Reflexion geben.

3. Zur Förderung rechenschwacher Schüler im Unterricht

Die häufig erlebten Misserfolge von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens ziehen nicht selten negative Auswirkungen im gesamten schulischen Bereich nach sich. Eine wichtige Aufgabe des Unterrichts besteht damit in der psychischen Entlastung dieser Schüler und einer angstfreien Begegnung mit Mathematik. Über einen Unterricht, der durch ein Verständnis für die individuelle Situation der Schüler geprägt ist, Fehler nicht defizitär, sondern als Chance für neue Lernprozesse wahrnimmt und eine angemessene Unterrichtsgestaltung, die es auch rechenschwachen Schülerinnen und Schülern erlaubt, Erfolgserlebnisse im Mathematikunterricht zu sammeln sowie über das Erleben der „Faszination Mathematik“ mittels der Bearbeitung beziehungsreicher Aufgaben, welche die Eigenart der Mathematik und ihrer Beziehung zur Realität erfahrbar machen.

3.1. Kompetenzorientierung statt Defizit- und Lehrstofforientierung

Ein individualisierter Unterricht ermöglicht über das Einbeziehen einer individuellen Bezugsnorm die Orientierung des Unterrichts an den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler und ermöglicht überdies notwendige Erfolgserlebnisse. Diese Tendenz findet zudem über die Bildungsstandards auch auf der Lehrplanebene ihre Entsprechung, indem Lernförderung durch langfristigen Kompetenzaufbau angestrebt wird. (vgl. Blum 2006)

3.2. Förderung durch „qualitativen“ Mathematikunterricht anstelle kleinschrittig-reproduktiven Übens

Ein Unterricht, der sich durch eine angemessene Balance zwischen Frontalunterricht und kooperativen wie selbständigen Arbeitsphasen kennzeichnet, kommt Schülerinnen und Schülern mit Lernschwierigkeiten besser entgegen, als traditionelle Fördermaßnahmen, wie die der Erarbeitung in kleinen Schritten. (vgl. Lorenz 2005) Dies sollte dazu beitragen, die häufig vorgebrachten Einwände, dass ein aktiv-entdeckender Unterricht nur für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler geeignet sei, zu entkräften, denn im Gegenteil weist Wittmann (2006) darauf hin, dass „[in Zukunft] die Interessen der „Lernschwachen“ […] als Argument für aktiv-entdeckende Lehr- und Lernformen ins Feld geführt werden können […], [denn] auch rechenschwachen Schülern ist am besten durch einen auf Verständnis und die breite Entwicklung ihrer Fähigkeiten ausgerichteter Unterricht gedient.“

3.3. Aspekte qualitativen Unterrichts

Fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung

- Ausrichtung des Mathematikunterrichts an fundamentalen Ideen – Langfristiges und verständnisorientiertes Lernen
- Mathematisches Modellieren – Lernen in komplexen und realen Kontexten
- Kompetenzorientiertes Lernen - Lernen auf eigenen Wegen

Flexibler Einsatz und Verknüpfung unterschiedlicher Methoden und angemessener Gebrauch von Medien

Effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung - Entwicklung einer Unterrichtskultur über die Verbindung von fachlichem, selbstgesteuertem und sozialem Lernen (vgl. Leuders 2001, Fuchs & Blum 2008)

Bei der Ausrichtung des Unterrichts an den Bedürfnissen rechenschwacher Schülerinnen und Schüler kommt der konstruktiven Aktivität der Lernenden im Hinblick auf die Erschließung eigener Lösungswege und dem Umgang mit Fehlern, „Positive Fehlerkultur“ (Schoy-Lutz 2005), den sozialen Interaktionen und der Bearbeitung für sie relevanter Probleme eine bedeutende Rolle zu.

4. „Neue Aufgabenkultur“

Diese Forderungen an einen qualitativen Unterricht korrespondieren mit der „Neue n Aufgabenkultur“, worunter ein Unterricht zu verstehen ist, in dem neben eher verfahrensorientierten Aufgaben mehr als bisher auch kognitiv anspruchsvolle, kompetenzorientierte Aufgaben mit einem hohen Maß an Differenzierungsvermögen, Authentizität und Offenheitsgrad zum Einsatz kommen. Diese werden von den Schülern in fachlich gehaltvollen, geistig aktivierenden und selbständigkeitsfordernden Arbeitsumgebungen bearbeitet. (Leiss/ Blum/ Messner 2007) Über die Bearbeitung dieser beziehungsreicher Aufgaben sowie Modellierungsaufgaben im Unterricht kann zum einen die Förderung mathematischer Kompetenzen und zum anderen die Vermittlung eines angemessenen Mathematikbildes erzielt werden.(vgl. Fuchs & Blum 2008) Vielfach geäußerte Bedenken, dass rechenschwache Schülerinnen und Schüler aufgrund der Komplexität von Modellierungsaufgaben überfordert würden, können aufgrund ihrer selbstdifferenzierenden Eigenschaft ausgeräumt werden, da sie den Lernenden über das offene Aufgabenformat die Möglichkeit eröffnen ihrem Leistungsniveau entsprechend eigene Lösungswege zu beschreiten. (vgl. Maaß 2007)

Als positive Bilanz lässt sich herausstellen, dass Bestrebungen zu einem qualitativen Mathematikunterricht und zugleich die Bemühungen für einen fördernden Unterricht sich nicht im geringsten entgegenstehen, sondern die praktische Umsetzung dieser Aspekte zu einem Unterricht beitragen, der rechenschwache Schülerinnen und Schüler fördert und zugleich alle Lernenden fordert.

Literatur

Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, Ch. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller. (Hrsg.), *Bildungsstandars Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* (S. 14 – 32) Berlin: Cornelsen Scriptor.

Fuchs, K.J. & Blum, W. (2004). Selbständiges Lernen im Mathematikunterricht mit „beziehungsreichen Aufgaben. In J. Thonhauser (Hrsg.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (S. 135 - 148). Münster: Waxmann.

Gaidoschik, M. (2002). *Rechenschwäche Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern*. Wien: öbv&hpt.

Leiss, D., Blum, W. & Messner, R. (2007). Die Förderung selbständigen Lernen im Mathematikunterricht- Problemfelder bei ko-konstruktiven Lösungsprozessen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3/4*, 224-248.

Leuders, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Lenart, F., Holzer, N. & Schaupp H. (2003). *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie. Erkennung – Prävention – Förderung.* Graz: Leykam.

Lorenz, J.-H. (2005). Grundlagen der Förderung und Therapie. Wege und Irrwege. In M. von Aster & J.-H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik.* (S. 165 - 178). Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I..* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Schipper, W. (2003). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. In F. Lenart, N. Holzer & H. Schaupp (Hrsg.), *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie. Erkennung – Prävention – Förderung.* (S. 103 - 121). Graz: Leykam.

Schoy-Lutz, M. (2005). *Fehlerkultur im Mathematikunterricht.* Berlin: Franzbecker.

Wittmann, E. (2006). *Ein alternativer Ansatz zur Förderung „rechenschwacher“ Kinder.* <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/pdf/foerderansatz.pdf >

Reinhold HAUG, Freiburg

Erfolgreiches Lernen mit Modellierungswerkzeugen

Im heutigen Mathematikunterricht sind drei Typen von Software dominant, die Computeralgebrasystem (CAS), die Dynamischen Geometrie-Systeme (DGS) und die numerischen Systeme (Tabellenkalkulation, Datenanalysesystem) (vgl. Barzel & Hußmann & Leuders, 2005).

Die drei Systeme stehen jeweils für eine spezifische Repräsentationsform:

- CAS für die symbolisch-algebraische Repräsentationsformen
- TK und Datenanalysesysteme für die numerischen Repräsentationsformen
- DGS für die geometrischen Repräsentationsformen

Diese Systeme sind gegenüber einfacherer Software (etwa Demonstrations-Applets) dadurch charakterisiert, dass ihr Einsatz sich nicht in Animationen oder Simulationen erschöpft. Sie bieten vielmehr ein ganzes System von Werkzeugkomponenten, die auf unterschiedliche Weise als Lernumgebungen eingesetzt werden können.

Solche Werkzeugkomponenten können für die Gestaltung von Lernumgebungen nun auf zweierlei Weise verwendet werden:

1. Sie können von der Lehrperson verwendet werden, um geeignete Lernmittel zu generieren, z.B. Bilder, Animationen oder Simulationen
2. Sie können von den Schülerinnen und Schüler verwendet werden, um geeignete mathematische Situationen nicht nur explorativ zu untersuchen, sondern flexibel zu generieren.

Somit handelt es sich um Werkzeugsysteme, die in einem definierten Bereich (z.B. der ebenen Geometrie) den Charakter universeller Werkzeugsysteme tragen. Ihre parametrische Offenheit ist noch einmal prinzipiell größer als die einer Simulation. Die typische Arbeit von Schülerinnen und Schülern mit solchen Werkzeugen besteht darin, dass sie die Situationen, die sie explorativ erkunden wollen, erst mithilfe der Werkzeugkomponenten teilweise selbst herstellen müssen. Dieser Typ von Lernwerkzeug soll im Folgenden deshalb als „(Modellierungs)Werkzeug“ bezeichnet werden.

Modellierungswerkzeuge sind „nach unten gradierbar“: Für die Arbeit einer Lehrperson bedeute dies, dass sie mithilfe eines Modellierungswerkzeugs Bilder, Animationen oder Simulationen erzeugen kann, die die Schülerinnen und Schüler dann im jeweils intendierten Sinn nutzen können. Viele so genannte „dynamische Arbeitsblätter“ (vgl. Baptist, 2004; Miller

& Ulm, 2006;) sind solche erzeugte Animationen oder Simulationen. Die freie Werkzeugnutzung für die Schülerinnen und Schüler ist dort stark eingeschränkt, oft mit der Absicht, diese nicht zu überfordern. Mitunter liegt diesen Lernumgebungen aber auch der Wunsch zugrunde, die Überforderung der Lehrperson im Umgang mit divergenten Schülerergebnissen zu verhindern.

Konfrontiert man Schülerinnen und Schüler mit einem Modellierungswerkzeug (oder hinreichenden vielen Teilelementen), so ergibt sich eine andere Form der „Gradierung nach unten“: Der Lernprozess ist dadurch gekennzeichnet, dass die Schülerinnen und Schüler auf ihren Lernwegen zwischen den Ebenen springen: Mithilfe der Werkzeugkomponenten generiert sie immer wieder neue Situationen, die sie dann wie eine Simulation, eine Animation oder wie ein statisches Bild exploriert. Die Erkenntnisse münden dann wieder in eine Restrukturierung der Situation durch freie Verwendung der Werkzeugkomponenten. Wie dies im Einzelnen konkret beim Arbeiten mit einem Dynamischen Geometrie-System aussehen kann, soll im nächsten Abschnitt anhand eines Beispiels aufgezeigt werden.

1. Dynamische Geometrie-Systeme als Animation, Simulation und Modellierungswerkzeug

Weil Dynamische Geometrie-Systeme als Animation, Simulation oder Modellierungswerkzeug verwendet werden können, müssen die Lehrenden sich im Voraus überlegen, welche didaktische Zielsetzung sie verfolgen. Denn je nachdem auf welcher Nutzungsebene sie ihr Dynamisches Geometrie-System einsetzten, sollte die Lernumgebung dementsprechend zielgerichtet gestaltet und methodisch aufgearbeitet werden. Wichtig dabei ist, dass sowohl auf das werkzeugbezogene Vorwissen der Schülerinnen und Schüler, wie auch auf deren medialen Kenntnisse Rücksicht genommen wird, damit keine kognitive Überforderung (kognitive load) erfolgt. Das folgende Beispiel „Satz des Thales“ zeigt, wie solch ein Einsatz als Animation, Simulation und Modellierungswerkzeug aussehen kann und worin die wesentlichen Unterschiede liegen.

2. Dynamische Geometrie-Systeme als Animation

Beim Einsatz eines Dynamischen Geometrie-Systems in Form einer Animation liegt der Fokus auf der Handlungsebene, bei der die besonderen Eigenschaften von Winkeln, Längen oder Flächen entdeckt werden können. Diese kann an jeder beliebigen Stelle angehalten werden, wobei während des Ablaufs keine Parameter verändert werden können.

Sollen Schülerinnen und Schüler zum Beispiel herauszufinden, dass ein Dreieck ABC, dessen Punkt C auf einem Halbkreis über der Strecke AB liegt immer einen rechten Winkel besitzt (Satz des Thales), dann kann er dies in Form einer Animation tun.

Dazu konstruiert der Lehrende die gesamte Lernumgebung (Dynamisches Arbeitsblatt und Fragestellung) so, dass der Punkt C auf dem Halbkreis gebunden ist. Anschließend wird der Punkt C mit der Werkzeugkomponente „Animation" verbunden. Die daraus resultierende Lernumgebung besitzt die Eigenschaft, dass bei einem Start der Animation der Punkt C sich nur auf der Bahn des Halbkreises animieren bzw. bewegen lässt.

Schülerinnen und Schüler, die sich mit solch einer Lernumgebung beschäftigen, können die Animation des Punktes C stoppen bzw. wieder neu starten. Ziel einer solchen Arbeitsphase ist es, dass Schülerinnen und Schüler mit Hilfe ihres Vorwissens und ihrer Erfahrung im Umgang mit einem DGS besondere Eigenschaften (z.B. Invarianten des Winkels) und Zusammenhänge beim Thaleskreis selbstständig entdecken. Vorteile eines solchen Einsatzes ist die starke Fokussierung der Schülerinnen und Schüler auf einen Zusammenhang und die Möglichkeit des Invarianzerlebens. Nachteile dieser Fokussierung sind allerdings das Schwinden des Beweisbedürfnisses (vgl. Winter, 1983) und die mangelnde operative Absicherung der Bedingungen dieses Phänomens („Ist der Zusammenhang umkehrbar? Was sind die Bedingungen für die Gültigkeit des Zusammenhangs?")

3. Dynamische Geometrie-Systeme als Simulation

Möchte ein Lehrender, dass seine Schülerinnen und Schüler, den Satz des Thales nicht nur an einem einzigen rechtwinkeligen Dreieck untersuchen, so kann er seine Animation zu einer Simulation erweitern. Mit Hilfe des Zug-Modus lassen sich verschiedne Punkte am Dreieck A und B frei variieren, ohne dass sich die funktionalen Zusammenhänge der Konstruktion verändern. Bei dieser Art des explorativen Arbeitens kann dann entdeckt werden, dass der Satz des Thales z.B. für alle beliebigen Dreiecke gilt, deren Punkt C auf einem Halbkreis über der Strecke AB liegen.

Schülerinnen und Schüler, die es verstehen, mit Hilfe solch eine Simulation den Parameterraum zu erkunden, besitzen erste heuristische Fähigkeiten, um Problemlöseaufgaben erfolgreich bearbeiten zu können. Dabei können sie zu jeder Zeit die etwas offenere Simulation in eine Animation transferieren, indem sie gewisse Parameter konstant halten, um eventuell die zu beobachtenden Parameter zu reduzieren. Umgekehrt setzt diese Form der Animation aber voraus, dass gewisse Kompetenzen im technischen und im heuristischen Umgang mit dem Werkzeug bereits vorhanden sind.

4. Dynamische Geometriesysteme als Modellierungswerkzeug

Schülerinnen und Schüler, die die Navigation sowie die Werkzeugkomponenten eines Dynamischen Geometrie-Systems beherrschen, können dieses in einer noch offeneren Form verwenden. Bezogen auf das Beispiel des Thaleskreises würde dies bedeuten, dass Schülerinnen und Schüler die gesamte Konstruktion (oder Teilkonstruktionen) eines Thaleskreises selbst durchführen. Hierbei können vertiefte Einblicke in konstruktive und funktionale Abhängigkeiten gewonnen werden. Die didaktische Funktion einer solchen Gestaltung der Lernumgebung ist, dass die Schülerinnen und Schüler sich schon in der Konstruktionsphase mit den zentralen Aspekten der jeweiligen Problemsituation auseinandersetzen.

Nach Beendigung der konstruktiven Tätigkeiten können dann auf der Ebene der Simulation sowie auf der Ebene der Animation explorative Erkundungen durchgeführt werden. Entwickeln Schülerinnen und Schüler in solch einer Lernphase Vermutungen darüber, wie Veränderungen der Konstruktion zu neuen Zusammenhängen führen, so können sie diese mit Hilfe der Werkzeugkomponenten durchführen. Nach solch einer (Re)Konstruktion der Lernumgebung können sie diese mit dem Zug-Modus dann neu simulieren oder animieren. Schülerinnen und Schüler, die solche heuristische Arbeitsweisen verinnerlichen, verwenden somit ein Dynamisches Geometrie-System beim Lösen von Problemsituationen auf wechselnden Ebenen als Animation, Simulation oder Modellierungswerkzeug. Gerade der Wechsel zwischen den einzelnen Ebenen eröffnet den Schülerinnen und Schüler einen differenzierten und individuellen Lösungsweg für anspruchsvolle, offene Problemsituationen. Auf der Seite der Anforderung an die Schülerinnen und Schüler stellt sich jedoch das Problem, dass bereits ein erhebliches Vorwissen sowohl auf der Ebene der Werkzeugkompetenz als auch auf der Ebne der Problemlösestrategien vorausgesetzt werden muss. Die Herausforderung für die Didaktik des Mathematiklernens mit Neuen Medien besteht somit darin, diesen Weg der Schülerinnen und Schüler zu einer solchen Werkzeugnutzung sinnvoll und wirksam zu gestalten.

Literatur

Baptist, P. (Hrsg.). (2004). *Lernen und Lehren mit dynamischen Arbeitsblättern. Das Handbuch zur CD-ROM. Mathematik Klasse 7/8*. Seelze: Friedrich.

Barzel, B., Hußmann, St. & Leuders, T. (2005). *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Miller, C. & Ulm, V. (Hrsg.). (2006). *Experimentieren und Entdecken mit dynamischen Arbeitsblättern: Mathematik Sekundarstufe I*. Seelze-Velber: Friedrich.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik, 4* (1), S. 59-95.

Dana HEINZE, Osnabrück

Getting started well: The training "VorMath" as a tool to improve mathematical precursor skills and mathematical thinking before school

1. Introduction

Since children have various backgrounds and experiences concerning fundamental mathematical fields, the skills of children, when starting school, are very varied. Some children are able to tell what one fewer than one hundred is, while others fail to recognize the number of three objects at once. It is a tough challenge for teachers of children at school-entry level to meet the requirements of all those in their class, so that it hardly ever can be achieved. How can those in the field of education help to improve the abilities of lower achieving children before they start school, so that all have at least a minimum standard of mathematical ability? To answer this question, Schwank and her colleagues developed a training project called VorMath which is an abbreviation for "Vorschul-Mathematik" – preschool mathematics. The playful training aims to facilitate mathematical precursor skills and functional thinking, the description of which follows.

2. Mathematical precursor skills

Krajewski (2003, 2005) investigated how various different skills of preschool children related to their mathematical abilities during the first and second year of schooling. She found specific and unspecific skills that can predict later mathematical performance to a certain extent. Unspecific precursor skills are intelligence, capacity of memory, and number speed. They have only indirect effects on mathematical competencies through specific mathematical precursor skills and influence other competencies as well. However, the concept of Krajewski focuses not on the unspecific, but on two specific mathematical precursor skills: set prior knowledge and number prior knowledge. The term *set prior knowledge* is used for an understanding of sets, and relations between sets, and includes skills like seriation, comparison of sets, and comparison of lengths. The term *number prior knowledge* refers to knowledge of counting, and of the order of number words, and includes knowing the number signs, counting, and simple arithmetics. Set prior knowledge affects mathematical competencies indirectly through number prior knowledge, which is the only factor with a direct effect on mathematical performance.

Both of these specific skills are specific risk factors, indicating that a low level in these skills or knowledge is related to a development of mathematical difficulties or even developmental dyscalculia (cf. Krajewski, 2003). So training that can encourage mathematical precursor skills should minimize the risk of developing mathematical difficulties.

3. The relationship between basic arithmetic principles and functional thinking

Many basic arithmetic principles are founded on functions and operations. The principle of ordination, for instance, follows from the order of the natural numbers, which is founded on the function of creating the successor of every natural number by adding one more (cf. Dedekind, 1901, pp. 24, 33 - 34). To understand such principles, a special way of thinking is beneficial, a way of thinking where different (mathematical) items are conceived in terms of functions or operations. Such a thinking is accompanied by a rather dynamic internal representation, and takes into account how something has been changed or transformed. This way of thinking was discovered by Schwank (e. g. 1993, 2005b), and is called *functional thinking*.

Alternatively, different mathematical items can be compared in terms of similarities, relations, or features. Here an internal representation is more static, and considers what is to be seen. This predicative thinking makes it difficult to consider functions and operations, and therefore to understand basic arithmetic principles such as ordination. Consequently, it can be seen that strategies to solve mathematical tasks can vary significantly. See Schwank (2005b, p. 119; 2005a, p. 34) for a fine example of an effect of these different ways of thinking, when solving a mathematical task.

Although many people are able to think in both ways, especially when tasks are simple, they often have an unconscious preference for one of the two ways of thinking, which can lead to poor skills when the originally disregarded way is required. This is especially the case when tasks are of a complex matter. In conclusion, training in functional thinking enhances the understanding of basic arithmetic principles of children, especially those who favor the predicative thinking.

4. The training VorMath

We have seen so far that it is promising to train mathematical precursor skills and functional thinking. The question is whether this is possible, and whether both aims might be achieved through one single clearly laid out training.

Schwank and her colleagues have been attempting to create such a training project for the participation of pre-school children, which has consequently been labelled VorMath (Vorschul-Mathematik). Based on the fundamental ideas of the playful training project, it has been developed further to a training project, which is constituted of eight playful sessions, and has a frame story about a storyteller whose stories are about animals.

To facilitate mathematical precursor skills, tasks with various premathematical contents were included. These contents were, for example, seriation, comparing sets and length, and counting. For simple counting, an example of a task is given in figure 1. It shows the main material of the training: the *spiral staircase* (Schwank, Aring & Blocksdorf, 2005). This material is made of ten columns of small wooden balls, where every column has one ball more than the previous one, starting with zero balls up to nine balls per column. In the given case, a squirrel figure is standing on the starting position, the column with zero balls. The children have to move the squirrel forward from one column to the next, and count out loud the number of jumps the squirrel makes.

The position after doing a jump arises from the function $h \rightarrow h + 1$, where h represents the height of the previous position. This can be seen as an opportunity to facilitate functional thinking, since it seems to be easy to reconstruct this operation and build an adequate internal functional representation, for instance through imaging the squirrel jumping. To sum up, this task can probably facilitate both, mathematical precursor skills and functional thinking.

Additionally, one focus of VorMath lies on the "number construction sense." The term "number sense" was introduced by Dehaene (1997) and "represents the universal ability to represent and manipulate numerical magnitudes nonverbally on a spatially oriented mental number line" (Aster & Shalev, 2007, p. 863). Schwank has observed (2005b, p. 122) that this definition omits constructional processes. Therefore the word construction has been added here.

Figure 1: First three steps of a simple counting task using the spiral staircase. While counting aloud children shall move an animal from one column to the next.

In later sessions of the training simple addition and subtraction tasks are contents of VorMath. With the moving squirrel and other animal figures, it is easy to show that subtraction is the inverse operation of addition, and vice-versa: the animals move higher (forward) in the case of addition and lower (backward) in the case of subtraction.

Finally, VorMath is bound to common principles of education like discussing solutions of tasks, asking the children to state reasons, and Bruner's (e. g. 1974) principle of different representative modes. The above mentioned examples are enactive representations for a number of “jumps” or a concrete addition operation. But iconic and symbolic representations are also included. Iconic modes, for example, were realized through the use of worksheets with a 2-dimensional image of the spiral staircase and varying positions of different animals. Children, after learning how to draw arrows, have to draw the movement of the animal in question with the length of an arrow indicating how far the “jump” is and the arrowhead pointing in the direction of the movement (e. g. counting forward / addition vs. counting backward / subtraction).

5. Summary and direction of future developments

The promising training VorMath embraces many relevant arithmetic contents, follows basic educational principles, and has been developed to improve mathematical precursor skills and functional thinking. Currently, a study is being carried out to evaluate VorMath with quantitative and qualitative methods. This study intends to investigate whether the training project attains its main goals.

Literatur

Aster, M. G. von, & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology, 49*(11), 868 - 873.

Bruner, J. S. (1974). *Beyond the information given. Studies in the psychology of knowing* (chap. 18). London: Allen & Unwin.

Dedekind, R. (1901). *Essays on the theory of numbers*. Chicago: Open Court Publishing.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*. New York: Oxford University Press.

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Hamburg: Dr. Kovač.

Krajewski, K. (2005). Früherkennung und Frühförderung von Risikokindern. In M. G. von Aster & J. H. Lorenz (Eds.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (pp. 150 - 163). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Schwank, I. (1993): On the analysis of cognitive structures in algorithmic thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 12*(2), 209 - 231.

Schwank, I. (2005a). Kinder sind keine Taschenrechner. *Gehirn & Geist, 6*(05), 34 - 37.

Schwank, I. (2005b). Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. G. von Aster & J. H. Lorenz (Eds.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (pp. 93 - 133). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Schwank, I., Aring, A., & Blocksdorf, K. (2005). Betreten erwünscht – die Rechenwendeltreppe. In G. Graumann (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 560 - 563). Hildesheim: Franzbecker.

Johanna HEITZER, Aachen

Vom Lotfällen bis zum JPEG-Format – Eine zentrale mathematische Idee und ihre Anwendungen

Motivation und Zielsetzung

Angesichts der teilweise extremen Trendwenden der Mathematikdidaktik verglich der amerikanische Mathematiker Richard Askey die Mathematik mit einem Hocker, der auf drei Beinen ruhe: Problemen, Technik und Struktur. Jeder Unterrichtsansatz, der einen oder gar zwei dieser Aspekte außer Acht lasse, sei zum Scheitern verurteilt.

Zur Zeit liegt – jedenfalls in Nordrhein-Westfalen – der Akzent recht einseitig auf den Problemen und Anwendungen. Das ist in zweierlei Hinsicht problematisch: Erstens ist Askey folgend zu bezweifeln, dass durch die Behandlung einer geeigneten Auswahl von Problemen Technik und Struktur automatisch in ausreichendem Maße mit vermittelt werden. Zweitens sind gehaltvolle und authentische, intellektuell ehrlich auf Schulniveau zu behandelnde Probleme so rar, dass die Anwendungsorientierung bisweilen zur – teilweise hoch konstruierten – Einkleiderei verkommt.

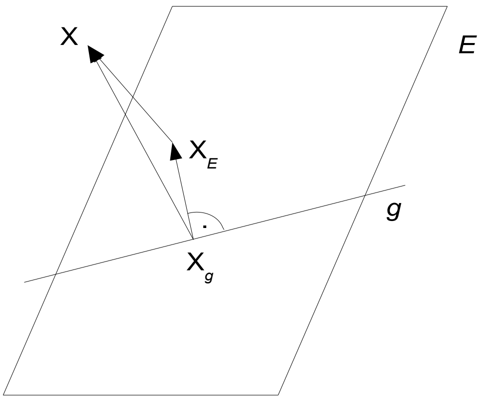
Die Haupt-Intentionen dieser Arbeit sind demgegenüber: erfolgreiche angewandte Mathematik der letzten Jahrzehnte für den Schulunterricht zugänglich zu machen; den Blick auf die Struktur zu lenken und zu zeigen, dass das für Erkenntnis und Anwendungen von Nutzen sein kann; zentrale mathematische Ideen zu vermitteln, die die Grenzen der üblichen Teilgebiete überschreiten.

Gedacht ist dabei vor allem an Aus- und Überblicke in der Oberstufe. Einzelne Aspekte und Lerntools sind jedoch auch in der Mittelstufe umsetzbar. Über Kernidee und Beispiele wird hier ein kurzer Überblick gegeben.

Fachlicher Kern

Ausgangspunkt sind die Erfahrungen der Schüler im dreidimensionalen Euklidischen Raum: Das Standardskalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann Null, wenn die Vektoren orthogonal zueinander sind (Trigonometrie), und liefert zudem die Länge von Vektoren (Pythagoras).

Relativ leicht und von der Anschauung getragen ergeben sich zwei Einsichten, die zu einem universellen Verfahren ausgebaut werden können: Von allen Verbindungsvektoren einer Ebene E mit einem Punkt X ist der auf E senkrecht stehende am kürzesten. Der kürzeste Verbindungsvektor von E mit X unterscheidet sich vom kürzesten Verbindungsvektor einer Gerade $g \subset E$ mit X nur durch einen senkrechten Anteil.



Zum Beweis dieser Aussagen benötigt man nur die Symmetrie und Bilinearität des Skalarprodukts. Erklärt man diese zusammen mit der positiven Definitheit zu definierenden Eigenschaften von Skalarprodukten und versteht Orthogonalität und Länge im über das Skalarprodukt festgelegten Sinne, so sind die Aussagen weit über den anschaulichen Bereich hinaus abstrahierbar:

Die Orthogonalprojektion eines Vektors auf einen Unterraum ist seine beste Approximation im Sinne der zugehörigen Norm. Die besten Approximationen eines Vektors in verschachtelten Unterräumen aufsteigender Dimension unterscheiden sich voneinander nur durch orthogonale Anteile.

Die zweite Aussage sichert die Ausbaubarkeit zu folgendem allgemeinen Verfahren; denn nach ihr bleiben bei sukzessiver Dimensionserhöhung des Unterraums alle bereits berechneten Koeffizienten unverändert.

<u>Bestimmung bester Approximationen durch Entwicklung über Orthonormalbasen:</u> Fasse das zu approximierende Signal als Element eines Vektorraums mit Skalarprodukt auf. Wähle als Approximationsbereich einen geeigneten Unterraum. Bestimme (durch geschickte Wahl oder Schmidtsches Verfahren) eine Orthonormalbasis des Unterraums. Entwickle das Signal über der Orthonormalbasis. Erhöhe die Dimension sukzessive bis zur gewünschten Genauigkeit. Lasse weitere für den Anwendungskontext unwichtige Komponenten weg (z.B. mit betragsmäßig kleinen Koeffizienten).

Nun ist die Bestimmung guter Approximationen angesichts der heutigen Datenmengen, die gespeichert, übermittelt und interpretiert werden sollen, ein Problem von nicht zu überschätzender Bedeutung. Da Signale aller Art letztlich zeit- oder ortsabhängige Funktionen sind, ist insbesondere die Erweiterung des Verfahrens auf Funktionenräume von enormer Tragweite. Somit bleibt die Abstraktion der aus der Anschauung motivierten Ideen kein Selbstzweck, sondern führt zu neuen relevanten Anwendungen.

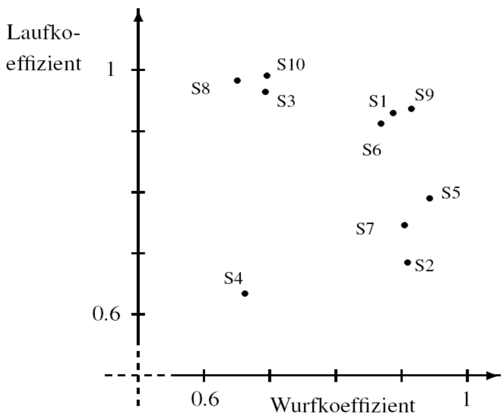
Beispiele

Die im $\mathbb{R}^3$ gewonnenen Erkenntnisse werden zunächst auf Beispiele mit Spaltenvektoren in höheren endlichen Dimensionen übertragen. Dann folgt der Übergang zu Funktionenräumen mit dort üblichen Skalarprodukten. Hierzu werden zwei der wichtigsten Anwendungen vorgestellt: Die Bearbeitung akustische Signale mit den Sinus- und Cosinus-Funktionen als Basis aller periodischen Funktionen und die Bild-Verarbeitung mit den Haar-Wavelets als Basis aller stückweise konstanten Funktionen.

Beispiele im IR^n mit n>3

In Frage kommen alle Anwendungen, bei denen das zu minimierende Maß über die Summe der Komponentenquadrate definiert ist. Dazu zählen die Schwerpunktsbestimmung von Punktmengen, die Anpassung ganzrationaler Funktionen an Messreihen, Raum-Zeit-Probleme und die Dimensionsreduktion von Datenlisten als Bestandteil der so genannten Clusteranalyse.

Letztere dient der Untersuchung großer Objektmengen auf das Auftreten von Klassen mit bestimmten Merkmalsausprägungen. Sind zum Beispiel die Bestleistungen von Leichtathleten in verschiedenen Disziplinen als n-dimensionale Vektoren gegeben, so kann die Projektion auf einen zweidimensionalen Unterraum Übersicht verschaffen, wenn dieser durch an den Weltrekorden orientierte Prototypen eines 'reinen Werfers' und eines 'reinen Läufers' aufgespannt wird. Die umfangreichen Sportlerdaten werden durch die beiden Koeffizienten der besten Approximation in diesem Unterraum ersetzt, welche über Punkte in der Ebene veranschaulicht werden können und Diagnosen zum Beispiel hinsichtlich der weiteren Spezialisierung erleichtern.



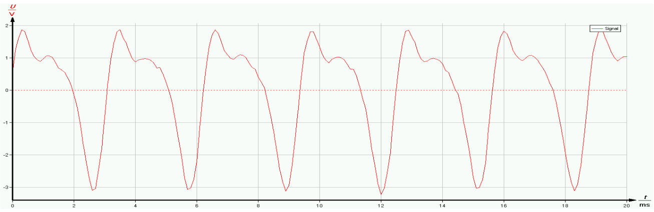
Funktionenräume

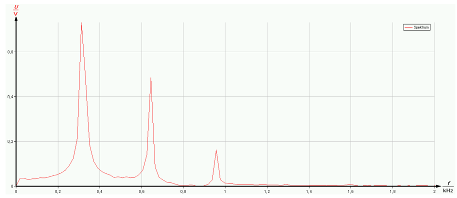
Spaltenvektoren können auch als Wertelisten stückweise konstanter Funktionen (über gleich breiten, z.B. dyadischen Intervallen) aufgefasst werden. Eine immer größere Zahl immer kleinerer Intervalle führt im Grenzübergang auf den Vektorraum der Funktionen $f\colon[0,1]\to IR$. Das Standardskalarprodukt geht dabei in das Integral $\langle f,g\rangle=\int f(x)\cdot g(x)\,dx$ über. Dabei bleiben die wesentlichen Eigenschaften erhalten, wenn man sich auf stückweise stetige Funktionen beschränkt und Funktionen identifiziert, die sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden. Der zugehörige Orthogonalitäts- und Normbegriff sind zunächst wenig anschaulich. Durch eine geeignete Auswahl von Beispielen kann jedoch ein Gefühl dafür vermittelt werden, welche Funktionen große Norm haben und wann zwei Funktionen als orthogonal zueinander bezeichnet werden.

Fourier-Basis aller periodischen Funktionen

Eine der erfolgreichsten Anwendungen des Verfahrens in Funktionenräumen ist die Fourieranalysis: Die Menge der Funktionen $\sqrt{2}\,\sin(2\pi nx)$ und $\sqrt{2}\,\cos(2\pi nx)$ ist eine Orthonormalbasis aller 1-periodischen Funktionen. Periodisch sind zum Beispiel einfache akustische Signale, wie sie den

Klängen verschiedener Instrumente oder den Vokallauten entsprechen. Mit geeigneten physikalischen Mitteln und Computer-Algebra-Systemen erschließt sich Schülern ein breites Feld der eigenständigen Erkundungen rund um die Analyse und Synthese von Geräuschen, bei der Effektivität und Qualität verschiedener Approximationen untersucht werden können.

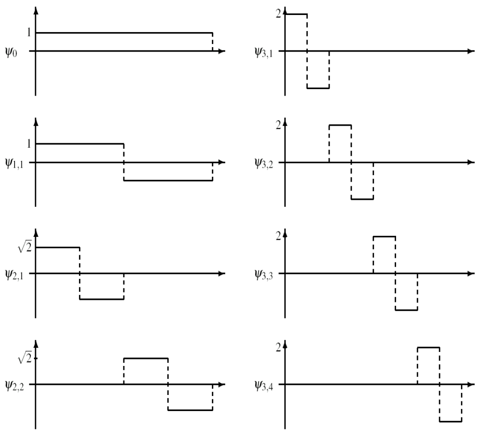


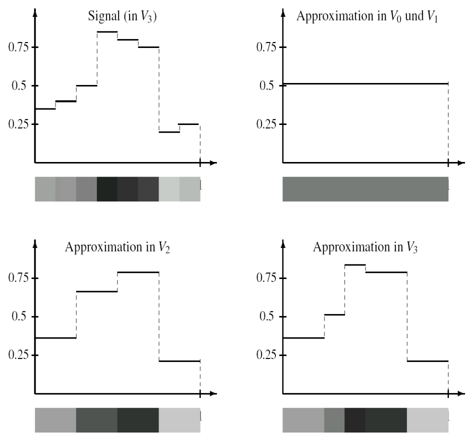


Die Abbildungen zeigen den zeitlichen Verlauf sowie das Frequenzspektrum des aufgenommenen Vokals O. Eine brauchbare Approximation liefert die Funktion $f(x)=1.73\cdot\sin(2x)+1.15\cdot\sin(4x+1.26)+0.36\cdot\sin(6x+2.20)$.

Haar-Wavelet-Basis aller stückweise konstanten Funktionen

Eine nicht minder erfolgreiche, bedeutend jüngere Anwendung des Verfahrens ist die Haar-Wavelet-Transformation als Teil der Bildkompression im JPEG-Format: Die linke Abbildung zeigt die Haar-Wavelets bis zum Grad drei (allgemein n). Sie bilden eine Orthonormalbasis aller auf acht (allgemein 2^n) dyadischen Intervallen konstanten Funktionen.





Die Grundidee der Transformation besteht darin, sich statt benachbarter Pixelwerte deren Mittelwert und Differenz zu merken. Letztere ist nämlich bei den meisten Bildern in großen Bereichen so klein, dass ein Weglassen der entsprechenden Koeffizienten keinen nennenswerten Qualitätsverlust zur Folge hat. Die rechte Abbildung zeigt als Beispiel einen eindimensionalen Ausschnitt eines Schwarzweißbildes mit seinen Approximationen durch Haar-Wavelets vom Grad 0 bis 3. Man erkennt im letzten Bild eine gute Approximation des Signals mit nur der Hälfte der Koeffizienten: $f\approx 51.3\,\psi_0-10.6\,\psi_{2,1}+19.5\,\psi_{2,2}-2.5\,\psi_{3,2}$. Mit Rechnungen von Hand beginnend können Schüler über die Nutzung von Computer-Algebra-Systemen bis zur Approximation selbst eingespeister Fotos vordringen.

Lutz HELLMIG, Rostock

Zum Verhältnis von Inhalt und Form von Lehrerfortbildung - eine Falldiskussion

Aus der Evaluation des Lehrerfortbildungsprogramms UPOLA (Unterrichten mit polyvalenten Aufgaben) resultiert die Fragestellung, inwieweit die Wirksamkeit der Fortbildung durch deren organisatorisch-methodische Gestaltung erwächst bzw. durch ihre inhaltliche Ebene determiniert ist.

1. Ziele, Inhalte und Methoden von UPOLA

Durch die Schaffung heterogener Klassen in den Jahrgangsstufen 5 und 6 besteht in Mecklenburg-Vorpommern ein erhöhter Bedarf an realisierbaren Konzepten des binnendifferenzierten Arbeitens im Mathematikunterricht. Dieses Erfordernis wurde aufgegriffen, um eine Fortbildung zu planen, in der die Lehrerinnen und Lehrer (1) ihre Kompetenzen bezüglich binnendifferenzierten Arbeitens im Mathematikunterricht heterogener Klassen erweitern sowie (2) eine Kultur der kollegialen Kommunikation und Kooperation entwickeln.

Einen geeigneten inhaltlichen Bezug zu den Zielen der Fortbildung haben polyvalente Aufgaben (vgl. Sill/Hellmig 2008) dargestellt, die auf das Konzept des Open-Ended Approach nach Becker/Shimada (1997) zurückzuführen sind. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Fortbildung sollten ein Verständnis für die Charakteristik polyvalenter Aufgaben entwickeln und ihren Wert für die Aneignung von Begriffsvorstellungen und Verfahrenskenntnissen erkennen. Darauf aufbauend wurden Ideen für die Planung und Durchführung eines geeigneten Unterrichts diskutiert und erprobt. Um die Vielfalt der möglichen Schülerantworten auf unterschiedlichen Niveaustufen mathematischen Denkens im Unterricht zu thematisieren, ist eine Veränderung des in Deutschland tradierten Mathematikunterrichts (Stigler 1999) nötig, die insbesondere durch einen deutlich höheren Anteil an fachlicher Kommunikation gekennzeichnet ist.

Um die Veränderungen der Unterrichtskultur zu manifestieren, wurde eine Kombination aus 4 Arbeitstreffen und 3 dazwischen liegenden Phasen der Vor-Ort-Erprobung und des Austausches per Lern-Management-System als adäquate Organisationsform der Fortbildung angesehen, die sich fast über ein gesamtes Schuljahr erstreckt. Zentrale Attribute der Fortbildung waren ein hoher Anteil kommunikativer Phasen sowie die Offenheit gegenüber individuellen Wegen zur Adaption und Realisierung der vermittelten Unterrichtskonzepte.

2. Evaluation von UPOLA

Bezogen auf die Gestaltungsform der Fortbildung stand die Frage „*In welchem Maße befördert die Form des mit UPOLA realisierten schuljahresbegleitenden Blended Learning den Transfer der Fortbildungsziele in den Unterricht?*“ im Mittelpunkt.

Zur Beantwortung dieser und weiterer diverser Teilfragen wurden mehrere Evaluationswerkzeuge kombiniert. Dies waren u.a. Fragebögen für Teilnehmer und Schulleiter, Unterrichtsbeobachtungen und stichprobenartige Schülerinterviews, Analysen der Aktivitäten auf der Lernplattform sowie eine vereinfachte Variante von Repertory-Grid-Interviews.

Die Sichtweise auf den Prozess des Wirksam-Werdens der Fortbildung bis in den Schulalltag hinein hat Auswirkungen auf die Methodik der Evaluation. Eine Möglichkeit, diesen Prozess abzubilden, benennt Guskey (2000) mit den 5 Stufen der Evaluation, (1) die Zufriedenheit der Teilnehmer mit der Veranstaltung, (2) das Lernen der Teilnehmer, (3) die Unterstützung durch die Schule (v.a. durch die Schulleitung) bezüglich Veränderungsprozessen, (4) die Realisierung der Fortbildungsinhalte im Unterricht und (5) die Auswirkungen auf das Lernen der Schüler.

Anhand der Auswertung von anonymen Feedbackfragebögen, auf denen sich die Teilnehmer nach jeder Präsenzveranstaltung in offener Form zur Veranstaltung äußern konnten, konnte ein Perspektivwechsel bezüglich der Fortbildung beobachtet werden.

Nach dem Ende der ersten Veranstaltung reflektierten die Teilnehmer überwiegend zu den äußeren Rahmenbedingungen der Fortbildung und bis zu einem gewissen Maße auch zu ihrem Wissenszuwachs (Stufen 1 und 2 nach Guskey 2000). Eine Reflexion zur Umsetzbarkeit im Unterricht fand praktisch nicht statt. In den folgenden Veranstaltungen ging der Anteil von Bemerkungen zu den äußeren Bedingungen deutlich zurück; der Anteil von Rückmeldungen zum erworbenen Wissen erhöhte sich etwas und stabilisierte sich im Verlauf der Fortbildung. Mit der zweiten Veranstaltung verfügten die Lehrer über erste Erfahrungen im Einsatz polyvalenter Aufgaben im Unterricht. Je größer dieser Erfahrungsschatz im Verlauf des Schuljahres wurde, umso höher wurde der Anteil der Bemerkungen zum unterrichtlichen Agieren als Lehrer. Erst mit der letzten Veranstaltung verschob sich der Blick der Lehrer in erkennbarer Weise auf das Lernen der Schüler. Eine graphische Repräsentation findet sich in umstehender Abbildung.

Insbesondere der Einsatz von und der kreative Umgang mit polyvalenten Aufgaben im Unterricht sowie die Bewertung polyvalenter Aufgaben als

Mehrwert für Lehrer und Schüler konnten als Indizien für den Erfolg der Fortbildung gewertet werden.

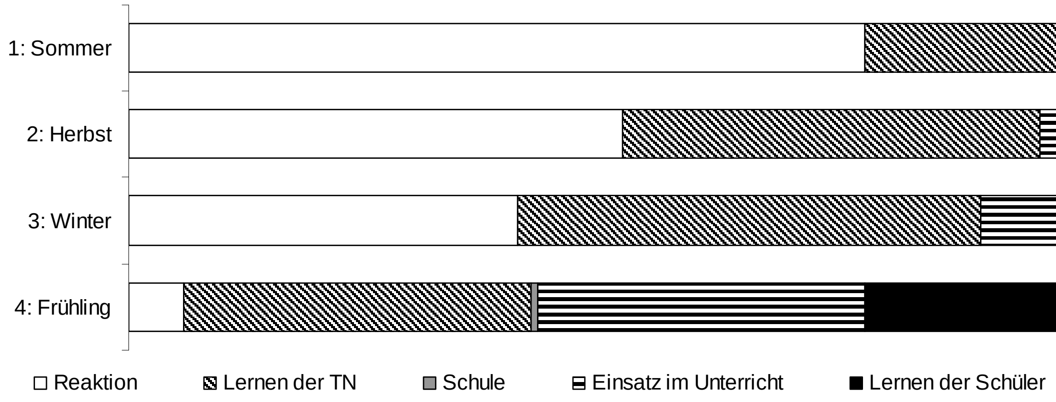


Abbildung: Verschiebung des Blickwinkels der Teilnehmer auf die Fortbildung

3. Zum Anteil von Inhalt und Form an der Wirksamkeit der Fortbildung

Die Reaktionen der Lehrer bezogen sich mit fortdauernder Fortbildung immer weniger auf deren methodische Gestaltungsweise. Äußerungen wie: *„Offene Aufgaben lassen viel Spielraum für Schüler, fördern Kreativität und Selbstständigkeit.“* oder *„Polyvalente Aufgaben fördern die Entwicklung sprachlicher Fähigkeiten.“* referenzierten unverkennbar auf die Eignung der vermittelten thematischen Schwerpunkte für die Schulpraxis und stellten so einen Zusammenhang zur Wirkung der Fortbildung her. Dies warf die Frage nach einer separaten Evaluierbarkeit der Fortbildungsmethodik auf, zu der im Folgenden einige Gedanken ausgeführt werden.

Zu Beginn der Fortbildung nahmen die Teilnehmer vor allem deren Gestaltungsmerkmale wahr. Dies bezog sich auf die Fortbildungsmethodik, aber auch auf organisatorische Rahmenbedingungen und die Persönlichkeiten der Fortbildner und der Gruppencharakteristik. Der potentielle Bezug zur Unterrichtspraxis konnte als weiterer Faktor angenommen werden (vgl. Lipowsky, 2004), wurde aber hier durch die Teilnehmer nicht explizit benannt. Aspekte der Gestaltungsform der Fortbildung sicherten so eine erste Zufriedenheit der Teilnehmer mit der Fortbildung und besaßen somit eine „Türöffnerfunktion“ für die durch die Fortbildung zu transferierenden Inhalte.

Im weiteren Verlauf wurde die inhaltliche Komponente für die Wirksamkeit der Fortbildung wichtiger. Die Themen der Fortbildung zielten sowohl auf die Entwicklung des fachdidaktischen Lehrerwissens bezüglich der polyvalenten Aufgaben und ihrer Funktion in der Ausbildung mathematischer Kompetenzen beim Schüler, als auch auf die Veränderung des Lehrerhandelns durch eine spezielle, auf Kommunikation ausgerichtete Unterrichtsgestaltung ab. Auf einer Metaebene fanden beide Bereiche – die Offenheit und die Kommunikation – eine Entsprechung im gestalterischen Konzept der Fortbildung. An dieser Stelle wurde das dialektische Wechselverhältnis zwischen der Fortbildungsmethodik und den Fortbildungsthemen sichtbar. Auf eine Formel gebracht stellte sich die Wirkung von Lehrerfortbildung als das (Skalar-) Produkt aus gestalterischer und inhaltlicher Qualität dar. Eine aufeinander abgestimmte Ausrichtung wirkte befördernd auf das Ergebnis.

Im Umkehrschluss ergab sich die Frage, welcher Art Fortbildungsthemen sein sollten, für die das gestalterische Konzept von UPOLA geeignet sein könnte. Die Erstreckung von UPOLA über ein Schuljahr ermöglichte und bedingte eine kontinuierliche Auseinandersetzung der Teilnehmer mit der Thematik. Somit musste die Aneignung der Inhalte durch praktische Erprobung und Kooperation von Teilnehmern mit einem gemeinsamen Erfahrungshintergrund über die gesamte Dauer der Fortbildung möglich sein. Das Fortbildungsthema hatte somit als Metakonzept in verschiedenen inhaltlichen Kontexten über das gesamte Schuljahr innerhalb einer Klassenstufe zu existieren, die Festlegung auf eine bestimmte Klassenstufe sicherte eine gemeinsame Arbeitsbasis der Teilnehmer.

Der enorme zeitliche Aufwand für die beteiligten Lehrer ließ sich zudem nur rechtfertigen, weil die Thematik einen engen Bezug zum gültigen Curriculum aufwies. Ein Anreiz für die Reflexion und Diskussion der Teilnehmer war erst dadurch gegeben, dass über die pure fachdidaktischer Wissensvermittlung hinaus Auswirkungen auf die Unterrichtsgestaltung und das Lehrerhandeln ausdrücklich intendiert waren.

Literatur

Becker, J.; Shimada, S. (Hrsg.) (1997): *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Guskey, T. (2000). *Evaluating Professional Development.* Thousand Oaks: Corwin Press.

Lipowsky, F. (2004). Was macht Fortbildungen für Lehrkräfte erfolgreich? Befunde der Forschung und mögliche Konsequenzen für die Praxis. In: *Die Deutsche Schule, 94*, 462-479.

Sill, H.-D., Hellmig, L. (2008): Konzept einer Lehrerfortbildung zu polyvalenten Aufgaben. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 249-252). Hildesheim: Franzbecker.

Stigler, J.W., Hiebert, J. (1999): *The Teaching Gap*. New York: Free Press.

Wilfried HERGET, Markus PABST, Halle (Saale)

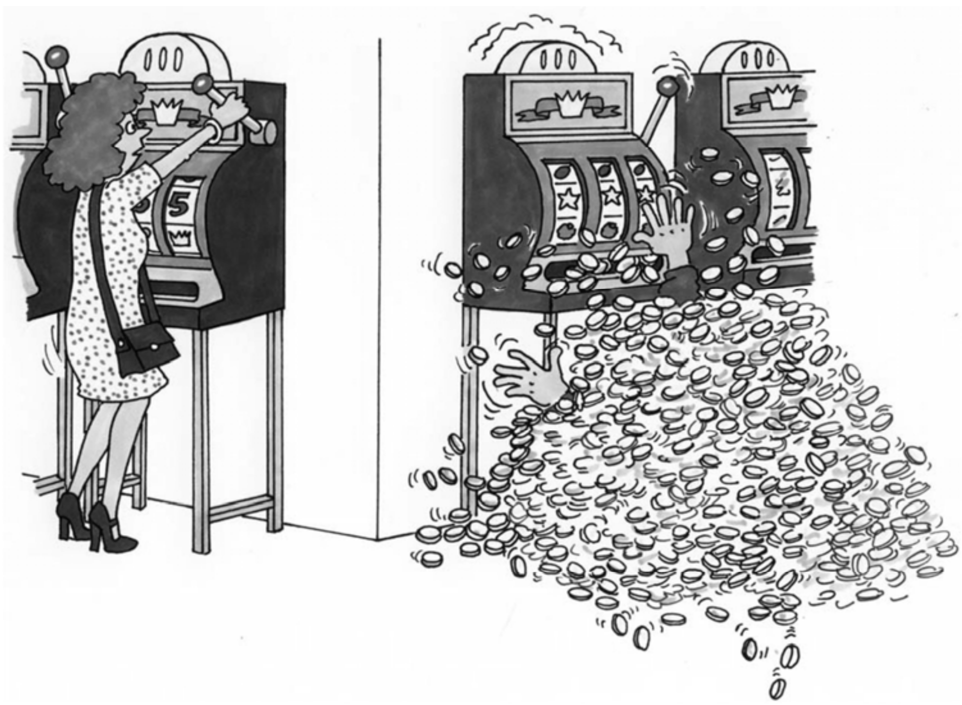
Modellieren und Argumentieren im Team – Erfahrungen mit der Cornelsen-Mathemeisterschaft

Mathematik jenseits des reinen Rechnens und jenseits des üblichen Unterrichts: Die Cornelsen-Mathemeisterschaft bietet dazu attraktive, herausfordernde, „etwas andere“ Aufgaben. Jedes Jahr beteiligen sich viele tausend Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 bis 10, die in kleinen Teams innerhalb einiger Wochen sich auf den Weg hin zu einer Lösung machen, siehe www.cornelsen-mathemeisterschaft.de.

Welchen Wert versprechen solche Aufgaben? Und welche Anregungen ergeben sich für den Mathematikunterricht? In dem Vortrag wurden einzelne Beispielaufgaben vorgestellt (siehe auch die Literatur) und einige unserer Erfahrungen mit den Schülerlösungen dazu skizziert.

Einige herausfordernde Aufgaben

Die Abb. 1 zeigt die Aufgabe für Klasse 5/6 aus dem Jahr 2007. Schnell wird deutlich, dass durchaus wesentliche Angaben fehlen: Was sind das für Münzen? Welche Form hat der Münzberg? Wie eng liegen die Münzen? Wie groß ist die Person?



Wie viel Euro sind das ungefähr?

Abb. 1: Ein großer Gewinn – Aufgabe für Klasse 5/6, 2007

Dass und wie sich diese Aufgabe eignet, gezielt die Idee des Modellierens auch im Mathematikunterricht zum Thema zu machen und die dazu notwendigen Fähigkeiten und Fertigkeiten zu entwickeln und zu festigen, haben wir in einem Schülerarbeitsheft (Herget u. a. 2007) ausführlich dargelegt. Dabei haben wir auch Möglichkeiten aufgezeigt, wie im Unterricht unterschiedliche Lösungsansätze angeregt, arbeitsteilig umgesetzt und schließlich gemeinsam kritisch-konstruktiv reflektiert werden können.

Einige interessante Erfahrungen

Im Folgenden werden beispielhaft die Einsendungen zur Mathemeisterschaft von 2007 näher ausgewertet. Damals nahmen über 1200 Schülergruppen und damit knapp 5000 Schülerinnen und Schüler aus allen Teilen Deutschlands teil. Interessant ist die Beteiligung der verschiedenen Jahrgänge und Schularten, siehe Abb. 2. Wie zu erwarten, sind am stärksten die Gymnasien und dort die Jahrgänge 5 und 6 vertreten. Andererseits stammen immerhin rund ein Drittel der Einsendungen aus anderen Schularten – diese Schülergruppen haben sich also bewusst der gymnasialen Konkurrenz gestellt. Die Cornelsen-Mathemeisterschaft erweist sich damit durchaus als attraktiv für alle Schulformen.

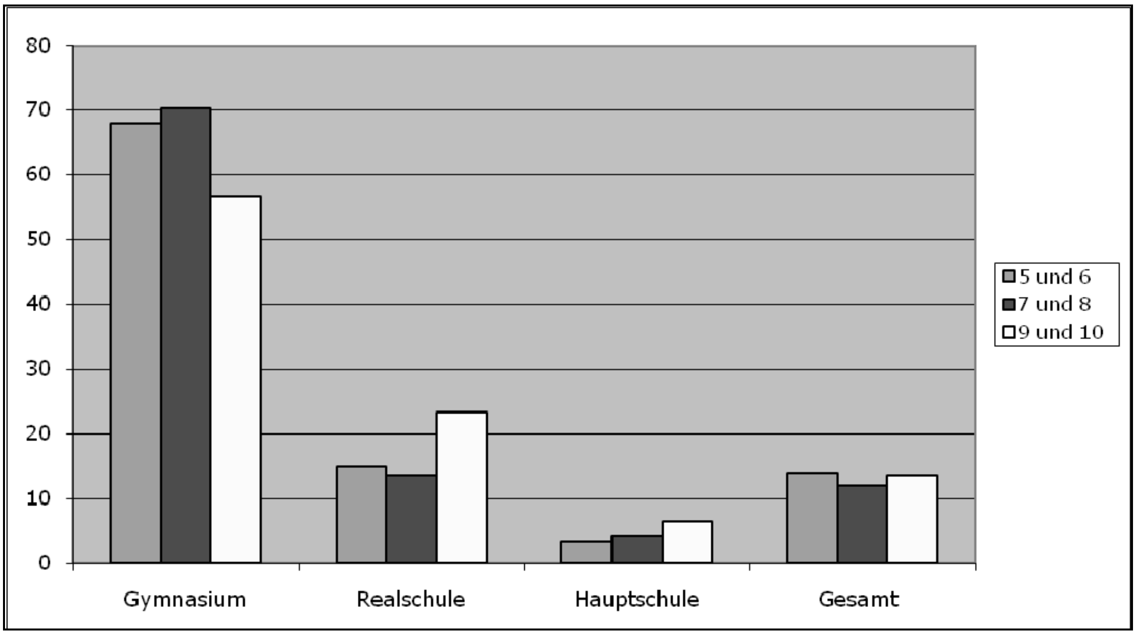


Abb. 2: Beteiligung der verschiedenen Jahrgänge und Schularten, 2007

Die Aufgaben bieten nicht nur Gelegenheit, den Schülerinnen und Schülern die Relevanz von mathematischen Werkzeugen und Überlegungen in außermathematischen Kontexten zu verdeutlichen. Anhand vieler Einsendungen kann man auch Möglichkeiten erkennen, wie bereits erarbeitete Lerninhalte in komplexerem Zusammenhang wiederholt und gefestigt werden.

Dresden – Der Rathausmann ist zurück. Per Schwertransport wurde das Wahrzeichen nach Hause gebracht und auf seinen alten Platz auf dem Rathaus in 95 Meter Höhe gehoben.
Das Stützgerüst der Kupfer-Figur wurde erneuert. Die Vermessung ergab: Volumen 3,60 Kubikmeter, Oberfläche 27,2 Quadratmeter, Höhe mit Halbkugel 5,63 m, ohne Halbkugel 5,05 m, Kupfergewicht 380 kg. Für die Vergoldung waren 520 g Gold nötig.
Der Rathausmann soll Herkules verkörpern, der als Schutzpatron der Stadt mit der einen Hand sein Füllhorn ausschüttet und mit der anderen auf die Schönheit zu seinen Füßen verweist.

Passen die Angaben zu Volumen, Oberfläche und Höhe der Figur zusammen? Wie dick ist die Kupfer-Hülle? Wie dick ist die Vergoldung?

Abb. 3: Der Dresdener Rathausmann – Aufgabe für Klasse 7/8, 2007

In jedem Fall eignen sich die Aufgaben in besonderem Maße zur Entwicklung von Modellierungskompetenzen. Bei einigen Lösungen zur Aufgabe für die Jahrgänge 7/8 beispielsweise, bei der sich die Schülerinnen und Schüler mit dem restaurierten Dresdener Rathausmann auseinandersetzen sollten (Abb. 3), lässt sich dies gut ablesen. So wurde diese Aufgabe zum Beispiel in einer achten Klasse genutzt, um die Formel für das Zylindervolumen in einem ungewohnten Zusammenhang anzuwenden. Die Schülerlösungen der insgesamt fünf Teams dieser Klasse zeigen alle eine ähnliche Skizze, in der die Statue mit Hilfe von verschieden großen Zylindern angenähert wurde (Abb. 4).

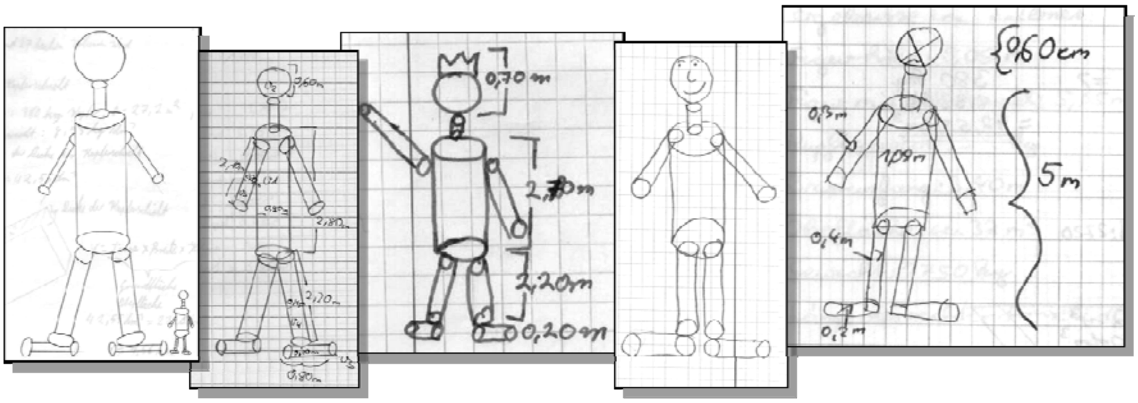


Abb. 4: Der Dresdener Rathausmann – Zylinder-Modellierungen aus einer 8. Klasse

Offenbar wurde diese Herangehensweise zunächst gemeinsam im Plenum erarbeitet. Anschließend haben sich die einzelnen Schülergruppen dann sinnvolle Maße für die jeweiligen Zylinderstücke überlegt. Auf diese Weise wird den Schülerinnen und Schülern ein möglicher Lösungsweg zur Bearbeitung von offeneren Aufgabenstellungen vorgestellt und sie können so zur Lösung komplexerer Modellierungsaufgaben befähigt werden.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die gemeinsame Bearbeitung der Aufgaben im Team. Die Aufgaben sind so formuliert, dass sich einzelne Teilaufgaben bestimmen lassen, die dann ein arbeitsteiliges Vorgehen nahelegen. Für die oben genannte Aufgabe etwa haben sich einzelne Schülerinnen und Schüler mit den Proportionen des menschlichen Körpers auseinandergesetzt. Sie haben dazu Informationen im Internet recherchiert, während andere selbst Messungen angestellt haben, um sinnvolle Angaben für den Rathausmann zu finden.

Schließlich sollen die gefundenen mathematischen Lösungen laut Aufgabenstellung hinsichtlich ihrer Güte und Realitätsnähe geprüft und beurteilt werden. Die dabei zu führende Diskussion und Argumentation erfordert erneut den Austausch mit den anderen Gruppenmitgliedern und stärkt die Fähigkeiten zur Kommunikation und zur Reflexion.

Einiges für den Mathematikunterricht

Insgesamt fordern und fördern solche Aufgaben neben den mathematischen Fähigkeiten und inhaltlichen Kenntnissen auch die Zusammenarbeit der Schülerinnen und Schüler untereinander und schulen so deren Sozialkompetenz. Zudem bieten sie durch den durchweg *anwendungsorientierten* und zugleich *spielerischen* Ansatz eine attraktive Abwechslung und stellen eine interessante Verbindung von Mathematik und dem „Rest der Welt“ her.

Literatur

Büchter, Andreas; Herget, Wilfried; Leuders, Timo; Müller, Jan Hendrik (2007/2009). Die Fermi-Box I und II (Klasse 5–7, Klasse 8–10). Materialien für den Mathematikunterricht Sek I. Donauwörth: Lernbuchverlag.

Herget, Wilfried; Jahnke, Thomas; Kroll, Wolfgang (2001). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I.* (Buch und CD-ROM). Berlin: Cornelsen.

Herget, Wilfried (2000). Wie groß? Wie hoch? Wie schwer? Wie viele? Mathe-Welt. *mathematik lehren, Heft 101,* S. 23–46.

Herget, Wilfried; Klika, Manfred (2003). Fotos und Fragen. Messen, Schätzen, Überlegen – viele Wege, viele Ideen, viele Antworten. *mathematik lehren, Heft 119,* S. 14–19.

Herget, Wilfried; Malitte, Elvira; Richter, Karin; Sommer, Rolf (2007). Modellieren mit Gewinn. Mathe-Welt. *mathematik lehren, Heft 145,* S. 23–46.

Kurt HESS, Zug (CH)

Aufbau einer mathematischen Strategie-*Bewusstheit* im arithmetischen Anfangsunterricht!

1. Beweggründe

Der Appell in der Überschrift hat zwei Beweggründe: Zum Einen mehrten sich in den letzten Jahren mathematik-didaktische Publikationen mit reichhaltigen Aufgaben, die eine natürliche Differenzierung und ein aktiv-entdeckendes Lernen ermöglichen (z.B. Ruwisch, 2003; Rasch, 2007; Hirt & Wälti, 2008; Hengartner, Wälti & Hirt, 2007). Damit entstanden wichtige innovative Grundlagen für den Mathematikunterricht, welcher aber nach wie vor den mathematischen Kompetenzaufbau im Blick haben soll. Deshalb ist es unverzichtbar, dass offenere Aufgaben von diagnostischen Kriterien geleitet werden. Aus dem Forschungsprojekt *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte* (ebd.) ist ein solches diagnostisches Folgeprojekt mit dem Namen *förderorientierte Beurteilung 4- bis 8-jähriger Kinder* entstanden, in welchem wir die vorliegenden Lernumgebungen mit diagnostischen Kriterien versehen und für Kinder, welche bescheidene Leistungen zeigen, geeignete Förderideen mit einem gezielten mathematischen Kompetenzaufbau entwickeln (Hess & Wälti, 2009). Die Förderideen für beide Kindergartenjahre und die 1./2. Klasse sollen den Kindern ermöglichen, eine mathematische Strategie-*Bewusstheit* aufzubauen.

Zum Andern untersuchten Studierende der PHZ Zug (CH) in einem Längsschnitt mit Messungen im 2. Kindergartenjahr[1] und in den ersten beiden Klassen die mathematischen Strategien, mit welchen rund 50 Kinder Additionen und Subtraktionen lösen. Dazu einige Ergebnisse in Thesenform:

1. Bereits Kindergartenkinder zeigen reichhaltige mathematische Strategien und eine beachtliche Strategie-*Bewusstheit*.
2. Einigen Kindern gelingt es nicht oder nur bescheiden, ihre mathematischen Strategien und ihre Strategie-*Bewusstheit* zwischen der ersten und der letzten Messung weiter zu entwickeln und zu differenzieren.
3. Zählendes Rechnen ist nicht gleich zählendes Rechnen: Es gibt innerhalb von Zählstrategien eigentliche „Kompetenzstufen“, die aufeinander aufbauen (vgl. *Aufbau einer mathematischen Strategie-Bewusstheit*).
4. Die schwächsten Rechnerinnen und Rechner unterscheiden sich kaum von den stärksten bezüglich richtiger Rechenresultate, jedoch hinsichtlich ihrer Strategien und ihrer Strategie-*Bewusstheit*.

[1] Die in die Untersuchung einbezogenen Kindergärten kennen kein mathematisches Curriculum. Ein solches ist erst nach dem laufenden schweizerischen Reformprojekt (HarmoS) vorgesehen. Das Alter im Kindergarten liegt zwischen 4 und 6 Jahren.

Kommentar zu den Ergebnissen 1, 2 und 4:
Ad 1) Alle Kindergartenkinder zeigten mindestens die einfachste Strategie „alles zählen". Auch das Weiterzählen vom ersten und vom grösseren Summanden aus, der statische Fingergebrauch, mentale Gliederungen sowie ein generiertes Abrufwissen (v. a. bei Verdoppelungen bis 5 + 5) befanden sich im Repertoire der Kinder. Die Strategie-*Bewusstheit* kann und darf aber in diesem Alter nicht alleine an der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit festgemacht werden. Für viele Kinder ist es wesentlich einfacher, ihre Strategie an den eigenen Fingern zu zeigen oder sie zu legen. Die didaktische Konsequenz für den Schulanfang lässt sich mit Selters 1995 aufgerufener Formel *„zur Fiktivität der ‚Stunde Null' im arithmetischen Anfangsunterricht"* treffend umschreiben. Mit anderen Worten: Der Anfangsunterricht hat die Kinder zu fragen, wie sie Operationen lösen und er soll sie weiter führende bzw. ökonomischere Strategien entdecken und prüfen lassen. Leider ist vielerorts zu beobachten, dass nicht nachgefragt, sondern beigebracht wird …

Ad 2) In *jeder* Schulklasse fielen Kinder auf, welche ihr Repertoire an mathematischen Strategien zwischen dem Kindergarten und anfangs zweiter Klasse nur bescheiden erweiterten. Zudem traten auch relativ grosse Interklassendifferenzen auf, welche vermuten lassen, dass in den einen Klassen diesbezügliche Angebote grösser und/oder gezielter sind als in anderen.

Ad 4) Die letzte These vergleicht die Vielfalt der gezeigten Strategien mit der Anzahl richtiger Ergebnisse, welche nur wenig differierte. Auch die schwächsten brachten ein richtiges Resultat mit der einfachsten Zählstrategie zustande, wohingegen andere bereits anspruchsvolle Strategien zeigten.

2. Zählentwicklung

Bereits im Kindergarten ist es angezeigt, bezüglich Zählprinzipien, Zählprozessen und Zählstrategien Förderangebote zu machen, auch wenn die Theorie zur Zählentwicklung (Gelman & Gallistel, 1978) davon ausgeht, dass Vierjährige (in der Regel) über die elementaren drei Zählprinzipien verfügen. Die Theorie (ebd.) umfasst fünf Zählprinzipien, welche in ihrer Gesamtheit einen reifen Zahlbegriff ausmachen. Das erste Prinzip beinhaltet die Eins-zu-eins-Korrespondenz zwischen Zahlnamen und Zählelementen. Dies gelingt, wenn die Kinder eine Ordnung in eine Kollektion bringen, damit der Beginn und das Ende des Zählvorgangs eindeutig sind. Zudem kommt den Kindern gerne eine inkonsequente visuo-motorische Koordination in die Quere, indem sie zwei Zahlnamen sagen und nur ein Element zeigen oder umgekehrt. Bereits dieses erste Prinzip lädt dazu ein, dass die Kinder singuläre Zählwege und -prozedere vergleichen und austauschen. Das zweite Prinzip beinhaltet die stabile Reihenfolge der Zahlnamen, welches sich über geeignete Lieder und Reime interiorisieren lässt. Schliesslich besagt das Kardinalitätsprinzip, dass das letzte gezählte Element die Mächtigkeit einer Menge beschreibt. Die genannte altersmässige Verfügbarkeit dieser drei Prinzipien sollte die Forderung rechtfertigen, dass die aufzubauende Zähl-*Bewusstheit* ins Curriculum des Kindergartens gehört. Das vierte und fünfte Prinzip ist an abstraktere Denkleistungen gebunden, welche vielen Kindern erst im Verlauf der ersten Klasse[2] möglich sind. Es macht also Sinn, im Kindergarten an der Verinnerlichung und Flexibilisierung (vgl. Moog, 1995) des Zählens zu arbeiten, also am Vor- und Rückwärtszählen von jeder Zahl aus. Beim Aufbau einer Strategie-*Bewusstheit* bei Zählprozessen sollen sich die Kinder bewusst mit den eigenen Händen, ihrem Zählen und demjenigen anderer auseinandersetzen. Damit erarbeiten sie sich Grundlagen für folgende Kompetenzerweiterungen.

3. Zählstrategien

Alle Kindergartenkinder zeigten die einfachste Zählstrategie „alles Zählen“ (3 + 2 = 1, 2, 3 + 1, 2 = 1, 2, 3, 4, 5). Auf der nächsten „Kompetenzstufe“ zählen die Kinder nur noch vom ersten Summanden aus. Dies gelingt mit der genannten Flexibilisierung des Zählens. Die dritte Strategie bedient sich des Kommutativgesetzes und ist daher keine reine Zählstrategie mehr. Bei dieser Mischstrategie vertauschen die Kinder die Summanden – wenn der erste kleiner ist als der zweite – und zählen anschliessend vom grösseren Summanden aus. Erkennt eine Lehrperson solche Unterschiede, so kann sie entsprechende Fortschritte Wert schätzen und die Kinder ihre Strategien vergleichen und austauschen lassen. Angezeigt ist ein ehrlicher und offener Umgang mit Zählstrategien und sicherlich kein Verbot des Zählens.

4. Weiterführende Strategien (Lösung von Zählstrategien)

In einer weiterführenden Strategie nutzen die Kinder simultan gezeigte Fingerbilder statisch, also nicht mehr dynamisch zählend (Lorenz, 1992, S. 174). Der statische Fingergebrauch ist demnach als eine Ablösung vom Zählen zu sehen. Das simultane Zeigen der Fingerbilder 6 bis 10 bedarf bereits einer mentalen Gliederung (z.B. Aufteilung des Achters in 5 + 3).

Die bewegliche mentale Gliederungsfähigkeit bis 20 lässt Mengen ökonomisch zerlegen und additiv aufbauen. Es ist von Bedeutung, dass bereits der Fünfer mental gegliedert werden muss. Drei und vier Elemente sind simultan erfassbar, bei fünf ist dies nicht mehr möglich (Hess, 2003). Neben der Nutzung von Software-Produkten kann und soll die Gliederungsfähigkeit aufgebaut werden, indem die Kinder selber Mengendarstellungen

---

[2] Der Schuleintritt erfolgt in der Deutschschweiz mit ca. 7 Jahren.

erzeugen und sie mit verschiedenen Farben, Abständen, Formen und Grössen der Elemente gliedern. Die Güte der Gliederungen können sie überprüfen, indem sie sie selber (oder gegenseitig) blitzen und folgend optimieren.

Mit operativ strukturierten Päckchen bietet sich eine weitere Strategie zur Ablösung zählender Verfahren an. In diesen ist die Abfolge der Operationen nicht zufällig, sondern reguliert. Beispiel: 7 + 3 / 7 + 4 / 6 + 5 / 7 + 5 / 8 + 5 etc. Die Operationen lassen sich voneinander ableiten, zunächst durch Iteration (der zweite Summand wächst um eins). Nach 7 + 4 liegt ein „Strukturbruch“ vor, bei 6 + 5 bleibt die Summe gleich, weil mit dem Satz *Konstanz der Summe* der erste Summand um eins kleiner und der zweite um eins grösser wird. Anschliessend wächst die Summe mit dem ersten Summanden. Die Übungsstruktur der Zahlenbücher sieht vor, dass beim Einspluseins „nur“ die sog. „Königsaufgaben“, welche in der Plustafel rot, grün oder blau gefärbt sind, als Abrufwissen zu generieren sind. Die Additionen in den hellgelben Feldern sollen aus den Königsaufgaben ableitbar sein. Die Nutzung von Ableitstrategien ermöglicht es, Operationen ökonomischer und beweglicher zu lösen. Wiederum ist entscheidend, dass die Kinder durch Übersetzung der Rechnungen in Handlungen, Bilder und Sprache zu einer Strategie-*Bewusstheit* gelangen. Mit den Ableitstrategien ist auch ein Bewusstsein gegenüber den Königsaufgaben aufzubauen, d.h. über deren Nutzen. Beim Aufbau einer mathematischen Strategie-*Bewusstheit* ist also lehrerseits eine differenzierte Diagnostik und Förderung und schülerseits die soziale Interaktion über singuläre Kompetenzen zentral.

Literatur

Hengartner, E., Wälti, B. & Hirt, U. (2007). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett.

Hess, K. (2003). *Lehren – zwischen Belehrung und Lernbegleitung. Einstellungen, Umsetzungen und Wirkungen im mathematischen Anfangsunterricht.* Bern: hep.

Hess, K. & Wälti, B. (2009, in Vorbereitung). Mathe förderorientiert beurteilen. In Gabriele Cwik (Hrsg.) *Selbstständiges Lernen unterstützen. Konzepte und Methoden, Unterrichtsbeispiele. Für die Klassen 1 bis 4.* Berlin: Cornelsen-Skriptor.

Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Lorenz, J.H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung.* Göttingen: Hogrefe.

Moog, W. (1995). Flexibilisierung von Zahlbegriffen und Zählhandlungen – ein Übungsprogramm. *Heilpädagogische Forschung,* 21, 113-121.

Rasch, R. (2007). *Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 1 + 2*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Ruwisch, S. & Peter-Koop, A. (Hrsg.) (2003). *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.* Offenburg: Mildenberger.

Selter, Ch. (1995). Zur Fiktivität der ‚Stunde Null’ im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis,* (2), 11-19.

Horst HISCHER, Saarbrücken

Was sind und was sollen Vernetzungen?

1. Ausgangssituation

Der Terminus „Vernetzen“ erfreut sich zunehmender Beliebtheit bei der Beschreibung von Unterrichtszielen und Bildungskonzepten (auch in der Mathematikdidaktik), spielt aber wegen bisher fehlender inhaltlicher Analyse (noch?) *nicht* die *Rolle eines* für diese Disziplin wichtigen *fachwissenschaftlichen Terminus*. In diesem Beitrag wird ein Ansatz zu einer Begriffsbestimmung im Sinne einer didaktischen Positionsbestimmung skizziert.

2. Bedeutungssammlung zu „Netz“ und „Vernetzen“

Ein Brainstorming liefert eine große Fülle des Bedeutungsumfangs von „Netz“, die sich beispielsweise wie folgt verdichten lässt:

Ein *Netz* ...

> ... dient dem Fangen und Einfangen, aber auch dem Trennen — ... stellt Zusammengehörigkeit her — ... dient der Verbindung — ... gibt (als Geflecht) Menschen Sicherheit — ... schützt Menschen oder Dinge gegen äußere Angriffe bzw. Feinde — ... hält Menschen oder Dinge zusammen im Sinne von „Sammeln“ — ... verbindet Menschen, Dinge oder Begriffe — ... kann sowohl undurchdringlich als auch durchlässig sein — ... hat Maschen und Knoten — ... ist wegen der Maschen (für hinreichend kleine Objekte) nicht dicht — ... ist (im Gegensatz zu einem Gitter) flexibel und meist leicht — ... zeigt einerseits Zusammenhänge auf und — ... dient andererseits über das Verbinden dem Herstellen von Zusammenhängen — ... vermag „andere“ über seinen „Inhalt“ zu täuschen.

Diese Sammlung lässt sich etwa zu folgendem Katalog weiter verdichten:

Ein *Netz* ...

... dient einerseits dem **Aufzeigen** von *Verbindungen/Zusammenhängen*,
... dient andererseits dem **Herstellen** von *Verbindungen/Zusammenhängen*,

... kann zwar ein *Gefangensein* bewirken,
... kann aber zugleich *Sicherheit* bzw. *Schutz* bieten,
... enthält dennoch oft *Schlupflöcher*,

... vermag über seinen Inhalt zu *täuschen*.

Dieser Katalog zerfällt aus pädagogischer Sicht in *drei wesentlich unterschiedliche Blöcke:* **Bestandteile**, **Benutzer** und **Betrachter** eines Netzes. Die *ersten beiden Eigenschaften* betreffen die **Bestandteile** eines Netzes:

Dies sind die schon angesprochenen *Verbindungen* und die durch sie verbundenen Objekte (Begriffe, Ideen, Dinge, Lebewesen, …), die wir (wie etwa in der Graphentheorie) *Knoten* nennen können. — Die *nächsten drei Eigenschaften* betreffen die **Benutzer** eines Netzes. Hiermit bezeichnen wir den „Inhalt“ eines Netzes, also z. B. diejenigen, die ein „Telefonnetz“ benutzen, indem sie telefonieren, aber auch die in einem Spinnennetz enthaltenen „Opfer“ oder (unreife) Tomaten in einem (roten) Gemüsenetz. — Die *letzte Eigenschaft* (Täuschung über den Inhalt) betrifft die **Betrachter** eines Netzes, z. B. Käufer eines gefüllten Gemüsenetzes oder etwa Lehrpersonen, die ihre Schülerinnen und Schüler beim Recherchieren im Internet beobachten. Eine vierte Gruppe der **Konstrukteure** eines Netzes erscheint verzichtbar, denn diese können als Betrachter auftreten (Kontrolle ihres erschaffenen Netzes), aber auch als Benutzer (wie z. B. Spinne oder Servicetechniker), und die Benutzer eines Netzes können dieses verändern.

Aus pädagogischer Sicht ist ferner **zu beachten**: Wie bei einem Spinnennetz oder einem Fischernetz können die Benutzer „Opfer“ eines Netzes werden oder sein, wenn sie sich z. B. in den „Maschen des Netzes“ verfangen, etwa beim Surfen im Internet. So kann ein Netz für seine Benutzer (schicksalhaft) zum Gefängnis werden, aus dem es sich zu befreien gilt: Menschliche *Benutzer* eines Netzes *laufen damit Gefahr, zum Bestandteil dieses Netzes zu werden* – wenn sie etwa bei dessen Benutzung nicht hinreichend „emotionale Distanz“ wahren! Und weiterhin können menschliche *Benutzer* eines Netzes *zu Betrachtern dieses Netzes werden* und umgekehrt, wobei das Netz diese (und ggf. andere) Gruppen (ggf. „durchlässig“) trennt. Die begriffliche *Unterscheidung zwischen Bestandteilen, Benutzern und Betrachtern* eines Netzes ist also weder scharf noch absolut, sie ist relativ, meint eine *zweckbezogene Tendenz*, und es ist ein *Rollenwechsel* möglich.

3. Begriffsbestimmung durch strukturierende Abstraktion

Die Vorbetrachtungen führen zu einer *umschreibenden* und *intensionalen* Begriffsbestimmung von „Netz“ mit Hilfe von *drei Aspektgruppen eines Netzes*: **Zweck-Aspekte**, **Handlungs-Aspekte** und **Zustands-Aspekte**.

Ein **Netz** ist eine *strukturierte Zusammenfassung gedachter oder realer Objekte*, die unter folgenden drei **Aspektgruppen** zu betrachten ist:

(1) **Zweck-Aspekte** von „Netz“

(1.1) **Verbindungen** bzw. **Zusammenhänge** *(betrifft die **Bestandteile**)*

Aufzeigen oder Herstellen von *Verbindungen* bzw. *Zusammenhängen* zwischen gedachten/realen Objekten (den *„Knoten“*)

Das ist der „primäre“ Zweck eines Netzes im *übertragenen Sinn*.

(1.2) **Sammeln**, **Zusammenhalten**, **Trennen** *(betrifft die **Benutzer**)*

Einfangen bzw. *Gefangenhalten* bzw. *Verpackung* der Benutzer des Netzes, aber auch *Gewährung von Sicherheit* bzw. *Schutz* für die Benutzer, ferner auch *Trennung* von Gruppen (wie insbes. Benutzer und Betrachter).

Das ist der „primäre“ Zweck eines Netzes im *ursprünglichen Sinn*, der auch heute noch auf manche „Netzwerke“ zutrifft (z. B. LAN mit Firewall).

In dem eingangs erwähnten und hier nicht dargestellten Brainstorming treten u. a. die Beispiele *„Gemüsenetz“* und *„Obstnetz“* auf, die zwar dem Sammeln dienen, die aber wie der *„Netzstrumpf“* auch Eigenschaften wie *quasi-durchsichtig, attraktiv, beschönigend, täuschend* und *verführend* aufweisen. Diese Eigenschaften sind weder den *Bestandteilen* eines Netzes noch seinen *Benutzern* (also dem „Inhalt“) dieser „Netze“ zuzuordnen. Vielmehr offenbaren sie sich nur denjenigen, die die Bestandteile und die Benutzer eines Netzes „von außen“ wahrnehmen, also den *Betrachtern* dieses Netzes. Dabei ist nicht das Netz „an sich“ täuschend etc., sondern nur in Verbindung mit seinem „Inhalt“: Insofern beziehen sich die „Betrachter“ auf das *gesamte Netz* in dessen Kombination aus Bestandteilen *und* den Benutzern. Zugleich wird klar, dass diese Täuschung ggf. eine (von den Konstrukteuren) beabsichtige Wirkung ist (rotes Netz für unreife Tomaten) und dass diese Eigenschaft dann ebenfalls einen Zweck-Aspekt darstellt.

Die oben genannten Eigenschaften seien im Folgenden zusammenfassend mit „Verschleierung“ beschrieben, denn der „Schleier“ einer verschleierten Frau (z. B. „Brautschleier“) ist oft ein mehr oder weniger feines „quasi-durchsichtiges“ Netz, das den „Einblick“ der „Betrachter“ trüben soll (ob „beschönigend“, „täuschend“ oder gar „verführend“, sei dahingestellt):

(1.3) **Verschleierung** *(betrifft die **Betrachter**)*

Beschönigung, *Täuschung* oder *Verführung* der *„Betrachter“* eines Netzes in Bezug auf die Wahrnehmung der Benutzer des Netzes

Basierend hierauf lassen sich nun weitere gebräuchliche sprachliche Ableitungen von „Netz“ klären. Dabei ist dann zwischen einer Bezeichnungsverwendung, die eine *Handlung* beschreibt, und einer solchen, die einen *Zustand* beschreibt, zu unterscheiden:

(2) **Handlungs-Aspekte** von „Netz“

(2.1) „**vernetzen**“

gedachte und/oder reale *Objekte* durch *Herstellung von Verbindungen zu Knoten eines* neuen oder eines noch zu erweiternden *Netzes machen*

(2.2) „**vernetzt denken**“

vorhandene Netze bei Analysen, Planungen und Entwicklungen *nutzen*

(2.3) „**vernetzend denken**“

Objekte des eigenen Denkens *bewusst vernetzen* oder *als Knoten* eines vorhandenen Netzes *deuten* bzw. *entdecken*

(3) **Zustands-Aspekte** von „Netz“

(3.1) „**vernetzt sein**“

Bestandteil eines Netzes sein (als Knoten mittels Verbindungen)

(3.2) „**im Netz sein**“

Benutzer eines Netzes sein (z. B.: „Ich bin drin!“)

„Vernetzendes Denken“ umfasst „Vernetztes Denken“; es ist kein „Denken in Kausalketten“, weil „lineare Strukturen“ gemäß (1.2) keine Netze sind: „Zusammenhalten“ erfordert mindestens eine Masche! Das Erzeugen bzw. Entdecken von Verbindungen ist in (2.1) bzw. in (2.2) und (2.3) enthalten.

4. Didaktische bzw. pädagogische Konsequenzen

„Vernetzendes Denken“ führt zu „Vernetzendem Unterricht“: Via Zweck-Aspekt (1.1) ist dies zunächst eine prägnante, sprachliche Kurzform für einen Unterricht, der durch *schüleraktives Zusammenhangsdenken* gekennzeichnet ist: also die Inszenierung eines Unterrichts, in dem die Schülerinnen und Schüler *Zusammenhänge zwischen Gebieten, Themen, Ideen, Begriffen* etc. als *Bestandteile* eines Netzes nicht nur erkennen und entdecken, sondern auch eigenständig herstellen. Die blumige und oft erklärungslos verwendete Bezeichnung „Vernetzen“ wäre damit dann im Prinzip verzichtbar. Die Situation würde sich aber grundlegend ändern, wenn man die *Benutzer* und damit den Zweck-Aspekt (1.2) hinzuzieht, der die Lehrpersonen auffordert, über die fachlichen Unterrichtsziele eines solchen „vernetzenden Unterrichts“ hinaus nicht nur auf die *geplanten* Folgen betreffend Haltungen und Einstellungen zu achten, sondern auch auf die *unbeabsichtigten* Folgen. Und schließlich ruft der Zweck-Aspekt (1.3) die Lehrpersonen dazu auf, sich *nicht* bezüglich der geplanten Wirkungen eines vernetzenden Unterrichts auf die Schülerinnen und Schüler *täuschen zu lassen*.

Ein so verstandener „vernetzender Unterricht“ erhält dann *nicht nur eine* (die Bestandteile eines Netzes betreffende) *technische Bedeutung*, sondern erst durch die Berücksichtigung der Zweck-Aspekte bezüglich der Benutzer (hier: Schülerinnen und Schüler) und der Betrachter (hier: Lehrpersonen) eine *pädagogische Dimension*, und es wird eine *systemtheoretische Betrachtung* der „Vernetzung“ im pädagogischen Kontext nahe gelegt.

Literatur

Hischer, Horst [2009]: ... *(Zum Thema „Medien und Netze“ erscheinen ausführliche Abhandlungen des Autors, vgl. hierzu:* http://hischer.de/uds/forsch/publikat/hischer/*)*

Reinhard HOCHMUTH, Kassel & Alexander JORDAN, Bielefeld

Modellierungskompetenzen von Lehramtsstudierenden im Kontext funktionaler Fragestellungen unter Berücksichtigung von Intelligenz und Volition

Im Rahmen des ZFF-Projektes „Empirische Untersuchungen zu Modellierungskompetenzen von Lehramtsstudierenden der Sekundarstufen im Kontext funktionaler Fragestellungen unter Berücksichtigung von Intelligenz und Volition“ wurde im Sommersemester 2007 im Rahmen der Lehrveranstaltung „Grundzüge der Mathematik II (Elemente der Arithmetik und Algebra II)“ eine Stichprobe von Studierenden des Lehramtes an Haupt- und Realschulen an der Universität Kassel befragt und getestet. Besonderer Schwerpunkt lag dabei auf der Erfassung der Modellierungsfähigkeiten der zukünftigen Mathematiklehrerinnen und –lehrer beim Lösen realitätsbezogener Fragestellungen zum Themengebiet Funktionen. Verbunden wurde dies mit der Erhebung der psychischen Dispositionen Volition und Intelligenz. Im Beitrag sollen die Instrumente der Untersuchung kurz dargelegt sowie erste Resultate beschrieben werden. Eine ausführlichere Fassung kann in Hochmuth & Jordan (eingereicht) nachgelesen werden.

1. Mathematisches Modellieren und funktionales Denken

Ausgehend von der Hypothese, dass die für eine reflektierte Teilnahme am gesellschaftlichen Leben unerlässliche Kompetenz mathematischen Modellierens (Blum 1996) nicht nur bei Schülerinnen und Schülern, sondern auch bei Lehrerinnen und Lehrern eher unzureichend ausgebildet ist (vgl. Jordan et al. 2008), lag die zentrale Intention des in diesem Beitrag beschriebenen Projekts in der theoretischen Operationalisierung und empirischen Erfassung der *Modellierungskompetenzen von Studierenden*. Als inhaltlicher Schwerpunkt wurde dabei deren *funktionales Denken* betrachtet. Vollrath (1989) spricht im Zusammenhang mit einer adäquaten Abbildung der Entwicklung funktionalen Denkens vom Stufenmodell des Begriffsverständnisses des Funktionsbegriffs, welches folgende nicht notwendigerweise chronologisch aufeinander aufbauende fünf Stufen aufweist: „Intuitive Stufe“ (Der Begriff als Phänomen), „Inhaltliche Stufe“ (Der Begriff als Träger gewisser Eigenschaften), „Integrierte Stufe“ (Der Begriff als Teil eines Begriffnetzes), „Formale Stufe“ (Der Begriff als Objekt) sowie „Kritische Stufe“ (Der Begriff als Baustein im Mathematik-Gebäude). Zentrales Anliegen des Projektes ist eine Beschreibung der Ausbildung des funktionalen Denkens bei Studierenden mit geeigneten realitätsbezogenen Fragestellungen. Dabei wird grob zwischen Wissen, welches im Verlauf der Schulzeit in der Sekundarstufe I erworben werden sollte (intuitive Stufe bis hin zur integrierten Stufe) und Wissen, welches für die Sekundarstufe II und darüber hinaus für ein universitäres Mathematikstudium charakteristisch ist (formale Stufe bzw. kritische Stufe), unterschieden. Dieses Wissen wurde in einem 75-minütigen Leistungstest erfasst.

2. Intelligenz und Volition

Verbunden wurde der eben beschriebene inhaltliche Arbeitsschwerpunkt mit der empirischen Erfassung der psychischen Dispositionen Volition und Intelligenz der Studierenden. Unter *Volition* (Handlungskontrolle) verstehen wir dabei solche kognitiven Aktivitäten, die zur Umsetzung einer Absicht beitragen (Kuhl 1983). Die Volition wurde im Rahmen unseres Projekts mit dem 15 Minuten in Anspruch nehmenden Fragebogen HAKEMP 90 erhoben. Dieser erfasst die Disposition „Handlungs- vs. Lageorientierung" auf drei Skalen: Handlungsorientierung nach Misserfolg (HOM), Handlungsorientierung bei der Handlungsplanung (HOP) und Handlungsorientierung bei der Tätigkeitsausführung (HOT). Dazu kam eine zeitlich separierte (freiwillige) Messung der *Intelligenz* mit dem I-S-T 2000 R bei einer Teilstichprobe der Studierenden (vgl. Amthauer al. 2001). Wir setzten hierzu das Grundmodul (Form A) in seiner vollständigen Form ohne die Aufgabenblöcke zur Merkfähigkeit ein. Einschließlich einer Instruktionszeit von ca. 15 Minuten benötigt dieses Instrument eine Bearbeitungszeit von etwa 90 Minuten. Von insgesamt neun zu bearbeitenden Aufgabengruppen werden jeweils drei Aufgabengruppen zu einer der drei Skalen verbale, figural-räumliche und numerische Intelligenz zusammengefasst. Als Summenscore ergibt sich schlussfolgerndes Denken.

3. Forschungsfragen

Im Rahmen des in diesem Beitrag beschriebenen Projekts wurden folgenden Hypothesen untersucht:

(1) Modellierungskompetenzen im Kontext funktionaler Fragestellungen sind bei angehenden Haupt- und Realschullehrern in beiden Wissensbereichen eher unzureichend ausgebildet.

(2) Die Ausprägungen der Volition und Intelligenz der Probanden weichen im Durchschnitt nicht von der Norm ab.

(3) Es besteht ein Zusammenhang zwischen den Modellierungskompetenzen und der Ausprägung der Volition der Probanden.

(4) Bei Modellierungsaufgaben erweist sich die Intelligenz als ein guter Prognoseparameter für den Lösungserfolg.

4. Erste Ergebnisse

Zu Hypothese 1: Die Modellierungskompetenzen der Studierenden sind tatsächlich unzureichend ausgebildet. So wird im Mittel nicht einmal die Hälfte aller Aufgaben, für deren erfolgreiche Bearbeitung lediglich Wissen aus der Sekundarstufe I (Klasse 5-10) erforderlich ist, korrekt gelöst. Betrachtet man darüber hinaus das Abschneiden der Studierenden beim Testteil, welcher Wissen der Sekundarstufe II/Universität erfasst, verschärft sich die Situation weiter. Hier sind die Studierenden lediglich in der Lage annähernd jede Zehnte der gestellten Aufgaben zu lösen, d.h. annähernd 90% der Aufgaben können nicht gelöst werden.

Zu Hypothese 2: Bei der Volition zeigt ein Vergleich der Mittelwerte der Studierenden mit den in der Literatur berichteten Werten, dass diese zwar leicht unter der Norm (M=100) liegen, sich aber noch gut im Toleranzbereich (SD=10) befinden. Vergleicht man dem hingegen die IQ-Werte der Studierenden mit Durchschnittswerten, die für Studierende üblicherweise angenommen werden, so liegen diese Werte deutlich darunter. So liegt der Mittelwert bei 100,83. Dabei lag der IQ bei 7 Studierenden unter 100, bei 3 Studierenden sogar unter 90, lediglich bei einem Studierenden über 115.

Zu Hypothese 3: Zwischen den Modellierungskompetenzen der Studierenden und deren Volition besteht kaum ein Zusammenhang. Lediglich bei der Teilskala HOT (Handlungsorientierung bei der Tätigkeitsausführung) lässt sich eine Tendenz in Form eines leichten positiven Zusammenhangs erkennen. Dieser Zusammenhang ist unseres Erachtens nahe liegend, da für das Ausführen von Modellierungsprozessen bei einer Reihe von Aufgaben nicht rezeptiv auf Schemata zurückgegriffen werden kann, sondern inhaltlich sinnvoll und wohl überlegt gewisse Annahmen getroffen und verarbeitet bzw. bestimmte Strategien konsequent verfolgt werden müssen. Mit anderen Worten, eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung verlangt von den Studierenden die Fähigkeit, sich ausdauernd in die Aufgaben zu vertiefen.

Zu Hypothese 4: Der Zusammenhang zwischen Aufgaben niedriger Komplexität und den drei Dimensionen der Intelligenz ist am größten. Dies interpretieren wir auf Grundlage der Elshout-Raaheim-Hypothese („umgekehrt U-förmiger Verlauf der Korrelation zwischen Intelligenz und Problemlöseerfolg mit zunehmendem lösungsrelevanten Wissen") derart, dass diese Aufgaben für unsere Studierendenpopulation schon ein mittleres Anspruchsniveau repräsentieren. Dies bedeutet also, dass aufgrund der Komplexität unseres Tests (bzw. aufgrund des eher unzureichenden Leistungsniveaus der Studierenden) leichte Aufgaben empirisch bereits auf einem mittleren Niveau liegen bzw. Aufgaben mittlerer Komplexität sich in unserem Test bereits als schwer erweisen. Dementsprechend hat die Intelligenz nicht

– wie in der Elshout-Raaheim-Hypothese formuliert – bei Aufgaben mittlerer Komplexität den größten Einfluss, sondern wirkt bei Aufgaben niedriger Komplexität am stärksten, spielt also dort die größte Rolle.

5. Fazit

Die Überlegung, dass diese Ergebnisse nicht nur aus theoretischer Sicht beklagenswert sind, sondern auch praktische Implikationen für die universitäre Lehre erfordern, liegt unseres Erachtens sehr nahe. Sollten sich nämlich die hier festgestellten Tendenzen auch für andere Studierendenpopulationen empirisch bestätigen, so stellt sich die Frage, ob die etablierten universitären Organisationsformen des Studiums und der Lehre nicht von unzutreffenden Erwartungen an die Studierenden ausgehen. Berücksichtigt man in diesem Zusammenhang insbesondere auch aktuelle bildungspolitische Veränderungen wie die verbindliche Einführung der Bildungsstandards in allen Schulformen und die Forderung nach einem fachlich-souveränen und zudem kompetenzorientierten Mathematikunterricht, so sind unseres Erachtens Zweifel angebracht, ob dies mit den gegebenen Voraussetzungen einer Reihe angehender Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer überhaupt machbar ist, wenn die Organisationsformen des Studiums so bleiben, wie sie zur Zeit sind. Strebt man einen substantielleren Mathematikunterricht an, so erscheint es dringend notwendig, u.a. differenzierte Rückmelde- und Unterstützungssysteme einzuführen. Dabei gilt es, Konzepte zu generieren, die dazu beitragen können, fachlich wie fachdidaktisch solide ausgebildete Absolventen in die unterrichtliche Praxis zu entlassen. Nur wenn dies gelingt, werden nachhaltige Veränderungen des Mathematikunterrichts, wie sie in den Standards gefordert werden, überhaupt möglich sein.

Literatur

[1] Amthauer et al. [2001]: I-S-T 2000R – Manual. Göttingen: Hogrefe.

[2] Blum, W. [1996]: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: Kadunz, G. et al. (Hrsg.): *Trends und Perspektiven – Beiträge zum 7. internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik in Klagenfurt.* Wien: Hölcher-Pichler-Tempsky, S. 15-38.

[3] Hochmuth, R. & Jordan, A. [eingereicht]: Modellierungskompetenzen von Lehramtsstudierenden im Kontext funktionaler Fragstellungen. Eine Untersuchung bei angehenden Haupt- und Realschullehren der Fachrichtung Mathematik unter Berücksichtigung von Intelligenz und Volition.

[4] Jordan, A. et al. [2008]: Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. In: *JMD,* Heft 2, S. 83-107.

[5] Kuhl, J. [1983]: *Motivation, Konflikt und Handlungskontrolle*. Berlin: Springer.

[6] Vollrath, H.-J. [1989]: Funktionales Denken. In: *JMD,* Heft 10 (1), S. 3-37.

Thilo HÖFER, Waiblingen

Funktionales Denken fördern- Was, wann und wie fordern die Bildungsstandards verschiedener Bundesländer?

Im Dezember 2003 setzten sich die Kultusminister aller Bundesländer der BRD zusammen, und formulierten in der sogenannten Kultusministerkonferenz (KMK) für alle Bundesländer verbindliche Bildungsstandards für den mittleren Bildungsabschluss. In diesen Bildungsstandards werden sechs allgemeine mathematische Kompetenzen, sowie fünf sogenannte Leitideen formuliert. Betrachtet man speziell den Bereich des funktionalen Denkens, um den es in diesem Beitrag gehen soll, so fällt einem sofort *Leitidee 4: Funktionaler Zusammenhang* auf. In ihr wird innerhalb von zehn Punkten recht detailliert festgehalten, was die Schülerinnen und Schüler an allen deutschen Schulen bis zum mittleren Bildungsabschluss können sollen. War diese Konferenz also ein Aufbruch in eine neue Zeit, mit nahezu einheitlichen Bildungsplänen innerhalb Deutschlands?

Ausgangspunkt und theoretische Grundlagen der Untersuchung

Die Frage, inwieweit sich die Bildungspläne für Gymnasien verschiedener Bundesländer nach der Formulierung der KMK-Bildungsstandards unterscheiden (können), wurde untersucht, indem ausgewählte Bildungspläne systematisch auf Forderungen zur Förderung funktionalen Denkens hin untersucht und miteinander verglichen wurden. Neben dem Stammbundesland der Untersuchung (Baden-Württemberg) wurden die Bildungspläne der „PISA-Spitzenreiter“ Bayern und Sachsen, sowie Berlin (sechsjährige Grundschule) ausgewählt. Die Analyse der Bildungspläne wurde auf der Grundlage des Analysemodells „Das Haus des funktionalen Denkens“ (Höfer 2008, vgl. Abbildung 1) erstellt.

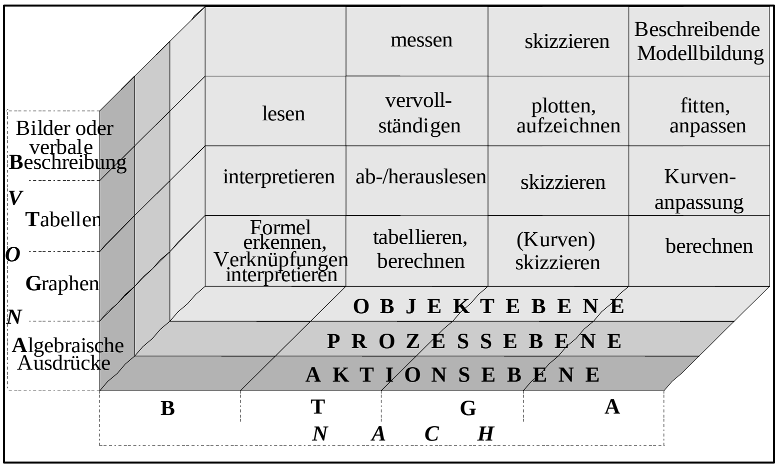


Abbildung 1: Das Haus des funktionalen Denkens (Höfer, 2008)

In diesem Modell werden die für funktionales Denken wichtigen Grundbausteine dargestellt. Innerhalb der Untersuchung wurden nun die Formulierungen der Bildungspläne interpretativ den einzelnen Bausteinen zugeordnet. Beispielsweise wurde die Forderung „Die Schülerinnen und Schüler können Zahlterme interpretieren und berechnen“ (BP BW, Klasse 6) den Übergängen auf Aktionsebene „algebraischer Ausdruck => verbale Beschreibung“ (*interpretieren*) und „algebraischer Ausdruck => Tabelle“ (*berechnen*) zugeordnet (ausführlichere Beispiele: vgl. Höfer 2008).

Ergebnisse der Untersuchung

Bei der Analyse der Bildungspläne für die Klassenstufen 5 & 6 ergaben sich vorwiegend zwei Unterscheidungsmerkmale: Die Einführung von Variablen und die Behandlung der Prozessebene. Sowohl Baden-Württemberg, als auch Sachsen führen den Variablenbegriff (zumindest propädeutisch) schon ein, wie man an den folgenden Zitaten sehen kann:

BW 6: „Die Schülerinnen und Schüler können Zahlenmuster mithilfe von Termen und Gleichungen darstellen.“

Sa 6: „Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Sinnhaftigkeit des Nutzens von Variablen beim Lösen von Aufgaben.“

In Bayern und Berlin findet man dagegen keine vergleichbaren Forderungen nach der formalen Schreibweise mithilfe von Variablen.

Wenn auch in allen vier Bundesländern der Schwerpunkt auf der Ausbildung der Aktionsebene liegt, so findet man in Baden-Württemberg und Berlin schon explizit erste Einblicke in Prozessebene formuliert:

BW: „Die Schülerinnen und Schüler können Abhängigkeiten dynamisch deuten.“

B: „Die Schülerinnen und Schüler können Bedingungen analysieren, verändern und Veränderungen beschreiben und erklären.“

Ähnlich deutliche Aussagen dazu sind in Sachsen und Bayern nicht zu finden.

Analysiert man die Bildungspläne der Stufen 7 & 8, so lässt sich zunächst feststellen, dass nun in allen Bundesländern eine Erschließung der Prozessebene stattfindet. Ebenfalls erhalten flächendeckend die Begriffe „Variable“ und „Funktion“ Einzug in die Bildungspläne. Der Hauptunterschied liegt in diesen Stufen in den Inhalten: Wird in Berlin lediglich die Behandlung linearer Funktionen gefordert, so sind es in Bayern und Sachsen lineare, ganzrationale und einfach gebrochenrationale Funktionen, und in Baden-Württemberg sogar noch Potenzfunktionen mit natürlichen Hochzahlen. Außerdem bemerkenswert ist noch, dass in Sachsen ein erster Einblick in die Objektebene durch die Forderung erfolgt, dass die Schülerinnen und Schüler den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf den Graphen mit DGS, CAS, TK oder GTR untersuchen, sowie Graphen auf Symmetrien und Extrema untersuchen.

In den Klassen 9 & 10 werden in allen Bundesländern die Übersetzungsfähigkeiten auf Aktions- und Prozessebene komplettiert. Die entscheidenden Unterschiede findet man hier in der Ausbildung von Fähigkeiten zur Sicht einer Funktion als manipulierbares Objekt. So findet man in Berlin und Baden-Württemberg bereits die Differentialrechnung in den Bildungsplänen dieser Klassen. In Sachsen wird dagegen die Objektebene mithilfe von Umkehr-, verketteten und verknüpften Funktionen angestrebt. In den bayerischen Bildungsplänen findet man hierzu lediglich Parameterbetrachtungen, die in den anderen Bundesländern schon in den vorherigen Jahren eingeführt wurden.

Dass sich die aus den Bildungsplänen folgenden Anforderungen im Verlauf der letzten beiden Schuljahren wieder sehr stark einander annähern, kann nicht mehr mit den Beschlüssen der KMK begründet werden, da diese im Jahr 2003 explizit nur für den mittleren Bildungsabschluss formuliert wurden. Ein Grund dafür sind aber sicherlich die einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur (EPA), die länderübergreifend als Ziel für die allgemeine Hochschulreife angestrebt werden. Bemerkenswert ist hier lediglich, dass die tabellarische Darstellung auf dieser Stufe – mit Ausnahme von Berlin – keine Rolle mehr für die Bildungspläne der untersuchten Bundesländer mehr spielt.

Fazit

Trotz der auf den ersten Blick scheinbar relativ eng geführten Vorgaben durch die Bildungsstandards aus der Kultusministerkonferenz, bringt die Untersuchung und der Vergleich eine erstaunlich heterogene Gestaltung der Bildungspläne aus den vier betrachteten Bundesländern hervor. Jeder Bildungsplan hat, wie es scheint, einen eigenständigen Charakter, der hier (in alphabetischer Reihenfolge) nochmals herausgestellt werden soll:

– Die Charakteristik des baden-württembergischen Bildungsplans liegt darin, dass die formale Schreibweise sehr früh eingeführt wird, und danach stets ein Schwerpunkt bleibt.
– Der bayerische Bildungsplan zeichnet sich durch einen „sanften“ Übergang aus von Grundschule aufgrund eines im Bereich der Anforderungen an die Entwicklung funktionalen Denkens langsamen Start in 5/6 aus. Nach einer „kleinen Aufholjagd“ in den Klassen 7/8 lässt man sich dann noch

einmal viel Zeit für die Ausbildung der Prozesseben in 9/10. Die Zeit dafür gewinnt man dadurch, dass man Einblicke in die Objektebene, z.B. durch die Differentialrechnung u.ä., auf die letzten beiden Schuljahre verschiebt.
–Der Berliner Bildungsplan legt sehr viel Wert auf der Betonung einer Gleichgewichtung der vier Darstellungsformen. Hierfür wird sogar eigens ein Kompetenzbereich („Darstellungen verwenden") formuliert.
– In Sachsen forciert man früher als in den anderen Bundesländern die Einführung verschiedenster Funktionsklassen. Ebenfalls „früh dran" ist man bei der Ausbildung erster Fähigkeiten auf der Objektebene.

Literatur

Bildungspläne der Bundesländer Baden-Württemberg, Bayern, Berlin und Sachsen. Jeweils aktuelle Version (2007) auf der Grundlage der

KMK (2003): Beschlüsse der Kultusministerkonferenz – Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – Beschluss vom 04.12.2003. München: Wolters Kluwer Deutschland.

Höfer, Th. (2008). *Das Haus des funktionalen Denkens – Entwicklung und Erprobung eines Modells für die Planung und Analyse methodischer und didaktischer Konzepte zur Förderung des funktionalen Denkens.* Hildesheim: Franzbecker.

Rudolf VOM HOFE & Thomas HAFNER, Bielefeld

Zum Problem von Mindeststandards und der sogenannten Risikogruppe

Mit dem KMK-Beschluss von 2003 wurden in Deutschland erstmalig Standards in Mathematik für den Mittleren Schulabschluss und für den Hauptschulabschluss eingeführt. Diese zunächst ohne empirische Evaluation verabschiedeten Standards gelten als *Regelstandards*, die von deutschen Schülerinnen und Schülern im Durchschnitt erreicht werden sollen. Seit 2004 findet nun unter Leitung des für Aufgaben dieser Art neu geschaffenen Instituts für Qualitätssicherung (IQB) die empirische Überprüfung und Weiterentwicklung dieser Standards statt sowie die Ausdifferenzierung von Kompetenzstufen.

Die Erarbeitung und Weiterentwicklung dieser Standards dient mehreren Zielen: Sie liefern zum einen erstmals einen gemeinsamen Rahmen für die Curricula der Länder; sie bildet zum anderen eine Grundlage für laufende und geplante Untersuchungen des schulischen Outputs (z. B. Lernstandserhebungen und Vergleichsuntersuchungen der Länder); und schließlich sollen die ausdifferenzierten Standards sich zu einer zuverlässigen und praktikablen Messlatte für die Optimierung von Unterricht und die Verbesserung der weiterhin konkurrierenden Bildungssysteme der Länder entwickeln.

Eine besondere Bedeutung hierbei nimmt die Erarbeitung von *Mindeststandard*s ein, die beschreiben sollen, was möglichst jeder Lernende mindestens lernen soll, und damit zusammenhängend die Definition einer sogenannten *Risikogruppe*. In Anlehnung an PISA (2000) lassen sich Mindeststandards und Risikogruppe etwa wie folgt charakterisieren:

- *Mindeststandards* beschreiben mathematische Kompetenzen, die in wichtigen Alltagssituationen und im Rahmen der elementaren beruflichen Aus- und Weiterbildung erforderlich sind.
- *Risikogruppe* ist demnach die Gruppe der Schülerinnen und Schüler, die diese Mindestanforderungen nicht erfüllen und an elementaren mathematikhaltigen Situationen in Alltag oder Beruf scheitern.

Was aber heißt dies nun konkret und wie lassen sich solche Mindeststandards in überprüfbare Items konkretisieren? Ist eine solche Festlegung ein normativer oder ein empirischer Prozess? Und welche Rolle spielen dabei die Interessen der politischen Handlungsträger?

Diese Fragen sind nicht einfach zu beantworten und werden zurzeit unterschiedlich diskutiert. Ein wichtiges Problem bei der Klärung dieser Fragen besteht darin, dass es zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen, nur wenig gesichertes Datenmaterial gibt und dass man häufig bei dem, was man normativ festlegen möchte, kaum beurteilen kann, was dies empirisch bedeutet. Im Folgenden nutzen wir die Daten der PALMA-Studie, um Überlegungen zu Mindeststandards aus unterschiedlicher Sicht zu beleuchten, diskutieren und damit zusammenhängende Probleme aufzuzeigen.

In der Längschnittstudie PALMA (Projekt zu Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik) wurde in den Jahren 2002 – 2007 die mathematische Kompetenzentwicklung im Laufe der Sekundarstufe I (Klasse 5 – 10) erhoben und analysiert. Die Jahrgangsstichprobe umfasste ca. 2100 Schülerinnen und Schüler und ist repräsentativ für Haut-, Realschulen und Gymnasien in Bayern (siehe vom Hofe et al., 2002 und Pekrun et al., 2006). Im folgen konkretisieren wir die oben angegebene Beschreibung von Mindeststandards bzw. Risikogruppe und analysieren den Verlauf der sich daraus ergebenden Entwicklungen auf der Basis der PALMA-Daten. Wir bestimmen dabei jeweils jahrgangsspezifische Risikogruppen für die Klassen 5 bis 10. Wir gehen dabei folgendermaßen vor:

Alle Items der PALMA-Jahrgangstests der Klassen 5 bis 10 werden dahingehend bewertet, ob sie ein risikogruppenrelevantes Item (R-Item) sind oder nicht. Ein Item wird als R-Item eingestuft, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Zum Lösen des Items sind höchstens elementare Kenntnisse der jeweiligen Jahrgangsstufe auf Hauptschulniveau erforderlich.
- Die das Lösen des Items betreffenden Inhalte werden in den folgenden Klassenstufen nicht mehr aufgegriffen.
- Die Kenntnisse sind von erheblicher Relevanz für Situationen des täglichen Lebens oder für Ausbildung/Beruf.

Als Referenzrahmen für den dritten Punkt dienten Standardaufgaben aus den Einstellungstests der Industrie- und Handelskammern. Durch diese Art des Ratings ergibt sich für jede Jahrgangsstufe eine Gruppe von R-Items, aus denen sich die Ausprägung der Risikogruppe ergibt. Hier die Ergebnisse für die Klassen 5 – 10:

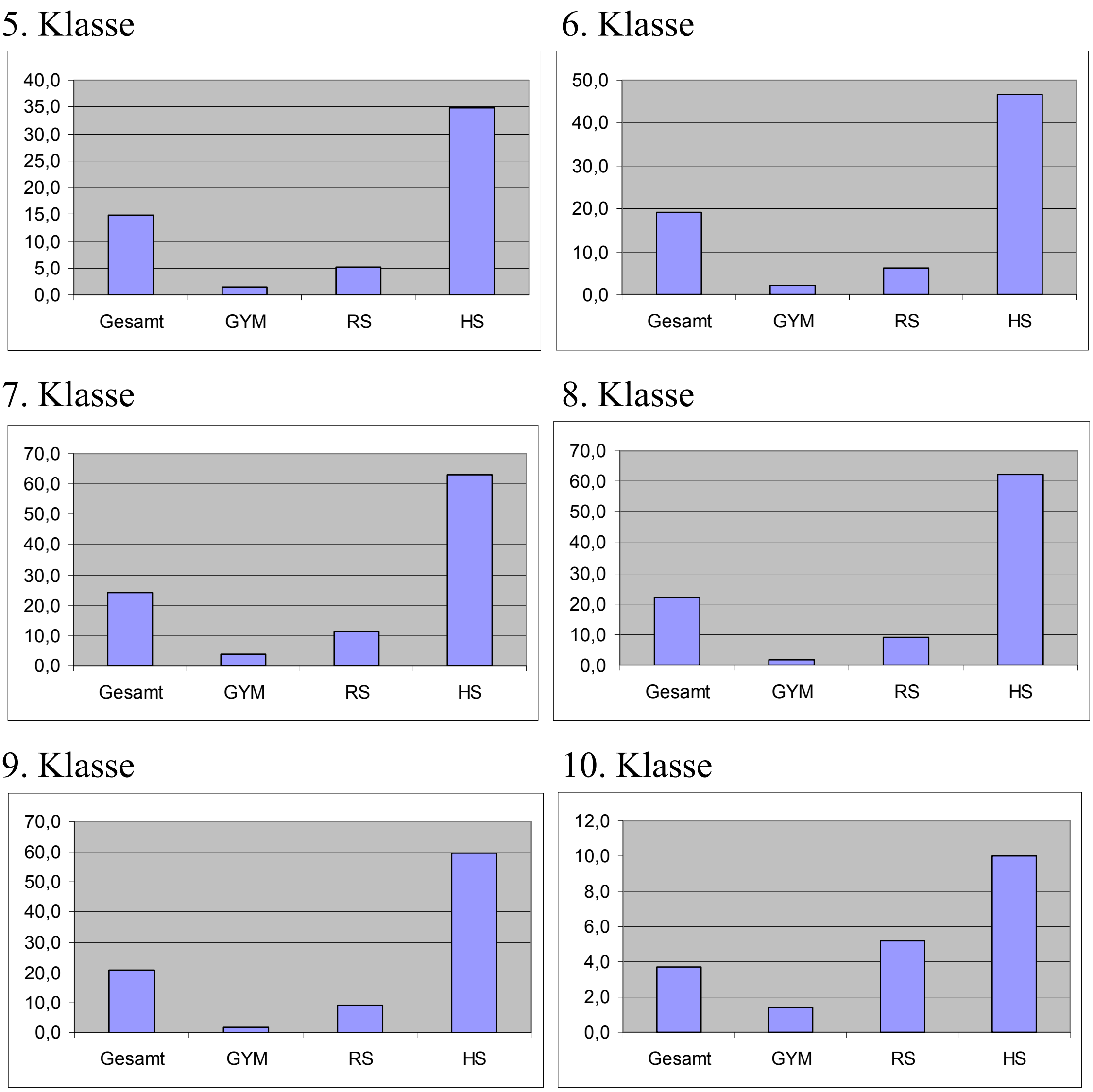


Abb. 1: Entwicklung der Risikogruppe in den Klassen 5 – 10

Es zeigt sich, dass die Größe der Risikogruppe von der Klasse 5 bis zur Klasse 8 zunimmt und dann bis zur Klasse 9 auf hohem Niveau konstant bleibt. In der Hauptschule ist der Anteil von Risikoschülern sehr hoch, in den Jahrgangsstufen 7 bis 9 über 50 Prozent. Die Klasse 10 stellt insofern einen Sonderfall dar, als etwa 90 Prozent der ursprünglichen Hauptschüler die Schule nach der Klasse 9 verlassen. Die dann noch verbleibenden 10 Prozent streben den Mittleren Schulabschluss nach der Klasse 10 an.

Interessant ist nun die Frage, wie stabil diese Gruppen über die Jahrgangsstufen hinweg sind und inwieweit Lernende, die bereits früh zur Risikogruppe gehören, diese später noch verlassen können. Hier zeigen unsere Untersuchungen, dass es zum einen erheblichen Anteil an Lernenden gibt, die die Risikogruppe nicht mehr verlassen; so verbleiben etwa 68 Lernende aus der (insgesamt 245 Probanden starken) Risikogruppe der Klasse 5 durchgängig bis zur Klasse 9 in dieser Gruppe. Auf der anderen Seite gibt es jedoch auch eine starke Fluktuation zwischen den Gruppen, in den Klassen 5 bis 9 kann jeweils etwa ein Drittel der Risikoschüler diese Gruppe wieder verlassen.

Insgesamt zeigt diese Untersuchung, dass insbesondere angesichts der hohen Zahlen in der Hauptschule die PALMA-Definition von Mindeststandards zwar *normativ* plausibel ist, sich *empirisch* jedoch nur zum Teil bestätigen lässt und ungeachtet dessen *politisch* nicht kommunizierbar ist. Die hier erfassten Kompetenzen scheinen eher zwischen Mindeststandards und Regelstandards zu liegen.

Zurzeit wird unter Leitung des IQB daran gearbeitet, Mindeststandards zu entwickeln, die oben genannten Zielanforderungen besser genügen.

Wir sehen neben den Problemen dieser Entwicklung auch positive Aspekte in der Diskussion um Mindeststandards, nämlich:

- Ein *neues Nachdenken* über Normen und Ziele des Mathematikunterrichts,
- *neue Einsichten* durch Konfrontation der normativen Erwartungen mit der Empirie und
- *neue Herausforderungen* für die Politik zur Überprüfung und Verbesserung der Bildungssysteme.

Literatur

Artelt, C., Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Schümer, G., Stanat, P., Tillmann, K.-J, & Weiß, M. (Hrsg.) (2001). *PISA 2000 - Zusammenfassung zentraler Befunde*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W. & Pekrun, R. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I – theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), *Jahrbuch für pädagogisch-psychologische Diagnostik. Tests und Trends,* Band 4 (S. 263-292). Göttingen: Hogrefe.

Pekrun, R., vom Hofe, R., Blum, W., Götz, T., Wartha, S., & Jullien, S. (2006): Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA) – Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I. In M. Pernzel, M., & L. Allolio-Näcke (Hrsg.) *Untersuchungen von Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms*. Münster: Wachsmann. S. 21 - 52

Eva HOFFART, Justus-Liebig-Universität Gießen

Zum diagnostischen Potential von Aufgaben in Orientierungsarbeiten – Rationale und empirische Aufgabenanalyse

Aufgrund der bildungspoltischen Entwicklungen der letzen Jahre rückt die Diskussion um Nutzen und Ergebnisse von Leistungserhebungen erneut in den Fokus. In diesem Zusammenhang wird ebenfalls die Frage nach der diagnostischen Verwendbarkeit solcher Tests aufgeworfen. Gerade für den Mathematikunterricht in der Grundschule, an den spezielle diagnostische Anforderungen gestellt werden, ist dieses Spannungsfeld von besonderer Bedeutung. Um Antworten liefern zu können, lohnt sich eine Beschäftigung mit den in Leistungserhebungen gestellten Aufgaben.

Das Untersuchungsvorhaben

Ein aktuelles Dissertationsprojekt der Justus-Liebig-Universität Gießen widmet sich aus diesem Grund den Aufgaben sowie den zugehörigen Schülerbearbeitungen der hessischen Orientierungsarbeit 2005. Diese Form der Leistungserhebung wird verbindlich in allen dritten Klassen des Bundeslandes Hessen geschrieben. Als Datengrundlage der Untersuchung dienen knapp 2000 Schülerbearbeitungen dieses offiziellen Durchgangs sowie halbstandardisierte Interviews zu allen neun Aufgaben der Arbeit.

Ziel der Untersuchung ist es, die Möglichkeiten und Instrumente zur Einschätzung und Konstruktion von Aufgaben mit diagnostischem Anspruch im Rahmen schriftlicher Leistungserhebungen zu verbessern. Die hierfür ausgewählte Untersuchungsmethode ist die Aufgabenanalyse, welche in zahlreichen Varianten Verwendung in der mathematikdidaktischen Forschung findet.

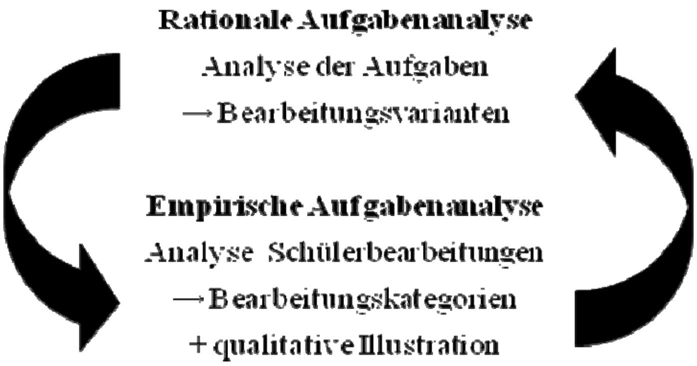
Das Instrument der Aufgabenanalyse

Im Untersuchungsdesign wird zwischen rationaler und empirischer Aufgabenanalyse unterschieden. Das Instrument der rationalen Aufgabenanalyse dient einer inhaltlichen Analyse der verwendeten Aufgaben in der Orientierungsarbeit. Die Aufgabe wird hierbei anhand verschiedener didaktischer, psychologischer sowie inhaltlicher Perspektiven analysiert.[1] Diese ersten Untersuchungen ermöglichen eine Konstruktion von möglichen Lösungen, die im Folgenden Bearbeitungsvarianten genannt werden. Da der Fehleranalyse in der Diagnostik eine besondere Rolle zukommt, werden bei der Konstruktion der Bearbeitungsvarianten richtige und falsche Lösungen gleichermaßen bedacht. Es schließt sich eine empirische Aufgabenanalyse

[1] Siehe Vortrag und Typoskript der Jahrestagung 2008 in Budapest. Es werden hierbei die Zielperspektiven Diagnose und Leistungserhebung, sowie eine formale, kognitive und inhaltliche Perspektive eingenommen.

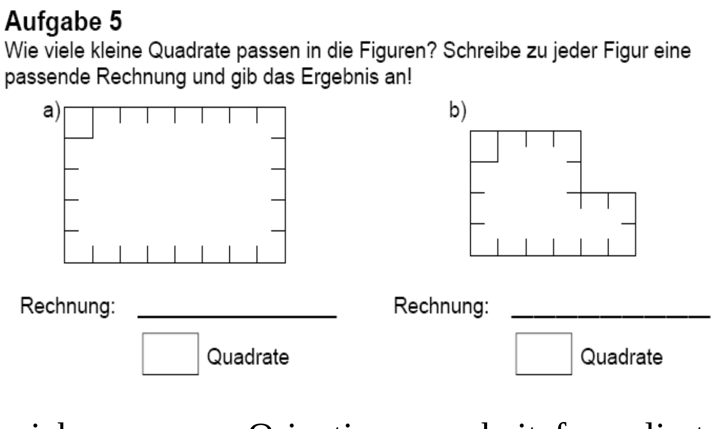
an, bei der die faktischen Bearbeitungen der Schüler auf Grundlage der vorherigen Konstruktion untersucht werden. Hierzu wurden die Daten der über 2000 Schülerbearbeitungen aufgrund der Übersichtlichkeit in eine Excel-Tabelle abgebildet. In dem nun folgenden Schritt der Untersuchung werden die zuvor theoretisch beschriebenen Bearbeitungsvarianten zu tatsächlich auftretenden Bearbeitungskategorien ausgeschärft. Ergänzt wird die empirische Aufgabenanalyse durch eine qualitative Komponente, indem das Interviewmaterial zu den Aufgaben der Illustration der erhaltenen Bearbeitungskategorien dient.

Zusammengefasst stellt sich die Aufgabenanalyse wie folgt dar:



Rationale und empirische Aufgabenanalyse an einem Beispiel
Nachfolgend werden die Ergebnisse der Aufgabenanalyse zu einer konkreten Aufgabe dargestellt. Ausgewählt wurde hierfür die fünfte Aufgabe der hessischen Orientierungsarbeit 2005, welche den Drittklässlern folgendermaßen präsentiert wurde:

,



In den Handreichungen zur Orientierungsarbeit formuliert das Hessische Kultusministerium einige Anmerkungen, die an dieser Stelle kurz wiedergegeben werden sollen. Aufgabe fünf wird dem Arbeitsfeld der Geometrie sowie dem Anforderungsbereich der Reproduktion zugeordnet. Eine vorgegebene Fläche soll (in der Vorstellung) mit Einheitsquadraten ausgefüllt und deren Anzahl berechnet werden. Für die Korrektur durch die Lehrkräfte werden die beiden Lösungszahlen 40 und 20 angegeben, zu den dorthin führenden Rechnungen gibt es keine Anmerkungen. Jede inhaltlich richtige Rechnung sowie jedes korrekte Ergebnis soll mit jeweils 0,5 Punkten bewertet werden.[2]

Nach einer gründlichen rationalen Aufgabenanalyse wird deutlich, dass einige dieser offiziellen Anmerkungen durchaus kritisch zu durchdenken sind. Ein Beispiel: Wird die inhaltliche Perspektive der Aufgabenanalyse eingenommen, wird deutlich, dass die Aufgabe nicht eindeutig dem Anforderungsbereich Reproduktion zuzuordnen ist. Es kann nicht davon ausgegangen werden, dass Kinder Mitte der dritten Klasse mit Aufgaben des Grundprinzips der Flächenberechnung gearbeitet haben. Der hessische Rahmenplan Grundschule sieht dies im Verlauf des 3. und 4. Schuljahres vor, wobei das Ausfüllen der Flächen selten von der konkreten Handlung abgekoppelt wird. Ähnliche Ergebnisse lassen sich bei weiteren Analyseaspekten festhalten.

Auf Basis der rationalen Aufgabenanalyse werden für Teilaufgabe 5a) drei Bearbeitungsvarianten konstruiert: Der Bearbeitung des Schülers liegt das Konzept Fläche zugrunde, das heißt entsprechend der Aufgabenintention werden die vorgegeben Figuren (gedanklich) mit Einheitsquadraten ausgefüllt. Dies kann sowohl durch multiplikative als auch additive Rechnungsvarianten ausgedrückt werden. Aufgrund der formalen Darstellung der Aufgabe ist gleichfalls eine Bearbeitung aufgrund des Konzepts Umfang möglich. In diesem Fall ermitteln die Schüler lediglich die benötige Anzahl an Einheitsquadraten zur Umrandung der Figuren, was als Fehllösung anzusehen ist. Auch dies kann jedoch durch Addition oder Multiplikation erfolgen. Weiterhin ist es denkbar, dass die Anzahlen nur durch Auszählen, nicht durch Berechnung bestimmt werden. Die konstruierten Bearbeitungsvarianten lassen sich durchaus noch in verschiedene Subvarianten differenzieren, auf deren Darstellung hier jedoch verzichtet wird.

Für die empirische Aufgabenanalyse werden nun die tatsächlichen 2000 Schülerbearbeitungen herangezogen. Kategoriengeleitet werden die Notationen der Kinder zu Teilaufgabe 5a) den Bearbeitungsvarianten zugeordnet. Auf den ersten Blick scheint das Analyseergebnis den Intentionen der Aufgabe zu entsprechen. Demnach arbeiteten 86,2% der Schüler nach dem Konzept Fläche, während sich 8,6% der Bearbeitungen dem Konzept Umfang zuordnen lassen und 5,2% eine Kategorie Sonstiges eröffnen. Auffällig ist zunächst, dass die theoretische Bearbeitungsvariante Zählen an dieser Stelle nicht mehr erscheint. Aufgrund der schriftlich vorliegenden Be-

[2] vgl. Erste hessenweite Durchführung der Orientierungsarbeiten, S. 49ff

arbeitungen lässt sich diese Form der Bearbeitung nicht nachvollziehen. Ein zielgerichteter Blick in das Interviewmaterial wird hierzu Aufschluss geben. Weiterhin zeigt sich, dass sich ein Blick in die einzelnen Bearbeitungskategorien durchaus lohnt, da sich hier interessante Subkategorien bilden. Diese wurden aufgrund der empirischen Analyse zunächst nicht konstruiert, differenzieren die drei Bearbeitungskategorien jedoch aufschlussreich.

Zur besseren Übersichtlichkeit erfolgt die Darstellung der Bearbeitungskategorien und deren Subkategorien in tabellarischer Form. Neben den absoluten Anzahlen der Analyse zu Aufgabe 5a) enthält die Tabelle die Auszählung der korrekten Ergebnisse nach Aufgabenintention für N=1975.

Konzept Fläche			**Konzept Umfang**			**Sonstige Bearbeitungen**		
	Anzahl	korrekt		Anzahl	korrekt		Anzahl	korrekt
multiplikativ								
a*b	*539*	*533*	multiplikativ	22	1	nur Ergebniszahl	68	26
b*a	*777*	*760*	additiv	131	2	nur Zeichnung	12	0
Nachbaraufgaben	*113*	*11*	andere	17	0	andere	23	9
andere Multiplikationen	*75*	*35*						
additiv								
fortgesetzte Addition	*27*	*27*						
Hälften (20+20)	*68*	*67*						
Außenband (22+1)	*30*	*11*						
andere Additionen	*73*	*31*						
	1702	***1475***		**170**	**3**		**103**	**35**

Fazit und Ausblick

Rückblickend wird festgehalten, dass die Analyse der Aufgabe sowie der zugehörigen Schülerbearbeitungen über die Beurteilung einer richtigen und falschen Lösung hinaus möglich und durchaus sinnvoll ist. Zum Einen zeigt sich die Vielfältigkeit der Bearbeitungswege, zu denen die Untersuchung der Schülernotationen konkrete Hinweise gibt. Weiterhin wird deutlich, dass eine theoretische Betrachtung der Aufgabe im Vorfeld die Konstruktion von Bearbeitungsvarianten ermöglicht und Anregungen für die Präsentation der Aufgabe liefert.

Literatur

Hessisches Kultusministerium (2004), *Erste hessenweite Durchführung der Orientierungsarbeiten*, [online im Internet:] URL: http://www.hessisches- kultusministerium.de/ irj/ HKM_Internet?cid=534aa22428e4954457d7bd4f1a25eb1

Andrea HOFFKAMP, Berlin

Dynamisierter Repräsentationstransfer und Metavariation – Ein Ansatz zur Förderung funktionalen Denkens durch Computereinsatz

Funktionales Denken – Begriff und Aspekte

In der Meraner Reform (1905) wurde die "Erziehung zum funktionalen Denken" als Sonderaufgabe gefordert. Gemeint war ein gebietsübergreifendes Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten (Krüger). Vollrath definiert funktionales Denken als "eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist". Die Komplexität funktionalen Denkens ist einerseits bedingt durch die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten funktionaler Abhängigkeiten (Text, Graph, Formel, Tabelle usw.) und andererseits durch verschiedene Sichtweisen: Zuordungsaspekt (punktweise Sicht), Kovariationsaspekt (dynamische Sicht), Objektaspekt (Funktion als Ganzes). Insbesondere die dynamische Komponente funktionalen Denkens bereitet Schwierigkeiten (Malle). Das äußert sich beispielsweise darin, dass Funktionsgraphen als fotographische Bilder von Realsituationen interpretiert werden (Graph-als-Bild-Fehler). Insbesondere Weg-Zeit-Graphen werden oft als Bewegung in der Ebene gesehen (Janvier, Hoffkamp). Dem hier beschriebenen Ansatz liegt die Frage zugrunde, wie der Umgang mit Funktionen auf das funktionale Denken zurückwirkt.

Curricularer Standort

Vollrath schreibt: "Funktionales Denken beginnt bei intuitiven Vorstellungen über funktionale Zusammenhänge wie 'Wenn man die eine Größe ändert, dann ändert sich die andere' oder 'Je mehr..., desto mehr', und es ist voll entwickelt bei Denkweisen der Analysis". Die Realität ist aber ein kalkülorientierter Analysisunterricht mit wenig inhaltlichen Vorstellungen. Deswegen plädieren Hahn/Prediger für eine stärkere Gewichtung der qualitativen Anfänge der Analysis – eine Forderung die im Übrigen schon 100 Jahre alt ist (Krüger). Die Lernumgebungen verstehen sich als ein Beitrag zu einer qualitativen Annäherung an die Analysis bzw. als Beitrag zur Analysis-Propädeutik.

Interaktive Lernumgebungen und Gestaltungsleitlinen

Insgesamt wurden drei interaktive Lernumgebungen auf Basis der dynamischen Geometrie Software Cinderella (Kortenkamp/Richter-Gebert) entwickelt. Die Lernumgebungen sind gemeinsam mit Unterrichtsmaterialien unter www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp verfügbar. Zwei der Lernumgebungen wurden im Rahmen von Voruntersuchungen in Klasse 10 getestet (Hoffkamp). Die Voruntersuchungen dienten der Überarbeitung der Lernumgebungen und deren Einsortierung in einen curricularen und lerntheoretischen Rahmen. Allen Lernumgebungen liegen die folgenden Gestaltungsleitlinien zugrunde.

Verknüpfung Situation-Graph: Anknüpfend an inhaltlichen Vorstellungen ist der Ausgangspunkt jeweils ein funktionaler Zusammenhang innerhalb einer Situation und deren dynamische Verknüpfung mit der Darstellungsform Graph (Abb.1).

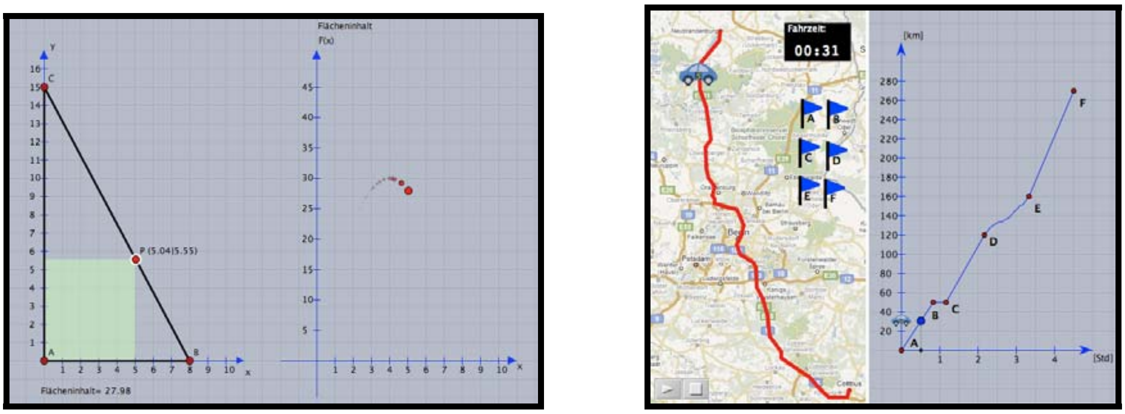


Abb.1: "Einbeschriebene Rechtecke" (links): Bewegung von P auf BC und Auswirkung auf den Punkt im Flächeninhaltsgraphen. "Die Reise" (rechts): Bewegung des Punktes im Weg-Zeit-Graph bewirkt Positionsänderung des Autos (Quelle: Google Maps).

Die graphische Darstellung wurde gewählt, weil sie sich besonders auf die dynamische Komponente funktionalen Denkens bezieht. Außerdem enthält sie die gesamte Information über die Funktion "auf einen Blick", was insbesondere im Hinblick auf kognitive Verarbeitungsprozesse von Bedeutung ist. Ein Schwerpunkt der graphischen Darstellung sind lokale und globale Eigenschaften der Funktion.

Sprache als Vermittler: Die Schüler verbalisieren ihre Beobachtungen im Gespräch und auf einem begleitenden Arbeitsbogen. Sprache dient einerseits als Vermittler zwischen den Darstellungen und den mentalen Modellen der Schüler (Janvier) und andererseits als Anstoß für kognitive Prozesse und kooperative Lernprozesse.

Zwei Variationsstufen:

(Ko-)Variation innerhalb der Situation (1. Stufe): Auf dieser Stufe wird der dynamische Aspekt der funktionalen Abhängigkeit visualisiert (Abb.1). Damit sollen mentale Simulationsprozesse visuell unterstützt werden (s. Vogel '06 zu Untersuchungen zur Wirksamkeit von Supplantation). Insbesondere geht es um die Entdeckung und Beschreibung globaler und lokaler Eigenschaften der dargestellten funktionalen Abhängigkeiten mit Blick auf

Dynamik und Änderungsverhalten und zwar im Repräsentationstransfer zwischen Situation und Graph.

Metavariation und Objektaspekt (2. Stufe): Auf dieser Variationsstufe kann die Situation verändert und die Auswirkungen auf die Funktion untersucht werden. Metavariation meint Variation innerhalb der Metafunktion – damit sei die Funktion bezeichnet, die der Situation den Graphen zuordnet. Der Graph bzw. die Funktion, die dem Graphen zugrunde liegt, ist ein Bild unter der Metafunktion und damit ein Objekt (Abb.2). Objektaspekt und Kovariationsaspekt hängen eng zusammen. Will man globale (Objekt-) Eigenschaften wie "Monotonie" oder "Symmetrie zur y-Achse" beschreiben, so benutzt man die "Sprache der Kovariation", nämlich "Ist $x \geq y$, so ist $f(x) \geq f(y)$ für alle x,y" oder "Für alle x ist $f(x)=f(-x)$". Metavariation ermöglicht die Loslösung von konkreten Werten und legt damit den Schwerpunkt auf qualitative Betrachtungen. Der Objektaspekt wird nutzbar gemacht, ohne dass er in das mentale Konzept von Funktion integriert sein muss.

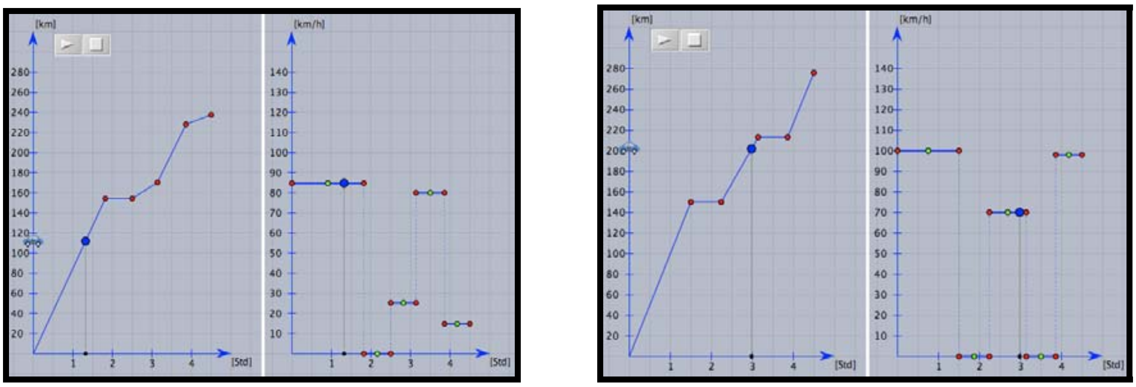


Abb.2: Metavariation in "Die Reise". Die Höhe und Breite der Balken im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen können verändert werden. Metafunktion ist der Differentialoperator bzw. der Integraloperator.

Kontiguität: Um eine möglichst integrierte Darstellung zu erhalten, wurde auf räumliche und zeitliche Nähe von sich aufeinander beziehenden Darstellungsformen geachtet, sowie das Prinzip verfolgt, dass Bewegung genau dort geschieht, wo mit der Maus agiert wird.

Geringer technischer Overhead und Praktikabilität: Die Lernumgebungen sind ohne Einarbeitungszeit oder Spezialwissen über die Software nutzbar Zur Benutzung genügt ein Standardinternetbrowser. Sie sind im Hinblick auf Nutzbarkeit im Unterrichtsalltag entwickelt.

Lerntheoretischer Hintergrund

Lerntheoretisch liegt der Conceptual-Chance-Ansatz (Vosniadou) zugrunde. Im Lichte dieses Ansatzes ist beispielsweise der Graph-als-Bild-Fehler eine Aktivierung einer nicht-situationsadäquaten Vorstellung. Es geht dabei nicht um die Ablösung vorunterrichtlicher Vorstellungen, sondern um Vorstellungsentwicklung, mit dem Ziel der Verschiebung der Aktivierungskontexte (Hahn/Prediger).

Forschungsfragen und Ausblick

Mit den Lernumgebungen soll im Rahmen einer qualitativen Studie u.a. folgenden Forschungsfragen nachgegangen werden:

Werden durch die Arbeit mit den Lernumgebungen Grundvorstellungen im Hinblick auf die dynamische Komponente funktionalen Denkens aufgebaut (Vorstellungsentwicklung)? Werden diese Vorstellungen in das mentale Konzept von Funktion integriert und insbesondere bei der Interpretation von bzw. Modellierung durch Funktionsgraphen aktiviert, indem lokale und globale Eigenschaften qualitativ beschrieben und erfasst werden können (Verschiebung der Aktivierungskontexte)? Wie wirkt sich die Arbeit mit den Lernumgebungen auf lernschwächere Schüler im Vergleich zu stärkeren Schülern aus?

Literatur

Hahn, S., Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zu Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD*, 29(3/4), 163-198.

Hoffkamp, A. (2007). Funktionales Denken fördern durch den Einsatz von Dynamischer Geometrie Software. *Aufgaben mit Technologieeinsatz, Bericht über die 25. Arbeitstagung des AK 'Mathematikunterricht und Informatik' in der GDM in Soest.* Franzbecker.

Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. Erscheint in: *Proceedings of CERME 6, Lyon.*

Janvier, C. (1978). The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. PhD thesis. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham.

Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. (2006). The Interactive Geometry Software Cinderella, Version 2.0 Springer, Online unter http://cinderella.de

Krüger, K. (2000). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47, 221-241.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg.

Vogel, M. (2006). Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Franzbecker: Hildesheim.

Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. *JMD,* 10(1), 3-37.

Vosniadou, S, Vamvakoussi, X. (2006). Examining Mathematics Learning from a Conceptual Change Point of View: Implications for the Design of Learning Environments. In: L. Verschaffel et al. (Eds.), *Instructional Psychology: Past, present, and future trends – Sixteen essays in honour of Erik De Conte. Advances in Learning and Instruction Series.* Elsevier.

Lars HOLZÄPFEL, Inga GLOGGER, Rolf SCHWONKE, Matthias NÜCKLES, Alexander RENKL, Freiburg

Lerntagebücher im Mathematikunterricht: Diagnose und Förderung von Lernstrategien

Ergebnisse aus dem Projekt "Das Lerntagebuch als Mittel zur formativen Diagnostik von schulischen Lernstrategien" - Ein Projekt im Rahmen des Programms Bildungsforschung der Landesstiftung Baden-Württemberg.

In Lerntagebüchern – wie sie hier konzipiert sind – reflektieren Schülerinnen und Schüler über die in der Schule gelernten Inhalte. Sie verfassen einen Selbstbericht, bei dem die individuellen Lernprozesse dokumentiert und somit für die Lehrperson einsehbar und nachvollziehbar werden. Durch das Schreiben wird eine Verlangsamung des Gedankenflusses erzielt, was dazu führen soll, genauer und detaillierter über den Lernstoff nachzudenken und sich die Dinge nochmals klar zu machen, die im Unterricht gelernt wurden. Während dieses Prozesses wenden die Schülerinnen und Schüler mehr oder weniger bewusst kognitive und metakognitive Lernstrategien an (Weinstein & Mayer, 1986; Mandl & Friedrich, 2006). Es wird dabei innerhalb der kognitiven Lernstrategien weiter unterschieden zwischen tiefenorientierten (Elaboration, Organisation) und oberflächenorientierten (Wiederholung) Lernstrategien (vgl. Abb. 1). Die Metakognitiven Lernstrategien beinhalten in unserem Vorhaben die Aspekte der Überwachung und der Regulation.

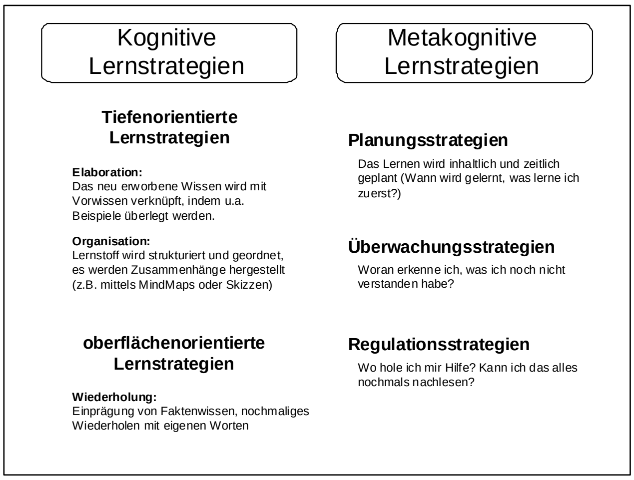


Abbildung 1: Kognitive und metakognitive Lernstrategien im Überblick.

1. Forschungsfragen

Zwei Forschungsfragen werden in den Blick genommen:

I. Inwieweit können Schülerinnen und Schüler durch Prompts (Leitfragen / Impulse) dazu aufgefordert werden, Lernstrategien anzuwenden? (vgl. dazu auch Untersuchungen von Hübner, Nückles & Renkl, 2007)

II. Kann durch die Häufigkeit und Qualität der gezeigten Lernstrategien der Lernerfolg vorhergesagt werden?

2. Methode (Forschungsfrage I)

Elaborations-Prompt

Allgemeine Formulierung

Versuche Verbindungen herzustellen zwischen dem, was du letzte Woche gelernt hast und dem, was du schon wusstest.

Spezifische Formulierung:
(als Ergänzung zur allgemeinen Formulierung)

Überlege dazu schriftlich, wie du das in dieser Woche Gelernte zu Hause, in Deiner Freizeit anwenden könntest.

- **Beschreibe mehrere selbst erdachte Beispiele.**
- **Suche dir dann ein Beispiel aus und erkläre die Berechnungen, die man machen kann. Erkläre es so, dass ein Mitschüler, der die Woche gefehlt hat, es gut verstehen könnte.**

Abbildung 2: Allgemeine und spezifische Prompt-Formulierung

In Pilotuntersuchungen wurde deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler unzufriedenstellende Lernprotokolle anfertigen, wenn ihnen recht allgemein formulierte Prompts (Impulse bzw. Leitfragen) wie z.B. *„In der letzten Stunde habe ich nicht verstanden, wie …“* gegeben wurden. Daher wurde – bezogen auf die erste Forschungsfrage – eruiert, wie spezifisch Prompts formuliert werden müssen, damit die Schülerinnen und Schüler die Lernstrategien in der gewünschten Weise anwenden. Während eine allgemein gehaltene Formulierung vielfältige individuelle Lernstrategien zulässt, lässt eine konkretere spezifische Formulierung eventuell nur wenig individuellen Spielraum, gibt dafür aber auch mehr Hinweisreize auf die gewünschten Aktivitäten (siehe Abb. 2). Die Untersuchung wurde in zwei Parallelklassen durchgeführt. Klasse 9A erhielt in der ersten Woche allgemeine Prompts und in der zweiten Woche spezifische Prompts, in Klasse 9B wurde umgekehrt verfahren (Tabelle 1). Durch dieses überkreuzte Design („within“-Design) wurde versucht, Reihenfolgeeffekte auszugleichen.

	Allgemeine Prompts	Spezifische Prompts
Klasse 9A, n= 27	in der 1. Woche	in der 2. Woche
Klasse 9B, n= 24	in der 2. Woche	in der 1. Woche

Tabelle 1: Untersuchungsdesign

3. Ergebnisse (Forschungsfrage I)

Ausgewertet wurde nach der Anzahl (z.B. wie häufig werden eigene Beispiele oder Erklärungen gegeben?), der Vielfalt (Wie viele *unterschiedliche* Strategien werden angewendet?) und der Qualität (Wie gut wird eine Strategie gezeigt?) der eingesetzten Lernstrategien.

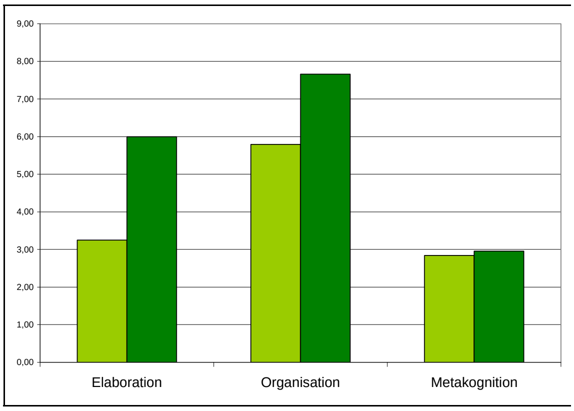


Abbildung 3: **Anzahl der gezeigten Lernstrategien in den Bereichen Elaboration, Organisation und Metakognition (hell: allg. Prompts; dunkel: spez. Prompts; Effektfröße nach Cohen (1988) bei „Elaboration": $d = 0.70$; $p < .01$; bei „Organisation": $d = 0.55$; $p < .05$.**

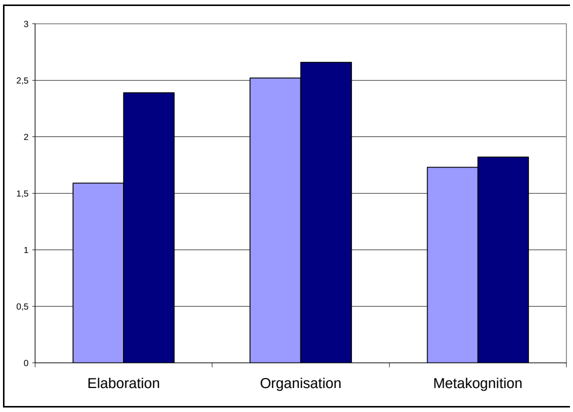


Abbildung 4: **Vielfalt der gezeigten Lernstrategien in den Bereichen Elaboration, Organisation und Metakognition. (hell: allg. Prompts; dunkel: spez. Prompts; Effektgröße nach Cohen (1988) bei „Elaboration": $d = .61$; $p < .01$.**

Es zeigt sich, dass durch eine Spezifizierung der Prompts mehr Elaborationen und auch mehr Organisationsstrategien angewendet werden. Die Metakognition wird insgesamt wenig eingesetzt und auch durch eine Spezifizierung der Prompts nicht erhöht (Abb. 3). Interessanterweise wird durch spezifischere Prompts die Vielfalt elaborativer Lernstrategien ebenfalls erhöht (Abb. 4). Was die Qualität der eingesetzten Lernstrategien betrifft, so zeigt sich keine nennenswerte Veränderung.

4. Methode (Forschungsfrage II)

Um die zweite Fragestellung zu untersuchen wurde in 10 Realschulklassen über einen Zeitraum von sechs Wochen ein Lerntagebuch mit jeweils einem Eintrag pro Woche angefertigt. Die Schülerinnen und Schüler erhielten eine zweistündige Einführung und bearbeiteten einen Vorwissenstest. Darüber hinaus wurde auch die Lern- und Leistungsmotivation mittels des SELLMO-Fragebogens erhoben. In der fünften Woche wurde mit ausgewählten Schülerinnen und Schülern ein Interview geführt und unmittelbar im Anschluss an den letzten Lerntagebucheintrag wurde der Nachtest bearbeitet. Vor- und Nachtest beinhalteten Aufgaben zu den in diesen 6 Wochen bearbeiteten Themen Zufall und Wahrscheinlichkeit.

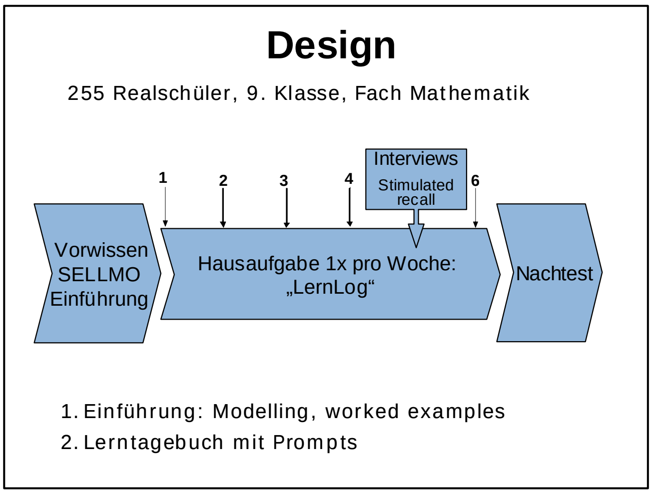


Abbildung 5: Untersuchungsdesign zur Fragestellung, inwieweit der Lernstrategieeinsatz zum Lernerfolg beiträgt.

5. Ergebnisse (Forschungsfrage II)

Es wurden Quantität und Qualität der gezeigten Lernstrategien erfasst und in den Kategorien Wiederholung, Organisation, Elaboration und Metakognition in Bezug auf den Nachtest betrachtet. Schwache bis mittlere Zusammenhänge zeigen sich unter dem Gesichtspunkt der Quantität insbesondere bei der Wiederholung, der Organisation und der Elaboration (Tabelle 2). Hinsichtlich der Qualität der gezeigten Lernstrategien zeigen sich mittlere Zusammenhänge in Bezug auf die Organisation und die Elaboration (Tabelle 3). Die Werte wurden vom Einfluss des Vorwissens bereinigt.

Quantität

Anzahl Lernstrategie	**Nachtest**
Wiederholung	.32***
Organisation	.28***
Elaboration	.36***
Metakognition	.18**

** *p* < .01; *** *p* < .001

Tabelle 2: Auswertung nach Quantität

Qualität

Qualität Lernstrategie	**Nachtest**
Wiederholung	.13*
Organisation (optisch)	.34***
Elaboration	.25***
Metakognition	.15*

* *p* < .05; ** *p* < .01; *** *p* < .001

Tabelle 3: Auswertung nach Qualität

6. Zusammenfassung

Die im Lerntagebuch erfassten Lernstrategien können den Lernerfolg teilweise vorhersagen. Kleine und mittlere Zusammenhänge bestehen zwischen dem Einsatz von Organisations- und Elaborationsstrategien und der Leistung im Nachtest. Die Wiederholungsstrategie korreliert mit den Nachtestwerten nur hinsichtlich der Quantität der eingesetzten Lernstrategien. Was die Metakognition betrifft, so zeigen sich keine nennenswerten Zusammenhänge, wobei angemerkt werden muss, dass generell nur wenige metakognitive Lernstrategien eingesetzt wurden. Mehrebenenanalysen deuten an, dass Klassenunterschiede bestehen und dabei verschiedene Zusammenhangsmuster erkennbar sind.

7. Literatur

Hübner, S., Nückles, M. & Renkl, A. (2007). Lerntagebücher als Medium des selbstgesteuerten Lernens – Wie viel instruktionale Unterstützung ist sinnvoll? *Empirische Pädagogik, 21*(2007)2, 119-137.

Mandl, H. & Friedrich, H. (2006). *Handbuch Lernstrategien*. Göttingen: Hogrefe.

Weinstein, C. E., & Mayer, R. E. (1986). The teaching of learning strategies. In C. M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research in teaching* (pp. 315-327). New York: Macmillan.

Hans HUMENBERGER, Wien

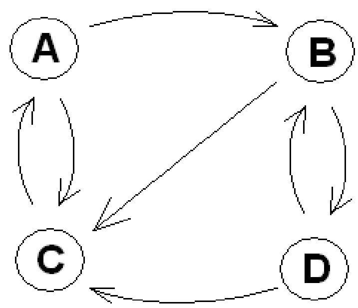
Das PageRank-System von Google – eine aktuelle Anwendung im Mathematikunterricht

„Mehrstufige Prozesse“ (in elementarer Form) gehören in manchen deutschen Bundesländern zum möglichen Lehrstoff in der Oberstufe, in Österreich leider nicht. In der Tat ist es ein Gebiet, in dem der *Vernetzungsgedanke* besonders gut verwirklicht werden kann: Lineare Algebra (Übergangsmatrizen), Stochastik (Wahrscheinlichkeiten), Analysis (Grenzwerte).

Dieser Beitrag soll eine Anregung für eine elementare und besonders aktuelle Anwendung zum Thema „Mehrstufige Prozesse“ sein. Bei Google erhebt sich die interessante Frage: Wie kommt Google eigentlich zu einer Reihung der „Liste“, wie schafft es Google, dass *wichtige* Seiten zum gesuchten Thema (bzw. Begriff) am *Anfang* der Liste stehen?

Durch einfache Modellannahmen (nicht als selbständige Modellierungsaufgabe für Schülerinnen und Schüler gedacht!) gelingt es, zu einem Resultat mit erstaunlicher Tragweite zu kommen. Natürlich ist der in Wirklichkeit bei Google verwendete Algorithmus komplizierter als hier dargestellt, eine wesentliche Kernidee ist aber ganz einfach zu beschreiben.

Die Suchmaschinen beginnen damit, mit einem so genannten *spider* oder *webcrawler* (spezielles Computerprogramm) das WWW zu „durchforsten“: Auf welchen Seiten ist zum gesuchten Begriff etwas zu erfahren, wo kommt er vor? Ziel dieser umfangreichen Suchtätigkeit ist es, eine möglichst gute „Momentaufnahme“ der Inhalte und der Vernetzungsstruktur (welche Seite ist mit welcher verlinkt?) des WWW in Bezug auf den Suchbegriff zu erhalten. Im Prinzip entsteht dadurch ein „gerichteter Graph“ der Art von nebenstehender Abbildung: Hier sind es der Einfachheit halber nur 4 Internetseiten (die auf die durch Pfeile angegebene Weise verlinkt sind), in Wirklichkeit sind dies oft mehrere 100.000 oder gar Millionen!



Modellannahme 1: Alle Links auf einer Seite werden mit jeweils derselben relativen Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit benutzt, so dass bei n ausgehenden Pfeilen bei allen das „Gewicht“ $1/n$ stehen soll (deswegen oben gar nicht extra dazu geschrieben).

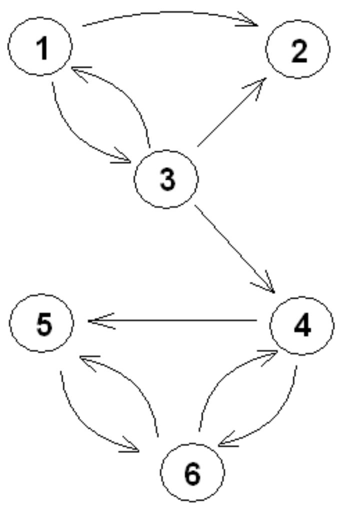
Wie soll nun die Wichtigkeit einer Seite gemessen werden?

Man kann sich dazu z. B. Folgendes vorstellen:
Sehr viele User nutzen dieses Netz (gerichteter Graph): Welcher Anteil davon wird sich – à la longue – im Zuge der Recherchen bei A, B, C, D aufhalten? Wenn sich herausstellen sollte, dass eine bestimmte Seite 90% der Suchenden auf sich zieht, so ist wohl klar, dass diese Seite am wichtigsten ist und in der Liste zuerst genannte werden sollte. Diese „langfristigen relativen Anteile“ sind eine Möglichkeit, die Wichtigkeit einer Seite zu beschreiben. Wir müssen also die langfristige Verteilung („Grenzverteilung“) der User auf die Seiten A, B, C, D bestimmen.

Die relativen Anteile der Seiten in den **Grenzverteilungen** können als Maß für ihre jeweilige Wichtigkeit herangezogen werden, wobei die Bestimmung von Grenzverteilungen (Markoff-Ketten) auf mehrere Arten möglich ist (EXCEL, CAS; hier aus Platzgründen nicht näher ausgeführt[1]). Nach dem berühmten Satz von Markoff ist dies dann besonders einfach, wenn z. B. die zugehörige „Übergangsmatrix“ keine Nullen, sondern nur *positive* Elemente enthält[2]. Insofern liegt es auch nahe nach Modellierungen zu suchen, so dass die Übergangsmatrix eben nur positive Elemente enthält. Diese Modellannahmen brauchen aber nicht vom Himmel zu fallen, sondern können alle leicht inhaltlich nachvollzogen und interpretiert werden.

Ein etwas komplizierteres Beispiel

Ein kleines Netzwerk aus 6 Internetseiten habe nebenstehende Verlinkungsstruktur. Die Übergangsmatrix können wir aus dem Übergangsgraphen ablesen:



$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In Spalte *i* stehen dabei die Übergangswahrscheinlichkeiten $\boxed{i} \rightarrow \boxed{j}$.

---

[1] Für eine ausführlichere Version sei auf Humenberger 2009 verwiesen.
[2] Die Grenzmatrix *G* hat in diesem Fall eine besonders einfache Gestalt, sie besteht nämlich aus *identischen Spalten*. Die Grenzverteilung ist dann durch eine solche Spalte der Grenzmatrix gegeben und *eindeutig* (unabhängig von der Anfangsverteilung).

Hier gehen von ② keine Pfeile aus („Sackgasse“, 2. Spalte hat nur Nullen). So kann das natürlich nicht bleiben, es bieten sich mehrere Auswege an: Z. B. könnte man die zweite Null von oben durch eine 1 ersetzen (d. h. wenn man nach ② kommt, so bleibt man auch bei ②, „Ende“; dies würde bedeuten im Übergangsgraphen einen Pfeil von ② zu sich selbst zu ergänzen). Wir wählen aber eine andere Möglichkeit:

Modellannahme 2: Wenn man beim Surfen auf eine Seite ohne weiterführende Links kommt („Sackgasse“), so kehrt man zurück zur Liste und wählt zufällig eine der anderen Seiten auf der Liste: alle mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/n$ (bei n möglichen Seiten).

Für die Übergangsmatrix U bedeutet dies im obigen Beispiel, dass alle Nullen in der zweiten Spalte durch 1/6 ersetzt werden → U^*.

Dadurch auf den Plan gerufen: Auch wenn die Seite keine Sackgasse ist, kann es doch vorkommen, dass jemand nicht den Links auf dieser Seite folgt, sondern eben zur Liste zurückkehrt und eine andere Seite einfach anklickt. Mit Wahrscheinlichkeit α mögen die User irgendwelchen Links auf der jeweiligen Seite folgen, mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ zur Liste zurückkehren und neu einsteigen, d. h. eine beliebige andere Seite (mit Wahrscheinlichkeit $1/n$) anklicken. Wie kann man nun dieses Szenario mathematisch beschreiben? Wie sieht die dann zugehörige, neue Übergangsmatrix T aus?

Wenn man den Links auf der Seite folgt, ist die Übergangsmatrix durch U^* gegeben. Beim *Neueinsteigen* muss die nächste Verteilung durch den Vektor $(1/n,\ldots,1/n)^t$ gegeben sein, d. h. die Übergangsmatrix wird in diesem Fall $\begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$ lauten, denn: $\begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$.

Dabei beschreibt $\vec{v}_n = (v_1,\ldots,v_n)^t$ eine beliebige Verteilung ($v_i \geq 0$, Summe = 1). Insgesamt ergibt sich für die neue Übergangsmatrix T durch Gewichten der beiden Fälle bzw. Übergangsmatrizen mit α bzw. $1-\alpha$:

$$T = \underbrace{\alpha \cdot U^*}_{\text{Mit W' } \alpha \text{ den Links folgen}} + \underbrace{(1-\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}}_{\text{Mit W' } (1-\alpha) \text{ neu einsteigen}}$$

Die Übergangsmatrix T hat *nur positive Einträge*, keine Nullen mehr. Nach dem Satz von Markoff liegt mit der Übergangsmatrix T also sicher jene gewünschte und besonders einfache Situation vor, in der es eine eindeutige und von der Startverteilung unabhängige Grenzverteilung gibt. Und diese Grenzverteilung kann dann die gewünschte Reihung der Seiten angeben, ihre Wichtigkeit messen.

Wie groß soll der Wert von α gewählt werden? Es ist bekannt, dass Google lange Zeit $\alpha = 0{,}85$ gewählt hat. Möglicherweise ist Google aber in der Zwischenzeit von diesem Wert abgewichen. Für obiges Beispiel ergibt sich mit $\alpha = 0{,}85$ für die Reihenfolge der Wichtigkeit der einzelnen Seiten 6 → 5 → 4 → 2 → 3 → 1, wie man aus der Grenzverteilung ablesen kann.

Fazit: Man kann auf elementare Art und Weise den Kern des PageRank-Algorithmus von Google, der es in den Neunzigerjahren überlegen machte und einen beträchtlichen Teil des Erfolges von Google ausmacht, beschreiben und analysieren. Die einfachen Modellannahmen sind dabei so gewählt, dass man (→ Satz von Markoff) zu einer eindeutigen Grenzverteilung kommen muss. Diese Grenzverteilung kann in der Praxis nicht in geschlossener Form berechnet werden, sondern nur *näherungsweise* mit *iterativen* Methoden, da es sich bei den Matrizen bzw. Vektoren meist um Dimensionen von mehreren Hunderttausend bis Millionen handelt.

Das Potential dieses Themas im Schulunterricht in Stichworten

- Ein spannendes und aktuelles Phänomen wird analysiert
- Realitätsbezug: jede/r verwendet Google
- Motivation, Verblüffung: Mit welch *elementaren* Ideen ist etwas „Weltbewegendes“ auf die Beine zu stellen und viel Geld zu verdienen. Bestätigung, dass grundlegende Ideen bedeutungsvoll sind.
- Wenige Voraussetzungen: Matrizen und Vektoren
  2-stufige Prozesse können zur *Einführung* der *Matrizenmultiplikation* genommen werden oder als *zusätzliche sinnvolle Anwendung*.
- Sinnvoller Computereinsatz: EXCEL, CAS
- Gute Vernetzungsmöglichkeit: Stochastik, Lineare Algebra, Analysis

Literatur

Chartier, T. P. (2006). Googling Markov. In: The UMAP Journal **27**, 1, 17 – 30.

Humenberger, H. (2009). Das PageRank-System von Google – eine aktuelle Anwendung von Markoff-Ketten und großen linearen Gleichungssystemen. Erscheint in *mathe matiklehren*

Wills, R. S. (2006). Google’s PageRank: The Math Behind the Search Engine. In: The Mathematical Intelligencer **28**, 4, 6 – 11.

Maria INGELMANN, Darmstadt

Evaluation einer Unterrichtskonzeption für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I

Der 2005 initiierte Schulversuch CAliMERO erprobt ein Konzept zum Einsatz CAS-fähiger Taschencomputer im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I in Niedersachsen und wird von der AG Didaktik des Fachbereichs Mathematik an der TU Darmstadt unter der Leitung von Prof. Dr. Regina Bruder über die gesamte Laufzeit wissenschaftlich begleitet. Neben der Fortbildung der gebildeten Arbeitsgruppe und der Begleitung ihrer regelmäßigen Treffen ist die Evaluation zentrale Aufgabe der Forschungsgruppe. Ihr Ziel ist die Erhebung und wissenschaftliche Einordnung der Effekte, die durch den CAS-gestützten Mathematikunterricht an den Projektschulen auftreten. Durch die Begleitung über insgesamt fünf Jahre können in diesem Schulversuch auch langfristige Entwicklungen in den Blick genommen werden. Die Ergebnisse der ersten beiden Unterrichtsjahre wurden nun zusammenhängend vorgestellt (vgl. Ingelmann, 2009).

1. Mathematikunterricht mit Technologieeinsatz

In seiner Anlage hat das Projekt CAliMERO insofern einen Pioniercharakter, als dass in der bisherigen Forschungsarbeit zum CAS-Einsatz mit relativ kleinen Gruppen, die intensiv betreut worden sind, gearbeitet wurde. Die Studien untersuchen mehrheitlich kürzere Abschnitte von Unterricht, in der Regel betrachten sie eine Unterrichtseinheit über die Dauer von einigen Wochen. Auf diese Weise wurden Vorstellungen darüber entwickelt, welche Möglichkeiten der CAS-Einsatz bietet und welche Besonderheiten dabei in Bezug auf die Lernenden, die Lehrenden und die Gestaltung des Unterrichts zu beobachten sind. Die wichtigsten Merkmale eines technologiegestützten Mathematikunterrichts, an die das Projekt CAliMERO anknüpft, sind demnach:

Der CAS-Einsatz im Mathematikunterricht bietet die Möglichkeiten zur Verknüpfung verschiedener mathematischer Darstellungsformen. Auf diese Weise kann ein sicherer Umgang mit algebraischen Objekten bei den Schülern erreicht werden (z.B.: Graham & Thomas, 2000). Um diese Zielsetzung zu verfolgen, ist die ständige Verfügbarkeit des Werkzeugs essentiell (z.B.: Doerr & Zangor, 2000). Daneben besteht die Notwendigkeit einer dem Einsatz dieser Technologie angemessenen Unterrichtskultur (z.B.: Tall, 1997; Stacey, 2003). Im CAS-gestützten Mathematikunterricht soll eine Abkehr von kalkülorientierten Aufgabenstellungen hin zur Behandlung von Anwendungsproblemen und zur Vermittlung mathematischer Konzepte erfolgen (z.B.: Weigand & Weth, 2002; Thomas, 2007).

Durch exploratives Arbeiten und Diskussion ihrer Lösungswege in einem neu gestalteten Mathematikunterricht können die Lernenden ihre mathematischen Fähigkeiten und ihr Selbstvertrauen ausbauen (z.B.: Hentschel & Pruzina, 1995). Für den sinnvollen Einsatz des CAS-Rechners durch die Lernenden ist die Ausbildung eines kritischen Umgangs mit dem Medium notwendig (z.B.: Guin & Trouche, 2002).

2. Unterrichtskonzeption des Projekts CAliMERO

Die Unterrichtskonzeption von CAliMERO stellt die Verknüpfung von Technologieeinsatz und individuell fördernder Unterrichtskultur ins Zentrum. Die Gestaltung des Mathematikunterrichts beinhaltet drei Zielsetzungen: Vermittlung eines zeitgemäßen Mathematikbildes, Langfristiger Aufbau mathematischer Kompetenzen, Entfaltung der Verantwortung der Schüler für das eigene Lernen. Um diese verwirklichen zu können, wurde der Rahmen einer Aufgabenvielfalt geschaffen, der auf dem von Bruder (2003) entwickelten Modell der Aufgabenzieltypen beruht. Die spezielle Förderung der Medienkompetenz der Lernenden und grundsätzlichen Fragen nach dem Sinn des mathematischen Handelns sind in den Mathematikunterricht des Projekts CAliMERO integriert, um den reflektierten Umgang mit dem Werkzeug sinnvoll mit den Zielen des Unterrichtskonzepts zu verknüpfen. Den Lehrkräften kommen dabei die Aufgaben zu, Problemlöseprozesse zu begleiten, Ergebnisse zusammenzuführen und Zusatzinformationen zu geben. Der von Guin und Trouche (2002) geprägte Begriff der *instrumentalen Orchestrierung* beschreibt diese Aufgaben als breites Spektrum, das darauf abzielt, ein für jeden Lernenden kohärentes System von Instrumenten zu schaffen. Sie setzt sich als Dach auf das entwickelte Schema zur Unterrichtskonzeption.

3. Anlage der durchgeführten Studie

Mit der empirischen Studie wurden die ersten beiden Unterrichtsjahre des Schulversuchs verfolgt. Die Projektgruppe bestand aus 29 Klassen an sechs Gymnasien, die mit CAS-fähigen TC nach der Unterrichtskonzeption von CAliMERO unterrichtet wurden (ca. 1000 Schüler und 24 Lehrer). Es wurde eine Kombination von längs- und querschnittlichen sowie prozessualen

Untersuchungen gewählt, dabei lag der Schwerpunkt auf der quantitative Herangehensweise. Auf Lehrerseite wurden zudem Fallstudien durchgeführt. Als Vergleichsgruppe dienten fünf Klassen, die an verschiedenen niedersächsischen Gymnasien mit einem GTR unterrichtet wurden.

Bei der Entwicklung der Evaluationsinstrumente wurde jeweils der besondere Aspekt des Rechnereinsatzes im Projekt CAliMERO beachtet. Außerdem wurde der ganzheitliche und kompetenzorientierte Ansatz der entwickelten Unterrichtskonzeption berücksichtigt sowie deren tatsächliche Umsetzung und ihre Auswirkungen durch entsprechende Fragestellungen gemessen. In der folgenden Tabelle sind alle Instrumente, die im Verlauf der ersten beiden Jahre des Projekts CAliMERO eingesetzt wurden, nach ihrem Forschungsgegenstand zusammengestellt:

Forschungsgegenstand	Evaluationsinstrument	Messzeitpunkte
Entwicklung der Lernenden	Schülerleistungstests Kopfrechentest	Beginn und Ende Klasse 7 Beginn und Ende Klasse 8 Beginn und Ende Klasse 8
	Schülerfragebögen	Beginn und Ende Klasse 7 Ende Klasse 8
Entwicklung der Lehrer	Modulfragebögen Modulfragebogen für den 2. Jahrgang	dreimal in Klasse 7 einmal in Klasse 7
	Lehrerfragebögen	vor Projektbeginn Mitte von Klasse 8
Unterrichtsgestaltung	Stundenberichte der Lehrer Stundenprotokolle der Schüler	fortlaufend in Klasse 7 fortlaufend in Klasse 8

4. Ergebnisse der Studie

Die vorgestellte Unterrichtskonzeption ist in Klasse 7 und 8 erfolgreich umgesetzt worden, was durch die Entwicklungen der Schüler bezüglich der mathematischen Kompetenzen und ihrer rechnerfreien Fähigkeiten gezeigt werden konnte. Der Gebrauch des Taschencomputers und die neuen Formen der Unterrichtsgestaltung sind nach zwei Projektjahren an den Projektschulen etabliert. Das entwickelte Aufgabenkonzept hat sich in der Unterrichtspraxis bewährt und wird von den Lehrkräften positiv beurteilt. Die Lernenden haben eine positive Grundeinstellung zu ihrem Taschencomputer entwickelt und fühlen sich im Umgang damit sicher, zudem haben viele

Schüler eine reflektierte Medienkompetenz ausgebildet. Die erstellten Unterrichtsmaterialien (z.B. Bruder & Weiskirch, 2008) beinhalten viele Anwendungsbeispiele aus unterschiedlichen Themenfeldern, dabei kommen nur wenige Aufgaben mit binnendifferenzierendem Charakter vor. Die drei grundlegenden Zielsetzungen der Unterrichtskonzeption konnten in den untersuchten Schuljahren teilweise realisiert werden, die Aufgabe des Lehrers, ein für jeden Lernenden kohärentes System von Instrumenten zu schaffen, wurde im Projektunterricht kaum umgesetzt. Die hohe Zustimmung der Lehrkräfte zur Skala *Zielerfüllung* und die positiven Wahrnehmungen der Lernenden zeigen, dass der CAS-gestützte Unterricht insgesamt gut gelingt.

Literatur

BRUDER, R. (2003): Konstruieren – auswählen – begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Friedrich-Jahresheft. Velber, 2003. S. 12-15.

BRUDER, R. / WEISKIRCH, W. (Hrsg.) (2008): CAliMERO - Computer-Algebra im Mathematikunterricht. Band 3: Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler: Lineare Zusammenhänge - TC-Hilfen - Kopfübungen - Basiswissen. Sek. I CAS, T³ Deutschland.

DOERR, H. / ZANGOR, R. (2000): Creating meaning for and with the graphing calculator. In: Educational Studies in Mathematics, 41, S. 143 – 163.

GRAHAM, A. T. / THOMAS, M. O. J. (2000): Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. Educational Studies in Mathematics, 41, 265-282.

GUIN, D. / TROUCHE, L. (2002): Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. In: ZDM Vol. 34 (5), S. 204 – 211.

HENTSCHEL, T. / PRUZINA, M. (1995): Graphikfähige Taschenrechner im Mathematikunterricht – Ergebnisse aus einem Schulversuch in Klasse 9/10. In: JMD 1995 (3/4), S. 193 – 232.

INGELMANN, M. (2009, in Vorbereitung): Evaluation eines Unterrichtskonzepts für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Logos.

STACEY, K. (2003). Using computer algebra systems in secondary school mathematics: Issues of curriculum, assessment and teaching. In W.-C. Yang, S.-C. Chu, T. de Alwis & M.-G. Lee (Eds.), *Proc. 8th ATCM* (pp. 40-54). USA: ATCM.

TALL, D. (1997): Functions and Calculus. In: Bishop, A. J. et al. (Eds.). International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer. S. 289 - 325.

THOMAS, M. / BOSLEY, J. / DELOS SANTOS, A. / GRAY, R. / HONG, Y. / LOH, J. (2007): Technology use and the teaching of mathematics in the secondary classroom. Wellington: Crown.

WEIGAND, H.-G. / WETH, T. (2002): Computer im Mathematikunterricht: Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg / Berlin: Spektrum, Akademischer Verlag.

Thomas JAHNKE, Potsdam

Kritik empirischer Unvernunft - zur so genannten Empirischen Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik

Die Penetration

Das Eindringen der empirischen Bildungsforschung und deren Methoden in die deutsche Mathematikdidaktik vollzog sich eher schleichend oder mit dem Zeitgeist eilend, jedenfalls ohne einen Auftakt oder den Versuch einer Begründung, welche neuen Erkenntnishorizonte und -momente diese Methoden erschließen. Die ‚neuen' Methoden waren vielmehr einfach da, als zöge gleichsam die – von der Forschung offensichtlich bislang vernachlässigte, übersehene oder sogar negierte – Realität in die Mathematikdidaktik ein und nicht eine neue Sichtweise, die einer Legitimation und Charakterisierung ihrer Erkenntnisweise bedürfte. Historisch setzte diese Penetration in der und in die deutsche Mathematikdidaktik mit der Globalisierung der Forschung durch die internationalen Vergleichsuntersuchungen von Schülerleistungen also mit TIMSS und PISA ein. Die Wucht und mediale Wirkung, die diese Untersuchungen und ihre Resultate in Deutschland entfalteten, ließen die neuen Methoden als selbstverständlich (und) wirksam erscheinen, ohne dass sie in irgendeiner Weise erkenntnistheoretisch reflektiert, ja überhaupt als Methoden diskutiert wurden.

Der vergessene Sinn

Sinnfragen sind empirisch nicht entscheidbar, sie lassen sich nur in einem theoretischen Rahmen überhaupt aufwerfen und bearbeiten. Das wissen zumindest implizit auch die empirischen Bildungsforscher, wenn sie sie in einem ersten Schritt, der in ihrem Jargon als Konzeptualisierung bezeichnet wird und der zumeist durch einen Verweis auf irgendeinen undurchsichtigen und kaum erläuterten Begriffsapparat erledigt wird, kurz abtun. Bei PISA wird zum Beispiel Hans Freudenthal herangezogen, obwohl der sich solchen Untersuchungen gegenüber bereits vor vielen Jahrzehnten mehr als kritisch geäußert hat.

In anderen Arbeiten wird ohne jeden Seitenbezug auf kürzere und längere Theorieversatzstücke aus verschiedenen Quellen verwiesen, deren Kern weder referiert noch wenigstens paraphrasiert wird, aber dazu dient, irgendeinen Bereich mit wenigen disjunkten Begriffen zu überziehen, die dann in Fragebogenitems, über die man allenfalls beispielhaft fast nichts erfährt, operationalisiert werden.

Rasterfahndung mit der Wünschelrute

Das Eigenartige an der empirischen Forschung ist, dass sie immer etwas hervorbringt; ob eine noch so kleine Examensarbeit oder einen International Survey, sie kann nicht leer ausgehen. Ihre Förderbänder und Siebe funktionieren zumindest halb- wenn nicht vollautomatisch. Nicht ungern erforscht sie in der Bewusstlosigkeit ihrer Betriebsamkeit auch die Spuren ihres eigenen Grabens, also die Spuren, die ihre Grabwerkzeuge hinterlassen haben. Immer erhält sie Zahlen und damit Skalen, Intervalle, Ranglisten und, was dann der statistische Apparat folglich zur Verfügung stellt, Mittelwerte, Standardabweichungen, Korrelationen und so fort. Man wünscht sich mit der empirischen Rute gleichsam das Ergebnis herbei. Durch das Messen erhält man Daten – eigentlich sogar nur Zahlen, deren Realitätsgehalt (oder genauer Realitätsbeschreibungsvermögen) außer Frage steht, ja dem ganzen Prozess eine Art quasi-naturwissenschaftlicher Dignität verleiht. Die Frage, ob man da tatsächlich etwas misst, was man später ausgraben kann, stellt sich gar nicht, weil der Gegenstand durch den Messprozess hervorgebracht und konstituiert wird. Solche Forschung produziert ihre Begriffe (heute sagt man dann auch Konzepte) und Ergebnisse parthenogenetisch, notfalls auch ohne jede Anleihen bei der bemessenen Realität oder Bezügen zu ihr. Und wenn man die Rotzigkeit (Pardon!) des Positivismus zugrunde legt, gilt das dann alles bis zu seiner Widerlegung, die – dessen sind sich die Forscher sicher – faktisch, wenn nicht sogar prinzipiell, ausgeschlossen ist. Die Sache ist versiegelt. Wo Kritik nicht abprallt, freut man sich über Folgeprojekte, die dann ebenso in der beschriebenen Art bearbeitet werden.

Das Schibbolet der empirischen Bildungsforschung ist die Mathematik in Form gängiger und auch nicht-gängiger statistischer Verfahren, die gern als ‚state of the art' apostrophiert werden. Während der Mathematikdidaktiker und Erziehungswissenschaftler Hans Werner Heymann als eines der Ziele eines Allgemeinbildenden Mathematikunterrichts die Rolle der Mathematik als Vernunftverstärker nennt, ihr also eine aufklärerische Funktion im allgemeinbildenden Kontext zuspricht, wird ihr in der empirischen Bildungsforschung eine gegenteilige Rolle zuerkannt: sie dient zur Verschleierung. Nicht nur dass die statistischen Methoden als Werkzeuge in ihrer Eigenart und in Determination und Formation ihrer Ergebnisse nicht reflektiert werden, dass man also – um es lapidar zu sagen – weiß, was man wie und warum und mit welchen Folgen und Wirkungen da macht, wenn man Daten den statistischen Methoden und dem instrumentellen Verstand oder Unverstand unterzieht, nein, das unerklärte und un-erklärende Gegenteil spielt sich ab: Die Generierung der Geltung der Aussagen der empirischen Forschung wird vorsätzlich unkenntlich gemacht, in dem man die eingesetzten mathematischen Verfahren weder erläutert, noch überhaupt ihre Zweckmäßigkeit in dem fraglichen Erkenntniszusammenhang in irgendeiner Weise diskutiert oder rechtfertigt. Ob man sich die – auch für Experten nicht ohne Rest und an einigen Stellen nur widersprüchlich entschlüsselbaren – technischen Handbücher des Großunternehmens PISA hernimmt oder sich durch einen hohen Wert von Crombachs alpha in einer kleineren Untersuchung beeindrucken lässt, man zieht in der Regel den Kürzeren, und die Sache ist auch darauf angelegt: Man kann Schibbolet nicht aussprechen; dieses Eingeständnis hätte schwere Folgen für die eigene wissenschaftliche Bonität, also liest und denkt man darüber hinweg.

Wenn man noch die vorsätzliche Nicht-Veröffentlichung der so genannten Items, also die Geheimniskrämerei um die Inhalte hinzunimmt, kann man sagen, dass in der empirischen Bildungsforschung Items, die keiner kennt, mit Verfahren untersucht und aufbereitet werden, die keiner versteht, um zu Schlüssen zu kommen, die jeder teilt, sofern er auch etwas von dem großen Kuchen oder dem nächsten Projekt abbekommen will. Und die Bildungspolitik ist dankbar, weil hier im Viervierteltakt von Wahlperioden Tests und Vergleichsarbeiten immer neue Daten gebären und mediales – meist Schreckens- – Echo finden, was Tatkraft und irgendwie auch Besserung suggeriert.

Das auktoriale Moment

Forschung wird getragen von Forschern, also von Subjekten, die eine Untersuchung, welcher wissenschaftlichen Qualität auch immer, durchgeführt haben und dann der wissenschaftlichen Öffentlichkeit und interessierten Bildungspolitikern ihre Resultate vorlegen. Das nannte man früher Publizieren, und man konnte den oder die Forscher der Diskussion oder Kritik halber auf ihre Elaborate ansprechen oder auf sie eingehen. Ein Beitrag in der Zeitschrift für Erziehungswissenschaften über die nicht uninteressante Titel-Frage „Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung?“ ist von zehn Autorinnen und Autoren gezeichnet, woraus sich im Durchschnitt 2,5 Seiten für jede und jeden ergeben. Als ich einen von ihnen auf einige Unstimmigkeiten in der Untersuchung ansprach, gab er mir zur Antwort, dass der Beitrag keineswegs seine Meinung zum Ausdruck bringe und er auch manche Formulierungen und Schlüsse für fragwürdig halte, sich aber nicht mit seiner Meinung habe durchsetzen können.

Es hat den Anschein, dass solche Papiere zustande kommen wie Kabinettsvorlagen, bei denen die Beteiligten in einer dem Leser nicht bekannten, allenfalls erahnbaren Hierarchie zu einem Votum kommen, für das eigentlich keiner so recht die Verantwortung trägt oder übernehmen will. Es ist auch nicht rekonstruierbar, ob die aufgeführten Autorinnen und Autoren überhaupt bei dem Verfassen des von ihnen mit gezeichneten Textes oder möglicherweise an dem Projekt als Codiererinnen bzw. Codierer oder Raterinnen bzw. Rater oder in anderen Funktionen beteiligt waren. So wird Wissenschaft anonym, während ihre Autorität zugleich schon durch die schiere Zahl der Projektbeteiligten zu steigen scheint. Das hat übrigens auch ad personam ganz merkwürdige Folgen. So sollte ich letzthin über die Rangfolge eines Bewerbers auf einer Berufungsliste entscheiden, dessen Publikationen mit einer Ausnahme solch kollektiven Charakter trugen. Wie entscheidet man über jemanden, von dem man nur weiß, wo er beteiligt war, aber nicht, was er geschrieben hat?

Steuerungswissen

Der Begriff Steuerungswissen entstammt nicht dem Wörterbuch der Wissenschaftlerin sondern dem des Funktionärs. Sein epistemologischer Status ist mehr als zweifelhaft. In einer münchhausenhaften Weise behauptet und setzt er sich selbst und suggeriert den Beteiligten und den Auftraggebern diverser Studien, dass es eine Art Stellschraubenwissen gäbe, um die untersuchten und in der Regel als mangelhaft diagnostizierten ‚Werte' zu erhöhen, ohne tatsächlich ihre Ursachen zu ergründen. Er setzt schon begrifflich die Erkenntnisse als gesichert, die es eigentlich zu gewinnen gälte, und unterstellt zugleich, dass er die Verhältnisse in seinem Sinne zu beherrschen vermöge.

Während es bei dem Soziologen und Philosophen Theodor W. Adorno heißt: „Denn wahr ist nur, was nicht in diese Welt passt", lernen wir von dem Begriff Steuerungswissen, dass nur wahr ist, was so zu wirken vorgibt, wie die Auftraggeber einer Studie es sich vorstellen – möge es sich dabei um die der wirtschaftlichen Prosperität der Industriestaaten verpflichteten OECD oder die Kultusministerkonferenz oder Landesbildungsministerien oder andere Geldgeber handeln, die das ‚Drittmittelvolumen' und damit das Ansehen der beteiligten Forscherinnen und Forscher steigern. Solche Forschung ist ‚programm' –gemäß vorsätzlich affirmativ und ihr fehlt, wie ich denke, jeglicher Stachel der Erkenntnis.

Steffen JUSKOWIAK, Christoph ALEXY & Frank HEINRICH, Braunschweig

„Audioreflexion“ als mögliche Maßnahme zur Förderung der Problemlösefähigkeit

Audioreflexion als Methode zur Erforschung mathematischen Denkens

Probleme lösen zu lernen ist seit mehreren Jahrzenten ein wichtiges und weithin anerkanntes Ziel von Mathematikunterricht. Insbesondere TIMSS hat gezeigt, dass die Bemühungen zur Förderung der Problemlösefähigkeit einer Verstärkung bedürfen. (Ergänzende) Anregungen zur Förderung der Problemlösefähigkeit können z.B. aus empirischen Erkundungsstudien erwachsen, die darauf ausgerichtet sind, mehr Details über Problemlösungsprozesse zu erfahren. Vor diesem Hintergrund, dass die Gestaltung der Lerntätigkeit die Analyse der Lerntätigkeit voraussetzt (MANDL/FRIEDRICH 1992), haben wir 2008 begonnen, Problemlösungsprozesse von Studierenden mit Fach Mathematik hinsichtlich verschiedener Aspekte (wie z.B. Strategiewechsel, Strategiedefizite, Selbstreflexion) zu analysieren. Dabei arbeiten wir mit einem Design, das sich an empirische Untersuchungen von HEINRICH (2004) anlehnt: Die Versuchsperson ist angehalten, innerhalb von 45min ein vorgegebenes mathematisches Problem zu lösen und dabei laut zu denken. Von der Arbeit am Problem wird eine Videoaufzeichnung angefertigt. Im unmittelbaren Anschluss sieht die Versuchsperson diese Aufzeichnung an und ist angehalten, Gedanken zu äußern, die ihr beim Betrachten durch den Kopf gehen. Wir nennen diese Methode, da die Versuchsperson dabei über ihre Problemlöseverhalten reflektiert und von den sprachlichen Äußerungen eine Audioaufzeichnung erfolgt, *Audioreflexion*. Bei der dann folgenden Auswertung der so gewonnenen Audio- und Videodokumente unter Verwendung der Methode der konsensuellen Validierung (vgl. MAIER 1991) zeigte sich, dass Audioreflexion vermutlich nicht nur einen Beitrag zur Erforschung von Verhaltensweisen beim Lösen von Problemen zu leisten vermag, sondern auch und gerade Potenzial als Maßnahme zur Fortentwicklung der Problemlösefähigkeit besitzt.

Audioreflexion als Methode zur Förderung der Problemlösefähigkeit

Wir betrachten Audioreflexion als eine besondere Form von *reflection*, was bei KILPATRICK (1985) neben *osmosis*, *memorization*, *imitation* und *cooperationen* eine bedeutsame Maßnahmegruppe zur Förderung der Problemlösefähigkeit darstellt. Reflection beruht auf der Annahme, dass Menschen nicht nur durch eigene Tätigkeit, sondern auch durch Nachdenken über Getanes lernen. Die Besonderheiten und Potenzen von Audioreflexion sehen wir vor dem Hintergrund der Fortentwicklung der Problemlösefähigkeit im Bereich Mathematik und des Lernens von Mathematik im Folgenden:

- eigenes Tun steht im Mittelpunkt, dadurch fühlt sich der Proband in besonderer Weise angesprochen
- besondere Rahmenbedingungen (Labor, Aufnahme) hinterlassen mehr Spuren als der sonst gewohnte Kontext
- sonst kaum beachtete, eher unterbewusst ablaufende Vorgänge beim Problemlösen können aufgehellt und bewusst gemacht werden
- die Methode kann als Arrangement angesehen werden, Reflexionsprozesse beim Bearbeiten von Problemen auszulösen, die sich in der Regel nicht von allein einstellen (vgl. COLLET / BRUDER 2008)
- durch Selbstbeobachtung bzw. -bewertung kann der Nutzen bestimmter Verfahren, die eigene Kompetenz und der Kompetenzzuwachs erlebt werden (vgl. AEBLI / RUTHEMANN 1987, WILDT 1993, COLLET / BRUDER ebenda)
- ein solches Kompetenzerleben kann ferner die Arbeit an weiteren Problemen motivieren (COLLET / BRUDER ebenda)
- Erkennen und Auseinandersetzen von / mit Fehlern und anderen lösungshemmenden Verhaltensweisen ist gut möglich (vgl. Positionen zum Lernen aus Fehlern z.B. schon bei DUNCKER 1935)

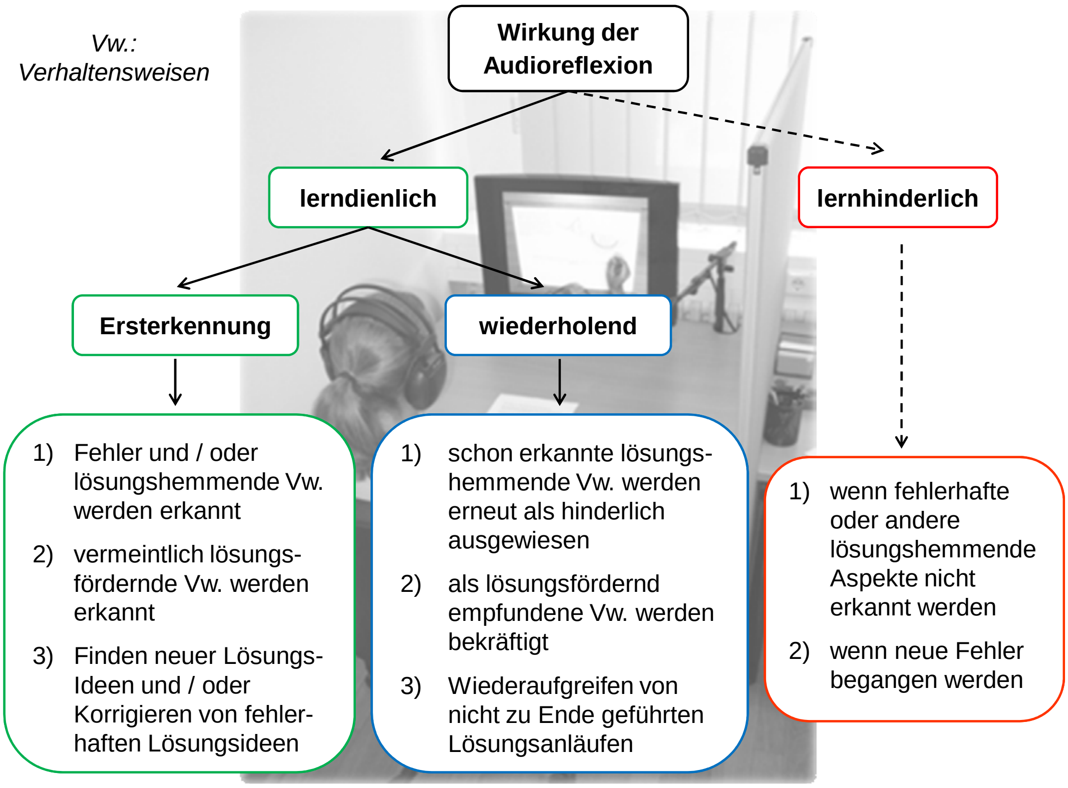
Eine Erkundungsstudie zur Audioreflexion

Wir haben begonnen, unsere Annahmen zur Eignung von Audioreflexion als Methode zur Förderung der individuellen Problemlösefähigkeit empirisch zu überprüfen. In der ersten Phase unserer Erkundungsstudie ging bzw. geht es um die Beantwortung folgender (Gruppen von) Fragen:

- Worin besteht das Potenzial von Audioreflexion für die Fortentwicklung der Problemlösefähigkeit?
- Sind auch Aspekte zu identifizieren, die diesem Ziel eher entgegenstehen? Wenn ja, welcher Art sind sie?
- Was kann der Proband durch eigene Konfrontation mit den Spuren seiner Problemlösebemühungen für sich selbst hinsichtlich des Bearbeitens weiterer mathematischer Probleme „mitnehmen“?
- Wie charakterisiert / bewertet der Proband den Verlauf und die Qualität seiner Arbeit? Wie stimmen seine Positionen mit der Meinung von Experten überein?
- Welche Aspekte des Problemlösungsprozesses sind Gegenstand der Audioreflexion? (Wissenselemente? Fertigkeitselemente? auch strategische Aspekte im Lösungsvorgehen? etc.)

Erste vorläufige Befunde und ein Ausblick

Wie das unten stehende Schema zeigt, konnten wir im Hinblick auf die Fortentwicklung der Problemlösefähigkeit und im weitesten Sinne hinsichtlich mathematischen Arbeitens potenziell lerndienliche Aspekte von Audioreflexion herausarbeiten.



Dabei wurde unterschieden, ob von den Versuchspersonen erstmals während der Audioreflexion Beiträge kamen, die wir als potenziell lerndienlich ansehen oder ob es bereits im realen Problemlösungsprozess derart lerndienliches Verhalten gab, was in der Audioreflexion erneut aufgegriffen wurde und damit eine Verstärkung erfuhr. Die bisherigen Befunde bekräftigen die Vermutung, dass Audioreflexion einen Beitrag zur Förderung der individuellen Problemlösefähigkeit zu leisten vermag.

Insbesondere gelingt es den Probanden in recht großer Breite aus eigener Kraft, Fehler und lösungshemmende Verhaltensweisen lokaler Art (Wissensfehler, Fertigkeitsfehler etc.) zu identifizieren und ggf. zu korrigieren.

Es gelingt den Versuchsteilnehmern jedoch kaum, Defizite oder Nutzen ihres strategischen Vorgehens wahrzunehmen. Wir vermuten u.a., dass die Bearbeitungsverläufe für die Teilnehmer zu komplex waren, um unter strategischen Gesichtspunkten von ihnen erfasst und bewertet werden zu können. Das legt z.B. die Unterstützung eines Experten nahe, der die Problemlösebemühungen der jeweiligen Person zeitnah analysiert hat und dann gemeinsam mit der Person die Videoaufzeichnung v.a. unter lösungsstrategischen Gesichtspunkten auswertet. Möglicherweise bedarf es auch eines größeren zeitlichen Abstands zur Problemlösesitzung um den Probanden Aussagen zum strategischen Vorgehen abzuringen. Natürlich muss bei der Diskussion der Befunde auch berücksichtigt werden, dass wir aus Aufwandsgründen bislang erst wenige Problemlösesitzungen analysieren konnten. Vielleicht wurden auch deswegen von den Probanden vermeintlich lösungsfördernde Elemente in der Audioreflexion stiefmütterlich behandelt.

Schließlich soll nicht unerwähnt bleiben, dass es auch Hinweise auf mögliche „lernhinderliche" Aspekte von Audioreflexion gab, was noch näher erkundet werden soll. Hier scheinen Überlegungen erforderlich, wie derartigen negativen Effekten entgegengewirkt werden kann.

Im Fortgang unserer Studie wollen wir die empirische Basis ausweiten und prüfen, ob die bisherigen Befunde im größeren Ausmaß Bestätigung finden. Dabei sollen auch Lernende anderer Altersstufen als Probanden zum Einsatz kommen. Darüber hinaus ist vorgesehen, mit weiteren Varianten von Audioreflexion (z.B. mit größerem zeitlichen Abstand nach Beendigung der Arbeit am Problem oder unter Teilnahme eines Experten beim Betrachten / Auswerten der Videoaufzeichungen) zu arbeiten.

Literatur

AEBLI, H. / RUTHEMANN, U. (1987). Angewandte Metakognition: Schüler vom Nutzen der Problemlösestrategien überzeugen. In: Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 19, S. 46 – 64.

COLLET, C. / BRUDER, R. (2008). Lernen durch Selbstbeobachtung im problemlösenden Mathematikunterricht. In: Praxis Schule 5 – 10, 3, S. 34 – 39.

DUNCKER, K. (1935). Zur Psychologie des produktiven Denkens, Berlin: Springer.

HEINRICH, F. (2004). Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme. Hamburg: Dr. Kovac

KILPATRICK, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 Years on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E.A. (Ed.): Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, p. 1 – 15.

MAIER, H. (1991). Interpretative Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1991. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

MANDL, H. / FRIEDRICH, H. F. (1992). Lern- und Denkstrategien: Analyse und Intervention. Göttingen, Toronto, Zürich: Hogrefe.

WILDT, M. (1993). Kognitive Aktivitäten aus der Nähe betrachtet – Erwachsene lösen mathematische Sachaufgaben. Hildesheim: Franzbecker.

Carolin JUST, Hildesheim

Zur Verbesserung der Mathematiklehrerausbildung. Erprobte Ideen und abgeleitete Überlegungen.

In einer (wieder!) aktuellen Diskussion zur Lehrerbildung wird der schwache Einfluss des Lehrerstudiums auf das Handeln von Mathematiklehrerinnen und Lehrern bemerkt. In meinem Forschungsprojekt suche ich einen Weg, im Studium Theorie und Praxis besser miteinander zu verknüpfen. Ich möchte herausfinden, inwieweit typische Tätigkeiten von Lehrerinnen und Lehrern im Mathematikunterricht zum Ausgangspunkt universitärer Lehre gemacht werden können. Erfahrungen der 1. Pilotphase und Ableitungen für mein weiteres Vorgehen möchte ich hier vorstellen.

1. Forschungslage

Die genannten Kritikpunkte an der Lehrerbildung sind vielfältig. Die inhaltliche Beliebigkeit der Lehrerausbildung in der Universität wird genau so beklagt wie die mangelnde Verbindung der einzelnen Studienanteile (Sandfuchs 2004). Bemängelt wird ebenfalls, dass während des Studiums veraltete Lehrmethoden genutzt werden, um die neuen zu vermitteln. Blömeke (2004) weist darauf hin, dass folglich der Handlungsdruck, dem Berufseinsteiger ausgesetzt sind, sie an der 'Verwendbarkeit' von Theorie zweifeln lässt. Fritz Oser (2001) fragt danach, wie gut die Lehrerbildung auf berufsorientierte Standards, wie beispielsweise *LehrerInnen sollen verschiedene Formen des individuellen und selbstständigen Lernens im Unterricht verwirklichen können,* vorbereitet. Dabei handelt es sich Oser zufolge bezogen auf den Lehrerberuf bei Standards um solche Fähigkeiten, „die theoretisch fundiert sind, hinsichtlich derer es Grundlagenforschung gibt, die kriteriell evaluierbar sind und die auf einer gelebten Praxis beruhen“. Oser erhebt, dass während der Lehrerausbildung nicht einmal die wichtigsten der Standards ausreichend intensiv erworben werden können. Zu einer ausreichenden Fundierung gehören für ihn das Auseinandersetzen mit der Theorie, das Üben und das Ausprobieren in der Praxis. Die Idee, die Verbesserung der Lehrerbildung von Standards aus zu denken, wird als aussichtsreicher Ansatz aufgegriffen, beispielweise veröffentlichte im Juni 2008 die GDM in Zusammenarbeit mit DMV und MNU Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik.

Einen positiven Ausblick darauf, wie Lehrerbildung wirksamer wird, geben Julia Larcher und Jürgen Oelkers (2004). Sie sagen: Positive Effekte in der Ausbildung nehmen zu, wenn „im Verlauf der Ausbildung persönliche

Fortschritte im Können registriert werden, die sich auf das Ausbildungsziel – definiert von den Studierenden – beziehen lassen".

Da anzunehmen ist, dass gültige Prinzipien aus dem Unterricht auf die Lehre an Universitäten übertragbar sind, sollen hier die Merkmale für wirksamen Unterricht aus der Unterrichtsforschung angeführt werden: So ist nach Helmke (2003) Voraussetzung für wirksamen Unterricht, dass an vorhandene Vorstellungen der Lernenden zum Gegenstandsbereich angeknüpft wird. Eine angemessene Methodenvariation, die unterschiedliche Lernziele und unterschiedliche Lerntypen berücksichtigt, ist weitere Einflussgröße auf die Wirksamkeit von Unterricht. Mit der Vorgabe authentischer Aufgaben und Situationen, mit konkreten Beispielen, alltagsnahen Projekten, Aufzeigen von Anwendungsmöglichkeiten, innovativen und anregenden Lehr-Lern-Arrangements lassen sich Lernende motivieren. Die didaktische Qualität und der Anregungsgehalt des Lehr- und Lernmaterials beeinflussen, wie aktiv Wissen aufgebaut wird, und damit den Lernerfolg. Vergleichbare Forschungsergebnisse speziell für die Lehrerbildung gibt es meines Wissens noch nicht.

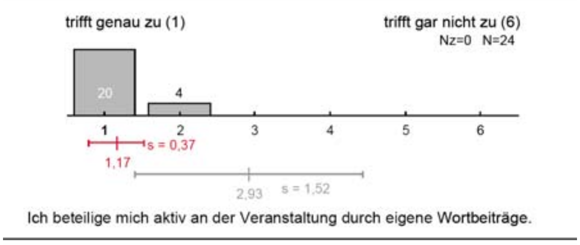
2. Vorhaben/Abgeleitete Überlegungen

Insgesamt gilt: Wenn sich der Einfluss der Lehrerbildung auf das Lehrerhandeln erhöhen soll, wenn also die Theorie mit der Praxis verknüpft werden soll, dann muss nicht nur die Theorie, sondern auch das Verknüpfen der Theorie mit der Praxis gelernt werden. Alle genannten Publikationen machen sich für eine anforderungsbezogene Lehrerbildung stark. Auch meine Grundannahme ist, dass Lehrerbildung in höherem Maße anforderungsbezogen als bisher sein sollte, damit ihr Einfluss auf das Lehrerhandeln steigt. Um den Forschungsbereich der *Anforderungen an MathematiklehrerInnen* einzugrenzen, sei an dieser Stelle zunächst der Fokus auf typische Tätigkeiten von LehrerInnen im Mathematikunterricht gerichtet. Typische Tätigkeiten im Mathematikunterricht sind beispielsweise das Entwickeln und Umsetzen von Aufgaben, das Erklären, das Differenzieren usw. Mich interessiert: Was passiert eigentlich, wenn der gezielte Kompetenzaufbau zu solchen typischen Tätigkeiten Ausgangspunkt universitärer Lehre ist? Lässt sich ein Konzept entwickeln, das sich an die mathematischen und die mathematikdidaktischen Veranstaltungen angliedert und das wichtige Hinweise auf die Verbesserung der Lehrerbildung umsetzen kann? Bei der Entwicklung eines solchen Lehrkonzepts sollte die Bedeutung von Lehrformen und Lehrmethoden beachtet werden. Um die von Terhart und Sandfuchs kritisierte Zersplitterung des Lehrerstudiums zu verringern, sollten Maßnahmen zur Verbesserung der Lehrerbildung studiumsübergreifend sein. Sie sollten sowohl disziplinübergreifend sein (z.B. über die Mathematik und die Didaktik hinweg) als auch semesterübergreifend – also vom ersten bis zum letzen Semester hinweg.

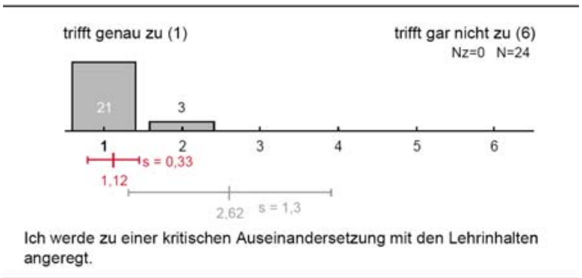
3. Forschungsbericht aus der ersten Pilotphase

In einer ersten Pilotphase habe ich verschiedene Ideen zum Kompetenzaufbau typischer Tätigkeiten an der Uni Hildesheim erprobt. Als besonders aussichtsreich für die weitere Entwicklung eines Konzepts erwies sich beispielsweise der im Folgenden beschriebene Ansatz: Im WS 08/09 testete ich an unterschiedlichen Stellen des Studiums das Potential von Workshops aus, die oben genannten Prinzipien aus der Unterrichtsforschung und oben genannten Hinweisen aus den Diskussionen zur Lehrerbildung folgten. Diese Workshops hatten Folgendes gemeinsam: Jeder Workshop entsprach einer Lehreinheit von 3-4 Stunden. Jeder Workshop sollte durch anspruchsvolle Aufgaben zu einer hohen studentischen Beteiligung und zu einer aktiven Auseinandersetzung mit den angebotenen theoretischen Grundlagen führen. Für jeden Workshop wurde eine angemessene Methodenvariation angestrebt. Häufig vorkommender Verlauf: Einstieg (z.B. Filmpräsentation) ▪ Erarbeitung theoretischer Grundlagen (z.B. Lesen und Diskutieren eines Basistextes) ▪ Ergebnisorientierte Arbeitsaufträge an die Studierenden (z.B. Initiieren und Aufrechterhalten eines mathematischen Gesprächs) ▪ Ergebnispräsentation / Reflexion und/oder Transferphase.

In einer Version des Workshop-Ansatzes haben je 4 Master-Studierende eines Kompaktseminars (25 Teilnehmer) nach oben beschriebenem Anspruch selbst einen 3-stündigen Workshop erstellt und ihn mit den übrigen 21 Teilnehmern durchgeführt. Jeder Workshop griff eine typische Tätigkeit auf, die im Vortreffen von den Studierenden selbst ausgesucht wurde. Einen beeindruckenden Hinweis auf die Akzeptanz dieses Modells bei den Studierenden ergab die uniweite Evaluation der Lehrveranstaltungen, in der die Studierenden das Seminar mit „sehr gut“ (1,24) und damit um eine ganze Note besser bewerteten als im Durchschnitt die Veranstaltungen der Universität.



Eine Teilfrage des Evaluationsbogens erhob, dass die Aktivierung der Studierenden sehr hoch war, wobei die Studierenden angeben, dass es dahingehend im Vergleich zu den anderen universitären Veranstaltungen einen augenfälligen Unterschied gibt: Der Mittelwert 1,17 des Kompaktseminars unterscheidet sich deutlich vom Mittelwert 2,93 aller universitärer Veransaltungen, und



nicht nur das, er liegt auch außerhalb der Standardabweichung der uniweiten Bewertung. Eine weitere Teilfrage des Evaluationsbogens gibt an, dass die Studierenden zu einer kritischen Auseinandersetzung mit den Lehrinhalten angeregt wurden. Als Vermutung lässt sich daraus ableiten, dass auf Seiten der Studierenden eine hohe Aneignung der theoretischen Inhalte stattgefunden hat. Auch hier stehen sich die Mittelwerte 1,12 des Kompaktseminars und 2,62 aller anderen universitären Veranstaltungen kontrastreich gegenüber. Die Workshops haben außerdem mit vielen anregenden Aufgaben und Übungen zum Ziel gehabt, die Theorie mit der Praxis zu verknüpfen. Inwiefern eine Verknüpfung stattgefunden hat, hat die Evaluation nicht systematisch erhoben. Doch die ergänzenden Kommentare der Studierenden weisen darauf hin, dass das gelungen sein könnte, z.B.: „In diesen Workshops habe ich wie in keinem anderen Seminar inhaltlich, methodisch und praktisch sehr viel gelernt." Nicht außer Acht gelassen werden soll, dass für die Überprüfung der Wirksamkeit einer Lehrveranstaltung validere Methoden als die Selbstaussagen der Lernenden bekannt sind, und dass schon bedingt durch die geringe Zahl von Studierenden (25) keine Validität behauptet sei. Da aber Akzeptanz und Wirksamkeit der Workshops nach Selbstaussage der Studierenden so hoch sind, möchte ich diesen Ansatz in ein Gesamtkonzept einbetten und die Wirksamkeit mit weiteren, als etwas valider geltenden Methoden untersuchen. Mein nächstes Forschungsinteresse geht dahin, ein studiumübergreifendes Konzept zu entwickeln, das am Beispiel der Tätigkeiten *Aufgaben entwickeln, auswählen und umsetzen* Möglichkeiten auslotet, Kompetenzen zu typischen Lehrertätigkeiten aufzubauen.

Literatur

Blömeke, S. [u.a.] (Hrsg.) (2004). *Handbuch Lehrerbildung.* Bad Heilbrunn/Obb. [u.a.]

Blömeke, S. (2004). Empirische Befunde zur Wirksamkeit der Lehrerbildung. In: S. Blömeke [u.a.] (Hrsg.): *Handbuch Lehrerbildung* (S. 59-91)

Helmke, A. (2003). *Unterrichtsqualität erfassen, bewerten, verbessern.* Seelze

Larcher, J., Oelkers, J. (2004). Deutsche Lehrerbildung im internationalen Vergleich. In: S. Blömeke [u.a.] (Hrsg.): *Handbuch Lehrerbildung* (S. 128-150)

Oser, F. (2001). *Die Wirksamkeit der Lehrerbildungssysteme: von der Allrounderbildung zur Ausbildung professioneller Standards.* Chur [u.a.]

Sandfuchs, U. (2004). Geschichte der Lehrerbildung in Deutschland. In: S. Blömeke [u.a.] (Hrsg.): *Handbuch Lehrerbildung* (S. 14-37)

Romualdas KAŠUBA, Vilnius

Wie viele Wörter braucht man, um einen mathematischen Inhalt zum Ausdruck zu bringen?

„In der Kürze liegt die Würze“. Wie kurz kann eine anregende Aufgabe sein? Kürze, die etwas in sich birgt, ist nicht allzu häufig anzutreffen und übt wahrscheinlich gerade deshalb auch nicht selten eine beinahe magische Anziehung aus. Kürze ist auch in der Pädagogik wichtig und wertvoll. In der kurzen Formulierung einer Aufgabe steckt sehr häufig wirklich etwas Ansteckendes. Kurze Aussagen prägen sich ein, man wird sie so schnell nicht vergessen – denken Sie an Sprichwörter oder an Kindergedichte. In der Kürze liegen also auch große Reserven für den mathematischen Unterricht.

Wenn wir schon die Poesie angesprochen haben, so fragen wir gleich, wie man auf eine interessante Weise die weltbekannte Sache, dass sechs mal vier genau vierundzwanzig ausmacht, darstellen könnte? Auf alle möglichen Anleitungen und auf Veranschaulichungen z. B. durch Murmeln wollen wir nicht eingehen und weisen gleich auf eine Antwort, die kaum zu übertreffen ist. Man kann nicht gleich sagen, woher das berühmte Beispiel stammt:

„Wenn ich sechs Hengste zahlen kann,
Sind ihre Kräfte nicht die meine?
Ich renne zu und bin ein rechter Mann,
Als hätt ich vierundzwanzig Beine.“

Wo steht das? Wer hat es gesagt? Raten Sie mal? Ja, ja, richtig, es ist aus Goethes Faust, Zeile 1824 ff., Studierstube, nach dem Pakt von Faust mit Mephisto.

Wenn es um eine Standard-Antwort geht, die Antwort auf die gestellte Frage auch nicht allzu schwer ist, genügt oft ein Satz. Lässt sich denn dann mit einem Satz schon etwas Unerwartetes zum Ausdruck bringen? Es ist nicht schlecht, dies als eine offene Herausforderung zu verstehen.

Man finde zwei aufeinanderfolgende zweiundzwanzigstellige Zahlen mit geraden Quersummen.

Wie ist es hier mit dem mathematischen Inhalt? Ist er denn in diesem Falle schon zu erkennen? Man könnte darüber mächtig streiten. Aber eines ist doch sicher klar: Wenn wir schon nach etwas, was nicht gerade typisch ist, fragen, dann steckt bestimmt gewiss mehr als nur die reine Wissbegier dahinter. Oder?

Und an solchen Stellen liegt oft der Eingang zu vielen Wissenschaften.

Man zerlege alle Teiler der Zahl 100000 in zwei gleichgroße Mengen mit gleichgroßer Summe der Teiler.

Ist $40 \cdot 66 \cdot 96 + 53 \cdot 83 \cdot 109$ eine Primzahl?

Ist 1 601 603 eine Primzahl?

Ist 1 280 000 401 eine Primzahl?

Man finde eine 7-stellige Zahl, deren Ziffern alle verschieden sind
und die teilbar durch jede dieser Ziffern ist?
Gibt es denn auch eine solche 8-stellige Zahl?

Man kann sagen, dass eine Aufgabe, die sich mit einem Satz umfassen lässt, normalerweise dazu auffordert, dass man etwas entdecken muss. Manches mag da sehr oft recht paradox aussehen oder ganz unmöglich erscheinen – und doch gibt es so etwas. Und umgekehrt: Man fragt etwas scheinbar so Leichtes und Alltägliches und dieses erweist sich als unmöglich.

Man kann mit Recht fragen, wozu soll es gut sein? Wenn wir eine konkrete Aufgabe der Art “Finden einer Zahl mit Eigenschaften” stellen, sollten wir eigentlich stets darüber nachdenken, ob es dem Lösenden wirklich einen Nutzen bringen wird. Wir wollen ihn doch nicht gleich erschrecken oder gar abstoßen, wir wollen auch bestimmt nicht, dass er nach fünfminütigem Probieren sagt, es sei nicht interessant. So sollten wir dem Lösenden am Anfang etwas bieten, was beinahe direkt greifbar, aber doch niemals banal ist.

Zum Beispiel könnten wir die nicht gerade einfache Aufgabe 2 aus dem Bundeswettbewerb Mathematik, 1. Runde Jahrgang 2008, anbieten. Auch hier genügt wiederum ein Satz, also nur einige Wörter, den nicht leicht zu erspürenden Inhalt umfassend auszudrücken.

Man stelle die Zahl 2008 so als Summe natürlicher Zahlen dar, dass die Addition der Kehrwerte der Summanden die Zahl 1 ergibt.

Diese Aufgabe könnte man als eine demokratische Aufgabe bezeichnen, weil sie einerseits in dem so hoch angesehenen Wettbewerb auftaucht und weil sie andererseits jeder normale Schüler, der sich die Zeit dazu nimmt, früher oder später doch erfolgreich bewältigen kann. Wenn er aber ein bisschen Glück hat oder einfach sehr gut ausgeschlafen ist, so kann er gleich beim ersten Versuch die Antwort anbieten. Aber das schafft nicht jeder sofort, auch nicht jeder Zweite und auch nicht jeder Dritte.

Aber manche würden gleich 2008 als zwanzigmal 80 plus zehnmal 40 und dazu noch zweimal 4 darstellen und mit den 32 Kehrwerten von diesen Summanden hätten sie somit ihr Ziel erreicht und die Summe 1 bekommen.

Hier ist es gelungen, den Umstand auszunutzen, dass 2008 eine an das Problem doch ziemlich gut angepasste Zahl ist. Was aber, wenn wir diese letztjährige Jahreszahl 2008 durch 2009 ersetzen und um eine ähnliche Zerlegung bitten würden?

Jetzt gibt es kaum die Möglichkeit, eine solche Zerlegung gleich zu erraten. Aber statt Raten und Probieren kann man jetzt die Kunst demonstrieren, Schichten eines Problems aufzudecken und einen Zugang zur Theorie zu finden. Wir lassen jetzt aus der Zahl 2008 die Nullen aus und bitten zuerst, eine bescheidene Zahl 28 darzustellen. Es ist sehr einfach, weil

$28 = 8 + 8 + 4 + 4 + 4$ und $1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Jetzt könnte man den, der einsteigen will, gleich weiter fragen, wie wäre es denn dann mit einer entsprechenden Darstellung der Zahl

$58 = 2 \cdot 28 + 2$

und gleichzeitig auch mit

$65 = 2 \cdot 28 + 9 = 2 \cdot 28 + 6 + 3$.

Mit diesen drei doch so einfachen Beispielen ist der Zugang zur Lösung solcher Aufgaben schon völlig ausreichend angedeutet.

Jetzt aber, wo wir schon Bescheid wissen, dass ein einziger Satz genügt, um mathematische Fragen zu formulieren, müssten wir auch ganz klar zum Ausdruck bringen, dass ganz und gar nicht jede Frage, die man mit einem Satz umfassen kann, interessant ist. Dann sollte man immer wieder insbesondere aus Respekt vor der Schule und vor der Neugierde von Jugendlichen doch lieber etwas Interessantes, etwas Unerwartetes fragen. Oder in der Frage müsste etwas enthalten sein, das auf eine irgendwie unauffällige Weise interessant und impulsierend wirkt, zum Beispiel wenn etwas auf den ersten Blick völlig unmöglich erscheint.

Wenn wir fragen würden, ob es möglich ist, in einem und demselben Hundert vier solche dreistellige Zahlen zu finden, dass die Summe von allen vier durch drei von diesen Summanden teilbar ist, so würden Sie alle zusammen mit uns dies doch wirklich kaum für möglich halten. Aber so etwas ist möglich – und die genannte Aufgabe hat sogar eine einzige Lösung. Wir würden Ihnen nachdrücklich empfehlen, diese zu entdecken, falls Sie nur über die nötige Zeit dazu verfügen. Sie werden ganz sicher diese einzige Antwort früher oder auch später selbst entdecken, aber nicht blitzschnell und wahrscheinlich auch nicht in zehn Minuten. Sie werden aber die dafür verwendete Zeit nach dem Erfolg kaum oder nie bereuen. Kein Wunder, denn das ist eine aus dem ernsthaften Sankt-Petersburgischen Wettbewerb entnommene Aufgabe.

Dass eine Aufgabe, die weniger als 15 Wörter enthält, auch in einem sehr angesehenen Wettbewerb angeboten werden kann, zeigt auch die Aufgabe 1 der 1. Runde im Bundeswettbewerb Mathematik 2006:

Man finde zwei aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen,
deren Quersummen beide durch 2006 teilbar sind.
Man kann dasselbe auch bezüglich der heurigen Jahreszahl 2009 fragen.

Probieren geht über Studieren.

Wesentliches in der Kürze darstellen zu können, verbindet Mathematik und die Kunst der Poesie. Man könnte mit Recht sagen, dass jeder Inhalt, der sich wirklich nur sehr schwer kürzer fassen lässt, grundsätzlich immer etwas von poetischer Natur in sich birgt.

Es wäre an dieser Stelle sehr interessant zu wissen, wie viele mathematische Gedichte es in den verschiedenen Sprachen gibt. Es scheint, dass gerade auf diesem Gebiet manche Bewegung zu erwarten ist. In der Vergangenheit sind viele Kunstwerke geschaffen worden, heute aber sieht es oft so aus, als ob mathematische Erziehung und poetische Kunst in verschiedenen Ebenen verblieben sind. Dazu gibt es auch psychologische Gründe – was der eine gerne hat, mag der andere nicht leiden. Sogar einfache vernünftige Gedichte über Zahlen gibt es in den mir zugänglichen Sprachen recht wenig oder nicht allzuviele.

Mathematik widerspiegelt vor allem die Vollkommenheit von Inhalt und die Poesie befasst sich oft sehr erfolgreich mit der Perfektion von Form. Die Verbindung von beiden wäre eine sehr schöne und ebenso schwere Aufgabe, eine für die mathematische Ausbildung sich lohnende wichtige Empfehlung. Jegliche Versuche in diese Richtung sind nicht leicht, alleine schon wegen der engen Spezialisierung von heute, aber solche Versuche sind nur zu begrüßen.

An dieser Stelle möchte ich erneut meinen Dank an Bernhard Brockmann aussprechen, der immer wieder mich und meine aus der Ferne in der von mir geliebten deutschen Sprache verfassten Texte betreut.

Stefan-Harald KAUFMANN, Köln

Die Bedeutung des Parameterbegriffs für den Mathematikunterricht – Wissenschaftsorientiertes Übel oder didaktische Notwendigkeit?

„Ein Parameter ist fast das Gleiche wie eine Variable!“ Eine solche Aussage ist oberflächlich betrachtet nicht unbedingt falsch. Es stellt sich jedoch im Hinblick auf eine klare Abgrenzung von Begriffen in der Schulmathematik die Frage, ob und ggf. wie man diese beiden abstrakten und zueinander ähnlichen Objekte unterscheiden kann. In diesem Zusammenhang sollte untersucht werden, ob eine begriffliche Differenzierung im Mathematikunterricht möglich und notwendig oder ob eine Unterscheidung von Parameter und Variable für Schülerinnen und Schüler überflüssig ist.

Zur Erörterung dieser Problematik werden hier eine historische Kurzanalyse und die Verwendung in der Schulmathematik herangezogen.

Historische Kurzanalyse

Entgegen mancher Annahmen ist das Wort „Parameter“ kein „echtes“ griechisches Wort. Der Begriff „Parameter“ ist eine Komposition der beiden griechischen Wörter „para“ und „metron“ und kann frei mit „Nebenmaß“ übersetzt werden. Eingeführt wurde dieser Begriff von dem heute weniger bekannten französischem Mathematiker Claude Mydorge (1585-1647). Mydorges wissenschaftliche Leistung bestand in der Übersetzung und Vereinfachung griechischer Werke, z. B. der Kegelschnittslehre des Apollonios von Perge, in die damalige Gelehrtensprache Latein. Um die Darstellung jedem Gelehrten zugänglich machen zu können, definierte Mydorge zur Vereinfachung der Darstellung eine Reihe neuer an die griechische Sprache angelehnte Begriffe. Der Parameter ist einer dieser neuentworfenen Ausdrücke.

Mit einem Parameter bezeichnete Mydorge den Abstand von Leitlinie und Brennpunkt eines Kegelschnitts[1]. Dieser Abstand nahm aus Mydorges Perspektive die Funktion eines Nebenmaßes für die Schnittkurve eines Kegels mit einer Ebene ein, da der Abstand als Maß den Verlauf der Kurve beeinflusst. Eine Parabel kann beispielsweise in Normalform durch die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

[1] Vgl. Mydorge, C. (1639), S. 3.

beschrieben werden. Der Parameter p beeinflusst die Streckung bzw. Stauchung der Parabel.

Im 17. Jahrhundert begannen einige Mathematiker, beispielsweise Leibniz und Newton, ihre Forschungen zur Untersuchung algebraischer Kurven. Der Parameter als beliebige konstante Größe einer algebraischen Gleichung 2. Grades räumte die Möglichkeit ein, sich nicht mehr auf eine spezielle Gleichung konzentrieren zu müssen, sondern vielmehr ganze Mengen von Gleichungen betrachten zu können. Diese Erkenntnis wurde von Leibniz 1683 zum ersten Mal schriftlich festgehalten[2]. In Anlehnung an Mydorge wird der Parameter aus seiner geometrischen Bedeutung heraus nunmehr auch als ein algebraisch abstraktes Objekt betrachtet, wie man es aus der Schulmathematik von Funktionen- bzw. Kurvenscharen kennt.

Einen weiteren entscheidenden Schritt für die Entwicklung des Parameters vollzog Euler 1748 in seiner „Introductio in analysis infinitorum[3]". Euler löst sich von der bis zu diesem Zeitpunkt üblichen Darstellung einer algebraischen Kurve durch eine algebraische Gleichung, indem er die Koordinaten x und y einer ebenen Kurve durch Funktionen beschreibt, die allesamt von der gleichen Variable abhängig sind. Diese Funktionsvariable wird im Zuge der mathematischen Entwicklung des 19. Jahrhunderts als Parameter bezeichnet. Durch diese Art der Kurvenbeschreibung wird eine Kurve „skaliert". Das bedeutet: Man ist in der Lage Abstände von Punkten auf der Kurve zu erfassen. Von diesem Standpunkt aus betrachtet erscheint es berechtigt die von Euler eingeführte Variable als „Nebenmaß" (Parameter) zu bezeichnen.

Die Verwendung in der Schulmathematik

Der Schwerpunkt der Schulmathematik hat sich in den vergangenen Jahrzenten von wissenschaftsorientierter Strukturmathematik zu realitätsbezogene anwendungsorientierte Mathematik gewandelt. Berücksichtigt man noch die Tatsache, dass die Vorbereitung auf ein Hochschulstudium im Mathematikunterricht durch die Übernahme möglichst vieler fachlicher Begriffe und Strukturen erreicht werden sollte, so erklärt sich das Auftreten fachlicher Begriffe in die Schulmathematik von selbst. In manchen Fällen ist es aus didaktischer Sicht jedoch fraglich, ob eine exakte Übernahme von fachlichen Ausdrücken zweckdienlich ist.

Der Parameterbegriff ist ein Beispiel für eine Bezeichnung, die für schulrelevante fachwissenschaftliche Inhalte in allen Bereichen übernommen wor-

[2] Vgl. Leibniz, Werke Band V (1858), S. 103.
[3] Vgl. Euler, L. (1748), S. 247ff.

den ist. Er taucht in allen Bereichen der Schulmathematik auf, die auf Ideen und Konzepte von Mydorge, Leibniz und Euler zurückgreifen:

- Analysis Sek. I und II, Lineare Algebra: Funktionenscharen und parameterabhängige Matrizen bzw. lineare Gleichungssysteme
- Analytische Geometrie: Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen

Bei Funktionenscharen und parameterabhängigen Objekten wird die Idee von Leibniz bzw. Mydorge aufgegriffen eine ganze Menge von Objekten zu erfassen. Die Vorstellung eines Parameters als Hilfsmittel zur Beschreibung von Mengen kann auf die Gegenstände der analytischen Geometrie im Schulunterricht übertragen werden, wenn man Geraden bzw. Ebenen als Punktmengen auffasst. Dieser Zugang wird wegen seines relativ hohen Abstrahierungsgrades meist nicht gewählt. Aus diesem Grund wird der an Euler angelehnte dynamische Zugang zu Geraden als bewegter Punkt bevorzugt ausgewählt. Bei dieser Vorgehensweise wird ein Punkt (Stützvektor) festgewählt. Dieser Punkte wird dann durch Antragen eines Richtungsvektors verschoben. Der Richtungsvektor kann jede Länge und jede Orientierung annehmen. Folglich ist man in der Lage jeden Punkt auf einer Geraden zu erfassen bzw. zu erreichen.

Der Parameter erscheint in der Mathematik meistens als eine Art untergeordnete Variable. In der Parameterform einer Geraden hingegen nimmt der Parameter die Stellung einer Variablen ein, da er einerseits die einzige unbekannte variierende Größe dieser Darstellungsform ist und andererseits die dynamische Vorstellung, sofern diese von Schülern und Schülerinnen überhaupt erfasst wird, sehr an den Variablenbegriff von Funktionen erinnert.

Von diesem Standpunkt aus betrachtet existieren offenbar Situationen, in denen der Parameter nicht mehr von einer Variablen unterschieden werden kann. Das ist einer der Gründe, weshalb es schwierig bzw. unmöglich ist, den Parameter von einer Variablen exakt abzugrenzen.

Unternimmt man den Versuch, den Parameter didaktisch von einer Variable abzugrenzen, so lässt sich feststellen, dass der Parameter durchgehend bei der Erfassung von Objektmengen verwendet wird. Zur Beschreibung von Mengenbeziehungen wird der Funktionsbegriff benötigt. Das heißt: Aus fachwissenschaftlicher Sicht übernimmt der Parameter die Aufgabe einer Funktionsvariablen. Eine didaktische Abgrenzung von Variable und Parameter kann demnach nur erfolgen, wenn untersucht wird, welche Variablenaspekte[4] von Funktionsvariablen auf einen Parameter zutreffen. Wie sich bereits oben in der historischen Kurzanalyse angedeutet hat, ist die ernüchternde Antwort, dass der Parameter jeden Funktionsvariablenaspekt einnehmen kann.

In der Mathematik nimmt man diese Tatsache zur Kenntnis, sieht gleichzeitig aber kein wirkliches Problem. Der Parameter erscheint als situationsbezogene Variablenbezeichnung, die sich eingebürgert hat und ein elementarer Bestandteil der „Mathematikkultur“ geworden ist. Man ist als Mathematiker intuitiv[5] imstande eine Unbekannte als Parameter oder als Variable einzustufen bzw. anzusehen.

Diese intuitive Kompetenz erfordert sehr viel Erfahrung im Umgang mit Mathematik. Es stellt sich die Frage, ob Schüler nach zehn Jahren Mathematikunterricht ein derartiges Fingerspitzengefühl für begriffliches Abgrenzen in der Mathematik entwickeln können. Aus diesem Grunde sollte die Einführung des Parameterbegriffs als Variablenbezeichnung in bestimmten Zusammenhängen zu Gunsten einer klar strukturierten Begriffsbildung im anwendungsorientierten Mathematikunterricht überdacht werden.

Literatur

Euler, L. (1748). *Introductio in analysis infinitorum Book II, translated by J. D. Blanton (1990).* Berlin/New York: Springer.

Leibniz, J. G. (1683). Compendium quadraturae arithmeticae. *Leibniz Werke, 3. Folge, Band V.* Halle (1858).

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*: mit vielen Beispielaufgaben. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Mydorge, C. (1639). *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti*. Paris.

Walz, G. (2002). *Lexikon der Mathematik Band 4*. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Tietze, U.-P. et al. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1 und 2*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

[4] Vgl. Malle, G. (1993), S. 263ff.

[5] Vgl. Walz, Guido (2002), S. 146.
Als Beispiel wird hier die Funktionenmenge $\sigma(n,z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ angeführt. „Wenngleich diese [Funktionen] formal Funktionen von zwei Variablen sind, so wird man doch „intuitiv“ *n* als Parameter ansehen, der variiert wird, um das Verhalten der (von *z* abhängigen) Funktion σ zu studieren.“

Jörg Erik KINNER, Osnabrück

Kognitive Strukturen mathematisch begabter Kinder

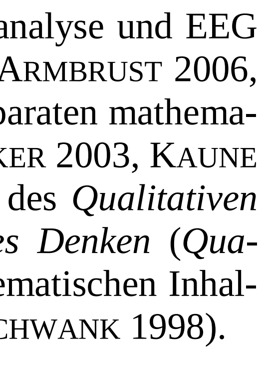
Prädikative und funktionale kognitive Strukturen konzeptualisieren individuelle Stilunterschiede im Kontext mathematischer Problembearbeitungen. Obgleich keine der Strukturen der anderen per se überlegen ist, konnte – zumindest für eine Gruppe von 23 mathematisch potentiell begabten Kindern der Klassen 5 bis 7 –, ein Zusammenhang zwischen der Tendenz zum funktionalen Denken einerseits und spezifischen basalen Fähigkeiten andererseits nachgewiesen werden.

1. Prädikative versus funktionale kognitive Strukturen

Kognitive Strukturen, anders als kognitive Fähigkeiten, fokussieren auf Differenzen in der Art der Informationsverarbeitung. Während kognitive Fähigkeiten individuelle Leistungsunterschiede erfassen, konzeptualisieren kognitive Strukturen Präferenzen in der Art und Weise des Denkens, sie repräsentieren stabile, persönliche Vorlieben für mentale Modelle.

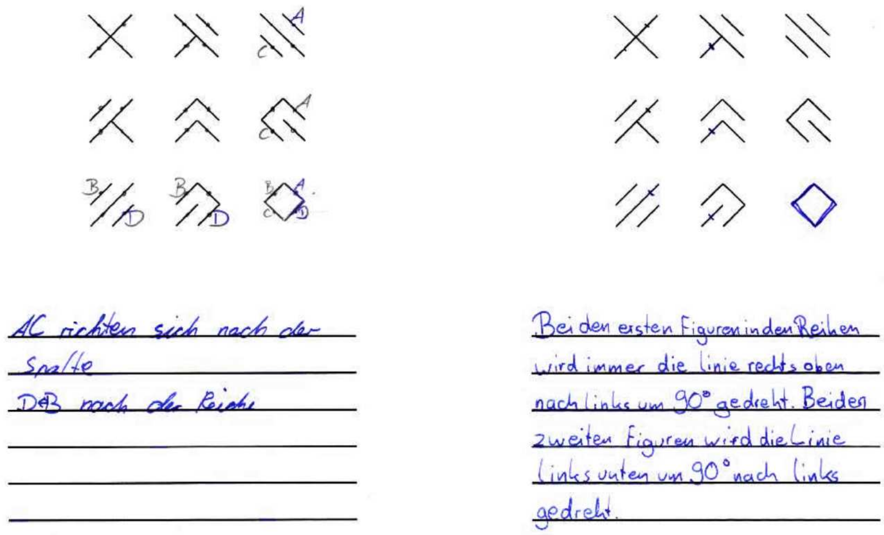
Das Gegensatzpaar prädikativer versus funktionaler Strukturen wurde von SCHWANK als bedeutendes Instrument mathematikdidaktischer Forschung etabliert (SCHWANK 1992). Während sich das funktionale Denken an Handlungen und Wirkungen orientiert, verbunden mit einem Verketten und Verschachteln von Prozessen, fundiert prädikatives Denken auf Relationen zwischen Objekten, verbunden mit dem Herstellen von Struktur und Ordnung (SCHWANK 1999).

Frühere Studien haben nicht nur mittels Blickbewegungsanalyse und EEG die Existenz dieser kognitiven Strukturen nachgewiesen (ARMBRUST 2006, MÖLLE ET AL. 2000), sondern auch deren Relevanz in disparaten mathematischen Kontexten eindrücklich belegt (HEFENDEHL-HEBEKER 2003, KAUNE 2007). Gleichwohl legte SCHWANK mit der Entwicklung des *Qualitativen Diagnoseinstruments für prädikatives versus funktionales Denken* (*QuaDiPF*) die Grundlage, unabhängig von spezifischen mathematischen Inhalten individuelle Denkstrukturen nachweisen zu können (SCHWANK 1998).



QuaDiPF-Aufgaben sind figurale Mustergänzungsaufgaben, bei denen das untere, rechte Element einer 3x3-Matrix sowie eine zum Lösungselement passende Begründung anzugeben sind. Als Beispiel sei Item G3 betrachtet, siehe rechts.

Prädikative wie auch funktionale Ansätze führen hier häufig zu einem „Diamanten", einem auf der Spitze stehenden Quadrat, als Lösungsfigur.

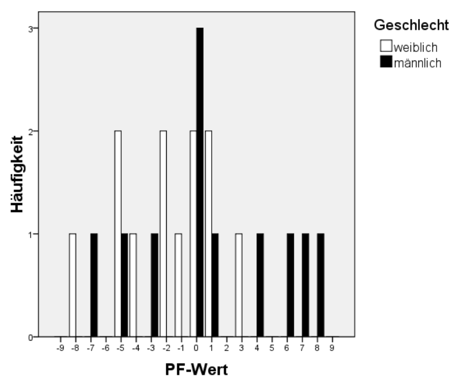


Wie allerdings den abgebildeten Lösungsversuchen zu entnehmen ist, lässt eine Analyse der Begründungen deutliche Unterschiede sichtbar werden. Beide Lösungen stammen von mathematisch potentiell begabten Kindern der Jahrgangsstufe 6. Während auf der linken Seite die Betonung der Invarianz entlang Reihen bzw. Spalten eine prädikative Sichtweise indiziert, ist auf der rechten Seite die vornehmliche Orientierung an Handlungen (in diesem Fall: Drehungen) als offenkundig funktional zu identifizieren.

2. Der PF-Wert als Index prädikativen versus funktionalen Denkens

Die Bearbeitung einer einzigen QuaDiPF-Aufgabe erlaubt kein hinreichend zuverlässiges Urteil über die zugrunde liegende kognitive Struktur. Darüber hinaus ist eine graduelle Skala, die etwa eine sehr stark ausgeprägte funktionale Struktur von einer nur schwach ausgeprägten zu unterscheiden vermag, auf Grundlage bloß einer Aufgabe schlechthin nicht zu konstruieren.

Aus diesem Grund wurde ein Satz von insgesamt zwölf QuaDiPF-Aufgaben zusammengestellt; acht vielfach bewährten sowie vier neu entwickelten. Je Proband und Aufgabe findet eine Beurteilung der Bearbeitung als *prädikativ orientiert* (Punktwert -1), *funktional orientiert* (Punktwert +1) oder *inkonklusiv* (Punktwert 0) statt (bei willkürlich festgelegtem Vorzeichen). Zwölf Aufgaben ergeben bei Addition der Punktwerte schließlich einen *PF-Wert* zwischen -12 und +12; während ein betragsmäßig hoher negativer Wert eine stark ausgeprägte prädikative kognitive Struktur indiziert, weist ein betragsmäßig hoher positiver Wert auf eine stark ausgeprägte funktionale Struktur hin. Ein Wert von 0 ist als indifferent zu werten.



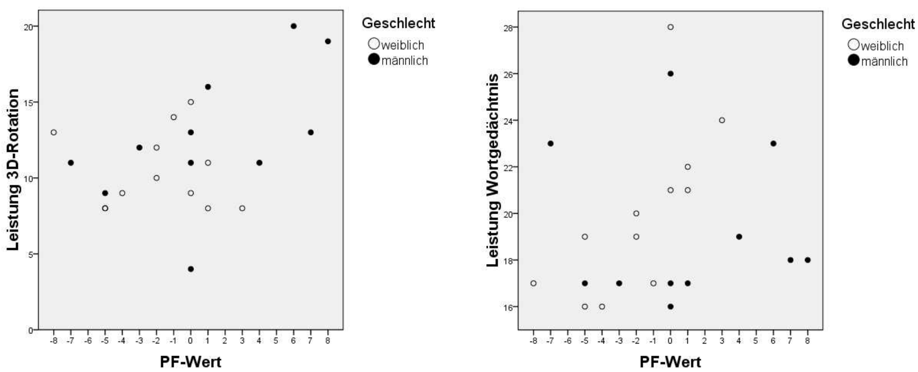
Die PF-Werte der Kinder, 12 Mädchen und 11 Jungen, variieren zwischen -8 und +8. Wie dem vorangehenden Diagramm ferner zu entnehmen ist, tendieren weibliche Probanden eher zum prädikativen Denken, während männliche häufiger eine funktionale Struktur offenbaren. Diese geschlechtsspezifische Verteilung geht wesentlich konform mit früheren Ergebnissen (SCHWANK 1992).

3. Testverfahren zur Erfassung basaler Leistungsdimensionen

In der Erwartung, einen Zusammenhang zwischen dem PF-Wert einerseits und spezifischen basalen Fähigkeiten andererseits nachzuweisen, wurden vier Testformate ausgewählt, die in psychologischen Studien reproduzierbar Geschlechtsunterschiede im Leistungsniveau offenbaren: Während ein Test zur mentalen Rotation dreidimensionaler Körper (nach VANDENBERG & KUSE) wie auch zum mentalen Papierfalten (Aufgabenformat des *Differential Aptitude Test*) im Durchschnitt eine Überlegenheit zugunsten männlicher Probanden ergeben, sind bei einem Test zum Ortsgedächtnis (nach SILVERMAN & EALS) wie auch zum Wortgedächtnis (Aufgabenformat des *Verbalen Lern- und Merkfähigkeitstests*) weibliche Probanden regelmäßig überlegen.

4. Korrelationen zwischen PF-Wert und basalen Leistungsdimensionen

Die Ergebnisse der Kinder im Rahmen der Testbatterie entsprechen tendenziell den Erwartungen. So erreichen beispielsweise die Jungen durchschnittlich höhere Werte im mentalen Rotieren als die Mädchen. Gleichwohl steht vor allem die Korrelation zwischen dem PF-Wert auf der einen Seite und der jeweiligen Testleistung auf der anderen Seite im Fokus des Interesses, vergleiche die exemplarisch abgebildeten Streudiagramme.



Mentale Rotation: Eine Analyse mit SPSS liefert einen Korrelationskoeffizienten nach Pearson von r=.453* (Signifikanz p=.015 einseitig) zwischen dem PF-Wert und der Testleistung beim mentalen Rotieren. Um der Gefahr einer bloßen Scheinkorrelation zu begegnen, wurde das Geschlecht zudem als Kontrollvariable definiert; auch bei partieller Korrelation ergibt sich weiterhin eine praktisch bedeutsame Korrelation von r=.390* (Signifikanz p=.036 einseitig).

Wortgedächtnis: Eine Korrelationsanalyse der Gesamtpopulation liefert kein statistisch signifikantes Ergebnis. Beschränkt auf die Subgruppe der Mädchen allerdings folgt ein Korrelationskoeffizient nach Pearson von beachtlichen r=.691* (Signifikanz p=.013 zweiseitig) zwischen dem PF-Wert und der Testleistung. Die Beschränkung auf die Subgruppe der Jungen führt zu keinem statistisch signifikanten Ergebnis.

Ortsgedächtnis und mentales Papierfalten: Es besteht keine signifikante Korrelation zwischen PF-Wert und jeweiliger Testleistung.

Zumindest bei der dieser Untersuchung zugrunde liegenden Gruppe mathematisch potentiell begabter Kinder konnte also statistisch signifikant nachgewiesen werden, dass eine stärkere Ausprägung zum funktionalen Denken einhergeht mit einer gesteigerten Fähigkeit, dreidimensionale Körper mental zu rotieren, und, zumindest in der Subgruppe der Mädchen, auch mit einer gesteigerten Leistung im Einsatz des Wortgedächtnisses.

Während eine theoretische Begründung des ersten Befunds naheliegt – mentales Rotieren kann von einer handlungsorientierten, funktionalen Sichtweise profitieren –, erfordert das Ergebnis zum Wortgedächtnis weitere Studien. Vornehmlich aber scheint es geboten, die erhaltenen Resultate zum Rotieren wie auch zum Wortgedächtnis bei mathematisch weniger begabten Probanden zu validieren; eine Verallgemeinerung scheint denkbar.

Literatur

Armbrust, S. *Die Werkzeuge „CoDyLa“ und „QuaDiPF-Eye“ zur Untersuchung funktionalen / prädikativen Denkens sowie ihre empirische Erprobung.* Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V., Osnabrück, 2006.

Hefendehl-Hebeker, L. Didaktik der Mathematik als Wissenschaft – Aufgaben, Chancen, Profile. In *Jahresbericht der DMV 105-1 (2003),* S. 3-29.

Kaune, C. „Der denkt irgendwie anders als ich“ – Spuren kognitiver Strukturen in Schüleräußerungen. In *Praxis der Mathematik in der Schule 15 (2007),* S. 23-29.

Mölle, M., Schwank, I., Marshall, L., Klöhn, A., Born, J. Dimensional complexity and power spectral measures of the EEG during functional versus predicative problem solving. In *Brain and Cognition 44-3 (2000),* S. 547-563.

Schwank, I. *Kognitive Strukturen algorithmischen Denkens*. Osnabrück, 1992.

Schwank, I. *Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken – Testheft Version C.* Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V., Osnabrück, 1998.

Schwank, I. On predicative versus functional cognitive structures. In *European research in mathematics education I.II, S. 84-96.* Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V., Osnabrück, 1999.

Sabine KLIEMANN, Essen

Die Welt durch die mathematische Brille betrachtet – ein Forder-Förder-Projekt in der 6. Jahrgangsstufe

„Einschneidende gesellschaftliche Veränderungen, fortentwickelte Sichtweisen von Mathematikunterricht und die Herausforderung durch neue Technologien drängen danach, tradierte Unterrichtsformen neu zu überdenken. Die Unterrichtspraxis bedarf angesichts dieser Umbruchsituation greifbarer Anregungen und Vorbilder, die z. B. exemplarisch zeigen, wie man die Eigeninitiative der Schüler/innen stärken und zugleich die notwendigen fachlichen Orientierungen bereit stellen kann, um auf diese Weise in einem dynamischen Wechselspiel zwischen Anleitung und Selbststeuerung den Erwerb flexibel nutzbaren Wissens anzustoßen und dabei die neuen Medien sinnvoll zu integrieren und nutzen." (Hefendehl-Hebecker, 2007)

1. Projektbeschreibung

Im Sinne des Enrichment-Projektes von Renzulli und Reis (2001) geht es darum, durch Anknüpfung an persönliche Interessen und Begabungen mathematische Kompetenzen zu fördern. Alle Schülerinnen und Schüler einer sechsten Jahrgangsstufe erarbeiten innerhalb eines Schulhalbjahres selbständig (in Einzel- und Partnerarbeit) zu frei gewählten Themenstellungen Objekte/Präsentationen für eine Ausstellung, bei denen sie insbesondere die (Alltags-)Mathematik in den Blick nehmen. Beliebte Themen sind z.B. Sportarten, Lieblingstiere, technische Themen, Hobbys, besondere Orte und Gebäude. Die mathematischen Schwerpunkte liegen meist in den Bereichen „Daten" oder „Geometrie".

Das selbständige Arbeiten wird durch Projektgruppenbetreuer (Fachlehrkräfte und Studierende) methodisch unterstützt. Diese begleiten Kindergruppen mit gleichen oder ähnlichen Themenstellungen und geben Hilfe zur Selbsthilfe (s. auch Götze, 2007), indem sie die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe eines Projekt-Leitfadens methodisch anleiten.

Zusätzlich wird die selbstständige Erarbeitung durch verschiedene eigens für das Projekt erstellte Materialien unterstützt:

- Selbstlernmaterialien zu mathematischen Inhalten und Werkzeugen (z.B. zum Umgang mit und zur Auswertung von Daten, zu geometrischen Berechnungen, zum Schätzen von Größen, ...)
- Selbstlernmaterialien zu projektbezogenen Fähigkeiten (z.B. Daten auswerten mit dem PC, Recherchieren im Internet, …)

- Exemplarische Beispiele zu Präsentationen (z.B. Powerpointpräsentationen „Mein schöner Garten“, „Die ICEs der deutschen Bahn“, verschiede Plakate voriger Durchgänge, Mappen, ...)

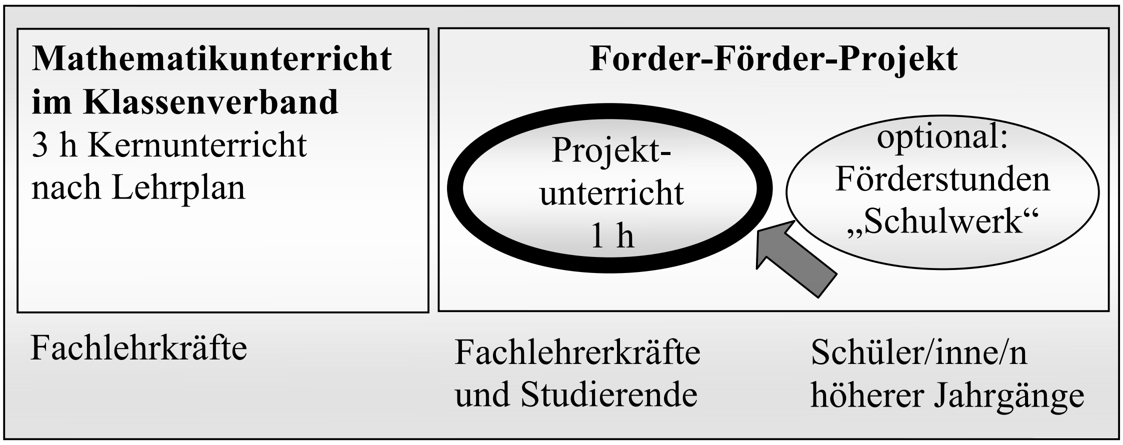
Begleitend führen die Schülerinnen und Schüler ein Talentportfolio, in dem sie Lern- und Arbeitsprozesse schriftlich festhalten.

2. Einbettung des Projekts ins Schulkonzept und den Fachunterricht

Innerhalb des von der Schule angelegten Projekts „E.i.f.e.r.“ (Erarbeitung eines individuellen Förder- und Entwicklungsrahmens) erhält jedes Hauptfach und die zweite Fremdsprache in der Orientierungsstufe einmalig in einem Schulhalbjahr eine Zusatzstunde zur Förderung und Forderung:

1. Schulhalbjahr Klasse 5 – Englisch
2. Schulhalbjahr Klasse 5 – Deutsch
1. Schulhalbjahr Klasse 6 – Mathematik
2. Schulhalbjahr Klasse 6 – 2. Fremdsprache

Diese Zusatzstunde umfasst eine Zeitstunde und verläuft parallel zum Fachunterricht im Klassenverband. Das Forder-Förder-Projekt in Mathematik teilt sich in Projektstunden und optionale Förderstunden, deren Bedarf unter anderem durch eine Lernstandsermittlung zu Beginn des Projekts ermittelt wird (Kliemann, 2008). Während im Projekt-Unterricht alle Schüler/innen auf der Grundlage ihrer vorhandenen Kompetenzen zu einem selbst gewählten Projekt-Thema passende mathematische Inhalte - auch bis dahin unbekannte - erarbeiten, richtet sich der Förder-Unterricht nur an die Schüler/innen, die mathematische Defizite dort aufarbeiten.



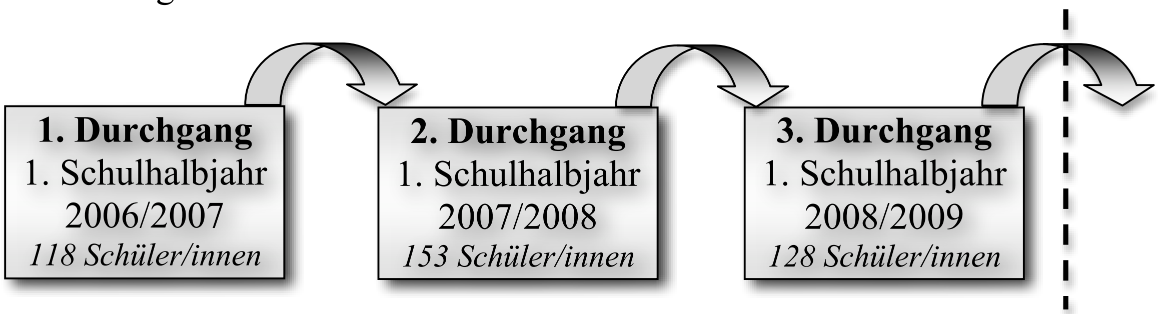
3. Intentionen

Anhand des Projekts soll erkundet werden, ob durch die längerfristige Verknüpfung eines außermathematischen Interessensgebietes mit Mathematik in einem Schulhalbjahr mathematische Kompetenzen gefördert werden.

Gleichzeitig soll erarbeitet werden, welche Hilfestellungen und Materialien die Schülerinnen und Schüler benötigen, um selbständig mathematische Bezüge in ihren Themen zu finden und mathematische Inhalte zu erarbeiten.

4. Untersuchungsdesign und Erhebungsistrumente

Die systematische Untersuchung erfolgte im Rahmen von Entwicklungsforschung in drei aufeinander folgenden Zyklen mit dem Ziel, durch die Erkenntnisse und Konsequenzen aus jedem Durchgang eine Änderung und damit Verbesserung des Lehrens und Lernens im folgenden Durchgang zu beabsichtigen.



(Ab 2009 wird das Projekt auf der Basis der erarbeiteten Methoden und Materialien durch die Schule selbständig fortgeführt.)

Folgende Erhebungsinstrumente wurden eingesetzt:

Schülerinnen und Schüler	Lehrkräfte und Studierende
▪ Unterrichtsbeobachtungen per Videokamera (qualitativ) ▪ Fragebögen (qualitativ, quantitativ) ▪ Interviews (qualitativ) ▪ Lernstandsermittlungen zu Beginn und Ende des Halbjahrs (qualitativ, quantitativ)	▪ Team- und Auswertungsgespräche (qualitativ) ▪ Fragebögen (qualitativ, quantitativ) ▪ Beobachtungen/Feldnotizen (qualitativ)

5. Einige Eindrücke

Insgesamt herrscht eine hohe Zufriedenheit bzgl. des Projektes:

Die 14 betreuenden **Lehrkräfte und Studierenden** des letzten Durchgangs gaben an, mit dem Projekt zufrieden zu sein.

Der einzige Kritikpunkt einer Betreuerin, die nur in der Anfangsphase dabei war, lautete „Die Anfangsphase war zu lang! Die Schüler/innen waren so motiviert, dass sie sofort anfangen wollten!“

Projektphasen wurden als **gut** angesehen, wenn

- die Schüler/innen eigene Ideen zu mathematischen Inhalten zielstrebig, systematisch, strukturiert und planvoll umsetzten und dabei
- selbständig und konzentriert arbeiteten.
- Voraussetzung dafür war, dass die Schüler/innen über genügend Material verfügten.

Projektphasen wurden als **weniger gut** angesehen, wenn

- die Schüler/innen nicht strukturiert geplant hatten oder meinten, ihre Arbeit sei fertig, auch wenn es noch Verbesserungsmöglichkeiten gab,
- Rechen- bzw. Lösungswege nicht klar waren, die Schüler/innen keine Ideen mehr oder den Focus Mathematik verloren hatten, die Projektgruppenbetreuer/innen stark eingreifen mussten,
- zu wenig Material zum Thema vorlag.

Die **Leistungen** der meisten Schüler/innen im Projektunterricht wurden als „ganz gut“ beurteilt (Skala: hervorragend 12,5%, ganz gut 75%, nicht so gut 12,5%, eher schlecht 0%). Ein „vorsichtiger“ Vergleich der Projektnoten mit den letzten Zeugnisnoten in Mathematik ergab, dass sich die Jungen im Projekt im Durchschnitt um eine halbe Notenstufe verbessern konnten, während die Mädchen im Durchschnitt die gleiche Note hatten. Die Qualität der Präsentationen und Talentportfolios konnte von Durchgang zu Durchgang gesteigert werden.

Auch die **Schüler/innen** zeigten eine hohe Zufriedenheit.

So äußerte z.B. die Mehrheit der Schüler/innen, dass sie im Projektunterricht genauso viel (vor Projektbeginn 46% / mitten im Projekt 59% / nach Projektdurchführung 69%) oder sogar mehr (28% / 15% / 24%) als im normalen Mathematikunterricht lerne. Zum Schluss des Projekts waren nur 7% der Schüler/innen der Meinung, weniger gelernt zu haben.

Der Projektunterricht machte den meisten Schüler/inne/n mehr (67% / 64% / 72%) Spaß als der normale Mathematikunterricht, manchen aber auch genauso viel (22% / 27% / 23%) oder weniger (11% / 9% / 5%).

Literatur

Götze, Daniela (2007): Mathematische Gespräche unter Kindern, franzbecker Hildesheim, Berlin

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2008), in: Schriftenreihe des ZLB. Fachdidaktische Forschung. Empirische Lehr-Lern-Forschung, Heft 2, Continuum, Essen

Kliemann, Sabine (Hrsg. 2008): Diagnostizieren & Fördern. Mathematik 5./6. Schuljahr, Cornelsen Scriptor, Berlin

Renzulli, Joseph S./Reis, Sally M. (2001): Das schulische Enrichment-Modell. Begabungsförderung ohne Elitebildung. Handbuch und Begleitband. Aarau: Sauerländer

Ulrich KORTENKAMP, Schwäbisch Gmünd & Katrin ROLKA, Köln

„Der Boxplot ist nur von einzelnen Werten abhängig“ – Dateninterpretation durch Computereinsatz schulen

Mit Hilfe von Boxplots lassen sich Datenreihen in aufschlussreicher Form visualisieren. Allerdings sind die Informationen, die in der grafischen Darstellung als Boxplot übermittelt werden, auf gewisse Aspekte beschränkt. Bakker, Biehler und Konold (2004) stellen beispielsweise fest, dass der Umgang mit und das Verständnis von Boxplots insbesondere für jüngere Schülerinnen und Schüler mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verbunden ist. Ziel unserer Arbeit ist es nicht, dass die Schülerinnen und Schüler Boxplots besser oder einfacher erstellen können. Durch die Vereinfachung der Erstellung von Boxplots mit Hilfe eines Applets[1] und die darauf abgestimmten Übungen sollen die Schülerinnen und Schüler vielmehr in die Lage versetzt werden, Boxplots zu *interpretieren* und dadurch Informationen über die Verteilung der zugrunde liegenden Datenmenge erschließen zu können.

1. Theoretischer Hintergrund

Die Strukturierung und Veranschaulichung numerischer Daten mit Hilfe von Boxplots basiert auf den folgenden fünf Werten: Minimum, unteres Quartil, Median, oberes Quartil und Maximum. Als Beispiel werden die Körpergrößen (in cm) von zwölf Jugendlichen aus einer 9. Klasse betrachtet. Die Daten sind bereits aufsteigend sortiert und die für die Erstellung eines Boxplots wichtigen Werte markiert:

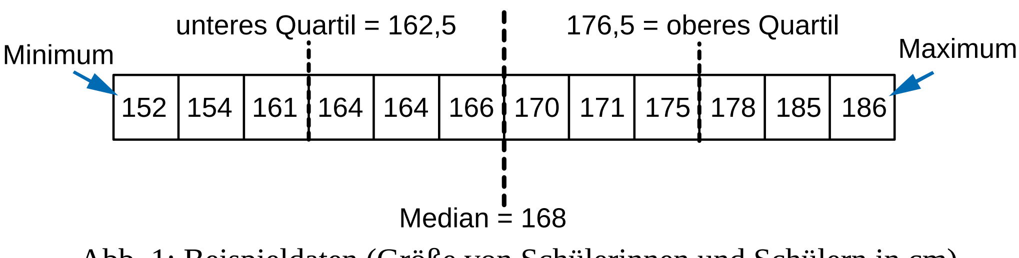


Abb. 1: Beispieldaten (Größe von Schülerinnen und Schülern in cm)

Uneinheitlichkeiten bei der Bestimmung der Quartile sowie eine Möglichkeit zur handlungsorientierten Ermittlung derselben finden sich in Kortenkamp und Rolka (erscheint).

---

[1] http://kortenkamps.net/material/stochastik/Boxplot.html

Zur Erstellung eines Boxplots wird ein Rechteck – eine Box – gezeichnet, das sich vom unteren Quartil bis zum oberen Quartil erstreckt. In diese Box wird der Median eingezeichnet. Außen an die Box werden so genannte „Antennen“ gezeichnet. Sie reichen einmal vom unteren Ende der Box bis zum kleinsten Wert und einmal vom oberen Ende der Box bis zum größten Wert. Für die oben aufgelisteten Körpergrößen der zwölf Jugendlichen ergibt sich der Boxplot wie in Abbildung 2.

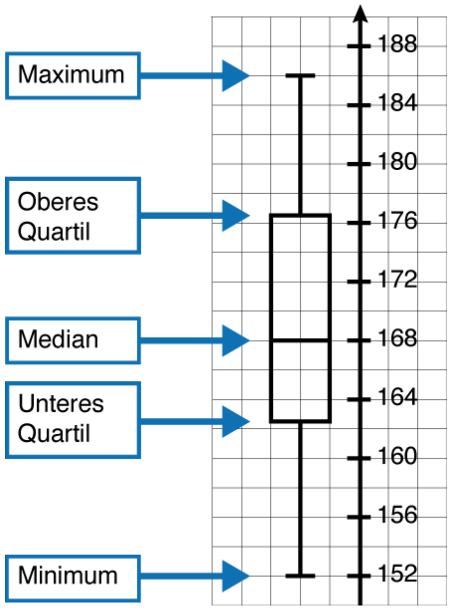


Abb. 2: Boxplot

Einerseits veranschaulichen Boxplots in kompakter und beeindruckender Weise die Mitte und Streuung von Verteilungen und sind daher besonders geeignet, wenn Daten verglichen werden, die experimentell erhoben oder aus stochastischen Prozessen gewonnen wurden (z.B. Biehler, 2007). Andererseits beinhalten Boxplots lediglich eine aggregierte Sicht auf die Daten, so dass – bis auf die zur Konstruktion verwendeten fünf Kennzahlen – individuelle Werte der ursprünglichen Datenreihe nicht mehr ersichtlich sind. Ein weiteres Problem ergibt sich daraus, dass – im Vergleich zu anderen grafischen Darstellung wie Histogrammen – in der Box stets die Hälfte aller Datenwerte liegt, und die Größe der Box somit nicht die Anzahl, sondern die Streuung der Werte beschreibt, und eine *kleinere* Box also eine *höhere* Dichte der Werte bedeutet.

Der Schritt zur Interpretation, das „Interpretieren von Daten in verschiedenen Darstellungsformen“ wird explizit in Rahmenplänen gefordert, z.B. im Bildungsplan für die Realschule 2004 des Landes Baden-Württemberg oder auch in den Bildungsstandards der KMK (2004). Üblicherweise muss dazu der gesamte Weg der Datenverarbeitung gegangen werden (siehe dazu den „Datenkreislauf“ in Kortenkamp und Rolka, erscheint), wobei die Daten nicht mehr in ihren ursprünglichen Kontext eingebettet sind. Unsere Untersuchung basiert darauf, die Arbeit mit „rohen“ Daten in einer Form zu gestalten, dass die Schülerinnen und Schüler in einfacher Weise viele Visualisierungen zu verschiedenen Daten erhalten. Zudem sollen sie diese gezielt verändern können, um den Effekt der Veränderung unmittelbar und simultan in mehreren Darstellungen zu erleben. Diese Arbeit auf der zunächst rein mathematischen Ebene soll ein besseres Verständnis der Visualisierungsform „Boxplot“ erreichen und damit indirekt die Interpretationsfähigkeit stärken.

2. Empirische Studie und ausgewählte Ergebnisse

Aufgaben und Applet: Aufgrund der oben erwähnten Schwierigkeiten mit Boxplots wurden Aufgaben erstellt, die den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit geben, mit Hilfe eines Applets sowohl Möglichkeiten als auch Grenzen von Boxplots zu erforschen. Im Applet können die Schülerinnen und Schüler beispielsweise Werte verändern, hinzufügen oder entfernen. Da es nach Bakker, Biehler und Konold (2004) für Schülerinnen und Schüler schwierig ist, die einzelnen Werte in der Boxplotdarstellung nicht mehr identifizieren zu können, wurde das Applet so konstruiert, dass es über eine simultane, multiple Repräsentation den Blick auf die Datenreihe sowohl in symbolischer Form (Werte) als auch in ikonischer Form (Datenpunkte) zulässt. Bei einer geordneten Datenreihe (Rangliste) wird darüber hinaus im Applet automatisch der dazugehörige Boxplot samt einer Zuordnung zu den Daten eingeblendet:

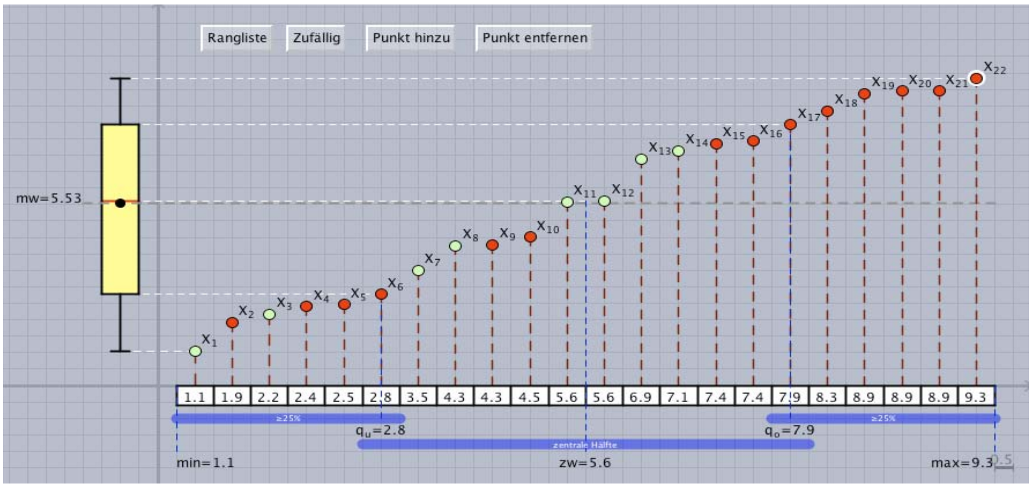


Abb. 3: Das Boxplot-Applet

Untersuchungspersonen und -methoden: Das Applet wurde in einer Realschule (9. Klasse) in Baden-Württemberg im Rahmen einer Unterrichtsstunde (45 Min.) im Computerraum der Schule eingesetzt. Die Schülerinnen und Schüler kannten Boxplots bereits aus der 8. Klasse, hatten aber diese zuvor noch nicht mit dem Computer erstellt oder mit dem Applet gearbeitet. Sie bekamen zusätzlich zum elektronischen Material ein Informationsblatt mit der Wiederholung der Grundlagen zu Boxplots, ein Aufgabenblatt zur Arbeit in Zweiergruppen mit dem Applet, und drei Interpretationsaufgaben, die unabhängig vom Applet zu bearbeiten waren.

In Klasse 11 einer Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen wurde das Applet im Rahmen von Interviews mit drei Schülerinnen und Schülern eingesetzt. Vorab erhielten sie ebenfalls das Informationsblatt zur Wiederholung der Grundlagen zu Boxplots. Im Anschluss an die Interviews beantworteten die Schülerinnen und Schüler schriftlich Interpretationsaufgaben zu Boxplots.

Ausgewählte Ergebnisse: Hier kann leider lediglich ein Zitat eines Elftklässlers aus der individuellen Arbeit mit dem Applet präsentiert werden. Am Ende des Interviews wird der Schüler nach einer Zusammenfassung seiner Einsichten gefragt und bezieht sich noch einmal auf die erste Aufgabe, bei der nur das arithmetische Mittel verändert werden sollte:

> „Ja also einmal, dass der Boxplot halt nur so von einzelnen Werten abhängig ist. Also hier bei 5 Punkten, wirklich von diesen 5 Punkten genau und bei 9 Punkten liegen dazwischen halt noch mehr Punkte, die eh keinen Einfluss darauf haben. Die kann man halt verändern wie man will, ohne dass sich der Boxplot verändert. Dann verändert sich halt nur der Mittelwert."

Der Schüler hat demnach herausgefunden, dass sich ab einer genügend großen Anzahl von Werten zwischen den Quartilen und dem Median ebenfalls Werte befinden, die keinen Einfluss auf die Boxplotdarstellung haben und dementsprechend in gewissen Grenzen verändert werden können. Auch bei den Interpretationsaufgaben zeigte dieser Schüler viel versprechende Ansätze.

3. Fazit

Das Boxplot-Applet scheint gut geeignet zu sein, die Arbeit mit dieser Visualisierungsform im Unterricht zu vereinfachen. Wir können aber über die tatsächlichen Auswirkungen auf die Interpretationsfähigkeiten erst wenig aussagen. Aus den bisherigen Voruntersuchungen wird klar, dass die tatsächlich vorhandenen Stärken von Boxplots nicht immer ausgenutzt werden, aber wenigstens deren beschränkte Aussagefähigkeit für kleine Datenreihen erkannt wird. In den Interviews wurde dennoch deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe des Applets die Datenreihen besser beschreiben und erklären konnten.

Literatur

Bakker, A., Biehler, R. & Konold, C. (2004): Should young students learn about box plots? *Curricular Development in Statistics Education,* Sweden, 163-173.

Biehler, R. (2007): Denken in Verteilungen – Vergleichen von Verteilungen. *Mathematikunterricht, 53*(3), 3-11.

Kortenkamp, U. & Rolka, K. (erscheint). Using technology in the teaching and learning of box plots. In *Proceedings of CERME 6, Group 7: Technologies and resources in mathematical education*, Lyon 2009.

KMK (Hrsg.) (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4. 12. 2003*. München: Wolters Kluwer.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2004): *Bildungsplan 2004 Realschule*. URL: http://www.bildungsstandards-bw.de [Zugriff: 30.03.2009].

Mathias KREBS & Matthias LUDWIG, Weingarten

Erste Erfahrungen beim Mathematiklernen mit Wikis

Bildung muss sich mehr zu einem lebenslangen Prozess entwickeln. Geeignete E-Learning-Szenarien bieten diesbezüglich besondere Chancen. Dieser Artikel berichtet über ersten Erfahrungen an der PH Weingarten mit dem Einsatz eines Wikis in der Lehramtsausbildung. Das Wiki wurde von Studenten zur Durchführung mathematischer Projekte vorlesungsbegleitend eingesetzt und diente zur Unterstützung des gemeinsamen Lernens.

Lernen mit Wikis

Wikis besitzen große Potentiale; dies ist anhand der Online-Enzyklopädie Wikipedia ersichtlich: Menschen schreiben gemeinsam an Artikeln und diskutieren über diese Inhalte. Die Eigenschaften von Wikis sprechen für den Einsatz von Wikis zum Lernen (vlg. Klampfer 2005, Himpsl 2007). Möglichkeiten für das Lernen von Mathematik zeigt die Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet e.V. (http://wiki.zum.de/Mathematik-digital).

Aufbau und Ablauf der Lehrveranstaltung

Die Vorlesung „Projekte und Modellieren im Mathematikunterricht" fand im Wintersemester 08/09 an der Pädagogischen Hochschule Weingarten statt und wurde von 40 Lehramtsstudenten ab dem 5. Semester besucht.

Neben theoretischen Inhalten zur Projektarbeit und Modellbildung wurde großer Wert auf die Praxis gelegt: begleitend zur Veranstaltung hatten sich die teilnehmenden Studierenden in die „Schülerrolle" zu begeben und im Team ein mathematisches Projekt durchzuführen und abschließend ihre Projektergebnisse zu präsentieren. Als besondere Rahmenbedingung war die Vorgabe, für die Arbeit am Projekt ein Wiki zu verwenden.

Zur Durchführung der Projekte wurden zunächst einzelne Projektgruppen mit einer Größe von 3-6 Studierenden gebildet. Projektthemen waren unter anderem: Goldener Schnitt, Körper, Symmetrie, Lotto, Vermessungstechnik, Parabeln in der Umwelt. Nach einer ca. 15-minütige Einführung in das Arbeiten mit dem speziell aufgesetzten Wiki (www.mediawiki.org) hatten die Studierenden 12 Wochen Zeit an ihren Projekten zu arbeiten. Nach der Präsentation der Projektergebnisse wurde die Verwendung des Wikis mittels Fragebogen evaluiert (Rücklauf: 30) und die Wiki-Einträge analysiert.

Projektarbeit mit einem Wiki

Zu Projektbeginn hatte jeder Student einen Wiki-Account, welcher benötigt wurde, um Inhalte im Wiki sich anzeigen sowie erstellen zu können.

Um den Studenten den Einstieg in dem Umgang mit dem Wiki zu erleichtern bestand die erste Aufgabe für alle Studenten darin, auf einer eigenen Benutzerseite einen Text über sich zu schreiben und ein Bild von sich einzufügen. Es stellte sich heraus, dass die Zeitspanne bis jeder Student erstmals im Wiki etwas aktiv bearbeitet hat, sehr lange war (6 Wochen); nach einer Woche waren es gute 50 % und nach darauf folgender Erinnerung durch den Dozenten waren es nach 2 Wochen 75 % der Studenten. Der Einsatz von Web-2.0-Technologie – in vorliegenden Fall die Verwendung eines Wikis – scheint die Studenten demnach nicht per se zu motivieren.

Während den Weihnachtsferien in der 9. Projektwoche, sowie die Woche davor und danach wurden so gut wie keine Artikel im Wiki bearbeitet (siehe Abbildung 1). Zum einen ist dies nicht ganz verwunderlich, da ja Ferien waren, zum anderen ist ein Vorteil eines Wikis aber gerade das orts- und zeitungebundene Arbeiten an gemeinsamen Inhalten.

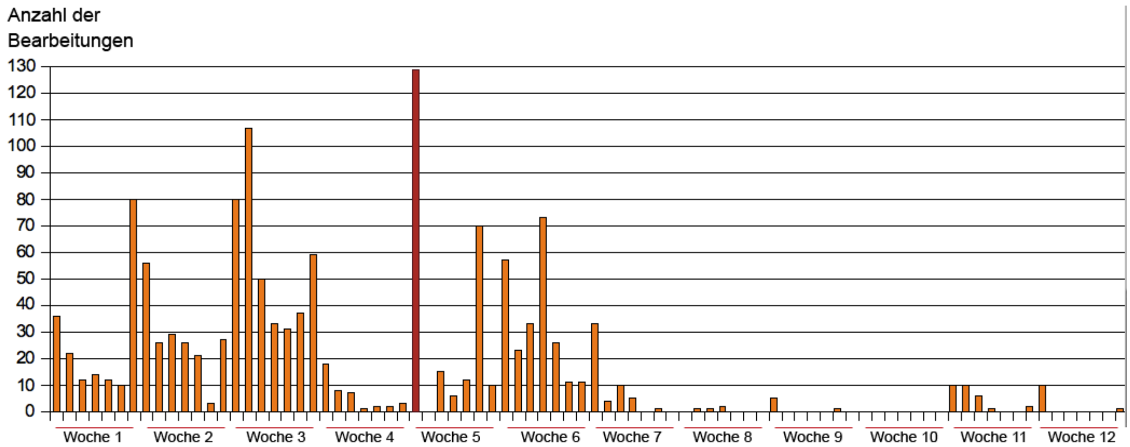


Abbildung 1: Anzahl der bearbeiteten Seiten pro Tag

Anfang der 5. Projektwoche gab es einen Peak: während der Vorlesung arbeiteten die Studenten an ihren Projekten und der Dozent war beratend anwesend. Die persönliche Beratung der einzelnen Projektgruppen während der Vorlesung steigerte das Nutzungsverhalten des Wikis während der Vorlesung erheblich.

Eine Woche vor Projektende wurde im Wiki praktisch nichts mehr gearbeitet, sondern man traf sich physikalisch, also face to face, um die Präsentation vorzubereiten.

Projektverlauf der Projektgruppe „Lotto“

Im Folgenden wird exemplarisch ein durchgeführtes Projekt herausgegriffen und dessen Verlauf beschrieben und für welchen Zweck das Wiki verwendet wurde. Die hier beschriebenen Beobachtungen fanden sich weitestgehend auch bei den anderen Projektgruppen wieder.

Bei dem Projekt Lotto beschäftigten sich 3 Studentinnen (P1, P2, P3) mit grundlegenden Überlegungen und konkreter Umsetzung eines Lottospiels auf einem Schulfest. Die einzelnen Rahmengruppen des Projektes befassten sich z.B. mit der Frage wie hoch Passanten die Wahrscheinlichkeit eines Lottogewinns beim 6 aus 49 einschätzen. Außerdem wurden Tippstrategien, das Lottospielen in anderen Ländern, sowie Berechnungen für unterschiedlichste Lottospiele betrachtet.

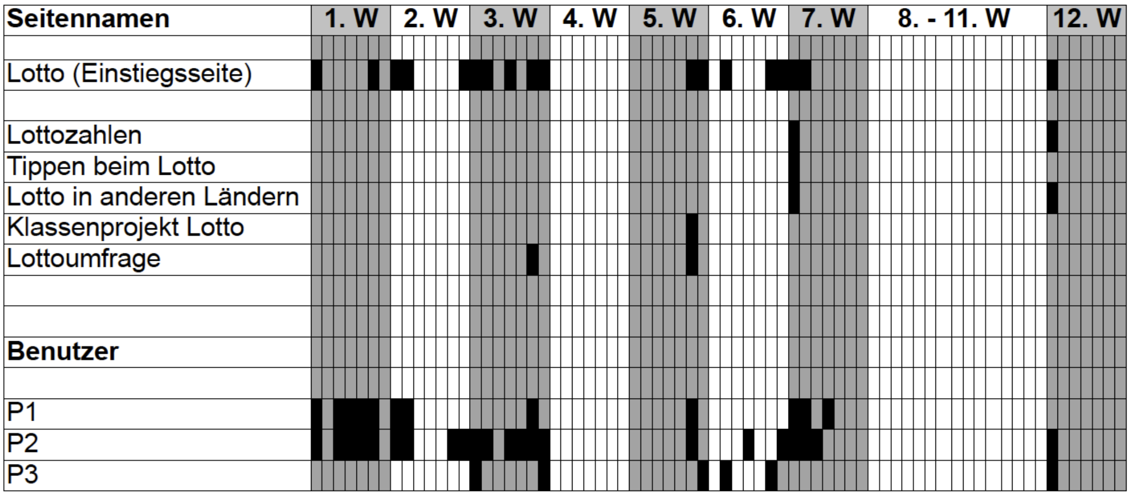


Abbildung 2: Projektverlauf der Projektgruppe Lotto

Im Projektverlauf (siehe Abb. 2) ist dargestellt, wann welche Teammitglieder welche Wiki-Seiten bearbeitet haben. Hierbei ist aber nicht erfasst, wer wie lange für etwas gebraucht hat; also ob bspw. P1 auf seiner Benutzerseite, der Seite des eigene Projekts oder auf der Diskussionsseite eines anderen Projektes gearbeitet hat, und ob die Verweildauer 20 Minuten oder z.B. eine Stunde betragen hat.

Es ist erkennbar, dass die Projektgruppe zunächst eine Einstiegsseite erstellte. Auf Grund eines Kommentars einer anderen Projektgruppe wurde in der 7. Projektwoche die Seitenstruktur geändert und gewisse Themen ausgelagert. Im Zeitraum um die Weihnachtsferien wurde das Wiki nicht aktiv verwendet; dies deckt sich auch mit Abbildung 1. Insgesamt erstellte die Projektgruppe 6 Artikel, wovon auf 2 Artikeln Diskussionsseiten für technische Fragen entstanden. Inhaltliche Diskussionen fanden nicht statt; dieses Phänomen wird auch von Bescherer (Bescherer et al. 2004) berichtet. Technische Fragen wurden von den Projektgruppen zusätzlich auch auf die Benutzerseite des Wiki-Administrators gepostet.

Die im Wiki erstellten Inhalte fanden sich in der abschließenden Projektpräsentation wieder. Inhaltlich wurde das Wiki als Projekttagebuch verwendet, als auch um Arbeitsergebnisse zu dokumentieren. Hierbei wurden u.a. Linksammlungen erstellt, sowie Bilder und Videos eingebunden. Es ist insgesamt festzuhalten, dass Videos und Flash-Dateien kaum von keiner Projektgruppe auf Wikiseiten eingebunden wurden. Dynamische Geometrie-Applets wurden überhaupt nicht eingebunden. Diesbezüglich scheint der Aufwand der eigenen Erstellung für die Studenten zu groß zu sein. Zusätzliche Wiki-Funktionalitäten wie Fußnoten und Formeleditor zur Erzeugung mathematischer Formeln mit LateX wurden benutzt und stellen dadurch sinnvolle Anforderungen an ein Wikisystem für Mathematikprojekte dar. Die Zusammenarbeit der Studenten im Wiki war von einem kooperativen Arbeitsstil geprägt: Studenten teilten die Arbeit in einzelne Bereiche auf und bearbeiteten diese. Kollaboratives Arbeiten, d.h. gemeinsames Erarbeiten und Erstellen von Inhalte, bspw. durch iteratives Überarbeiten der Inhalte durch andere Teammitglieder, fand faktisch nicht statt. Bei der Projektgruppe Lotto beschränkte sich die Kollaboration im Wiki auf die Verbesserung von Rechtschreibfehler.

Fazit

Als Haupteinsatzzweck eines Wikis ist das kollaborative Erstellen und Bearbeiten von Inhalten zu sehen. Kollaboratives Arbeiten und inhaltliche Diskussionen fanden während dieses Projektes im Wiki leider nicht wie gewünscht statt. Es besteht daher weiterer Forschungsbedarf zur Klärung der Frage, ob solch ein Arbeiten das Mathematiklernen an sich begünstigt, oder ob es für das Mathematiklernen hinderlich ist. Ein Wiki als Projektplattform für mathematische Projekte scheint den Autoren dennoch als geeignet: vor allem weil eine kurze Einführung in die Arbeitsweise mit dem Wiki ausreichend ist, der Projektablauf mit Wiki dem von „realen“ Projekten entspricht und jederzeit der Projektstand- und Fortschritt eingesehen werden kann. Zudem wurden die Studierenden mit geeigneten E-Learning-Szenarien vertraut gemacht.

Literatur

Bescherer, Ch., Ludwig, M., Weigand, H-G., Schmidt-Thieme, B. (2004).Von verteiltem zu geteiltem Wissen. In: *mathematica didactica 27 (2004)2*, S.92-107

Himpsl, K. (2007). Wikis im Blended Learning. Ein Werkstattbericht (S. 92 - 126). Boizenburg: Verlag Werner Hülsbusch.

Klampfer, (2005). Wikis in der Schule: Eine Analyse der Potentiale im Lehr-/ Lernprozess. Fernuniversität Hagen. Internet: http://teaching.eduhi.at/alfredklampfer/bachelor-wikis-schule.pdfs

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Promotionskollegs „E-Learning in der Schule als Grundstein für lebenslanges Lernen“, welches vom MWK Baden-Württemberg gefördert wird.

Katja KRÜGER, Frankfurt a. M.

Modellbildungen kritisch einschätzen – Wie lange reichen die Erdgasreserven?

Dank PISA und den KMK-Bildungsstandards für den mittleren Bildungsabschluss findet mathematisches Modellieren zunehmend Beachtung in allen Phasen der Lehrerbildung. Aktuelle Buchveröffentlichungen und Unterrichtsvorschläge zeigen es deutlich. Dabei wird der Modellkritik und dem Vermitteln einer kritischen Einstellung zum Modellbilden bisher wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Warum (und wie) Schüler Grenzen von Mathematisierungen erkennen lernen sollen (und können), werde ich exemplarisch am Thema Erdgasreserven darlegen.

1. Manipulation durch Modellbildung

Seit der „Anwendungswelle" der 1980er Jahre gibt es in der Mathematikdidaktik eine Reihe von Vorschlägen (z.B. Blum, Schupp, Fischer und Malle), wie der Prozesscharakter des Modellbildens in Form eines gegebenenfalls mehrfach zu durchlaufenden Modellbildungskreislaufs veranschaulicht werden kann. Aufgrund der detaillierten Darstellung des Prozessschrittes von der realen Situation zu einem (oder mehreren) mathematischen Modell(en) möchte ich hier an die Visualisierung des Modellbildungskreislaufs von Fischer und Malle sowie an zwei damit verbundene Ziele anwendungsorientierten Mathematikunterrichts erinnern:

*„Der Schüler soll die **Sicherheit und Genauigkeit**, mit denen durch mathematische Modelle Aussagen über die Realität gewonnen werden können, beurteilen können" S. 113 .*

Das kann nur gelingen, wenn man die Datenbeschaffung ernst nimmt und sich Klarheit darüber verschafft, wie genau und zuverlässig die Daten sind, die im mathematischen Modell verarbeitet werden. Die mit Hilfe des Modells gewonnenen Aussagen über die Realität werden außerdem wesentlich von den zu treffenden Annahmen und Vernachlässigungen beeinflusst.

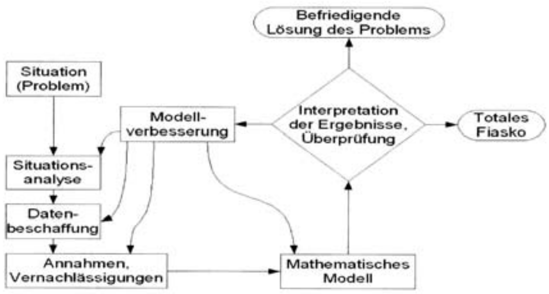


Abb. 1 aus Fischer / Malle 1985, S. 101

*„Der Schüler soll **Grenzen und Gefahren des Mathematisierens** erkennen und eine kritische Einschätzung zur Modellbildung erlangen", S. 114.*

Warum ist das eigentlich so wichtig? Fischer und Malle wiesen auf die Gefahr der Manipulation durch Modellbildungen hin, der viele Menschen auch heute noch hilflos gegenüber stehen:

„In den Massenmedien werden beinahe täglich Aussagen gemacht, die aufgrund irgendwelcher mathematischer Modelle erhalten wurden, etwa Aussagen über Bevölkerungswachstum, Rohstoffressourcen, Steuerprogression, Lohnerhöhung, Preisindex, Wahlauswertung usw. Man muß leider konstatieren, dass mit solchen Aussagen häufig manipuliert wird“, S.111.

Daher sollte man sich beim Modellbilden auch über Zwecke und Interessen informieren. Wie durch Nutzungsabsichten Auswahl und Aufbau eines mathematischen Modells beeinflusst werden können, soll an einem aktuellen Beispiel zum Thema Erdgasreserven gezeigt werden. Energiekonzerne, Wirtschaftsverbände, politische Organisationen und Parteien möchten wissen, wie lange die weltweiten Erdgasreserven reichen werden, und dabei spielen ganz unterschiedliche Interessen mit, gehe es um die Förderung fossiler Energiequellen, um erneuerbare Energien, um Verteilungsfragen...

2. Erdgasreserven – Datenbeschaffung ernst nehmen

Wie lassen sich die Erdgasreserven und deren Entwicklung mathematisch modellieren? Internetrecherchen bringen vielfältige Informationen zu den Stichworten „Erdgasreserven“ und „Reichweite von Erdgas“. Die beiden folgenden Quellen sind schnell gefunden und liefern vergleichbare aktuelle Daten: Der (jährlich erscheinende) „Statistical Review of World Energy“ von BP (2008) und eine neuere, vom Bundesamt für Geowissenschaften und Rohstoffe herausgegebene Energiestudie (BGR 2007). Der BP-Review betont in farbigen Graphiken die steigende Entwicklung der so genannten „nachgewiesenen Reserven“ in den letzten 20 Jahren (vgl. Tab. 1).

„Dazu zählen i. A. Mengen, die nach geologischen und ingenieurtechnischen Informationen aller Wahrscheinlichkeit nach aus den heute bekannten Vorkommen und unter den derzeitigen wirtschaftlichen und technischen Bedingungen künftig gefördert werden können“(BP 2008, S. 22).

Jahr	Erdgasreserven
1987	106,66 T m³
1997	146,46 T m³
2007	177,36 T m³

Tabelle 1

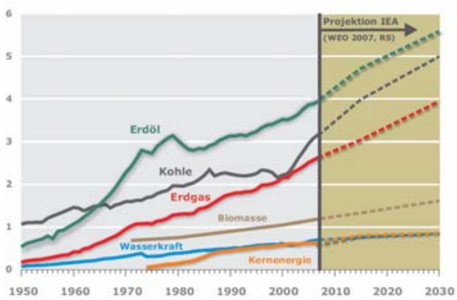
„Aller Wahrscheinlichkeit nach“, das ist vage. Werden solche Wahrscheinlichkeiten tatsächlich bestimmt? Und wie könnte das gehen? Merkwürdig ist – und bei BP nur im Kleingedruckten nachzulesen – , dass dieser Anstieg der Erdgasreserven seit 2004 zu stagnieren scheint. Im Internet finden sich auch kritische Einschätzungen. So weist z.B. die Bundeszentrale für politische Bildung im Kontext „Globalisierung“ unter der Überschrift „Verteilung der nachgewiesenen Reserven“ darauf hin,

„dass die Zahlen der Energiekonzerne, aus denen die Endlichkeit der Ergas-Reserven bereits klar hervorgeht, als zu optimistisch angesehen werden können. Hierfür sei in erster Linie das Problem verantwortlich, dass sich die Höhe der Reserven positiv auf die Bilanzen und damit den Börsenwert der Unternehmen auswirkt und die Versuchung groß sei, im Zweifelsfall von höheren Reservebeständen auszugehen." (www.bpb.de/wissen/)

Die Daten über die weltweiten Erdgasreserven sind also unsicher und ungenau. Dennoch ist nach heutiger Kenntnis das weltweite Gesamtpotenzial an Erdgas beschränkt, weil wir konventionelles Erdgas nur aus einem Millionen Jahre andauernden komplexen biochemischen Prozess gewinnen können.

3. Statische Reichweite – Grenzen des linearen Standardmodells

Die so genannte *„statische Reichweite"* ist der Quotient aus den derzeit bekannten „nachgewiesenen" Erdgasreserven und der gegenwärtigen Förderung, die den weltweiten Verbrauch erfasst (vgl. LBEG 2008, S. 2). Dieser häufig verwendete Zahlenwert gibt an, wann die Erdgasreserven bei weltweit konstantem Verbrauch aufgebraucht sein werden. Das zugrunde liegende Modell der zeitlichen Entwicklung der Erdgasreserven $r(t) = r_0 - v \cdot t$ ist ein lineares Modell, das auf stark vereinfachenden Annahmen aufbaut: alle Erdgasreserven r_0 seien bereits „nachgewiesen" und der jährliche Verbrauch v sei konstant. Für Prognosen taugt dieses Modell offensichtlich nicht, da diese Annahmen über längere Zeiträume nicht realistisch sind.



Hier stellt sich die Frage, warum der weltweite Erdgasverbrauch, der seit über 50 Jahren jährlich nahezu gleichmäßig ansteigt, nicht in einer dynamischen Modellierung der Entwicklung der Erdgasreserven integriert wird?

Abb. 2 aus BGR 2007, S. 8

Aus dem BP-Review 2008 lässt sich entnehmen, dass der Erdgasverbrauch von 1982 bis 2007 um rund 1,5 Billionen auf 3 Billionen m³ angestiegen ist, und sich somit in 25 Jahren nahezu verdoppelt hat. Mit diesen Informationen könnte der jährlich nahezu gleichmäßig steigende Verbrauch v(t) ab 2009 mit einer linearen Funktion modelliert werden:

$$v(t) = 3 + \frac{1{,}5}{25} \cdot t\,.$$

Diese Annahme führt zu einem quadratischen Modell der zeitlichen Entwicklung der Ergasreserven $r(t) = r_0 - v(t) \cdot t$

Abb. 4 zeigt die Funktionsgraphen beider Modelle. Lassen sich die Eingangsdaten mit Schiebereglern variieren, z.B. die Höhe der Erdgasreserven und/oder der Verbrauch, so sieht man die Reichweite sofort an den Funktionsgraphen. Beim Vergleich der Modelle wird deutlich, dass die prognostizierte Reichweite im quadratischen Modell mit nur 35 Jahren wesentlich kürzer ist.

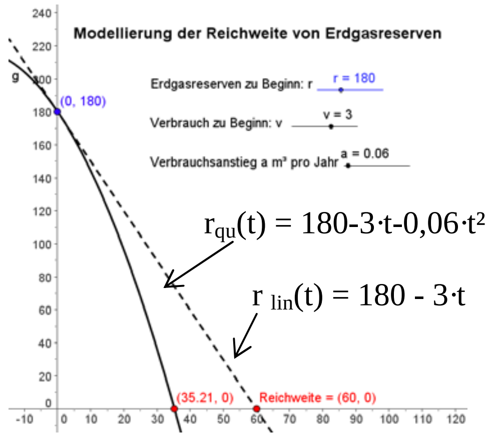


Abb.4

Obwohl das lineare Modell der „statischen“ Reichweite bestenfalls als *„Momentaufnahme und Orientierungsgröße in einem sich dynamisch entwickelnden System“* dienen kann (LBEG 2008, S.2), wird es häufig zur Prognose missbraucht, z.B.: *„Sichere Gasreserven reichen bis in die 70er Jahre des 21. Jahrhunderts“* (www.eon-ruhrgas.com). Ein Energieversorger wie EON hat offenbar kein Interesse daran, die Auswirkungen des steigenden Verbrauchs auf die Verkürzung der Reichweite zu betonen.

Die sorgfältige Auseinandersetzung mit vorgegebenen Modellierungen (z. B. der Reichweite der Erdgasreserven) soll bei Schülern eine konstruktiv-kritische Einstellung gegenüber dem Modellbilden wecken. Die Schwierigkeit steckt dabei weniger in der Verarbeitung des jeweiligen mathematischen Modells, als darin, die zu modellierenden Sachverhalte ernsthaft zu erkunden und sich über die Datenbeschaffung Gedanken zu machen. Keinesfalls darf die Behandlung ernsthafter Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht gewohnheitsmäßig auf einen Nachvollzug oder Variationen linearer Standardmodelle (z. B. der statischen Reichweite) beschränkt werden (vgl. Maaß 2007, 17-21). Dies könnte am Ende sogar mithelfen, weltweite, gesellschaftlich und politisch relevante Probleme auf unverantwortliche Weise zu verharmlosen.

Literatur

Fischer, R. und Malle, G.(1985). *Mensch und Mathematik*. BI-Verlag.

Maaß, K. (2007): *Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die S I*. Berlin: Cornelsen.

BP (2008): *Statistical Review of World Energy*. (Zugriff am 2.2.09 www.deutschebp.de)

Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (2007). *Reserven, Ressourcen und Verfügbarkeit von Energierohstoffen 2007* (Zugriff am 2.2.09 www.bgr.bund.de)

Landesamt für Bergbau, Energie und Geologie in Niedersachsen (2008). *Erdöl- und Erdgasreserven in der BRD am 1.1.2008.* (Zugriff am 2.2.09 http://cdl.niedersachsen .de/blob/images/C45703947_L20.pdf)

Julian KRUMSDORF, Münster

Beispielgebundenes Beweisen

Solange SchülerInnen formale (allgemeingültige) Aussagen noch nicht formell (formalisiert) beweisen können, mag man sie diese beispielgebunden beweisen lassen – in einigen Schulbüchern der Sekundarstufe I werden etwa „beispielgebundene Beweise“ geführt und von den SchülerInnen gefordert. Dabei ist die Rede vom beispielgebundenen Beweisen paradox: Wie kann ein Beweis mit dem Anspruch auf Allgemeingültigkeit an ein Beispiel gebunden sein? In Interviews mit SchülerInnen der Primar- und Sekundarstufe wird untersucht, wie sie ihre deduktiven Schlüsse allmählich von den Besonderheiten der Beispiele lösen. Das beispielgebundene Beweisen erscheint als changierender Prozess zwischen Latenz, subjektiver Realisierung und sprachlicher Manifestation einer allgemeinen Begründung.

1. Forschungsstand

Als eine grundlegende Differenz zwischen verschiedenen Beweisen nennt Hanna (1989) die Unterscheidung zwischen *proofs that prove* und *proofs that explain*, d.h. sie unterscheidet zwischen Beweisen, die eine bestimmte Behauptung verifizieren und Beweisen, die dabei auch erklären, warum eine bestimmte Behauptung gilt. Als Tätigkeit des *proving why* verlange dies im Mathematikunterricht auch das Einbeziehen nicht-formeller Ausdrucksweisen im Beweisen auf Seiten der SchülerInnen.

Um zu analysieren, wie mathematisches Verstehen beim nicht-formellen Beweisen im Mathematikunterricht gefördert werden kann, ist man in der einschlägigen Literatur dazu übergegangen, verschiedene Beweisarten in Abgrenzung zu formellen Beweisdarstellungen zu betrachten. So spricht Neubrand (1990) beim Beweisen in der figuralen Arithmetik von einem *Beweisen durch Hinschauen*, während Wittmann/Müller (1988) das *inhaltlich-anschauliche Beweisen* und Blum/Kirsch (1989) das *präformale Beweisen* diskutieren. Wittmann/Ziegenbalg (2004) betonen das Moment der Versprachlichung in den so genannten *operativen Beweisen*.

Balacheff (1989) nennt das *generic example*, das die Gründe für die Wahrheit einer Behauptung soweit erkennen lässt, dass es als ein charakteristischer Repräsentant für eine ganze Klasse von Beispielen gesehen werden könne. Von Freudenthal (1978) entlehnt ist der Begriff der *paradigmatischen* Begründung, die, an einem ausgewählten Referenzbeispiel geführt, auf weitere Instanzen anwendbar und in diesem Sinne allgemeingültig sei.

2. Forschungsgegenstand

Man kann unter beispielgebundenem Beweisen vordergründig ein induktives Prüfen (Bestätigen) einer behaupteten Aussage verstehen; dabei wird die Richtigkeit der Behauptung nur in einem oder mehreren Beispielen bestätigt – darin kann jedoch auch eine allgemeine Begründung für das, was allen Beispielen gemein ist, gesehen werden. Im Sinne von Oevermann (1979) kann diese allgemeine Begründung dabei als latente Sinnstruktur verstanden werden, die von den SchülerInnen erst noch kognitiv realisiert werden muss und sich ggf. in ihren sprachlichen Äußerungen manifestiert. Wenn den SchülerInnen bewusst wird, dass ihre deduktiven Schlüsse an den Beispielen unabhängig sind von den Besonderheiten der Beispiele, kann man sagen, dass sie einen beispielgebundenen Beweis führen. Manifest wird der beispielgebundene Beweis allerdings erst in seiner Entäußerung, etwa im Diskurs.

Unter Zuhilfenahme argumentativer und logischer Begriffe von Toulmin und Peirce – siehe etwa Schwarzkopf (2000) und Meyer (2007) – kann das beispielgebundene Beweisen schärfer gefasst werden und seine Beziehungen zum induktiven Prüfen einerseits und zum formellen Beweisen andererseits geklärt werden.

3. Empirischer Rahmen

Bisher sind etwa 60 GymnasialschülerInnen und Grundschulkinder zum beispielgebundenen Beweisen herausgefordert und darin interviewt worden. Die hierzu gewählten Behauptungen standen im Zusammenhang mit dem gegensinnigen Verändern bzgl. der Addition, dem Winkelsummensatz im konvexen n-Eck, der Anzahl von Verbindungsstrecken in einem „vollständigen Graphen“, einer Spezialisierung des Umfangswinkelsatz, dem Satz des Thales, den Potenzgesetzen und den Potenzfunktionen. Diese Themen waren für die SchülerInnen in den Interviews in der Regel noch unbekannter Stoff, so dass die SchülerInnen die Behauptung vor ihrer Begründung oft erst noch entdecken und ggf. prüfen mussten.

Es werden halbstandardisierte Einzelinterviews in jeweils einer Schulstunde geführt und auf Video aufgezeichnet. Der Interviewer übernimmt beim Einstieg in das Thema noch die Rolle eines Lehrers, dann aber verstärkt die Rolle eines Interviewers, Mitschülers oder Zweiflers (advocatus diaboli), der Begründungen herauszufordern sucht.

Folgende Fragen sind u.a. von Interesse: Haben die SchülerInnen selbst den Anspruch, über induktive Prüfungen hinaus eine Behauptung zu beweisen? Realisieren die SchülerInnen den latenten (allgemeinen) Beweis an Beispielen? An welchen Indizien kann festgestellt werden, dass SchülerInnen einen beispielgebundenen Beweis führen? Welche Beweisschritte manifestieren sich, welche bleiben latent? Gibt es allgemeine Merkmale von Aufgabenstellungen oder dialogische Mittel der Gesprächsführung durch den Interviewer, die den SchülerInnen das beispielgebundene Beweisen erleichtern? Was kann SchülerInnen davon abhalten, beispielgebunden zu argumentieren?

4. Bisherige empirische Ergebnisse

Die empirische Erfahrung Goldbergs (1992), nach der alle SchülerInnen in einer 7. Klasse durch Arbeit an hinreichend vielen Beispielen beispielgebunden begründen konnten, hat sich bei den Schülerexperimenten weniger bestätigt. Aus der Analyse der Interviews können vielmehr theoretische Erklärungen dafür gewonnen werden, dass viele Beispiele die SchülerInnen gerade vom beispielgebundenen Beweisen abhalten können. Argumentieren SchülerInnen hingegen an bedingt vorstellbaren Beispielen, löst sich ihre Argumentation von konkreten Beispielen tendenziell zum allgemein Vorstellbaren und ggf. Begründbaren ab.

In den jüngeren Jahrgängen scheint das Beweisen noch stark in einen sozialen Rahmen eingebettet zu sein („Erst wenn der Lehrer das sagt, glaub' ich das.") Schließlich tritt das Problem der Versprachlichung allgemein gedachter Zusammenhänge im Rahmen der normalen Sprachentwicklung der SchülerInnen dort auf, wo formelle Sprache fehlt oder nicht vorgegeben ist. Im Vergleich zum formellen Beweisen ist die Beherrschung der mathematischen Fachsprache weniger notwendig, jedoch fällt es einigen Schülern nicht leicht, kreativ und versiert die Umgangssprache beim beispielgebundenen Beweisen zu nutzen.

Bei den bisherigen Schülerexperimenten zeigte sich, dass für die SchülerInnen eine Vorübung im beispielgebundenen Beweisen hilfreich ist, um sie Erfahrungen in dieser besonderen Art des Beweisens sammeln zu lassen. Es konnte ferner beobachtet werden, dass zu viele Hilfsmittel wie Taschenrechner oder Messwerkzeuge dem (beispielgebundenen) Beweisen eher abträglich zu sein scheinen, da die SchülerInnen dann möglicherweise dem induktiven Prüfen verhaftet bleiben. Manche Schüler scheinen ein induktives Vorgehen auch dann schon als ausreichende Begründung der Behauptung anzusehen. Einige SchülerInnen wenden überdies die Behauptung als Regel final an, d.h. die Aufforderung zur Begründung einer Behauptung veranlasst sie dazu, *mit* der Behauptung etwas zu begründen.

Den bisherigen empirischen Beobachtungen nach scheint das beispielgebundene Beweisen eher ein changierender Prozess zu sein, in dem sich die SchülerInnen an der Front ihres Wissens und im Übergang zwischen induktivem Prüfen und formellem Beweisen bewegen. Die Begründungen für einige Beweisschritte können dabei latent bleiben und müssen durch die SchülerInnen nicht kognitiv realisiert werden, während sich andere Beweisschritte mehr oder weniger manifestieren. Es kommt auch vor, dass SchülerInnen während des beispielgebundenen Beweisens oder im Anschluss daran noch zu induktiven Prüfungen im Sinne einer zusätzlichen Bestätigung greifen oder die Grenzen ihrer Verallgemeinerungen erproben.

Literatur

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In Pimm, D. (Hrsg.): *Mathematics, Teachers and Children* (S. 216 - 233). London: Hodder and Stoughton.

Blum, W. & Kirsch, A. (1989): Warum haben nicht-triviale Lösungen von f' = f keine Nullstellen? Beobachten und Bemerkungen zum „inhaltlich-anschaulichen Beweisen" (S. 193 - 209). In Kautschitsch, H. & Metzler, W. (Hrsg.): *Anschauliches Beweisen*, Wien: hpt. [Erweiterte englische Fassung in: Educational Studies in Mathematics 22 (1991), vol. 2, 183 - 203.]

Freudenthal, H. (1978): *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht.* München: Oldenbourg.

Goldberg, E. (1992): Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Ergebnisse - Schwierigkeiten - Möglichkeiten. In *MU – Der Mathematikunterricht, 6*, 33 - 46.

Hanna, G. (1989): Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th International Group for the Psychology of Mathematical Education, vol. 2,* 45 - 51.

Meyer, M. (2007): *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand, M. (1990): *Einführung in die Arithmetik: ein Arbeitsbuch für Studierende des Lehramts.* Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Oevermann, U., Allert, T., Konau, E. & Krambeck, J. (1979): Die Methodologie einer "objektiven Hermeneutik" und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften (S. 352 - 434). In Soeffner, H. (Hrsg.): *Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften*. Stuttgart: Metzler.

Schwarzkopf, R. (2000): *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht – Theoretische Grundlagen und Fallstudien***.** Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. & Müller, G. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? (S. 113 - 145). In Bender, P. (Hrsg.): *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter*. Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. & Ziegenbalg, J. (2004): Sich Zahl und Zahl hochhangeln (1.2). In Müller, G., Steinbring, H., Wittmann, E. (Hrsg.): *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer.

Isabell KUHNKE-LERCH, Regina BRUDER, Darmstadt

Kompetenzmessung in der Lehrerausbildung – Eine Studie zur Beurteilung von Unterrichtsentwürfen

In den letzten Jahren ist die Lehrerbildung auf Grund der Ergebnisse verschiedener Studien wie PISA, IGLU und TIMSS verstärkt in den Fokus wissenschaftlicher Untersuchungen gerückt. So untersuchen beispielsweise die Studien COACTIV, MT21 und TEDS-M das Professionswissen (Krauss et al, 2004) von Mathematiklehrkräften, Referendaren und Mathematikstudierenden. In diesen Forschungsbereich lässt sich die im Folgenden vorgestellte Studie zur Kompetenzentwicklung und Kompetenzmessung in der Lehrerausbildung einordnen. In dieser Studie geht es um die Erfassung spezifischen fachdidaktischen Wissens (Shulman, 1986) bei der Analyse von Unterrichtsentwürfen und der damit verbundenen Entwicklung von mathematikdidaktischen Kompetenzen im Sinne der von DMV, MNU & GDM 2008 formulierten Anforderungen.

1. Ziele der Studie

Ziel der Studie ist die Messung von spezifischen Kompetenzentwicklungen während des Lehramtsstudiums Mathematik für Gymnasien im Kontext von Lernangeboten in relevanten Lehrveranstaltungen in der ersten und zweiten Phase des Lehramtsstudiums. Dies soll durch eine längsschnittliche Untersuchung mit mehreren Messpunkten in der ersten und zweiten Ausbildungsphase umgesetzt werden. Hierbei analysieren die Studierenden bereits zu Beginn ihres Studiums, nach Abschluss eines grundlegenden Didaktikmoduls (in der Regel im 3.Semester), zu den schulpraktischen Studien II und am Ende ihres Studiums sowie im Referendariat drei verschiedene speziell konstruierte Unterrichtsentwürfe. Mithilfe dieser Analysen sollen spezifische fachdidaktische Kompetenzen und individuelle Vorstellungen der Lehramtsstudierenden zum Mathematikunterricht in ihrem Entwicklungsverlauf erfasst werden.

Unterrichtsentwürfe wurden als Analyseobjekt gewählt, da diese die Möglichkeit bieten, Vorstellungen zur Unterrichtsplanung abzubilden und damit sowohl fachwissenschaftliche, als auch fachdidaktische und erziehungswissenschaftliche Aspekte beinhalten. Aus motivationaler Sicht wird erwartet, dass sich die Bereitschaft zur Teilnahme an der Studie durch die Wahl von Unterrichtsentwürfen erhöht, denn diese sind unmittelbar mit dem späteren Berufsalltag verbunden.

Die Studie bietet die Möglichkeit, vor allem intelligentes Wissen über die Planung von Mathematikunterricht zu untersuchen, vgl. dazu die Zielkategorien von Weinert (1999), der zwischen intelligentem Wissen, Handlungskompetenzen und Metakompetenz unterscheidet. Dieses intelligente Wissen ist Voraussetzung für späteren guten Unterricht im Sinne einer notwendigen aber noch nicht hinreichenden Bedingung, vgl. auch die entsprechenden Ergebnisse der COACTIV-Studie (Brunner et al., 2006). Die Studie wird ab dem ersten Semester des Mathematiklehramtsstudiums im Rahmen der Fachdidaktiklehrveranstaltungen durchgeführt, so dass die Studierenden auch die Möglichkeit eines Feedbacks zu ihren Ergebnissen und damit die Chance zu einem weiteren Lernzuwachs haben.

2. Untersuchungsmethode

In der Studie werden drei verschiedene Unterrichtsentwürfe von Mathematiklehramtsstudierenden mithilfe eines Fragebogens analysiert, der nach der Repertory-Grid-Technik (Kelly, 1955) konstruiert ist. Die Studierenden vergleichen hierbei verschiedene Unterrichtsentwürfe miteinander und stellen Merkmale heraus, in denen sich die Unterrichtsentwürfe unterscheiden. Hierbei entstehen sogenannte Grids, welche zur Analyse insbesondere des fachdidaktischen intelligenten Wissens genutzt werden.

Die für die Studie konstruierten Unterrichtsentwürfe unterscheiden sich in sehr vielfältiger Weise sowohl offenkundig als auch subtil voneinander. Hier werden nur einige Beispiele genannt: Unterschiede in der Art des Einstiegs in das Unterrichtsthema, in den gewählten Sozialformen, im Realitätsbezug der eingesetzten Aufgaben, im kognitiven Anspruch an die Lernenden, in der Weite und Tragfähigkeit der entwickelten Orientierungsgrundlage bzw. Zielstellung für die folgenden Stunden, bzgl. Binnendifferenzierung usw. Die Studierenden haben also Gelegenheit, ihr erworbenes Wissen bzw. ihre Vorstellungen in vielfältiger Weise flexibel auf die gegebenen Situationen anzuwenden.

Der Vorteil dieser Untersuchungsmethode besteht darin, dass die Studierenden ihre eigene Sprache verwenden, Anpassungsleistungen vermieden werden und damit die Vorstellungen und Konstrukte über Mathematikunterricht individuell erfassbar gemacht werden. Das Repertory-Grid soll dazu beitragen, folgende Fragen zu beantworten:

- Welche individuellen Vorstellungen und Konstrukte von gutem Mathematikunterricht bilden sich während des Lehramtsstudiums aus?
- Welche Effekte der Kompetenzentwicklung von Lehramtsstudierenden lassen sich anhand der Beurteilung von Unterrichtsentwürfen in Verbindung mit speziellen Lehrveranstaltungen, schulpraktischen Studien und bevorstehenden Abschlussprüfungen feststellen?

3. Das Design der Studie

Die Studierenden werden innerhalb einer fachdidaktischen Lehrveranstaltung schriftlich befragt. Sie analysieren hier in einem Zeitraum von 45 Minuten zwei der drei vorgegebenen Unterrichtsentwürfe zu jeweils dem gleichen Unterrichtsthema. Die Befragung verläuft wie folgt:

Nach der Erfassung von persönlichen Merkmalen wie Studiengang, Semester und bisher besuchten Lehrveranstaltungen, haben die Studierenden die Aufgabe innerhalb von fünf Minuten Merkmale eines gut geplanten Mathematikunterrichts zu nennen. Im Anschluss an dieses Brainstorming erhalten die Studierenden drei verschiedene Unterrichtsentwürfe zu einem identischen Thema, beispielsweise zur Einführung des Sinus eines Winkels am rechtwinkligen Dreieck. Die Studierenden informieren sich über alle drei Entwürfe und wählen nun zwei Unterrichtsentwürfe für die Analyse von Unterschieden aus. Im letzten Teil der Befragung wird eine Merkmalsliste aus den gefundenen Unterschieden und dem anfänglichen Brainstorming erstellt. Mithilfe dieser Liste werden nun die zwei gewählten Unterrichtsentwürfe erneut begutachtet. Hierbei schätzen die Studierenden ein, ob ein gefundenes Merkmal für den jeweiligen Unterrichtsentwurf zutrifft oder nicht.

4. Aktueller Stand der Studie

Die Studie wurde im Februar 2009 mit 65 Studierenden des ersten Semesters, 62 Studierenden des dritten Semesters und 14 Studierenden, die kurz vor ihrer Examensprüfung stehen, durchgeführt. Parallel hierzu wurde die Studie an der University of Technology Sydney, Australien unter der Leitung von Prof. Dr. Anne Prescott durchgeführt. Hier wurden Studierende im Studiengang Master of Education, die zuvor einen fachwissenschaftlichen Bachelor erworben haben, befragt. Auf Grund der unterschiedlichen Organisation des Lehramtsstudiums in Darmstadt und Sydney stellt sich die Frage, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Vorstellungen von Mathematikunterricht bei den jeweiligen Studierenden existieren.

Zurzeit werden die Fragebögen ausgewertet und die Antworten kategorisiert. Zur Untersuchung des fachdidaktischen Wissens spielt die Vernetzung der drei Aufgaben - Brainstorming, Vergleich, Einschätzung der Merkmalsausprägung - eine zentrale Rolle.

Im Brainstorming werden Merkmale guten Unterrichts genannt. Ob diese Merkmale jedoch auch in einer Anwendung in einem Unterrichtsentwurf identifiziert und beurteilt werden können, zeigt sich in der Suche nach Unterschieden zwischen den Unterrichtsentwürfen. Kann das erworbene fachdidaktische Wissen z.B. über die Modellierung typischer Unterrichtssituationen zur Analyse angewendet werden, kann von intelligentem Wissen zu diesem Modell gesprochen werden. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn im Brainstorming das Erklären von Begriffen, Sätzen und Verfahren auf verschiedenen Erkenntnisebenen gefordert wird und dieses auch in den Unterrichtsentwürfen identifiziert wird. Wenn jedoch der Begriff Binnendifferenzierung im Brainstorming auftaucht und in der darauf folgenden Merkmalliste als nicht vorhanden eingetragen wird, obwohl der zu analysierende Unterrichtsentwurf explizit binnendifferenzierende Elemente enthält, ist dies ein Hinweis darauf, dass die Vorstellungen zum Begriff Binnendifferenzierung bei diesem Studenten noch erweiterbar sind.

Um Schwerpunkte und ggf. Typologien der studentischen Analysen zu identifizieren, werden die genannten Merkmale des Brainstormings und der Merkmalsliste kategorisiert. Hierbei wird der an der TU Darmstadt entwickelte Kriterienkatalog zur Begutachtung von Lern- und Lehrmaterialien (Collet, Bruder & Ströbele, 2008) speziell für die Analyse von Unterrichtsentwürfen erweitert. Es wird erwartet, dass sich zum einen Unterschiede zwischen den verschiedenen Semestern in Bezug auf die Anzahl und Qualitätsausprägung der genannten Merkmale ergeben und dass zum anderen unterschiedliche inhaltliche Schwerpunkte der Analysen zu erkennen sind.

Literatur

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann, U., Tsai, Y., Neubrand, M.(2006). Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflicher Fortbildung*?*. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9,* S. 521-544.

Collet, C., Bruder, R., & Ströbele, M. (2008). Intelligent und reflektiert Mathematik Üben. Zur didaktischen Qualität von Lehr-und Lernmaterialien. In: *mathematik lehren* (147), Friedrich Verlag, S.60-63.

DMV, MNU & GDM. (2008). Abgerufen am 23. März 2008 von http://didaktik-der-mathematik.de/pdf/Standards%20Lehrerbildung%20Mathematik.pdf.

Kelly, G. A. (1955): The psychology of personal constructs. New York: Norton,

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., S., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A.& Löwen, K. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.). *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung.* Münster: Waxmann, S.31-53.

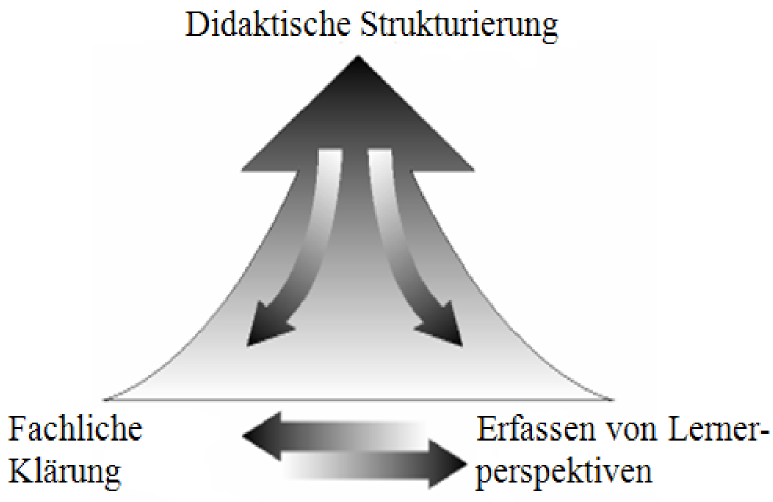
Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. In: *Educational Researcher*, 15, S. 4-14.

Weinert, F.E. (1999). Die fünf Irrtümer der Schulreformer. In: *Psychologie Heute*, 7, 28-34

Heinz LAAKMANN, Dortmund

Lernprozessstudie zum flexiblen Umgang mit Darstellungsformen bei der Begriffsbildung, am Beispiel der linearen Funktionen im rechnerunterstützten Mathematikunterricht

Vorgestellt werden Konzeption, Forschungsfragen und erste Ergebnisse zu einer Studie zum flexiblen Umgang mit Darstellungsformen im Themenbereich der linearen Funktionen. Der zugrunde liegende fachdidaktische Forschungsansatz der Arbeit ist die von Kattmann u.a. entwickelte „Didaktische Rekonstruktion“, durch die „fachliche Vorstellungen, wie sie in Lehrbüchern und anderen wissenschaftlichen Quellen Ausdruck finden, mit Schülerperspektiven so in Verbindung gesetzt (werden), dass daraus ein Unterrichtsgegenstand entwickelt werden kann.“ (Kattmann et al. 1997, S. 3). Ausgehend von der fachlichen Klärung der Inhalte und der empirischen Erfassung der Vorstellungen und Perspektiven der Lernenden werden Bezüge zwischen diesen Bereichen herausgearbeitet. In der didaktischen Strukturierung werden nun rückgebunden an die fachliche Klärung und die Schülervorstellungen grundlegende Entscheidungen für die unterrichtliche Vermittlung des Themas getroffen. Da die didaktische Rekonstruktion lerntheoretisch auf einer konstruktivistischen Position basiert (Kattmann et.al, 1997, S. 6), besteht eine mögliche Unterrichtskonzeption in der Gestaltung von Lernumgebungen, die an die Erfahrungswelt der Lernenden anknüpfen und durch sinnstiftende Kontexte die fachlichen Inhalte erschließen lassen. Ebenfalls werden in diesem Kontext Entscheidungen über Methoden und Medieneinsatz getroffen.



Zur Lernendenperspektive:

Die Studie wurde mit verschiedenen Tests pilotiert, um Vorkenntnisse und Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu funktionalen Zusammenhängen und ihren Darstellungen zu erheben. Insbesondere wurde untersucht, wie weit die Lernenden schon vor der Unterrichtsreihe in der Lage sind, funktionale Zusammenhänge aus Graphen und Tabellen abzulesen,

Zuordnungs- und Kovariationsaspekte zu erkennen und funktionale Zusammenhänge in verschiedenen Darstellungsformen zu deuten.
Aus den Vortests wurde ersichtlich, dass Lernende vielfach ein Gespür für funktionale Zusammenhänge besitzen. Besonders der Zuordnungsaspekt ist den meisten Lernenden vertraut, während die qualitative Beschreibung und Deutung von Veränderungen in graphischen Darstellungen größere Probleme bereiten. Gleiches gilt auch für das Erstellen von Termen zu vorgegebenen Punktmustern oder zweispaltigen Tabellen.

Zur fachlichen Klärung:
Funktionen sind seit dem Meraner Lehrplan von 1905 zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts. In den Beschlüssen der Kultusministerkonferenz zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik wird der funktionale Zusammenhang als eine von vier Leitideen genannt, der u.a. die folgenden Kompetenzen zugeordnet werden: „Schülerinnen und Schüler - nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, - erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar, - analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen…"(KMK, 2003, S. 11). Für die Begriffsentwicklung der Lernenden wird damit ein bedeutsamer Sachverhalt aufgegriffen: Die verschiedenen Darstellungen tragen wesentlich zum Verständnis des Begriffs Funktionen bei, oder wie Duval es pointiert formuliert: „There is no understanding without visualization" (Duval, 2002, S. 322).
Der Einsatz eines Rechners unterstützt dies, bietet er doch u.a. die Möglichkeit zur schnellen Visualisierung. Die neueren Multirepräsentationsprogramme gestatten mit der Integration von DGS, TK und CAS in einem Programm zudem den direkten Wechsel von einer Darstellungsart in die andere, ohne ein weiteres System zu starten. Zusätzlich, und das ist ein entscheidender Aspekt, führen Veränderungen in der einen Darstellung zu entsprechenden Veränderungen in den anderen Darstellungen.
Die Bedeutung des Darstellungswechsels stellt Duval in seinen Arbeiten zur Begriffsbildung in den Mittelpunkt seiner Überlegungen. Da mathematische Objekte mentaler Natur sind, sind sie nach Duval nur über Zeichen denkbar und man kann mit ihnen nur in semiotischen Repräsentationen denken und arbeiten. „ … there is no other way of gaining access to the mathematical objects but to produce some semiotic representations" (Duval, 2002 , S. 313). Andererseits sind diese semiotischen Repräsentationen aber nicht gleichzusetzen mit dem mathematischen Begriff und die Lernenden müssen zwischen Objekt und seiner Darstellung unterscheiden können,

wenn sie ein Verständnis des Begriffs erwerben wollen. „… the understanding of mathematics requires not confusing the mathematical objects with the used representations.“ (Duval, 2002, S. 313)
Damit wird die Unterscheidung zwischen Darstellung und Vorstellung des Objektes zu einem entscheidenden Punkt im mathematischen Verständnis, und die Nutzung verschiedener Darstellungen rückt ins Zentrum des Begriffsbildungsprozesses.
Weitere Gründe für den Gebrauch verschiedener Darstellungen sieht Duval im unterschiedlichen Arbeitsaufwand, in der Ergänzung der Aspekte, und in der Koordination der Darstellungsarten, die für die Entwicklung des Mathematiklernens kennzeichnend ist, denn Verständnis entsteht nach Duval in der Übersetzung in und zwischen den Darstellungsarten.
Bei den Übersetzungen unterscheidet Duval zwischen „Processing“ und „Conversion“. Während das erste den Wechsel innerhalb einer Darstellungsart meint, z. B. die Veränderung eines Graphen durch Manipulation einer Achseneinheit, meint „Conversion“ den Wechsel zwischen den Darstellungsarten z.B. vom Graphen zur Tabelle. Dieser Wechsel ist für Duval von besonderer Bedeutung. "Conversion of representation is a crucial problem in the learning of mathematics“, (Duval, 2002, S. 31)
Aus der Erfassung der Lernendenperspektive und der fachlichen Klärung ergeben sich Forderungen an die Gestaltung des Unterrichts:

Die Lernumgebung soll

- ein intensives Erarbeiten der verschiedenen Darstellungen ermöglichen,
- vielfältige Anreize zum Wechsel der Darstellungen anbieten, mit der selbstverständigen Möglichkeit, einen Rechner zu benutzen,
- Möglichkeiten bieten, den Nutzung der einzelnen Darstellung in verschiedenen Problemsituationen zu vergleichen und zu beurteilen
- Anlässe zur Verfügung stellen, die Grundvorstellungen, speziell die Kovariationsvorstellung, aufzubauen.
- ….

Für die Untersuchung sind folgende Forschungsfragen tragend:

- Welche Auswirkungen hat das Angebot an verschiedenen Darstellungen in sinnstiftenden Kontexten in Bezug auf die Begriffsbildung?
- Inwieweit behindern oder fördern digital erzeugte Darstellungen den Aufbau tragfähiger Vorstellungen?

Zur Analyse wurden die Begriffsbildungsprozesse anhand von Schülerdokumenten rekonstruiert.

Erste exemplarische Ergebnisse:

Die Lernenden sind mit allen Darstellungsarten vertraut und wählen aufgabenspezifisch und nach persönlichen Vorlieben die Darstellungsart ihrer Lösung. Dabei fällt auf, dass bei freier Darstellungswahl tabellarische und symbolische Lösung zu gleichen Anteilen als Arbeitsgrundlage gewählt werden, während die graphische Darstellung unterrepräsentiert ist. Eine genauere Betrachtung der Schülerlösungen zeigt, dass zur Erstellung einer graphischen Lösung wesentliche Merkmale für die Erarbeitung einer tabellarischen oder symbolischen Lösung benötigt werden, so dass diese Darstellungsarten zeitökonomischer hergestellt werden können.

Eine weitere Erkenntnis ergab sich aus der Arbeit mit dem TI-Nspire, in der mit Hilfe des Zugmodus am Graphen einer linearen Funktion Steigung oder y-Achsenabstand verändert werden können. Lernende deuteten die Veränderung der Steigung als ein Drehen des Graphen. Sie sehen die Gerade unter dem Ganzheitsaspekt und erleben im Zugmodus ein Verändern der Steigung als Drehung der gesamten Geraden um den y-Achsenabschnitt. Diese Drehung kann in der Klasse 7 jedoch nicht angemessen gedeutet werden und entspricht auch inhaltlich nicht der Veränderung der Steigung. Betrachtet man nämlich die Funktion unter dem Zuordnungsaspekt, dann stellt die Manipulation der Steigung keine Drehung, sondern eine Veränderung der y-Koordinate bei fester x-Koordinate dar. Die y-Koordinate eines jeden Punktes wird um $(m_2-m_1)\cdot x$ verändert, wobei m_1 und m_2 die beiden Steigungen bezeichnen. Jeder einzelne Punkt wird in y-Richtung verschoben, obwohl der Rechner das Bild einer Drehung liefert.

Dieses Auseinanderklaffen zwischen Darstellung und intendierter Vorstellungsentwicklung bildet den Anlass zu einer weiteren Entwicklung der Unterrichtseinheit, ganz im Sinne der didaktischen Rekonstruktion.

Literatur

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H., Komorek, M. (1997). Das Modell der didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftliche Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften: 3(3), S.3-18*

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In Hitt, F. (Hrsg.)(2002) *Representations and Mathematics Visualization,* Mexiko, Cinvestav-IPN

Vom Hofe, R. (1995).*Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum

Gunta LACE, Riga

Vorstellungen, Überzeugungen, Erwartungen und Anforderungen der Sekundarstufenlehrer/innen in Lettland

Man hat eine sachliche Forschung begonnen, deren Ziel die Ausarbeitung der Lehrerfortbildungsprogramme ist. Die Forschung besteht aus mehreren zusammengebundenen Teilen: qualitative Untersuchung der Vorstellungen, Überzeugungen, Erwartungen und Anforderungen der Sekundarstufenlehrer/innen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung werden dann bei der Ausarbeitung der Fragebögen für die quantitative Forschung verwendet, in der die Fachkompetenz, Fachdidaktische Kompetenz und Vorstellungen, Überzeugungen, Erwartungen und Anforderungen der Mathelehrer untersucht werden sollen. Das sachliche Projektziel bestimmt unseren Interessenbereich – handlungsnahe Vorstellungen und Überzeugungen vom Lehr- und Lernprozess der Mathematik.

In der qualitativen Untersuchung wurden 27 Sekundarstufenlehrer/innen aus dem Kreis Cesis einbezogen. In Lettland umfasst die Sekundarstufe die Klassen 5 bis 9. 13 Lehrerinnen, die in der Forschung teilgenommen haben, arbeiten in der Gymnasialstufe, das heisst – in den Klassen 10 bis 12. Die Ergebnisse sind vollständig genug, um die dann bei der Ausarbeitung vom Fragebogen zur quantitativen Untersuchung verwenden zu können und um eine allgemeine Vorstellung von den Überzeugungen der Mathelehrer zu bekommen.

Jeder Untersuchungsteilnehmer hat an einem teilweise strukturierten Interview teilgenommen. Beim Entwurf vom Interviewplan wurde die von MT21 ausgearbeitete Theoretische Konzeption der unterrichtsbezogenen Überzeugungen angehender Mathematiklehrkräfte benutzt. Die Lehrer/innen haben ihre Meinung in Bezug auf Zielvorstellungen, unterrichtsmetodische Präferenzen und Klassenraummanagement geäußert. Während des Interviews haben die Lehrer/innen den Fragenkreis selber verbreitet.

Die Interviewteilnehmer wurden danach befragt, welche ihrer Meinung nach sind die Hauptunterrichtsziele in der Sekundarstufe. Die Antworten zeigen davon, dass die meisten Lehrer in ihrer altäglichen Arbeit an diese Frage gar nicht aus der Sicht ihrer theoretischen Didaktikkentnisse denken. Sie benutzen sehr alltägliche, handlungsorientierte Sprache. Auch die Ziele sind weit von denen, die in den Mathematikdidaktikbüchern und im Bildungsstandard beschrieben worden sind.

Hier einige typische Gesprächsauszüge:

Hauptsächlich muss man den Kindern das Rechnen beibringen. So, damit sie bei der Prüfung die Aufgaben selbständig lösen können.

Ziele? Nur ein Ziel habe ich – Sekundarstufenprüfung. Die ist für die Schüler wichtig, damit sie dann später in die Schule, die sie bevorzugen, gehen könnten.

Ich muss die Mathematik so beibringen, damit der Schüler dann später in der Mittelschule lernen kann.

Natürlich wurden auch genauere Ziele genannt, hauptsächlich waren sie mit einem konkreten Mathematikinhalt verbunden.

In der Sekundarstufe ist es am wichtigsten, dass die Schüler rechnen lernen. In der fünften und sechsten Klasse lernt man zählen – Kopfrechnungen und schriftlich. In der siebten und achten Klasse lernt man Gleichungen, Ungleichungen zu rechnen, die Diagramme zu zeichnen.

Es wurden auch konkrete Aufgabentypen genannt; besonders wurden es praktische, realitätsbezogene Aufgaben, manchmal auch Modellierungsaufgaben, hervorgehoben. Hier wurde eine der weiteren Untersuchungshypothesen sichtbar – diese Aufgabentypen haben die Leherer/innen genannt, die vor kurzem ihre Ausbildung abgeschlossen haben. Auch ohne Zusatzfragen haben sie die Argumentationsfertigkeit und Begründungsfähigkeit genannt.

Meiner Meinung nach das Wichtigste, ich weiß nicht, aber ich vermute so, ist die mathematische Anwendungsfähigkeit. Ja, das Wichtigste ist die Lösung solcher lebensorientierten Aufgaben. Wenn man selber die Modelle bildet, nicht nur nach einem gelernten Muster.

Nachdem die Lehrer/innen ihre Ziele genannt haben, kam es zu den Präzisierungsfragen in Bezug darauf, wo der Lehrer Problemlösen, Modellieren, Argumentieren, Begründen und Beweisen im Sekundarstufennathematikunterricht sieht.

Meistens wurde Argumentieren, Begründen und Beweisen mit der Geometrie verbunden. Hier wurde eine interessante Aufgabe der quantitativen Untersuchung sichtbar – man soll feststellen ob und wie die Lehrer/innen den Begriff Modellieren im Mathematikunterricht verstehen. In den Interviews haben sie oft das Modellieren nur als Zeichnen oder das Basteln von Modell einer räumlichen Figur erklärt. Es gab auch ziemlich sonderbare Erklärungen, die sich dazu noch wiederholt haben, was auf ein systematisches Missverständnis hinweist:

Modellieren im Mathematikunterricht? Ja, natürlich, ich mache Unterrichtsplanung.

Im zweiten Teil des Interviews wurde nach den Lehrermeinungen in bezug auf verschiedene Unterrichtsmethoden und Arbeitsformen gefragt. Zuerst hat man die Lehrer gebeten ihre Arbeitsweise aus methodischer Sicht zu charakterisieren. Ich lasse hier die Interviews auszüge sprechen:

Am Anfang erzähle ich. Ich bemühe mich alles zu erzählen. Dann Wiederholen. Und dann die Aufgaben lösen. Die Schüler? Die Schüler hören. Na ja, jetzt können sie nicht mehr so lange ruhuig sitzen. Wenn sie laut werden, dann bleibe ich still, dann werden sie auch wieder still und ich kann weiter erzählen.

Hmm, ich weiss nicht. Nein, ich weiss doch, was Sie von mir wollten! Ich mag nun einfach keine Gruppenarbeit und alles. Ich mag selber auch nicht in einer Gruppe arbeiten. Wenn es im Fortbildungskurs die Gruppenarbeit gibt, dan faulenze ich einfach (lacht). In der Klasse geht das überhaupt nicht. Zeitverschwendung!

Zusätzlich wurde es nach der Lehrermeinung in Bezug auf konkrete Arbeitsformen, nach den Vorteilen und Nachteilen dieser Formen, gefragt. Es wurde ganz sichtbar klar, dass es noch immer die traditionelle Frontalarbeit herrscht. Die Lehrer/innen meinen:

Ich mag Ordnung und Ruhe in der Klasse. Wenn ich an der Tafel erzähle, hören alle zu; so kann man im Unterricht vieles schaffen. Na ja, ich weiss schon, dass man im Kopf besser das behält, was man selber erfindet. Aber wie viele sind es, die was erfinden? Und ein anderer hat dann nur die ganze Stunde einfach gesessen, und die ganze Gruppe bekommt dafür die gleiche Bewertung. Und dann noch dieser Krach...

Wenn man die von Lehrer/innen benutzten Wörter analysiert, spielen in beiden Interviewteilen die folgenden Wörter die dominierende Rolle: ich muss beibringen, mein Ziel ist beizubringen, ich erzähle, die Schüler hören, meine Pflicht ist es zu erzählen.

Die Lehrer haben ihre Meinung in bezug auf die Disziplin in der Klasse geäußert. Noch immer denken viele, dass eine gute Stunde bedeutet eine ruhige Stunde. Die Lehrer haben hauptsächlich von einer äußeren Motivation gesprochen. Vergleichsmäßig seltener, aber das ist wieder die Frage der quantitativen Untersuchung, haben die Lehrer betont, dass das Lernprozess wichtiger oder gleich wichtig ist.

Die Zusammenfassung der Interviews zeigt folgende Überzeugungen der lettischen Mathematiklehrer:

Hauptunterrichtsziel im Sekundarstufenmathematikunterricht ist Routineaufbau. Lehrer setzen Ziele, die mit den innermathematischen Inhalten verbunden sind. Entwicklung der kognitiven Fertigkeiten ist nur eine Nebenwirkung. Lehrer sind Leistungsorientiert – auf Schülerleistungen in den staatlichen Prüfungen;

Es herrscht noch immer die gewohnte „ Kreide und Tafel“ Methodik. Gruppenarbeit und andere interaktive Arbeitsformen nennen die Lehrer, die diese Formen auch regelmäßig einsetzen. Die negative Einstellung gegenüber interaktiven Arbeitsformen haben meistens ein schlagendes Misserfolg oder Vorurteile verursacht;

Lehrer sind überzeugt, dass die äußere Motivation wirksam ist, sie meinen, dass eine beschreibende Bewertung für die Schüler weniger wichtig als Noten ist;

Es gibt sehr unterschiedliche Meinungen in Bezug auf Lehrerverantwortung – der Lehrer ist nur für die Erklärung der Mathematikinhalte verantwortlich und der Lehrer ist völlig verantwortlich für die Schülerleistungen;

Die Lehrer sind bereit zu lernen. Sie wollen handlungsnahe Sachen lernen, obwohl sie offensichtlich ungenügende theoretische Kenntnisse in der Didaktik und Entwicklungspsychologie haben. Von den Fachschaften erwarten sie methodische Unterstützung bei ihrer täglichen Arbeit. Oft sind die Lehrer unsicher aber gleichzeitig wollen sie nicht, dass ihre Arbeit in den Fachschaften analysiert wird (konkrete Unterrichtsstunden, selbstgemachte Klassenarbeiten usw.);

Literatur

Blőmeke, S., Kaiser, G., Lehmann, R., (2008). Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer (Hrsg.), *Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher mathematikstudierender und –referendare; Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung* (S. 219 - 302). Münster/New York/*München/ Berlin*: Waxmann.

Helmke, A. (2009). Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität – Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

Claudia LACK, Giessen

Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr

Motivation

Nicht nur aus mathematikdidaktischer Sicht (vgl. Bauersfeld 2006, Bardy/Hrzán 2005), sondern auch aus Sicht der Erziehungswissenschaften und der Pädagogischen Psychologie herrscht Einigkeit darüber, dass begabte Kinder gefördert werden müssen und dass die Förderung so früh wie möglich einsetzen sollte. Befasst man sich jedoch mit der jüngeren Geschichte der Begabungsforschung[1] in der Mathematikdidaktik, so lässt sich erkennen, dass mathematische Begabung bei Kindern im Schulanfangsalter so gut wie nicht erforscht ist. Als Gründe für diese Diskrepanz werden in der Regel der lange Vorhersagezeitraum, die entwicklungspsychologischen Besonderheiten junger Kinder und die Schwierigkeiten in Bezug auf eine zuverlässige Diagnostik in diesem Alter angeführt (vgl. Nolte 2004, Käpnick 1998). Es gibt jedoch Anhaltspunkte, die auf mathematische Begabung auch bei jüngeren Kindern schließen lassen. Diese ergeben sich einerseits aufgrund von konkreten Beobachtungen und andererseits aufgrund von Ergebnissen wissenschaftlicher Studien zu Teilgebieten.

Auf der Basis dieser Ausgangssituation ist es das Ziel der hier vorgestellten Studie, grundlegende Erkenntnisse zur mathematischen Begabung bei Kindern im Schulanfangsalter zu erlangen.

Intention und Fragestellungen

Zum Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern der genannten Altersstufe wird das Lösungsverhalten mathematisch interessierter Kinder beim Bearbeiten von Problemaufgaben untersucht. Verbunden mit dieser Intention sind die folgenden Fragestellungen:

1. In welcher Form sind die Kinder mathematisch tätig?
   Welche heuristischen und aufgabenspezifischen Strategien zeigen sie?
   Welche Beobachtungen können in den verschiedenen Phasen des Problemlöseprozesses gemacht werden?
2. In welcher Weise unterscheiden sich die Kinder in ihrem Lösungsverhalten voneinander?

[1] Begabung wird im Folgenden interpretiert als Potential für überdurchschnittliche Leistungen auf einem speziellen Gebiet. Dieses Potential kann sich in Form von besonderen Kompetenzen zeigen, wenn persönliche und soziale Faktoren positiv unterstützend wirken.

Welche Bearbeitungstypen kristallisieren sich heraus?
Was ergibt der Vergleich mit Ergebnissen bei älteren Kindern?
Lässt sich eine Beziehung zum Intelligenzquotienten herstellen?

3. Welche Konsequenzen lassen sich ziehen?

Die Studie – Planung, Durchführung und Methoden der Auswertung

Auswahl und Konstruktion der Aufgaben
Es ergeben sich Anforderungen an die Aufgaben aus zwei Perspektiven:

a) Allgemeine Anforderungen

Diese Anforderungen richten sich an den Aufgabentyp (es werden Problemaufgaben (vgl. Rasch 2001) eingesetzt) und an die Aufgabengestaltung (Stufung des Schwierigkeitsniveaus und Möglichkeit zur Bearbeitung auf verschiedenen Darstellungsebenen).

b) Mathematische Anforderungen

Die Aufgaben sollen gemeinsam mathematisches Tätigsein von Kindern dieser Altersstufe abbilden. Als Instrument dient das selbst entwickelte „Schema zur Erfassung mathematischen Tätigseins“ (Kilpatrick 2004, Käpnick 1998, Niss 2004).
Auf der Basis der genannten Anforderungen bearbeiten die Kinder vier Problemaufgaben („Türme bauen“, „Jonas sammelt Murmeln“, „Das Puzzle“ und „Rechenketten“).

Auswahl der beteiligten Kinder
An der Studie nehmen 23 Kinder aus 12 Klassen zweier hessischer Schulen (Anfangsstichprobe: 260 Kinder) teil. Die Auswahlkriterien liegen in dem von den Kindern geäußerten und gezeigten mathematischen Interesse. Dies wird ergänzt durch die Lehrer- und Elterneinschätzung.

Datenerhebung und -auswertung
Aufgrund des relativ offenen Charakters der Studie wird eine qualitative Erhebungsmethode mit quantitativen Elementen (Methoden-Triangulation) gewählt. Alle Aufgaben werden in Form von Einzel-Video-Interviews halbstandisiert durchgeführt. Zusätzlich wird pro Aufgabe ein Einzelbeispiel im Sinne einer Einzelfallstudie dargestellt. Die Datenauswertung erfolgt nach Schmidt (2004) in Orientierung an die „Objektive Hermeneutik“ Oevermanns.

Zentrale Ergebnisse

Welche heuristischen und/oder aufgabenspezifischen Strategien zeigen die Kinder bei der Bearbeitung der Aufgaben?

Die Kinder nutzen die gleichen heuristischen Strategien wie ältere Kinder, jedoch häufiger in Form von Strategiekeimen. Die vorrangig identifizierte Strategie ist die des Vorwärtsarbeitens. Bei zunehmender Problemhaltigkeit sind zwei Tendenzen erkennbar: a) Wechsel zum Generieren und Testen von Lösungen mit geringem Erfolg b) Einsatz anderer (teilweise mehrerer) Strategien mit größerem Erfolg. Vergleichbare Ergebnisse ergeben sich für die aufgabenspezifischen Strategien.

In welcher Form sind die Kinder mathematisch tätig?

Die Kinder sind stärker im Bereich Muster und Strukturen tätig, als dies im Voraus angenommen wurde. Der Bereich Zahlen und Operationen wird häufiger auf der „Werkzeugebene“ genutzt und es ist zu beobachten, dass die Kinder hier über eine große Sicherheit verfügen.

In welcher Weise unterscheiden sich die Kinder in ihrem Lösungsverhalten voneinander? Können Bearbeitungstypen zusammengefasst werden?

Drei Kinder zeichnen sich durch schnelles Erfassen der Aufgabenstellung, Erkennen und Nutzen der mathematischen Struktur, Einsatz heuristischer und aufgabenspezifischer Strategien und durch motiviertes, konzentriertes und erfolgreiches Arbeiten aus. Weitere vier Kinder zeigen ein vergleichbares Lösungsverhalten, aber nicht derart ausgeprägt. Zwei davon orientieren sich durchgängig am Bilden von Mustern und gehen fantasievoll vor. Sechs Kinder zeigen ein stark schwankendes Lösungsverhalten, bearbeiten aber mindesten eine Aufgabe auf sehr anspruchsvollem Niveau. Eine Gruppe von ebenfalls sechs Kindern erkennt die mathematische Struktur der Aufgaben, hat aber Probleme mit der Arbeit darin. Schließlich gibt es eine Gruppe von vier Kindern, die durchgängig Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgaben hat. Vergleicht man diese Ergebnisse mit vorhandenen Forschungsergebnisse bei älteren Kindern (Käpnick 1998, Heinze 2005) so lässt sich Folgendes feststellen: Die in den ersten zwei Gruppen genannten Kinder verfügen höchstwahrscheinlich über mathematische Begabung, in unterschiedlicher Ausprägung und Ausrichtung. Die Kinder der beiden zuletzt genannten Gruppen verfügen wohl nicht über eine mathematische Begabung. Für sechs Kinder kann keine eindeutige Zuordnung durchgeführt werden. Als mögliche Erklärungen könnten entwicklungsbedingte instabile Ausprägungen der mathematischen Begabung (Empfehlung: langfristige Beobachtung) oder nicht angemessene Erhebungsmethoden (Empfehlung: weitere Untersuchungen, die auf anderen Methoden basieren) angedacht werden.

Welche Konsequenzen lassen sich ziehen?

In Bezug auf die Kinder wird deutlich, dass die Begabungsentfaltung im frühen Kindesalter stärker mit entwicklungsbedingten Faktoren verknüpft zu sein scheint, als dies bei älteren Kindern der Fall ist. Jüngere Kinder zeigen generell die gleichen Strategien, Merkmale und Fähigkeiten wie ältere Kinder. Es ist aber verstärkt mit Strategiekeimen zu rechnen. Man kann davon ausgehen, dass sich mathematische Begabung bei jüngeren Kindern in vergleichbarer Weise wie bei älteren Kindern äußert. Die häufig vorgefundene Instabilität der Merkmale mahnt jedoch zur Vorsicht.

In Bezug auf die Aufgaben kann festgehalten werden, dass sie sich mit wenigen Einschränkungen als geeignet zur Diagnose erweisen. Sie bilden gemeinsam mathematisches Tätigsein ab.

Literatur

Bardy, P.; Hrzán, J. [2005]: Aufgaben für kleine Mathematiker mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen. Köln: Aulis.

Bauersfeld, H. [2006]: Versuch einer Zusammenfassung der Erfahrungen. In: Bauersfeld, H.; Kießwetter, K. (Hg.): Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? – Ein Buch aus der Praxis für die Praxis. Offenburg: Mildenberger. 82-91.

Heinze, A. [2005]: Lösungsverhalten mathematisch begabter Grundschulkinder – aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen. Münster: LIT.

Käpnick, F. [1998]: Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Kilpatrick, J. [2004]: Promoting the Proficiency of U.S. Mathematics Teachers Through Centers for Learning and Teaching. In: Straesser, R.; Brandell, G.; Grevholm, B.; Helenius, O. (Hg.): Education for the Future. Proceedings of an International Symposium on Mathematics Teacher Education. Göteborg: The Royal Swedish Academy of Sciences and the authors. 143-157.

Niss, M. [2004]: The Danish „KOM“ project and possible consequences for teacher education. In: Straesser, R.; Brandell, G.; Grevholm, B.; Helenius, O. (Hg.): Education for the Future. Proceedings of an International Symposium on Mathematics Teacher Education. Göteborg: The Royal Swedish Academy of Sciences and the authors. 179-190.

Nolte, M. (Hg.) [2004]: Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs- und Förderprojekts zur besonderen mathe-matischen Begabung im Grundschulalter. Hildesheim; Berlin: Verlag Franzbecker.

Rasch, R. [2001]: Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Eine Studie zur Herangehensweise von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert. Hildesheim; Berlin: Verlag Franzbecker.

Schmidt, Ch. [2004]: Analyse von Leitfadeninterviews. In: Flick, U.; von Kardorff, E.; Steinke, I.: Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Reinbek: Rowohlt Taschen-buch Verlag. 447-456.

Silke LADEL, Schwäbisch Gmünd

Multiple externe Repräsentationen (MERs) – Gestaltungsprinzipien und deren Umsetzung bei Software für den Anfangsunterricht Mathematik

1. Multiple mentale Repräsentationsannahmen

In den 1970er und 1980er Jahren wurde davon ausgegangen, dass Verstehen auf die Verarbeitung kategorialen Wissens beschränkt ist, das propositional repräsentiert ist. Heutzutage gehen die meisten Autoren - u.a. auf Grund neuropsychologischer Forschungsbefunde - von multiplen mentalen Repräsentationssystemen aus (vgl. u.a. Engelkamp & Zimmer 2006, Schnotz 2002, Mayer 2005). Im Hinblick auf multimediales Lernen ist die kognitive Theorie multimedialen Lernens (CTML) von Mayer besonders hervorzuheben (Abb. 1).

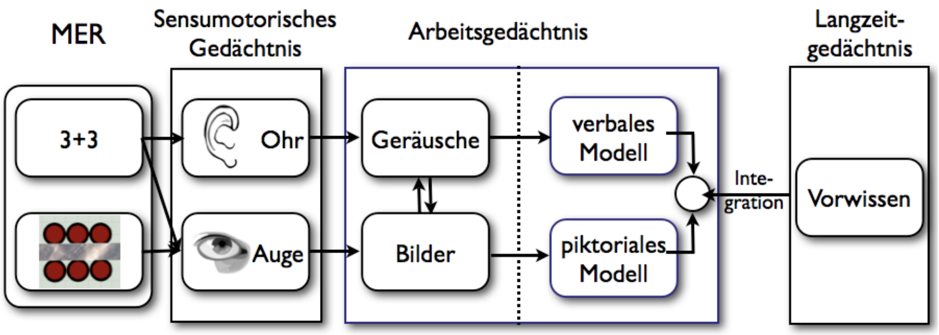


Abb. 1: CTML

Quelle: nach Mayer (2005)

Mayer geht von zwei Eingangskanälen aus, einen für die visuelle Wahrnehmung und einen für die auditive. Diese gelangen über das sensumotorische Gedächtnis ins Arbeitsgedächtnis, wo deren Aufnahme nur eine begrenzte Speicherkapazität zur Verfügung steht. Das verbale und das piktoriale Modell müssen hier zudem erst noch miteinander verknüpft werden, bevor die Integration des Vorwissens erfolgt. Diese Verknüpfung ist der entscheidende Schritt im multimedialen Lernen – und nicht nur im multimedialen Lernen, sondern auch im mathematischen Lernprozess. Das Operationsverständnis ist bei einem Kind erst dann voll entwickelt, wenn es in der Lage ist mental Verbindungen zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen herzustellen. Genau hier liegt jedoch die Schwierigkeit, mit der viele Kinder zu kämpfen haben. Aebli forderte bereits 1987 jede neue, symbolischere externe Darstellung mit der vorangehenden konkreten in möglichst enge Verbindung zu bringen. Diese Verbindung findet auf der zweiten Stufe im mathematischen Lernprozess statt, wo der Übergang von konkretem Handeln über abstraktere, bildhafte und insbesondere statische Darstellungen zur ziffernmäßigen Form erfolgt. Diese Forderung Aeblis steckt auch im so genannten **Multimedia Principle** von Mayer, der dieses auf der Grundlage seiner CTML formulierte. Demzufolge erzeugt eine MER ein tieferes Verständnis wie eine einzelne Repräsentation. Daraus folgernd wird im Computereinsatz die Chance gesehen, durch eine Verlinkung multipler äquivalenter Repräsentationen (MELRs) die mentale Verbindung und damit den Prozess der Verinnerlichung zu unterstützen. Um dies jedoch zu erreichen, müssen bestimmte Gestaltungsprinzipien eingehalten werden.

2. Gestaltungsprinzipien und deren Umsetzung

Die Unterscheidung Mayers in ein verbales und ein piktoriales Modell reicht m.E. im Zusammenhang mit dem mathematischen Lernprozess nicht aus, weshalb im Folgenden weiter differenziert wurde (vgl. Ladel 2008). Im hier vorgestellten Prototyp wurden speziell die *schematisch-virtuell-enaktive* Repräsentationsform, die *schematisch-ikonische* sowie die *non-verbal-symbolische* umgesetzt (Abb. 2).

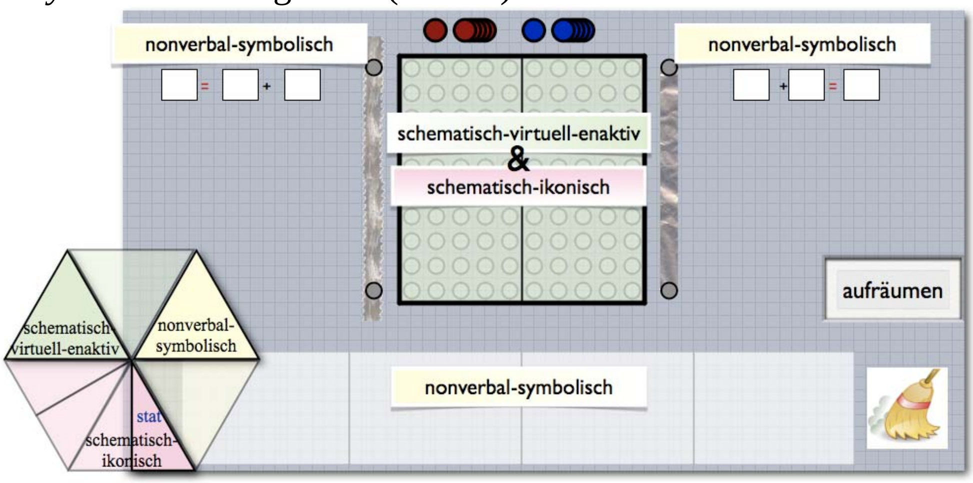


Abb. 2: Die verschiedenen Repräsentationsformen im Prototyp DOPPELMOPPEL[1]

Zunächst ist das **Temporal and Spacial Contiguity Principle** von besonderer Bedeutung. Die verschiedenen Repräsentationsformen müssen von Beginn alle zugleich sichtbar sein und eine feste räumliche Position haben. Die räumliche und zeitliche Nähe der Darstellungen befreit den Arbeitsspeicher der Kinder von der mentalen Integration und macht Arbeitsspeicher frei. Des Weiteren ist bei der virtuell-enaktiven Repräsentationsform ein **schnelles und strukturiertes Darstellen** von Anzahlen erforderlich. Dies wird im vorliegenden Prototypen durch zweifarbige Plättchen realisiert, die einzeln oder im Fünferpack auf eine strukturierte Arbeitsfläche gezogen werden können. Nach dem **Signaling Principle** erscheinende Pfei-

[1] Programmiert von Kortenkamp, U. in Cinderella

le weisen die Kinder darauf hin, dass sie sich den intermodalen Transfer in eine andere Repräsentationsform anzeigen lassen können. Dieser ist auf Wunsch in sämtliche Richtungen möglich. Damit haben die Kinder die vollständige Kontrolle darüber, in welcher Repräsentationsform sie arbeiten und ob sie einen automatisierten intermodalen Transfer sehen wollen oder nicht.

3. Ausgewählte Ergebnisse

In einer Untersuchung mit 28 Erstklässlern erwies sich das virtuell-enaktive Material zunächst als geeignetes Diagnosetool für das beim Kind vorhandene **Zahlkonzept**. So konnte das ordinale Zahlkonzept sowie das Teil-Ganze-Konzept beim Legen verschiedener Anzahlen beobachtet werden.

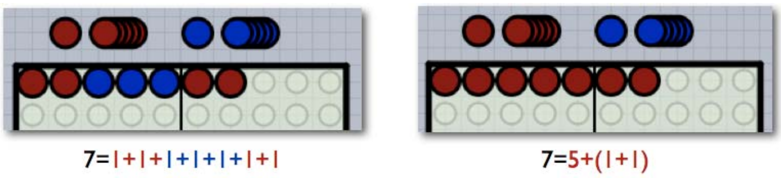


Abb. 3: Ordinales Zahlkonzept (links) und Teil-Ganze-Konzept (rechts)

In einer weiteren Erprobung zeigte sich, dass die Fünferpäckchen außerdem sehr gut geeignet sind, um mit den Kindern die Effektivität des Teil-Ganze-Konzepts im Vergleich zum zählenden Rechnen zu erarbeiten und es ihnen aufzuzeigen. Die Gestaltung der Arbeitsfläche zeigte Auswirkungen auf die Art der Kinder die Plättchen beim Legen **visuell zu strukturieren**. So wurde in einer Vorversion des aktuellen Prototypen sehr unstrukturiert gelegt und es konnten kaum Muster beobachtet werden (Abb. 4). Nach einer Änderung der Arbeitsfläche wurden verstärkt Muster gelegt. Außerdem hatte die Vorversion gezeigt, dass den Kindern unbedingt eine Hilfe zur Strukturierung der Plättchen an die Hand gegeben werden sollte. Eine solche wurde durch eine Taste realisiert, über die das Programm die Plättchen automatisch sortiert. Diese wurde von den Kindern häufig in Anspruch genommen und bewirkte einen Rückgang des Zählens, da die Anzahl durch die Strukturierung schneller festgestellt werden konnte (Abb. 4).

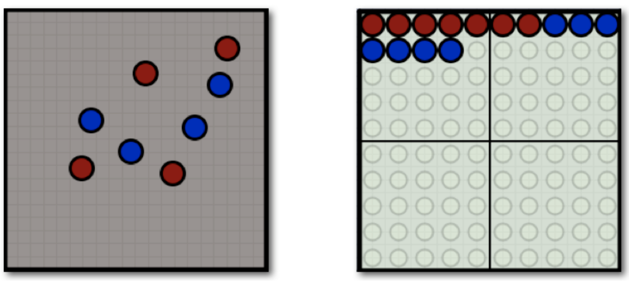


Abb. 4: Unstrukturiertes und strukturiertes Legen von Anzahlen

Interessant im Hinblick auf den **automatisierten intermodalen Transfer** ist, dass dieser verstärkt von der virtuell-enaktiven in Richtung der nonverbal-symbolischen Darstellung in Anspruch genommen wurde – also genau in die andere Richtung als aktuelle Software derzeit anbietet. Das deutet darauf hin, dass der Stand der Kinder im mathematischen Lernprozess eher auf der zweiten Stufe zu verorten ist und sie die Handlung noch nicht verinnerlicht haben, als dass sie sich auf der dritten Stufe (Umgang mit reinen Zahlen mit dem Ziel der Automatisierung) befinden. Auch beim Vergleich des Umgangs der Kinder mit den zwei Versionen ***MER ohne Möglichkeit zum intermodalen Transfer*** und ***MELR*** konnten Unterschiede festgestellt werden. So konnten die Ergebnisse der Studien von Ainsworth, Bibby und Wood (1997) bestätigt werden, insofern, dass Kinder im Alter von sechs Jahren MERs effektiv nutzen können, wenn diese angemessen gestaltet sind. Des Weiteren wurde ebenfalls beobachtet, dass die Kinder die einzelnen Repräsentationsformen unabhängig voneinander betrachteten und mit diesen ohne Zusammenhang arbeiteten. Bei MELRs fand ein verstärkter Wechsel der Repräsentationsformen während der Aufgabenbearbeitung statt. Thompson (1992) und Clements (2002) bestätigen ein bedeutungsvolleres Handeln mit Symbolen durch die Möglichkeit zum automatisierten intermodalen Transfer, was hier ebenfalls beobachtet werden konnte.

4. Fazit

Allein die multiple Repräsentation mathematischer Inhalte bewirkt beim Kind keine mentale Verknüpfung. Die Möglichkeit dazu, sich diese extern automatisch anzeigen zu lassen zeigt den Kindern jedoch den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen auf und bewirkt einen bedeutungsvolleren Umgang mit Symbolen. Es sind jedoch noch weitere und größer angelegte Studien notwendig, um diese ersten Beobachtungen zu bestätigen.

Literatur

Aebli, H. (1987): Zwölf Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett-Cotta

Ainsworth, S., Bibby, P, Wood, D. (1997): Information Technology and Multiple Representations: new opportunities new problems. In: Journal of Information Technology for Teacher Education, Vol. 6, 1

Clements, D. (2002): Computers in Early Childhood Matheamtics. In: Contemporary Issues in Early Childhood, Vol. 3, No. 2

Engelkamp, J., Zimmer, H. (2006): Lehrbuch der kognitiven Psychologie. Göttingen, Bern, Wien: Hogrefe

Ladel, S. (2008): Zur Darstellung von Arithmetik bei der Gestaltung von Software für den Anfangsunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht

Mayer, R. (2005): The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. New York: Cambridge University Press

Richter-Gebert, J., Kortenkamp, U. (2006). The Interactive Geometry Software Cinderella, version 2.0. URL: http://cinderella.de

Schnotz (2002): Wissenserwerb mit Texten, Bildern und Diagrammen. In: Issing, L., Klimsa, P. (Hrsg.): Information und Lernen mit Multimedia und Internet. Weinheim: Beltz

Thompson, P.W. (1992): Notations, Conventions and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 23(2), 123-147

Ingmar LEHMANN, Berlin

Fibonacci-Zahlen in Bildender Kunst und Literatur

Die *Fibonacci-Zahlen* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... werden durch die beiden Anfangswerte $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$ sowie die Bedingung $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq 1$) rekursiv definiert. Diese Zahlen aus dem Buch *Liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (ca. 1175-nach 1240), genannt *Fibonacci*, sind bereits lange vor 1202 beschrieben worden – in der indischen Mathematik. Neben dem Sanskrit-Grammatiker PINGALA behandelten später auch VIRAHANKA (6. Jh.) und ĀCHĀRYA HEMACHANDRA (1089–1172) die Fibonacci-Folge.

Die Quotienten F_{n+1}/F_n aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen nähern sich mit wachsendem n dem *goldenen Schnitt* $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2 = 1.61803...$

Das wohl berühmteste Gebäude, in dem der goldene Schnitt Φ zu finden sein soll, ist der Parthenon-Tempel. Die künstlerische Leitung beim Bau dieses Tempels hatte PHIDIAS. Der Anfangsbuchstabe Φ seines Namens liefert auch die in der Mathematik übliche Bezeichnung für den goldenen Schnitt. Aber – das muss an dieser Stelle gesagt werden – es gibt keinen wirklichen Beweis dafür, dass PHIDIAS bewusst den goldenen Schnitt verwendet hat. PAUL RENNER bringt es auf den Punkt, wenn er sagt: „Der Glaube an das Zählen und Messen verführt in allen Künsten zu den gröbsten Fehlern.“
An ausgewählten Beispielen wird gezeigt, wie Bildende Künstler und auch Dichter oder Schriftsteller die Fibonacci-Zahlen als Gegenstand oder Konstruktionsprinzip zugrunde gelegt haben.

1. Bildhauerei

In der Zeit der Renaissance entstand eine Lehre von den Proportionen in Architektur, Bildhauerei und Malerei, deren ästhetisches Credo in mathematischen Termini etwa so formuliert werden kann: Harmonie und Schönheit in der Kunst werden bestimmt durch gewisse ausgezeichnete Zahlen, wobei diese oft als Verhältnisse natürlichen Zahlen gut approximiert werden können.

LE CORBUSIER entwickelte 1948 eine Proportionenlehre, die unter dem Namen *Modulor* in der Kunstszene für Furore gesorgt hat. Er entwickelte dieses Schema auf der Grundlage des goldenen Schnittes. Der *Modulor* besteht aus zwei Skalen oder Bändern (Rote und Blaue Reihe[1]). Runden wir

[1] „Reihe“ und „Folge“ werden von den Künstlern oft als Synonyme verwendet.

jeweils die letzten drei Zahlen auf, haben wir es ausschließlich mit Fibonacci-Zahlen zu tun.

Zu einer wahren Fibonacci-Mode kam es in den 1960er Jahren in der *Minimal Art*. MARIO MERZ hat den Fibonacci-Zahlen gleich durch mehrere seiner Kunstwerke ein Denkmal gesetzt. Für ihn war FIBONACCI ein Leitbild, das ihn zu Konstruktionen inspirierte, die insbesondere auch in der Lichtkunst Zeichen gesetzt haben.

RUDOLF VALENTA steht mit seinen Bildern und Skulpturen in der Tradition des klassischen Konstruktivismus. Insbesondere macht er Skulpturen-Experimente, die der Fibonacci-Folge gelten.

HELLMUT BRUCH orientiert sich an der Fibonacci-Folge. Ihr entlockt er immer wieder die erstaunlichsten plastischen Gestaltungen, deren Stimmigkeit spürbar und ebenso beweisbar ist. Säulen aus Edelstahl visualisieren einen Ausschnitt aus der Fibonacci-Folge.

Moderne Plastiken von EDGAR KNOOP liefern durch die Anzahl der Stahlrohre einen unmittelbaren Hinweis auf die Fibonacci-Folge.

MICHA ULLMAN ordnet in seiner Bodenskulptur *Echo* neun Steinkreise nach der Fibonacci-Folge um einen Mittelpunkt.

HANNSJÖRG VOTH hat die Skulptur *Goldene Spirale* geschaffen. Der Grundriss ist aus einem goldenen Rechteck einbeschriebenen Kreisbögen konstruiert, deren Radien sich gemäß der Fibonacci-Folge vergrößern.

LIENHARD VON MONKIEWITSCH verwendet in einer Serie seiner Werke Fibonacci-Zahlen, bestimmt mit den größten Zahlen das Bildformat und proportioniert mit den verbleibenden Zahlen die einzelnen Farbfelder.

CLAUS BURY gibt bereits mit dem Namen seiner Großplastik *Fibonaccis Tempel* einen Hinweis auf mathematische Gesetzmäßigkeiten. Auch die Skulptur *Gegenläufig* ist auf dieser Grundlage entstanden.

ANN REDER fügt die Fibonacci- Zahlen nicht einfach äußerlich ihren Werken hinzu. Einige Wandreliefs und Bodenplastiken signalisieren dies schon durch den Titel.

WULF KIRSCHNER versucht mit seiner Skulptur *Dreiteiliger Quader* und seinen *Installationen mit System: Fibonaccis Melodie* menschliche, proportionale Maße für Flächen und geometrische Körper zu finden.

GERHARD BIRKHOFER schuf verschiedene *Stelen* vor dem Hintergrund der Fibonacci-Folge. Seine *Gottenheimer Wasserskulptur* vermittelt über die Proportionen Schönheit und Harmonie.

Das Relief *Fibonacci-Reihe* von BURKHARD SCHÜRMANN ist der Versuch, sich diesem mathematischen Thema in der *Konkreten Kunst* mit Hilfe „der übertragung von worten oder text in ein binäres system“ zu nähern.

Als ein plastisches Beispiel ordnet sich hier auch der *Fibonacci-Kreis* von MICHAEL KAUFMANN ein. Darüber hinaus hat er sich öffnende und schließende „U“-s in seiner *Fibonacci-Faltung* spiralförmig verarbeitet.

2. Malerei und Graphik

RUDOLF MUMPRECHT hat in den 60er-Jahre damit begonnen, alle möglichen Zahlen in seine Bilder zu bringen, so auch im Bild *Fibonacci*.

CHARLES BÉZIE nutzt in seinem Werk *Nr. 1408* kleine Kästchen, um einen Bezug zu den Fibonacci-Zahlen zu finden.

RUNE MIELDS hat in ihren Bildern bewusst die Fibonacci-Zahlen herangezogen. Ihre Gemälde bewegen sich farblich zwischen Schwarz, Grau und Weiß und wirken deshalb äußerst schlicht und geradezu herb.

FRANZ XAVER LUTZ visualisiert mit hintergründigem Humor in *Die regelmäßige Schönheit der Sonnenblume* die Fibonacci-Folge.

Die goldene Spirale hat immer wieder Künstler inspiriert (z. B. ANTON STANKOWSKI, HREINN FRIÐFINNSSON, HELMUT KLOCK).

JOSEF LINSCHINGER lässt in den Graphiken *Fibonacci* und *Fibonacci in Code 39* den Abstand zwischen den Buchstaben des Wortes „Fibonacci“ nach dem Gesetz der Folge wachsen.

EUGEN JOST schreibt zu seinem Bild *Girasole*: „Und immer, ohne Ausnahme, stosse ich auf die Fibonaccizahlen: 3, 5, 8, 13, 21... 34.“

SUSANNE SCHUENKE lässt in den Gemälden *Race* und *Race II* Fibonacci-Zahlen „aufglimmen“, um die nicht enden wollende Progression des Konkurrenzkampfes zu charakterisieren.

CLAUDIA BERNOLD bezeichnet sich selbst als Farbensammlerin. Als strukturelles Leitmotiv zieht sich die Fibonacci-Folge durch ihr Schaffen.

MARTINA SCHETTINA ist von der Schönheit und Reinheit der Mathematik fasziniert – mit dem Gemälde *Fibonaccis Traum* hat sie das Thema aufgegriffen.

AXEL ROHLFS greift mit dem Tripeltriptychon *DMK* 1 die Fibonacci-Folge auf. Die Doppelmäander werden in ihrer Breitenentwicklung von dieser Zahlenfolge bestimmt, zwei Mäander werden ineinander verflochten.

3. Literatur

VERGIL soll sein Epos *Aneis* nach dem goldenen Schnitt geschaffen haben. Notker der Stammler schildert in seinem *Liber ymnorum* 144 Silben lang das Martyrium des Laurentius; dann folgen 89 Silben der Fürbitte ...

LÁSZLÓ TUSNÁDY findet Fibonacci-Zahlen sowohl bei DANTE ALIGHIERI als auch bei TORQUATO TASSO. Mit einem Riesensprung landen wir bei *Winnetou* von KARL MAY. Wir müssen „nur“ die Anzahl der Silben je Wort zählen ...

JAKOBSON und LÜBBE-GROTHUES untersuchten das Gedicht *Die Aussicht* von FRIEDRICH HÖLDERLIN und unterstellen, dass der goldene Schnitt hier zu Tage trete. Was sie entdeckt haben, sind Fibonacci-Zahlen (2, 3, 5, 8).

INGER CHRISTENSEN hat mit dem Gedichtzyklus *alfabet* die Idee verwirklicht, die Fibonacci-Zahlen als Strukturelemente der Lyrik zu verwenden – das ist gesichertes Wissen. Neben CHRISTENSEN müssen hier auch ULRIKE DRAESNER und OSKAR PASTIOR zumindest erwähnt werden.

Das **„**Dichten nach der Fibonacci-Sequenz“ (fibonacci poetry, fibbery) – vor allem unter Computerfreaks – folgt der Regel *Fib*, d.h., es gibt insgesamt sechs Zeilen mit 1, 1, 2, 3, 5 und 8 Silben.

DAN BROWN nutzt in dem Thriller *Sakrileg* eine Verdrehung der Fibonacci-Folge als Hinweis für die Ermittler.

Die Fibonacci-Folge spielt sowohl in dem Roman *Das Montglane-Spiel* von KATHERINE NEVILLE als auch in dem Kriminalroman *Der Kern des Bösen* von TIBERIUS MACZEK eine Rolle.

HANS MAGNUS ENZENSBERGERS vergnügliche Reise in die Welt der Zahlen lässt uns schließlich teilhaben an den Abenteuern, die dem mathehassenden Schuljungen Robert widerfahren, wenn er nachts vom „Zahlenteufel“ heimgesucht wird. Dieser Teufel jongliert unterhaltsam und atemberaubend mit den Zahlen, dass Robert schließlich süchtig nach Zahlen wird. So lernt Robert auch, dass sich sogar Hasen oder Bäume an die Gesetzmäßigkeit der *Bonatschi*-Zahlenfolge halten – so heißen die Fibonacci-Zahlen bei ihm.

Quellenangaben:

[1] Lehmann, Ingmar: Die Fibonacci-Zahlen in der Kunst. - In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006.- Hildesheim, Franzbecker, 2006, S. 339-342

[2] Lehmann, Ingmar: Fibonacci-Zahlen – Ausdruck von Schönheit und Harmonie in der Kunst. In: Der Mathematikunterricht (erscheint 2009)

[3] Posamentier, Alfred S.; Lehmann, Ingmar: The (Fabulous) Fibonacci Numbers. Afterword by Herbert Hauptman, Nobel Laureate. Amherst, N.Y., 2007

Georg LILITAKIS, Universität Kassel

Untersuchung zum Studienverlauf des Fachs Mathematik für das Lehramt an Grundschulen an der Universität Kassel

Im Rahmen der Modularisierung sind die Studierenden des Lehramts an Grundschulen (L1) verpflichtet Mathematik und Deutsch zu studieren. Dies erzeugt eine im Bereich des Lehramtes ungewohnt neue Situation: Die Studierenden wählen sich nicht mehr die Fächer aus, in denen sie ihre Stärken wahrnehmen!

Das unterscheidet diese Studierenden von allen anderen Lehramtsstudierenden in Kassel.

Bei der Konzeption von Lehreinheiten in Form von Übungen und Vorlesungen für den Studiengang Lehramt an Grundschulen erwies es sich für den Autor als Schwierigkeit, dass spezifische Informationen über die Zielgruppe fehlen.

Insbesondere:

- wenige statistische Informationen zur Zusammensetzung der Jahrgänge,
- wenig Informationen zur Motivation der Studierenden,
- wenig Informationen zur Einstellung der Studierenden zum Fach Mathematik,
- keine Informationen zu Veränderungen von Einstellungen und Motivation bei den Studierenden im Verlauf des Studiums,
- keine Informationen wann oder wodurch eventuelle Änderungen zu Stande kommen.

Im Rahmen dieser Untersuchung ergeben sich folgende Fragestellungen:
Ist das Studium wirksam in Bezug auf

- mathematischen und unterrichtsbezogenen Kompetenzen,
- Einstellungen dem Fach und Lern- und Leistungsmotivation,
- Selbstkonzept und Selbstwirksamkeitserwartung?
- Welche Abschnitte des Studiums sind in Bezug auf diese Konzepte wirksam?

Um einen Überblick über das gesamte sechssemestrige Studium zum Lehramt an Grundschulen zu gewährleisten, wurde ein gestufter Untersuchungsverlauf gewählt.

Die Befragung der Studierenden wird mit drei Untersuchungsgruppen, die jeweils ein Jahr begleitet werden, durchgeführt, um den gesamten Studienzeitraum erfassen zu können.

a) Die erste Untersuchungsgruppe besteht aus Studierenden des Lehramts L1 im Fach Mathematik für die Grundschule im 1. und 2. Semester am Beginn ihres Studiums (Studienbeginn: WS 08/09). Die Stärke des Jahrganges beträgt etwa 160 Studierende.
b) Die zweite Untersuchungsgruppe beinhaltet Studierende des Lehramts L1 im Fach Mathematik für die Grundschule im 3. und 4. Semester, die die Hälfte ihres Studiums beendet haben (Studienbeginn: WS 07/08). Die Stärke des Jahrganges beträgt etwa 120 Studierende. Diese Gruppe absolviert im Verlaufe des Untersuchungszeitraumes das Blockpraktikum, in dem sie mit dem Alltag an Schulen vertraut gemacht werden sollen.
c) Die dritte Untersuchungsgruppe besteht aus Studierenden des Lehramts L1 im Fach Mathematik für die Grundschule im 5. und 6. Semester, im letzten Abschnitt ihres Studiums (Studienbeginn: WS 06/07). Die Stärke des Jahrganges beträgt etwa 100 Studierende. Diese Studierenden beginnen in diesem Zeitraum mit der Vorbereitung auf ihre Examensarbeit und ihre Examensprüfungen.

Die Untersuchung besteht einer Befragung am Beginn des Untersuchungszeitraums (November 2008) mit dem Ziel die Untersuchungsgruppen in Bezug auf die im Folgenden vorgestellten Konstrukte zu beschreiben und aus zwei weiteren Befragungen die Veränderungen dieser Konstrukte im Verlauf zweier Semester erfassen.

	1.-3. Semester	3.-5. Semester	5.-7. Semester
1. Befragung Nov. 08	1. Fachvorlesung	2. Didaktikvorlesung 3. Fachvorlesung	4. Didaktikvorlesung Fach- oder Didaktik-seminar
2. Befragung Beginn SoSe 09	1. Didaktikvorlesung 2. Fachvorlesung	Blockpraktikum 3. Didaktikvorlesung	Schulpraktische Studien Mathe Fach- oder Didaktik-seminar
3. Befragung Beginn WS 09/10	2. Didaktikvorlesung 3. Fachvorlesung	4. Didaktikvorlesung Fach- oder Didaktikseminar	Prüfungsvorbereitung

Ergänzt mit qualitativen Untersuchungen im Rahmen von Examensarbeiten:

- Untersuchung zum Verhalten bei Klausurvorbereitungen
- Untersuchung zum Berufsbild „Mathematiklehrer an Grundschulen"
- Untersuchung zu Emotionen im Zusammenhang mit dem Studium des Faches Mathematik für das Lehramt an Grundschulen
- Fünf weitere Befragungen geplant

Innerhalb der Untersuchungsabschnitte soll das Zusammenspiel von Fachvorlesungen der Mathematik, der Didaktik der Mathematik und der Schulpraktischen Studien im Studienverlauf in Bezug auf die Konstrukte - mathematische und unterrichtsbezogene Kompetenzen, Einstellung und Motivation, Selbstkonzept und Selbstwirksamkeitserwartung - untersucht werden. Ergänzend dazu werden statistische Daten erhoben und Informationen zu Studienumständen z.B. Arbeitsbelastung im Semester erfragt.

Zur Erfassung der unterschiedlichen Konzepte wurde ein Fragebogen aus unterschiedlichen Skalen erstellt und an die Zielgruppe angepasst. Der erste Fragebogen war auf ca. eine Stunde Bearbeitungsdauer konzipiert und wurde jeweils in einer Vorlesung den Studierenden vorgelegt.

Als Ergänzung zu den erhobenen quantitativen Daten werden begleitend Interviews mit ausgewählten Studierenden des Lehramts L1 mit spezifischen Einstellungen oder anderen Auffälligkeiten in den Fragebögen durchgeführt, um Einflüsse während des Untersuchungszeitraumes auf die Studierenden für die Grundschule zu erkennen und um Hinweise auf den Grund von etwaigen Veränderungen in den Ergebnissen der qualitativen Untersuchungen zu gewinnen.

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Aarau

Der Einsatz von Kurzfilmen als Einstieg in Experimentier- und Explorationsphasen

Mit der Einführung nationaler Bildungsstandards in der Schweiz werden auch solche Kompetenzaspekte im Mathematikunterricht stärker akzentuiert, die bisher allenfalls am Rande berücksichtigt wurden. Der Beitrag geht auf den Kompetenzaspekt "Erforschen und Explorieren" des HarmoS-Projekts näher ein. Vorgestellt wird ein Konzept zum Einstieg mit Hilfe von Kurzfilmen, die zum Ausprobieren, Weiterdenken und zur Formulierung von Vermutungen und Hypothesen anregen sollen. Zur Veranschaulichung wurden im Vortrag einige Kurzfilmproduktionen von Studierenden der PH Nordwestschweiz gezeigt – sie können über die Plattform YouTube (Search: "Linnemath") abgerufen werden.

1. Drei wichtige Implikationen der HarmoS-Bildungsstandards

Eine ausführliche Darstellung des Kompetenzmodells und der Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Schweiz wird voraussichtlich Mitte 2010 erscheinen – eine komprimierte Darstellung des Konzept findet man in den *Beiträgen zum Mathematikunterricht 2008* und in den *Beiträgen zur Lehrerbildung 2009*. Die HarmoS-Bildungsstandards zeichnen sich durch drei wichtige Momente aus: es handelt sich erstens um Mindeststandards ("Basisstandards") im Sinne der Klieme-Expertise, es sollen zweitens im Sinne der Weinertschen Kompetenzdefinition auch nicht-kognitive Dimensionen berücksichtigt werden und es gibt drittens eine Verlagerung des Fokus von der inhaltlichen Dimension auf die Prozessdimension mathematischen Lernens. Für den Mathematikunterricht ergeben sich daraus die folgenden Konsequenzen resp. Forderungen:

- Stärkere Differenzierungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht schaffen – besondere Förderung der Schwächeren
- Förderung der nicht-kognitiven Dimensionen mathematischer Kompetenz – insbesondere Motivation, Interesse, Teamfähigkeit
- Stärkere Berücksichtigung bisher weniger hervorgehobener Kompetenzaspekte

2. Erforschen und Explorieren im Sinn von HarmoS

Über weite Strecken deckt sich die Auswahl der HarmoS-Kompetenzaspekte mit der der "allgemeinen Kompetenzen" der KMK-Standards – der Kompetenzaspekt "Erforschen und Explorieren" erhält im

HarmoS Modell aber ein etwas stärkeres Gewicht, da er als eigenständiger Aspekt betrachtet wird. Was hier mit dem Ausdruck "Explorieren" gemeint ist, lässt sich exemplarisch durch die folgenden Kompetenzbeschreibungen verdeutlichen, die sich auf die fünf Kompetenzbereiche "Zahl und Variable", "Form und Raum", "Grössen und Masse", "Funktionale Zusammenhänge" und "Daten und Zufall" beziehen. Es handelt sich um Kompetenzbeschreibungen für die Jahrgangsstufe 11 (i.e. am Ende der obligatorischen Schulzeit) - die Beschreibungen intendieren noch keine Differenzierung nach Kompetenz-/Schwierigkeitsniveaus.

- Die S. können numerische, arithmetische und algebraische Zusammenhänge erkunden und erforschen, durch systematisches Variieren von Zahlen, Ziffern oder Operationen Lösungen und Hypothesen finden und durch selbst gewählte Zahlenbeispiele Verallgemeinerungen auf die Probe stellen.
- Die S. sind fähig, ihnen noch unbekannte geometrische Gebiete und Sachverhalte zu explorieren, Vermutungen zu formulieren und durch systematische Tests zu bestätigen oder zu widerlegen.
- Die S. sind fähig, Situationen durch explorative Messversuche zu erkunden und Eigenschaften, Relationen, Muster und Strukturen durch geeignete Grössenangaben und Grössenvergleiche zu erfassen.
- Die S. können Vermutungen über funktionale Zusammenhänge in der Realität und in der Mathematik anstellen und testen. Sie können Erkenntnisse im Zusammenhang mit Funktionen und ihren graphischen Darstellungen durch eigene Untersuchungen und Überlegungen gewinnen.
- Die S. sind fähig, statistische, probabilistische und kombinatorische Zusammenhänge zu erkunden und zu erforschen, durch Gedankenexperimente und Zufallsexperimente Lösungen und Hypothesen zu finden und zu erproben.

Im Kern ist mit dem genannten Aspekt eine Phase mathematischer Tätigkeit angesprochen, die mit einer (erstaunlichen) Einzelbeobachtung, einer Idee oder einer erst vage formulierten Vermutung beginnt, durch Ausprobieren, Experimentieren, Testen und zusätzlichen Überlegungen weiterführt und bei einer allgemeiner und präziser formulierten Hypothese endet.

3. Mindeststandards und nicht-kognitive Dimensionen

Bei kaum einem anderen Kompetenzaspekt spielen Motivation und Volition eine solche Rolle wie beim Erforschen und Explorieren: zu dieser Kompetenz gehört nicht allein die Fähigkeit und Bereitschaft zu einer selbsttätigen und selbstorganisierten Erfüllung eines Arbeitsauftrags, sie ist vielmehr von vornherein auf Transferleistungen ausgerichtet und damit auf die Fähigkeit und Bereitschaft, auch ohne expliziten Auftrag über das hinaus zugehen, was bereits erreicht ist. Diese starke Verbindung mit nicht-kognitiven Komponenten stellt eine Herausforderung für den zukünftigen Mathematikunterricht dar und dies um so mehr, als im Sinne der Bildungsstandards als Mindeststandards entsprechende Kompetenzen von *allen* Schülerinnen und Schülern erwartet werden. Gerade die schwächeren Schülerinnen und Schüler, die sich selbst unsicher fühlen, ziehen aber in der Regel eher fest umrissene Aufgabenstellungen vor.

4. Der Einsatz mathematischer Kurzfilme

Die Einführung von Mindeststandards impliziert einen zusätzlichen Fokus auf die schwächeren Schülerinnen und Schüler und – soll damit keine Nivellierung nach unten einhergehen – eine stärkere innere Differenzierung des Mathematikunterrichts mit Hilfe von individuellen Wochenplänen, selbstorganisiertem Lernen und einer Unterstützung der Lernenden untereinander. Zusätzlich sollten gerade für die Schwächeren über die bereits eingeführten Lernumgebungen hinaus Anreize geschaffen werden, selbst etwas auszuprobieren und weiterzuentwickeln. Angeregt durch den auf der GDM-Tagung 2007 in Berlin gezeigten Kurzfilm "Line Math" haben einige Studierende der PH Nordwestschweiz eigene Kurzfilme hergestellt, die dezentral – auf einem Computermonitor, einem Handy oder zuhause über das Internet – eingesetzt werden können.

Der Film "Ein Viertel plus ein Drittel" greift das im Zahlenbuch 6 benutzte Rechteckmodell zur Addition von Brüchen auf und gibt nebenbei auch Impulse auf nicht kognitiver Ebene: etwas wissen wollen, Misserfolge überwinden, etwas noch einmal machen, etwas selber machen, mit einfachen Mitteln arbeiten.

Erstaunlich ist, dass die Reihe der Kubikzahlen eine Folge von Quadratzahlen darstellt. Die Genese der ersten Glieder der Reihe führen in dem Film "Summe der Kubikzahlen" von der noch vagen Frage "Ist das immer so?" über das eigene Ausprobieren mit Holzwürfeln zu einer exakteren Hypothese in Gestalt einer Formel.

Der Film "Selber Parkette herstellen" knüpft an Bildern von M.C. Escher an und animiert dazu, einfache Parkettierungen selbst auszuprobieren.

Im Film "Winkelsummen" zeigt die Bewegung einer Büroklammer auf den Seiten einer Dreieckskizze den Weg zur Berechnung der Summe der Aussenwinkel im n-Eck und von da zur Formel der Innenwinkelsumme.

Allen Filmen ist gemeinsam, dass sie kurz, nicht zu aufwendig, ästhetisch reizvoll und selbsterklärend sind, sich der Arbeitsauftrag also auf den Impuls beschränken kann, die eigenen Überlegungen in schriftlicher Form festzuhalten. Die Filme sollen die Lernenden nicht überfordern und frustrieren, andererseits aber Lust auf ein eigenes Ausprobieren machen, was über das Gesehene hinausgeht. Das Format der Filme erlaubt einen dezentralen Einsatz und ermöglicht somit verschiedene Sozialformen und ein unterschiedliches Lerntempo.

Der Einsatz der Filme im Unterricht wird in mehreren Diplom-/Masterarbeiten untersucht werden.

Literatur

Klieme, E.; u.a. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise*. Online unter: http://www.dipf.de/publikationen/volltexte/zur_entwicklung_ nationaler_bildungsstandards.pdf (14.09.2008).

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Online unter: http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_ MSA_BS_04-12-2003.pdf (14.09.2008).

Linneweber-Lammerskitten, H. (2008). Das Kompetenzmodell HarmoS Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, 573 – 576

Linneweber-Lammerskitten, H. und Wälti, B. (2008). HarmoS-Mathematik: Kompetenzmodell und Vorschläge für Bildungsstandards. In: *Beiträge zur Lehrerbildung, 26,* 326-337

Miriam LÜKEN, Hannover

Muster und Strukturen – Bedeutung für den Schulanfang?!

Im mathematischen Anfangsunterricht werden Kinder nicht nur mit Zahlen, geometrischen Formen und Größen, sondern auch mit Mustern konfrontiert – und dies nicht erst seit „Muster und Strukturen“ zum neuen inhaltsbezogenen Kompetenzbereich in den Bildungsstandards avanciert und damit verstärkt in den Fokus gerückt ist. Im vorliegenden Beitrag wird ein Teilaspekt der Vielfalt an Strukturen betrachtet, denen Schulanfänger begegnen: nämlich Musterfolgen. Unter einer Musterfolge wird hier eine Folge aus Gegenständen, geometrischen oder farbigen Objekten verstanden, die nach einer bestimmten Regel wiederholt werden. Musterfolgeaufgaben sind Klassiker in den Schulbüchern der 1. Klassen. Relativ neu auf dem Markt sind hingegen Diagnosematerialien für den Schulanfang, mit denen die Zahlbegriffsentwicklung jedes Kindes erhoben werden kann. Neben mengen- und zahlenbezogenem Vorwissen, die nach neueren Untersuchungen Vorläuferfertigkeiten darstellen und Mathematikleistungen voraussagen können (vgl. Krajewski&Schneider 2006), gibt es auch hier mindestens eine Aufgabe zum Fortsetzen einer Musterfolge. Sowohl in an Lehrwerke angelehnte Gruppentests, in denen Musterfolgen meistens weitergezeichnet werden sollen (Abb. 1), sind sie zu finden, als auch in handlungsleitenden Diagnoseverfahren in Form eines Einzelinterviews, wie z.B. dem ElementarMathematischen BasisInterview (Peter-Koop u.a. 2007). Hier werden die Kinder im Vorschulteil aufgefordert, eine Reihe bunter Plastikbären (grün, gelb, blau, blau, grün, gelb, blau, blau) nachzulegen, fortzusetzen und zu erklären. Unklar bleibt allerdings, welche Erkenntnisse bezüglich der mathematischen Entwicklung des jeweiligen Kindes der Lehrer durch Bearbeiten dieser Aufgabe erhält. Welche Bedeutung hat es, wenn ein Kind eine Musterfolge nicht korrekt fortsetzen kann? Gibt es eventuell einen Zusammenhang zwischen der Fähigkeit, ein Muster weiterzuführen und zahlen- und mengenbezogenen Fähigkeiten? Und: Beruht der Einsatz von Musterfolgeaufgaben eigentlich auf empirischen Befunden? (vgl. Clarke u.a. 2008, 268ff)

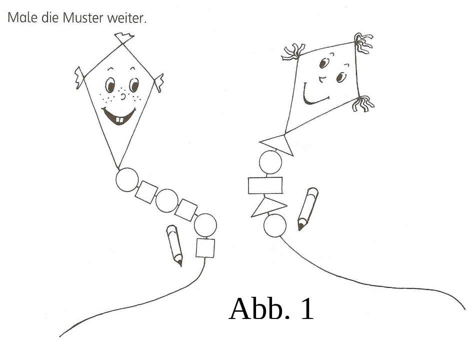


Abb. 1

Begründungen für Musterfolgeaufgaben

Die Sichtung einschlägiger Literatur zeigt ein Bild sehr unterschiedlicher Vorstellungen über die Funktion von Musterfolgeaufgaben, die allesamt nicht empirisch begründet sind. So sollen diese Aufgaben einen **leichten Zugang zu Mustern** ermöglichen (Steinweg 2001, 166) und beim bewussten Musterbilden wichtige **Vorerfahrungen** für das schulische Mathematiklernen gemacht werden (Peter-Koop&Grüßing 2007). Strukturierte Anordnungen konkreter Materialien führen nach Verboom (2006, 175) wie selbstverständlich zu **Zahlenfolgen**. Zudem würden die Grundtechniken des **Sortierens, Ordnens und Vergleichens** als wesentliche Voraussetzung für die Systematisierung von fachspezifischen Arbeitsweisen eingeübt. Laut Hoenisch&Niggemeyer (2004, 51ff) lernen Kinder mit Hilfe von Musterfolgen **Beziehungen und Zusammenhänge** zu **erkennen** und zu **verallgemeinern**, indem sie gegebene Informationen nutzen, um unbekannte Informationen vorherzusagen. Schließlich stelle das Fortsetzen von Folgen eine Fördermöglichkeit für **geometrisches Denken** dar. (Krauthausen&Scherer 2007, 60).

Ob das Fortsetzen einer Musterfolge tatsächlich ein Vorläufer so verschiedener Fähigkeiten wie dem Verallgemeinern oder dem Umgehen mit Zahlenfolgen ist, bleibt aufgrund fehlender Überprüfung ungewiss. Die genauere Analyse aktueller Schulbücher zeigt allerdings, dass es bei Musterfolgeaufgaben verschiedene Anforderungsniveaus und damit unterschiedliche Ansprüche an die Fähigkeiten der Kinder gibt.

„Statische“ versus „dynamische“ Musterfolge

Es lassen sich zwei Arten von Musterfolgen unterscheiden, die im Folgenden als „statisch“ (im Englischen *repeating pattern*) bzw. „dynamisch“ (*growth pattern*) bezeichnet werden. Am häufigsten zu finden sind zwei oder drei einzelne, sich abwechselnde Gegenstände, geometrische Objekte oder Farben (s. Abb. 1), die durch legen, ausmalen oder weiterzeichnen fortgesetzt werden sollen. Schon etwas weniger häufig sind Musterfolgen, bei denen ein Objekt mehrfach vorkommt (s. Abb.2). Hier müssen die Anzahlen der Folgenglieder (z.B. ein großes Dreieck, zwei kleine Dreiecke usw.) beachtet werden, damit das Muster fortgesetzt werden kann. Bei beiden beschriebenen Musterfolgen gilt es, eine Grundeinheit, sozusagen ein Grundmuster, zu finden, welches beim Fortsetzen der Musterfolge unverändert („statisch“) aneinandergereiht wird. Bei einer „dynamischen“ Musterfolge hingegen, die sehr selten in Schulbüchern vorkommt, verändert sich das Grundmuster bei der Wiederholung. Abb. 3 zeigt hierzu ein Beispiel: das Grundmuster „ein rotes und ein blaues Plättchen“ vergrößert sich bei jedem Folgeglied um ein rotes und ein blaues Plättchen. Das Muster könnte in die Zahlenfolge

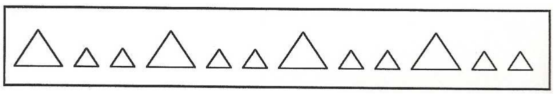
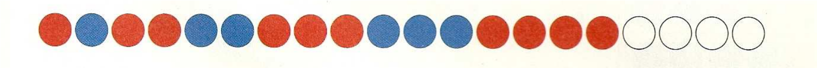


Abb. 2

 Abb. 3

1,1,2,2,3,3,4,4,usw. übersetzt werden. Eine arithmetische Analyse der Folgeglieder ist hier unumgänglich.

Hürden beim Fortsetzen einer Musterfolge

Untersuchungen von Steinweg (2001), Clarke u.a. (2008) sowie eine eigene Untersuchung zum Fortsetzen einer Musterfolge zeigen, dass zwischen 68% und 86% der Schulanfänger eine vorgegebene statische Musterfolge regelgerecht fortsetzen können. Die Frage, welche Fähigkeiten zum Fortsetzen eines Musters im intendierten Sinne benötigt werden, führte zu einer Analyse der Hürden, die beim Mustererkennungs- und -fortsetzungsprozess zu bewältigen sind. 74 Schulanfängern wurde hierzu eine Perlenkette mit fünf roten und fünf blauen Perlen – die hier im Hinblick auf Veranschaulichungsmittel des 1. Schuljahres als Musterfolge im Sinne „immer 5“, bzw. „immer die gleiche Anzahl“ interpretiert wird – vorgelegt und sie gebeten, diese zu beschreiben, nachzufädeln und das Muster fortzusetzen. Drei Phasen haben sich dabei herauskristallisiert:

1. Merkmale werden identifiziert und kategorisiert: *„Kugeln.“ „Ich sehe blaue Perlen und rote Perlen und eine schwarze Schnur.“ „Rot, blau.“ „Zehn!“ „5 in blau, 5 rote Perlen. Das sind 10.“*

2. Die Kategorien werden verglichen und wenn möglich geordnet, Beziehungen werden hergestellt: *„Links sind die roten und rechts die blauen Perlen.“ „Es sind gleich viele rote und blaue Perlen.“*

3. Die Erkenntnisse werden generalisiert, es findet ein Transfer statt: *„Immer so gleich weiter.“ „Noch mal so eine Reihenfolge.“ „Ich mach jede Sache 5.“*

Mit Hilfe des Osnabrücker Tests zur Zahlbegriffsentwicklung (van Luit u.a. 2001) wurde außerdem das Mengen- und Zahlenwissen der untersuchten Schulanfänger erhoben. Aus den Beobachtungen, dass die Kinder beim Bearbeiten der Musterfolgeaufgabe klassifizieren, ordnen und vergleichen, sowie der Tatsache, dass die Kinder – um die Musterfolge im Sinne von „immer gleiche Anzahl“ fortzusetzen – die Anzahl nicht genau bestimmen müssen, sondern ein Vergleich der Mächtigkeit mit Hilfe der Eins-zu-eins-Zuordnung genügt, ergab sich folgende Hypothese: Kinder, die eine Musterfolge regelgerecht fortsetzten können, besitzen ein größeres Vorwissen bezüglich Mengen, als die Kinder, die das Muster nicht richtig weiterführen. Dies hat sich empirisch bestätigt, allerdings gilt dies auch in Bezug auf das Zahlenvorwissen, hier ist der Unterschied im Vorwissen sogar noch größer.

Fazit

Musterfolgeaufgaben haben eine große traditionelle Bedeutung, ihr Einsatz beruht aber nicht auf empirischen Befunden. Die Analyse der Aufgaben hat allerdings gezeigt, dass durch die verschiedenen Arten von Musterfolgen durchaus unterschiedliche Fähigkeiten der Kinder angesprochen werden. Es gibt darüber hinaus keine empirischen Untersuchungen zur mathematischen Bedeutung von Musterfolgeaufgaben. Welche Denk- und Lernprozesse durch Musterfolgeaufgaben ausgelöst werden, ist weiterhin unklar und erfordert weitere Forschungsarbeit. Schließlich gibt es einen Zusammenhang zwischen der Fähigkeit eine Musterfolge regelgerecht fortzusetzen und mengen- und zahlenbezogenen Fähigkeiten. Die Kinder, die selbständig ein Muster fortsetzen können, sind auch diejenigen, die am Schulanfang mit größerem Vorwissen bezüglich Mengen und Zahlen starten.

Literatur:

Clarke, B., Clarke, D., Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Mathematische Kompetenzen von Grundschulkindern: Ergebnisse eines Ländervergleichs zwischen Australien und Deutschland. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *3/4*, 259-286.

Hoenisch, N. & Niggemeyer, E. (2004). *Mathe-Kings*. Weimar: verlag das netz

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, *53*, 246-262.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B. & Grüßing, M. (2007). *ElementarMathematisches BasisInterview*. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2007). *Mit Kindern Mathematik erleben*. Seelze: Lernbuch Verlag

Steinweg, S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT

van Luit, J., van de Rijt, B. & Hasemann K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung*. Göttingen: Hogrefe-Verlag

Verboom, L. (2006). „Mir fällt auf: Du hast die 1 krumm geschrieben!“ In E. Rathgeb-Schnierer & al. (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis?* (S.167-178). München: Oldenbourg

Abb.1 aus: Hacker u.a. (2005). *Lernstands-Diagnose als Basis zur individuellen Förderung*. S.9

Abb.2 aus: Steinweg (2001). S.153

Abb.3 aus: Wittmann & Müller (2004). *Das Zahlenbuch 1*. S.17

Carmen MAXARA, Paderborn

Simulationskompetenzen und stochastische Kompetenzen – Ergebnisse einer explorativen Fallstudie

Im Anschluss an die Veranstaltung „Elementare Stochastik“ (an der Universität Kassel), in der intensiv die Software Fathom zur Simulation eingesetzt wurde, ist in einer explorativen Studie die eigenständige Simulationskonstruktion von Studierenden untersucht worden. Es wurden Kompetenzanalysen bezüglich stochastischer Kompetenzen und computerbezogener Simulationskompetenzen durchgeführt. Die Ergebnisse der Kompetenzanalysen lassen unterschiedliche Strukturen beobachten und verdeutlichen sehr aussagekräftig die Stärken und Schwächen der Studierenden.

1. Didaktische Grundlagen

In der Veranstaltung haben wir den Einsatz von Simulationen systematisch über das didaktische Konzept des Simulationsplans eingesetzt und unterstützt (vgl. Maxara & Biehler 2006). Durch die vorgegebene Struktur des Simulationsplans, der bei vielen stochastischen Situationen anwendbar ist, sollten die Lernenden ein tragfähiges Konzept zur Umsetzung von Simulationen allgemein und im speziellen auch für die Realisierung in Fathom als Leitfaden nutzen können. Der Simulationsplan ist wie folgt aufgebaut, wobei sich die Schritte 1 – 4 direkt auf ein konkretes Zufallsmodell sowie auch in eine Simulation in Fathom übertragen lassen (vgl. Biehler & Maxara 2007):

	Simulationsplan: Stochastische Komponenten
M	Modellierung der realen Situation mit zufälligem Ausgang durch ein Zufallsexperiment
1	Festlegen des Modell-Zufallsexperiments
2	Identifikation interessierender Ereignisse (E) und Zufallsgrößen (ZG)
3	Wiederholung des Modell-Zufallsexperiments u. Sammeln von Daten bez. der E u. ZG
4	Datenanalyse: relative Häufigkeiten (E); empirische Verteilungen (ZG)
I	Interpretation und Validierung

2. Design und Methode der explorativen Fallstudie

Die hier untersuchte Fallstudie war damals die erste Studie, die sich mit Microprozessen beim Fathom-basierten Problemlösen von stochastischen Simulationsaufgaben befasste. Ein Fokus dieser Studie lag auf den Kompetenzen der Studierenden beim eigenständigen Konstruieren von Simulationsumgebungen zu gegebenen stochastischen Situationen. Die Fallstudie umfasste acht Studierende, die die Veranstaltung „Elementare Stochastik“ im WS 03/04 an der Universität Kassel besucht hatten, in der durchgängig die Software Fathom mit einem Schwerpunkt Simulation eingesetzt wurde.

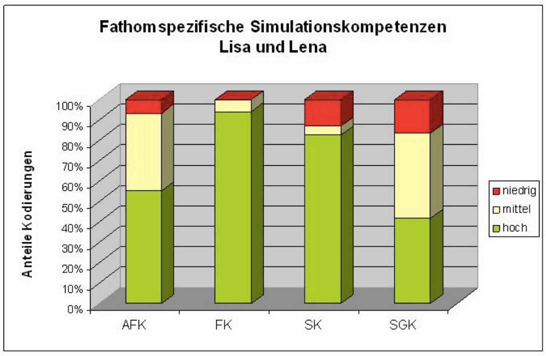
Den Studierenden lag außerdem ein didaktisch aufbereitetes Simulationsskript (Maxara 2006) vor. 3-4 Wochen nach der Veranstaltung sollten die Studierenden paarweise die folgende Krawattenaufgabe per Simulation

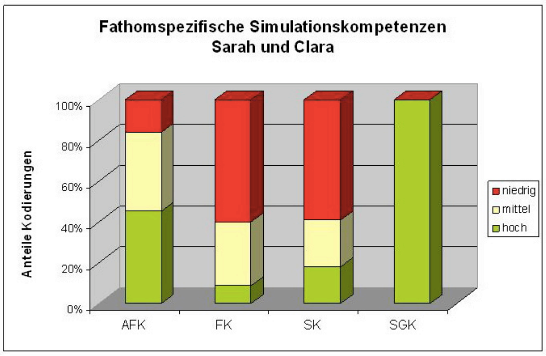
Krawattenaufgabe:
Herr Becker muss während seiner Arbeitszeit immer einen schwarzen Anzug tragen, wobei er aber die Krawatte frei wählen kann. In seinem Schrank hat Herr Becker 7 verschiedene Krawatten. Jeden Morgen greift er sich zufällig eine aus dem Schrank und hängt diese abends wieder zurück.
Wie wahrscheinlich ist es, dass Hr. Becker 5 verschiedene Krawatten trägt?
Wie wahrscheinlich ist es, dass Herr Becker mindestens 2 gleiche Krawatten trägt?
Wie viele verschiedene Krawatten trägt Herr Becker durchschnittlich in seiner fünftägigen Arbeitswoche?

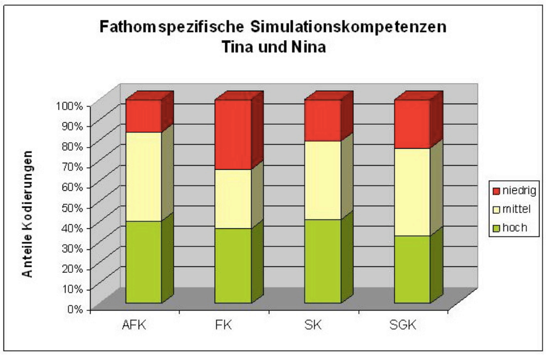
oder theoretischen Ansätzen lösen. Diese Arbeitsphase wurde videographiert und die Bildschirmaktivitäten wurden mit einer Screencapturesoftware aufgezeichnet. Die kleine Stichprobe erforderte aufgrund der explorativen Erkundung der fathom-spezifischen Simulationskompetenzen und der stochastischen Kompetenzen qualitative Auswertungsmethoden. Diese Kompetenzen wurden mit Hilfe einer Anpassung der Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2003) erfasst.

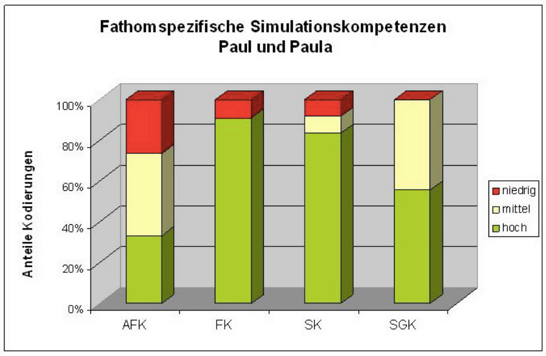
3. Ergebnisse

Zunächst einmal lässt sich festhalten, dass alle Paare die gestellte Aufgabe lösen konnten. Um die Fathom-spezifischen Simulationskompetenzen und die stochastischen Kompetenzen der Studierenden zu erfassen, wurden Kategoriensysteme entwickelt. Zu den Fathom-spezifischen Simulationskompetenzen gab es bereits Vorarbeiten in der AG Biehler. Die dort identifizierten Kompetenzen wurden hier ausdifferenziert und objektiviert, so dass die Kompetenzen der Paare nun untereinander vergleichbar sind. Dies kann auch als Beitrag zur Kompetenzdiagnose in komplexen Lösungsprozessen verstanden werden. Die fathom-spezifischen Simulationskompetenzen wurden in die folgenden vier Kompetenzen differenziert: 1) allgemeine Fathomkompetenz (AFK; beschreibt die technischen Kompetenzen im Umgang mit der Software), 2) Formelkompetenz (FK; umfasst alle Kompetenzen im Umgang mit dem Formeleditor und Funktionen in verschiedenen Kontexten), 3) Simulationskompetenz (SK; beinhaltet Interpretations- und Modellierungstätigkeiten, Planung, Umsetzung in die Simulation), 4) strategische Kompetenzen (SGK; umfasst Kontroll- und Debugging-Strategien). Die stochastischen Kompetenzen sind etwas enger definiert und beinhalten die Kategorien „Verwendung/Verfügbarkeit stochastischer Fachbegriffe“ (VB) sowie „Verständnis über die Aussagekraft von Simulationsergebnissen“ (VAS). Jede Kompetenzklasse besitzt die Ausprägungen hoch, mittel und niedrig. Betrachtet man die Fathom-spezifischen Simulationskompetenzen der vier Paare ergibt sich folgendes Bild:





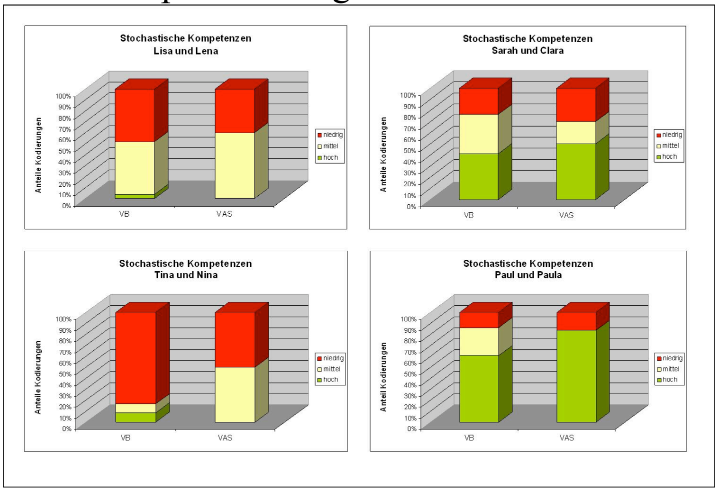




Eine bestimmte Säule beinhaltet alle kodierten Analyseeinheiten einer Kategorie, so dass bei der ersten Säule (AFK) des Pärchens Lisa und Lena von allen vergebenen Analyseeinheiten zur Allgemeinen Fathomkompetenz (100%) etwas mehr als 50% hohe Ausprägungen, etwas mehr als 40% mittlere Ausprägungen und etwa 5% niedrige Ausprägungen vergeben wurden. Hohe Simulationskompetenz wurde beispielsweise vergeben, wenn die Studierenden sofort wussten, wie sie ihr gewähltes Zufallsmodell in Fathom umsetzen müssen oder wussten, was sie als nächstes tun müssen, um das interessierende Ereignis umzusetzen. Gleichzeitig erhalten sie hohe Formelkompetenz, wenn sie sofort eine richtige Formel zur Umsetzung ihres modellierten Zufallsexperiments oder ihres interessierenden Ereignisses wussten. Wussten sie zwar, wie sie das Modell in Fathom realisieren müssen, allerdings nicht eine entsprechende Formel, so erhielten sie einen Code für hohe Simulations- und niedrige Formelkompetenz. In den vier Kompetenzdiagrammen zur Fathom-spezifischen Simulationskompetenz lassen sich drei verschiedene Strukturen erkennen. Lisa/Lena und Paul/Paula haben jeweils sehr hohe Formel- und Simulationskompetenz und mittlere bis hohe Ausprägungen in den beiden übrigen Kompetenzen. Diese beiden Paare hatten während ihrer Simulationskonstruktion kaum Probleme und Schwierigkeiten. Bei Sarah und Clara lässt sich eine fast komplementäre

Struktur erkennen. Sie hatten bei der Simulationsumsetzung größere Schwierigkeiten. Als dritte Struktur lässt sich die Verteilung der Ausprägungen bei Tina und Nina festhalten, die für alle Kompetenzbereiche in etwa ähnlich ist. Schwierigkeiten bei der Realisierung der Simulation in Fathom sind vor allem Mängel im Formelwissen und planloses Vorgehen.

Betrachtet man die stochastischen Kompetenzen ergibt sich nebenstehendes Bild. Hier beschreiben die jeweils ersten Säulen die Kategorie VB und die zweiten Säulen VAS. Die stochastischen Kompetenzen sind generell niedriger ausgeprägt. Schwierigkeiten ließen sich hier vor allem bei der Ergebnisinterpretation beobachten.



Ein Zusammenhang zwischen Fathom-spezifischen Simulationskompetenzen und stochastischen Komptenzen ließ sich bei diesen Paaren nicht erkennen.

4. Fazit

Neben noch vielfältigen, weiteren interessanten Ergebnissen (vgl. Maxara in Press) wurden hier Kompetenzen konzeptualisiert und aussagekräftige Auswertungsmethoden zur Beschreibung und Analyse dieser Kompetenzen entwickelt, die als Grundlage für weitere Untersuchungen genutzt werden können.

Literatur

Biehler, R. & Maxara, C. (2007). Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. *MU, 53 (3),* 45 - 61

Maxara, C. (in Press). *Stochastische Simulation von Zufallsexperimenten mit Fathom – eine theoretische Werkzeuganalyse und explorative Fallstudie.* Hildesheim: Franzbecker

Maxara, C. (2006). *Einführung in die stochastische Simulation mit Fathom*. Kadisto Bd. 1, Universität Kassel: Kasseler Online Bibliothek Repository & Archiv

Maxara, C. & Biehler, R. (2006). Students' Probabilistic Simulation and Modeling Competence after a Computer-Intensive Elementary Course in Statistics and Probability. In Rossman, A. & Chance, B. (Hrsg): *Working Cooperatively in Statistics Education. ICoTS 7,* Salvador da Bahia, Brazil

Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* Weinheim: Beltz Verlag.

Carla MERSCHMEYER-BRÜWER, Braunschweig

Die Bedeutung von geometrischen und arithmetischen Vorstellungen für das Mathematiklernen von Grundschulkindern

1. Beziehungen zwischen geometrischen und arithmetischen Vorstellungen

Schon in einer sehr frühen Phase ihrer Entwicklung machen Kinder am eigenen Körper erste Erfahrungen über den Zusammenhang von Struktur und Anzahl. Damit werden erste mentale arithmetische und geometrische Vorstellungen ausgebildet und miteinander verknüpft. Kinder „begreifen“ beispielsweise, dass sie 10 Finger haben, und zwar an jeder Hand fünf Finger. Dazu müssen sie die Anordnung ihrer Finger als geometrische Struktur erfassen müssen, um diese sodann zu untergliedern und in ihrer Anzahl zu bestimmen. Solche Prozesse umfassen räumliches Strukturieren. Die geometrischen Vorstellungen bei räumlichen Strukturierungsprozessen werden wesentlich bestimmt durch die Bildung komplexer Einheiten, durch Tiefendecodierung und durch Strukturierungskoordination. Die zugehörigen arithmetischen Vorstellungen sind durch Simultan- und Quasi-Simultanerfassung und durch begleitende Rechenoperationen charakterisiert (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2002).

2. Förderung geometrischer und arithmetischer Vorstellungen

Im mathematischen Anfangsunterricht der Grundschule nimmt man auf die Finger an den eigenen Händen Bezug, um einen Zahlbegriff für die ersten natürlichen Zahlen bis 10 sowie ein Verständnis für erste Rechenoperationen zu fördern.

Abb. 1: Mit einem Kind wird die Zahlzerlegung der 10 an den eigenen Fingern geübt, indem mit einem Stift die Finger untergliedert werden. Auf diese Weise kann das Kind so z. B. die Zerlegung 3+7=10 identifizieren.

Diese Aspekte von geometrischer Struktur und arithmetischem Begriff von Anzahl lassen sich besonders gut durch ein Aufgabenformat zu Schräg-bildern von Würfelkonfigurationen fördern. Deshalb wurde dazu eine Lernumgebung entwickelt (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2005). Dieses klassische Aufgabenformat wurde in seinen Anforderungen an die geometrischen und arithmetischen mentalen Vorstellungen systematisch differenziert (vgl. Abb. 2).

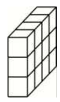
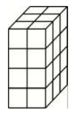
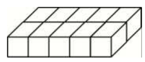
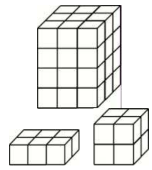
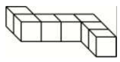
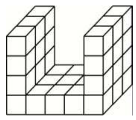
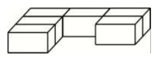
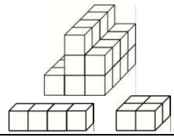
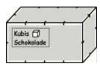
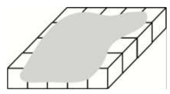
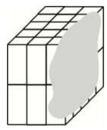
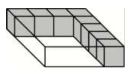
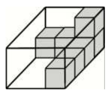
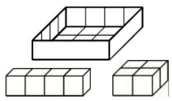
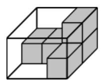
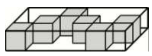
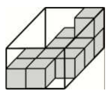
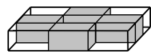
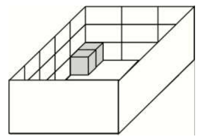
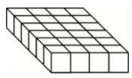
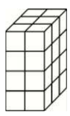
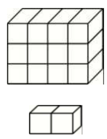
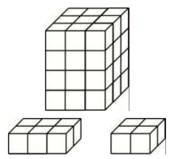
Variation des Aufgabenformats	**FE I** Einschichtige Würfelbauwerke in Würfel strukturieren	**FE II** Mehrschichtige Würfelbauwerke in Würfel strukturieren	**FE III** Einschichtige Würfelbauwerke in Würfelmehrlinge strukturieren	**FE IV** Mehrschichtige Würfelbauwerke in Würfelmehrlinge strukturieren
FB 1 Quader strukturieren				
FB 2 Nicht-konvexe zu einem Quader ergänzen				
FB 3 Unvollständig dargestellte Quader erfassen				
FB 4 Quader ausfüllen mit direkt konstruierbaren Kantenlängen				
FB 5 Quader ausfüllen mit rekonstruierbaren Kantenlängen				
FB 6 Quadervolumen verdoppeln und alternative Maße ermitteln				

Abb. 2: Konzeption und Differenzierung des Aufgabeformats „Aus wie vielen Bausteinen besteht die Anordnung?“

Dabei fordert die bildliche Darstellung in unterschiedlichem Maße die geometrischen Vorstellungen hinsichtlich der Komplexität der zu bildenden Einheiten, hinsichtlich der Tiefendecodierung und hinsichtlich der räumlichen Koordination gebildeter Einheiten heraus. Auf diese individuell ausgeprägten geometrischen Vorstellungen müssen die arithmetischen Vorstellungen adäquat abgestimmt sein. Die Anzahlerfassung, d. h. ob Würfel einzeln registriert oder umfangreichere Würfelanordnungen simultan erfasst werden, und die Rechenoperationen – schrittweises Zählen, Addieren oder Multiplizieren – werden durch die Strukturierungsschritte und damit durch die entsprechenden geometrischen Vorstellungen determiniert.

Bei der hier vorgestellten Lernumgebung werden zwei verschiedene Aufgabenkontexte vorgegeben: 1. Würfelbauwerke untergliedern und bauen und 2. Schachteln füllen (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2007). Daraus leiten sich variierende Aufgabenformate ab, die an folgenden Leitfragen mit Bezug zur Volumenbestimmung orientiert sind: „Aus wie vielen Bausteinen besteht das Bauwerk?“ und „Wie viele Bausteine passen insgesamt in die Schachtel hinein?“. In der hier dargestellten Lernumgebung gibt es insgesamt vier verschiedenen Fördereinheiten (FE), die ihrerseits jeweils sechs Förderbausteine (FB) umfassen (vgl. Abb. 2). Die Fördereinheiten sind hierarchisch nach der Komplexität der von den Kindern zu strukturierenden Würfelbauwerke und nach der Komplexität der dabei zu wählenden Strukturierungseinheit abgestuft. Die Förderbausteine variieren das Aufgabenformat nach dem Anspruch an die mentale Vorstellung hinsichtlich der im Bild erkennbaren strukturellen Vorgaben.

3. Von Handlungen zu mentalen Vorstellungen

Räumliche Strukturen erschließen sich einem Kind nicht automatisch, sondern müssen aktiv durch Deutungsprozesse konstruiert werden. In der erprobten Lernumgebung gibt es deshalb jeweils drei verschiedene Handlungsaktivitäten: 1. *konkretes Handeln* in Form von Bauen und Zerlegen von Bauwerken aus Bausteinen, 2. *Argumentieren* sowie 3. *mentales Analysieren*.

Die Kinder werden zunächst aufgefordert, die Aufgabenstellungen zunächst rein gedanklich in ihrer Anschauung (d. h. hier konkret in ihrer räumlichen Vorstellung) zu lösen (mental-analytisch, vgl. Abb. 3): „Vermute!“ Eine solche Vermutung können die Kinder sich dann gegenseitig argumentativ oder enaktiv begründen. Durch diese Variation der Artikulationsmöglichkeiten können sich die Kinder zunehmend von der Erarbeitung ihrer Lösung durch konkretes Handeln mit dem Material lösen und eine räumliche Strukturierungsaufgabe mehr oder weniger mental analysieren. Die Handlung soll im Idealfall nur noch der Kontrolle bzw. der kommunikativen Verdeutlichung der eigenen vorher angestellten Überlegungen zur Lösung der Problemstellung dienen.

Beim Vergleich zwischen Annahme und gebauter Objektanordnung verbessern die Kinder ihre geometrischen Vorstellungsfähigkeiten und ihr Verständnis für die Erfassung der Anzahl. Aus den Diskrepanzen zwischen durch mentale Analyse vermutete und durch Handeln erworbene Antworten ergeben sich kognitive Konflikte. Damit wird die Aufmerksamkeit des Kindes stärker auf sein Denken als auf sein Handeln gerichtet. Bei diesem kindlichen Lernprozess wird deshalb die mentale Vorstellung zunehmend gefordert und so die Beziehung zwischen der geometrischen und arithmetischen Vorstellung abstrahiert.

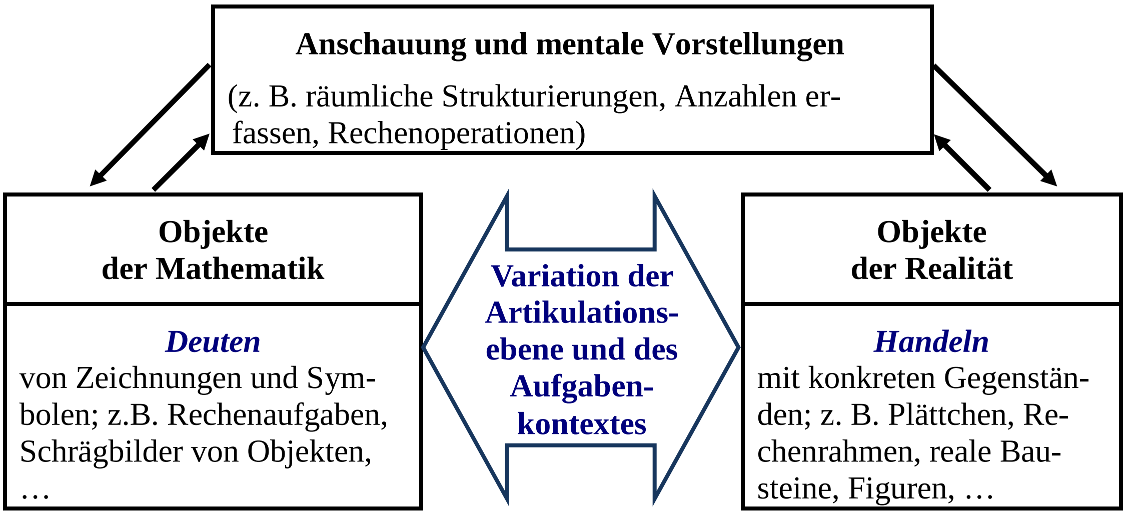


Abb. 3: Bedeutung der Anschauung als Mittler zwischen Mathematik und Realität

4. Bedeutung für das Mathematiklernen

Inhaltliche und konzeptionell trägt diese Lernumgebung dazu bei, mentale Vorstellungen zu Mustern bei den Kindern zu fördern. Eine wesentliche Erkenntnis besteht darin, dass die geometrischen Vorstellungen die Ausprägung und damit weitere Entwicklung der arithmetischen Vorstellungen bedingen. Deshalb sind Aufgabenformate, die diese Vorstellungen in ihrem Beziehungsgefüge bei Kindern herausfordern, mit Blick auf das Weiterlernen in der Geometrie wie auch der Algebra fundamental bedeutsam.

Literatur

Merschmeyer-Brüwer, C. (2002). Räumliche Strukturierungsweisen bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen – Augenbewegungen als Indikatoren für mentale Prozesse. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 23 (1), 28-50.

Merschmeyer-Brüwer (2005). Räumliche Strukturen „begreifen“ – Fördermöglichkeiten in der Grundschule?! In: *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Merschmeyer-Brüwer (2006). „Ich habe erst diese Würfel gezählt und dann immer zwei dazu getan.“ – Zum Zusammenhang von räumlichem Vorstellungsvermögen und Rechenfertigkeiten bei der Strukturierung von Würfelbauwerken. *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker, 367-370.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2007). Räumliche Strukturen „begreifen“. Prozessbezogene Kompetenzen entwickeln. *Die Grundschulzeitschrift,* Heft 201, Jg. 21, S. 42-50.

Marco MEYER, Engelbert NIEHAUS, Koblenz-Landau

Geographie und Mathematik: Räumliche Logik in Geoinformationssystemen

Räumliche Probleme aus der Geographie bieten zahlreiche Ansatzpunkte zur mathematischen Modellbildung, die die Bereiche der Geometrie, der Algebra, der Statistik und der Analysis für die Problemlösung nutzen. Räumliche Probleme können über die Analyse von gesammelten Daten in Geoinformationssystemen (GIS) gelöst werden. Dabei werden gesammelten Daten spezifische Raumkoordinaten oder auch Flächen zugeordnet. Mathematische Modelle werden in geographischen Anwendungen genutzt, um diese Datensätze auszuwerten. Vorgestellt werden spezielle Aspekte räumlicher Logik, die die Gültigkeit von Aussagen für bestimmte Raumkoordinaten nutzt. Deren Gültigkeit kann mit Hilfe von Computeralgebrasystemen (CAS) im Raum veranschaulicht werden.

1. Geoinformationssysteme und mathematische Modellbildung

Ein Geoinformationssystem (GIS) ist ein rechnergestütztes System, welches aus Hardware, Software, Daten und Anwendungen besteht. Mit diesem können Daten digital erfasst, gespeichert, reorganisiert und räumlich analysiert, sowie auf diverse Arten ausgegeben und graphisch dargestellt werden.

Solche Daten können als Flächeninformationen oder auch als Punktinformationen vorliegen. Bei Flächeninformationen ist es kein Problem vorliegenden Informationen über bestimme Punkte in diesem Gebiet zu erhalten, da allen Punkten dieser Fläche, das entsprechende Attribut zugewiesen wurde. Im Gegensatz dazu ist es bei Punktinformationen nicht ohne weiteres möglich, Aussagen über das umliegende Gebiet zu erhalten.

Hierzu bedient man sich der Interpolation als mathematisches Hilfsmittel, um diese diskreten Daten zu verstetigen und um somit Aussagen über umliegende Gebiete zu ermöglichen.

Wichtig ist diese Verstetigung beispielsweise im Rahmen einer Risikobewertung, bei der an bestimmten Punkten ein Risikofaktor aus den gemessenen Werten bestimmt wurde. Mit Hilfe des Modells kann man dann eine Risikokarte für das gesamte Gebiet erstellen.

2. Logik und unscharfe Logik im Raum

In der klassischen Logik, kann man Aussagen den Wert 1 für wahr, bzw. 0 für falsch zuordnen. Im GIS werden Koordinaten in der xy-Ebene Wahrheitswerte als Attribut zugeordnet. Damit ist es möglich auch aussagenlogische Regeln auf diese Attribute im Raum anzuwenden. Es entsteht folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightarrow f(x,y) \in \{0,1\}$$

Sieht man diese Funktion unter dem Gesichtspunkt der Risikobewertung, so kann man sagen, dass jedem Punkt *(x,y)* ein Risikowert *f(x,y)* zugewiesen wird. Ein Risiko liegt vor, wenn diesen Koordinaten das Attribut 1 zugeordnet wurde (mathematisch ist mit *f* ein aussagenlogisches Prädikat auf $\mathbb{R}^2$ gegeben).

Betrachtet man zum Beispiel Schadstoffe in der Luft oder eine Ozonbelastung im Punkt *(x,y)*, so kann man mit dieser scharfen logischen Struktur nur Aussagen treffen, ob an dem Punkt *(x,y)* ein Grenzwert überschritten wurde (*f(x,y)=1*) oder nicht (*f(x,y)=0*). Graduelle Übergänge in der unmittelbaren Umgebung der risikobehafteten Koordinaten, sind so nicht ohne weiteres zu modellieren.

$$\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \mu(x, y) = z \in [0,1]$$

Geht man jedoch zur unscharfen Logik über, so kann man diese graduellen Übergänge durch ein "Risikogebirge" als Funktionsgraph von *f* mit Hilfe der Interpolation realisieren. Die entstandene Funktion der Form

wird als Zugehörigkeitsfunktion zur entsprechenden Fuzzymenge "hohe Ozonbelastung" gedeutet. Damit ist es nun möglich, für jeden Punkt der *xy*-Ebene einen Zugehörigkeitsgrad zu bestimmen und damit fuzzylogische Folgerung zu erzeugen.

Ein Beispiel für eine solche fuzzylogische Struktur wäre die folgende Regel:

WENN *Ozonbelastung hoch* DANN *Verringere körperliche Arbeit*.

Der linguistische Wert "*Verringere körperliche Arbeit*" wird ebenfalls durch eine Funktion der Form :

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$l \rightarrow \gamma(l) = y \in [0,1]$$

Mathematisch gesehen, erfolgt eine Auswertung dieser Regel über die Funktion:

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow g(x, y) = \gamma^{-1}(\mu(x, y)) = l$$

Gilt nun $\mu(x,y) = 0.8$ so erhält man durch die oben genannte Regel einen Zugehörigkeitsgrad zum linguistischen Wert *Verringerung der körplichen Arbeit* von 0.8. Durch Einsetzen dieses Funktionswerts in die Umkehrrelation erhält man dann den zugehörigen Wert. Um diesen Prozentsatz sollte die Arbeit reduziert werden, um kein Gesundheitsrisiko einzugehen.

Schülerinnen und Schülern sollen in diesem Zusammenhang eine solche logische Auswertung räumlich im 3D-Graphen interpretieren können. Für diese Veranschaulichung verwendet man zwei bijektive, streng monotone Funktionen *h* und *j*, die jeweils von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen abbilden, da die Umkehrabbildungen existieren und eindeutig sind und man diese sehr gut graphisch veranschaulichen kann. Die Funktion *h* soll dabei die Zugehörigkeitsfunktionen zu dem linuguisten Wert "*Ozonbelastung hoch*" sein, *j* die Zugehörigkeitsfunktion zum Wert "*Verringerung der körperlichen Arbeit*".

Als erstes berechnet man den Funktionswert von *h* an der Stelle *x*. Danach trägt man im Graphen der Funktion *j* diesen Wert ab, indem man eine Parallele zur x-Achse durch den berechneten Wert zeichnet. An der Stelle, an welchem diese Parallele den Graphen der Funktion *j* schneidet, fällt man das Lot auf die *x*-Achse und erhält damit den Wert für die Verringerung.

In der Anwendung erhält man Risikobewertungen im Allgemeinen von Experten, welche diese auch in der oben genannten linguistischen Struktur angeben. Mit Hilfe dieses Verfahrens, ist es möglich, solche unscharfen Aussagen und damit das Expertenwissen, in ein mathematisches Modell zu implementieren.

3. Veranschaulichung von räumlicher Logik mit CAS

Für räumliche Interpretation logischer Zusammenhänge ist es hilfreich, die so entstandene Risikofunktion mit Hilfe eines CAS plotten zu lassen. Das visualisierte Risikogebirge kann nun als zweite Ebene über die ursprüngliche Karte im GIS gelegt werden. So können risikobehaftete Gebiete direkt anhand der Erhebungen abgelesen werden. Jetzt ist es auch Schülerinnen und Schülern möglich ohne große Probleme Informationen aus dem Risikogebirge abzulesen und die vorhandenen Daten in einem 3D-Graphen zu deuten.

So können von den Schülerinnen und Schülern beispielsweise Wege von einem Ort A zu einem Ort B geplant werden, welche nicht durch Gebiete mit hohem Risiko laufen sollen. Die Risikokarten können in diesem Fall wie Landkarten in der Geographie gelesen werden, wobei die dritte Dimension nicht die Höhe über dem Meeresspiegel, sondern das Risiko an diesem Punkt *(x,y)* angibt.

4. Wiki-Inhalte für die Behandlung von räumlicher Logik mit dem CAS Maxima

Eine Verbindung zwischen den Bereichen Geographie und Mathematik stellt die räumliche Logik dar. Die notwendigen mathematischen Werkzeuge für die Abbildung in Geoinformationssystemen findet man nicht in aktuellen Schulbüchern. In einem Wiki können Themen, die in dieser Form nicht Gegenstand der mathematischen Ausbildung sind, bereits als inhaltlicher Prototyp dargestellt werden, die als Startpunkt für mathematische Modellbildung zwischen Geographie und Mathematik verwendet werden können. Dadurch können innovative wissenschaftliche Ansätze bei räumlich-geographischen Problemen in Schulprojekten eingesetzt werden. Dafür ist es notwendig, dass im Wiki eine Anleitung vorgegeben wird, wie die Schülerinnen und Schüler mit einem CAS als

Werkzeug umgehen können, um räumliche Logik zu visualisieren. In dem Wiki werden für die Schülerinnen und Schüler Hilfen gegeben, mit denen sie die Eingabe der Stützstellen umsetzen und mit Maxima die Zugehörigkeitsfunktionen bzw. die Gültigkeit eines linguistischen Wertes in einem geographischen Gebiet veranschaulichen können. Für das Verständnis von mehrdimensionalen Funktionen und das Interpretieren von 3D-Graphen kann die Geographie wiederum als Veranschaulichungshilfe dienen, denn bei Landkarten wird funktional jedem Punkt der Ebene eine Höhe zugeordnet. Ziel der Nutzung des CAS ist es, logische bzw. fuzzy-logische Verknüpfungen in ihren Auswirkungen im Raum zu untersuchen und zu veranschaulichen. Das CAS wird als Instrument zur Visualisierung räumlicher Strukturen verwenden.

5. Fazit

Die Themen Logik und Fuzzy-Logik tauchen im Lehrplan und damit auch in den Schulbüchern nicht auf. Jedoch stellt gerade die Fuzzy-Logik eine Möglichkeit dar, verbale Aussagen und Folgerungen aus dem Alltag mathematisch zu formulieren. Da man die linguistischen Werte durch Zugehörigkeitsfunktionen darstellen kann, gelingt es, die Leitidee L4, Funktionaler Zusammenhang, des Rahmenlehrplans mit einem Problem aus der Realität zu verknüpfen. Durch die Implementierung dieser Regeln in ein GIS, erreicht man einen fächerübergreifenden Aspekt mit der Geographie, welche die Anwendungsprobleme liefert. Durch die graphische Veranschaulichung dieser Fuzzylogischen Folgerungen in einem CAS ist es möglich, dieses Themas auch in den Klassenstufen, denen die analytischen Voraussetzungen zur Bearbeitung dieser Thematik fehlen, zu verwenden, da man diese mehrdimensionale Funktionen als Graph (Landkarte) interpretiert.

6 Literatur

[1] Rahmenlehrplan Mathematik, Klassenstufen 5 – 9/10, Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz (2007)

[2] Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach, Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung Rheinland-Pfalz (1998)

[3] Nguyen, Hung T., Walker, Elbert A., *A First Course in Fuzzy Logic*, CRC Press Inc., Boca Raton, (1997)

[4] Biewer, Benno, *Fuzzy Methoden*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1997)

[5] Meyer, Marco, Niehaus, Engelbert, *Förderung von Schüler(-inne)n mit besonderer mathematischer Begabung am Beispiel der Fuzzy-Theorie*, (2008)

[6] Frey, Karl, *Die Projektmethode*, 10.Auflage, Beltz, Weinheim (1982, 1990, 2005)

Winfried MÜLLER, Potsdam

Entdeckungen am Billard - ein Unterrichtsprojekt

Vorbemerkung: Das Projekt ist jahrgangsunabhängig konzipiert, für die Sekundarstufe gedacht und teilerprobt. Mögliche Impulse im Unterricht sind i. f. *kursiv* geschrieben.

A) „Wir springen im Dreieck“

Die Beliebtheit des Billardspiels kann für Unterrichtende Anlass sein, sich auch „mathematisch“ damit anzufreunden. So wird die Version Pool-Billard von zwei Spielenden mit 15 nummerierten Kugeln (plus weißem Spielball) gespielt, die Nrn.1-7 sind die „Ganzen“ oder „Vollen“, die Nrn.9-15 die „Halben“, die schwarze “8“ (❽) gilt es als letzte in eines der Löcher zu spielen, zuvor die eigenen sieben. Die Ausgangsaufstellung der 15 Kugeln erfolgt in einem dreieckigen Rahmen; die ❽ gehört dabei in die Mitte.

❽*Was ist überhaupt die Mitte?* ❽*Ginge es auch beim Start einer Snooker-Partie?* [Snooker, eine weitere Billard-Variante, wird mit 21 Kugeln plus Spielball gespielt, davon 15 rote und sechs andersfarbige.]

Das Bild zeigt eine Kinderspielvariante vom Poolbillard.

Warum kann man die ❽ hier in die Mitte legen? ❽Für wie viel Kugeln geht das überhaupt? [1; 4; 7; 10; ..]❽Wieviel Kugeln lassen sich in ein Dreieck packen?

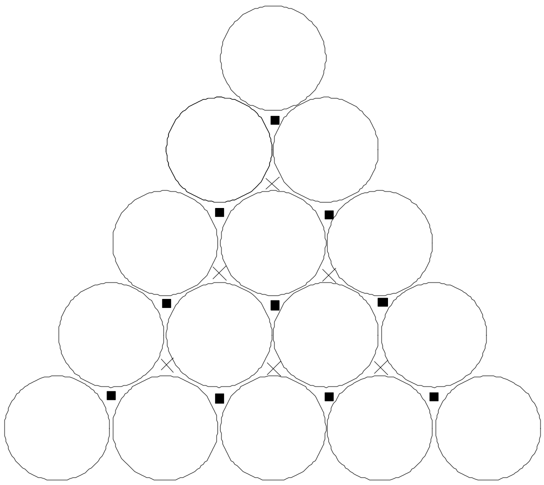
Plötzlich beschäftigen wir uns mit Dreieckszahlen! Der Zusammenhang zwischen der Kugelzahl n an den Seiten des gleichschenkligen Dreiecks – bisher tauchten ja 4, 5 und 6 auf – und ihrer Gesamtzahl S(n) im Dreieck führt bekanntlich auf die gaußsche Summenformel; ein Beweis wird sich i. f. ergeben, s. a. [2].

B) „Ab in höhere Dimensionen“

Am Ende der letzten Partie Pool wird aufgeräumt, der Spielball auf das gefüllte Dreieck gelegt (er rollt in eine Lücke).

❽*Wie viele Plätze gibt es dafür generell?*

❽*Wie viele Kugeln können wir also in eine zweite Schicht packen?*



Mit n neuen Kugeln kommen n-2 (x) und n-1 (■) weitere Plätze hinzu.

Sie schließen sich z. T. aus!

Insgesamt sind es $(n-1)^2$ [dazu fügen wir die beiden (■)- und (x)-Dreiecke aneinander und formen diese Raute zum Quadrat um, womit sich leicht die gaußsche Formel ergibt].

Maximal sind es S((n-1)).

Führen wir das fort, erhalten wir ein Tetraeder. Für die Kugelanzahl A(n) darin bei der „Seitenlänge“ n gilt $A(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ [sogen. Tetraederzahl, nach den Dreieckszahlen ein weiteres Bsp. figurierter Zahlen (vgl. [6]); sie tauchen als 3./4. Schräge im pascalschen Dreieck auf].

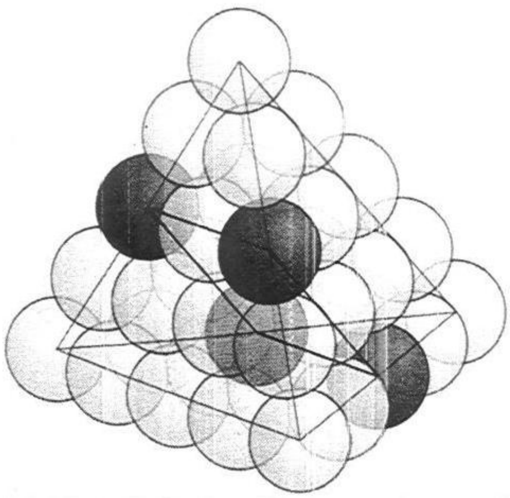
Je nach Vorkenntnissen der SchülerInnen kann diese Formel z.B. durch Induktion bewiesen werden [es gilt ja A(n+1) = A(n) + S(n+1)] oder durch $A(n)=\sum_{i=1}^{n} S(i)$ und $S(i)=\frac{(i^2+i)}{2}$, was ergibt $2\cdot A(n)=\sum_{i=1}^{n}(i^2+i) = \sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n} i$ = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$ usw. [die Formel für die Quadratesumme ist evtl. von der Herleitung der Volumenformel der Pyramide bekannt (Treppenkörper) und wird bei den riemannschen Summen gebraucht zur Berechnung von $\int_0^1 x^2 \ldots$].

❽ *Wieso ist das für jede natürliche Zahl n überhaupt eine natürliche Zahl? Vergleichen wir das Resultat mit S(n), der Kugelzahl im Dreieck: Was fällt auf? Wie könnte die Formel für vier Dimensionen lauten? Wie allgemein?*

Überraschenderweisende landen wir so bei den k-dimensionalen Simplexen S_k [und haben „unterwegs“ mathematiktypische Aktivitäten wie z. B. Verallgemeinern angesprochen]: die Strecke S_1 wird von 2 Punkten begrenzt, das gleichschenklige Dreieck S_2 von 3 Strecken; S_3 ist das reguläre Tetraeder, wovon 5 Exemplare die Begrenzung des S_4 bilden …

C) „3D ist schwer genug".

Der Zugang zu geometrischen Sachverhalten geht im Dreidimensionalen weiter:

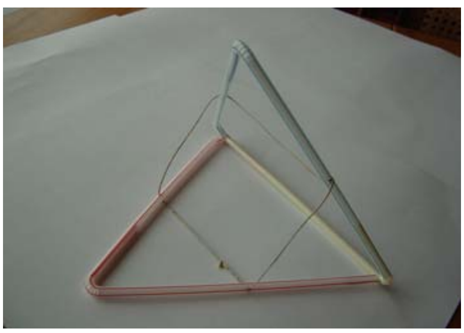


Wir betrachten eine Reihe aus 3 Kugeln in halber Höhe der Figur. Ihre Randkugeln verbinden wir mit den Mitten der beiden benachbarten Grundflächenkanten, was wiederum zwei Dreireiher gibt; deren Verbindung innerhalb der Grundfläche ist wieder ein Dreireiher, alle vier bilden also eine Raute, und da in ihrem Innern noch eine Kugel in der zweiten Kugelschicht von unten liegt, sogar ein Quadrat!

Dahinter verbirgt sich ein Spezialfall des Satzes von VARIGNON:

Die Mitten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm. Ein elementarer Beweis (vgl. etwa [5], es geht natürlich auch vektoriell) benutzt nur eine Diagonale im Viereck, die doppelt so lang ist wie die Verbindungsstrecken der Seitenmitten in den entstandenen Teildreiecken (2. Strahlensatz). Das gilt auch für „räumliche" Vierecke! Ist das Ausgangsviereck ein Drachen, so bilden die Verbindungsstrecken der Seitenmitten als Parallelen zu den orthogonalen Diagonalen ein Rechteck; sind seine Diagonalen gleich lang, handelt es sich um eine Raute. Gilt beides, haben wir ein Quadrat als Seitenmitte.

Dass Gleiches im als räumliches Viereck aufgefassten regulären Tetraeder gilt (zwei Kanten sind jetzt „Diagonalen"), ergibt sich schon aus Symmetrie-gründen; unterrichtsnäher sind folgende drei Wege:



Das nebenstehende Modell aus Trinkhalmen und Büroklammern zeigt den Sachverhalt deutlich; es bietet außerdem „dynamische" Möglichkeiten (Drehung an der gelben Diagonalen der Raute); auch 3D-DGS-Einsatz ist denkbar.
Ein anderer Weg ist ein Gegenstück zu der

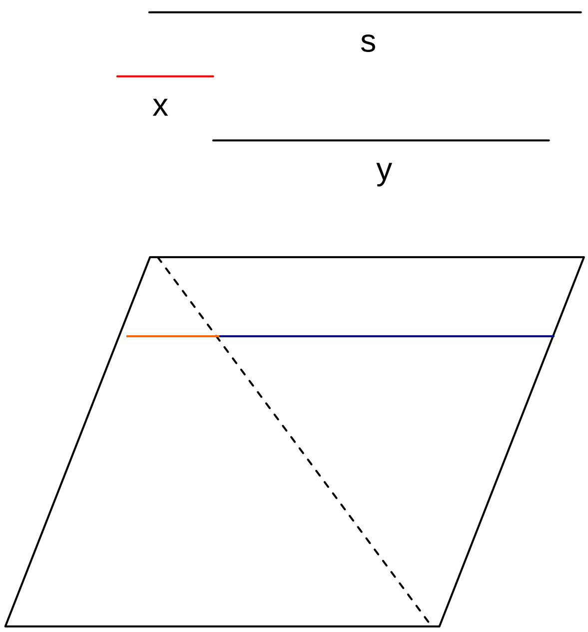
bekannten Schnittaufgabe senkrecht zur Raumdiagonalen im Würfel [1]:

Die Verbindung ihrer Mitten ist eine gemeinsame Orthogonale der windschiefen Kanten k_1 und k_2 im Tetraeder. Lassen wir eine Schnittebene senkrecht zu dieser Orthogonalen laufen, schneidet sie aus dem Tetraeder Rechtecke aus mit den Seitenlängen x und y, wobei zunächst $0 \leqq x,y \leqq s$, wenn s die Kantenlänge des Tetraeders ist.

Aus „Stetigkeitsgründen" muss x = y in der Mitte, also bei x = y = ½s gelten.

[Die Diagonale im Mittenquadrat – s.o. - zeigt elegant den Abstand der windschiefen Kanten $d(k_1, k_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}s$ **].**

Betrachtet man schließlich zwei benachbarte Seitenflächen des Tetraeders, die x und y entsprechende Strecken enthalten, so sieht man sofort x+y = s ein, also tatsächlich den Quadratfall für x = y =½s:



Literatur:

[1] KMK (Hrsg.): Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik i. d. F. vom 24. 5. 2002, II 1.1.3 (S. 37 ff.)

[2] W. Müller: Am Wegesrand - Ein anschaulicher Beweis der gaußschen Summenformel, in: Praxis der Mathematik (**PM)** 44 (2002), Heft 2 S. 87

[3] W. Müller: Entdeckungen am Billard, in: Mathematik Lehren (**ML),** Heft 149 (2008)

[4] M. Nieger: Ein Kandidat für den schwersten begreifbaren Beweis der Schulmathematik, in **PM** 45 (2003), Heft 1

[5] H. Schupp: Thema mit Variationen, Hildesheim-Berlin, 2002, Anhang Nr. 35 S. 175 ff.

[6] A. S. Steinweg: … sich ein Bild machen. Terme und figurierte Zahlen, in (**ML),** Heft 136 (2006), S. 14-17.

Fritz NESTLE, Ulm (Ludwigsburg)

World of Warcraft und Mathematik – Vergleiche

In nur vier Jahren haben die Nennungen des Computerspiels 'World of Warcraft' (WoW) bei Google diejenigen von 'mathematics' nahezu erreicht. 'WoW spielen' hat 'Mathe lernen' bereits überrundet:

Fundstellen am 17.2.2009

Mathe

Mathematik	22.300.000
Mathe	5 800 000
mathematics	89.700.000
mathe lernen	40.600
mathematik lernen	16.300

(Die beiden letzten Zahlen waren am 28.3.09: 296 000 und 293 000; Fundstellen bei Google wechseln stärker als die Kraftstoffpreise)

math learn	21.600.000

und

WoW

"World of Warcraft"	65.200.000
"World of Warcraft" spielen	1.890.000
"World of Warcraft" play	23.600.000

Was macht WoW spielen attraktiver als Mathe Lernen?

1. Kurzinfo zu World of Warcraft

In der ersten Märzhälfte 2009 spielten rund 17 Millonen „Gamer“ in den bewohnten Erdteilen, der Antarktis und der ISS gegen- und vor allem **mi**-**t**einander WoW; sie haben dafür 10 bis 15 Euro Monatslizenz – und natürlich das Spiel selbst – bezahlt. Ihre Präsenz im Spiel zeigen sie mit ihrem Avatar, dessen Beruf (Jäger, Magier, Paladin, ...) sie frei ausgewählt haben. Ziel der Spieler ist es, den Avatar auf einen hohen Level zu bringen und Ausstattung und Charakter zu verbessern. Wer genügend Geld hat, kann chinesische Spieler anstellen und seine Ausrüstung bei Ebay kaufen (Chinafarming). Wer richtig süchtig ist, kann da schon einmal den Gegenwert eines Einfamilienhauses investieren. Wie im täglichen Leben gilt auch bei WoW „Ehrlich währt am längsten“, das heißt, es dauert eben mit dem persönlichen Aufstieg etwas länger, wenn man sich selbst durchbeißt:
„Was mich an den Spielen begeistert ist das relativ einfache Erreichen von Anerkennung. Und so geht es sicher vielen Spielern“ (freak78 in http://www.mitmischen.de/index.php/Interaktiv/ForumThreadDetail/forum/53/topic/305/id/71589/page/2)
10 bis 50 Stunden investiert ein Gamer pro Woche in das Spiel.

2. Die Aufgaben

Die Spieler erhalten zahlreiche Rückmeldungen über ihren Spielstand und Hinweise, mit welchen Aufgaben (quests) sie sich selbständig weiter qualifizieren können. Die Spieler können selbständig auswählen, welche Aufgabe sie als nächstes in Angriff nehmen wollen. Zur Bewältigung von Aufgaben, die ein einzelner in der Regel nicht schafft, können sich die Spieler zu „Gilden“ zusammenschließen. Diese können schwierige Aufgaben arbeitsteilig gemeinsam bearbeiten.

Die einzelnen Aufgaben sind weitgehend gleich aufgebaut:

- Auftrag und Belohnung,
- Anmerkungen zur Aufgabe, auch Voraussetzungen zur Lösung, ferner geeignete Hinweise zur Lösung,
- Autor der Aufgabe und die Möglichkeit, den Autor zu bewerten oder einen Kommentar zur Aufgabe abzugeben.
- **Und ganz wesentlich:** Die Bewertung der Bearbeitung einer einzelnen Aufgabe ist weltweit gleich!

Wer Mathematik lernt, erhält keine objektiven Rückmeldungen! Die Bewertung schwankt von Lehrkraft zu Lehrkraft. Nur wenige Lehrkräfte lassen den Lernenden Freiheit, selbständig eigene Aktivität für die Organisation ihres Lernens zu entwickeln. Das könnte auch ein Grund für die geringe Nachhaltigkeit des Mathematikunterrichts sein, sonst wären die Universitäten im MINT-Bereich nicht gezwungen, in mathematischen Vorsemestern mit Schulstoff schon ab der sechsten Klasse wenigstens eine rudimentäre Studierfähigkeit zu sichern (Siehe dazu auch www.bildungsstandards.de/08/allgemein/jenanach.htm).

3. Warum ist WoW so attraktiv

Zum Teil liegt der Reiz des Spiels an der Grafik. Diese zeigt Ähnlichkeit mit der Einbettung der Romantrilogie „Der Herr der Ringe“.

Weit mehr dürfte der große Erfolg des Spiels darin begründet sein, dass

1. klare Aufgaben vorliegen,
2. zu jeder Aufgabe die Voraussetzungen genannt sind,
3. im Voraus eine Belohnung (Punkte, bessere Werkzeuge, ...) für die Bearbeitung ausgesetzt wird,
4. unmittelbar nach der Bearbeitung die Rückmeldung erfolgt,
5. die erfolgreiche Bearbeitung Prestige bei den Mitspielern verleiht **und**

das Selbstbewußtsein stärkt

6. der Zeitpunkt des Spiels, seine Dauer und das aktuelle Teilziel frei gewählt werden können.

Dem Mathematikunterricht fehlen in der Regel diese Aspekte. Hier die Beschreibung bei Wikipedia (unter 'Mathematikdidaktik' am 28.3.2009 - „Stärkung des Schüler-Ichs“):

4. Mathematik Lernen bei Wikipedia

"... Denn Mathematik ist das einzige Fach, in dem es nur auf das Einhalten von Vereinbarungen ankommt, so dass jeder Schüler für sich selbst entscheiden kann, ob er eine mathematische Aufgabe richtig oder falsch gelöst hat, je nachdem, ob er die mathematischen Vereinbarungen eingehalten hat oder nicht. ....

Mathematik ist darum prinzipiell das einfachste Fach an unseren Schulen.

Diese schlichte Einsicht wird jedoch durch den **Dünkel vieler Mathematiker** verstellt, so dass das Fach Mathematik ungerechtfertigterweise traditionell als besonders schwierig angesehen wird, wodurch der **Mathematikunterricht** in überwiegendem Maße **zur Schwächung des Selbstbewusstseins** der Schüler beiträgt.“ (Dieses Zitat scheint in der Wiki-Community konsensfähig zu sein; es wurde in den vergangenen vier Monaten nicht verändert.)

Wow dagegen stärkt das Selbstbewusstsein.

5. Mathematik Lernen - WoW spielen

Mathematikunterricht	WoW
geringer Begriffsumfang	mittlerer Begriffsumfang
viele Regeln	mittlerer Regelvorrat
Inhalt vorgegeben	Inhalt beeinflussbar
organisiert in Schulklassen	spielergesteuert
nüchtern	Figuren aus einer Fantasiewelt
wenig intrinsische Motivation	Freiheit und Vielfalt motivieren
unklare, subjektive Belohnungen	sofortige, klare Belohnung
Aufgaben manchmal unklar	Aufgaben (meistens) eindeutig
Ziele in „heimlichem Lehrplan“	Ziele transparent
Rückmeldungen diffus	sofortige klare Rückmeldungen
Bewertung lehrkraftabhängig	Bewertung weltweit gleich
feste Lernzeiten	freie Zeitwahl

…

6. Eine bessere Organisation des Mathematiklernens

Lernende brauchen für effektives Lernen Gestaltungsfreiräume für

- freie Wahl der Lernzeit,
- freie Wahl der Ziele (Mathe, Wirtschaft, Technik, Glück (?), ...)
- freien Zugang zu überprüfbaren, zertifizierbaren Lernzielen
- Autonomie beim Lernen
- **Gleichstellung** autonomen Lernens mit Lernen in der Schule
- Kontakt zu anderen, die am gleichen Thema arbeiten
- Hilfsangebote bei Lernschwierigkeiten

In der 314.Sitzung forderte dagegen die Kultusministerkonferenz: "Die Dauer der Schulzeit bis zur Erlangung der Allgemeinen Hochschulreife beträgt zwölf oder 13 Schuljahre. Dabei ist ein Gesamtstundenvolumen von mindestens 265 Jahreswochenstunden ab der Jahrgangsstufe 5 bis zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife nachzuweisen. "

Es geht also darum, **wie lange** gelernt wird, **nicht was** gelernt worden soll! Wer so eine Olympiade organisiert, darf keine guten Leistungen erwarten.

Statt Literatur online-Hinweise

www.bildungsstandards.de,

www.bildungsstandards.de/manifest.htm,

www.bildungsstandards.de/killer.html,

www.bildungsstandards.de/08/allgemein/jenanach.htm,

www.bildungsstandards.de/09/allgemein/mathe-wow.html,

- und für Freunde von Satire: www.bildungsoptionen.de/handy.htm.

Bernd NEUBERT, Gießen

Daten erfassen und darstellen in der Grundschule – Versuch einer Konzeption

In der Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ der KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich sind Standards für Kompetenzen zum „Daten erfassen und darstellen“ aufgeführt, die bis zum Ende der 4. Klasse entwickelt werden sollen. Im Beitrag wird der Versuch einer Konzeption unternommen, die diesen Prozess im Unterricht unterstützen kann. Die wesentlichen Bausteine dieser Konzeption werden im Folgenden vorgestellt.

Erste Erfahrungen beim Erfassen und Darstellen von Daten sammeln

Von der ersten Schulwoche an ist es möglich, dass Grundschulkinder Erfahrungen beim Erfassen und Darstellen von Daten sammeln. Beim gegenseitigen Kennenlernen werden in der Regel Themen wie „Unsere Klasse“ oder „Unsere Schule“ angesprochen. Dabei werden Fragen nach Geschwistern, Haustieren oder Lieblingstieren der einzelnen Schüler, nach in der Klasse vorkommenden Vornamen oder den Monaten, in denen die Schüler Geburtstag haben, gestellt. Zum Erfassen der Antworten kann jede Merkmalsausprägung durch einen Gegenstand (Steckwürfel, Baustein) dargestellt oder eine Strichliste angelegt werden.

Verständnis für graphische Darstellungen entwickeln

Da das Arbeiten mit graphischen Darstellungen vielen Kindern doch recht schwer fällt, sollte dazu inhaltliches Verständnis von diesen aufgebaut werden, bevor explizit mit diesen gearbeitet wird. Wir stützen uns dazu auf eine Stufung in den Darstellungsformen, der eine fortschreitende Schematisierung im Sinne der Brunerschen Repräsentationsebenen zu Grunde liegt. (vgl. Lörcher & Lörcher, 117 ff.). Dieser Ansatz wurde auch in der Unterrichtspraxis genutzt (vgl. Naumann, Schwalm).

Das Ziel der **1. Stufe** besteht im Aufbau eines Verständnisses der Darstellungsform auf enaktiver Ebene. Dazu wird von einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung ausgegangen. Es werden zwei Reihen miteinander verglichen. Für jedes Merkmal wird ein Gegenstand, z. B. ein Baustein (gleicher Größe) oder Steckwürfel, gelegt. Dazu werden passende kindliche Begrifflichkeiten verwendet. Eine mögliche Einstiegsfrage könnte lauten: „Gibt es mehr Jungen oder Mädchen in der Klasse?“

Wesentliches Merkmal der **2. Stufe** ist der Übergang vom Vergleich zweier Reihen zum Vergleich mehrerer Reihen. Es werden jetzt mehr als zwei Merkmalsausprägungen zu einem Merkmal betrachtet. Für die Darstellung ist wie in Stufe 1 die dreidimensionale Ebene (Säulen) zu empfehlen. Dies könnte am Beispiel der Hobbys der Kinder thematisiert werden.

In der **3. Stufe** wird der Übergang von der enaktiven zur ikonischen Ebene und auch von der räumlichen (Säule) zur flächenhaften Darstellung (Streifen) vollzogen. Für die Veranschaulichung sollten zunächst gleichartige Bilder verwendet werden. Spätestens in dieser Stufe sollten die Schüler erfahren, dass eine zufällige Anordnung der Bilder keinen Vergleich auf einen Blick ermöglicht und erkennen, dass alle Säulen bzw. Streifen auf einer Anfangslinie beginnen müssen, um auf das Abzählen verzichten zu können. Das Arbeiten kann auch zunehmend in Koordinatensystemen erfolgen. Am Ende dieser Stufe können die Bildkärtchen durch einfarbige Quadrate ersetzt werden.

In der **4. Stufe** erfolgt der Übergang zur symbolischen Ebene. Die erhobenen Anzahlen der Merkmalsausprägungen werden durch das Färben von Kästchen in einem Koordinatensystem dargestellt. Es entstehen gezeichnete Blöcke (Streifen), bei denen Vergleiche ohne Auszählen durchgeführt werden können.

In der **5. Stufe** erfolgt ein Übergang von Blöcken (Streifen aus Quadraten) zur abstrakten Darstellungsform des Streifendiagramms. Der einzelne Gegenstand ist nicht mehr als Quadrat zu erkennen, sondern die Anzahl muss aus der Länge von Rechtecken der gleichen Breite in einem Koordinatensystem entnommen werden. Hierfür benötigen die Kinder Kenntnisse über Längen und Maßstäbe. Für Kinder mit Schwierigkeiten können wichtige Strukturen auf einem Arbeitsblatt vorgegeben werden.

Arbeit mit graphischen Darstellungen

Bei der Arbeit mit graphischen Darstellungen sind entsprechend der in den Bildungsstandards angesprochenen Kompetenzen drei verschiedene Aufgabentypen zu unterscheiden, die unterschiedliche Anforderungen verlangen: *1) Entnehmen von Informationen (Interpretieren und Auswerten von Statistiken), 2) Anfertigen (Zeichnen) von graphischen Darstellungen* und *3) Vergleichen verschiedener Darstellungen des gleichen Sachverhalts.*

Das Ziel des ersten Aufgabetyps (*Entnehmen von Informationen)* besteht darin, dass die Schüler lernen sollen, Datensammlungen zu verstehen, ihnen Aussagen zu entnehmen, diese kritisch zu reflektieren und eventuell auch fehlerhafte Darstellungen (z. B. in Massenmedien) erkennen. Für die Datenbereitstellung sollte überlegt werden, ob vorgefertigte Datensammlungen präsentiert werden oder die Daten von den Schülern selbst gesammelt werden. Bei der Arbeit mit den präsentierten Datensammlungen sollten dazu entsprechende Fragen gestellt werden.

Beim *Anfertigen von graphischen Darstellungen* ist für die Grundschule eine Konzentration auf Streifendiagramme zu empfehlen. Selbst die Beschränkung auf diesen Typ fällt vielen Schülern nicht zuletzt durch die Komplexität der Anforderungen schwer. In der Unterrichtspraxis kann ein Exkurs des abstrakten Themas in eine projektartige Einheit zu Lernerfolgen führen (vgl. Schwalm, Naumann).

Für die *Arbeit mit verschiedenen Darstellungen zum gleichen Sachverhalt* sind sowohl Aufgaben zum Übertragen von einer Darstellungsform in eine andere (z. B. von der Tabelle ins Streifendiagramm) als auch der Vergleich verschiedener Diagramme (z. B. Streifen- und Kreisdiagramm) denkbar.

Erstellen und Darstellen eigener Statistiken

Für das das *Erstellen und Darstellen eigener Statistiken* sind für den Unterricht zwei Varianten mit unterschiedliche Zielen denkbar: *Durchführen eigener statistischer Erhebungen zum Anwenden vorher erworbener Kenntnisse über Statistik und graphische Darstellungen* (vgl. Naumann) oder *Durchführen eigener statistischer Erhebungen ohne vorherige Behandlung im Unterricht unter Nutzung intuitiver Vorkenntnisse* (vgl. Dennhöfer & Neubert). Mögliche Themen sind Umfragen in der Klasse bzw. Schule oder auch eine Verkehrszählung.

Beiden Vorgehensweisen sind wesentliche Schritte gemeinsam. Am Anfang steht die *Wahl eines geeigneten Themas*. Anschließend muss eine *genaue Fragestellung für die Datenerhebung* gefunden werden. Für das *Erstellen der Fragebögen bzw. Erfassungsbögen muss überlegt werden,* in welcher Form die Daten erfasst werden und welche Fragen gestellt werden sollen. Beim Formulieren der Fragen ist zwischen offenen und geschlossenen Fragen zu unterscheiden. Für die Phase der *Datenerhebung* ist es notwendig, darüber nachzudenken, wie die Daten erfasst und wie lange dies geschehen soll. Ein wichtiger Bestandteil des Erstellens von eigenen Statistiken besonders in der Grundschule ist die *Auswertung und Präsentation*, da die Kinder auf die angefertigten Produkte meist recht Stolz sind. Die Schüler müssen in dieser Phase darüber nachdenken, wie die Daten dargestellt werden, aber auch wie man diese auswertet und welche Schlussfolgerungen möglicherweise gezogen werden können. Zum Abschluss kann noch eine *Reflexionsphase* erfolgen.

Neben diesen Ankerpunkten, die auf die Arbeit an den in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen orientieren, erscheint es denkbar, in der Primarstufe auch Mittelwerte und Hochrechnungen zu betrachten.

Mittelwerte in der Grundschule

Mittelwerte, die bereits in der Grundschule betrachtet werden können, sind der *Modalwert* und das *arithmetische Mittel*.

Modalwerte werden sicher häufig in der Schule betrachtet, auch wenn dabei nicht immer die statistische Komponente thematisiert wird. Bei der Suche nach dem Lieblingsgetränk der Kinder oder dem Monat, in dem die meisten Schüler einer Klasse Geburtstag haben, wird meist auch die Frage nach der jeweilgen Anzahl gestellt.

Für die Behandlung des *arithmetischen Mittels* sollte der Grundsatz gelten**,** dass zunächst inhaltliches Verständnis aufgebaut wird, bevor die rechnerische Bestimmung erfolgt (vgl. Das Zahlenbuch 3, 120 f. und Das Zahlenbuch 4, 108 f.)

Hochrechnungen und Stichproben

Hochrechnungen und Stichproben dienen zum Heranführen an Methoden zum Bestimmen von großen Anzahlen ohne vollständiges Auszählen. Wesentliche Ziele sind die Entwicklung von Verständnis für den Umgang mit Näherungswerten (bei großen Zahlen) und das Nachdenken über sinnvolle Genauigkeit. Dies kann zum Beispiel im Zusammenhang mit einer Verkehrszählung (vgl. Dennhöfer & Neubert) oder handlungsorientiert bei der Bestimmung der Anzahl von Gänseblümchen auf einer Sommerwiese erfolgen (vgl. Mirwald & Nitsch)

Literatur

Sekretariat der ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bunderepublik Deutschland (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004.* München, Neuwied: Luchterhand.

Lörcher, Ch. & Lörcher, G. A. (Hrsg.) (1975). *Nuffield Mathematikprojekt. Konkrete Mathematik in der Grundschule 1.* Stuttgart: Klett

Schwalm, A. (2008). Erarbeiten von Diagrammen in einem zweiten Schuljahr. *Grundschulunterricht Mathematik, 2,* 20 - 23

Naumann, M. (2008). „Meine Klasse in Zahlen". Erste Erfahrungen im Umgang mit Diagrammen und Tabellen. *Grundschulunterricht Mathematik, 2,* 16 - 19

Dennhöfer, D. & Neubert, B. (2006). Wie viele Autos fahren an unserer Schule vorbei? - Erfassen und Darstellen von Daten in der dritten Klasse. *Grundschulunterricht, 2,* 8 - 13

Mirwald, E. & Nitsch, B. (2001). Wie viele Gänseblümchen stehen auf unserer Sommerwiese? *Grundschulunterricht 6,* 21 – 23

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2005). *Das Zahlenbuch 3.* Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2005). *Das Zahlenbuch 4.* Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett

Andreas OBERSTEINER, München

Können neurowissenschaftliche Methoden dazu beitragen, den Zusammenhang zwischen räumlichem Vorstellungsvermögen und Mathematikleistung zu klären?

Seit einigen Jahren ermöglichen neurowissenschaftliche Methoden die Erstellung von Bildern des Gehirns während geistiger Aktivitäten. Die Frage nach der Relevanz daraus gewonnener Erkenntnisse für die Lehr-Lern-Forschung wird seither kritisch diskutiert (z. B. Szücs & Goswami, 2007). Im vorliegenden Beitrag soll diese Frage am Beispiel des Zusammenhangs zwischen räumlichem Vorstellungsvermögen und mathematischen Leistungen im Bereich der Arithmetik exemplarisch erörtert werden. Dazu werden drei Perspektiven eingenommen, nämlich eine mathematikdidaktische, eine kognitionspsychologische und eine neuropsychologische Perspektive. Es wird versucht, die unterschiedlichen Erklärungsebenen aufeinander zu beziehen, wobei sich die Untersuchung mentaler Repräsentationen als zentraler Forschungsgegenstand herauskristallisiert. Abschließend soll diskutiert werden, was eine Untersuchung dieser Repräsentationen für die mathematikdidaktische Forschung beitragen kann.

1. Mathematikdidaktische Perspektive

Dass räumliches Vorstellungsvermögen für mathematische Leistungen von Bedeutung ist, wird etwa in Lehrplänen zum Mathematikunterricht angenommen und durch eine Reihe hauptsächlich älterer Studien belegt (Maier, 1999). Im Hinblick auf mathematische Leistung konzentrierten sich die Autoren häufig auf den Bereich der Geometrie, oder sie betrachteten allgemeine Mathematikleistung, ohne Inhaltsbereiche zu differenzieren. Der arithmetische Bereich wurde bisher meist vernachlässigt; eine Ausnahme stellt etwa der Beitrag von Lehmann und Jüling (2002) dar. Allerdings ergibt sich aus den bisherigen Untersuchungen noch kein eindeutiges Bild.

Eine eigene Untersuchung mit 69 Grundschulkindern (28 Mädchen und 41 Jungen) der 4. Jahrgangsstufe hatte das Ziel, speziell den Zusammenhang zwischen räumlichem Vorstellungsvermögen und Fähigkeiten in Arithmetik und Zahlvorstellung zu analysieren (Bründl, 2008). Als Messinstrumente dienten ein Test zum räumlichen Vorstellungsvermögen und ein Mathematiktest. Der Raumvorstellungstest umfasste 14 Items, die inhaltlich den Bereichen zur Raumvorstellung nach Maier (1999) *Räumliche Beziehungen, Veranschaulichung, Vorstellungsfähigkeit von Rotationen, Räumliche Orientierung* und *Räumliche Wahrnehmung* zugeordnet werden können. Der Mathematiktest (Cronbach-α = .801) bestand aus insgesamt 25 Items, deren Bearbeitung algorithmischen bzw. flexiblen Umgang mit Zahlen erforderte. Es ergab sich eine Korrelation von $r=.527$ ($p<.001$) zwischen den Summenscores der beiden Tests. Eine Korrelation in dieser Höhe ist erstaunlich, wenn man bedenkt, dass der Mathematiktest keinerlei Items zur Geometrie beinhaltete. Allgemein kann also auf der Ebene von Paper-Pencil-Tests ein relativ enger Zusammenhang zwischen diesen Bereichen angenommen werden.

2. Kognitionspsychologische Perspektive

In der Kognitionspsychologie hat man versucht, mit Hilfe von Reaktionszeitexperimenten Strategien für räumliches Denken zu identifizieren. Die Experimente von Shepard und Metzler (1971) etwa gelten als Beleg für die Analogie zwischen mentalen Prozessen und realen Raumhandlungen. Entsprechende Experimente wurden auch für Aufgaben zur Zahlvorstellung durchgeführt. Die Untersuchungen zum sog. *SNARC-Effekt, Distanzeffekt* oder *Größeneffekt* legen zum Beispiel eine räumliche Natur mentaler Zahlenrepräsentationen nahe. Die Reaktionszeiten verhalten sich bei entsprechenden Aufgabenstellungen so, als würden die Versuchspersonen auf mentale Zahlvorstellungen mit räumlichem Charakter zurückgreifen. Deshalb werden diese Experimente häufig als Beleg für gemeinsame psychologische Grundlagen räumlichen Denkens und Zahlvorstellung interpretiert. Für einen Überblick hierzu sei auf den Beitrag von Hubbard et al. (2005) verwiesen, der entsprechende Ergebnisse zusätzlich mit neurowissenschaftlichen Befunden in Beziehung setzt.

3. Neuropsychologische Perspektive

Schließlich liegen auch zahlreiche Studien aus der Hirnforschung vor, welche auf Grund ähnlicher Aktivierungsmuster beim räumlichen und beim mathematischen Denken auf gemeinsame neuronale Netzwerke schließen lassen. Für mathematisches Denken haben sich insbesondere Gehirnareale im parietalen Bereich des Gehirns als einflussreich erwiesen. Aktivierungen dieser Region konnten bei Rechenaufgaben und bei Aufgaben zum Abschätzen von Quantitäten nachgewiesen werden. Obwohl je nach Aufgabenstellung auch frontale Gehirnregionen involviert sind, gilt die besondere Rolle parietaler Regionen mittlerweile als gesichert (für einen Überblick vgl. Kucian & von Aster, 2005). In einer eigenen Studie mit bildgebenden Verfahren konnten wir darüber hinaus zeigen, dass die Dauer der Aktivierung in parietalen Gehirnregionen beim Lösen zweistelliger Additionsaufgaben von der Präsentationsform der Aufgaben und vom Alter der Versuchspersonen abhing (Dresler et al., in Vorb.). Schülerinnen und Schüler der 4. Jahrgangsstufe zeigten längere Aktivierungen als Schüler der 8.

Jahrgangsstufe. Andere Studien belegen die Bedeutung parietaler Regionen für mentale Rotationsaufgaben (z. B. Hugdahl et al., 2006). Parietale Hirnregionen spielen also sowohl beim Rechnen als auch beim räumlichen Denken eine wesentliche Rolle.

4. Mentale Repräsentationen als verbindendes Element

In den obigen Ausführungen wurden Zusammenhänge zwischen räumlichem Denken und mathematischen Fähigkeiten auf unterschiedlichen Erklärungsebenen angedeutet. Um diese unterschiedlichen Perspektiven sinnvoll aufeinander beziehen zu können, ist es nach Szücs & Goswami (2007) notwendig, zunächst einen gemeinsamen theoretische Rahmen zu erarbeiten, innerhalb dessen die Ergebnisse adäquat interpretiert werden können. Es sollte betont werden, dass keine vorschnellen Schlüsse gezogen werden dürfen. Ein Bindeglied scheint die Untersuchung der mentalen Repräsentationen zu sein, die dem räumlichen Denken einerseits und dem Umgang mit Zahlen andererseits zu Grunde liegen (Szücs & Goswami, 2007). Die Art der mentalen Repräsentationen könnte Erklärungsmuster für alle drei Ebenen liefern.

5. Diskussion

Es deutet einiges darauf hin, dass sich ein ausgeprägtes räumliches Vorstellungsvermögen positiv auf die mathematische Leistungsfähigkeit auswirkt und dass dies auch für arithmetische Fähigkeiten gilt. Neurowissenschaftliche Untersuchungen unterstützen diese These durch die Identifikation ähnlicher Gehirnareale für beide Bereiche. Lorenz (1992) nimmt an, dass möglicherweise ähnliche mentale Prozesse beim Lösen räumlicher und arithmetischer Aufgaben beteiligt sind. Für räumliche Aufgaben spielen vor allem verbal-analytische und räumlich-visuelle Strategien eine wesentliche Rolle. Die Identifikation verschiedener Strategien ist hier ein wichtiges Forschungsziel, stößt aber an methodische Grenzen (Grüßing, 2005). An diesem Punkt können neurowissenschaftliche Methoden weiterhelfen. Sohn et al. (2004) konnten belegen, dass es grundsätzlich möglich ist, verschiedene kognitiven Prozesse an Hand von Gehirnaktivierungen zu unterscheiden, obwohl die Aufgabenstellung wie auch die Reaktionszeiten identisch sind. Hier zeichnet sich die Möglichkeit ab, Denkprozesse auf unterschiedlichen Ebenen zu charakterisieren. Um die zu Grunde liegenden mentalen Repräsentationen zu beschreiben, müssen neurowissenschaftliche Erkenntnisse zunächst auf psychologischer Ebene adäquat interpretiert werden. Für die mathematikdidaktische Forschung ist die Untersuchung mentaler Repräsentationen von großer Bedeutung. So hängt beispielsweise die Schwierigkeit von Textaufgaben mitunter davon ab, ob Schülerinnen und Schüler es schaffen ein geeignetes mentales Modell der beschriebenen Situation aufzubauen. Ferner wird prinzipiell davon ausgegangen, dass mentale Repräsentationen auf Grund externer Repräsentationen entwickelt werden. Daraus ergibt sich auch eine praktische Bedeutung insbesondere für den mathematischen Anfangsunterricht. Mittlerweile gibt es zahlreiche Versuche, die Lehr-Lern-Forschung mit Neurowissenschaften zu verbinden. Die Entwicklung eines Forschungsbereichs, welcher die Untersuchung mentaler Repräsentationen zum Gegenstand hat und wie ihn Szücs und Goswami (2007) vorschlagen, scheint hierfür ein fruchtbarer Ansatz zu sein.

Literatur

Bründl, M. (2008). *Der Zusammenhang zwischen dem räumlichen Vorstellungsvermögen und der Zahlvorstellung - Eine Untersuchung in Jahrgangsstufe 4*. Unveröffentl. Examensarbeit. München.

Dresler, T., Obersteiner, A., Schecklmann, M., Vogel, A. C. M., Ehlis, A., Richter, M. M., Plichta, M., M., Reiss, K., Pekrun, R., Fallgatter, A. J. (in Vorb.). Arithmetical tasks presented in different representation format and its influence on behavior and brain oxygenation as assessed with near infra-red spectroscopy (NIRS): A study involving primary and secondary school children.

Grüßing, M. (2005). Räumliche Kompetenzen und Mathematikleistung. *Sache - Wort - Zahl, 33 (71)*, 41-48.

Hubbard, E.M., Piazza, M., Pinel, P., Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience, 6*, 435-448.

Hugdahl, K., Thomsen, T., Ersland, L. (2006). Sex differences in visuo-spatial processing: An fMRI study of mental rotation. *Neuropsychologia, 44*, 1575-1583.

Kucian, K. & von Aster, M. (2005). Dem Gehirn beim Rechnen zuschauen. Ergebnisse der funktionellen Bildgebung. In M. von Aster, & J.H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern* (S. 54-72). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Lehmann, W. & Jüling, I. (2002). Raumvorstellungsfähigkeit und mathematische Fähigkeiten - unabhängige Konstrukte oder zwei Seiten einer Medaille? *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 49*, 31-43.

Lorenz, J.H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung.* Göttingen: Hogrefe.

Maier, H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen. Mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht.* Donauwörth: Auer.

Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science, 171*, 701–703.

Sohn, M., Goode, A., Koedinger, K. R., Stenger, V. A., Fissell, K., Carter, C. S., Anderson, J. R. (2004). Behavioral equivalence, but not neural equivalence - neural evidence of alternative strategies in mathematical thinking. *Nature Neuroscience, 7 (11)*, 1193-1194.

Szücs, D. & Goswami, U. (2007). Educational neuroscience: Defining a new discipline for the study of mental representations. *Mind, Brain and Education, 1(3)*, 114-127.

Andreas PALLACK, Bielefeld

Mathematikunterricht kooperativ entwickeln – das Beispiel SINUS.NRW

Das ursprünglich von der Bund-Länderkommission initiierte SINUS-Projekt zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts wird in Nordrhein-Westfalen seit Ende 2008 in einer dritten Phase eigenständig fortgeführt. Diese Phase des SINUS-Projekts in Nordrhein-Westfalen (SINUS.NRW) baut systematisch auf den Vorgängerprojekten (SINUS und SINUS-Transfer) auf, und nutzt dabei deren Arbeitsergebnisse in Form von Materialien, dem aufgebauten Netzwerk und Erfahrungen zu sinnvollen Arbeitsweisen. Positive Ansätze werden weiterentwickelt, es werden jedoch auch deutlich neue Schwerpunkte gesetzt (vgl. Pallack & Trendel 2009). Dieser Beitrag fokussiert insbesondere auf die in SINUS, SINUS-Transfer und SINUS.NRW systematisch verankerte *kooperative Unterrichtsentwicklung*.

1. Mathematikunterricht kooperativ entwickeln

Über was sprechen Lehrer in Konferenzen, Pausen, …? Lehrer sind häufig selbst überrascht, wie selten man in der Schule über seine Kerntätigkeit – über das Unterrichten – spricht. Natürlich ist das auch der Tatsache geschuldet, dass im Alltagsgeschäft ohne geeigneten organisatorischen Rahmen kaum Zeit bleibt sich systematisch auszutauschen. Welche Folgerungen hat das auf die Entwicklung von Unterricht?

„Im Mikrokosmos „Klasse-Lehrer“ sammelt jeder seine eigenen Erfahrungen, bekommt ein gewisses Feedback […] und kann sich kritisch damit auseinandersetzen. Dies geschieht jedoch immer durch die eigene – meist gefärbte – Brille.“ (Pallack 2009, 4) Entscheidungen zur Weiterentwicklung des eigenen Unterrichts sind in der Regel subjektiv geprägt. Eine Chance, seine Entscheidungen auf ein breiteres Fundament zu stellen, bietet die kooperative Unterrichtsentwicklung.

Zur Kooperation bedarf es eines Netzwerks, in dem sich Lehrer mit gemeinsamen Interessen organisieren. Anlässe zur Gründung von Netzwerken gibt es viele. Das Bilden von Netzwerken kann sich schulintern, z. B. mit Blick auf die Ergebnisse zentraler Tests, oder auch schulübergreifend, z. B. mit Blick auf den Einsatz digitaler Werkzeuge im Unterricht, anbieten.

Um in Netzwerken effektiv kooperieren zu können bedarf es gemeinsamer Zielsetzungen. Beim Ordnen diffuser Handlungsfelder und dem Finden solcher Ziele können Experten behilflich sein. Netzwerke, die sich lediglich

Veränderung auf Ihre Flaggen schreiben, können sich bei der Zielfindung auch an Merkmalen guten Mathematikunterrichts orientieren (vgl. z. B. ZUM 2009). Kooperation kann nur erfolgreich sein, wenn die Ziele des Netzwerks vorab realistisch gesteckt und hinreichend konkretisiert werden. Ohne gemeinsame Vision gibt es auch keinen gemeinsamen Weg.

Im Rahmen der Kooperation müssen Wege gefunden werden das eigene implizite Wissen über Unterricht zu explizieren. Es gibt keine gemeinsame (Fach-)Sprache, um sich effektiv über Unterrichtserfahrungen zu verständigen. Viele Diskussionen über Unterricht verbleiben deswegen auf der Oberfläche. Vorschläge die Kommunikation über Unterricht zu gestalten – z. B. mit Hilfe der gemeinsamen Entwicklung Aufgaben – findet man bei Pallack 2009. Der Austausch wird, so zumindest unsere Erfahrung, als befriedigend erlebt, wenn die Ergebnisse der Kooperation für den eigenen Mathematikunterricht nützlich sind; wenn also das eingebrachte Engagement in einem angemessenen Verhältnis zum Ertrag der Kooperation steht.

2. Erfahrungen aus SINUS und SINUS-Transfer

In der ersten Projektphase (SINUS: 1998-2003) wurde an einzelnen Modulen gearbeitet, denen in der BLK-Expertise zur Qualitätssteigerung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts ein hohes Potenzial zur Verbesserung von Unterrichtsergebnissen zugeschrieben wurde (BLK 1997). Ziel der zweiten Phase (SINUS-Transfer NRW) war es, diese modularen Ansätze mit Blick auf aktuelle bildungspolitisch relevante Themen zu verbreitern, die Formen der Kooperation unter Lehrern weiter zu entwickeln und darauf basierend anregende, neue Unterrichtsmaterialien zu produzieren. In Nordrhein-Westfalen konnten sich Schulen im Jahr 2003 um die Teilnahme an SINUS-Transfer bewerben. 170 Schulen wurden angenommen, weit über 300 bewarben sich. Die Schulen entschieden sich mit ihrer Bewerbung für eins von sechs Projekten. Ein solches Projekt war z. B. „Entwicklung von Aufgaben für die Kernlehrpläne“. Jedes Projekt hatte bildungspolitische Relevanz (die Kernlehrpläne Mathematik NRW lagen 2003 in der Entwurfsfassung vor und wurden 2004 eingeführt) und unmittelbaren Bezug zu den SINUS-Modulen (hier: Weiterentwicklung der Aufgabenkultur). 2005 wurde dieser Ansatz dann verbreitert: Insgesamt nahmen 2007 440 Schulen an SINUS-Transfer in Nordrhein-Westfalen teil.

3. Unterrichtsentwicklung: Eine individuelle Aufgabe?

Wie sich im Laufe der Zeit herausstellte, wurden die Projekte häufig durch die Innovationskraft einzelner Lehrpersonen getragen. Die konzeptionelle Verankerung einer neuen Unterrichtskultur an den Schulen wurde in der Breite noch nicht nachhaltig geleistet (vgl. Pallack & Trendel 2009). Viele engagierte Kollegen bestätigten, dass die Arbeit im Set (so wurden die lokalen Netzwerke mit bis zu 10 Schulen genannt) häufig einen erheblichen Beitrag zur persönlichen Entwicklung hatte. Die Wirkung mit Blick auf die Entwicklung ganzer Fachkonferenzen war jedoch oft begrenzt.

So wichtig es auch ist, dass einzelne Lehrerinnen und Lehrer einen guten und interessanten Unterricht machen: Für ein Schulsystem ist es notwendig Unterrichtsqualität in der Breite zu garantieren. Das gelingt nicht nur über das Bereitstellen von Materialien. Der Nutzen von Unterrichtsmaterial entfaltet sich erst in der intensiven und diskursiven Auseinandersetzung mit dem eigenen Unterricht.

Entsprechend stellt sich die Frage, wie man die konstruktive Beschäftigung mit innovativen Konzepten sowie die Bereitschaft zur Reflexion über das eigene unterrichtliche Handeln im System Schule nachhaltig fördern kann.

Die berufliche Wirklichkeit wird häufig durch Bedingungen geprägt, die schon Lortie (1972) als Autonomie-Paritäts-Muster (APM) bezeichnete. Das bedeutet, dass die alleinige Verantwortung für unterrichtliches Handeln bei einzelnen Lehrpersonen angesiedelt ist (Autonomie), die sich jeweils auf einer gleichen hierarchischen Ebene innerhalb ihres beruflichen Umfelds bewegen (Parität). Dazu gehören Normen, die in der Gemeinschaft der Unterrichtenden weitgehend akzeptiert werden: Man ist im Umgang miteinander vorsichtig und zuvorkommend, greift in den Unterricht des Kollegen nicht ein und interveniert nicht in fremden Angelegenheiten. Kollegialität zeigt sich in diesem Sinne vor allem in einer freundlichen Distanz und der unausgesprochenen Vereinbarung: Lässt du mich in Ruhe, lass ich dich auch in Ruhe (vgl. Pallack & Trendel 2009).

Auf Schulen kommen zurzeit umfassende Innovationen zu, die alleine wegen ihres Umfangs von Einzelpersonen nicht bewältigt werden können. Exemplarisch sei der Umgang mit Bildungsstandards und Kernlehrplänen genannt, die trotz intensiver Bemühungen in den letzten fünf Jahren immer noch nicht vollends implementiert sind, was sich z. B. beim Studium schulinterner Lehrpläne durch die zuständige Fachaufsicht zeigt. Für Schulen entwickelt sich die Notwendigkeit für eine veränderte Unterrichtskultur, für neue, kompetenzorientierte Unterrichtsmaterialien und auch Unterrichtsformen, die individuelles Lernen und individuelle Kompetenzdiagnosen einerseits, sowie Vergleiche von Lerngruppen andererseits ermöglichen.

4. Konzepte an Schulen nachhaltig verankern

Hier setzt SINUS.NRW an: Das Projekt, an dem insgesamt 60 Schulen in Nordrhein-Westfalen teilnehmen, verfolgt das Ziel, die Ergebnisse von SINUS und SINUS-Transfer aufzugreifen, mit Blick auf die Bedürfnisse der teilnehmenden Schulen kooperativ zu bearbeiten, um schließlich passgenaue Konzepte zu entwickeln, die in den Schulen nachhaltig implementiert werden. Ähnlich wie in SINUS-Transfer wählten die Schulen zu Beginn Schwerpunkte. Ein Schwerpunkt – der hier exemplarisch für insgesamt sechs Schwerpunkte im Bereich Mathematik kurz vorgestellt werden soll – ist *Diagnose und individuelle Förderung* (dieser Schwerpunkt wird durch die Arbeitsgruppe Prof. Dr. R. vom Hofe, Universität Bielefeld wissenschaftlich begleitet). Die in diesem Schwerpunkt engagierten Schulen entwickeln gemeinsam Konzepte und Materialien zur Diagnose und Intervention (im ersten Schritt für die Doppeljahrgangsstufe 5/6). Im Anschluss sollen die entwickelten Materialien konzeptionell an den Schulen – mit hoher Sensibilität für die Situation vor Ort – eingebunden werden und zwar so, dass jeder Schüler in der Jahrgangsstufe 5 bzw. 6 davon profitiert. Das erfordert die Zustimmung und aktive Unterstützung der Fachkonferenz sowie die organisatorische Unterstützung der Schulleitung; es werden also alle unmittelbar und mittelbar Betroffenen in das Netzwerk einbezogen.

5. Unterricht kooperativ entwickeln – ein landesweites Konzept?

Die Initiatoren versprechen sich von SINUS.NRW Erkenntnisse über die Nachhaltigkeit kooperativer Unterrichtsentwicklung. Im nächsten Schritt wird dann abgewogen, mit welchen Maßnahmen die positiven Erfahrungen in die Breite getragen werden können. Der Aufwand zum Aufbau und zur Pflege von Netzwerken zur kooperativen Unterrichtsentwicklung ist groß. Eine Empfehlung zum Aufbau vieler lokaler Netzwerke muss entsprechend auf einer sicheren Basis fußen. Zur Gewinnung dieser Basis soll SINUS.NRW einen Beitrag leisten.

Literatur

BLK (1997) http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/blk_prog/gutacht/index.htm (Stand 18.01.2009)

Lortie, D.C. (1972) Team Teaching: Versuch der Beschreibung einer zukünftigen Schule. In: Dechert, H.-W. (ed.): Team Teaching in der Schule, Piper & Co., München.

Pallack, A. (2009) Unterricht gemeinsam entwickeln. Mathematik Lehren 152, S. 4-10.

Pallack, A. & Trendel, G. (2009) SINUS.NRW – neue Perspektiven für die Fachgruppenarbeit. *Preprint Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (wird auf Anfrage zugesendet).*

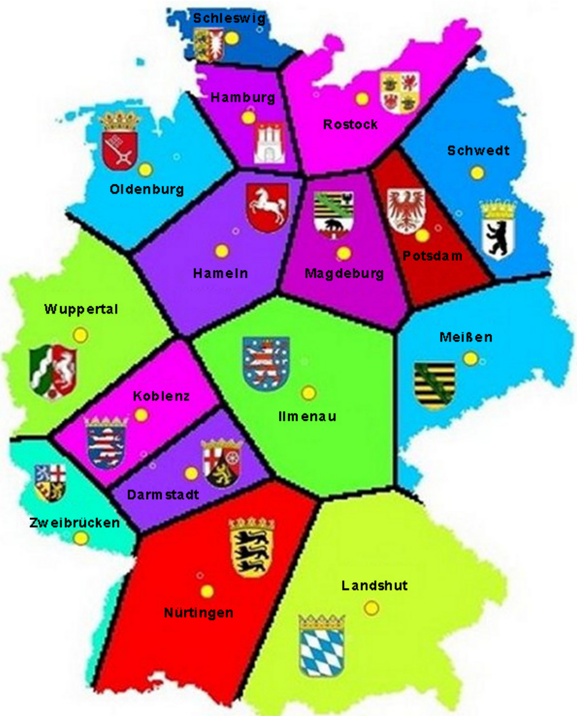
ZUM (2009) http://wiki.zum.de/Merkmale_guten_Mathematikunterrichts (Stand 15.03.2009)

Bodo v. PAPE, Oldenburg

Voronoi-Parkette – Eine Schnittstelle zwischen gesundem Menschenverstand und subtiler Mathematik

Ein Klagen darüber, dass es mit der Bewilligung der Forschungsmittel nicht so klappt, wie es eigentlich geboten wäre, gehört zu den Eingangsritualen von wissenschaftlichen Kongressen. Die Hauptursache für dies Manko wird nicht selten gesehen in der Ferne der universitären Standorte zu den zuständigen Ministerien – so auch etwa im Falle von Oldenburg oder Würzburg. Eine Lösung für genau dies Problem haben die Mathematiker allerdings schon seit langem in der Schublade.

Der Ansatz, den Hauptstädten der Bundesländer als Zuständigkeiten künftig jeweils ihre Nahebereiche zuzuweisen, liegt auf der Hand. Genau dies beinhaltet der Vorschlag, die föderale Struktur der Bundesrepublik als Voronoi[1]-Parkett aufzuziehen. Ein Missstand bleibt: Einige Hauptstädte liegen sehr nahe beieinander, vor allem Wiesbaden und Mainz. Das ließe sich in einem zweiten Schritt beheben: Man verlagert die Hauptstädte in die Schwerpunkte der neu zugeschnittenen Bundesländer.



Deutschland
als Voronoi-Parkett

Die Iteration dieses Doppelschritts[2] führt auf ein schwerpunktzentriertes Voronoi-Parkett. Bei den Voronoi-Parketten an sich geht es nur um die Aufteilung der Ebene in Nahebereiche von Punkten. Auf diese Thematik kommt man etwa, wenn man sich daran macht, die Raumbeherrschung im Fussball zu visualisieren. Eine andere Anregung liefert ein Kunstobjekt, das sich nicht in einem Kunstmuseum befindet, sondern in dem Science-Haus „Phaeno“ in Wolfsburg:

---

[1] Georgii Voronoi, 1868-1908
Die Feierlichkeiten zum 100. Todestag liegen erst wenige Monate zurück.
[2] Zu diesem Doppelschritt in der Kunst: http://www.janethansen.com/pages/art11.html

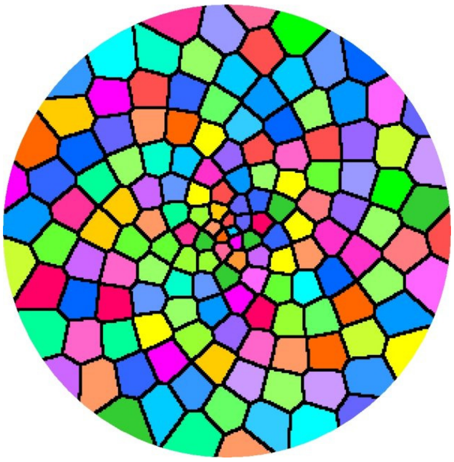
Bei der Installation „Boundary Function“[3] von Cord Snibbe bewegen sich mehrere Personen auf einer dunklen Platte; auf dieser Platte zeichnen sich dann die Grenzen der Nahbereiche der Personen ab. In der Dokumentation heißt es: „The regions which surround each person are mathematically referred to as Voronoi diagrams or Dirichlet tessellations. These diagrams are widely used in diverse fields; spontaneously occurring at all scales of nature. In anthropology and geography they are used to describe patterns of human settlement; in biology, the patterns of animal dominance and plant competition; in chemistry the packing of atoms into crystalline structures; in astronomy the influence on stars and star clusters; in marketing the strategic placement of chain stores; in robotics path planning; and in computer science to closest-point and triangulation problems.” In der Geographie wie auch in der Meteorologie und im Marketing bezeichnet man derartige Muster als „Thiessen-Polygone“. Sie dienen hier zur Interpolation von Punktverteilungen. Das „strategic placement of chain stores“ spielt in der Informatik eine Rolle als „Waste-Dump-Problem“. (Die Knoten des Voronoi-Parketts sind die Zentren der größten noch freien Kreise!) Auch bei Geoinformationssystemen greift die Informatik auf Voronoidiagramme zurück. Mit der Wendung „triangulation problems“ schließlich wird Bezug genommen zu einem ganzen Feld von technischen Anwendungen – von der Computergrafik bis hin zur Materialforschung: Die zu den Voronoi-Parketten dualen Delauny-Triangulationen – sie verbinden jeweils den erzeugenden Punkt einer Zelle mit denen aller Nachbarzellen – sind optimiert im Hinblick auf die Vermeidung von kleinen Winkeln bei einer Triangulation. Das ist erstrebenswert sowohl von der Ästhetik her als auch im Hinblick auf die Praktikabilität der Konstruktion und die Stabilität des Produkts.

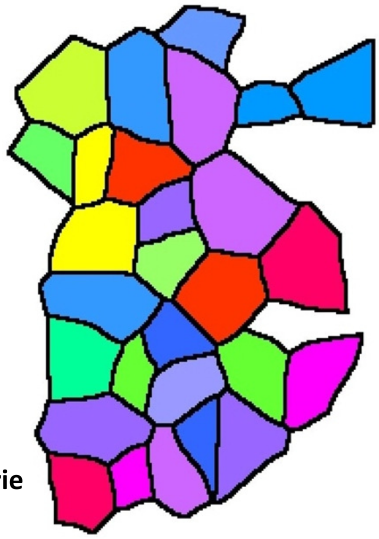
Der Schlußsatz der Dokumentation zu “Boundary Function” lautet schlicht: “The diagrams represent as strong a connection between mathematics and nature as the constants e or π.”

Etwas mehr in das Blickfeld der Öffentlichkeit gerückt wurde das Thema “Voronoi-Parkette” mit einem Artikel der FAZ-Sonntagszeitung[4] zur Einweihung des Richterfensters im Kölner Dom im Sommer 2007. Gerhard Richter beschränkt sich hier darauf, die Farbgebung in einem Rechteckmuster vom Zufall steuern zu lassen. Es lässt sich aber zeigen, dass sich „der Zufall mit ein wenig am Ende gar nicht so schwieriger Mathematik noch stärker für die Gestaltung von Kirchenfenstern heranziehen lässt“ – über die Erzeugung der Felder als Polygone des Voronoi-Parketts einer Punktmenge, die – mit unterschiedlichen Vorgaben – zufällig erzeugt wird.

[3] http://www.youtube.com/watch?v=1p96bTARFK_n_n_c

[4] Ulf Rauchhaupt, Frankurter Allgemeine Sonntagszeitung, 9. September 2007, S. 67

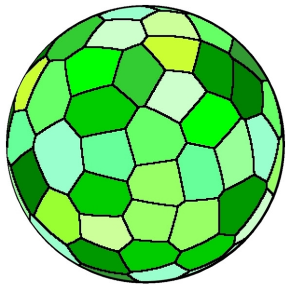




Phyllotaxis
Voronoi-Parkettierung
auf der Basis des goldenen Schnitts

Euklid 3-Geometrie

Mit geschickter Wahl der Vorgaben kommt man auch auf Figuratives.Will man sich von der Geradlinigkeit der Begrenzungen lösen, so kann man in der euklidischen Abstandsformel den Exponenten 2 abändern in einen beliebigen Wert >1. Bereits im Standardwerk des Japaners Okabe[5] taucht daneben auch die sog. „Karlsruhe-Metrik[6]" auf. Mit einer Kugelmetrik kann man eine Voronoi-Parkettierung von Kugeln darstellen, mit Perspektivmetriken kann man Fußbodenparkette in alten Bildern perspektiv richtig aufmöbeln. Georg Nees widmet der „Regentengrafik" ein Kapitel seines Werkes „formel farbe form"[7]. Hier verkündet er: „Erst der Begriff der Pseudodistanz macht Regentengrafik in ähnlich hohem Maß für die Ästhetik interessant wie die Welt der Fraktale."



Zur Genese von entsprechenden Strukturen in der Natur geht man aus von einem „Präriefeuer-Modell": Die Feuer breiten sich von Punktquellen so weit aus, bis der Ausbreitungsbereich des nächsten Brandherds erreicht ist. Löst man sich von den Voraussetzungen, dass Startzeitpunkt und Ausbreitungsgeschwindigkeit gleich sind, so erhält man „gewichtete" Voronoidiagramme. Die Begrenzungslinien sind hier Hyperbelabschnitte bzw. Kreissegmente. Bei Diagrammen höherer Ordnung dagegen wird jedem Punkt P derjenige Bereich der Ebene zugeordnet, für den P der zweit-, dritt-, …-nächste ist.

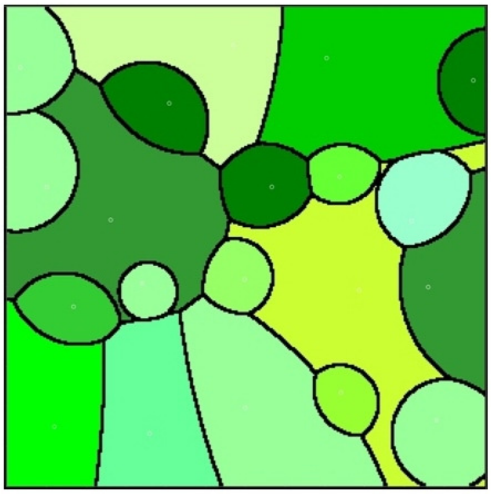
---

[5] Okabe, Boots, Sugihara: Spatial Tesselations - Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, 1992

[6] Wege sind beschränkt auf Strahlen von einem Zentrum Z und Kreise um Z.

[7] Georg Nees: formel - farbe – form Computerästhetik für Medien und Design, 1996

Natürlich lässt sich das Konzept auch in den Raum ausweiten. Für räumliche Voronoi-Zellen (in der Chemie: „Wigner-Seitz-Zellen") und Delauny-Tetraedrisierungen werden Darstellungsmöglichkeiten vorgestellt.

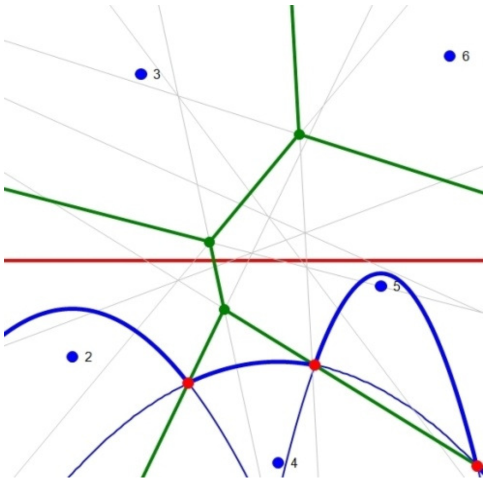


Im Theorieteil des Vortrags geht es insbesondere um Umkreiskonstruktionen in den Alternativgeometrien.

Ein Desiderat ist ein Satz von Kriterien, mit denen man über das Vorliegen und die Korrektheit der Konstruktion von Voronoi-Parketten entscheiden kann. Hierzu werden Sätze formuliert, sie kommen in Beispielen zum Einsatz.

Ein erhöhtes Interesse der Fachdidaktik am Thema erklärt sich schon damit, dass sich im Umfeld reizvolle Aufgabenstellungen ergeben. Sie decken den Gesamtbereich der mathematischen Erziehung ab, angefangen bei der Vorschulerziehung - einfache Kolorierungen von Hand - über die Mittelstufengeometrie – Zirkel- und Linealkonstruktionen, Parabeln als Ortslinien –, Stochastik und numerische Verfahren in den höheren Klassenstufen bis hin zur „Algorithmischen Geometrie", einer Hochschuldisziplin im Zwischenbereich von Mathematik und Informatik.

Als überschaubarer Algorithmus zur Lösung eines ganz einfach zu konstatierenden Problems - auch seine Lösung ist im konkreten Fall kinderleicht! – bleibt nur etwas, für dessen Umsetzung die Mittel der Mathematik nicht mehr ausreichen, etwa der Algorithmus von Fortune: Bei der Umsetzung kommt man ohne Datenstrukturen aus der Informatik nicht aus.



Fortunes Algorithmus

Praktisch kommt man aber bereits mit MS-Excel zum Ziel. Dafür werden verschiedenartige Möglichkeiten aufgezeigt.

Abschließend ist festzuhalten:

Über die klassische Alternative der Mathematikdidaktik
- Nützliche Mathematik oder Schöne Mathematik? -
ist diese Thematik erhaben.

Kathleen PHILIPP, Dominik MATT, Timo LEUDERS, Freiburg

Experimentelles Denken – Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen

Mathematiker formen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge nicht etwa durch Ableitung aus bestehenden Sätzen, sondern durch „experimentelles Arbeiten“ mit Beispielen, oder wie es im Rahmen einer mathematiksoziologischen Studie ein Mathematiker äußert:

„Die Großen sind auch deshalb so groß, weil sie so viel wissen. Sie kennen viele Beispiele und haben viel mit ihnen experimentiert. Darüber spricht man nicht. Man schreibt auch nicht in seinem Paper, wie man zu einer Vermutung gekommen ist. Was für immense Rechnungen manchmal dahinter stecken oder wie viele spezielle Beispiele.“ (nach HEINTZ 2000:150f.)

Aus wissenschaftstheoretischer Sicht lässt sich dies gut mit dem epistemologischen Modell von PEIRCE (1965) beschreiben, in dem drei grundsätzlich verschiedenen Formen des Schließens unterschieden werden: Abduktion, Induktion und Deduktion. Die Abduktion bezeichnet den Vorgang, in dem eine erklärende Hypothese gebildet wird. Die Induktion den gegenläufigen Prozess des Hypothesenprüfens am Phänomen bzw. am Beispiel. Deduktives Schließen hat das Ziel, mit logischen Schlussfolgerungen eine Vermutung zu beweisen. Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen, welches sich in einem konkreten Phänomenbereich an Beispielen vollzieht – nach Peirce also das abduktive und induktive Vorgehen – wird im Folgenden als innermathematisches Experimentieren bezeichnet.

Da streng deduktive Prozesse eine spezifische Stärke der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin darstellen, wird ihnen oft eine dominierende Rolle zugesprochen. Bei der Entwicklung mathematischen Denkens bei Kindern spielen jedoch zunächst induktive und abduktive Prozesse eine viel größere Rolle. Diese sollen auch im Zentrum unserer Studie stehen, deren Pilotierungsschritte wir im Folgenden berichten.

Ausgangspunkt unserer Studie ist die Annahme, dass die Untersuchung experimenteller Prozesse gewinnbringend für das Verständnis von Lernprozessen sein kann und dass eine nähere Kenntnis über solche Prozesse die oft formulierte These der prinzipiellen Wesensgleichheit mathematischen Tuns vom Kindesalter bis zur professionellen Forschung stützen kann.

Modelle zum Experimentieren

Das Konzept des Experimentierens wird in der Mathematik eher selten zur Beschreibung des individuellen und kollektiven Erkenntnisgewinns herangezogen, während es in den Naturwissenschaften bereits weitgehend ausgearbeitete konzeptuelle und empirische didaktische Arbeiten gibt. Von herausragender Bedeutung ist hier wohl das Modell des naturwissenschaftlichen Arbeitens als eine Suche in zwei Räumen (SDDS, KLAHR/DUNBAR 1988). Hier wird naturwissenschaftliches Lernen beschrieben als ein Wechsel zwischen einem Hypothesensuchraum, in dem Vermutungen aufgestellt werden und einem Experimentesuchraum, in dem Experimente generiert werden um einerseits Vermutungen zu überprüfen (bzw. zu falsifizieren) und andererseits den Phänomenbereich so zu erkunden, dass wiederum neue Vermutungen aufgestellt werden können. Diese Beschreibung des Experimentierens lässt sich auf die mathematische Domäne übertragen und soll zu einem vertieften Verständnis von induktiven und abduktiven Denkprozessen führen.

Forschungsfragen

Bei der im Folgenden beschriebenen ersten Teilstudie zum innermathematischen Experimentieren beschäftigen wir uns mit drei zentralen Fragen.

- Schwerpunkt unserer Studie ist es, die *Vorgehensweisen* von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen zu beschreiben und dabei Strategien zu identifizieren und zu kategorisieren.
- Begleitend entwickeln wir *Kriterien zur Aufgabenwahl* zum innermathematischen Experimentieren und
- vergleichen systematisch verschiedene *Untersuchungsmethoden* hinsichtlich ihrer Eignung zur Offenlegung der komplexen Bearbeitungsprozesse.

Design der Studie

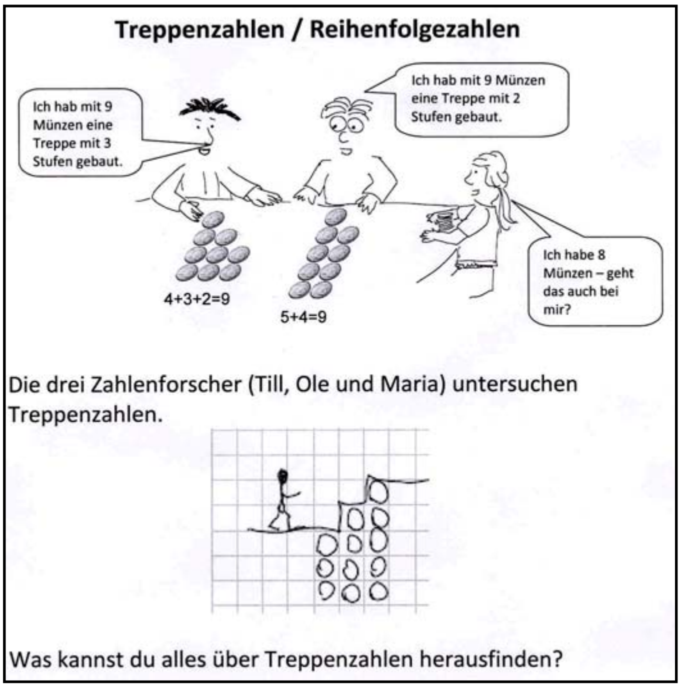
Aufgrund des theoriegenerierenden Charakters unserer Fragestellung eignete sich in besonderem Maße ein qualitatives Forschungsdesign. Da von beobachteten Vorgehensweisen auf innere Prozesse geschlossen werden sollte, boten sich Videoaufzeichnungen an, um einerseits reale Handlungen und andererseits verbale Äußerungen erfassen zu können, deren Wechselspiel in der Auswertung eine zentrale Rolle spielte.

Die Auswahl der Stichprobe wurde möglichst breit angelegt (Schülerinnen und Schüler der Grundschule sowie Lehramtsstudierende), um einerseits eine möglichst große Vielfalt an Vorgehensweisen beobachten zu können und andererseits im Sinne obenstehender These die Gemeinsamkeiten mathematischen Arbeitens auf unterschiedlicher Expertisestufe zu erkennen. Alle Probanden bearbeiteten dieselben Aufgaben. Diese waren jeweils in ihrer Fragestellung offen, ließen eine Vielzahl von Vermutungen zu und es konnten einfach Beispiele generiert werden. Im Verlauf der Studie kristallisierten sich die Methoden des Lauten Denkens (Verbalisieren von Gedanken beim Bearbeitungsprozess) und der Dyade (Bearbeiten einer Aufgabe in Zweiergruppen) als am ergiebigsten im Sinne der Projektziele heraus.

Die Auswertung der Daten orientierte sich forschungsmethodisch am Modell der Grounded Theory (STRAUSS 1991). Grundlage hierfür bildeten die transkribierten Videoaufnahmen und die bei der Aufgabenbearbeitung entstandenen Produkte der Teilnehmenden. Insgesamt wurden fünf verschiedene Aufgaben eingesetzt und jeweils verbale Impulse formuliert, die nach dem Prinzip der minimalen Hilfe verwendet wurden.

Ergebnisse

Anhand eines Transkriptausschnitts zu einer Videosequenz, stellen wir exemplarisch erste Ergebnisse vor. Bei den Probanden P1 und P2 handelt es sich um zwei Studierende, die gemeinsam die abgebildete Aufgabe bearbeiteten. Beobachtete Handlungen sind in Klammern angeführt.



P2: Also mir fällt zu hier… Also ich würde mich erst mal auf die Frage beziehen, von der Dame da. „Ich habe 8 Münzen, geht das auch bei mir?“ (P1 und P2 betrachten das Arbeitsblatt)
P1: Mhm.
P2: Ehrlich gesagt: (..) ja.
P1: Nö. (P1 nimmt sich acht Münzen)
P2: Komm, wir testen mal.
[…]
P2: Wie sollen wir es machen?
P1: Ja, leg mal.
P2: Ok, es geht halt nicht wirklich auf. Hier haben wir das Problem wieder. 1,2,3. (.) Mit acht geht es definitiv nicht – wir können ja nicht auflegen, höchstens wir hätten dann wieder die Doppelstufe und das dürfen wir nicht. (Probanden verschieben Münzen. Legen das Beispiel 3-2-1)
P1: Ja, wenn du eine (.) nein quatsch, geht nicht. (P1 verschiebt eine Münze.)

In diesem vereinfachten Transkriptausschnitt zeigen sich einige für das mathematische Explorieren typische Vorgehensweisen, die sich folgendermaßen kategorisieren lassen. In derselben Weise wurde eine große Zahl weiterer typischer Vorgehensweisen beim experimentellen mathematischen Arbeiten kategorisiert.

Vorgehensweise	Beschreibung	Beispiel
intuitive Hypothese	Hypothese wird intuitiv formuliert und als Anker für weitere Überlegungen genutzt.	„Geht nur bei geraden Zahlen“ „spontan: 9“
explorieren	Unsystematische Erkundung (Ausprobieren) von Beispielen.	„Leg mal.“
Gegenbeispiel	Beispiel wird genutzt, um eine Vermutung zu verwerfen oder genauer zu spezifizieren.	„die 10 geht auch als Treppenzahl – also gehen auch gerade Zahlen als Treppenzahlen“
…	…	…

Interpretationsansatz „Drei-Räume-Modell“

Zur Strukturierung der von uns identifizierten Vorgehensweisen schlagen wir für das innermathematische Experimentieren folgendes theoretische Modell vor: Wir deuten das Untersuchen von Beispielen als Experiment im Prozess des mathematischen Erkenntnisgewinns und können daher in Anlehnung an das Modell des wissenschaftlichen Forschens als Suche in zwei Räumen (KLAHR/DUNBAR 1988) ebenfalls zwei Räume unterscheiden, den *Beispielraum* (der alle möglichen Beispiele eines Phänomenbereichs enthält) und den *Hypothesenraum* (vermutete Zusammenhänge).

Die Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren zeigen sich im Wechsel zwischen den beiden Räumen und drücken so spezifische Beziehungen aus. Diese Beziehungen bezeichnen wir als Strategien und verorten sie in einem dritten Raum, dem *Strategieraum*. Dieser Raum vermittelt zwischen den beiden anderen, in dem er die Intentionalität des Wechsels präzisiert. Zu den nächsten Projektzielen gehört die Entwicklung von Verfahren zu präziseren Identifikation solcher Strategien.

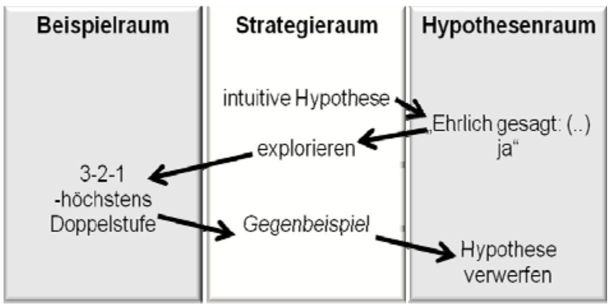


Abbildung 1: Drei-Räume-Modell - Einordnen von Beispielen, Hypothesen und Strategien anhand des Beispiels aus dem Transkript

Literatur

HEINTZ, B. (2000): *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Springer-Verlag, Wien

KLAHR, D./ DUNBAR, K. (1988): Dual Space Search During Scientific Reasoning. In: *Cognitive Science* 12, 1-48

PEIRCE, C. S./ WALTHER, E. (Hrsg.) (1965): *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften.* Agis Verlag GmbH, Baden-Baden

STRAUSS, A. L. (1991): *Grundlagen qualitativer Sozialforschung. Datenanalyse und Theoriebildung in der empirischen soziologischen Forschung.* Wilhelm Fink Verlag, München

Franz PICHER, Klagenfurt

Beschreibung von Änderungen

Warum beschäftigt man sich mit Änderungen? Wieso soll gerade das interessant sein?

Ich biete eine Reflexion über die Beschreibung von Änderungen an, wobei ich zunächst die Beschreibung von Änderungen mithilfe der Alltagssprache und der Mathematik betrachte und dann auf mögliche Bedeutungen der angestellten Überlegungen für den Mathematikunterricht hinweise.

Beschreibung von Änderungen in der Alltagssprache

THESE 1: Unsere Beobachtungen in der Umwelt führen zur Beschreibung von Änderungen. Ein erster Schritt ist die alltagssprachliche Beschreibung von Änderungen, wobei die Richtung der Änderung beschrieben wird und Änderung zeitlich gemeint ist. Als einen zweiten Schritt ermöglicht die Alltagssprache die Beschreibung von Änderungen in Bezug auf andere Größen, beispielsweise den Ort. Die Alltagssprache bietet uns Begriffe zur Beschreibung der Änderung von Änderungen.

Änderung setzt die Möglichkeit verschiedener Zustände voraus, diese Zustände können gerade durch ihre Änderung für uns interessant werden. Die verschiedenen Zustände können zunächst rein qualitativ – unter Verwendung der Alltagssprache – verglichen werden. Wörter wie „wärmer-kälter“ und „steigen-fallen“ dienen dabei zur Beschreibung der Richtung der Änderung, wobei eine explizite Angabe eines Referenzwertes möglich aber nicht zwingend notwendig ist. Bezugsgröße für die Änderung ist zunächst das Fortschreiten der Zeit, andere Bezugsgrößen, wie z.B. der Ort, sind aber ebenso möglich. Wenn an die Stelle der Zeit beispielsweise der Ort tritt, muss zusätzlich die Richtung des örtlichen Fortschreitens angegeben werden, auf den sich die angegebene Änderung der betrachteten Größe bezieht. Im Vortrag wurden Beispiele wie die folgenden diskutiert:

- Heute ist es wärmer als gestern.
- Die Temperatur steigt.
- In Richtung Äquator wird es wärmer.

Änderungen als Objekte der Betrachtung

Die Einführung neuer Größen, die Änderungen zum Objekt machen, stellt einen wichtigen Denkschritt im Rahmen der Beschreibung von Änderungen dar. Ich glaube, dessen sollte man sich bewusst sein. Im Vortrag wurden diesbezüglich Beispiele wie: „Die Neuverschuldung des Bundes sinkt." diskutiert.

Unter Verwendung von Begriffen wie „Neuverschuldung" können Änderungen wie Zustandsgrößen gedacht werden, insbesondere können dieselben Wörter, die uns helfen, Änderungen von Zuständen zu beschreiben, verwendet werden, um Änderungen von Änderungen zu beschreiben; die „alten" Begriffe werden dann auf das neue Objekt „Änderung" angewandt. Wir können damit Begriffe wie „steigen-fallen" und „zunehmen-abnehmen" in gleicher Art und Weise benützen, wie zuvor in Zusammenhang mit Begriffen, die Information über einen Zustand geben. Dies kann einerseits die Beschreibung vereinfachen: Die Aussage „Die Neuverschuldung des Bundes sinkt." würde ohne Verwendung des Begriffs „Neuverschuldung" zum Beispiel so umschrieben werden müssen: „Die Verschuldung des Bundes steigt immer weniger stark an.", was die Beschreibung schwieriger macht; die Aussage wird länger und komplizierter. Andererseits kann man bei Verwendung des Begriffs „Neuverschuldung" leicht übersehen, dass das Objekt der Betrachtung hier als Änderung eines Zustandes gedeutet werden kann. Steffen Hahn und Susanne Prediger (Hahn & Prediger 2008, S. 177) betonen diesbezüglich die Wichtigkeit der Unterscheidung zwischen Bestand und Änderung, um Ebenenverwechslungen zu vermeiden.

Beschreibung von Änderungen mithilfe der Mathematik

THESE 2: Der Wunsch nach Beurteilung, Vergleich und Normierung von Änderungen führt zur Quantifizierung von Änderungen mithilfe der Mathematik. Die Mathematik bietet uns zur Beschreibung von Änderungen neue Begriffe an, die durch Berechnungsvorschriften auf bereits bekannte Größen zurückgeführt werden. Die neuen Begriffe, die uns die Mathematik anbietet, können uns im Zusammenspiel mit der alltagssprachlichen Beschreibung von Änderungen dabei helfen, über unsere Beschreibung von Änderungen nachzudenken.

Gerade die Verwendung von Zahlen in der mathematischen Beschreibung von Zuständen weist auf die Möglichkeit anderer Zustände und damit auf die Möglichkeit der Änderung von Zuständen hin. Der Vergleich zu einem Referenzwert wird durch die Mathematik in Form der Angabe eines Zahlenwertes quantifiziert. Die Verwendung von Zahlen ermöglicht – wenn die Skala einmal festgelegt ist – den Verzicht auf die Angabe eines Referenzwertes, diesen kann sich jeder selber aussuchen.

Die Quantifizierung von Änderungen ermöglicht, zusätzlich zur Richtungsangabe der Änderung in der Alltagssprache, die intersubjektive Angabe der Größe einer Änderung.

Festlegung von Änderungsmaßen durch Berechnungsvorschriften

Die Mathematik bietet uns die Möglichkeit, aus mehreren gegebenen Größen eine neue Größe zu berechnen, was auch im Rahmen von Änderungen eine zentrale Rolle spielt. In Form der Ergebnisse dieser Berechnungen stellt uns die Mathematik – ebenso wie die Alltagssprache – neue Begriffe zur Beschreibung von Änderungen zur Verfügung, im Falle der Mathematik zeichnen sich die neuen Begriffe dadurch aus, dass sie aus mehreren Größen – dies können Zustände und Änderungen sein – hervorgehen.

Die folgende Übersicht zeigt Beispiele für berechnete Größen, die Beschreibungen von Änderungen mithilfe der Mathematik darstellen.

$f(t)$	Zustandsgröße
$f(t)-f(t_0)$	absolute Änderung
$\frac{f(t)-f(t_0)}{f(t_0)}$	relative Änderung (Änderung im Vergleich zu Zustand)
$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$	Änderungsrate (Änderung im Vergleich zu Änderung)
$\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$	momentane/lokale Änderungsrate

Die Anzahl der Größen, aus denen sich die jeweils neue Größe berechnet, steigt dabei in obiger Übersicht an, wie die folgende Darstellung von „Stufen von Änderungsmaßen“ zeigt:

- 1. Stufe: Zustandsbeschreibung (1 Größe)
- 2. Stufe: absolute Änderung (2 Größen)
- 3. Stufe: relative Änderung (3 Größen bzw. 1 Änderung und 1 Zustand)
- 4. Stufe: (momentane) Änderungsrate (4 Größen bzw. 2 Änderungen)

Reflexion über die Beschreibung von Änderungen als Inhalt der Sekundarstufe II

Mein Vortrag soll auch als Vorschlag dafür gesehen werden, was in der Sekundarstufe II im Rahmen von Änderungen diskutiert werden könnte. Anstatt den neuen Aspekt „lokale Änderungsrate“ im Rahmen der Analysis sehr intensiv zu bearbeiten, schlage ich einen Rückblick auf bereits Gelerntes und eine Aufweitung des Blicks hinsichtlich der Beschreibung von Änderungen, also Reflexion über die Beschreibung von Änderungen vor.

Wichtig scheint mir, den Überblick über das Gebiet, in dem man sich gerade bewegt, zu vermitteln; wenn man sich auf eine Möglichkeit, Änderungen zu beschreiben, konzentriert, kann man leicht den Überblick verlieren – so bietet beispielsweise die Analysis eben lediglich eine Möglichkeit unter anderen dafür an, Änderungen zu beschreiben. Vielleicht verlieren die Lernenden das Bewusstsein für den inhaltlichen Aspekt ihres Tuns in der Differentialrechnung nicht nur wegen der rein technischen Orientierung dieses Tuns, sondern auch weil lediglich diese eine Möglichkeit zur Beschreibung von Änderungen betrachtet wird.

Zentral sollten ein Vertiefen bereits bekannter Inhalte und die Reflexion darüber sein, und nicht ein Erlernen möglichst vieler neuer Inhalte auf dann zwangsweise niedrigem Reflexionsniveau.

Die Sekundarstufe sollte ein Ort sein, an dem man sich nochmals auf die bereits gelernten Dinge konzentriert und diese in Zusammenhang setzt. Gerade Änderungen bieten sich dafür an, weil sie Inhalt des Mathematikunterrichts aller Schulstufen sind. Neu sollten in der Sekundarstufe II also nicht primär die Inhalte sein, sondern das Umgehen mit den Inhalten und das Stellen von Fragen wie:

- Wieso sind Änderungen für uns interessant?
- Wie beschreiben wir Änderungen in der Alltagssprache?
- Wie beschreiben wir Änderungen mithilfe der Mathematik?
- Welche Rolle spielen die verschiedenen Änderungsmaße im Rahmen der Beschreibung von Änderungen?

Reflexion über diese Fragen kann dann auch helfen, eine alte Forderung von Roland Fischer und Günther Malle umzusetzen: „Die Frage des Bildungssinns eines Gegenstandes muss selbst Gegenstand des Bildungsprozesses sein.“ (Fischer & Malle 2004, S. 26)

Literatur

Fischer, R., & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik* (2 ed. Vol. 5, 1 ed. 1985). München/Wien: Profil.

Hahn, S., & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung - Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29(3/4)*, 163-198.

Guido PINKERNELL, Darmstadt

Konsequente Technologieorientierung am Beispiel Funktionalen Denkens

Die nachfolgenden Überlegungen basieren auf Erfahrungen, die in dem seit 2005 laufenden Schulprojekt CAliMERO gemacht wurden. In diesem bis 2010 andauernden Projekt wird ein Unterrichtskonzept zum Einsatz von CAS-fähigen Taschencomputern im niedersächsischen Gymnasien von Klasse 7 bis 10 entwickelt und mehrfach erprobt. In den begleitend hierzu veröffentlichten Materialienbänden (Bruder 2007ff.) findet man einen Teil der nachfolgenden Aufgabenideen in ihrem eigentlichen Zusammenhang, der an dieser Stelle natürlich nicht wiedergegeben werden kann.

Konsequente Technologieorientierung bedeutet hier wie im Projekt CAliMERO nicht, dass der Zugang zu den mathematischen Inhalten nur noch vermittels Rechner geschieht. Das ist insbesondere auch nicht bei der Einführung des Variablen- oder Funktionsbegriffs der Fall, wie man sich anhand der der Vielzahl an enaktiven, an geometrischen und anderen anwendungsorientierten Fragestellungen gebundenen Aufgaben überzeugen kann. Konsequente Technologieorientierung heißt aber, dass der Taschencomputer immer dann eingesetzt wird, wenn dies sinnvoll erscheint. Dazu aber gehört zwingend, dass er von Schülern wie Lehrern als ein selbstverständliches Werkzeug im Unterrichtsalltag akzeptiert ist. Ein nur punktueller Einsatz erscheint wegen der sich so überlagernden Bedienungsschwierigkeiten bei Schülern und Lehrkräften mit Problemen behaftet (Drijvers 2003), die sich bei ständig wechselnden Softwareplattformen verschärfen dürften.

Eine Besonderheit des Projekts CAliMERO ist, dass hier Fachdidaktikern und Lehrern die Zeit und der Raum gegeben wird, gemeinsam den Technologieeinsatz in konkreten Unterrichtsmaterialien gründlich zu konzipieren, in vielen Lerngruppen gleich mehrfach zu erproben und für die nachfolgenden Jahrgänge verbessern zu können (Pinkernell 2009). Die folgenden Ausführungen sollen einen Eindruck geben, wie weit diese Überlegungen für das Thema „Funktionales Denken“ reichen.

1. Funktionen zuerst, Gleichungslöseverfahren später

Ein Blick gängige Schulbücher zeigt: Die Schüler lernen einen neuen Funktionstyp erst dann kennen, nachdem sie sich mit entsprechenden Gleichungslöseverfahren beschäftigt haben. Das ist auf den ersten Blick nachvollziehbar. Denn wie kann die Frage nach Nullstellen einer quadratischen Funktion beantwortet werden, wenn nicht zuvor gelernt worden ist, wie man eine quadratische Gleichung löst?

Bei CAliMERO hat man sich entschieden, diese Reihenfolge umzukehren (siehe Inhaltsverzeichnis rechts). Dass bei Verfügbarkeit eines GTR oder CAS das Beherrschen algebraische Gleichungslöseverfahren nicht mehr unbedingte Voraussetzung ist für das Arbeiten mit Funktionen ist bekannt: Fragen nach besonderen Eigenschaften einer Funktion können tabellarisch und/oder graphisch gelöst werden. Wesentlicher Beweggrund dieser Umstrukturierung ist aber, dass so die Auseinandersetzung mit den Funktionen und ihren Darstellungen in den Mittelpunkt rückt – auch bei der sich anschließenden Behandlung von Gleichungslöseverfahren. Denn wenn zuvor die Arbeit mit Tabelle und Graph großen Raum eingenommen hat, liegen diese numerischen Methoden auch bei der Lösung von Gleichungen nahe (siehe Aufgabe rechts). Äquivalenzumformungen, insbesondere „händische“, sind zwar im Umfang reduziert, aber weiterhin Teil des Lehrgangs. Nur tritt hier das exakte algebraische Verfahren erst dann in Erscheinung, wenn an geeigneten Aufgabenstellungen gezeigt wird, dass die ungenauen numerischen Lösungen nicht zufrieden stellen.

1. Lineare Funktionen

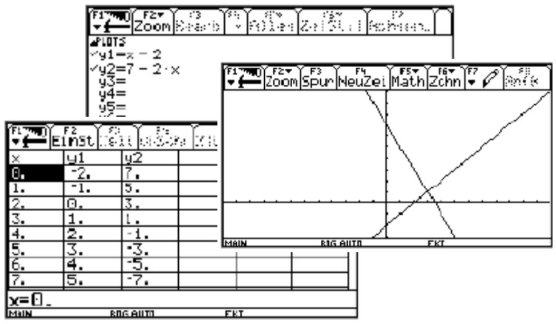
1.1. Die lineare Funktion
1.2. Funktionenscharen
1.3. Steigung und Änderungsrate
1.4. Geradengleichung bestimmen
1.5. Funktionsbegriff
1.6. Geraden durch Punktwolken

2. Lineare Gleichungen

2.1. Lösen von Gleichungen durch Tabelle und Graph
2.2. Äquivalenzumformungen
...

Helga hat die Aufgabe erhalten eine Zahl x zu finden, die die Gleichung x – 2 = 7 – 2 x erfüllt.

Sie löst die Aufgabe mit dem TC so:

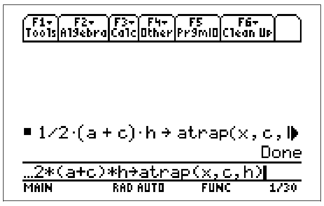


Welche Lösung hat sie gefunden?
Erkläre, wie sie vorgegangen ist.

2. Abhängigkeiten zwischen geometrischen Größen untersuchen

Dem Funktionalen Denken als Leitidee entspricht, dass die Betrachtung funktionaler Zusammenhänge sich nicht auf die Inhaltsbereiche beschränkt, die das Wort „Funktion“ im Titel führen. Konkretisiert hat das vor kurzem erst wieder Hoffkamp (2008) für die DGS Cinderella. Die in CAliMERO verwendete TI-Voyage-Technologie erlaubt diese dynamisierte Vernetzung von geometrischen und funktionalen Objekten nicht. Doch auch hier ist es möglich, Formeln unter einem funktionalen Aspekt zu behandeln.

Aufgaben wie die unten gezeigte werden den Schülern vorgelegt, nachdem sie sich mit Flächeninhalts- und anderen Formeln in einem geometrischen Kontext ausführlich beschäftigt und für die Ausbildung erster Termkompetenzen genutzt haben. Jetzt sind sie aufgefordert, diese Formeln aus einem funktionalen Blickwinkel zu untersuchen. Der Term tritt in den Hintergrund, indem er durch das Abspeichern als „Macro“ hinter dem Namen atrap versteckt wird. Der funktionale Zusammenhang wird also anhand von Zeichnungen und Funktionsgraphen untersucht, die ihrerseits wieder hinsichtlich ihrer Bedeutung für den geometrischen Kontext interpretiert werden müssen.



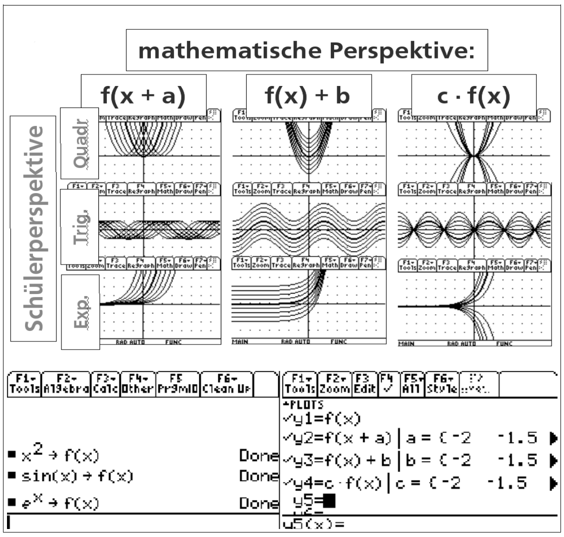
(i)	atrap(6,4,x)
(ii)	atrap(6,x,2)
(iii)	atrap(x,4,2)

1. Skizziere für jeden der Fälle (i), (ii) und (iii) drei Trapeze und beschreibe, wie die Trapeze sich ändern, wenn man x ändert.
2. Erkläre das Ergebnis für x = 0 geometrisch.
3. Skizziere jeweils für (i), (ii) und (iii) den Graphen der Zuordnung *x → Trapezfläche*.
4. Welche Bedeutung haben die Schnittpunkte?

3. Termunabhängiges Arbeiten mit Funktionen

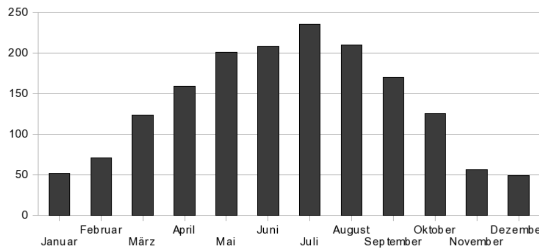
Das Verschieben, Strecken und Stauchen von Funktionsgraphen führen die Schüler in der Sekundarstufe I mehrfach durch, immer dann, wenn ein neuer Funktionstyp eingeführt wird. Sinnvoll erscheinen diese Übungen, wenn sie die Anpassung von Funktionen an gegebene Datensätze im Rahmen von Modellierungsaufgaben zum Ziel haben. Dabei gelingt es aber kaum, die Gemeinsamkeit dieser geometrischen Operationen für alle behandelten Funktionstypen herauszuarbeiten, wenn bei jedem Funktionstyp die Parameter neu zu interpretieren sind. Man vergleiche hierzu $f(x)=a\cdot x+b$ und $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Vor diesem Hintergrund erscheint es wenig verwunderlich, dass mit den Parametern weitaus mehr Zeit verwendet wird als für das verständige Modellieren selbst, nämlich die qualitativ begründete Auswahl eines passenden Funktionstyps noch vor seiner quantitativen Anpassung.

Die notwendige Vereinheitlichung des Umgangs mit Funktionen wird erreicht, wenn man die Gesamtheit der Funktionen durch den Ausdruck „f(x)“ repräsentiert und ihre Veränderungen durch Parametervariationen auf f(x) untersucht. Im CAS ist hierzu der jeweilige Ausgangsterm unter f(x) zu speichern, was dann Gegenstand der weiteren Untersuchungen ist (siehe Graphik rechts). (Weil der Term nicht in Erscheinung tritt, könnte man diesen Zugang



auch als „termunabhängig“ bezeichnen.) Es sind eine Reihe von Aufgaben denkbar, die diese objektorientierte Behandlung von Funktionen erweitern:

- Verschiebe einen selbst gewählten Graphen zuerst und dann strecke. Kehre um. Vergleiche. Ist das bei jeder Verknüpfung von Verschiebung und Streckung so?
- Spiegele den Graphen der Normalparabel an der x-Achse. Wie kann man vorgehen?
- Verschiebe eine Normalparabel um 3 Einheiten in x-Richtung und 2 Einheiten gegen die y-Richtung. Der neue Funktionsterm lässt sich mithilfe der Scheitelpunktsform schnell angeben. Wie lautet er?
- Konrad verschiebt den Graphen der Funktion f(x) = 2x um 3 Einheiten nach rechts und um 6 Einheiten nach oben. Er stellt überrascht fest: „Der Graph hat sich überhaupt nicht verändert!“ Er hat Recht! Wie kommt das? Erkläre anhand des Funktionsterms!



- Die Säulengraphik zeigt die mittlere Sonnenscheindauer in Stuttgart im Verlauf eines Jahres.

  Überlege für jeden dir bekannten Funktionstyp, inwieweit er für die Modellierung geeignet ist. Für welchen entscheidest du dich?

  Passe nun die Ausgangsfunktion des gewählten Funktionstyps den Daten an.

4. Schlußbemerkung

Diese Überlegungen sind das Ergebnis ausgiebiger Erprobungen und Diskussionen in CAliMERO. Unumstritten sind sie damit nicht. Kollegen begrüßen die Umstrukturierung der Einheiten zu Funktionen, ihre Erfahrungen bzgl. der funktionalen Behandlung geometrischer Formeln sind dagegen gemischt. Die Gründe bleiben zu überprüfen. Denkbar ist eine mangelnde Vertrautheit mit den Aufgabenideen. Denkbar ist auch, dass sie dem Lernalter nicht ausreichend angepasst sind. Spannend wäre die Umsetzung dieser Ideen auf den TI-Nspire, bei dem eine unmittelbare Vernetzung der geometrischen und funktionalen Darstellungen möglich ist. Im Nachfolgeprojekt MABIKOM ist hierzu Gelegenheit.

Literatur

Bruder, R., Weiskirch, W. (2007 ff.). *CAliMERO – Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren*. Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler sowie methodische und didaktische Handreichungen. Münster: WWU

Drijvers, P.H.M (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment*. Utrecht: Freudenthal Institute

Hoffkamp, A. (2008). Wie kann man mit dynamischer Geometrie Software funktionales Denken fördern? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Körner, H. (2008). Schulversuch CAliMERO. *Computeralgebra-Rundbrief*, 43, 26-30

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Vieweg

Pinkernell, G. (2009). Kooperation im Schulprojekt. *mathematik lehren*, 152, 46-48

Andreas PRÖMMEL, Kassel und Rolf BIEHLER, Paderborn

Instruktionale Unterstützung selbständigen Lernens in der gymnasialen Oberstufe beim Einstieg in die Stochastik

Für die ersten drei Wochen des Stochastikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe haben wir 2008 ein Unterrichtskonzept entwickelt und erprobt, das einen ganzheitlichen Einstieg in die Stochastik mit computergestützter Simulation (GESIM) ermöglicht. Die zentrale Rolle kommt dabei der selbstständigen Simulation und Modellierung von Zufallsexperimenten zu. Der Erwerb von grundlegenden Fähigkeiten im Umgang mit der Werkzeugsoftware Fathom dient dabei nur als Mittel zum Zweck. Die Lernenden werden in die Lage versetzt, selber aktiv Modelle zu konstruieren und zu untersuchen. Dieser Ansatz bietet didaktische Vorteile gegenüber dem Arbeiten mit fertigen Simulationen. Die durch Simulationen zu erwerbenden stochastischen Grundvorstellungen bzw. intuitiven Wissenselementen beziehen sich auf die folgenden Punkte:

- Rolle des Stichprobenumfangs bei Zufallsexperimenten
- empirisches Gesetz der großen Zahl
- Eigenschaften von Stichprobenverteilungen
- 1/Wurzel (n) –Gesetz

Der stärkere Einsatz von stochastischer Simulation im Stochastikunterricht wird seit längerem in der Mathematikdidaktik für sinnvoll gehalten (AK Stochastik, 2003). Allerdings hat sich dies bisher nur punktuell in Lehrplänen und Schulbüchern niedergeschlagen. Die Situation hat verschiedene Ursachen, u.a. fehlende praktikable Unterrichtskonzepte mit integrierter Simulation und fehlende passende Werkzeugsoftware, die für eine Begleitung eines ganzen Stochastikkurses angemessen ist. Für das GESIM-Konzept konnten wir auf verschiedene Vorarbeiten der AG Biehler zurückgreifen, diese integrieren und weiterentwickeln. So hat Thorsten Meyfarth ein Konzept für den Stochastikleistungskurs mit Fathom entwickelt und evaluiert (Meyfarth, 2006, 2008). Tobias Hofmann hat für die Werkzeugsoftware Fathom die videobasierte Lernumgebung eFathom entwickelt. Rolf Biehler und Carmen Maxara haben einen durchgehenden unterrichtsbegleitenden Einsatz von Simulationen begründet (Biehler & Maxara, 2007).

Fachdidaktische Aspekte des GESIM-Konzeptes

Gegenüber dem Meyfarth-Konzept haben wir gezielt fachdidaktische Optimierungen vorgenommen. So stehen simulative und rechnerische Methoden mehr im Wechselspiel zueinander, um sich gegenseitig zu ergänzen. Wir unterscheiden die Begriffe „theoretische Wahrscheinlichkeit“ für den theoretischen Zugang über Anteile und Wahrscheinlichkeit als Schätzwert für den experimentellen Zugang über relative Häufigkeiten deutlich. Wir beziehen das empirische Gesetz der großen Zahlen für den Erwartungswert mit ein und implementieren dessen theoretische Berechnung durch ideale Simulation. Schätzen, Skizzieren von Verteilungen und Bilden von Modellen als Arbeitsaufträge sollen die intuitiven und planerischen Elemente stärken. Hinsichtlich des Erwerbs von Werkzeug- und Simulationskompetenzen setzen wir auf den Einsatz von eFathom in der Hausarbeitszeit und die Verwendung von Simulationsplänen.

Aus den vorangegangen Überlegungen haben wir die folgende Unterrichtsstruktur für etwa 15 Unterrichtsstunden konzipiert:

- Statistische Verteilungen und ausgewählte Kennwerte (Mittelwerte, Quartile, IQR als Streuungsmaß)
- Laplace-Experimente und Erwartungswert in Spielsituationen (empirische und theoretische Betrachtungen, einfache Simulationen)
- Modellierung von stochastischen Situationen durch Urnenmodelle
- Vertiefung „Gesetz der großen Zahl“ (Einfluss des Stichprobenumfangs, 1/Wurzel (n)-Gesetz)

Die Werkzeugsoftware Fathom wird durchgängig eingesetzt für die aktive Schülerarbeit oder als Demonstrationswerkzeug für die Lehrperson. Das Konzept der Unterrichtsstunden selbst folgt der ASPB-Struktur für die entsprechende Unterstützungen bereit gestellt werden.

Phase	**Unterstützung**
A. Vorbereitung	Didaktisches Handbuch für die Lehrkraft
S. Selbstständige Arbeit	Arbeitsblätter, Simulationsplan, Kooperationsskripts (ggf. Handbuch zur Unterstützung durch die Lehrkraft)
P. Schüler-Präsentation	
B. Nachbesprechung, „Was ist „geteiltes“ Wissen?“	Didaktisches Handbuch für die Lehrkraft

Abb. 1: Stundenstruktur und Unterstützungen

Genauere Betrachtung der S-Phase

Eine typische Arbeitssituation ist, dass Schülerpaare vor dem Rechner sitzen und Simulationsaufgaben mit der Werkzeugsoftware bearbeiten. Die

Komplexität dieser Lernsituation stellt hohe Anforderungen an die Selbstregulation der Lernenden. Aus Untersuchungen ist bekannt, dass Schülerkooperation in Lerndyaden vor dem Rechner nicht zwangsläufig für beide Schüler effektiv sein muss, sondern instruktionaler Unterstützung bedarf (Meyfarth, 2006; Urhahne & Harms, 2006). Als Unterstützungsformen haben wir das in der AG Biehler entwickelte Simulationsschemata und Kooperationsskripts eingesetzt. Dabei haben wir für das Simulationsplanschema zwei verschiedene Einsatzformen realisiert:

- „konsekutiv“ zur Planung (vor Beginn der Rechnerarbeit),
- „integrativ“ zur Dokumentation und Begleitung der Rechnerarbeit

In der konsekutiven Form haben die Schülerpaare das Simulationsplanschema soweit als möglich offline ausgefüllt und dann am Rechner umgesetzt. Bei der integrativen Form gab es keine Trennung der Arbeitsphasen.

Simulationsplan Aufgabe 1 Simulation durch Stichprobenziehung

Zufallsexperiment:
Fragestellungen:

[1] Festlegen der Urnenkollektion	Ausprägungen: Merkmalsname: Fathom-Formel:
[2] Stichprobe ziehen	❑ mit Zurücklegen ❑ ohne Zurücklegen Anzahl der zu ziehenden Kugeln:
[3] Festlegen der Messgrößen	Beschreibung: Ausprägungen: Messgrößenname: Fathom-Formel:
[4] Messgrößen sammeln	Anzahl der gesammelten Messgrößenwerte:
[5] Auswertung: Verteilung, rel. Häufigkeit, Mittelwerte,...	

Interpretation der Auswertung:

Abb. 2: Simulationsplanschema

Überblick über Struktur und Ergebnisse der Pilot-Studie

Das GESIM-Konzept wurde 2008 in zwei Leistungskursen der Jacob-Grimm-Schule Kassel und in einem Leistungskurs der Albert-Schweitzer-Schule Kassel eingesetzt und unter drei globalen Fragestellungen untersucht:

- **Feasibility**: Ist das Konzept in der Unterrichtspraxis umsetzbar? Wo gibt es Verbesserungsbedarf?
- **Instruktionales Design und Lernleistung**: Ist der Einsatz der Arbeitsblätter und des Simulationsschemas erfolgreich im Hinblick auf die Qualität der Aufgabenlösungen?
- **Lösungsprozesse:** Wie unterscheiden sich die Lösungsprozesse der Lernenden in Abhängigkeit von instruktionalen Variablen?

Den Lernerfolg bzw. die Leistung haben wir in der Produktqualität gemessen (Arbeitsblätter, Fathomdateien, Simulationspläne). Für die Untersuchung der Lösungsprozesse haben wir die Arbeitsphasen am Rechner mit der Software Camtasia aufgezeichnet.

Zur Feasibility haben wir festgestellt, dass die Unterrichtseinheit zeitlich und organisatorisch gut unterrichtbar ist. Es gab eine hohe Akzeptanz bei Schülern und Lehrern. Der Einsatz eFathom im Hausaufgabenbereich wurde sehr gut angenommen.

Die Trennung von Planung und Rechnerarbeit hat keine nachteiligen Auswirkungen auf die Lernleistung ergeben. Die Aufgaben in der untersuchten Unterrichtseinheit wurden in beiden Gruppen sehr gut bewältigt.

Allerdings haben sich in den Lösungsprozessen Unterschiede gezeigt, die wir genauer untersuchen wollen. Eine unserer Hypothesen ist, dass die Schülergruppen mit Planungsvorlauf einen einheitlicheren Lösungsprozess in der Rechnerarbeit zeigen und weniger Hilfe von außen benötigen. Darüber hinaus interessieren wir uns dafür, wie das Simulationsschema in der Rechnerarbeit genau benutzt wird.

Literatur

AK Stochastik der GdM (2003). Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule 23, H.3, 21-26*

Biehler, R., Hofmann, T., Prömmel, A. (2008). GESIM: Ganzheitlicher Einstieg in die Stochastik mit Unterstützung durch Simulation. Universität Kassel (unveröffentlicht)

Biehler, R., Maxara, C. (2007). Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. *MU 53. Jg., H.3, 45-62*

Meyfarth, T. (2006). Ein computergestütztes Kurskonzept für den Stochastik-Leistungskurs mit kontinuierlicher Verwendung der Software Fathom - Didaktisch kommentierte Unterrichtsmaterialien. KaDiSto. Bd.2. Universität Kassel

Meyfarth,T. (2008). Die Konzeption, Durchführung und Analyse eines simulationsintensiven Einstiegs in das Kurshalbjahr Stochastik der gymnasialen Oberstufe. Eine explorative Entwicklungsstudie. Dissertation. Universität Kassel

Urhahne D., Harms, U. (2006). Instruktionale Unterstützung beim Lernen mit Computersimulationen. *Unterrichtswissenschaft 34. Jg., H.4, 58-77*

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten
Silvia WESSOLOWSKI, Ludwigsburg

Diagnose und Förderung – ein zentraler Baustein der Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und -lehrern im Primarbereich

Domänenspezifische Kompetenzen im Bereich Diagnose und Förderung sind für Lehrerinnen und Lehrer in ihrer täglichen Unterrichtspraxis unabdingbar. Deshalb sollte diesem Bereich im Rahmen einer professionellen Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und -lehrern eine zentrale Rolle beigemessen werden. Um Lehramtsstudierenden nicht nur theoretische Einblicke in die Thematik zu ermöglichen, werden sie in die Arbeit der an den Pädagogischen Hochschulen Ludwigsburg (1997), Heidelberg (2003) und Weingarten (2007) eingerichteten „Beratungsstellen für Kinder mit Lernschwierigkeiten in Mathematik“ einbezogen. Die Grundlage dafür bildet ein Lehrkonzept, welches Theorie und Praxis eng verzahnt und den Studierenden in besonderer Weise die Entwicklung von Kompetenzen in den Bereichen Diagnose und Förderung ermöglicht.

Das Lehrkonzept umfasst drei Bausteine, die sich wechselseitig bedingen und beeinflussen. Die Auswahl von Kindern ist für die Umsetzung des Lehrkonzepts unabdingbar, hängt aber nicht unmittelbar mit den anderen Bausteinen zusammen (vgl. Abb. 1).

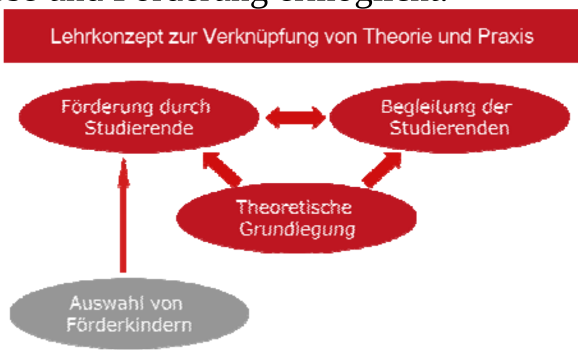


Abbildung 1: Aufbau des Lehrkonzepts

1. Theoretische Grundlegung

Den ersten Baustein bildet die Vorlesung „Mathematisches Denken von Kindern: Lernschwierigkeiten in Mathematik“, die die Studierenden im Modul 4 verpflichtend besuchen müssen. Sie ist gleichzeitig Voraussetzung für die Übernahme einer Förderung. Zunächst setzen sich die Studierenden mit Definitionen, Ursachenfeldern und Symptomen von Rechenstörungen auseinander. Anschließend werden verschiedene Formen der „pädagogischen Diagnose“ (Kretschmann 2006) erörtert sowie deren spezifische Möglichkeiten und Grenzen diskutiert. Ein Überblick über Förderbereiche und das exemplarische Kennen lernen von Fördermöglichkeiten in den Inhaltsbereichen Zahlverständnis, Operationsverständnis und Rechnen im Zahlenraum bis 20 und bis 100 runden die Vorlesung ab. Die Vorlesung intendiert eine erste, theoriegeleitete Auseinandersetzung mit der Thematik. Darüber hinaus werden die Studierenden im Rahmen der Veranstaltung angeregt, Schülerdokumente von Schülerinnen und Schülern und Videosequenzen aus diagnostischen Gesprächen oder Förderstunden zu analysieren. Damit werden auch erste – mittelbare – Erfahrungen mit Diagnose ermöglicht.

2. Begleitung der Förderung

Die Begleitung der Studierenden bei der Förderung findet in Form eines Supervisionsseminars einmal wöchentlich statt und wird von maximal 12 Studierenden besucht. Die Zusammenstellung der Kleingruppe orientiert sich an den Förderkindern; es wird versucht, Kinder mit ähnlichen Schwierigkeiten in einem Seminar zusammenzufassen. Die wesentlichen Inhalte des Seminars sind die Vorbereitung und Reflexion der Förderstunden. Dazu gehören beispielsweise

- die detaillierte Auswertung des diagnostischen Eingangsgespräches (Kaufmann/ Wessolowski 2006) bzw. des Förderberichts aus der vorangegangenen Förderung, um darauf aufbauend erste Ideen für einen Förderplan zu entwickeln,
- die Konkretisierung des individuellen Förderplans durch die Auswahl geeigneter Lernangebote,
- die Überprüfung und Veränderung ausgewählter Aufgaben und Materialien im Hinblick auf eine individuelle Passung,
- die Analyse ausgewählter Videoausschnitte anhand konkreter Fragestellungen, die sich u. a. auf die Vorgehensweise des Kindes, auf Kommunikationsschwierigkeiten zwischen Förderer und Kind oder auf mögliche Anschlussaktivitäten beziehen können,
- das kritische Hinterfragen des eigenen Verhaltens in den Förderstunden.

Dadurch, dass im Begleitseminar die durchgeführten Förderstunden reflektiert und die Planungen diskutiert werden, erleben die Studierenden das unmittelbare Zusammenspiel von Diagnose und Förderung im Sinne eines spiralförmig verlaufenden Prozesses. Die Auseinandersetzung mit den Schülerdokumenten und den Videoaufzeichnungen erreicht jetzt – im Vergleich zu der in der Vorlesung – eine neue Qualität.

3. Förderung durch Studierende

Den wesentlichen Baustein des Konzepts stellt die Förderung selbst dar. Diese findet einmal wöchentlich im Tandem statt, wobei die Studierenden abwechselnd die Rolle des Förderers und die des Beobachters einnehmen. Jedes Tandem arbeitet mindestens ein Semester lang mit einem Kind zusammen. Die Arbeit erstreckt sich über eine Zeitstunde: die ersten 45 Minuten werden für die Förderung des Kindes genutzt; in den restlichen 15

Minuten findet ein Gespräch mit den Eltern statt. Hierbei werden diese über die konkreten Inhalte der jeweiligen Förderstunde, Aktivitäten für zuhause, einschließlich sinnvoller Hilfestellungen und geeignetem Einsatz von Materialien, sowie über die kleinen Fortschritte des Kindes informiert.
Jede Förderstunde wird auf Video aufgezeichnet und dient als Grundlage für die eigene Reflexion und die Planung der folgenden Förderstunden.
Die Kinder, die von unseren Studierenden gefördert werden, zeichnen sich trotz aller Unterschiedlichkeit häufig durch drei Problembereiche aus:

- Sie verfügen nur über einseitige Zahlvorstellungen, d. h. Zahlen sind für sie Namen innerhalb einer Zahlwortreihe und werden nicht zueinander in Beziehung gebracht.
- Sie lösen Aufgaben mehr oder weniger erfolgreich durch Zählen oder durch die Anwendung unverstandener Regeln.
- Sie bringen Rechenoperationen nicht oder nur eingeschränkt mit konkreten Handlungen in Verbindung und verstehen nicht deren Bedeutung.

Ausgehend von dieser Problematik ist es vorrangiges Ziel der Förderung, grundlegendes Verständnis für Zahlen und Rechenoperationen aufzubauen. Das bedeutet, dass wir uns – unabhängig vom Alter der Kinder – zunächst im Zahlenraum bis 10 oder 20 bewegen, um dort die Entwicklung von mentalen Zahlvorstellungen, von „strategischen Werkzeugen“ zum Lösen von Aufgaben (Rathgeb-Schnierer 2006) und von Handlungsvorstellungen zu Rechenoperationen anzuregen. Erst darauf aufbauend kann dann die Automatisierung aller „Zerlegungsaufgaben“ im Zahlenraum bis 10 erfolgen. Dabei können in der Förderung nur sinnvolle Übungen zur Unterstützung der Automatisierung, die auch für das Einprägen Zahlbeziehungen nutzen, vorgestellt werden. Für einen nachhaltigen Erfolg ist das regelmäßige Üben zuhause unabdingbar.
Zwei weitere relevante Ziele der Förderung bestehen darin, dass die Kinder wieder Selbstvertrauen aufbauen und eine positive Einstellung zum Fach Mathematik entwickeln bzw. wiedergewinnen. Das Selbstvertrauen kann durch die Zuwendung zum Kind sowie durch eine entspannte Atmosphäre gestärkt werden. Zur positiven Einstellung trägt insbesondere die Gesamtgestaltung der Förderstunden bei: Mathematik wird anhand von herausfordernden Aufgaben gelernt und keineswegs in „spielerischen Verpackungen“ versteckt. Durch ausreichend Zeit und Raum zum Ausprobieren und adäquate Hilfestellungen haben die Kinder kleine Erfolgserlebnisse, die sich nach und nach positiv auf ihre Einstellung auswirken.
Zum Abschluss der Förderung erstellen die Studierenden einen ausführlichen Bericht, der neben der Dokumentation des gesamten

Diagnose- und Förderprozesses u. a. auch Anregungen zur Weiterförderung und detaillierte Analysen interessanter transkribierter Fördersequenzen enthält.

4. Ziele und Ausblick

Im Rahmen des vorgestellten Lehrkonzepts wird die Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz auf Seiten der Studierenden auf unterschiedliche Weise angeregt: Am Anfang steht die theoretische Auseinandersetzung mit Lernschwierigkeiten in Mathematik, wobei bereits vorliegende Materialien (Schülerdokumente, Transkripte und Videosequenzen) eingesetzt werden, für deren Analyse die Studierenden zunächst noch direkte Unterstützung erfahren. In der praktischen Arbeit mit den Kindern wenden sie ihre erworbenen Fähigkeiten in „Ernstsituationen“ an und entwickeln diese weiter. Die Reflexionen im Tandem und in der Kleingruppe im Seminar tragen darüber hinaus auch zu einer Vertiefung ihres fachdidaktisches Wissens bei.

Grundlegende Ziele des Lehrkonzepts bestehen darin, dass die Studierenden lernen, Denkprozesse von Kindern zu erfassen, ihr Denken zu verstehen und darauf aufbauend Lernprozesse adäquat anzuregen. Im Einzelnen geht es darum, dass die Studierenden u. a. eine lernprozessbegleitende Diagnose umsetzen, individuelle Lernangebote entwickeln, Lernprozesse beobachten und didaktisch einordnen und damit letztlich die Verantwortung für den Lernprozess ihres Förderkindes übernehmen. Ebenso reflektieren sie die eigene Rolle als Lehrperson kritisch und sammeln Erfahrungen in der Zusammenarbeit mit Eltern und Lehrpersonen. Dadurch, dass sich die Förderung über ein ganzes Semester erstreckt, erleben die Studierenden ihr didaktisches Handeln als fortlaufenden, zyklischen Prozess von Planung, Durchführung und Reflexion.

Bislang handelt es sich bei der „Beratungsstelle“ weitgehend um ein Studienangebot, dessen wesentliche Aspekte im Beitrag dargestellt wurden. Weitere Zielstellungen beziehen sich auf eine Ausweitung der begonnenen Forschungsaktivitäten und der Serviceleistungen gegenüber den Schulen in der jeweiligen Region. Momentan sind wir dabei, Förderkonzepte zu entwickeln und deren Unsetzbarkeit in der Schule zu evaluieren.

5. Literatur

Kaufmann, S., Wessolowski, S. (2006). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine.* Seelze: Kallmeyer mit Klett.

Kretschmann, R (2006). „Pädagnostik“ – Optimierung pädagogischer Angebote durch differenzierte Lernstandsdiagnosen unter besonderer Berücksichtigung mathematischer Kompetenzen. In M Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.) Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten-Fördern-Dokumentieren (S. 29 – 54). Offenburg: Mildenberger-Verlag.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Julia REIBOLD, Regina BRUDER, Darmstadt

MABIKOM – ein Projekt zur binnendifferenzierenden Unterrichtsgestaltung in der Sekundarstufe I

1. Idee des Projektes MABIKOM

Das Projekt MABIKOM (MAthematische BInnendifferenzierende KOmpetenzentwicklung in einem mit neuen Technologien unterstützten Mathematikunterricht) baut auf Ergebnissen aus dem Schulversuch CALiMERO auf, einem gemeinsamen Projekt der TU Darmstadt, der Firma Texas Instruments und des Niedersächsischen Kultusministeriums. Der Schulversuch CALiMERO entwickelt und erprobt ein Unterrichtskonzept zum Einsatz CAS-fähiger Taschencomputer im Mathematikunterricht an Gymnasien von Klasse 7 bis 10 in Niedersachsen (Bruder et al 2007). In das CALiMERO-Unterrichtskonzept wurden binnendifferenzierende Unterrichtsmethoden wie Gruppenpuzzle, Stationenlernen bereits eingebaut. Im Laufe des Projektes wurde jedoch der große Bedarf an weiteren binnendifferenzierenden Maßnahmen in Verbindung mit der Nutzung des Potenzials neuer Technologien deutlich, was die Konzipierung des MABIKOM-Projekts veranlasste.

Die verstärkte Forderung nach Individualisierung und Differenzierung von Lehr- und Lernprozessen verlangt ein geeignetes Instrumentarium für Lernerfolgskontrolle und Förderdiagnostik sowie ein handhabbares Methodenrepertoire zur flexiblen Gestaltung von Lernumgebungen. Mit diesen Anforderungen ist ein hoher Anspruch und Vorbereitungsaufwand für den Unterricht verbunden, der nur sehr begrenzt von einer Lehrkraft bewältigt werden kann. Deshalb bedarf es geeigneter Unterstützungsinstrumente in Form von Orientierung gebenden Unterrichtsmodellen und ausgearbeiteten, erprobten und anpassungsfähigen themenspezifischen Lehr- und Lernmaterialien.

Gesucht ist also ein alltagstaugliches Unterrichtskonzept für binnendifferenzierenden Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I (ab Klasse 7 mit Technologieeinsatz), das dem Anspruch genügt, möglichst viele Schüler/innen in einer heterogenen Lerngruppe kognitiv und motivational anzusprechen und effektiv Lernfortschritte für alle zu erreichen.

2. Organisation des Projektes MABIKOM

Das Projekt wurde vom Land Niedersachsen initiiert und wird von der Firma Texas Instruments unterstützt. Die wissenschaftliche Projektbegleitung durch die Technische Universität Darmstadt umfasst insbesondere die Entwicklung und Diskussion eines Unterrichtskonzeptes für binnendifferenzierenden Mathematikunterricht in Kooperation mit den beteiligten Lehrkräften. Im Projekt beteiligen sich 24 Schulen, ca. 2300 Schüler und 48 Lehrkräfte in den Klassenstufen 5, 7 und 9. Das Projekt liefert die Möglichkeit das entwickelte Unterrichtskonzept direkt im Schulbetrieb zeitnah zu erproben und über längere Zeiträume weiter zu entwickeln.

Das Projekt MABIKOM startete nach einer halbjährigen Vorlaufszeit für gemeinsame Konzeptentwicklungen mit dem Schuljahr 2008/2009 und läuft bis 2012. Im Jahr 2008 erfolgten die kooperative Konzeptentwicklung und die ersten Erprobungen einzelner methodischer Elemente. In den Jahren 2009-2010 werden die Unterrichtsmaterialien anhand des entwickelten Konzeptes ausgearbeitet und erprobt. In den Jahren 2011-2012 werden die Materialien aufgrund von gesammelten Erfahrungen bei der Umsetzung überarbeitet und es wird ein Fortbildungskonzept für Niedersachsen entwickelt. Die beteiligten Lehrkräfte im Projekt werden als Multiplikatoren ausgebildet.

Als Arbeitsform im Projekt haben sich vierteljährige mehrtägige Arbeitstreffen bewährt, wo nach einem fachdidaktischen Input und Erfahrungsaustausch systematisch an den Materialien für den Unterricht in Kleingruppen gearbeitet wird. Darüber hinaus wird von der TUD eine moodle-basierte Plattform für den Austausch zwischen den beteiligten Lehrkräften und für die Bereitstellung der Materialien zur Verfügung gestellt.

3. Das Unterrichtskonzept MABIKOM

Als Ergebnis einer gemeinsamen Diskussion mit den beteiligten Lehrkräften über Eckpfeiler eines realistischen binnendifferenzierenden Unterrichts wurden folgende Elemente fixiert:

- Ziel- und Inhaltstransparenz für die Lernenden
- angepasste Anforderungen an unterschiedliche Lernvoraussetzungen und eine stärkere kognitive Aktivierung der Lernenden
- Förderung der Selbstregulation bei Schüler/innen
- Wachhalten von grundlegendem Wissen und Können

Für einen binnendifferenzierenden Mathematikunterricht ist es wichtig tragfähige langfristige Zielorientierungen und Motivierungen bei den Lernenden zu schaffen sowie tragfähige Grundvorstellungen zu erzeugen. Dazu eignen sich differenzierende Unterrichtseinstiege. Dabei werden die unterschiedlichen Vorerfahrungen der Lernenden in die Erschließung eines neuen Themas so eingebracht, dass zunächst ein neuer Sachverhalt mit Hilfe von passenden Aufgabenstellungen erkundet wird. Die für einen differenzierenden Einstieg geeigneten Aufgaben sollen unterschiedliche Zugänge zu einem Kernaspekt des neuen Themengebietes eröffnen (Differenzierung nach Kontext, Lerntypen/Darstellungsformen, Abstraktionsgrad). Die Einstiegsaufgaben sollten eine Grundvorstellung anregen, auf die sich zukünftig zurückbezogen werden kann und sie sollten auf einen zentralen Themenaspekt fokussiert sein.

Für einen binnendifferenzierenden Mathematikunterricht ist von großer Bedeutung solche Aufgaben für die Lernenden zu stellen, die einerseits entwicklungsgemäß und andererseits entwicklungsfördernd sind. (Giest et al 2006)

In Rahmen des entwickelten Unterrichtskonzeptes wird viel mit Wahlaufgaben gearbeitet. Wahlmöglichkeiten bieten die notwendige Anpassung von Lernanforderungen an das unterschiedliche Leistungsvermögen der Lernenden. Wichtig ist nun eine strukturierte Vielfalt von Aufgaben im Unterricht zur Verfügung zu stellen. Ein niedrigschwelliges Einstiegsniveau, eine schrittweise aufsteigende Schwierigkeit, verschiedene Komplexität- und Formalisierungsgrade, vielfältige Aufgabentypen (Bruder et al 2008), reiche mathematische Substanz und somit vielfältige Bearbeitungsniveaus insbesondere bei offenen Teilaufgaben, Reflexion der unterschiedlichen Lernwege – das sind wichtige Merkmale von Aufgaben, die in Form eines „Aufgabensets“ oder einer „Blütenaufgabe“ für die Lernenden zur Auswahl stehen. Auch unverzichtbar für einen binnendifferenzierenden Mathematikunterricht ist die Förderung der Selbstregulation (Zimmerman 2000). Die Förderung der Selbstregulation ist im gesamten Unterrichtskonzept verankert und insbesondere durch Methoden zur Kompetenzdiagnose mit Selbsteinschätzung umgesetzt und steht auch in Verbindung mit langfristigen Hausaufgaben (Bruder 2006).

Was darüber hinaus einen binnendifferenzierenden Mathematikunterricht ausmacht, ist das Wachhalten von grundlegendem Wissen und Können durch regelmäßige Wiederholungen, um nicht unnötige Lücken entstehen zu lassen. Es gibt jedoch individuelle Unterschiede, die möglicherweise im Unterricht (unbewusst) erzeugt wurden, d.h. die durch eine geeignete Unterrichtsgestaltung vielleicht vermieden oder zumindest zurückgedrängt werden könnten. Das Wachhalten von Grundwissen und Können wird im Unterrichtskonzept durch ritualisierte vermischte Kopfübungen mit Diagnoseelementen realisiert.

4. Fundierung der eingesetzten Lern- und Lehrmethoden

Nachdem die methodischen Elemente des Unterrichtskonzeptes und die dazu entwickelten Unterrichtsmaterialien von den beteiligten Lehrer/innen im Unterricht zum ersten Mal erprobt wurden, hat es sich gezeigt, dass es noch Klärungsbedarf gibt insbesondere bzgl. der Intentionen der Methoden und der Umsetzung der für viele Lehrkräfte neuen und ungewohnten Methoden im Unterricht. Als Beispiele für solche Problemstellen seien hier genannt die Organisation eines effektiven Feedbacks bei offenen Aufgaben und ein nachhaltiger effektvoller Umgang mit den Diagnoseergebnissen von Selbsteinschätzungen.Um die eingesetzten Methoden anhand der ersten Erprobungen weiterzuentwickeln, wurden kooperativ mit den beteiligten Lehrkräften Steckbriefe zu den eingesetzten Methoden ausgearbeitet. Ein Methodensteckbrief hat grundsätzlich folgenden Aufbau: Zunächst wird eine Definition der Methode gegeben und an einem Beispiel erläutert. Die Qualitätsanforderungen an die Methode werden ausformuliert, Vorschläge zur Anmoderation, zur Organisation des Ablaufes und zur Art und Weise der Auswertung bzw. zum Umgang mit den Ergebnissen gegeben. Der aktuelle Stand der Methodensteckbriefe ist jeweils im Fortbildungsbereich des Portals www.prolehre.de abrufbar.

Eine Projektevaluation hat mit der Beschreibung der Ausgangssituation bei den beteiligten Schüler/innen und bei den Lehrkräften begonnen. Die Konzeptumsetzung soll anhand qualitativer Instrumente wie „Stundenprotokolle von Schülern“ beobachtet werden und Lernentwicklungen werden ab dem nächsten Schuljahr in drei Leistungsgruppen differenziert verfolgt anhand von Testaufgaben und Befragungen (Bruder 2008).

Literatur

Bruder, R., Weiskirch, W. (Hrsg.) (2007). *CALiMERO – Computer-Algebra in Mathematikunterricht. Band 1: Methodische und didaktische Handreichung*. T³ Deutschland.

Bruder, R., Leuders, T., Büchter, A. (2008). *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetentorientiertes Unterrichten*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, S., Perels, F., Schmitz, B. & Bruder R. (2006): Die Förderung selbstregulierten Lernens bei der Hausaufgabenbearbeitung- Evaluation eines Schüler- und Elterntrainings auf der Basis von Prozessdaten. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Schulische und außerschulische Ansätze zur Verbesserung der Bildungsqualität*. Münster: Waxmann.

Giest, H., Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht*. Berlin: Lehmanns Media.

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining Self-Regulation: A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P.R. Pintrich, M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-Regulation* (pp.13-39). San Diego, CA: Academic Press

Sebastian REZAT, Gießen

Das Mathematikbuch im Unterricht – Wohl oder Übel?

Unterricht nach dem Mathematikbuch ist ebenso populär wie unpopulär. Einerseits belegen Studien, dass das Mathematikbuch eines der wichtigsten Hilfsmittel des Lehrers zur Unterrichtsvorbereitung ist (vgl. z. B.: Bromme & Hömberg 1981; Hopf 1980; Pepin & Haggarty 2001; Tietze 1986). Andererseits stellen Ball und Feiman-Nemser (1988) bei einer Befragung von Lehramtsstudenten fest, dass diese in ihrer Ausbildung ein kritisches Bild von einem Unterricht, der sich am Mathematikbuch orientiert, entwickelt haben: „Students in both programs came to believe that good teachers avoid textbooks and develop their own lessons and units“ (Ball & Feiman-Nemser 1988, 416).

Es ist zu vermuten, dass ein vergleichbares Bild von der Verwendung des Mathematikbuchs auch bei einer Befragung von deutschen Lehramtsstudenten und Referendaren zum Vorschein kommen würde.

Ewing (2004) stellt fest, dass die Verwendung des Schulbuches durch den Lehrer im Mathematikunterricht „identities of participation and non-participation in mathematics classrooms“ (Ewing 2004, 237) prägt. Der Unterricht nach dem Mathematikbuch führt ihrer Ansicht dazu, dass Schüler sich weniger auf das Lernen von Mathematik einlassen.

Die Bedeutung, die das Mathematikbuch für die Unterrichtsvorbereitung von Lehrern und im Unterricht hat in Verbindung mit der negativen Konnotation eines Unterrichts nach dem Buch lässt die Frage entstehen, welche Rolle das Buch im Mathematikunterricht für das Lernen von Mathematik hat. Pointiert formuliert: Stellt es ein Wohl oder ein Übel dar?

Im vorliegenden Aufsatz sollen Implikationen einer Studie zur Nutzung des Mathematikbuches durch Schüler als Instrument zum Lernen von Mathematik für die Verwendung des Mathematikbuches durch den Lehrer im Unterricht aufgezeigt werden. Vor dem Hintergrund der erörterten Thesen wird sich die Frage, ob das Mathematikbuch ein Wohl oder Übel im Mathematikunterricht ist, beantworten lassen.

1. Studie zur Nutzung des Mathematikbuches als Instrument des Schülers zum Lernen von Mathematik – Ein Überblick

Um Erkenntnisse zur Nutzung des Mathematikbuches durch Schüler zu gewinnen, wurde eine Grounded Theory Studie (vgl. z. B. Strauss & Corbin 1996) in zwei Klassen der Jahrgangsstufe 6 und zwei Kursen der Jahrgangsstufe 12 an zwei Gymnasien in Nordrhein-Westfalen über einen Zeitraum von drei Wochen durchgeführt. Für die Untersuchung wurde ein Multimethodenansatz gewählt, der sich aus folgenden Komponenten zusammensetzt:

- schriftliche Befragung der Schüler (Markieren der genutzten Teile im Buch und Angabe des Nutzungsgrundes),
- Interviews nach dem Prinzip des Stimulated Recall zu ausgewählten Nutzungen,
- Unterrichtsbeobachtung und Dokumentation in Form von Beobachtungsprotokollen über den gesamten Zeitraum der Datenerhebung.

Die Daten wurden nach der Methode des Fragenstellens der Grounded Theory vor dem Hintergrund des instrumentellen Ansatzes der kognitiven Ergonomie (Rabardel 1995) ausgewertet. Anhand der Daten wurden die instrumentelle Genese (Instrumentalisierung und Gebrauchsschemata) der Schüler in Bezug auf das Mathematikbuch rekonstruiert (vgl. Rezat 2008).

2. Implikationen für die Nutzung des Mathematikbuches durch den Lehrer im Unterricht

Für Lehrer ergeben sich aus der Untersuchung Implikationen im Hinblick auf folgende Aspekte:

- Einblick in Lerntätigkeiten der Schüler;
- Rolle des Lehrers als Vermittler der Schulbuchnutzung.

Ein grundsätzliches Ergebnis der Arbeit besteht in der Einsicht, dass Schüler ihre Mathematikbücher auch selbständig, über die vom Lehrer vermittelten Nutzungen hinaus zum Lernen von Mathematik verwenden. Insbesondere suchen Schüler Hilfe für das Bearbeiten von Aufgaben im Mathematikbuch und nutzen es zum Festigen, zum Aneignen von Wissen und im Zusammenhang mit interessemotiviertem Lernen.

Nicht alle selbständigen Nutzungen des Mathematikbuches durch Schüler sind jedoch unabhängig von der Verwendung des Mathematikbuches durch den Lehrer im Unterricht. Anhand verschiedener typischer Nutzungen des Mathematikbuches durch Schüler zeigt sich, dass die Verwendung des Mathematikbuches im Unterricht durch den Lehrer Voraussetzung und Orientierungshilfe für die Schülernutzungen ist. Setzt der Lehrer das Buch nicht im Unterricht ein, haben Schüler mit bestimmten Gebrauchsschemata des Buches keine Orientierung und nutzen das Buch in der Regel nicht. Für diese Schüler kann ein Unterricht unter Verwendung des Buches als Unterricht angesehen werden, der die Voraussetzung für das selbständige Lernen von Mathematik durch Schüler bereitstellt.

In zwei Lerngruppen der Untersuchung setzen die Lehrer das Mathematikbuch nicht nur im Unterricht ein, sondern weisen die Schüler regelmäßig darauf hin, dass sie das Buch zur Unterstützung ihres Lernprozesses heranziehen können. In den Daten zeigt sich, dass diese Hinweise von Schülern aufgenommen werden. Auf der Grundlage dieser Beobachtung in zwei Lerngruppen lässt sich daher die Hypothese formulieren, dass Hinweise des Lehrers zur Verwendung des Mathematikbuches von Schülern befolgt werden und die Nutzung des Mathematikbuches durch Schüler verstärken.

Sowohl die Abhängigkeit einiger Gebrauchsschemata der Schüler von der Verwendung des Buches durch den Lehrer im Unterricht als auch die Hypothese über den positiven Einfluss des expliziten Verweisens auf das Schulbuch durch den Lehrer unterstreichen die Rolle des Lehrers als impliziten und expliziten Vermittler der Schulbuchnutzung.

Zwei weitere Aspekte deuten darauf hin, dass die effektive Nutzung des Schulbuches ein Lernprozess seitens der Schüler ist, der vom Lehrer unterstützt werden kann, indem die Nutzung des Mathematikbuches thematisiert und geübt wird:

1. Der im Unterricht einer Lerngruppe der Jahrgangsstufe 6 beobachtete selbstverständliche und souveräne Gebrauch des Inhalts- und Stichwortverzeichnisses der Schüler in Verbindung mit der Auskunft des Lehrers, dass er derartige Nutzungen mit den Schülern übt, legt die Vermutung nahe, dass die Effektivität der Schulbuchnutzung durch gezieltes Thematisieren und Üben gesteigert werden kann.
2. Eine mögliche Erklärung der relativ selten[1] in den Daten zu beobachtenden Nutzung von lerneinheitenübergreifenden Wiederholungen und Aufgaben besteht darin, dass Schüler die Nutzung dieser relativ neuen Strukturelemente noch nicht ‚gelernt' haben, d. h. ihnen keine Funktion im Rahmen ihres eigenen Lernprozesses zuschreiben und keine Gebrauchsschemata in Bezug auf diese Strukturelemente entwickelt haben. Die Verwendung dieser Strukturelemente durch Schüler kann möglicherweise gefördert werden, indem der Lehrer das Vorhandensein, die besonderen Eigenschaften – z. B. die Existenz von Lösungen zu den Aufgaben – und den Zweck dieser Strukturelemente thematisiert und deren Nutzung initiiert.

Diese zwei Überlegungen lassen sich in einer weiteren Hypothese zusammenfassen, in der ein weiterer Aspekt des Einflusses zum Ausdruck kommt, den der Lehrer auf die Nutzung des Mathematikbuches durch Schüler ausüben kann: Die Nutzung des Mathematikbuches ist ein Lern-

[1] Die Studie ist im qualitativen Forschungsparadigma verortet. Eine quantitative Interpretatation der Daten ist daher nicht ohne weiteres möglich. Bei quantitativen Aussagen handelt es sich daher nicht um Ergebnisse, sondern um beobachtete Tendenzen, die Anlass zur Hypothesenbildung geben.

prozess des Schülers, der durch den Lehrer unterstützt werden kann, indem die Nutzung des Schulbuches zum Unterrichtsgegenstand erhoben wird.

Fazit

Zusammenfassend lässt aus der Studie zur Nutzung des Mathematikbuches als Instrument des Schülers zum Lernen von Mathematik der Schluss ziehen, dass die Verwendung des Buches im Unterricht durch den Lehrer eine wichtige Voraussetzung und Orientierung für die selbständige Nutzung des Buches durch den Schüler darstellt. Das Buch sollte daher bewusst und reflektiert im Unterricht eingesetzt werden.

Literatur

Ball, D. & Feiman-Nemser, S. [1988]: Using Textbooks and Teachers' Guides. A Dilemma for Beginning Teachers and Teacher Educators. In: Curriculum Inquiry, 18(1988)4, 401-423.

Bromme, R. & Hömberg, E. [1981]: Die andere Hälfte des Arbeitstages - Interviews mit Mathematiklehrern über alltägliche Unterrichtsvorbereitung. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Ewing, B. [2004]: "Open your textbooks to page blah, blah, blah": "So I just blocked off!" In: l. Putt; R. Faragher & M. McLean (Hg.): Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia Incorporated: Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. Sidney: MERGA.

Hopf, D. [1980]: Mathematikunterricht. Eine empirische Untersuchung zur Didaktik und Unterrichtsmethode in der 7. Klasse des Gymnasiums. Stuttgart: Klett-Cotta.

Pepin, B. & Haggarty, L. [2001]: Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33(2001)5, 158-175.

Rabardel, P. [1995]: Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains. Abgerufen am 02.01.2008 von http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1.

Rezat, S. [2008]: Learning Mathematics with Textbooks. In: O. Figueras; J. L. Cortina; S. Alatorre; T. Rojano & A. Sepúlveda (Hg.): Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 und PME-NA XXX. Morelia: Cinestav-UMSNH.

Strauss, A. & Corbin, J. [1996]: Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Beltz, Psychologische Verlags Union.

Tietze, U. P. [1986]: Der Mathematiklehrer in der Sekundarstufe II. Bericht aus einem Forschungsprojekt. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Alexander ROPPELT, Berlin

Alles vergessen nach dem Abitur? Ein Vergleich der mathematischen Grundkompetenzen von Studierenden und Schülern

In den Medien finden sich immer wieder Klagen von Hochschullehrern, die mangelnde Mathematikkenntnisse der Studierenden bemängeln. Selbst die Inhalte der Sekundarstufe I würden demnach nicht hinreichend beherrscht (z. B. Kaube, 2008). Dieser Eindruck deckt sich mit dem subjektiven Gefühl vieler Erwachsener „in Mathe nichts mehr zu können“. Empirische Befunde zum tatsächlichen Niveau mathematischer Grundkompetenzen bei Studierenden oder Erwachsenen im Allgemeinen sind jedoch rar (Ehmke, 2004). Der vorliegende Beitrag geht deshalb der Frage nach der empirischen Fundierung solcher Klagen nach. Zugespitzt formuliert: Beherrschen Studierende wirklich nicht einmal den Stoff der Sekundarstufe I?

1. Existierende Befunde zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen nach Verlassen des allgemeinbildenden Schulsystems

Die meisten Befunde zu mathematischen Kompetenzen von Erwachsenen im deutschsprachigen Raum stammen aus Untersuchungen an der Universität Linz. Maaß und Schlögelmann (2000) kommen dabei zu dem Ergebnis, dass ein sicheres Beherrschen nur bei Inhalten der ersten fünf Schuljahre bei fast allen Erwachsenen zu beobachten ist. In der internationalen Vergleichsuntersuchung IALS stellt die OECD (2000) für das mathematiknahe Konstrukt Quantitative Literacy fest, dass etwa ein Drittel der deutschen Erwachsenen nicht das in der Studie als minimal notwendig definierte Niveau erreicht. Unter den Personen mit Hochschulabschluss verbleibt ein Anteil von 14 Prozent, der diesen Level nicht übertrifft. Ehmke und Siegle (2006) untersuchen die Mathematical Literacy bei gut 200 Eltern von Teilnehmern der PISA-Studie (vornehmlich von Gymnasiasten). Sie stellen in dieser Stichprobe ein hohes mittleres Fähigkeitsniveau im Bereich der fünften Kompetenzstufe der PISA-Skala fest. Studien im Bereich der beruflichen Ausbildung finden insgesamt ein relativ niedriges Niveau mathematischer Kompetenz, wobei große Unterschiede in Abhängigkeit von der Ausbildungsrichtung auszumachen sind (TIMSS: Watermann & Baumert, 2000; ULME: Lehmann & Seeber, 2007).

2. Datengrundlage der Studie

Das untersuchte Konstrukt dieser Studie sind mathematische Grundkompetenzen. Damit sind hier diejenigen mathematischen Kompetenzen gemeint, die bis zum Ende der Sekundarstufe I in der Schule erworben werden sollen, also gerade jene Kompetenzen, die von den länderübergreifenden Bildungsstandards (KMK, 2004) beschrieben werden.

Die Untersuchung fußt auf den Daten zweier Studien. Zum einen ist dies die Normierungsstudie für die länderübergreifenden Bildungsstandards am Ende der Sekundarstufe I. Diese erfolgte in zwei deutschlandweiten repräsentativen Erhebungen in den Jahren 2006 und 2007. Es wurden insgesamt rund 14000 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 8, 9 und 10 getestet. Vergleichsgruppe für die vorliegende Studie sind 1900 Zehntklässler, die (mindestens) den Mittleren Schulabschluss (MSA) anstreben.

Zweiter Ausgangspunkt ist die am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung (Berlin) initiierte TOSCA-Studie (Köller, Watermann, Trautwein & Lüdke, 2004). Sie untersucht längsschnittlich den Übergang vom Ende der gymnasialen Oberstufe ins Berufsleben. Die Basiserhebung umfasste eine umfassende Testung einer repräsentativen Stichprobe von 4730 Abiturienten aus Baden-Württemberg. Für die vorliegende Studie unterzog sich eine Teilstichprobe von 382 Studierenden aller Fachrichtungen fünf Jahre nach dem Abitur wiederum einem Mathematiktest. Selektivitätsanalysen sprechen für eine nur geringfügige positive Verzerrung der Stichprobe.

Die hier berichteten Daten beziehen sich auf einen Test mit 43 Items, für welche repräsentative Daten von Schülern am Ende der Sekundarstufe I vorliegen. Im Sinne eines „Pseudo-Längsschnitts" ist somit ein Vergleich der Kompetenzen der beiden Kohorten möglich. Der Test wird durch einen Fragebogen ergänzt, dem u. a. der Mathematikanteil des gewählten Studienganges entnommen werden kann. Die Daten der Studierenden wurden analog zum Vorgehen bei den Bildungsstandards auf Basis des Raschmodells skaliert und mit der Metrik des MSA mittels fixierter Itemparameter verlinkt. Die Zehntklässler in Deutschland zeigen auf dieser Skala einen Mittelwert von 550 und eine Standardabweichung von 80.

3. Ergebnisse zum Niveau der mathematischen Grundkompetenzen von Studierenden

Das Niveau der Studierenden liegt im Mittel bei 700 Punkten auf der Skala des MSA. Gegenüber den Schülerinnen und Schüler der zehnten Jahrgangsstufe beträgt der Leistungsvorsprung also rund 150 Punkte. Auch gegenüber den Gymnasiasten dieser Jahrgangsstufe beträgt der Abstand noch über 100 Punkte.

Hinsichtlich der Nachhaltigkeit des Lernens ist die Gruppe jener Studierenden besonders interessant, denen das Studium keine weiteren Lerngelegenheiten in Mathematik bot. Vergleicht man die Leistungen von Studierenden mit und ohne Mathematik im Studium, zeigen erstere erwartungsgemäß einen deutlichen Vorsprung von rund 60 Punkten. Jedoch erreicht auch die Gruppe ohne Mathematik im Mittel noch 660 Punkte auf der MSA-Skala.

Das Kompetenzstufenmodell der Bildungsstandards ermöglicht eine sachnormorientierte Einschätzung der Mathematikkompetenz der Studierenden. Hiernach überspringen mehr als 95 Prozent der Studierenden den erweiterten Regelstandard für den MSA (mind. Stufe 4). Selbst innerhalb der Gruppe ohne Mathematik im Studium sind es weniger als 10 Prozent, die den erweiterten Regelstandard nicht erreichen.

4. Spezifische Stärken Studierender

Um spezifische Stärken Studierender zu ergründen und damit eine qualitative Entwicklung der mathematischen Grundkompetenzen zu sichtbar zu machen, wurden korrelative Zusammenhänge zwischen Itemmerkmalen und „überproportionalen" Lösungswahrscheinlichkeiten (DIF; Holland & Wainer, 1993) für Items exploriert. Das heißt, die Analyseebene sind nun nicht mehr die Probanden, sondern die Items des Tests.

Aus der Normierung der Bildungsstandards kann für jedes Item auf Expertenklassifikationen zu Leitidee und allgemeinen mathematischen Kompetenzen zurückgegriffen werden. Als weiteres Merkmal wird eine Korrelation mit dem Antwortformat der Aufgaben (geschlossen, Kurzantwort, ausführliche Antwort) überprüft.

Die Analysen ergeben keinen Einfluss der Leitidee und des Antwortformats der Items. Bei den allgemeinen mathematischen Kompetenzen deuten sich schwache Korrelationen zumindest für Modellieren (K3), technisches Arbeiten (K5) und Kommunizieren (K6) an. Items, die diese Kompetenzen fordern, fallen den Studierenden überproportional leicht. Allerdings ist die statistische Unsicherheit der Korrelationen groß, so dass auch für diese Zusammenhänge ein zufälliges Zustandekommen nicht ausgeschlossen werden kann.

5. Fazit

Zieht man als Maßstab die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss heran, zeigen Studierende insgesamt ein sehr hohes Niveau mathematischer Grundbildung. Selbst Studierende ohne Mathematikanteil im Studium übertreffen größtenteils die Regelstandards des MSA bei weitem. Die Klagen mancher Hochschullehrer und das subjektiven Gefühl vieler Menschen „in Mathe gar nichts mehr zu können" müssen folglich relativiert werden. Offen bleibt jedoch, ob auch die Inhalte der gymnasialen Oberstufe hinreichend nachhaltig gelernt werden, um etwa den Anforderungen eines Studiums mit gehobenen Anforderungen in Mathematik gerecht zu werden.

Die spezifischen Stärken der Studierenden bei Items, die insbesondere die allgemeinen mathematischen Kompetenzen Modellieren (K3) oder Kommunizieren (K6) erfordern, könnten darauf hinweisen, dass es Studierenden vergleichsweise leicht fällt, ein adäquates Situationsmodell für die Kontexte der Aufgaben aufzubauen. Da die Anzahl der Items gering ist und ihre Klassifikation gewissen subjektiven Einflüssen unterliegt, sind die Ergebnisse jedoch als explorativ und vorläufig zu betrachten. Um eine fundierte Beschreibung der qualitativen Entwicklung von mathematischen Grundkompetenzen nach dem Abitur zu verwirklichen, sind weitere theoretische und empirische Forschungsarbeiten in diesem Feld erforderlich.

Literatur

Ehmke, T. (2004). Mathematische Kompetenz bei Erwachsenen. Ein Überblick zum Stand der empirischen Forschung. In A. Heinze & S. Kuntze (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2004*.Hildesheim: Franzbecker.

Ehmke, T. & Siegle, T. (2006). Mathematical Literacy von Erwachsenen. Über welche Kompetenz verfügen die Eltern von PISA-Schülerinnen und -Schülern? In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule.* (S. 83-98). Münster, Westfalen u.a.: Waxmann.

Holland, P. W. & Wainer, H. (1993). *Differential item functioning*.Hillsdale, NJ England: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaube, J. (2008, 11.3.2008). Mit Mathe im Gepäck. Begabtenförderung gegen das Monopol der Sprachen. *Frankfurter Allgemeine Zeitung / Sonntagszeitung,* S. 39.

KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*.München: Kluwer.

Köller, O., Watermann, R., Trautwein, U. & Lüdtke, O. (Hrsg.). (2004). *Wege zur Hochschulreife in Baden-Württemberg. TOSCA - Eine Untersuchung an allgemein bildenden und beruflichen Gymnasien*.Opladen: Leske u. Budrich.

Lehmann, R. & Seeber, S. (Hrsg.). (2007). *ULME III. Untersuchung von Leistungen, Motivation und Einstellungen der Schülerinnen und Schüler in den Abschlussklassen der Berufsschulen*.Hamburg: Behöde f. Bildung u. Sport.

Maaß, J. & Schlöglmann, W. (2000). Erwachsene und Mathematik. *Mathematica Didactica. Zeitschrift fuer Didaktik der Mathematik, 23*(2), 95-106.

OECD. (2000). *Literacy in the Information Age: Final Report on the International Adult Literacy Survey*.Paris / Ottawa.

Watermann, R. & Baumert, J. (2000). Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung beim Übergang von der Schule in den Beruf. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. 1. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Pflichtschulzeit.* (S. 199-259). Opladen: Leske u. Budrich.

Christian RÜEDE und Christof WEBER, Zürich

Keine Diagnose ohne Auseinandersetzung mit Form, Inhalt und Hintergrund von Schülertexten

Diagnose (διαγνωσιζ, griech. „Erkennung, unterscheidende Beurteilung“) bezeichnet das Sammeln und Werten von Informationen über einen bestimmten Sachverhalt zur Gewinnung eines Gesamtbildes. In der neueren Mathematikdidaktik richtet sich Diagnose nicht mehr nur auf Leistungsstanderhebungen (Klassenarbeiten, sog. *Produktdiagnostik*) und auf Lernvoraussetzungen (Lernschwierigkeiten, sog. *Statusdiagnostik*). Wenn es darum geht, Schülerinnen und Schüler individuell zu fördern, müssen Lehrpersonen verstehen, wie ihre Schülerinnen und Schüler mathematische Probleme lösen. Deshalb ist der Aufbau entsprechender *prozessdiagnostischer Fähigkeiten* in der Lehreraus- und -weiterbildung entscheidend.

Für den primären und sekundären Bildungsbereich liegen dazu erste Forschungen vor: So illustriert Prediger (2007), was Diagnostizieren unter Einbezug des stoffdidaktischen Hintergrunds heißt, Leuders (2006) und Sjuts (2008) arbeiten an Kriterien für die Entwicklung von „Aufgaben mit diagnostischem Potenzial“, und vom Hofe (2008) stellt einen „Leitfaden für diagnostische Interviews“ vor. Diagnostische Fähigkeiten erschöpfen sich dabei nicht in pädagogischen Haltungen. Um die Diagnose auf mathematische Aktivitäten wie die Schülerbearbeitungen von Aufgaben beziehen zu können, muss sie zwangsläufig fachdidaktisch fundiert sein.

Im Zentrum unseres Interesses stehen Aufgabenbearbeitungen von Schülerinnen und Schülern der Oberstufe. Anders als Sjuts und vom Hofe fassen wir Diagnose weniger als eine Auseinandersetzung mit Fehlvorstellungen auf, sondern in Anlehnung an Prediger (2007) als ein Verstehen der „inneren Rationalität“ von Aufgabenbearbeitungen. In diesem Beitrag stellen wir ein Kategoriensystem vor, das erste *Ergebnisse* zur Ausbildung diagnostischer Fähigkeiten von Lehramtsstudierenden der SII beschreibt. Entsprechende Empfehlungen sind in Vorbereitung.

1 Erhebung, wie Lehramtsstudierende Schülertexte lesen (lernen)

Unsere Lehrveranstaltung („Wege mathematischen Denkens im Unterricht“, Wahlpflichtmodul in der fachdidaktischen Ausbildung zum MAS SHE Sekundarstufe II an der Universität und ETH Zürich) hatte zum Ziel, theoretisches und praktisches Wissen zu verschränken. Dazu wurden erstens eine Vielzahl von Theorien zur Heterogenität der Vorgehens- und Denkweise von Schülerinnen und Schülern erarbeitet, zweitens reale Schülerdokumente aus dem gymnasialen Mathematikunterricht analysiert.

Für ihre Analysen erhielten die Studierenden zu Beginn, in der Mitte und zum Schluss des Semesters ein Set von Schülertexten, in denen ein offener Auftrag (Ruf / Gallin 1998) bearbeitet worden war. Die Studierenden sollten die Texte im Hinblick auf ihre Unterschiedlichkeit analysieren, und zwar nach der Methode der *repertory grids* (Kelly 1955):

In einem ersten Schritt sind aus dem Set der Schülertexte („elements“) zwei möglichst disparate Texte herauszugreifen. Für diese beiden Texte ist ein Gegensatzpaar von Merkmalen („constructs“) zu formulieren, das erfasst, worin sie sich unterscheiden. In einem zweiten Schritt sind alle Schülertexte des Sets mit Blick auf dieses Gegensatzpaar einzustufen. Wird dieser Vorgang mehrfach durchgeführt, entsteht das „repertory grid“ eines Probanden. Diese Methode vereint die Vorteile eines standardisierten Interviews mit den Vorteilen inhaltsoffener Verfahren und wird – seit ihrer Erfindung durch den Psychologen Kelly – zur Erfassung subjektiver Theorien verwendet.

In der Mathematikdidaktik wurden damit beispielsweise subjektive Theorien erhoben zur Frage, was in den Augen eines guten Schülers Mathematiklernen ist (Hiskonen 1999) oder, wie Lehramtsstudierende Mathematikaufgaben einschätzen (Bruder et al. 2003). Unseres Erachtens ist diese Methode auch hervorragend geeignet , um Einschätzungen von *Schülertexten* zu erheben, kommt das Aufstellen eines repertory grids doch dem natürlichen Umgang mit solchen Texten nahe („lesen und klären, was der Schüler meint; dann überlegen, weshalb der Schüler etwas so gemacht hat und was für einen Wert das hat“). Auf diese Art und Weise entstanden im Laufe unserer Lehrveranstaltung über hundert Gegensatzpaare von Merkmalen.

Und: Für das Aufstellen jedes repertory grids müssen immer mehrere Gegensatzpaare genannt werden. Dadurch setzt man sich nicht nur langsamer mit den Schülertexten auseinander, sondern zieht quasi „automatisch“ mehrere mögliche Perspektiven und Aspekte in Betracht – erste Schritte eines Aufbaus diagnostischer Fähigkeiten, so wie wir sie verstehen.

2 Kategoriensystem zur Diagnosefähigkeit von Lehramtstudierenden

Die erhobenen empirischen Daten sowie theoretische Überlegungen führten zur Konstruktion von sechs Kategorien, die in Tabelle 1 dargestellt sind. Die *Spalten* (beschreibende und wertende Perspektive) bilden das Sammeln und Werten ab, das sich im Wort „Diagnose“ verbirgt, die *Zeilen* (formale, inhaltliche und Hintergrund-Aspekte) geben – nach unten gelesen – die zunehmende *Verstehenstiefe* eines Schülertexts wieder. Jede Kategorie ist in Tabelle 1 jeweils durch eine Leitfrage charakterisiert.

Was? \ Wie?	**Beschreibende Perspektive**	**Wertende Perspektive**
Formale Aspekte (Oberflächliches, z.B. Sprache, Name, Darstellung, Vokabular)	*Welche äußerlich-formalen Merkmale des Schülerdokuments nennt die Lehrperson?*	*Wie wertet die Lehrperson die äußerlich-formalen Merkmale des Schülerdokuments?*
Inhaltliche Aspekte (Textentwicklung, z.B. Vorgehen, Schritte, Bezüge innerhalb des Texts)	*Welche inhaltlichen Merkmale des Schülerdokuments nennt die Lehrperson?*	*Wie wertet die Lehrperson die inhaltlichen Merkmale des Schülerdokuments?*
Hintergrund-Aspekte (z.B. Vorwissen, Vorstellungen, Beliefs, Denkstile)	*Welche Hintergründe für das Zustandekommen eines Schülerdokuments nennt die Lehrperson? Welche Erklärungen nennt sie?*	*Wie wertet die Lehrperson die Hintergründe des Schülerdokuments?*

Tabelle 1: Was fällt Lehramtsstudierenden auf, wenn sie Schülerdokumente lesen?

Der ersten Zeile sind Gegensatzpaare zugeordnet, die in einem Schülertext auf den ersten Blick erfasst werden, etwa „viel Text / vor allem Zahlen" aus einer beschreibenden und „Resultat richtig / falsch" aus einer wertenden Perspektive. Die zweite, mittlere Zeile enthält Gegensatzpaare, die aus einer Auseinandersetzung mit den Inhalten von Schülerdokumenten resultieren, so zum Beispiel „rekursiv / explizit" als Beschreibung und „Argumentieren / Ästhetik" als Wertung. Wird schließlich nach dem Zustandekommen formaler und inhaltlicher Aspekte gefragt, so ergeben sich in beschreibender Perspektive Gegensatzpaare wie „funktional / prädikativ", ein typischer Hintergrund-Aspekt. Erstaunlich, dass *keines* der in den drei Analysen über hundert genannten Gegensatzpaare auf die Wertung eines Hintergrund-Aspekts schließen lässt.

Im Laufe unserer Lehrveranstaltung änderte sich der Charakter der genannten Gegensatzpaare. So wurden in der Analyse zum Schluss des Semesters vermehrt Hintergrund-Aspekte formuliert, die beschreibende Perspektive gewann an Wichtigkeit und parallel dazu wurden öfter fachliche sowie fachdidaktische Gegensatzpaare genannt. Dies entspricht der eingangs formulierten These, dass Diagnostik eine fachliche und fachdidaktische Angelegenheit ist.

3 Was geht einem Profi beim Diagnostizieren durch den Kopf ?

Wer die Schülerbearbeitung einer Aufgabe liest und eine Aussage über eine zugrunde liegende Grundvorstellung oder eine Zuschreibung wie „funktional / prädikativ“ macht, hat sich einiges überlegt, ja hat vermutlich einiges verstanden. Solchen Einschätzungen geht immer eine Auseinandersetzung mit der Schülerbearbeitung voraus. Man sucht nach Belegen für seine Einschätzungen, revidiert sie vielleicht sogar. Dabei werden verschiedene formale, inhaltliche und Hintergrund-Aspekte zum Teil implizit registriert, zum Teil explizit benannt oder im Lauf des Verstehensprozesses konstruiert und zugeschrieben. In diesem Sinne vermuten wir, dass die sechs dargelegten Kategorien wesentliche Aspekte jeder Diagnose treffen, mithin verallgemeinerbar sind und jedem Profi im Verlauf seiner Diagnose durch den Kopf gehen. Dieser Hypothese gehen wir in weiteren Arbeiten nach.

Dazu wird das Kategoriensystem in Tabelle 1 nach rechts zu erweitern sein. Schon aus den Begleittexten, in welchen unsere Probanden ihre Wahl der Gegensatzpaare begründeten, geht hervor, dass zur beschreibenden und wertenden neu eine *handelnde Perspektive* hinzuzufügen ist. So fragten sich einige Probanden, wozu solche Schülertexte dienlich sein können: *Wie können sie für den Unterricht genutzt werden? Wie lassen sich die Lernenden aufgrund ihrer Aufgabenbearbeitungen individuell fördern?* – Fragen wie diese waren bei der Formulierung einzelner Gegensatzpaare ebenfalls leitend und entsprechen daher einer dritten, handelnden Perspektive.

Nähere Untersuchungen dazu, wie Diagnosen zustande kommen, werden zeigen, in welche Richtung und in welchem Umfang das Kategoriensystem noch auszubauen ist. Daraus sollen *Empfehlungen* zur Ausbildung diagnostischer Fähigkeiten bei Lehramtsstudierenden abgeleitet werden.

Literatur

Bruder, R. / Lengnink, K. / Prediger, S. (2003). Wie denken Lehramtsstudierende über Mathematikaufgaben? *Mathematica Didactica* 26, Bd. 1, 63–85.

vom Hofe, R. (2008). Aufgaben analysieren und Schülervorstellungen erkennen – Diagnostische Interviews zur Prozentrechnung. *Mathematik lehren*, H. 150, 14–19.

Hiskonen, K. (1999). A good pupil’s belief about mathematics learning assessed by repertory grid methodology. In Proceedings of the 23th annual meeting of the group for PME, vol. 3, 97–104.

Kelly, G. (1955). *Psychology of Personal Constructs*. New York: Norton.

Leuders, T. (2006). „Erläutere an einem Beispiel…“: Mathematische Kompetenzen erkennen und fördern – mit offenen Aufgaben. *Friedrich Jahresheft*, 78–83.

Prediger, S. (2007). „…nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“ – Lehramtsstudierende auf dem Weg zur fachdidaktisch fundierten diagnostischen Kompetenz. In Barzel, B. et al. (Hrsg.): *Algebraisches Denken*. Hildesheim: Franzbecker, 89–100.

Ruf, U. / Gallin, P. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Bd. 1: 66–69 ; Bd. 2: 49–85.

Sjuts, J. (2008). *Diagnostik in Mathematik*. Leer: Förderkreis für Bildungsinitiativen.

Ildar Safuanov, Moskau

Design of a system of teaching elements of group theory

According to principles described in (Safuanov, 2005), we present here the design of a system for the teaching of the concepts of group theory.

The preliminary analysis.

1) Genetic development of a material.

a) Historical analysis.

F.Klein, who had brought in the essential contribution to development of the group theory due to “Erlangen program” of the study of geometry through the study of groups of geometrical transformations, argued that “the concept of a group was originally developed in the theory of algebraic equations”. Sources of the concept of a group are in the theory of solving algebraic equations as well as in geometry, where groups of geometrical transformations have been investigated since the middle of the 19-th century by A. Cayley. However abstract groups were introduced by S.Lie only at the end of the 19-th century.

b) Logical and epistemological analysis.

For the introduction of the concept of a group, the preliminary possession of a lot of set-theoretical and logical concepts and constructions is necessary which can be seen from the detailed logical and epistemological analysis of the homomorphism theorem.

In turn, the group-theoretical concepts are used in the subsequent sections..

c) Psychological analysis.

School graduates are not actually prepared for mastering so abstract concept as a group. They can not operate with general concepts of algebraic operations and even mappings. Therefore, in particular, they can not freely investigate geometrical transformations and their compositions.

On the initial stage, in our view, it is inexpedient to motivate the introduction of the concept of a group by examples of sets of transformations (for example, translations or rotations), because, as the experience of teaching geometry to the first year students of pedagogical universities shows, the geometrical imagination of many students (and spatial imagination in general) is very poorly developed.

d) Analysis from the point of view of possible applocations.

The concept of a group since several decades became rather popular part of the cultural property of mankind. For example, the experts in the quantum mechanics believed that the group theory can be used in the solution of any problem. The group theory turned out to be extremely useful in the search of elementary particles an in the study of the structure of chemical molecules. Of great interest are the consideration of symmetry groups of geometrical figures. Good examples of the applications of the group theory are graceful group-theoretical proofs of the number-numerical theorems of L.Euler and P. Fermat.

2) Analysis from the point of view of the arrangement of a subject matter, of the opportunities of use of various means of representation of objects, concepts and ideas and of the influence on students.

Using results of the genetic development, it is possible to offer the following version of the arrangement of a subject matter and of the use of means of influence.

As the theory of groups has grown out of generalizations of diverse ideas and constructions, we offer also to use some lines leading to group-theoretical concepts from the different perspectives: numbers, cosets, bijective transformations and permutations.

The first stage: already at introductory lecture it is possible to offer to the students to consider systems of integers with addition and non-zero rational numbers with multiplication, to recollect properties of these arithmetic actions.

The second stage: after the addition of cosets and the addition tables for small modules (for example, 2, 3, 4) are considered, it is possible to raise the question about the performance of addition in a set of cosets modulo arbitrary $n>1$. Properties will be similar to properties of the addition of numbers. The students can guess the fulfilment of laws of associativity and commutativity, the existence of neutral and inverse elements, and even in some extent to participate in proving these properties. After that it is possible to introduce a stricter definition of a group, beginning with the definition of ordered pairs and binary algebraic operations

The third stage: preliminary, but already quite strict statement of elements of the theory of groups after the consideration of elements of the theory of sets, direct products, mappings, including bijective ones, and permutations. At this stage all formal definitions of concepts necessary for the strict introduction of group-theoretical concepts, and sufficient amount of motivating and illustrating properties and examples are available. At this stage the examples of non-commutative groups (symmetry groups and groups of permutations) are considered.

The fourth stage: systematic study of elements of the theory of groups (including generalized associativity, cosets, normal subgroups, Lagrange's and homomorphism theorems).

As to means of influence on students, in the teaching of elements of the theory of groups it is possible to use various evident ways of representation of a subject matter, considering, for example, permutations, symmetry of geometrical figures, geometrical transformations. Among ways of representation of groups it is possible to employ, in case of finite groups, lists of elements, the multiplication tables. Among other means of influence one can mention the contrast (examples of groups and semigroups which are not groups, normal subgroups and subgroups that are not normal), variation (abelian and non-abelian groups, additive and multiplicative ones etc.).

Design of the process of study of group-theoretical concepts.

1) Construction of a problem situation.

As is already shown, for the successful construction of a problem situation it is necessary to organize it (including new questions, naturally arising from it) so that in a certain time there would occur the "moment of truth" when the students independently or with the minimal help of the teacher would open for the new concept for themselves.

For the first time such moment of truth arises already during the introductory lecture, when the preliminary wersion of the concept of a group arises as a generalization of properties of arithmetic actions in sets of integers (addition) and non-zero rational numbers (multiplication). At further stages this preliminary version of the definition forms the basis for the motivation of the consideration of the concept of a group, basis for its stricter study. So, for example, studying properties of the addition of cosets or multiplication of bijections of a set, permutations of a finite set, symmetries of a geometrical figure, the students already can find out that each time they deal with groups – and thus new moments of truth arise.

2) Statement of new naturally arising questions.

For example, constructing a problem situation at the third stage (when passing to types and elementary properties of groups) one can use questions of the following kind: whether are groups under consideration commutative? Whether there exists an infinite non-commutative group? Is the neutral element of a group unique? For a given element of a group, is an inverse element unique? Is it possible to solve equations in groups? At the fourth stage (systematic study of more complicated group-theoretical concepts) the questions are pertinent: do the right and left cosets coincide? Do cosets of a normal subgroup form a group under multiplication? etc.

3) Conceptual and structural analysis and logical organization of educational material.

Conceptual and structural analysis and logical organization of group-theoretical concepts is rather complicated, as is seen, e.g., from the genetic decomposition of the homomorphism theorem. This process is not straightforward, but rather long and, moreover, often occurs in several stages divided in time. From group axioms the properties of groups are deduced, and at final stages of study of groups a number of rather difficult theorems is proved.

4) Development of applications and algorithms.

It is important to consider such simple and interesting examples of applcations as the fifteen puzzle, group-theoretical proofs of number-theoretical theorems of L.Euler and P.Fermat, symmetry groups of geometrical figures etc.

The students also should learn such procedures as construction of the multipliction table of a finite group, finding cosets of a normal subgroup (i.e. construction of a quotient group) etc.

References.

Safuanov, I. (2005). The genetic approach to the teaching of algebra at universities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 36 (2-3), 257-270.

Ingolf SCHÄFER & Erik EINHAUS, Bremen

Förderung zu Beginn der gymnasialen Oberstufe im Rahmen einer Selbstlerneinheit zu quadratischen Gleichungen

In diesem Bericht handelt es sich um einen Teil einer Evaluationsstudie, die die Wirksamkeit einer Selbstlerneinheit zur Förderung im Bereich des Lösens quadratischer Gleichungen am Beginn der gymnasialen Oberstufe im Hinblick auf die relevanten mathematischen Objekte und Motivation untersucht. Die allgemeinzugängliche, internetbasierte Selbstlerneinheit wurde außerhalb des Regelunterrichts bearbeitet und der Prozess wurde von den Schülerinnen und Schülern in Lerntagebüchern dokumentiert.

Problemstellung

Bei der untersuchten Schule handelt es sich um ein reines Oberstufenzentrum, d.h. die Schüler kommen aus verschiedenen Realschulen, Gesamtschulen und Gymnasien dort neu zusammen. Ein zentrales Problem für die Mathematiklehrerinnen stellt sich dabei im Auftrag durch gezielte Förderung für einen gemeinsamen Lernstand zu sorgen. Gleichzeitig sollte diese Förderung aber zeitlich sehr flexibel sein, um eine Förderung in anderen Fächern ebenfalls zu ermöglichen. Wir stellen hier einen Ansatz über eine Selbstlerneinheit (SLE) vor, die wir im Rahmen einer klassischen Interventionsstudie analysieren. Inhaltlich konzentriert sich diese SLE (2009) dabei auf den Bereich „quadratische Gleichungen". Nach der Selbstbestimmungstheorie sollte die größere Autonomie und die gezielten Kompetenzerlebnisse im Rahmen der SLE die Motivation der Schülerinnen und Schüler stärken das Lernergebnis verbessern. Die Frage war, ob die SLE in diesem Sinne effektiver wäre als eine Wiederholung im Rahmen des normalen Unterrichts. In diesem Beitrag stellen wir einige Ergebnisse der Evaluation vor.

Theoretischer Hintergrund

Bei der SLE handelt es sich um eine internet-gestützte Lernumgebung im Sinne von Leuders (2005). Dabei verwenden wir den Begriff SLE hier nur um einerseits die erhöhte Eigenaktivität der Schüler anzudeuten und andererseits, um deutlich zu machen, dass es sich um eine zeitlich begrenzte Einheit zu einem festen Thema handelt.

Ein Teil der SLE bestand darin, dass die Schüler ihren Lernprozess in einem Lerntagebuch festhalten sollten. Wir verstehen hier den Begriff Lerntagebuch in der Weise, wie Ruf und Galin (1996) den Begriff Reisetagebuch verwenden, d.h. als Ort den Lernprozess, die Ergebnisse des Lernprozesses und die Reflexionen dazu festzuhalten.

Des Weiteren ist die Selbstbestimmungstheorie der Motivation von Deci und Ryan (2000) eine wesentliche Grundlage unserer Untersuchung. Danach sind für das psychische Wohl eines Menschen drei Grundbedürfnisse von entscheidender Bedeutung. Im Einzelnen sind dieses die Bedürfnisse nach Kompetenz, Autonomie und sozialer Eingebundenheit. Nur wenn diese drei Grundbedürfnisse in einem ausreichenden Maße befriedigt sind, kann intrinsische Motivation überhaupt entstehen. Eine genauere Spezifikation der Grundbedürfnisse für den Mathematikunterricht hat Bikner-Ahsbahs (2005) vorgelegt und eine empirische Untersuchung der Wirksamkeit der Selbstbestimmungstheorie für den Mathematikunterricht hat Rakoczy (2008) durchgeführt.

Untersuchungsmethode

Untersucht wurden zwei Kurse des elften Jahrgangs an einem Bremer Oberstufenzentrum. Der Vortest zu den Kompetenzen im Bereich des Lösens quadratischer Gleichungen wurde für den gesamten Jahrgang (N=162) erhoben. Im Rahmen der Untersuchung hat ein Kurs (N=25) eine internet-basierte SLE (2009) außerhalb des Schulunterrichts bearbeitet und den Lernprozess dabei in individuellen Lerntagebüchern festgehalten. Ein weiterer Kurs fungierte als Kontrollgruppe (N=28) und hat die Wiederholungseinheit über quadratische Gleichungen integriert in den normalen Unterrichts durchgeführt. Beide Kurse haben im Unterricht ansonsten das Thema Funktionen behandelt. Abschließend fand ein Nachtest für beide Kurse statt. Die SLE-Gruppe hat ferner einen Fragebogen zur Motivation bearbeitet, der sich an den Testinstrumenten von Rakoczy et al. (2005) orientierte.

Auswertung

Wir beginnen mit der Auswertung der psychologischen Grundbedürfnisse. Tabelle 1 zeigt, dass durch die SLE die beiden psychologischen Grundbedürfnisse nach Kompetenz und Autonomie deutlich besser befriedigt werden konnten. Das Bedürfnis nach sozialer Eingebundenheit scheint allerdings deutlich weniger im Rahmen der SLE befriedigt worden zu sein. Im Vergleich zu den Werten der Untersuchung von Rakoczy et al. (2005) liegt der betrachtete Kurs im normalen Bereich allerdings scheint hier auch der Regelunterricht schon ein größeres Maß an Autonomieunterstützung zu erzeugen. Mit Ausnahme der sozialen Eingebundenheit kann man durchaus von einem positiven Effekt der Selbstlerneinheit auf die Befriedigung der

Grundbedürfnisse reden.

Sowohl in dem Vergleichskurs als auch in dem SLE-Kurs haben die Schüler im Vergleich zum Vortest im Bereich des Lösens quadratischer Gleichungen deutliche Zuwächse erzielt (vgl. Tabelle 2). Allerdings sind diese in der Vergleichsgruppe deutlich größer. Beide Gruppen haben allerdings im Bereich des Lösens linearer Gleichungen schlechter abgeschnitten. Eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse des Tests findet sich bei Einhaus (2009). Innerhalb der SLE-Gruppe haben diejenigen, die schlecht im Vortest abgeschnitten haben, sich im Vergleich durchschnittlich weniger verbessert als im Vergleichskurs. Das war bei den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern im SLE Kurs eher umgekehrt.

Bei der Durchsicht der Lerntagebücher fällt auf, dass keine Schüler von der Möglichkeit Lerngruppen zu bilden Gebrauch gemacht haben, obwohl dies offiziell gestattet war. Im persönlichen Resümee wird von vielen Schülerinnen und Schülern die Selbstständigkeit und Freiheit bei Arbeit positiv bewertet.

Inhaltlich zeigt sich innerhalb der Lerntagebücher aber auch, dass es einigen Schülerinnen und Schülern nicht gelungen ist, eigene Fehler zu erkennen. Tatsächlich zeigt sich relativ deutlich, dass die Schüler, die in ihren Lerntagebüchern kaum Reflexion erkennen lassen, sehr geringe Zuwächse im Test haben, während jene Schüler, die mehr reflektieren, im Allgemeinen höhere Zuwächse haben.

Fazit

Die Hoffnung durch die Selbstlerneinheit die psychologischen Grundbedürfnisse zu stärken, hat sich im Großen und Ganzen bewahrheitet, allerdings bedeutet dies nicht automatisch auch einen Zugewinn an Kompetenz. Insbesondere bei den leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern scheint eine größere Unterstützung nötig zu sein, um einerseits das Gefühl der sozialen Eingebundenheit zu stärken und andererseits bei der Einschätzung der eigenen Fähigkeiten zu helfen – freilich ohne das Erlebnis von Kompetenz und Autonomie zu beschneiden.

Items	**MU**		**SLE**		**Lit.**	
	M	STD	M	STD	M	STD
K1 „Ich werde über meine Fortschritte informiert.“	2,36	0,90	3,10	0,94	2,43	0,91
K2 „Ich merke, wenn ich Fortschritte mache.“	2,91	0,61	3,10	0,77		

K3 „Mir wird gesagt, was ich verbessern kann.“	2,68	0,78	3,38	0,86	2,78	0,86
K4 „Meine Leistungen finden Anerkennung.“	2,86	0,83	3,05	0,97	2,72	0,83
A1 „Ich werde zu selbstständigem Arbeiten ermuntert.“	3,32	0,57	3,14	0,57	2,85	0,86
A2 „Ich habe die Möglichkeit selbstständig Themen zu erkunden.“	3,00	0,76	3,62	0,50	2,59	0,89
A3 „Ich kann selber entscheiden, wie ich arbeiten will.“	2,78	0,92	3,67	0,58	2,71	0,92
S1 „Ich habe das Gefühl, dass die anderen mir helfen.“	3,50	0,80	2,81	1,12	3,23	0,87
S2 „Ich habe das Gefühl dazuzugehören.“	3,14	0,89	2,21	0,97	3,42	0,75

Tabelle 1: Mittelwerte (M) und Standardabweichung (SD) für normalen Mathematikunterricht (MU), Selbstlerneinheit (SLE) und die Literaturwerte aus Rakoczy et al. (2005). Alle Items hatten das Antwortformat „(1) nie, (2) selten, (3) manchmal, (4) häufig“.

	Lineare Gleichungen	Quadrat. Gleichungen a	Quadrat. Gleichungen b	Quadrat. Gleichungen c
SLE	-18%	238%	331%	425%
VGL	-30%	413%	394%	450%

Tabelle 2: Prozentuale Zunahme der erreichten Prozentzahlen im Mittel im Vergleich von Vortest und Nachtest für Kurs mit SLE und Vergleichskurs (VGL).

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation.* Hildesheim: Franzbecker.

Deci, E. L. and Ryan, R. M. (2000). *The" What" and" Why" of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior.* Psychological Inquiry, 11(4), 227–268.

Einhaus, E. (2009). *Welche Chancen und Grenzen bieten Selbstlerneinheiten bei der gezielten Förderung von Schülerinnen und Schülern unterschiedlicher Bildungsgänge im Mathematikunterricht?* Arbeit zum zweiten Staatsexamen. Bremen.

Gallin, P. & Ruf, U. (1996). *Ein Unterricht mit Kernideen und Reisetagebuch.* mathematik lehren 64, S. 51–57.

Leuders, T. (2005). Mathematik Lernen und Lehren mit dem Internet. In Bender, P. et al. (Hrsg.), *WWW und Mathematik – Lehren und Lernen im Internet* (S. 7 - 34). Hildesheim: Franzbecker

Rakoczy, K. (2008). *Motivationsunterstützung im Mathematikunterricht.* Münster i. W.: Waxmann.

Rakoczy, K., Buff, A. & Lipowski, F. (2005). *Befragungsinstrumente. Materialien zur Bildungsforschung 13*, dipf: Frankfurt a. M.

SLE (2009). *Quadratische Gleichungen. Abruf am 25.03.2008 von* http://www.mathematik.net/quadratische-gleichungen/0-inhalt-1.htm

Christine SCHARLACH, Berlin

Mathematik-Didaktik für Tutor/-innen (und WMs) – Ein Projekt an der TU Berlin

1. Das Projekt *Lehren und Lernen von Mathematik*

Herzstück des Projektes *Lehren und Lernen von Mathematik*[1] sind die speziell auf die Unterstützung der Tutor/-innen des Instituts für Mathematik der TU Berlin ausgerichteten Workshops, die wir im Folgenden beschreiben. Die zwei- bis dreitägigen Workshops werden von einem Dozententandem geleitet und sind aus verschiedenen Bausteinen zusammengesetzt, welche eng an der (mathematischen) Praxis ausgerichtet sind und überwiegend in Übungen bearbeitet werden. Die Workshops sind Teile des Projektes *Lehren und Lernen von Mathematik*, welches im Rahmen der *Offensive Wissen durch Lernen* der TU Berlin vom 1.4.07 – 31.3.09 gefördert wurde. Entwickelt und geleitet wurden sie von der Autorin in Zusammenarbeit mit Thomas Slawig (Mitinitiator und erster Workshop) bzw. Thomas Neukirchner (folgende Workshops) Weitere Elemente sind (kleinere) Workshops für Wissenschaftliche Mitarbeiter/-innen, Werkstatttreffen zum Austausch der Lehrenden sowie eine Lernplattform[2] mit Wissensspeicher. Unterstützt wird das Projekt durch eine halbe Stelle für eine studentische Mitarbeiterin. Für die Autorin (Initiatorin und Dozentin des Projekts) ist die fachspezifische Ausrichtung der Weiterbildungen auf die Mathematiklehre mit einer großen Praxisnähe eine wesentliche Verbesserung zu den sonst üblichen fächerübergreifenden Weiterbildungen.

2. Mathematik-Didaktik für Lehrende an der Universität?

Die meisten Lehrenden an Universitäten, so auch an der TU Berlin, haben keine (fach-)didaktische und gruppendynamische Ausbildung. Es gibt hierzu einige zentrale Weiterbildungsangebote der TU Berlin, diese sind jedoch nicht fachspezifisch und werden nur von wenigen Lehrenden der Mathematik besucht.

Wie sieht die Situation von Lehrenden an der Universität aus? Zu der Aufgabe der didaktischen Aufbereitung der Inhalte kommt die Erfahrung des Agierens vor einer Gruppe von Studierenden. Die Tutorinnen und Tutoren sowie die Wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter (WMs) am Institut für Mathematik sehen sich konfrontiert mit:

- großen, sehr heterogenen Gruppen,
- einem geringen Frauenanteil,

1 http://www.math.tu-berlin.de/llm/index.html
2 https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=430

- umfangreichen (vorgegebenen) Stoffplänen,
- unmotivierten Studierenden,
- sowie technischen und räumlichen Problemen.

Das Institut bietet Lehrveranstaltungen (LV) für viele Fachgebiete an und die Lehrenden unterrichten häufig jedes Semester eine andere LV. Für die Tutorinnen und Tutoren und die WMs bedeutet das nicht nur wechselnde Inhalte, sondern auch wechselnde Teams und Lehrstile, in die sie sich einfügen. Daher ist eine Vernetzung der Lehrenden schwierig; viele Innovationen, Erfahrungen und Lehrmaterialien gehen verloren.

Ein Schlüssel zur Veränderung dieses Zustandes liegt in einer fundierten Schulung in Didaktik, Gruppendynamik und Kommunikation, und zwar fachnah und direkt umsetzbar. Dies ist Hauptziel des Projektes "Lehren und Lernen von Mathematik" (vgl. Sek. 1). Die Teilnehmenden der Workshops werden zur Reflexion über ihre Lehre angeregt und es werden ihnen Möglichkeiten zur Verbesserung aufgezeigt. Dadurch wird nicht nur die Lehre innerhalb der Mathematik verbessert, sondern auch in den Ingenieurswissenschaften, in denen viele von ihnen tätig sind.

Die Beschränkung auf Lehrende der Mathematik ist uns wichtig, um gezielt auf fachspezifische Inhalte, Didaktik und Probleme eingehen zu können. So ermöglicht die Fokussierung auf diese Zielgruppen die organische Verbindung von inhaltlichen (die Didaktik betreffenden) und formalen (d.h. die Präsentation, Kommunikation und Gruppendynamik betreffenden) Themenbereichen. Mathematik hat ihre eigene (Formel-)Sprache und sehr spezifische Denk- und Arbeitsmethoden, weshalb sie schon in der Schule ab der ersten Klasse gelehrt wird. Die Umsetzung von in fächerübergreifenden Weiterbildungen Erlerntem in der Mathematikausbildung erfordert von den Teilnehmenden eine zeitintensive, zum Teil sehr schwierige Transferleistung, daher geht vieles gleich wieder verloren. Wir sehen unsere Kurse als wichtige Ergänzung zu fächerübergreifenden Weiterbildungen.

3. Die Bausteine der Workshops

Welche Themenbereiche behandeln wir? Moderne Gehirn-, Lern- und Kommunikationsforschung (z. B. Spitzer 2002, Hüther 2006) stellt die Erkenntnisse bereit, wie gehirngerechtes Lernen aussieht, in welchen Zuständen lernen einfach und effektiv ist, welche Unterschiede in Lerntypen, -Stilen und -Strategien, insbesondere geschlechtsspezifische, es gibt, und wie man Motivation wecken kann. Darüber hinaus gibt sie Hinweise zur Stoffreduktion, auf Grundregeln der Steuerung von Gruppenprozessen und im Umgang mit problematischen Situationen, die von allen erlernt werden können. Der Grundtenor dabei ist, dass man motiviert und mit Spaß besser lernt und auch lehrt. Konkret werden im Rahmen der Trainings für Tutorinnen und Tutoren die folgenden Inhalte (fachspezifisch) in mehreren Bausteinen vermittelt:

Erfolgreiches Lernen, Lern- und Sozialformen:

- Voraussetzungen für erfolgreiches Lernen (aus der Lern- und Gehirnforschung)
- Sinneskanäle
- Lerntypen (4MAT[3])
- geschlechtergerechte Didaktik
- Sozialformen
- der Kurzvortrag / Medien und Tafelbild

Tutoriumsplanung und Gruppendynamik:

- Ziele (Formulierung und Arten)
- Stoffreduktion
- Motivation, Aktivierung
- Kommunikation (Fragestile, gewaltfreie Kommunikation, geschlechtsspezifische Kommunikation)
- Feedback

Alle Bausteine sind eng an der (mathematischen) Praxis ausgerichtet und werden überwiegend in Übungen erarbeitet. Sie führen hin zu den Höhepunkten des Workshops:

- der Austausch über **schwierige Situationen im Lehralltag** und
- die **Videoauswertung** einer (simulierten) Tutoriumssequenz für alle Teilnehmenden.

Eine ausführlichere Darstellung der Inhalte (und Literaturhinweise dazu) ist aus Platzgründen hier nicht möglich.

4. Fazit

Von den Teilnehmenden wurden die Workshops sehr positiv aufgenommen. Es wurden Feedbackbefragungen (mündlich und mit Fragebögen) direkt im Anschluss an die Veranstaltungen durchgeführt sowie gegen Ende des Projekts. Die Auswertung ergab, dass die Teilnehmenden sehr zufrieden mit der Durchführung der Workshops, dem Dozententandem, der Or-

[3] Nach Bernice McCarthy, Entwicklerin des 4MAT systems, gibt es im wesentlichen vier verschiedene Lerntypen, die im Lernprozess verschiedene Fragen stellen und unterschiedliche Stärken haben, vgl. http://www.aboutlearning.com/ (16.02.09)

ganisation und den erstellten Materialien waren. Schon nach kurzer Zeit berichteten sie von positiven Veränderungen in ihrer Lehre. Vor allem die Praxisrelevanz der Inhalte, der klare Bezug zur Vermittlung mathematischer Inhalte und die Praxisnähe der Leitenden, die gemeinsame Erarbeitung von Konzepten und Lösungen, die Möglichkeit des Erfahrungsaustausches und die Möglichkeit der Eigenwahrnehmung durch das Videofeedback wurde von den Teilnehmenden als positiv bewertet. Einigen wenigen erschien der dargestellte Stoff zu leicht und eine zeitliche Straffung der Workshops wurde vorgeschlagen, es gab aber auch genau entgegengesetzte Meinungen. Außerdem äußerten viele, dass ihnen besonders die aktive Beteiligung, das Lernklima, die Möglichkeit verschiedene Meinungen zu hören, das Videofeedback, sowie die Themen Visualisierung und schwierige Situationen gefallen haben. Die Integration der Genderthematik erweist sich als wirkungsvoll. Ausführlicher wird dies dargestellt in Scharlach und Sens (2009) bzw. in einem weiteren Tagungsbeitrag von Scharlach (2009).

Leider war es schwierig, viele Teilnehmende für die einmal im Semester stattfindenden Workshops zu finden, obwohl jedes Semester eine größere Anzahl neuer Tutorinnen und Tutoren am Institut für Mathematik eingestellt werden und es vor dem Projekt keine vergleichbaren Schulungen gab. So wird das Projekt nicht verstetigt. Auch müssten mehr Dozentinnen und Dozenten gefunden werden, es scheint aber noch kaum derartige fachspezifische Projekte zu geben. Als zusätzliches Problem erwies sich, dass Institutsangehörige dafür nicht freigestellt oder entlohnt werden. Umfang und auch Expertise der Workshops sprengt aber den Rahmen der herkömmlichen Betreuung von Tutorenarbeit als Dienstaufgabe.

Literatur

Hüther, Gerald (2006), *Bedienungsanleitung für ein menschliches Gehirn*, Vandenhoeck & Ruprecht.

Knauf, Helen (2007), *Tutorenhandbuch : Einführung in die Tutorenarbeit,* 3. Aufl., Bielefeld : Webler.

Scharlach, Christine und Ulrike Sens (2009), *Projekt „Lehren und Lernen von Mathematik"*, in J. Steinbach et al. (Eds.), Gender im Experiment – Gender-Experiences, Gender-Technik-Projekte an der TU Berlin, Universitätsverlag der TU Berlin, erscheint demnächst

Scharlach, Christine (2009), *Einführung in die geschlechtergerechte (Hochschul-)Lehre – Ein Workshop*, Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, Franzbecker: Hildesheim, Berlin.

Spitzer, Manfred (2002) *Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens,* Spektrum Akademischer Verlag.

Petra SCHERER, Bielefeld

Diagnose ausgewählter Aspekte des Dezimalsystems bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern

1 Bedeutung des Stellenwertsystems

Das Verständnis des Stellenwertsystems repräsentiert eine fundamentale Idee der Mathematik (Winter 2001) bzw. der Arithmetik (Wittmann 1994). Ein sicheres Verständnis des STW-Systems ist erforderlich für das Dezimalsystem allgemein, für das Verständnis großer Zahlen und Zahlvorstellungen, u. a. auch für das Schätzen und Überschlagen. Es ist notwendig für die Entwicklung effektiver Rechenstrategien (um z. B. zählendes Rechnen und Fingerrechenmethoden zu ersetzen), für das Verständnis der schriftlichen Algorithmen sowie für die Zahlbereichserweiterungen etwa zu den Dezimalbrüchen. Auch für die Bezüge zu Größen mit dezimalen, aber auch nicht dezimalen Strukturen ist das Verständnis unabdingbar.

Verschiedene Studien zeigen, dass dieser Inhalt für lernschwache Schülerinnen und Schüler, auch in höheren Klassen, häufig Probleme auslöst (vgl. z. B. Moser Opitz 2007; Kamii 1986; Fuson 1990; Fuson et al. 2000).

Im Folgenden wird eine Pilotstudie zu ausgewählten Aspekten des Dezimalsystems vorgestellt, die einerseits die Schwierigkeiten lernschwacher Schülerinnen und Schüler besser verstehen, andererseits aber auch Folgerungen für die Diagnose sowie für Lehr- und Lernprozesse ableiten will.

2 Testkonstruktion und Durchführung der Studie

Für die Studie wurden Aufgaben im 1000er-Raum konzipiert, die unterschiedliche Repräsentationsebenen abdecken, daneben auch die Basis für Rechenstrategien beleuchten. Dabei wurden nicht nur typische Standardaufgaben, sondern auch unbekannte Formate oder herausfordernde Aufgaben gewählt, die im regulären Unterricht oder den Lehrwerken nicht unbedingt behandelt worden waren und die nicht mechanisch zu lösen sind.

Der komplette Test umfasst die folgende Aufgabengruppen: Zählen vorwärts/rückwärts (mit unterschiedlichen Startpunkten und Übergängen, Zehner-, Hunderter- und Tausenderübergang); Zählen in Schritten (2er/10er/100er) vorwärts/rückwärts; Zerlegen in STW (z. T. mit unbesetzten STW wie bei 209); Zusammensetzen aus STW symbolisch und ikonisch (z. T. mit unbesetzten STW, z. B. 400+8, oder mit variierender Reihenfolge der STW, z. B. 70+200+3); Darstellung in der Stellentafel (Zahlen mit Plättchen legen); Identifizieren von STW; Additionen & Subtraktionen (einfache Zahlenwerte ohne Überschreitungen wie bspw. 251+503).

Die Studie wurde in Form von Einzelinterviews mit 12 Schülern des 5. und 6. Schuljahres einer Förderschule/Schwerpunkt Lernen durchgeführt (vier Mädchen, acht Jungen; jeweils zwei Sitzungen pro Schüler). Neun der Schülerinnen und Schüler wiesen einen Migrationshintergrund auf, für einige war Deutsch nicht die Erstsprache.

3 Ausgewählte Ergebnisse

Insgesamt zeigte sich bei allen Schülern ein gewisses Verständnis des Dezimalsystems, jedoch offenbarten sich auch Schwierigkeiten und Beschränkungen. Exemplarisch seien drei Bereiche genauer beleuchtet.

3.1 Zählen

Die Aufgaben zum Zählen beinhalteten spezifische Anforderungen wie 10er-, 100er- bzw. 1000er-Übergänge. Dies stellt erhebliche Anforderungen an Konzentration und Kurzzeitgedächtnis, gehört aber zu einem sicheren STW-Verständnis. Der Startpunkt 6 war beim Vorwärtszählen unproblematisch. Beim Startpunkt 96 wurden nach 100 bspw. abweichend genannt *»110, 120, 130, ...«* oder *»200, 300, 400, ...«*. Die Frage stellt sich hierbei, ob primär ein sprachliches Problem vorliegt, dass etwa bei 200 die Zahl *»Hundertzwei«* gemeint war. Mit größeren Zahlen und beim Rückwärtszählen tauchten größere Probleme auf.

3.2 Zerlegen in Stellenwerte & Zusammensetzen aus Stellenwerten

Mitunter fand sich lediglich die Kennzeichnung mit HZE. Hier bleibt fraglich, ob bspw. bei 209 ein wirkliches Verständnis des unbesetzten STW vorliegt oder lediglich in mechanischer Art die bekannte Abfolge der STW notiert wurde. Es fand sich auch die ikonische Zerlegung (100er-Quadrate, 10er-Streifen, Punkte). Die intendierte Lösung, z. B. 378 = 300 + 70 + 8 als Zahlensatz, fand eher selten spontan statt. Wenn dies angeregt wurde, zeigten die unbesetzten STW interessante Notationen der Null, z. B. additiv als 209 = 200+0+9 oder als Auflistung 200, 00, 9 entsprechend der Zehnerposition. An solchen Beispielen wäre im weiteren Unterricht zu arbeiten.

Für das Zusammensetzen aus STW wurde häufiger der schriftliche Algorithmus bemüht. Bei diesem Aufgabentyp spielte die veränderte bzw. nicht vertraute Reihenfolge der STW eine entscheidende Rolle: Während die Standardaufgabe 300+50+4 zur richtigen Lösung führte, wurden bspw. als Fehllösung für 70+200+3 etwa 723 oder 7023 angegeben.

Auch bei der analogen Aufgabe auf ikonischer Ebene (100er-Punktfelder, 10er-Streifen und einzelne Punkte) wurde der schriftliche Algorithmus genutzt. Z. T. mussten sich die Schüler Zwischenergebnisse der STW notieren und erfassten selbst eine dargestellte Zahl wie 100 und 20 nicht direkt. Eine Schülerin hatte schon Probleme, das Punktfeld auf einen Blick zu erfassen und notierte zunächst die Unterstruktur der 25er.

Bei diesem Aufgabentyp müssen die Lösungsprozesse genau beleuchtet werden: Wenn Schüler nicht in der Lage sind, zwei oder drei Stellenwerte direkt zusammen zu fassen, sondern dafür den schriftlichen Algorithmus benötigen oder auch Strukturierungshilfen, so wird dies die Entwicklung und die Wahl von Rechenstrategien erheblich beeinflussen.

3.3 Addition & Subtraktion

Diese Aufgaben ergaben nur eine geringe Fehleranzahl, dabei mehr Fehler bei der Subtraktion als bei der Addition. Eine typische Reaktion war die Frage *»Kann ich auch untereinander rechnen?«*. Als Fehlermuster zeigte sich das Vergessen einzelner STW (z. B. 314+314 = 328) oder auch eine falsche STW-Zuordnung (z. B. 251+503 = 781). Das Interview offenbarte, dass eine am schriftlichen Produkt vermutete Fehlerstrategie nicht zutreffen musste oder mehrdeutig war und die Prozesse mehr Aufschluss gaben: So kamen zwei Schüler bei der Aufgabe 624-203 beide zur Lösung 401. Während der eine im Kopf rechnete und die Zehner einfach vergaß, nutzte der andere den schriftlichen Algorithmus. Dabei war eine vermischte Sprechweise des Ergänzens *(»von 3 bis 4«*) und des Abziehens an der Zehnerstelle *(»0 minus 2«*) mit dem Ergebnis 0 festzustellen. In vielen Fällen wurden die Operationen eher mechanisch durchgeführt, dabei nicht in Zahlen, sondern in Ziffern gesprochen. Dies scheint jedoch kein Spezifikum lernschwacher Schüler zu sein, sondern eher ein allgemeiner Trend nach der Einführung schriftlicher Algorithmen (vgl. z. B. Scherer/Steinbring 2003).

4 Abschließende Bemerkungen

Die Pilotstudie zeigte einige interessante Ergebnisse: Abgesehen von der Bearbeitungszeit gab es keine prinzipiellen Unterschiede zwischen Fünft- und Sechstklässlern. Darüber hinaus kamen einige Schüler zu korrekten *Rechen*ergebnissen, obwohl ihnen offensichtlich Basiskompetenzen fehlten. Das erfolgreiche Lösen von Routineaufgaben kann also Verständnis vortäuschen. Insbesondere die nicht-Standard Aufgaben konnten helfen, Defizite bzw. eingeschränkte Vorstellungen zu identifizieren.

Folgerungen für Unterricht und Förderung betreffen einerseits zukünftige Inhalte, etwa bei der Erweiterung des Zahlenraums. Andererseits wäre auch der Zugang zu den vergangenen Inhalten (z. B. Einführung 100er- und 1000er-Raum) kritisch zu reflektieren. Generell darf sich der Mathematikunterricht nicht mit korrekten Ergebnissen zufrieden geben, sondern sollte das Beschreiben/Begründen der eigenen Vorgehensweisen fordern, nicht zuletzt auf Grund der diagnostischen Informationen.

Der Diagnose und Förderung von Basisfertigkeiten (z. B. Verständnis des STW-Systems) muss besondere Bedeutung zukommen. Dazu sind geeignete Aufgabentypen sowohl für die Diagnostik als auch für den Unterricht erforderlich. Auch die verschiedenen Repräsentationsebenen wären zu vernetzen, und im Fokus sollten nicht nur Rechnungen und das Arbeiten auf der symbolischen Ebene stehen (vgl. z. B. Scherer 1995). Nicht zuletzt wären auch die Rolle der Sprache und die linguistischen Besonderheiten zu berücksichtigen (vgl. auch Scherer/Steinbring 2003; Thompson 1997).

Der Nutzen einer diagnostischen Überprüfung betrifft verschiedene Bereiche: Sie ermöglicht die Berücksichtigung der individuellen Schülerbedürfnisse und gibt Hinweise für differenzierte Lernangebote für den Unterricht. Die Identifizierung der Probleme kann für alle Schüler besprochen werden und damit zu einem tieferen Verständnis mathematischer Inhalte führen.

Literatur

Fuson, K. C. (1990). Issues in place value and multidigit addition and subtraction learning and teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 273-280.

Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Drueck, J. V. (2000). Achievement Results for Second and Third Graders. Using the Standards-Based-Curriculum *Everyday Mathematics*. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(3), 277-295.

Kamii, C. (1986). Place Value: an explanation of its difficulty and educational implications for the primary grades. *Journal for Research in Childhood Education, 1*(2), 75-86.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.

Scherer, P. (1995). Ganzheitlicher Einstieg in neue Zahlenräume – auch für lernschwache Schüler?! In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 151-164). Frankfurt/M.: Arbeitskreis Grundschule.

Scherer, P., & Steinbring, H. (2003). The professionalisation of mathematics teachers' knowledge – teachers commonly reflect feedbacks to their own instruction activity. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of CERME 3*. Pisa: Universita di Pisa.

Thompson, I. (1997). Mental and written algorithms: can the gap be bridged? In I. Thompson (Ed.), *Teaching and learning early number* (S. 97-109). Buckingham: Open University Press.

Winter, H. (2001): Inhalte mathematischen Lernens. Download unter: http://grundschule.bildung-rp.de/lernbereiche/mathematik/wissenschaftliche-artikel/inhalte-mathematischen-lernens.html [08.03.09]

Wittmann, E. C. (1994). Teaching aids in primary mathematics: Less is more. In L. Bazzini & H.-G. Steiner (Hrsg.), *Proceedings of the Second Italian-German Bilateral Symposium on the Didactics of Mathematics* (Vol. 39, S. 101-111). Bielefeld: IDM

Andrea SCHINK, Dortmund

„Und was ist jetzt das Ganze?!“ – Vom Umgang mit der Bezugsgröße bei Brüchen

1. Befunde zu Schwierigkeiten beim Umgang mit Brüchen

Empirische Untersuchungen belegen, dass die Bruchrechnung und speziell die Multiplikation von Brüchen vielen Lernenden Probleme bereiten (vgl. Wartha 2007, Padberg 2002, Fischbein u.a. 1985). Dabei lässt sich feststellen, dass ein epistemologisches Hindernis für ein inhaltliches Verständnis der Multiplikation für viele Lernende die Bezugsgröße ist. Wenn ein Anteil-vom-Anteil bestimmt wird, wechselt fast stillschweigend das Ganze, auf das sich ein Anteil bezieht, wie z.B. hier: Mara hat noch 3/4 vom Kuchen übrig. Von den 3/4 isst sie 2/3. Welchen Anteil des Kuchens hat sie gegessen? Hier bezieht man 3/4 auf den ganzen Kuchen, die 2/3 auf die 3/4, einen Teil des Ganzen, und das Ergebnis 6/12 wieder auf den ganzen Kuchen. Dieser Wechsel der Bezüge ist für Lernende nicht selbstverständlich, zumal er auch nicht immer explizit gemacht wird. Zu erkennen, dass die Wahl des Ganzen nicht beliebig ist, ist daher schwierig.

Die Kenntnis dieses Phänomens an sich ist nicht neu (vgl. z.B. Wartha 2007, Mack 2000), jedoch zeigte sich im Laufe unserer Untersuchung, dass die Interpretation der Bezugsgröße eine wichtige Voraussetzung für das inhaltliche Verständnis der Multiplikation von Brüchen darstellt: Nur wer den Anteil-vom-Anteil auf das richtige Ganze beziehen kann, kann die Multiplikation als Anteil-vom-Anteil-Nehmen sinnvoll deuten (vgl. Schink 2008).

2. Eine Lernumgebung im Modell der Didaktischen Rekonstruktion

Als Modell für den noch nicht abgeschlossenen Forschungs- und Entwicklungsprozess zur Untersuchung der Vorstellungsentwicklung zur Multiplikation von Brüchen wurde das Modell der Didaktischen Rekonstruktion nach Kattmann u.a. (1997) gewählt. Es hat die Veränderung von Unterricht durch didaktische Strukturierung von Lernarrangements vor dem Hintergrund einer konstruktivistischen Lerntheorie zum Ziel und verschränkt dazu wechselseitig zwei weitere Arbeitsbereiche: fachliche Klärung (intensive Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand) und Lernendenperspektive (Erfassung individueller Vorstellungen). Dabei wird davon ausgegangen, dass die Inhalte des Unterrichts nicht alleine von der Fachwissenschaft normativ vorgegeben werden, sondern erst durch konsequente Einbeziehung der Lernendenperspektive konstruiert werden können. Das beinhaltet, die individuellen Vorstellungen und Schwierigkeiten der Lernenden bei der

Didaktischen Strukturierung der Lerninhalte als Ressourcen für den Lernprozess anzusehen (vgl. Kattmann u.a. 1997, Prediger 2005).

Ein erster Schritt zur Erhebung der Lernendenperspektive ging von den in der Literatur beschriebenen Schwierigkeiten (oft nur begrenzt vorhandene inhaltliche Deutung der Operation und Fehlvorstellungen wie „Multiplizieren vergrößert stets"; vgl. z.B. Prediger 2008) aus und nutzte im ersten Zugriff einen aus unserer Sicht überzeugenden Zugang über das Anteil-vom-Anteil-Nehmen aus dem Zahlenbuch 6 (Affolter u.a. 2004) in leicht abgeänderter Fassung (vgl. Schink 2008). Dabei zeigte sich das eingangs beschriebene Bezugsgrößenproblem. Auf diese Hürde für das inhaltliche Verständnis wurde im nächsten Schritt eingegangen: Durch Einbeziehung von Fach- und Lernendenperspektive wurden Aufgaben entwickelt, die diese aus Lernendensicht schwierige, aber zugleich wichtige fachliche Voraussetzung aufgreifen und verstehen helfen sollen (Didaktische Strukturierung). Dabei sollen die sensible Wahrnehmung und der Bezugswechsel bereits weit vor der Multiplikation aufgegriffen werden. Eine Aufgabe der Lernumgebung wurde im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion aus Lernendenperspektive beleuchtet und in halbstandardisierten klinischen Partnerinterviews in einer 6. Gesamtschulklasse eingesetzt. Dabei interessierten folgende Forschungsfragen:

- Was können die Aufgaben für einen sensiblen Umgang mit der Bezugsgröße in Vorbereitung auf die Multiplikation von Brüchen leisten?
- Welche individuellen Vorstellungen zum Ganzen und zur Bezugsgröße lassen sich aus den Bearbeitungen der Aufgaben rekonstruieren?

3. Ergänzen zum Ganzen und Reflektion wechselnder Bezüge

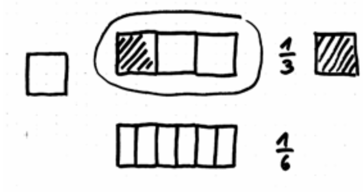
Den Kindern wurde die Aufgabe in Abb. 1 in zwei Schritten vorgelegt. Der erste Teil stellt die Umkehrung der Standardaufgabe dar, ein Ganzes in Anteile zu zerlegen. Er knüpft aus Lernendenperspektive an Vorerfahrungen an (bekannte geometrische Formen und Strukturierung eines Ganzen in Anteile). Allerdings enthält die Aufgabe mit der Neustrukturierung der Situation eine wichtige neue Anforderung, denn das Ganze ist nicht gegeben und viele Aspekte müssen bedacht werden: Wie viele Teile braucht man insgesamt? Wie viele fehlen? Darf man ein einmal gefundenes Ganzes weiter nutzen? Was bleibt gleich (Stückgröße)? Was ändert sich (Größe des Ganzen)? Kommt es nur auf die Anzahl der Teile an? Die im zweiten Aufgabenteil aufgegriffene Fehlvorstellung mit der sich die Kinder auseinander setzen sollen, zielt auf diese Fragen ab. Dass damit ein Anlass geschaffen wurde, über das Problem der Bezüge zu argumentieren, zeigt z.B. Simons Begründung: *„Wenn das der Kuchen ist* [deutet auf das obere Rechteck] *und das ist ja ein Drittel. Und hier unten das Sechstel - Da sind entweder die Stücke kleiner, oder der Kuchen muss kleiner werden damit die Stücke genau…äh, der Kuchen muss dann* ***größer*** *werden, damit die Kästchen genauso groß sind."*. So differenziert können nicht alle Kinder an dieser Aufgabe argumentieren: Dazu müssen sie erkennen, was hier die veränderbare Größe ist, und dass Theas Lösung nicht nur eine ungenaue Skizze ist, sondern dass dort ein konzeptionelles Problem besteht. Helfen kann ihnen der Impuls, auf Anteile zu achten, um die Reflektion von Zeichenungenauigkeiten zum inhaltlichen Kern zu lenken. Die Argumentation ist nicht trivial, wie auch Simons Erklärung zeigt: Der Bezugswechsel und die wechselseitige Größenbeziehung sind anspruchsvoll. Simon vertut sich hier zunächst auch mit der Veränderungsrichtung. Trotz möglicher Schwierigkeiten ist das Reflektieren und Argumentieren über Beziehungen zwischen Teil und Anteil jedoch eine sinnvolle Tätigkeit, die für die Wahrnehmung dieser Relation sensibilisieren kann.

Hier ist ein Drittel: □ Wie könnte das Ganze aussehen? Zeichne es auf! Wie könnte das Gan-ze aussehen, wenn die Figur ein Sechstel des Ganzen ist? Zeichne es!

Thea findet die Aufgabe doof:

Aber das macht doch keinen Sinn! Die Aufgabe ist doch total doof! Das kann doch gar nicht sein, dass das Quadrat da gleichzeitig ein Drittel ***und*** *ein Sechstel ist! Die Stücke sind doch beide Male gleich groß…. Und $\frac{1}{6}$ ist doch immer kleiner als $\frac{1}{3}$, oder nicht?!*

Sie hat die Aufgabe so gelöst:



Was sagst du dazu?

Abb. 1

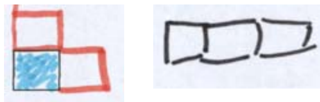


Abb. 2

Neben der Argumentation kann man an der Aufgabe auch einiges über Vorstellungen der Kinder vom Ganzen lernen. So wird es z.T. als „ganz" gedacht, d.h. als eine möglichst symmetrische, „schöne" und „prototypische" Form (vgl. Abb. 2; das rechte Bild wurde z.T. eher akzeptiert als das linke, da dort „etwas fehlt"). Darüber hinaus verwendeten manche Kinder das zuerst gefundene Ganze weiter und verteilten es, wenn ein neuer Anteil gegeben war; das entspricht der im zweiten Teil aufgegriffenen Fehlvorstellung. Solche Lösungen analoger Aufgaben sind in Abb. 3 aufgeführt und zeigen verschiedene Aspekte: Während bei den Dreiecken der Prozess der Konstruktion erkennbar ist (vier wurden erst später ergänzt damit das Ausgangsdreieck das verlangte 1/8 des Ganzen ist), lässt sich beim

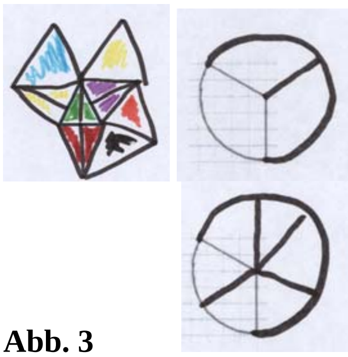


Abb. 3

Kreis (das Segment soll 1/3, bzw. 1/6 sein) die Dominanz eines prototypisch gedachten Ganzen erahnen. Beide Lösungen lassen vermuten, dass das Verändern der Größe des Ganzen aus Sicht dieser Kinder abwegiger als die Größenvariation des (hier eigentlich fest vorgegebenen) Anteils ist.

4. **Vom Umgang mit dem Ganzen hin zur Multiplikation**

Der reflektierte Umgang mit der Bezugsgröße schon vor der Behandlung der Multiplikation erscheint sehr wichtig im Hinblick auf eine Flexibilisierung des Denkens in Bezügen und inhaltliche Deutungen. Argumentieren über Fehlvorstellungen oder konträre Konzepte kann hier produktiv sein. Weitere wichtige Schritte hin zu einer vorstellungsorientierten Multiplikation von Brüchen wären das Sensibilisieren für Bezüge und „das Ganze" auch bis hin zur Multiplikation, das Abgrenzen von konzeptionell unterschiedlichen, aber für Lernende nicht so leicht unterscheidbaren Konzepten und Situationen, wie z.B. beim Signalwort „von", und das Vernetzen von Konzepten zur Multiplikation von Brüchen (als Anteil-vom-Anteil-Nehmen und als Multiplikation von Anteilen von Größen) z.B. über geeignete graphische Darstellungen. Hier ist im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion eine erneute Strukturierung anzusetzen.

Literatur

Affolter, W. u.a. (2004). *Das Zahlenbuch 6*. Zug: Klett und Balmer.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *JRME, 16*, 3 - 17.

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H., Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 3(3)*, 3 - 18.

Mack, N. K. (2000). Long-term effects of building on informal knowledge in a complex content domain: the case of multiplication of fractions. *J. Math. Behav.,19(3)*, 307 - 332.

Padberg, F. (2002). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum-Verlag.

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica, 28(2)*, 23 - 47.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18 (1)*, 3 - 17.

Schink, A. (2008). Vom Falten zum Anteil vom Anteil – Untersuchungen zu einem Zugang zur Multiplikation von Brüchen. In: E. Vasarhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, (S. 697 - 700). Münster: WTM Verlag.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim / Berlin: Franzbecker.

Wolfgang SCHLÖGLMANN, Linz

Zur Bedeutung von Begriffen und Konzepten in der mathematikdidaktischen Forschung

Einleitung

Begriffen und Konzepten kommt in der mathematikdidaktischen Forschung eine wichtige Position zu. Dies ist schon daran zu erkennen, dass Beck & Maier (1994) Mathematikdidaktik als eine Textwissenschaft sehen und damit meinen, dass der Sprache eine zentrale Rolle sowohl in theoretischer Hinsicht, wie auch in der empirischen Forschung zukommt. Da Begriffe und Konzepte auch für die Mathematik große Bedeutung besitzen, beschäftigt man sich im Rahmen der Semiotik intensiv mit den damit in Zusammenhang stehenden Fragen. Den in der mathematikdidaktischen Forschung verwendeten Begriffen und Konzepten kommt nicht dieselbe Aufmerksamkeit zu, insbesondere nicht der Position der Forschungsmethoden, die auf diesen Konzepten beruhen.

Allgemeines über Konzepte

Ein wesentlicher Aspekt der Mathematikdidaktik ist, wie bei anderen Wissenschaften auch, deren duale Natur, nämlich, dass Phänomene beschrieben werden, die im Folgenden auch erklärt werden sollen (Niss, 1999). Zur Beschreibung der Phänomene dienen der Mathematikdidaktik Begriffe und Konzepte als sprachliche Mittel. Aufgrund der Dualität müssen die Begriffe und Konzepte stets auch ein erklärendes Element beinhalten, das sich in den mit den Begriffen und Konzepten verbundenen Bedeutungen widerspiegeln muss. Um dies zu verstehen, ist es notwendig sich mit der Konstruktion von Bedeutungen näher zu beschäftigen. Da man sich in der Mathematik und der Mathematikdidaktik seit langem intensiv mit der Bedeutungskonstruktion von den in der Mathematik so wichtigen Zeichen beschäftigt, ist sinnvoll die in diesem Zusammenhang gewonnenen Erkenntnisse zu nützen und für das Problem der Bedeutungskonstruktion von mathematikdidaktischen Begriffen und Konzepten heranzuziehen.
In seiner berühmten Arbeit „Zeichen, Sinn und Bedeutung“ behandelte Frege die Frage der Bedeutung von Zeichen in der Mathematik, wobei er unter Bedeutung die objektive Idee eines Dings und mit Sinn die subjektive Interpretation durch eine Person in Bezug auf dieses Ding, das durch das Zeichen bezeichnet wurde, verstand (Steinbring, 2005). Steinbring modellierte den Prozess der Bedeutungskonstruktion mittels eines „epistemologischen Dreiecks“ mit Zeichen/Symbol. Objekt/Referenzkontext und Konzept als Ecken dieses Dreiecks, wobei die Bedeutung eines Zeichens, das

für sich keine Bedeutung besitzt, durch den Lernenden mit Unterstützung der Lehrkraft in einem Prozess der Vermittlung zwischen Zeichen/Symbol und Referenzkontext etabliert wird (Steinbring, 2005; 22).
Sfard (2008) greift für die Konzeptdefinition einen Vorschlag von Wittgenstein auf, der vor allem den diskursiven Aspekt betont.
A concept is a symbol with its use. (Sfard, 2008; 111)
Dieser Konzeptbegriff erweitert die Möglichkeiten Worten eine Bedeutung zu geben. So können z. B. emotionale Zeichen im Diskursprozess ebenfalls dazu beitragen, dass einem Wort oder Zeichen eine bestimmte Bedeutung zugewiesen wird. Symbole bedürfen aber stets der Interpretation und der Verallgemeinerung (Otte, 2005; 231). Wichtig ist es in diesem Zusammenhang zu bedenken, dass die in der mathematikdidaktischen Forschung verwendeten Begriffe und Konzepte kulturell produziert sind und damit sich ständig verändernde Hervorbringungen gemeinsamer menschlicher Anstrengungen sind (Sfard, 2008; 77). Für einen Diskursprozess ist es aber auch bedeutsam, dass die Teilnehmenden an einem Diskurs in eine Diskursgemeinschaft eingeführt werden müssen. Dies geschieht in der Regel dadurch, dass eine erfahrene Person neue Lernende in die Regeln und Bedeutungen einführt (Lave & Wenger, 1991).
Für die Bedeutungskonstruktion weisen Lakoff und Nunez auf die wichtige Rolle von Metaphern hin:
One of the principal results in the cognitive science is that abstract concepts are typically understood, via metaphor, in terms of more concrete concepts. This phenomenon has been studied scientifically for more than two decades and is in general as well establishes as any result in cognitive science (though particular details of analysis are open for further investigations). One of the major results is that metaphorical mappings are systematic and nor arbitrary. (Lakoff and Nunez, 2000; 40 – 41)

Ich möchte die Problematik am Beispiel des Beliefkonzepts verdeutlichen, wobei ich nur zwei Definitionen herausgreife:
Beliefs (internal representations to which the holder attributes truth, validity, or applicability, usually stable and highly cognitive, may be highly structured) (Goldin, 2002; 61)
Students’ mathematics-related beliefs are the implicitly or explicitly held subjective conceptions students hold to be true about mathematics education, about themselves a mathematicians, and about mathematics class context. These beliefs determine in close interaction with each other and with students’ prior knowledge their mathematical learning and problem solving in class. (Op’t Eynde, De Corte and Verschaffel, 2002; 27)

Betrachten wir diese beiden Beschreibungen von Beliefs so finden wir Schlüsselworte – Intensität, Stabilität, Struktur und Wahrheit – die helfen sollen dem Konzept Bedeutung zu geben. Intensität ist im Affektbereich eine häufig verwendete Metapher um über die Worte “heiß” oder “kalt” physische Zustände zu beschreiben (Lakoff and Nunez, 2000; 41). Stabilität und Gleichgewicht sind ebenfalls Metaphern aus dem physikalischen Bereich, während Wahrheit und Struktur eher auf die Logik verweisen. Insgesamt werden im Zuge der “Definition” zwar andere Worte und Begriffe verwendet, jedoch entkommen wir damit dem Problem nicht, da auch diese Begriffe über keinen Referenzkontext verfügen, d. h. sie bekommen ihre Bedeutung über Metaphern und den aufgebauten Assoziationen. Sfard (2008) bezeichnet das mit der Objektifizierung zusammenhängende Problem, dass wir oft Metaaussagen, das heißt Aussagen über den Diskurs, so interpretieren als wäre es Aussagen über Objekte der realen Welt, als “ontologischen Kollaps” (Sfard, 2008; 57). Wir müssen uns aber im Klaren sein, dass wir dieses Problem nicht vermeiden können, da die in der mathematikdidaktischen Forschung verwendeten Konzepte und Begriffe nicht auf einen Referenzkontext verweisen können, sondern deren Bedeutung im Diskurs entwickeln müssen und dabei an Begriffe und Konzepte gebunden sind, die ebenfalls Diskursobjekte sind.
Ein weiteres Problem ergibt sich durch die Notwendigkeit der Entwicklung von Messinstrumenten für Konzepte. Messen erfordert immer eine Operationalisierung eines Konzeptes. Bei Fragebögen ist die Bedeutung des Konzeptes in Form von Fragen oder einfachen Statements zu formulieren, die dann entweder zu beantworten oder zu bewerten sind. Natürlich sind die formulierten Fragen deutlich konkreter, als es die Konzeptbeschreibungen sind und daher werden die Messinstrumente zu einem wichtigen Teil des jeweiligen Konzeptes, in einem gewissen Sinne sind sie die Realisierung des Konzeptes. (Man denke in diesem Zusammenhang an das Konzept “Mathematical Literacy” das die PISA – Studie verwendet. Hier werden dann die zu bearbeitenden Aufgaben zum Konzept, denn diese werden als Konkretisierung des Konzeptes in der Messung wirksam). Eine analoge Situation ergibt sich auch, wenn qualitative Methoden eingesetzt werden, denn diese Methoden verwenden häufig Texte (Protokolle von Interviews und Unterrichtsbeobachtungen, Essays, Transkripte, etc.) als Grundlage und in der Interpretation ist es notwendig z. B. nach Schlüsselworten, die in Zusammenhang mit dem Konzept stehen, zu suchen.
Grundsätzlich gibt es keine Möglichkeit diese Situation zu vermeiden. Dessen sind sich die Forscherinnen und Forscher auch bewusst und

verwenden daher häufig mehrere Forschungsmethoden, um dadurch eine Verbreiterung der Informationsbasis über das untersuchte Phänomen zu erreichen und damit in einem gewissen Sinne das Definitionsproblem zu überwinden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin in einem Diskursprozess eine Präzisierung der Konzeptdefinition zu entwickeln, um so zumindest innerhalb der Forschungsgemeinschaft weitgehende Übereinstimmung zu erzielen, was unter einem bestimmten Konzept zu verstehen ist. Diese Präzisierung muss dann auch in der Weiterentwicklung der Messinstrumente ihren Niederschlag finden.

Literatur

Beck, C. & Maier, H. (1994). Mathematikdidaktik als Textwissenschaft. Zum Status von Texten als Grundlage empirischer mathematikdidaktischer Forschung. Journal für Mathematikdidaktik, 15, 35 – 78.

Goldin, G. A. (2002). Affect, meta - affect, and mathematical belief structures. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 59 – 72.

Lakoff, G. and Nunez, R. E. (2000). Where Mathematics Comes From. Basic Books.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). Situated learning. Legitimate peripheral participation. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and the State of Research in Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics 40, 1 – 24.

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. In: G. C. Leder, E. Pehkonen & Günter Törner (2002): Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht/ Boston/ London. Academic Publishers. 13 – 37.

Otte, M. (2005) Meaning anf Mathematics. In: Kilpatrick, J., Hoyles, C., Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. In: G. C. Leder, E. Pehkonen & Günter Törner (2002): Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht/ Boston/ London. Academic Publishers. 13 – 37.

Skovsmose, O. and Valero, P. (Eds.). Meaning in Mathematics Education. New York. Springer, 231 – 260.

Sfard, A. (2008). Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing. Cambridge, New York. Cambridge University Press.

Steinbring, H. (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. New York, Springer.

Susanne SCHMAILZL, München, und Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Situationsbezogene und übergreifende Überzeugungen von Mathematiklehrkräften zum Lernen an Fehlern und zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch

Überzeugungen von Mathematiklehrkräften können episodisch strukturiert und damit an Unterrichtssituationen gebunden oder von situationsübergreifenderer Natur sein (Leinhardt & Greeno, 1986; Törner, 2002; Kuntze & Reiss, 2005). Dies dürfte auch für Überzeugungen im Hinblick auf das Lernen an Fehlern und den Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch gelten (vgl. Kuntze, Heinze & Reiss, 2008). Hier stellen beispielsweise behaviouristische (vgl. Skinner, 1958) oder konstruktivistische (vgl. Oser & Spychiger, 2005) Sichtweisen zum Lernen an Fehlern relativ globale und übergreifende Überzeugungen dar, während Einschätzungen, inwiefern etwa eine Reaktion auf einen konkreten Fehler im Unterrichtsgespräch angemessen oder lernförderlich ist, stärker situationsbezogen sind.
Einige Studien zu fehlerbezogenen Vorstellungen von Mathematiklehrkräften (z.B. Barnett & Sather, 1992) fokussieren auf relativ übergreifende Typisierungen von Lehrkräften oder quantitative Erhebungen solcher Vorstellungen (Kuntze, Heinze & Reiss, 2008). Vor diesem Hintergrund ist es von Interesse, auch situationsbezogene Überzeugungen zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch stärker in den Blick zu nehmen. Gleichzeitig ist von Interesse, auch die Anschlussfrage der Studie von Kuntze, Heinze und Reiss (2008) nach einer ausdifferenzierteren Erhebung fehlerbezogener Überzeugungen aufzunehmen.
Da davon auszugehen ist, dass beim konkreten Umgang mit Fehlern in Unterrichtssituationen Zielkonflikte bei unterrichtsbezogenen Entscheidungen von Lehrkräften auftreten können, ist insbesondere auch von Interesse, inwiefern Zusammenhänge zwischen eher unterrichtssituationsbezogenen und übergreifenderen, weniger situationsspezifischen Überzeugungen von Mathematiklehrkräften beobachtet werden können.
Insgesamt ergeben sich hieraus also die folgenden Forschungsfragen:
Über welche situationsbezogenen und situationsübergreifenden Vorstellungen zum Lernen an Fehlern und zum Umgang mit Fehlern verfügen Mathematiklehrkräfte? Gibt es Zusammenhänge zwischen situationsbezogenen und situationsübergreifenden Vorstellungen?

Untersuchungsdesign und Stichprobe

Für diese Studie wurde verschränkt mit einer Untersuchung von Kuntze (eingereicht) ein zweiteiliger Fragebogen mit offenen und geschlossenen

Items neu entwickelt, der auf die Ergebnisse der Studie von Kuntze, Heinze und Reiss (2008) aufbaut und in weitaus differenzierterer Weise Ergebnisse früherer Studien (z.B. Barnett & Sather, 1992) einbezieht. Während die geschlossenen Items (vierstufige Likert-Skala) des ersten Fragebogenteils zu Skalen zusammengefasst werden konnten, wurden für die offenen Antworten zu den situationsbezogenen Fragen des zweiten Fragebogenteils Top-Down-Codierungen vorgenommen (vgl. Schmailzl, 2008). Im zweiten Fragebogenteil wurden Sichtweisen der Lehrkräfte zu vier Unterrichtssituationsbeispielen erhoben. Bei zwei dieser Situationen wurden Fehler übergangen (Situationen 1 und 3, vgl. Abb. 1), bei den zwei anderen wurden Fehler im Unterrichtsgespräch aufgearbeitet (Situationen 2 und 4).

Befragt wurden 75 Mathematiklehrkräfte (20 Lehrerinnen, 51 Lehrer, 4 ohne Angabe), die im Mittel seit 15,4 Jahren (SD=11,5) an Gymnasien unterrichteten.

1. Unterrichtssituation: **7. Klasse**

Konrad rechnet am Tageslichtprojektor eine algebraische Umformungsaufgabe vor.

Dabei macht er folgenden Fehler:

$- (2x - a^2 + 5) + a^2 = 2x + 2a^2 -5$

Die Lehrerin fragt: „Wo ist hier der Fehler? – Ja, Simone."

Simone: „Konrad hat das Minus vor dem 2x vergessen."

Lehrerin: „Genau. Das darfst Du gleich hinschreiben, Simone. Konrad, Du darfst Dich wieder setzen."

Wären Sie genauso vorgegangen? □ ja □ nein

Bitte begründen Sie Ihr Vorgehen bzw. schildern Sie gegebenenfalls, wie Sie vorgegangen wären. Gerne können Sie bei Bedarf auch obigen Text verändern.

2. Unterrichtssituation: **5. Klasse**

Ausschnitt aus dem Unterrichtsgespräch zu folgender Aufgabe:

Ein Stück Blechkuchen von 10 cm x 10 cm kostet 2 Euro. Wie viel müsste ein 20 cm x 20 cm großes Kuchenstück kosten?

Sven meldet sich: „4 Euro muss es kosten"

Lehrerin: „Laura, kannst du erklären, wie Sven auf sein Ergebnis gekommen ist?"

Laura: „Nein, weil - ich meine - es sind 8 Euro."

Lehrerin: „Du kommst also auf ein anderes Ergebnis und meinst, dass Sven falsch gerechnet hat? Bevor wir von beiden hören wollen, was sie sich jeweils gedacht haben – Martin, was meinst du, wie sind Sven und Laura auf ihr Ergebnis gekommen?

Martin: „Ich finde auch, dass es 4 Euro sind, weil 20 cm ist ja doppelt so viel wie 10 cm."

Lehrerin: „Laura?"

Wären Sie genauso vorgegangen? □ ja □ nein

Bitte begründen Sie Ihr Vorgehen bzw. schildern Sie gegebenenfalls, wie Sie vorgegangen wären.
Gerne können Sie bei Bedarf auch obigen Text verändern.

Abb. 1: Zwei der Unterrichtsgesprächssituationen des Fragebogens

Ergebnisse

Die im ersten Fragebogenteil enthaltenen Skalen zu situationsübergreifenden Aspekten von Überzeugungen zum Lernen an Fehlern und zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch erwiesen sich als reliabel (Cronbach`s Alpha zwischen 0,79 und 0,97) und im Wesentlichen faktorenanalytisch reproduzierbar. In der Tendenz und sofern Vergleichbarkeit mit dem Instrument der Studie von Kuntze, Heinze und Reiss (2008) bestand, konnten die Ergebnisse jener Studie repliziert werden. Auch wenn die Lehrkräfte sich im Durchschnitt eher ablehnend zu behaviouristisch orientierten Überzeugungen zum Umgang mit Fehlern äußerten, war jedoch andererseits keine ausgeprägte Zustimmung bei Skalen wie beispielsweise „Rationalität hinter Fehlern“ zu verzeichnen.

Bei den Ergebnissen zum unterrichtssituationsbezogenen Erhebungsteil zeigten sich abhängig von der Situation unterschiedliche Einschätzungen. Aus Abb. 2 geht hervor, dass die Lehrkräfte sich vor allem bei den Situationen 1 und 3 Änderungen der Vorgehensweise der Lehrkräfte wünschten. Das Handeln der Lehrkraft in den Situationen 2 und 4, die erwarten lassen, dass die jeweiligen Fehler im Unterrichtsgespräch aufgearbeitet werden, wurde etwas stärker befürwortet.

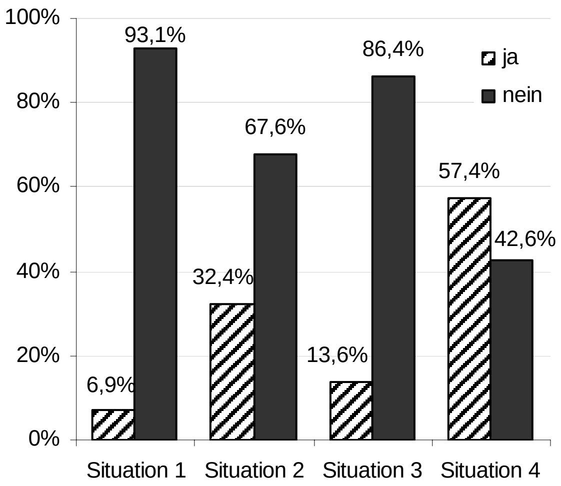


Abb. 2: Antworten der Lehrkräfte auf die Frage „Wären Sie genauso vorgegangen?“

Über die Frage, ob die Lehrkräfte genauso wie in den Unterrichtssituationen vorgegangen wären hinaus war von Interesse, welcher Art die von den Lehrkräften vorgeschlagenen Änderungen waren. Bei einer Codierung nach den Grobkategorien „Fehlerkorrektur“, „Fehlersuche“, „Fehlerverständnis“ und „Fehlerdiskussion“, die verschiedene, aufeinander aufbauende Stufen der Diskursivität beim Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch bezeichnen, zeigte sich beispielsweise (vgl. Abb. 3), dass in den Situationen 1 und 3 jeweils vorwiegend eine Fehlersuche oder ein Fehlerverständnis, jedoch eher nicht eine ausführliche Fehlerdiskussion zwischen mehreren Lernenden angestrebt wurde.

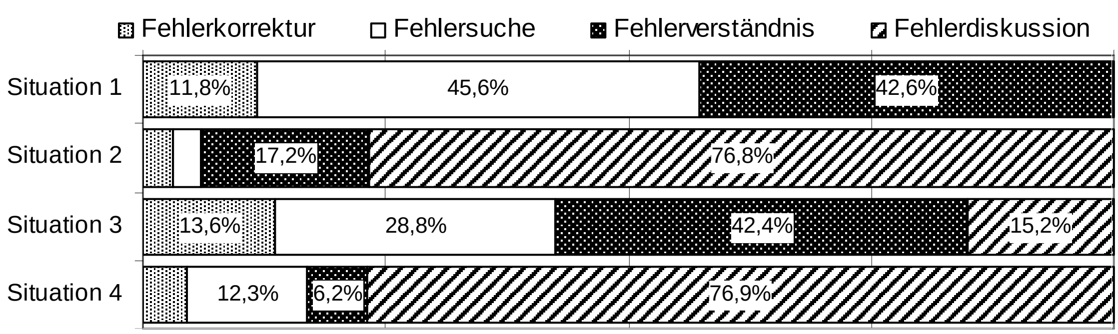


Abb. 3: Prozentuale Anteile der Grobkategorien des von den Lehrkräften vorgeschlagenen Vorgehens beim Auftreten des Schülerfehlers in der jeweiligen Unterrichtssituation

Auf der Basis der in Schmailzl (2008) betrachteten Codierungen zeigten sich lediglich punktuelle Zusammenhänge zwischen diesen situationsbezogenen und situationsübergreifenden Sichtweisen.

Diskussion

Die Ergebnisse sprechen insgesamt für eher Fehler akzeptierende und wenig behaviouristische übergreifende Sichtweisen der befragten Lehrkräfte. Bei dem situationsbezogenen Erhebungsteil zeigten sich unterschiedliche Einschätzungen der Lehrkräfte, die in der Grundtendenz die Ergebnisse zu situationsübergreifenden Überzeugungen unterstützen. Die Unterschiede zwischen den Äußerungen zu den Situationen 1 und 3 gegenüber den Situationen 2 und 4 in Abb. 3 können jedoch so interpretiert werden, dass die Lehrkräfte diskursive Fehleraufarbeitungen schätzten, jedoch bei Fehler übergehenden Situationen nicht durchweg deutlich machten, dass diese Situationen diskursiv aufgearbeitet werden sollten. Möglicherweise sahen die befragten Lehrkräfte nicht den vollen Umfang an Chancen, Lernangebote im Zusammenhang mit einem diskursiven Aufarbeiten von Fehlersituationen zu schaffen. Professionelles Wissen in diesem Bereich zu stärken, könnte ein Ansatz für entsprechende Fortbildungsprojekte sein.

Literatur

Barnett, C., & Sather, S. (1992). Using case discussions to promote changes in beliefs among mathematics teachers. [Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA].

Kuntze, S., Heinze, A. & Reiss, K. (2008). Vorstellungen von Mathematiklehrkräften zum Umgang mit Fehlern im Unterrichtsgespräch. Journal für Mathematik-Didaktik, 29(3/4), 199-222.

Kuntze, S., & Reiss, K. (2005). Situation-specific and generalized components of professional knowledge of mathematics teachers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Vol. 3 (pp. 225-232). Melbourne: University.

Leinhardt, G. & Greeno, J. (1986). The cognitive skill of teaching. Journal of Educational Psychology, 78, 75-95.

Oser, F., & Spychiger, M. (2005). Lernen ist schmerzhaft. Zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur. Weinheim: Beltz.

Schmailzl, S. (2008). Situationsbezogene und übergreifende Überzeugungen von Mathematiklehrkräften zum Umgang mit Schülerfehlern im Unterrichtsgespräch. [Staatsexamensarbeit]. LMU München.

Skinner, B. (1958). Teaching machines. Science, 128, 969-977.

Törner, G. (2002). Mathematical Beliefs – A Search for a Common Ground: Some Theoretical Considerations on Structuring Beliefs, some Research Questions, and some Phenomenological Observations. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? (pp. 73-94) Dordrecht: Kluwer.

Stanislaw SCHUKAJLOW, Kassel; Dominik LEISS, Frankfurt am Main/ Kassel; Werner BLUM, Kassel; Rudolf MESSNER, Kassel; Reinhard PEKRUN, München

Einstellungen und Überzeugungen von Lernenden zu Mathematikaufgaben mit und ohne Realitätsbezug

Seit langem wird seitens der Fachdidaktik gefordert, mehr realitätsbezogene Aufgaben im Unterricht zu behandeln. Hierdurch wird u.a. erhofft, den Zusammenhang zwischen dem Mathematikunterricht und dem „wahren" Leben für Schüler zu verdeutlichen sowie mathematikspezifische Motivation, Interesse, positive Emotionen sowie andere, nicht unmittelbar wissensbezogene Faktoren zu fördern. Die Bedeutung von Schüler-Einstellungen und -Überzeugungen (Beliefs) im Rahmen schulischen Lernens ist in der einschlägigen Literatur spätestens seit der Arbeit von McLeod (1992) unbestritten. Eine nachhaltige Leistungssteigerung bedarf demnach einer Förderung sowohl in affektiven als auch in kognitiven Bereichen.

In der vorliegenden Arbeit wird über Schüler-Einstellungen (Freude, Langeweile und Interesse) sowie Schüler-Beliefs (Valenz und Selbstwirksamkeitserwartungen) zu den folgenden drei Aufgabentypen berichtet:[1]

- Innermathematische Aufgaben
- „Eingekleidete" Textaufgaben
- Modellierungsaufgaben

Aufgaben mit und ohne Realitätsbezug

Eine solche Unterteilung von Aufgaben in drei Typen findet sich insbesondere in der Literatur zu realitätsbezogenen Mathematikaufgaben (siehe u.a. Blum et al. 2007). Dabei kann die Zuordnung vereinfacht wie folgt beschrieben werden:

- zu 1: Bei der Gruppe der innermathematischen Aufgaben fehlt der Realitätsbezug vollständig.
- zu 2: Bei der Bearbeitung „eingekleideter" Textaufgaben wird zusätzlich zum mathematischen Arbeiten eine elementare Übersetzung zwischen Realität und Mathematik gefordert. Die Anzahl und Qualität der realitätsbezogenen Aktivitäten sind jedoch hierbei sehr eingeschränkt. Insbesondere ist die Strukturierung, Präzi-

[1] Eine ausführliche Beschreibung der Untersuchung, ihrer theoretischen Hintergründe und von Ergebnissen erfolgt an anderer Stelle.

sierung und Vereinfachung bei der Konstruktion eines Realmodells bei diesem Aufgabentyp trivial. Man kann sogar sagen, dass das Realmodell bei diesen Aufgaben in der Aufgabenstellung im Wesentlichen „mitgeliefert“ wird.

– zu 3: Unter Modellierungsaufgaben sollen solche Problemstellungen verstanden werden, bei denen alle Schritte des Modellierungskreislaufs in nicht trivialer Weise durchlaufen werden müssen: Verstehen, Vereinfachen/Strukturieren, Mathematisieren, mathematisch Arbeiten, Interpretieren und Validieren (vgl. den siebenschrittigen Modellierungskreislauf bei Blum & Leiss 2005).

Messinstrumente und Design der Studie

Die vorliegende Untersuchung ist in das DISUM-Projekt eingebettet. Aufgaben zu allen drei genannten Aufgabengruppen wurden konstruiert und dann Realschülern der Jahrgangsstufe 9 vorgelegt und es wurde deren Freude, Langeweile, Interesse, Valenz und Selbstwirksamkeitserwartungen bei diesen Aufgaben abgefragt. Dabei waren die Schüler dazu aufgefordert die Aufgaben genau durchzulesen und, ohne sie zu lösen, auf einer Skala mit fünf Antwortmöglichkeiten anzugeben, ob die aufgeführte Aussage auf sie zutrifft. Eine solche Aussage zur Schüler-Emotion Freude war z.B. „Die Bearbeitung der abgebildeten Aufgabe würde mir Spaß machen“. Die Reliabilität der konstruierten Skalen lag zwischen .74 und .91.

Das so entwickelte Messinstrument wurde im Pre-, Post- und FollowUp-Test der DISUM-Hauptstudie eingesetzt (zum Design dieser Studie und zu ihren Hauptergebnissen siehe Leiss et al. 2008). Die zugrundeliegende Forschungsfrage war, wie eine zehnstündige Unterrichtseinheit mit Modellierungsaufgaben auf die Modellierungskompetenz sowie auf Einstellungen und Überzeugungen der Realschüler wirkt. Während der Unterrichtseinheit wurde eine Hälfte der Klassen (7 Klassen á 16 Schüler) mit Modellierungsaufgaben zu den Themen „Satz des Pythagoras“ und „Lineare Funktionen“ gemäß einer eher lehrerzentrierten („direktiven“) Lehr-Lernform unterrichtet. In der anderen Hälfte der Klassen wurden dieselben Modellierungsaufgaben selbständigkeitsorientiert („operativ-strategisch“) in 4er Gruppen gemäß einem festgelegten Kooperationsskript mit anschließenden Reflexionsphasen im Plenum behandelt.

Forschungsfragen und Ergebnisse

Die erste Fragestellung der vorliegenden Teilstudie bezog sich auf den Pretest und sollte zeigen, ob sich Schüler-Einstellungen und -Überzeugungen bei innermathematischen Aufgaben, „eingekleideten“ Textaufgaben und Modellierungsaufgaben überhaupt unterscheiden.

Die Analyse dieser Befragung weist darauf hin, dass die Art der Aufgaben keinen signifikanten Einfluss auf Schüler-Einstellungen und -Beliefs hat. Das bedeutet z.B., dass alleine die Auswahl einer Modellierungsaufgabe bei den von Lernenden noch keinesfalls positive Emotionen hervorruft (vgl. auch Pekrun et al. 2007; Frenzel, Julien & Pekrun 2006).

Die zweite Forschungsfrage war, welchen Einfluss eine Einheit mit Modellierungsaufgaben auf aufgabenbezogene Schüler-Einstellungen und -Überzeugungen hat. Kann man nach einer 10stündigen Unterrichtseinheit eine Veränderung der Einstellungen/ Überzeugungen in Bezug auf die drei verschiedenen Aufgabentypen erwarten? Gibt es differentielle, aufgabenspezifische Effekte?

Die Ergebnisse deuten auf die Verbesserung von Einstellungen und Überzeugungen der Schüler zu allen drei Aufgabentypen hin. Somit fördert die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben im Unterricht, so wie sie im DISUM-Projekt operationalisiert wurde, Freude, Langeweile, Interesse und Selbstwirksamkeitserwartungen nicht nur bei Modellierungsaufgaben, sondern bei allen Aufgabentypen. Lediglich die der Bearbeitung zugemessene Bedeutung (Valenz) für die Schüler ist unverändert geblieben und bedarf vermutlich einer speziellen längerfristigen Thematisierung im Unterricht.

Bei der dritten Forschungsfrage sollte geklärt werden, welche Art des Unterrichts mit Modellierungsaufgaben aufgabenbezogene Schüler-Einstellungen und -Beliefs in welcher Weise beeinflusst.

Es zeigte sich, dass sich aufgabenbezogene Schüleremotionen und -kognitionen im operativ-strategischer Unterricht positiver entwickelt haben als im direktiven Unterricht. Besonders deutlich waren die Unterschiede bei den Modellierungsaufgaben. Insofern erscheint ein selbständigkeitsorientierter Unterricht besonders geeignet, um Schüler-Emotionen, -Interesse und -Überzeugungen zu verbessern. Unklar bleibt dabei allerdings, ob mit einem ähnlichen Anstieg auch bei innermathematischen und eingekleideten Aufgaben in einer entsprechend aufgabentypenfokussierten Lernumgebung zu rechnen wäre.

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Studie wurden neue Messinstrumente entwickelt, die durch ihre Veränderungssensitivität gekennzeichnet sind. Solche Instrumente sind hilfreich bei der Messung von Veränderungen der Einstellungen und Überzeugungen der Schüler im Rahmen von Interventionsstudien.

Das wesentliche Ergebnis der vorgestellten Studie sind vergleichbare Schüler-Emotionen, -Interesse und -Überzeugungen zu Aufgaben mit und ohne Realitätsbezug, die fast alle durch eine selbständigkeitsorientierte unterrichtliche Behandlung von Modellierungsaufgaben verbessert werden konnten. Dies sollte Lehrpersonen ermutigen, Modellierungsaufgaben häufiger im selbständigkeitsorientierten Unterricht einzusetzen. Dadurch können neben Leistungsfortschritten (Leiss & Blum 2007; Schukajlow et al. 2009 in press) auch Verbesserungen von Schüler-Emotionen, -Interesse und -Überzeugungen erreicht werden.

Literatur

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study.* New York: Springer.

Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*(128), 18-22.

Frenzel, A. C., Julien, S. & Pekrun, R. (2006). Thomas hat 60 Euro gespart.. oder 1/4x+60=x. Freude und Angst beim Bearbeiten von Text- und Rechenaufgaben. *mathematik lehren*, 57-59.

Leiss, D. & Blum, W. (2007). Modellierungskompetenz – Vermitteln, Messen & Erklären. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (pp. 370-373). Hildesheim: Franzbecker.

Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S. & Pekrun, R. (2008). Modellieren lehren und lernen in der Realschule. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 370-373). Münster: WTM Verlag.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan.

Pekrun, R., Vom Hofe, R., Blum, W., Goetz, T., Wartha, S., Frenzel, A. C., et al. (2007). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I. In M. Prenzel & L. Allolio-Naecke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualitaet von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (pp. 21 - 52). Münster: Waxmann.

Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., Pekrun, R., Leiss, D. & Müller, M. (2009 in press). Unterrichtsformen, Emotionen und Anstrengung als Prädiktoren von Schüler-Leistungen bei anspruchsvollen mathematischen Modellierungsaufgaben. *Unterrichtswissenschaft*.

Andreas SCHULZ, Freiburg

Führen Bildungsstandards zu Unterrichtsentwicklung? Ausgewählte Ergebnisse einer Studie im Mixed-Method-Design

Das Projekt ‚visions de math' (Projektleitung: Prof. Dr. Timo Leuders, PH Freiburg) evaluiert in Kooperation mit dem Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle Luxembourg die Einführung kompetenzorientierter Bildungsstandards seit 2006 im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I in Luxemburg. Um zu validen und reliablen Aussagen über den komplexen Untersuchungsgegenstand zu kommen, werden gezielt quantitative und qualitative Erhebungs- und Auswertungsmethoden kombiniert. Über die Auswertung von Gruppendiskussionen gelang es teils widersprüchliche Herausforderungen zu identifizieren, denen Lehrkräfte bei einer Umsetzung kompetenzorientierten Mathematikunterrichts gerecht werden müssen (Schulz, 2009). Um zu beantworten, in wie weit Ergebnisorientierung als Ansatz der Systemsteuerung geeignet sein kann, um Innovationen im Mathematikunterricht auf Lehrerebene anzuregen, wurden Innovationsanstrengungen von vier luxemburgischen Mathematiklehrern untersucht. Drei der vier 2006 und 2008 interviewten Lehrer organisieren die Zusammenarbeit ihres Fachkollegiums bei der Umsetzung der 2006 eingeführten Bildungsstandards. Auf der Grundlage dieser längsschnittlichen Befunde wurde ein Modell zur Implementierung von Bildungsstandards entwickelt (Abb.1).

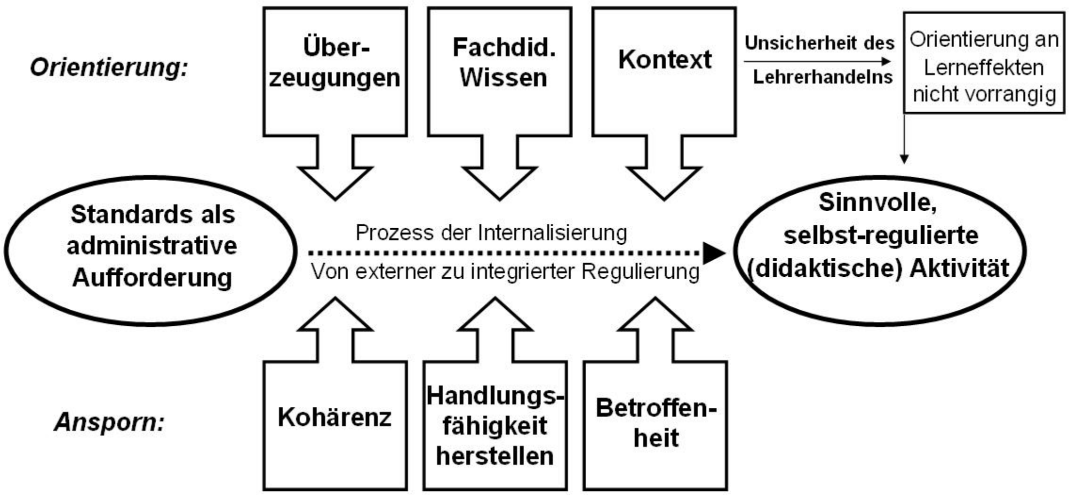


Abb.1: Umsetzung von Bildungsstandards als Internalisierungsprozess

Teilaspekte des Modells wurden anschließend an parallel zu den Interviews in der Luxemburger Lehrerschaft erhobenen quantitativen Daten überprüft. Dabei wurden wesentliche Aussagen des Modells bestätigt und ein tieferes Verständnis der Zusammenhänge ermöglicht.

Interviewauswertung: Weiterentwicklung der thematisch-sequenziellen Analyse

Für die Auswertung der Interviews wurde die zuvor für die Auswertung von Gruppendiskussionen entwickelte thematisch-sequenzielle Analyse (Schulz, 2009) abgewandelt und an das spezielle Forschungsinteresse angepasst. Auf Grundlage der vollständig transkribierten Interviews wurden in einem ersten Schritt mit deduktiv konstruierten Kategorien komplette Textpassagen gesammelt und in Stichpunkten zusammengefasst. Mit Hilfe dieser ersten Übersicht wurden zentrale Themen der vier Einzellehrer identifiziert und in einem zweiten Schritt hierfür relevante Passagen gesammelt und erneut in Stichpunkten zusammengefasst. In einem dritten Schritt wurden übergeordnete gemeinsame Kategorien zur Sortierung der Passagen herausgearbeitet. Unter Rückgriff auf die thematische Entwicklung in den nunmehr thematisch geordneten Textpassagen wurden Fließtextzusammenfassungen für jede übergeordnete Kategorie erstellt. Daraus wurde in einem vierten Schritt ein Gesamtbild pro Lehrer zusammengefügt und derart die erfassten Veränderungen mit Einstellungen, Bedürfnissen und Sichtweisen der Lehrer in Zusammenhang gebracht.

Umsetzung von Bildungsstandards als Internalisierungsprozess

Zwei Befunden der Interviewauswertung kommt eine zentrale Bedeutung zu. Zum einen wurde deutlich, dass die verschiedenartigen Innovationsansätze der vier Lehrer langfristige und individuelle Anstrengungen darstellen, die im Einklang mit persönlichen Einstellungen und Sichtweisen zu Unterricht und dem Lernen von Mathematik stehen. Wiederholt dringt das Anliegen der Lehrer nach Handlungsfähigkeit durch, sei es beispielsweise hinsichtlich der Frage, was neue Kompetenzbereiche wie das Modellieren für die Unterrichtspraxis bedeuten, oder wie Kommunikation im Lehrerkollegium angeregt bzw. verbessert werden könnte. Dieser erste Befundkomplex führte dazu, die Innovationsansätze der vier Lehrer als Internalisierungsprozess zu beschreiben und auf die Selbstbestimmungstheorie von Deci & Ryan (2000) Bezug zu nehmen. Die Einführung von Bildungsstandards wirkt demnach zunächst als externe und vor allem *unkonkrete* Handlungsaufforderung der Administration. Zwei Jahre nach Einführung der Bildungsstandards stehen die Innovationsansätze im Einklang mit bewussten Werten und Einstellungen der Lehrer und sind von persönlicher Bedeutung. Dies sind nach Deci & Ryan (2000) Merkmale einer integrierten Verhaltensregulation. Zudem drücken die Lehrer Zufriedenheit mit und persönliches Interesse an ihren Innovationsansätzen aus, was darüber hinaus sogar auf das Vorhandensein von intrinsischer Motivation und Verhaltensregulierung hinweist.

Als zweiter zentraler Befund hat sich herausgestellt, dass die erfassten Innovationsansätze von den Lehrern nicht – wie im Paradigma der Ergebnisorientierung intendiert – mit einer Überprüfung von Unterrichtseffekten begründet werden. Vielmehr werden Innovationsansätze als sinnvolle (didaktische) Aktivitäten beschrieben. Eine Erklärung hierfür kann die prinzipielle Unsicherheit von Lehrerhandeln (Helsing, 2007) liefern: Lernprozesse unterliegen nur teilweise der Kontrolle der Lehrperson. Eine zu starke Ausrichtung der Lehrkräfte auf die Lernerfolge der Lernenden würde die Beeinflussbarkeit der eigenen Zufriedenheit und die Wahrscheinlichkeit von Kompetenzerfahrungen stark einschränken. Diese zentralen Befunde fanden maßgeblich Eingang in die Entwicklung des Modells (Abb.1). Im Folgenden wird anhand von 2006 und 2008 in Luxemburg durchgeführten quantitativen Fragebogenstudien überprüft, in wie weit auch diese Daten die Aussage stützen, dass Ergebnisorientierung bei Lehrkräften nicht als primäre Orientierung für Innovationsansätze wirksam wird.

Triangulierung und komplementäre Ergänzung des Modells durch quantitative Parallelbefunde

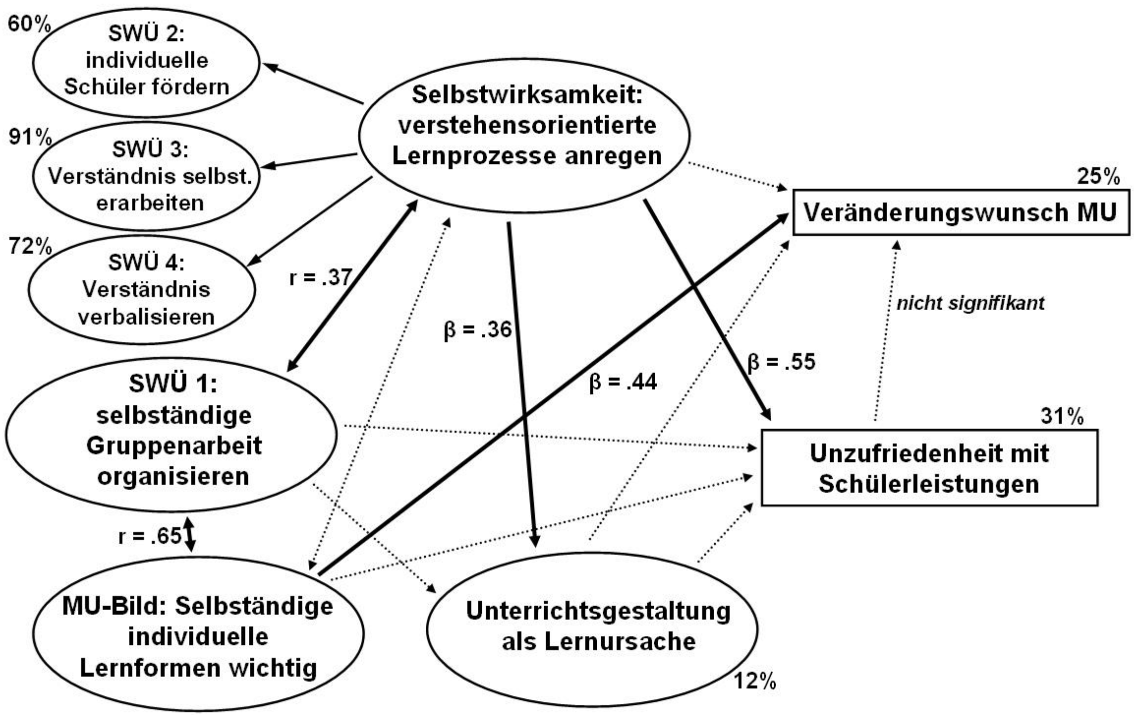


Abb.2: „Wunsch nach Veränderung des Mathematikunterrichts 2006“

2006 beteiligten sich in Luxemburg 123 Mathematiklehrer an einer Fragebogenstudie. Über ein Strukturgleichungsmodell ($p(\chi^2) = .056$; CFI = .952;

TLI = .945; RMSEA = .034) wurden 25% Varianz der Variable „Wunsch nach einer Veränderung des Mathematikunterrichts“ erklärt (Abb.2).

Gemäß dem Ansatz der Ergebnisorientierung müsste eine „Unzufriedenheit mit Schülerleistungen“ mit einem „Wunsch nach Veränderung des Mathematikunterrichts“ einhergehen. Im Modell ergab sich hier jedoch kein signifikanter Zusammenhang. Zudem steht die „Selbstwirksamkeitsüberzeugung, bei Schülern verstehensbasierte Lernprozesse anregen zu können“, in einem positiven Zusammenhang (standardisiertes $\beta = .55$) mit der „Unzufriedenheit mit Schülerleistungen“. Demnach betrachten insbesondere Lehrkräfte mit höherem Vertrauen in die eigenen Unterrichtsfähigkeiten die Leistungen ihrer Schüler kritisch.

2008 wurden 46 luxemburgische Mathematiklehrer zum Zusammenhang zwischen ausgewählten Bereichen möglicher Unterrichtsveränderung und Kontexten des Unterrichtens befragt. Hier ergaben sich folgende signifikante Korrelationen zwischen der Skala (selbstberichtete) „Zunahme verstehensbasierter Aufgaben im eigenen Unterricht“ und den Skalen „Orientierung an Bildungsstandards“ (r = .55*), „Mittelfristige Ziele für eigene Unterrichtsentwicklung“ (r = .51*), „Gewünschter Ausbau der Lehrerkooperation“ (r = .30*) und „Fertigkeitstraining als Unterrichtsziel“ (r = -.54**). Dies spricht für die Aussage des vorgestellten Modells, dass konkrete Innovationsansätze (am Beispiel einer veränderten Aufgabenkultur) bewusst verfolgt werden und in Luxemburg im Zusammenhang mit der Einführung von Bildungsstandards stehen. Darüber hinaus korreliert im gleichen Datensatz die Skala „Unzufriedenheit mit Schülerleistungen“ mit den Skalen „Disziplinschwierigkeiten“ (r = .39**) positiv bzw. „Mittelfristige Ziele für eigene Unterrichtsentwicklung“ (r = -.33*) sogar negativ. Auch dieser Befund spricht dafür, Zufriedenheit oder Unzufriedenheit mit Schülerleistungen eher als Effekt oder Kovariable aktiver Innovationsbemühungen anzusehen, und nicht als Anlass für Innovationsansätze.

Literatur

Helsing, D. (2007). Regarding Uncertainty in Teachers and Teaching. *Teaching and Teacher Education, 23*(8), 1317–1333.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-Determination Theory and the Facilitation of Intrinsic Motivation, Social Development, and Well-Being. *American Psychologist*, (1), 68–78.

Schulz, A. (2009). Competence-orientation in Literature and in Teachers' Perception: Implications for Educational Quality Management and Teacher Education. In J. Maasz & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education. New Research Results* (pp. 99–117). Rotterdam: Sense Publishers.

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Räumliches Analogisieren ebener Geometrie

Die Analogiebildung ist eine effektive und weitreichende Methode der Erkenntnisgewinnung. Neben anderen heuristischen Methoden für das Problemlösen wird deshalb ihre explizite Vermittlung im Mathematikunterricht immer wieder gefordert, obwohl sie in den so genannten Kompetenzkatalogen aktueller Bildungspläne nicht mehr Erwähnung findet. Die an Analogien reiche Elementargeometrie, insbesondere die zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie, eignen sich besonders wegen ihrer Anschaulichkeit als Übungsfeld für das Analogisieren, das Anwenden ebener Geometrie und die Raumvorstellung in den Sekundarstufen. Die Analogisierung von ebener zu räumlicher Geometrie bietet einen organischen Weg der Verräumlichung ebener Geometrie und der Vernetzung ebener mit räumlicher Geometrie. Analogisierung im Verbund mit der induktiven Methode führt zur Bildung raumgeometrischer Begriffe, Aussagen und Verfahren. Mit den Konstruktions- und Visualisierungsmöglichkeiten, die interaktive dynamische Raumgeometrie-Systeme wie Cabri 3D bieten, kann man die räumliche Analogisierung ebener Geometrie konstruktiv praktizieren. Gegenstände des räumlichen Analogisierens ebener Geometrie sind Begriffe, Konstruktionen, Berechnungen, Sätze und Beweise. – Aus Platzgründen können wir hier nur einen Ausschnitt aus dem reichhaltigen Thema bieten und müssen auf die angegebene Literatur verweisen.

1. Direkt verräumlichendes Analogisieren mittels Konstruktion

Viele ebene Konfigurationen gestatten eine räumliche Analogisierung, die direkt auf ihnen aufsetzt. Dazu konstruiert man, wie von den dynamischen 2D-Geometriesystemen her gewohnt, in einer zur Bildschirmebene parallelen Ebene eine ebene Konfiguration (vgl. Abbildung 1 mit zwölf solchen Konfigurationsbeispielen), dreht die Ebene mit dieser Konfiguration in den (virtuellen) Raum hinein und konstruiert auf dieser mittels analoger räumlicher Konstruktionen eine räumlich analoge Konfiguration. Am Beispiel der ersten Konstruktion Euklids sei das verdeutlicht: Man dreht die ebene Konfiguration (Abb. 2a) in den Raum. Anstelle der Grundlinie fungiert jetzt als Grundfläche das gleichseitige Dreieck. Um die Eckpunkte dieses Dreiecks werden Kugeln mit den Radien der Dreiecksseiten konstruiert, die einander in Kreisen schneiden (Abb. 2b), – analog dem Kreisschnittpunkt in der Ebene. Der Schnittpunkt der drei Schnittkreise bildet mit dem Basisdreieck ein Tetraeder (Abb. 2c), dessen Gleichkantigkeit analog der Gleichseitigkeit des Dreiecks in der Ebene per Konstruktion nachgewiesen ist.

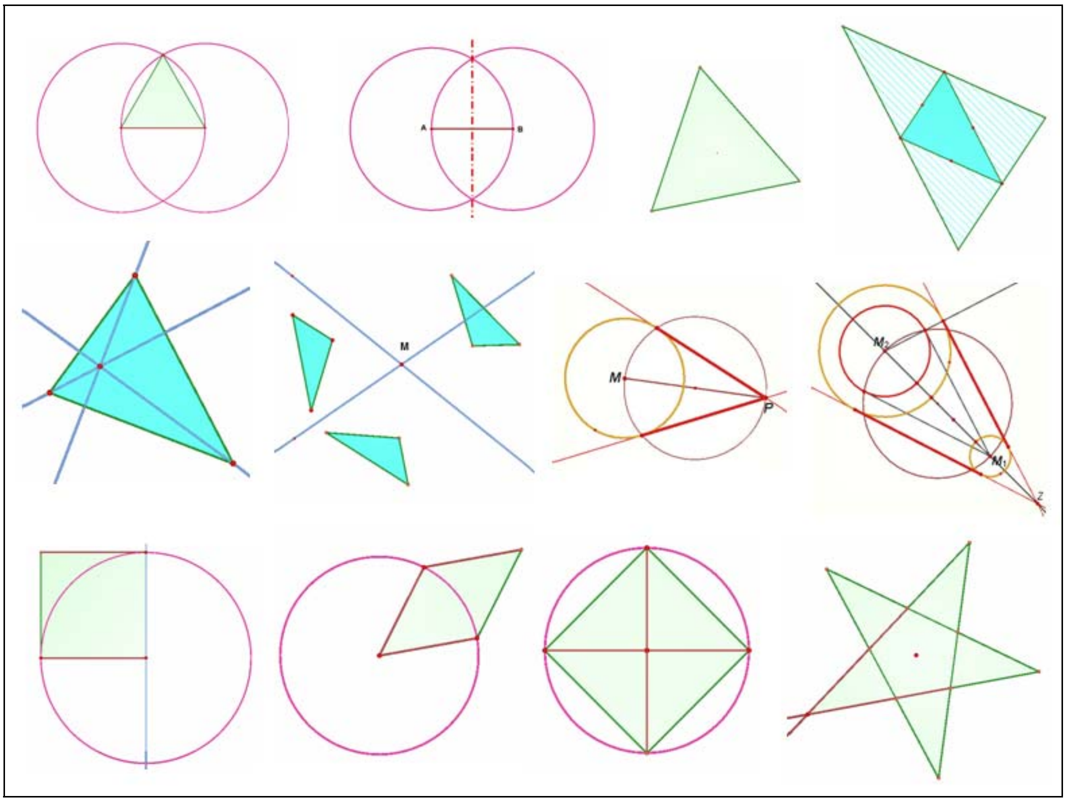


Abbildung 1

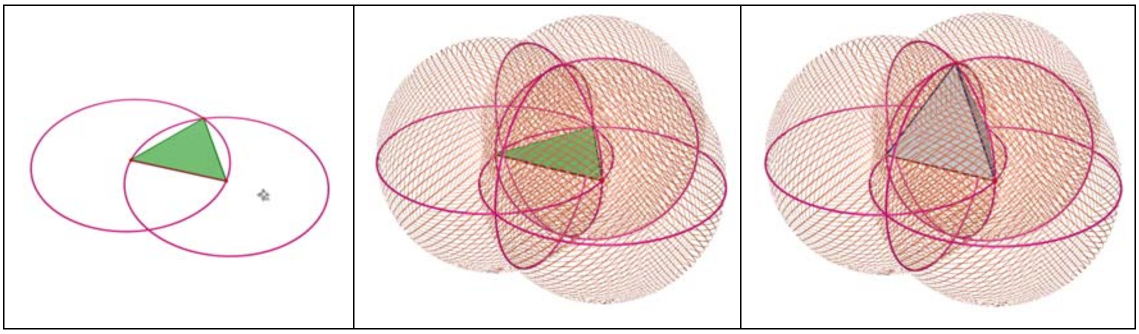


Abbildung 2a-c

2. Satz- und Beweisanalogisierung

Folgende Methode zur Satz- und Beweisanalogisierung empfiehlt sich:
Satzfindung mittels Analogiebildung: Konstruiere eine zur ebenen Konfiguration, die den betreffenden ebenen Satz konkretisiert, eine räumlich analoge. Beachte dabei, dass es mehrere Möglichkeiten der Analogisierung geben kann. Überprüfe die raumgeometrische Aussage gegebenenfalls anhand einer interaktiven Messung/Berechnung.
Beweisfindung mittels Analogiebildung: Versuche einen Beweis des entsprechenden Satzes der ebenen Geometrie räumlich zu analogisieren (verwende dabei die bei der Satzfindung erstellte Konstruktion als Beweisfigur, die von allen Seiten betrachtet werden kann). Und/oder verwende den ana-

logen Satz der ebenen Geometrie als Beweismittel, um einen Beweis für die räumliche Aussage zu finden. – Die Methode sei an folgendem Satz mit Beweis realisiert: Die Winkelhalbierende eines Dreiecks schneidet die Gegenseite im Verhältnis der den Winkel bildenden Dreiecksseiten (Abb. 3).

Behauptung: Die Winkelhalbierende eines Innenwinkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der Seiten, die Schenkel des Innenwinkels sind: |TA|/|TB| = |AC|/|BC| für die Halbierende w des Winkels mit dem Scheitel C.

Beweis: Da T nach Voraussetzung abstandsgleich zu den Winkelschenkeln AC, BC, gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke BCT und ACT:
|ACT|=|AC|*h'/2=|TA|*h/2,
|BCT|=|BC|*h'/2=|TB|*h/2.
Division liefert: |TA|/|TB| = |AC|/|BC|.

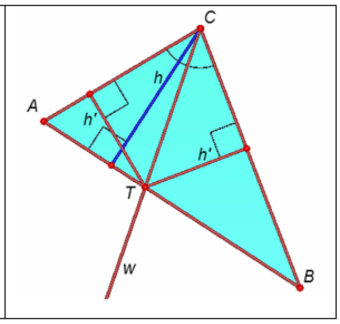
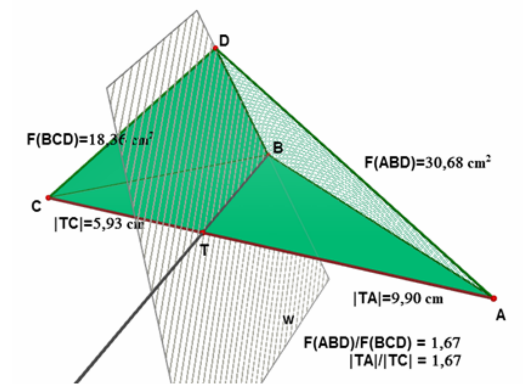
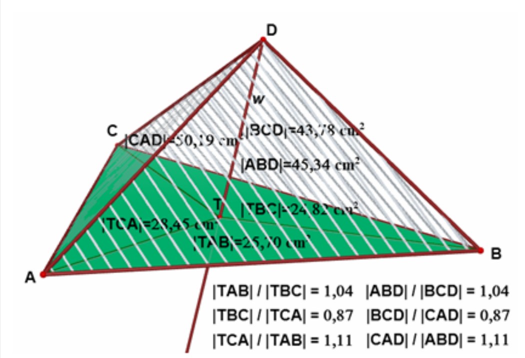


Abbildung 3



Behauptung: Die Halbierende des Winkels zwischen zwei Seitenflächen eines Tetraeders ABCD teilt die Gegenkante im Verhältnis dieser Seitenflächen. Für die Seitenflächen ABD, BCD ist also |TA|/|TC| = F(ABD)/F(BCD), wobei T Schnittpunkt der Winkelhalbierende zwischen Dreieck ABD und Dreieck BCD mit der Gegenkante AC zur Kante BD.



Behauptung: Die zu den Seitenflächen eines Tetraeders abstandsgleiche Gerade teilt die Gegenseitenfläche im Verhältnis dieser Seitenflächen. Für die abstandsgleiche Gerade w durch die Ecke D also: |TAB|/|TBC|/|TCA|=|ABD|/|BCD|/|CAD|.

Abbildung 4a (1. Analogisierung: Satz) Abbildung 4b (2. Analogisierung: Satz)

Beweis: Da T nach Voraussetzung abstandsgleich zu den Schenkelflächen ABD und CBD, gilt für die Rauminhalte der Tetraeder ABDT und CBDT: V(ABDT)=F(ABD|)·h'/3, V(CBDT)=F(CBD)·h'/3. Andererseits gilt für die Volumina der Tetraeder ABDT und CBDT auch: V(ABDT)=F(TAD)·h/3, V(CBDT)=F(TCD)·h/3. Für die Flächeninhalte der höhengleichen Dreiecke TAD und TCD gilt: F(TAD)=|TA|·h''/2 und F(TCD)=|TC|·h''/2. Entsprechendes Gleichsetzen und Dividieren liefert: F(ABD)/F(CBD)= |TA|/|TC|.

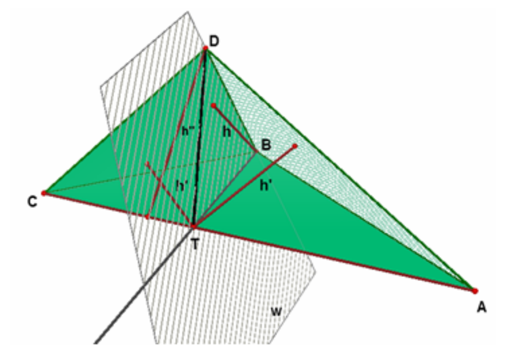


Abbildung 5a (1. Analogisierung: Beweis)

Beweis: Da T nach Voraussetzung gleichen Abstand zu den Seitenflächen ABD, BCD, CAD hat, gilt für die Rauminhalte der Teiltetraeder ABDT, BCDT, CADT:
|ABDT|=|ABD|*h'/3=|TAB|*h/3, |BCDT|=|BCD|*h'/3=|TBC|*h/3, |CADT|=|CAD|*h'/3=|TCA|*h/3.
Mittels Division folgt daraus |TAB|/|TBC|=|ABD|/|BCD|, |TBC|/|TCA|=|BCD|/|CAD|, |TCA|/|TAB|=|CAD|/|ABD|. Kurz: |TAB|/|TBC|/|TCA|=|ABD|/|BCD|/|CAD|.

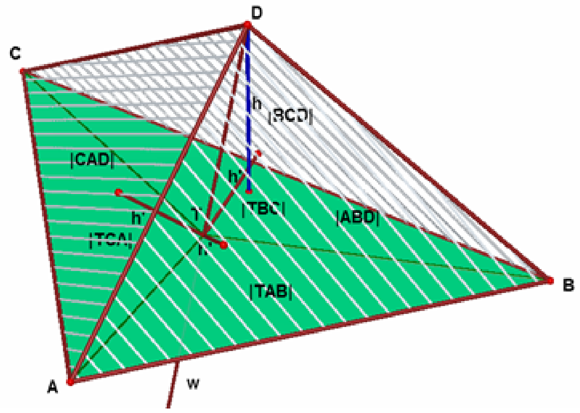


Abbildung 5b (2. Analogisierung: Beweis)

Die Abbildungen 4a/4b zeigen die zwei analogen räumlichen Konfigurationen mit Mess- und Berechnungsergebnissen, die zur Formulierung der analogen räumlichen Aussagen führen bzw. diese experimentell bestätigen. Die Analogisierungen des geeigneten Beweises für den ebenen Satz liefern die Begründungen für die räumlichen Aussagen (Abb. 5a/4b), die nicht nur die gefundene Erkenntnis sichert, sondern uns vor allem Einsicht in den geometrischen Sachverhalt vermittelt.

3. Schlussbemerkungen

Das räumliche Analogisieren ebener Geometrie mit interaktiver Computerunterstützung ist ein eindrucksvolles Beispiel für den *„didaktischen Mehrwert“* der Computernutzung im Geometrie-Unterricht. Diese Art des Analogisierens eröffnet für Schüler/-innen, Studenten/-innen und Lehrer/-innen ein weites Feld raumgeometrischen Arbeitens.
Das Raumgeometrie-Curriculum für Allgemeinbildende Schulen ist unter dem Eindruck interaktiver und intuitiver Raumgeometrie-Werkzeuge, die den Zugang zum Reichtum an raumgeometrischem Wissen konstruierend öffnen, zu reformieren.

Literatur

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004-2007): Cabri 3D 2.1 (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann) zu beziehen z. B. von www.cotec.de

Schumann, H.: „Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum“, Hildesheim und Berlin: Franzbecker, 2007 – und die dort zum Thema angegebene Literatur.

Fritz SCHWEIGER, Salzburg

Ordnen – eine fundamentale Idee

Ordnung herstellen, den Überblick behalten. Dies ist eine im Alltag tief verankerte Tätigkeit. In der Geschichte der Mathematik lässt sich zeigen, dass schon sehr früh versucht wurde, eine Klassifikation des Materials anzustreben. Weiters ist Ordnen in allen Teilgebieten der Mathematik und auf verschiedenen Niveaus aufzufinden. Somit erfüllt Ordnen die Kriterien für eine fundamentale Idee (Schweiger 2006).

Ordnen ist verbunden mit benachbarten Ideen: Finden und Entdecken von Prototypen, Bereitstellen von guten Beispielen und markanten Gegenbeispielen, Klassifikationen (nach Merkmalen) und Aufstellen von Normalformen.

Der Begriff Prototyp meint zunächst eine Kategorie, die entwicklungspsychologisch und sprachlich verankert ist. Prototypen sind relevant für die Begriffsbildung als markante Muster. Die Bereitstellung interessanter und auf das zentrale Eigenschaften der Begriffe weisender Prototypen ist eine didaktische Aufgabe. Prototypen sind auch sprachlich bedeutsam (von Sprache zu Sprache verschieden: "Maus" und "Fledermaus", aber "mouse" und "bat" versus "Fisch" und "Qualle", aber "fish" und "jelly fish").

Das Kind erfährt Prototypen aus Begegnungen, ohne dass eine (bewusste) Selektion distinktiver oder kontrastierender Merkmale auftritt. Hier bietet die Umwelt reichliches Material. Es gibt Beispiele, wo der Prototyp zugleich das einzige Exemplar ist: die Sonne, der Mond, die Erde. Bemerkenswert ist, dass Strukturen, die kategorischen Axiomensystemen entsprechen, genetisch früh sind: die Zahlbereiche sind älter als Gruppen oder Ringe! Für den Einstieg in die Mathematik bieten sich Zahlen und Formen an. Das Zählen birgt schon den Ordnungsaspekt in sich, denn die Zahlen werden (schon beim Spracherwerb) als Reihe geordnet.

Geometrische Formen sind eher diffus. Hier bietet sich der Umgang mit geeigneten Spielen an, wobei auch die Farbe oder Größe als sekundärer Ordnungsfaktor verwendet werden kann (z. B. Ordnen von roten Kreisen und blauen Quadraten).

Die Bereitstellung der Prototypen ist eng verbunden mit der Auswahl von Abbildungen und Beispielen. Erst auf der Stufe erfasster Ordnungsprinzipien ist die Bereitstellung von Gegenbeispielen sinnvoll.

Beruht die Erfassung von Prototypen eher auf intuitivem Wahrnehmen ("Dies ist ein Hund. Dies ist eine Katze"), ist das Klassifizieren mit der Angabe von Kriterien verbunden. Dies führt gelegentlich zu Paradoxien. Quadrat und Rechteck werden als verschiedene Prototypen empfunden (wie auch Kreis und Ellipse), aber nach den Merkmalen *Viereck mit vier rechten Winkeln* ist ein Quadrat ein spezielles Rechteck. Im Alltag wird die Verschiedenheit der Seitenlänge als prototypisch für das Rechteck empfunden.

Die intuitive Mitnahme von Merkmalen erschwert besonders die Begriffsbildung in der Analysis. Eine *stetige* Kurve sollte in jedem Punkt eine Tangente besitzen (also *differenzierbar* sein). Selbstverständlich bietet sich die Funktion $f(x) = |x|$ als Gegenbeispiel an, aber den Knick zu zeichnen, erfordert eine jähe Richtungsänderung oder eine Unterbrechung, die der Intuition von Stetigkeit widerspricht. Der Unterschied der Funktionen

$$f(x) = 0, x \le 0, \; f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, x \ge 0$$

und

$$g(x) = 0, g(x) = x^3, \; x \ge 0$$

ist bei einer Spielzeugeisenbahn bei genauem Hinsehen (wenn ein Zug fährt) zu sehen, aber erst durch den Einfluss der *Krümmung* auf das dynamische Verhalten erklärbar.

Es erfordert ebenso eine didaktische Sorgfalt um die Begriffe *Stetigkeit* und *Stabilität* zu trennen: Die Eingangsvariablen müssen geeignet kontrolliert werden, um das Ziel nicht zu verlieren bzw. die Eingangsvariablen sind qualitativ eher unerheblich (Beispiel aus der Hochschuldidaktik: Die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + ay' + by = 0$ sind in Abhängigkeit von $y(0)$ und $y'(0)$ und der Lage der Eigenwerte zu untersuchen).

Normalformen sind als standardisierte Prototypen anzusehen. Exponentialfunktionen besitzen zwei prototypische Formen: $y = e^x$ (exponentielles Wachstum) und $y = e^{-x}$ (exponentielle Abnahme). Dazu gehören Merkmale, die eine übersichtliche Klassifikation gestatten und (im Hintergrund) ein Repertoire von geeigneten Abbildungen. So ist die Koordinatentransformation

$$\bar{x} = \alpha x, \alpha > 0$$
$$\bar{y} = \beta y, \beta > 0$$

Die Abbildung, welche die allgemeine Form $y = y_0 e^{\lambda x}, y_0 > 0$, mittels $\alpha = |\lambda|$ und $\beta = \frac{1}{y_0}$ in die beiden oben genannten Formen überführt.

In vielen Fällen wird auf die Bereitstellung der passenden Abbildungen verzichtet! Zum Standardprogramm jeder linearen Algebra gehört allerdings der Hinweis, dass Vektorräume mit gleichem Grundkörper und gleichmächtiger Basis isomorph sind.

So gesehen ist der R^d nicht nur der Prototyp, sondern auch die Normalform eines *d*-dimensionalen Vektorraums. In vielen Fällen ist die Isomorphie nicht schwer zu erkennen, aber die Prototypen schauen sich auf den ersten Blick nicht ähnlich. Die additive Restklassengruppe modulo *m* ist zur Gruppe der *m*-ten Einheitswurzeln (der Lösungen von $z^m = 1$ im Körper der komplexen Zahlen) isomorph.

Man kann auch vertraute Fragestellungen durch Hinweis auf andere Merkmale variieren. Als Normalformen der Kegelschnitte sind etwa die drei Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 1, x^2 - y^2 = 1, x^2 = y$$

brauchbar. Die Ellipse ist einteilig und beschränkt, die Hyperbel ist zweiteilig und unbeschränkt, die Parabel ist einteilig und unbeschränkt. Es fehlt ein Kegelschnitt, der zweiteilig und beschränkt ist!

Einige Bemerkungen zur Arbeit von Tsamir et al. 2008 seien zum Abschluss angefügt. Es geht um den Begriff des Dreiecks, wobei (unausgesprochen) der Begriff des Dreiecks der euklidischen Geometrie zu Grunde gelegt wird. Damit werden Dreiecke mit leicht gezackten Rändern oder abgerundeten "Ecken" als Nichtbeispiele ("non-intuitive non-examples") angesehen. Es stellt sich die Frage, ob der euklidische Begriff mit Erfahrungen und Sprache des Alltags korrespondiert. Der Begriff des Dreiecks, wie er in der algebraischen Topologie formuliert wird, erscheint oft näher zu liegen. Ein Dreieck ist ein simplizialer Komplex, der durch seine "Skelette" (vereinfacht: drei Ecken, drei Seiten, eine Fläche) festgelegt wird. Man wird ein wenig an Inhelder erinnert, die in Woods Hole erklärt hat: "Die psychologische Entwicklung entspricht in ihrer Abfolge oft dem axiomatischen Aufbau eines Lehrgegenstandes genauer als der historischen Linie der Begriffsentwicklung innerhalb des Fachs. Zum Beispiel bemerkt man, dass bestimmte topologische Begriffe wie Verbindung, Trennung, Enthaltensein usw., der Ausbildung von Begriffen aus der euklidischen und darstellenden Geometrie vorausgehen, obgleich die topologischen Begriffe in ihrer formalen Gestalt in der Geschichte der Mathematik neueren Datums sind als die letztgenannten." (Bruner 1970: 53/54). Allerdings darf daraus nicht der Fehlschluss gezogen werden, dass man Topologie vor Geometrie unterrichten sollte. Ein auch an der historischen Entwicklung orientierter Unterricht wird zu Recht elementare euklidische Geometrie an den Anfang setzen. Meine Bemerkungen zielen auf das Hintergrundwissen der Lehrerin oder des Lehrers.

So bilden drei Punkte ein Dreieck. Die verbindenden Seiten müssen gar nicht vorhanden sein! Wie groß ist die Fläche eines Warndreiecks? Wenn man es mit Leuchtfarbe beschichten will, wird man nur an den Rahmen denken. Wie schwer ist ein Triangel? Dazu muss man die Dicke und Dichte der verwendeten (gebogenen!) Metallstange kennen. Die metaphorische Verwendung von Dreieck im Alltag ("Dreiecksverhältnis") oder in der Wissenschaft ("Semiotisches Dreieck") sei nur erwähnt.

Literatur

Bruner, J. S. (1976). *Der Prozess der Erziehung.* Düsseldorf und Berlin 4. Aufl.: Schwann

Schweiger, F. (2006) Fundamental Ideas: A Bridge between Mathematics and Mathematical Education. In J. Maasz & W. Schlöglmann (eds): *New Mathematics Education Research and Practice* (S. 63-73). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers

Tsamir, P., Tirosh, D. & Levinson, E. (2008) Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educ. Stud. Math*. 69, 81-95

Franziska SIEBEL, Frankfurt

Wie reagiert der Schulbuchmarkt auf Jahrgangsmischung?

Schulbücher sind wichtige Instrumente für den Mathematikunterricht (vgl. Rezat 2008). Die neu entwickelten Werke Einstern (Bauer / Maurach, Cornelsen 2005), Flex und Flo (Deutschmann, Seckerdieck u.a., Diesterweg 2007/2008) und Wochenplan Mathematik (Bever et al., Klett 2007/2008) werden als gut geeignet für jahrgangsgemischten Unterricht beworben. Nachfolgend werden Analysefragen für Schulbücher hinsichtlich ihrer Unterstützung jahrgangsgemischter Lernumgebungen und die Analyse der genannten Werke exemplarisch vorgestellt. Kurz wird auf Möglichkeiten zur Differenzierung in individualisierten Phasen eingegangen.

Lernumgebungen für jahrgangsgemischte Gruppen

Keins der drei Unterrichtswerke weist Seiten für die gemeinsame Bearbeitung durch eine jahrgangsgemischte Lerngruppe aus. Ob bzw. inwiefern einzelne mathematische Themen in gemischten Lerngruppen unterrichtet werden können, wurde anhand von Analysefragen untersucht, die auf der Basis der von Nührenbörger und Pust (2006) verwendeten Begriffe der thematischen und der medialen Parallelisierung entwickelt wurden:

Lassen sich Themen, die nur in einer Jahrgangsstufe vorkommen, in der Gesamtgruppe behandeln oder bauen sie auf anderen Themen auf?

Können Themen, die in beiden Jahrgangsstufen behandelt werden, gemeinsam behandelt werden? Können sie zeitlich parallel gelegt werden? Worin besteht das Gemeinsame der Themen (mathematische Struktur/mathematischer Begriff, Rechenstrategien außermathematischer Kontext, mathematische Aktivität wie spiegeln oder Daten erheben)? Wie umfassend ist die Parallelisierung?

Sind die Arbeits- und Veranschaulichungsmittel durchlässig für die beiden Klassenstufen (also etwa für die Zahlenräume bis 20 und bis 100)? Werden Aufgabenformate wieder aufgegriffen?

Parallelisierung von Einstern

Einstern hat anstelle eines Schulbuchs sechs Themenhefte für die erste und fünf Themenhefte für die zweite Klasse, die für die individuelle Bearbeitung durch die Kinder konzipiert sind, ergänzt durch ein paar Partneraufgaben. Lernumgebungen für Gruppen werden vereinzelt ab der zweiten Klasse angeregt. Die Hefte für die beiden Jahrgangsstufen sind nicht parallel angelegt, wie am Beispiel der Einführung bzw. Erweiterung der Zahlenräume verdeutlicht wird.

In der ersten Klasse wird der Zahlenraum bis 20 stufenweise in drei verschiedenen Themenheften eingeführt bzw. erweitert, dabei werden jeweils unterschiedliche inhaltliche und mediale Schwerpunkte gesetzt. Im Themenheft 1 werden die Zahlen 1 bis 6 zusammenhängend behandelt: es werden vorwiegend Anzahlen von alltäglichen Objekten bestimmt, Handlungshinweise regen das Legen von Anzahlen mit Gegenständen des Klassenzimmers und die Erfahrung mit (An-)Zahlen und ihren Schreibweisen mit verschiedenen Sinnen an; zur Veranschaulichung dienen häufig Würfelbilder. Die Zahlen 7 bis 13 werden im Themenheft 3 nacheinander eingeführt: Zu jeder Zahl werden Zerlegungen sowie Additions- und Subtraktionsaufgaben besprochen, die Aufgaben werden symbolisch und bildlich durch Kreise und Rechtecke dargestellt (die Fünferbündelung lässt sich bei der bildlichen Darstellung erkennen). Schließlich werden die Zahlen bis 20 in Themenheft 4 zusammenhängend eingeführt, dabei steht die Zehner-/Einerstruktur im Vordergrund, die mit Rechtecken und Kreisen veranschaulicht wird.

Die Erweiterung des Zahlenraums bis 100 erfolgt in genau einem Themenheft (dem ersten der zweiten Klasse): Zunächst werden die Zehnerzahlen eingeführt, gefolgt von der allgemeinen Besprechung der Zahlen bis 100. Zur Veranschaulichung wird vorwiegend mit dem Hunderterfeld, Steckwürfeln, bildlichen Darstellungen dieser, und mit Geld gearbeitet. Die einzigen medialen Parallele zum zweiten Schuljahr lässt sich bei der Besprechung der Zahlen bis 20 finden, etwa durch die Verwendung von Steckwürfeln. Doch zeitlich liegen die Themen weit auseinander und die Aufgabentypen sind sehr verschieden, so dass weder eine zeitliche noch eine thematische Parallelisierung vorliegt.

Einstern bietet vorwiegend Material für individualisiertes Arbeiten und enthält deswegen nur wenig Anregung für Lernumgebungen in Gruppen. Aufgrund dessen sowie aufgrund der fehlenden Parallelisierung wird die Entwicklung jahrgangsübergreifender Lernumgebungen nicht angeregt.

Parallelisierung von Flex und Flo

Flex und Flo ist pro Jahrgangsstufe in vier Themenhefte gegliedert, die für eine weitgehend selbsttätige Bearbeitung konzipiert sind. Viele Seiten werden durch Einstiegsaufgaben eröffnet: zu neuen mathematischen Themen, verschiedenen Rechenstrategien, Aufgabenformaten, etc. Auch diese Themenhefte wurden nicht thematisch parallelisiert, ähnliche Themen passen in der zeitlichen Abfolge nicht zusammen. Jedoch ist eine mediale Parallelisierung festzustellen: Z.B. dienen Rechenstreifen (zehn Punkte auf einem Streifen) sowohl in der ersten Klasse bei der Einführung der Zahlen bis 10 und der Erweiterung des Zahlenraums bis 20 als auch in der zweiten Klasse für Zahldarstellungen. Dies wird allerdings nicht konsequent genutzt: So wird etwa in der ersten Klasse die Addition mit Überschreitung des Zehners und die dekadische Analogie anhand von Punkten auf zwei Rechenstreifen veranschaulicht, wohingegen in der zweiten Klasse ähnliche Strategien durch Rechenstrich und Hundertertafel veranschaulicht werden.

Die Einstiegsaufgaben lassen sich teilweise zu jahrgangsübergreifenden Lernumgebungen erweitern, jedoch muss aufgrund fehlender Parallelisierung viel konzeptionelle Arbeit dafür geleistet werden.

Parallelisierung von Wochenplan Mathematik

Die Einteilung verschiedener Hefte von Wochenplan Mathematik erfolgt anhand der Lernsituationen Einstieg und Übung. Im Schülerleitfaden sind Einstiege in mathematische Themen durch bildhafte Anregungen zu Lernsituationen in Gruppen dargestellt. Auf der Makroebene wird anhand der Wochenthemen deutlich, dass die mathematischen Themen in weiten Teilen parallel aufgebaut sind.

Auf der mikrostrukturellen Ebene wird deutlich, dass die parallel angelegten Themen jeweils in einem mathematischen Zusammenhang stehen, sie sich jedoch durch die Art der Parallelisierung unterscheiden. Zu Aufgaben unterschiedlicher Zahlenräume werden zum Teil dieselben *Rechenstrategien* erarbeitet (etwa dekadische Analogien). In einigen Lernumgebungen werden dieselben *mathematischen Begriffe* behandelt (z.B. gerade und ungerade Zahlen). Auf vielen Seiten sind ähnliche Kontext dargestellt, etwa Getränkebestellungen (Sachkontext zum Thema Tabelle) oder Zahlen im Klassenraum (Einführung/Erweiterung der Zahlenräume). Häufig basieren die Lernumgebungen auf ähnlichen *Aktivitäten*: Zahlenausstellungen zu den Zahlen bis 10 bzw. bis 100 erstellen, in Schritten an einem Zahlenband springen, mithilfe verschiedener Arbeitsmittel Rechenstrategien erarbeiten, Zahlen in ungerade oder gerade Zahlen handelnd mit Punktefeldern zerlegen. Diese Aktivitäten basieren weitgehend auf denselben Anschauungsmitteln (z.B. Rechengeld) oder aufeinander aufbauenden (z.B. Zwanziger- und Hunderterfeld), teilweise werden Bezüge zwischen den Arbeitsmitteln der beiden Jahrgangsstufen hergestellt.

In den Übungsheften wird pro Wocheneinheit an die Einstiege angeknüpft, die Aufgaben sind selbsttätig oder gelegentlich in Partnerarbeit zu bearbeiten, die mediale Parallelisierung durch dieselben Arbeitsmittel wird fortgesetzt. Es werden auch dieselben Aufgabenformate behandelt, z.T. in erweiterter Form, jedoch fokussieren die Übungen nicht auf thematische Parallelisierung.

Wochenplan Mathematik bietet durch eine weitgehende Parallelisierung Anregungen für die Gestaltung jahrgangsübergreifender Lernumgebungen, die jeweils verschiedene Aspekte in den Vordergrund stellen.

Differenzierung

Auch in Schulbüchern lassen sich vielfältige Formen der Differenzierung unterscheiden wie quantitative und qualitative, von außen vorgegebene und natürliche; die verschiedenen Formen lassen sich weiter aufgliedern (s. etwa Prediger (2008) zu verschiedenen Dimensionen qualitativer Differenzierung).

Einstern enthält überwiegend quantitative Differenzierung ohne Stufung verschiedener Niveaus. Die Themen sind kleinschrittig aufbereitet und spiegeln ein behavioristisches Lernverständnis wider. Die Handlungshinweise beziehen sich häufig auf symbolisches Arbeiten, so dass hier häufig nicht am Aufbau von Grundvorstellungen gearbeitet wird.

Flex und Flo differenziert wie Einstern überwiegend über das Lerntempo der Kinder. Manchmal bilden „Gewichtsaufgaben" den Abschluss der Seiten. Das Vorgehen ist relativ kleinschrittig, Strategien werden eng vorgegeben.

Wochenplan Mathematik differenziert ebenfalls über das frei wählbare Lerntempo pro (Wochen-)Einheit, aber auch regelmäßig durch „Feder- und Gewichtsaufgaben" sowie Handlungsaufforderungen. Die Differenzierungsdimensionen sind jeweils verschieden: größerer Zahlenraum, kognitiv anspruchsvoller, höherer Komplexitätsgrad, etc.

Das Differenzierungspotential der Werke ist sehr verschieden und kann in allen drei Werken weiter ausgebaut werden. Festzustellen ist, dass eine Individualisierung durch ein Schulbuch die Gefahr kleinschrittigen Vorgehens birgt und dann Transfer-, Vernetzungs- und Reflexionsaufgaben nur selten einbezogen werden. Das Medium Schulbuch kann nicht auf alle im Unterricht gewünschten Formen von Differenzierung eingehen, aber es lassen sich die Möglichkeiten analysieren, die ein Schulbuch bietet. Dazu müssen auch Lehrermaterialien betrachtet werden.

Literatur

Nührenbörger, M & Pust, S. (2006). Mit Unterschieden rechnen. Seelze: Kallmeyer

Prediger, S. (2008). Mit der Vielfalt rechnen – Aufgabe, Methoden und Strukturen für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht. In: Hußmann et al: *Indive – Individualisieren, Differenzieren, Vernetzen.* Hildesheim: Franzbecker, 129-139.

Rezat, S. (2008). Die Struktur von Mathematikschulbüchern. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 29(1), 46-67.

Johann SJUTS, Osnabrück/Leer

Bewältigung statt Vermeidung: Förderdiagnostik zur sprachlogischen Komplexität

Die sichere Beherrschung sprachlicher und symbolischer Darstellungen gilt als günstige Bedingung für erfolgreiches Mathematiklernen. Diesbezügliche empirische Ergebnisse und normative Vorgaben finden indes noch nicht die nötige Berücksichtigung. Dabei erweist sich gerade eine Förderdiagnostik als hilfreich, die eine explizite Auseinandersetzung mit Wissensrepräsentationen ins Augenmerk rückt. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auch auf Resultate des Projekts *Mathematik Gut Unterrichten*, das die *Deutsche Telekom Stiftung* fördert.

Die an Denkprozessen orientierte Mathematikdidaktik hat bei der Analyse von PISA-Aufgaben schwierigkeitsbestimmende Merkmale ausfindig zu machen versucht. Ein solches Merkmal ist das der *sprachlogischen Komplexität*. Es „erfasst Anforderungen beim Identifizieren und Verstehen von relevanten Informationen eines (durch logische Struktur und sprachliche Verflechtung geprägten) Aufgabentextes, bevor diese in eine mathematische Beschreibung und Bearbeitung überführt werden" (Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004, S. 114).

Neben *sprachlogischer Komplexität* tragen *kognitive Komplexität*, *Formalisierung von Wissen* und *Formelhandhabung* in erheblichem Maße zur Erklärung von Aufgabenschwierigkeiten bei (Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004). Zur Überwindung von Schwierigkeiten erweist sich die metakognitive Selbstüberwachung und Kontrolle als aussichtsreich.

Es ist darauf aufmerksam zu machen, dass das in der Unterrichtspraxis oft beobachtete Bemühen, den sprachlichen Anspruch zu reduzieren, wenig sinnvoll ist. Dies gilt insbesondere dann, wenn es um die Anwendungsfähigkeit von Mathematik in authentischen Situationen geht. Vermeidung ist demgemäß keine hilfreiche Devise für einen allgemein bildenden Mathematikunterricht. Die Förderung von Sprachkompetenz in Curricula und Bildungsstandards festzuschreiben, besitzt folglich eine einsichtige Legitimation. Der in der folgenden Aufgabe aus dem Känguru-Wettbewerb 2008 für die Schuljahrgänge 5 und 6 enthaltene Sprachanspruch kann das verdeutlichen.

Die Bedeutung von *Sprache*, von *Notation*, von *Multimodalität* vermag diese Aufgabe samt ausgewählter Aufgabenbearbeitungen ebenfalls aufzuzeigen.

Schneebälle

Lena ist noch dabei, Schneebälle zu formen, da beginnt ihr Bruder Lukas schon die Schneeballschlacht. Während sich die beiden wild bewerfen, kann Lena noch 5 weitere Bälle formen. Als sie 14 Bälle verschossen hat, gibt ihr Bruder auf. Da hat sie noch 7 Schneebälle übrig.

Wie viele hatte Lena schon vor der Schneeballschlacht für sich bereit-gelegt?

Eine Lösung in ausformulierter *Sprache* enthält das folgende Beispiel.

Zuerst muss man die 7 übrig geblibenen Schnee-bälle und die 14 verschos-senen Schneebälle addieren. Das ergibt 21. Diese 21 Schnee-bälle muss man zum Schluss von den 5 werend der Schlacht produzierten Schneebällen abziehen. Das ergibt 16. Also hat Lena vor der Schlacht 16 Schneebälle für sich bereit-gelekt.

Sprachlogische und kognitive Komplexität werden sprachlich-gedanklich bewältigt. Zwar sind die an der Subtraktion beteiligten Größen vertauscht und gängige Regeln der Rechtschreibung einige Male missachtet worden, dennoch ist ersichtlich, dass das sprachlich-gedankliche Können Lösung und Lösungssicherheit gewährleistet.

Der gleiche Lösungsweg, aber unter Verwendung einer konventionali-sierten *Notation*, findet sich in folgender Aufgabenbearbeitung. Hier herrscht Klarheit im Gedankengang, in der Sprache und in der Notation. Bei der Subtraktion ist sogar ein Vorteil der Gleichungsnotation gegen-über der sprachlichen (und – wie zu sehen war – auch fehleranfälligen) Variante erkennbar. Formalisierung dient der Vergewisserung.

14+7=21 (=gesamte Schneebälle) Da sie 5 Bälle nachträglich geformt hat, rechne ich 21−5=16
Die Antwort lautet: Sie hat vor der Schneeballschlacht 16 Bälle geformt.

Ansatzweise ist die Nutzung mehrer Darstellungsweisen, von *Multimodalität* also, in der folgenden Lösung sichtbar.

geg:
beim Bewerfen geformte Bälle = 5
verschossener Bälle = 14
gebliebene Bälle = 7

ges:
Wie viele Bälle hat Lena vor der Schneeball-schlacht bereit-gelegt?

Lösung:

14 + 7 = 21 → Bälle insgesamt
verschossene Bälle   übrige Bälle

21 Bälle − 5 geformte Bälle = 16 bereitgelegte Bälle

Probe:

16 + 5 − 14 → verschossene Bälle = 7 übrig gebliebene Bälle
bereitgelegte Bälle   geformte Bälle

Die Multimodalität ist verborgen. Man muss sie hervorholen. In der Lösung steckt **21 – 5 = x** und in der Probe die Gleichung **x + 5 – 14 = 7**.

Der Schüler variiert gewissermaßen die Formalisierungen. Darstellungen zu transformieren ist eine wesentliche Bedingung für erfolgreiches Lernen. Die Fähigkeit zur Formalisierung und zur Variation ist daher – wohl mehr als bisher – im Mathematikunterricht zu schulen.

Die verborgenen Formalisierungen und weitere erweisen sich als geeignet (Sjuts 2007, 2008), um über die zielgerichtete Kompetenzentwicklung von *Formalisierung* eine Förderdiagnostik zu betreiben.

Dabei ist Folgendes für eine Förderdiagnostik zur sprachlogischen Komplexität zu beachten:

■ Ganz offensichtlich besteht ein enger Zusammenhang zwischen Sprachverständnis und Mathematikverständnis. Eine entwickelte mathematische Kompetenz ist ohne eine entsprechende Textverstehenskompetenz in aller Regel nicht vorhanden.

■ Erfolgreiches Mathematiklernen bedarf daher einer fundierten Sprachkompetenz. Indem nämlich kognitive und metakognitive Prozesse einen sprachlichen Niederschlag finden, werden sie explizit gemacht.

■ Die Beherrschung konventionalisierter Darstellungen (nicht nur mit Wörtern und Sätzen, sondern auch) mit Zeichen und Symbolen dient der Bewältigung mathematischer Aufgaben und der metakognitiven Vergewisserung des Denkens.

■ Der instrumentelle Einsatz von Formalisierung ist ein probates Mittel zur Überwindung von Komplexität, insbesondere von sprachlogischer Kompetenz. Darstellungswechsel und Darstellungsabgleich sind hilfreiche kognitive und metakognitive Aktivitäten.

Noch einmal: *Bewältigung statt Vermeidung*, das ist der Grundsatz für erfolgreiches mathematisches Denken.

Literatur:

Cohors-Fresenborg, Elmar & Sjuts, Johann & Sommer, Norbert (2004): Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden 2004, S. 109-144

Sjuts, Johann (2007): Mini-Forschung im Berufsfeld Schule. Steigerung von Unterrichtsqualität und Verbesserung von Lehrerausbildung, dargestellt am Beispiel des Grundschulprojekts „Metakognition beim mathematischen Denken“. Leer 2007

Sjuts, Johann (2008): Diagnostik in Mathematik. Aufbau diagnostischer Kompetenz durch Mini-Forschung zur Metakognition beim mathematischen Denken. Leer 2008

Norbert SOMMER, Bad Iburg/Osnabrück

Der Mathematikunterricht aus Sicht der Unterrichtseinsichtnahmen der Schulinspektion

Zu den bildungspolitischen Maßnahmen nach TIMSS und PISA, die Qualität von Schule und Unterricht mit dem Focus auf Schülerleistung zu verbessern, sind neben Bildungsstandards und zentralen Vergleichs- und Abschlussarbeiten auch die Einrichtung von Schulinspektionen in den Bundesländern zu zählen. Während die beiden erstgenannten Bereiche vollständig (Bildungsstandards) oder teilweise (Vergleichsarbeiten) länderübergreifend umgesetzt werden, sind die Schulinspektionen, -visitationen oder externen Schulevaluationen (unterschiedliche Begrifflichkeit) Länderangelegenheit.

Entsprechend dieser Struktur scheint auch das Engagement der Fachdidaktik absteigend positioniert – umfangreiche Mitwirkung bei den Bildungsstandards, partielles Engagement bezüglich zentraler Arbeiten und keine Mitwirkung bei der Erarbeitung der Inspektionsinstrumentarien.

Bezüglich des zu erwartenden Einflusses auf Schulentwicklung ist die Bedeutung der Maßnahmen eher umgekehrt zu bewerten. Die Inspektion

- definiert mit ihrem Kriterienrahmen die Qualität von Schule und Unterricht
- tritt in direkten Kontakt zu jeder Schule und trägt dadurch zur Verbindlichkeit der Umsetzung rechtlicher Vorgaben und innerschulisch beschlossener Konzepte bei
- unterstützt die mit Bildungsstandards und Leistungsvergleichen verbundene Intentionen, weil sie in den Schulen die Umsetzung in schulinterne Lehrpläne und Unterrichtsentwicklungsmaßnahmen überprüft
- ist insofern umfassend, als nahezu alle schulischen Einrichtungen und Prozesse betrachtet werden; Unterrichtsentwicklung im Fach gelingt nachhaltig vermutlich nur unter förderlichen Rahmenbedingungen
- ist im Falle besonders schwach bewerteter Schulen Auslöser für Vereinbarungen zwischen Schule und Landesschulbehörde zur Schulentwicklung und vorrangigen Gewährung von Unterstützung.

Der Bezug zu fachdidaktischen Interessen ist m.E. in mehrfacher Hinsicht gegeben:

- In Bezug auf die Festlegung von Kriterien für eine adäquate Umsetzung der Bildungsstandards und Kerncurricula in schulische Lehrpläne

- Im Hinblick auf die innerschulische Auseinandersetzung mit rückgemeldeten Vergleichsarbeitsergebnissen
- An den Unterrichtseinsichtnahmen, die einerseits Unterrichtsqualität durch die im Beobachtungsbogen aufgenommenen Kriterien definieren und andererseits zu Unterrichtsdaten über jede Schule führen.

Diese Punkte stehen im engen Zusammenhang zur Fachkonferenzarbeit als einem bisher in Deutschland als Schulmanagementebene kaum wahrgenommenen Motor für Unterrichtsentwicklung.

Im Zentrum der folgenden Ausführungen stehen Ergebnisse von Unterrichtseinsichtnahmen der niedersächsischen Schulinspektion. Um Ihren Stellenwert beurteilen zu können, ist zunächst kurz das Gesamtinstrumentarium zu betrachten. 2005 hat Niedersachsen nach zweijährigen Vorarbeiten in enger Kooperation mit der Inspectie van het Onderwijs der Niederlande als erstes Bundesland eine von der Schulaufsicht getrennte Inspektionsbehörde eingerichtet, die alle Schulen verbindlich evaluiert. Die dem systematischen Inspektionseinsatz mit Beginn des Jahres 2006 zugrunde liegenden Qualitätskriterien sind gut fundiert; sie lassen sich z. B. stimmig den von Scheerens/Bosker dargestellten Merkmalen effektiver Schulen zuordnen. Neben Unterricht gehören Schulklima, Schulmanagement und systematische Qualitätsentwicklung zu den 16 Qualitätskriterien. Aufgrund der Komplexität schulischer Ziele und der fehlenden Daten für eine „faire" Adjustierung wird das Outputkriterium „Ergebnisse und Erfolge" bisher nicht bewertet.

Gemäß der Bedeutung von Unterricht als schulischem Kerngeschäft bezieht sich mindestens die Hälfte der Qualitätskriterien (QK) auf Unterricht, drei betreffen von der Schule zu gestaltende Rahmenbedingungen (2: Schuleigenes Curriculum, 7: Leistungsanforderungen und -kontrollen und 8: Unterstützung der Schüler im Lernprozess). Über einen Unterrichtsbeobachtungsbogen werden in Unterrichtseinsichtnahmen 20 Teilkriterien in den Ausprägungen „trifft in besonderem Maße zu ++", „trifft zu + „ trifft nicht zu -" (dazu „0", wenn nicht beurteilbar) erfasst und zur Bewertung in vier Qualitätskriterien aggregiert, die in Tabelle 1 dargestellt sind.

Knapp die Hälfte der ca. 3100 Schulen in Niedersachsen ist inzwischen inspiziert worden. Aus diesen Inspektionen liegen die Daten von mehr als 30000 Unterrichtseinsichtnahmen vor. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf etwa 27000 Datensätze aus allgemein bildenden Schulen.

Die Kriterien fußen auf Ergebnissen der Unterrichtsforschung, Schulpädagogik, Fachdidaktik, Lehr-Lern- und Unterrichtsklimaforschung.

Vier Qualitätskriterium		20 Teilkriterien
3	Zielorientierung und Strukturierung	Zieltransparenz, Verständlichkeit, Strukturiertheit, Zeitnutzung, geordneter Verlauf
4	Stimmigkeit und Differenzierung	Lehrplanangemessenheit, Differenziertheit des Anforderungsniveaus, der Unterrichtsmethoden und -medien
5	Unterstützung eines aktiven Lernprozesses	Aktive Beteiligung, Förderung selbständigen Lernens, von Partner- und Gruppenarbeit sowie Mediennutzung, Rückmeldung, Lernzuwachs
6	Pädagogisches Klima	Arbeitsatmosphäre, Unterstützung des Selbstvertrauens, Auftreten der Lehrkraft, Lernumgebung

Tabelle 1: Kriterien der Unterrichtsqualität

Für Abbildung 1 wurden die Bewertungen mit 4 (++) bis 2 (-) codiert und über die 20 Teilkriterien ein Durchschnittswert errechnet. Die Bewertung des Mathematikunterrichts liegt im Mittelfeld aller aufgeführten Fächer, erreicht in der Grundschule die gesetzte Norm „3 – trifft zu“, in den Sekundarbereichen fallen die Urteile deutlich ab.

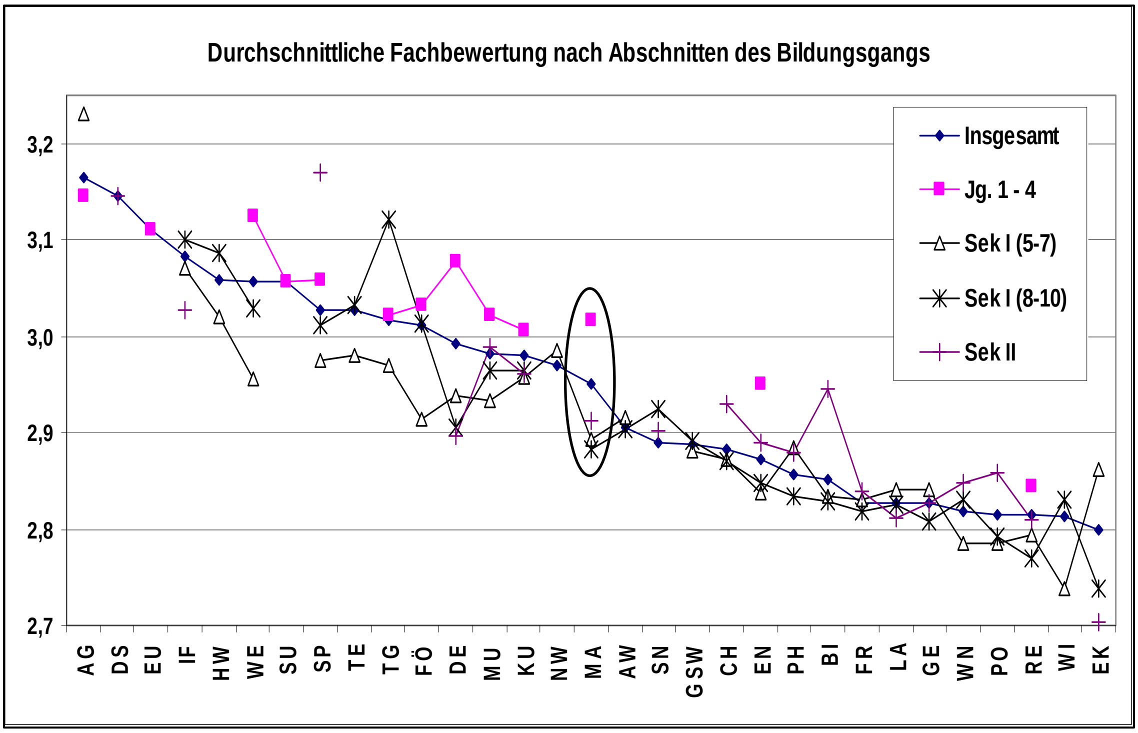


Abbildung 1: Bewertung der Unterrichtsqualität in Mathematik im Fachvergleich

In Abbildung 2 ist erkennbar, in welchen Teilkriterien (s. Teilkriterienkatalog MK Niedersachsen, 2006) die Norm „3“ über- bzw. unterschritten wird.

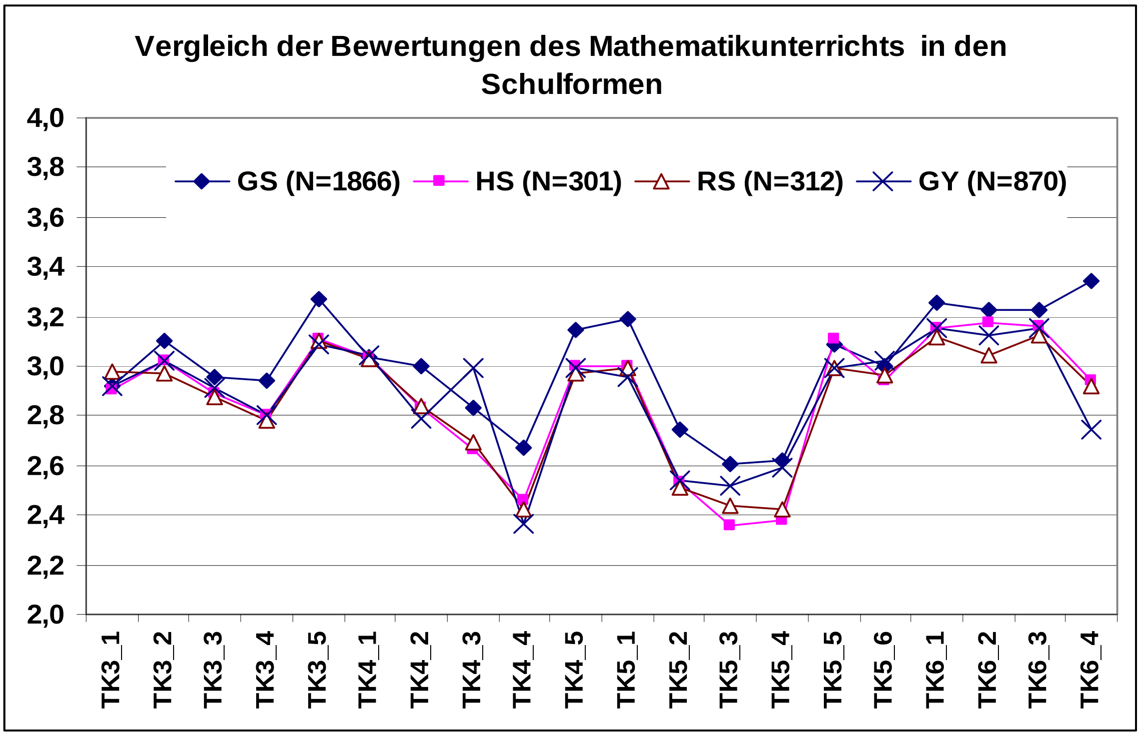


Abbildung 2: Schulformprofile der Unterrichtsqualität im Fach Mathematik

Der Mathematikunterricht an Grundschulen erhält vielfach die besten Bewertungen; am Gymnasium wird die „Berücksichtigung der Anforderungsbereiche bis zum Problem lösenden Denken" (TK4_3) besser beurteilt, die Gestaltung der Lernumgebung (TK6_4) dagegen deutlich schlechter. Hinsichtlich der „Basisdimensionen der Unterrichtswahrnehmung von Lehrkräften" in PISA 2003 findet sich der Vorteil der Gymnasien gegenüber Hauptschulen beim „kognitiv aktivierenden Unterricht" in TK4_3 wieder, die von Lehrkräften an Hauptschulen als schlechter wahrgenommene „Effiziente Klassenführung" bildet sich dagegen in TK3_4/5 nicht ab.

Die Kriterien der Schulinspektion sollen fach- und schulformneutral sein. Ob sich darin der Mathematikunterricht mit einer Auflösung widerspiegelt, die die innerschulische Entwicklung des Fachunterrichts befördert, kann nur mit Hilfe der Fachdidaktik beantwortet werden. Andererseits liegen durch die Unterrichtseinsichtnahmen in den Schulinspektionen der Bundesländer unfassende und detaillierte Informationen über die Unterrichtsrealität vor, die der fachdidaktischen Forschung nützen könnten.

Literatur

Niedersächsische Schulinspektion (2008): *Periodischer Bericht 2008.* http://cdl.niedersachsen.de/blob/images/C51934704_L20.pdf [10.01.2009].

MK Niedersachsen (2006): Unterrichtsbeobachtungsbogen für allgemein bildende Schulen. http://cdl.niedersachsen.de/blob/images/C20608491_L20.pdf

Christian SPANNAGEL & Christine BESCHERER, Ludwigsburg

Didaktische Entwurfsmuster für technologieunterstützte Mathematikübungen

An guten Mathematikunterricht werden – insbesondere aus konstruktivistischer Sicht – verschiedene Forderungen gestellt: Er soll schüleraktivierend und prozessorientiert sein. Die Lernenden sollen die Möglichkeit bekommen, Experimente durchzuführen, authentische Problemkontexte zu erforschen und im Dialog mit anderen Lernenden Lösungsideen zu entwickeln. Und Schülerinnen und Schüler sollen lernen, Technologie dort einzusetzen, wo sie sinnvoll und hilfreich ist.

Diese Forderungen können in Analogie auf die Hochschullehre in der Mathematik übertragen werden. Allerdings sieht die Realität – insbesondere in Einführungsveranstaltungen mit großer Teilnehmerzahl – anders aus: Neben der Vorlesung werden Vorrechenübungen gehalten, in denen Studierenden Standard-Lösungswege vorgeführt werden. Insbesondere in der Lehramtsausbildung ist dies aber mehr als fragwürdig: Wenn zukünftige Lehrerinnen und Lehrer Mathematikunterricht im oben beschriebenen Sinne halten sollen, dann müssen sie während des Studiums erfahren, was es heißt, *Mathematik zu treiben*. Ansonsten muss man sich fragen, wie zukünftige Lehrerinnen und Lehrer es aus eigener Kraft schaffen sollen schülerzentrierten Unterricht zu gestalten, wenn sie selbst meist lehrerorientiert unterrichtet worden sind.

Lernerzentrierter Unterricht ist in Einführungsveranstaltungen an der Hochschule aufgrund der großen Teilnehmerzahlen allerdings zugegebenermaßen schwieriger umzusetzen als im Klassenzimmer:

- Verschiedene Sozialformen und Handlungsmuster können im Rahmen einer 90-minütigen „Vorlesung“ in einem Hörsaal kaum durchgeführt werden.
- Individuelle Rückmeldungen zu Lernprozessen einzelner Studierender sind ohne Weiteres nicht zu leisten.
- Insbesondere fachwissenschaftlich orientierte Hochschullehrer haben oft keine oder nur eine unzureichende didaktische Ausbildung und führen daher alte Muster einfach fort.

Im vom BMBF geförderten Verbundprojekt SAiL-M („Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik“) werden Methoden entwickelt, mit denen lernerzentrierte und prozessorientierte Mathematiklehre an Hochschulen umgesetzt werden kann. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen:

- Es werden Didaktische Entwurfsmuster (*Didactical Design Patterns*; DDP) erstellt, mit deren Hilfe lernerzentrierte und prozessorientierte Konzepte (insbesondere unter Einsatz von Technologie) für die Mathematiklehre einfach und in strukturierter Weise kommuniziert werden können.
- Es werden Computerwerkzeuge entwickelt, mit deren Hilfe semiautomatisches Feedback zu individuellen Lösungswegen von Studierenden gegeben werden kann.

In diesem Artikel werden die Konzeption der Lehrveranstaltung und die Entwicklung der entsprechenden DDP beschrieben. Auf die semiautomatischen Feedback-Werkzeuge wird hier nur kurz eingegangen.

1. Theoretische Grundlagen

Als Basismodell für die Konzeption der Lehrveranstaltung dient das Handlungsmodell von Marzano und Kendall (2007). In diesem Modell spielt neben der kognitiven und metakognitiven Ebene insbesondere die Ebene des Selbst eine wesentliche Rolle. Handlungen werden nur dann durchgeführt und mit Engagement verfolgt, wenn auf der Ebene des Selbst-Systems die entsprechende Entscheidung getroffen wird. Hier spielen insbesondere Konzepte wie selbstbestimmte Formen der Motivation (Deci & Ryan, 1993) und (mathematische) Selbstwirksamkeitserwartungen (Bandura, 1997) eine wesentliche Rolle. Bei der Konzeption der Veranstaltung wurden Strategien umgesetzt, die insbesondere im Selbst-System wirken. Hierzu zählen Strategien zur Förderung der wahrgenommenen Autonomie, Kompetenz und sozialen Eingebundenheit sowie die Förderung der Eigenaktivität der Lernenden.

2. Arbeiten im Vorfeld

Im Projektvorfeld wurde an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg ein bestehendes Veranstaltungskonzept im Sinne der Lernerzentierung und Prozessorientierung und gemäß dem theoretischen Grundmodell umgestaltet. Dabei handelt es sich um die Einstiegsmodule (Modul 1: Einführung in die Arithmetik; Modul 2: Einführung in die Geometrie) im Rahmen des Studiengangs Realschullehramt.

Damit die Umstellung schrittweise erfolgt, wurde zunächst bei der Veränderung der Übungen nach folgendem Konzept begonnen: Wöchentlich werden 5-6 komplexe Arbeitsanregungen an die Studierenden ausgegeben (und nicht, wie bislang, ein Aufgabenblatt mit Übungs- und Anwendungsaufgaben). Die Arbeitsanregungen sind möglichst offen, komplex und in einen motivierenden Kontext eingebettet. In kleinen Gruppen von 3-4 Personen werden diese Anregungen über die Woche hinweg bearbeitet. Dabei dürfen die Studierenden sich 2-3 Arbeitsanregungen aussuchen – es müssen nicht alle bearbeitet werden (*Förderung der Autonomiewahrnehmung*). Die Übungsstunde ist dazu da, dass die Studierenden von einem Tutor bei ihrer Arbeit betreut werden (*coaching*). Der Tutor verrät keine Lösungen, sondern gibt Tipps und Hinweise für das weitere Vorgehen und informatives Feedback zu den Prozessen der Studierenden (*Förderung der Kompetenzwahrnehmung*). Es findet kein Vorrechnen von Standardlösungen statt. Die *soziale Eingebundenheit* wird zum einen durch die Teamarbeit gefördert, zum anderen durch die Bereitstellung von virtuellen Diskussionsforen in Moodle. Darüber hinaus können die Studierenden das Angebot eines „offenen Matheraums" annehmen, in dem ein Tutor für Fragen aller Art zur Verfügung steht.

3. Entwicklung von DDPs für lernerzentrierte Mathematiklehre

Zur Kommunikation dieses Übungskonzepts wurde ein DDP angefertigt. DDPs sind semiformale, textbasierte Beschreibungsformen, in denen didaktisch-methodische „Best Practices" beschrieben werden (Wippermann, 2008). DDPs sind so allgemein, dass sie auf verschiedene Lehr-/Lernsituationen passen, aber so konkret, dass sie die Umsetzung des DDP veranschaulichen. Mehrere aufeinander bezogene DDPs bilden eine Patternsprache.

DDPs weisen eine einheitliche Struktur auf. Es werden folgende Bereiche beschrieben:

- Problem / Herausforderung / Motivation
- Einflüsse / Kräfte (Forces)
- Lösung
- Theoretische Begründung
- Beispiele
- Verwandte Pattern

Das oben dargestellte Übungskonzept wurde in einem DDP mit der Bezeichnung ACTIVATING STUDENTS IN INTRODUCTORY MATHEMATICS beschrieben (Bescherer, Spannagel & Müller, in press). Zudem wurden mehrere Unterpatterns zu diesem Konzept beschrieben, die sich direkt auf den Technologieeinsatz innerhalb des Übungskonzepts beziehen (Bescherer & Spannagel, in press). Im Folgenden werden nur kurz die Inhalte der DDPs angerissen:

- TECHNOLOGY ON DEMAND: Technologie soll von den Studierenden dann eingesetzt werden, wenn es sinnvoll ist. Dabei können sie ihrer Ansicht nach passende Werkzeuge wählen (Tabellenkalkulation, Dynamische Geometriesysteme, Taschenrechner, …).
- HELP ON DEMAND: Studierende bringen unterschiedliches Vorwissen im Umgang mit den technologischen Werkzeugen mit. Hilfe zu den Werkzeugen wird daher nicht vorab gegeben, sondern nur bei Bedarf (in Form von tutorieller Betreuung, Hilfevideos oder Anleitungen).
- FEEDBACK ON DEMAND: Studierende können sich individuelles Feedback zu ihren Lösungsprozessen anfordern. Da dies in großen Lehrveranstaltungen nur schwer möglich ist, sind Computerwerkzeuge notwendig, welche die Lösungswege der Studierenden analysieren und semiautomatisch Rückmeldungen geben. Semiautomatisch bedeutet in diesem Kontext, dass nicht alle unterschiedlichen Lösungen automatisch erkannt werden müssen; außergewöhnliche Lösungen werden an den Tutor oder den Dozenten weitergereicht.

4. Ausblick

Im Sommersemester 2009 wird in Ludwigsburg zusätzlich zum Übungsbetrieb auch die Vorlesung umgestellt. Hierfür werden DDPs entwickelt, in welchen die Vorlesung und die Übung stärker an kognitiven Prozessen in bestimmten Grundkategorien mathematischen Lernens orientiert werden. Zudem werden die ersten semiautomatischen Feedback-Werkzeuge in der Lehrveranstaltung eingesetzt und evaluiert. Die Projektergebnisse werden unter anderem auf der Webseite http://www.sail-m.de veröffentlicht.

Literatur

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy. The exercise of control*. New York: Freeman.

Bescherer, C. & Spannagel, C. (in press). Design Patterns for the Use of Technology in Introductory Mathematics Tutorials. Erscheint in den Proceedings der WCCE 2009.

Bescherer, C., Spannagel, C. & Müller, W. (in press). Pattern for Introductory Mathematics Tutorials. Erscheint in den Proceedings der EuroPLOP 2008.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik, 39*(2), 223–238.

Marzano, R. J. & Kendall, J. S. (2007). *The new taxonomy of educational objectives* (2. Aufl.). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Wippermann, S. (2008). *Didaktische Design Patterns zur Dokumentation und Systematisierung didaktischen Wissens und als Grundlage einer Community of Practice*. Saarbrücken: Verlag Dr. Müller.

Judith STANJA, Hildesheim

Repräsentationen stochastischer Inhalte in der Primarstufe

1. Stochastikunterricht in der Primarstufe

Heute stellt niemand mehr in Frage, dass Stochastik einer propädeutischen Behandlung in der Primarstufe bedarf. Deshalb wurde sie 2005 in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik im Inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" verankert .

Bereits 1976 stellte Winter folgende Forderungen an den Stochastikunterricht in der Primarstufe:

Die stochastischen Erfahrungen müssen unmittelbar einen Beitrag zur Welterschließung liefern. (S. 28)

Die Schüler müssen die Möglichkeit erhalten, durch eigenes praktisches Tun stochastische Erfahrungen zu sammeln und zu ordnen. (S. 31)

Der Lernbereich Stochastik sollte in der Grundschule kein eigenes Stoffgebiet darstellen, sondern primär als ein Aspekt (als Unterrichtsprinzip) den gesamten Mathematikunterricht durchziehen. (S. 33)

Aus ihrem Alltag bringen Kinder Erfahrungen zum Zufall mit in den Unterricht. Sie haben intuitive Vorstellungen zu stochastischen Inhalten, die jedoch stark an die subjektiven Erfahrungen gebunden und weitestgehend unreflektiert sind (vgl. insbes. Fischbein, Wollring). Da sich nach Fischbein die Handlungskompetenz vor der verbalen Kompetenz entwickelt, sind stochastische Kompetenzen von Kindern auch immer an geeignete Artikulationsunterstützungen gebunden. Stochastisch isomorphe Situationen werden i.A. von Grundschulkindern noch nicht erkannt (vgl. Wollring). Dazu passt die Aussage eines Mädchens der dritten Klassenstufe, das nach Versuchen mit einem symmetrischen sechseitigen Kreisel und einem Spielwürfel von einem „Riesenunterschied" spricht.

Wie weit aber soll Grundschulstochastik gehen? Wie kann erfolgreicher Stochastikunterricht aussehen, der sowohl die genannten Voraussetzungen bei den Kindern berücksichtigt, als auch systematisch auf weiterführenden Stochastikunterricht vorbereitet. Denn mit der Einführung der Stochastik in die Primarstufe ist die Hoffnung verbunden, Einfluss auf die Entwicklung von Vorstellungen zu nehmen und insbesondere der Entwicklung und Verfestigung von Fehlvorstellungen entgegenzuwirken. Um dies zu erreichen, ist es sicherlich nicht hilfreich rein phänomenologisch vorzugehen. Aufgabe der Grundschulstochastik sollte es sein, den Kindern zu ermöglichen sich Übersicht über bedeutungsvolle stochastische Situationen zu verschaffen, ihre Erfahrungen und Vorstellungen aufzugreifen, zu ordnen und zu reflektieren. Inwieweit das möglich ist, bleibt noch zu untersuchen.

2. Repräsentationen

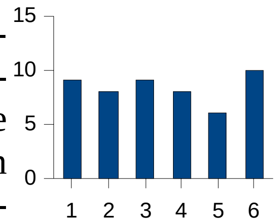
Das Wort Repräsentation kommt aus dem Lateinischen von *praesentare*, was soviel bedeutet wie gegenwärtig machen oder vergegenwärtigen. Es geht darum etwas in das Zentrum der Aufmerksamkeit zu rücken. Verwendung findet das Wort in der Psychologie und der Semiotik. In der Psychologie werden mit Repräsentationen sowohl innere Abbilder als auch externe Darstellungen bezeichnet. Klassisch wird nach Bruner bei externen Darstellungen zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Repräsentationen unterschieden. Eine der semiotischen Traditionen, die in der Mathematikdidaktik aufgegriffen werden, ist die erkenntnistheoretisch orientierte Semiotik von Peirce. Zentral ist die triadische Zeichenrelation „Objekt – Zeichen – Interpretant“. Zeichen haben bei Peirce repräsentierende und erkenntnistheoretische Funktion (vgl. Hoffmann). Die Bedeutung für die Didaktik der Stochastik ergibt sich daraus, dass stochastische Inhalte abstrakt und nicht direkt aus der wahrnehmbaren Erfahrungswelt ableitbar sind. Sie sind nur durch Repräsentationen zugänglich und kommunizierbar. Noch interessanter werden Repräsentationen, da sie das Lernen, Verstehen und das Lösen von Problemen beeinflussen können (vgl. die Arbeiten von Koerber, Wassner u.a.).

In der Grundschule sind die Repraesentationsmöglichkeiten aufgrund des Entwicklungsstands der Kinder zunächst eingeschränkt. Beispielsweise können Wahrscheinlichkeiten nicht durch Brüche angegeben werden. Möglicherweise müssen sogar neue Repräsentationen für die Grundschule entwickelt werden. Kurz-Milcke und Martignon schlagen natürliche Häufigkeiten (z.B. „2 von 5“ Äpfeln) und enaktive Repräsentationen mit modellhaften Charakter (z.B. Steckwürfel, die Individuen repräsentieren) vor. Ergänzend können sprachliche Repräsentationen zur qualitativen Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse (mit Begriffen wie „sicher“, „möglich“, „nie“) und von zufälligen Situationen hinzugefügt werden. Aber auch ikonische Repräsentationen spielen beispielsweise bei der Veranschaulichung von empirischen und idealisierten Verteilungen eine wichtige Rolle. Im Folgenden soll ausgehend von einem Beispiel auf einige offene Fragen hingewiesen werden.

3. Ein Beispiel und offene Fragen

Während eines Schulpraktikums in einer 3. Klasse konnte ich Folgendes in einer Unterrichtsstunde zur Gleichverteilung beim Würfel beobachten:

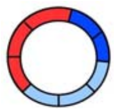
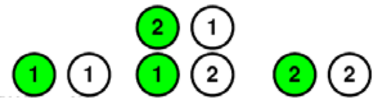
Die Kinder machten zum Würfeln Aussagen wie: „Die „6“ ist am schwersten.“, „Man kriegt nie die Zahl, die man will.“, „Das kommt darauf an...“. Auf die Frage, wie man denn herausfinden könnte, ob die „6“ am schwersten ist, antworteten die Kinder mit „Ausprobieren!“. Es folgten Würfelexperimente in Kleingruppen. Die Ergebnisse wurden in gezeichneten Säulendiagrammen festgehalten und sollten nun diskutiert werden. In den Säulendiagrammen waren die Würfelergebnisse in absoluten Häufigkeiten dargestellt. Das nebenstehende Diagramm soll der Veranschaulichung dienen. In einer solchen Darstellung fehlt die Normierung der Daten. Die SchülerInnen sehen in einem solchen Diagramm dann auch vor allem die Unterschiede der absoluten Häufigkeiten ohne sie auf die Gesamtzahl der Würfe zu beziehen. Dies führte in der Unterrichtsstunde zu einem Konflikt, der sich dadurch erklären lässt, dass hier eine Repräsentation einer empirischen Verteilung vorliegt. Intendiert war jedoch das Erkennen der idealisierten Verteilung. Für die Kinder war die „5“ am schwierigsten zu würfeln. Da in allen Gruppen die „5“ am wenigsten gewürfelt wurde, führte auch ein Vergleich mehrerer Diagramme nicht zum Ziel. Die unterrichtende Studentin versuchte den Konflikt zu lösen, indem sie davon sprach, dass alle Zahlen „ungefähr gleich oft“ geworfen wurden. Hier stellt sich sofort die Frage, was das denn eigentlich heißen soll und wann das so ist - vor allem, wenn man auch an andere Verteilungen wie etwa die der Augensummen zweier Würfel denkt. Auch der Vorschlag die absoluten Häufigkeiten zu „runden“ ist nicht vertretbar. Die Gleichverteilung wurde in dieser Unterrichtsstunde von den Kindern nicht erkannt und die zu Beginn der Stunde geäußerten Vorstellungen blieben unreflektiert.[1]



Worauf macht dieses Beispiel aufmerksam? Das Erkennen der idealisierten Verteilung aus einer im Säulendiagramm dargestellten empirischen Verteilung ist im Falle der Gleichverteilung ein besonders schwieriges Unterfangen. Es ist nur möglich, wenn die Gleichverteilung bereits bekannt ist und der Kontext (hier der Würfel) die entsprechenden Annahmen bereit hält. Entweder man wählt eine andere Repräsentation der Verteilung oder man muss das Problem der Gleichverteilung ganz anders angehen. Beispiele für andere Repräsentationen von Verteilungen sind der Ringrekorder von Wollring, das Blockdiagramm und Schaubilder:

---

1 Gestützt wird dies durch die Auswertung einer Aufgabe zur Gleichverteilung beim Würfel, die in einer späteren Stunde in die Klasse gegeben wurde.

Die ersten beiden Darstellungen können sowohl empirische als auch idealisierte Verteilungen repräsentieren. Es wird der Bezug des Teils zum Ganzen sichtbar. Dadurch könnte die Idee der Normierung vorbereitet werden. (Natürliche Häufigkeiten stellen diesen Bezug ebenso her.) Schaubilder wie das obige repräsentieren idealisierte Verteilungen (hier eines zweiseitigen Würfels) und können dazu dienen, sich eine Übersicht zu verschaffen und Verteilungen weiter zu untersuchen. Interessant wäre auch, welche eigenen Darstellungen Kinder verwenden.

Fragen lassen sich vorerst so formulieren: Welchen Einfluss haben Repräsentationen auf die Begriffsbildung im Stochastikunterricht der Grundschule? Welche Repräsentationen können Begriffsbildungsprozesse unterstützen? Und welche Rolle spielen Repräsentationen bei der Reflexion von intuitiven Vorstellungen?

Literatur

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht; Boston : Reidel.

Hoffmann, M.H.G. (Hrsg.). (2003). Mathematik verstehen – Semiotische Perspektiven. Hildesheim: Franzbecker.

Koerber, S. (2003). Der Einfluss externer Repräsentationsformen auf proportionsales Denken im Grundschulalter. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

KurzMilcke, Martignon,L. (2006). Bunte Steckwürfel und Kärtchen in Haufen: Wege zu einer natürlichen Stochastik in der Grundschule. In Meyer, J. (Hrsg.). Anregungen zum Stochastikunterricht, Tagungsband, 3, 204-223. Hildesheim: Franzbecker.

Wassner, Ch. (2004). Förderung Bayesianischen Denkens. Hildesheim: Franzbecker

Winter, H. (1976). Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6). *Didaktik der Mathematik*, 1, 22-37

Wollring, B. (1994). Fallstudien zu frequentistischen Kompetenzen von Grundschulkindern in stochastischen Situationen – Kinder rekonstruieren verdeckte Glücksräder. In Maier, H., Voigt, J. (Hrsg.). Verstehen und Verständigung, IDM Reihe, 19, 144-181. Köln: Aulis.

Martin STEIN, Kathrin WINTER, Münster

Das Projekt Mathe-Meister: Strukturen und Konzeption

Ausbildungsleiter aus berufsbildenden Institutionen berichten, dass viele Interessierte an Meisterlehrgängen vor Lehrgangsbeginn starke Defizite im Bereich der elementaren Schulmathematik aufweisen. Dieser Personenkreis schätzt seine Fähigkeiten oft falsch ein und erkennt die Defizite nicht.

Das Projekt Mathe-Meister soll daher den zukünftigen Teilnehmern von Meisterlehrgängen mittels eines webbasierten Angebots helfen, die eigenen mathematischen Fähigkeiten mit Bezug auf das eigene Berufsprofil abschätzen zu können sowie Defizite im Bereich der Mathematik mittels geeigneter Tests selbst zu erkennen (Selbsttestmodul).

Außerdem wird sich ein Teil des Projektes konkreten Fragestellungen zur Förderung des Textverständnisses mathematischer Texte aus der beruflichen Aus- und Weiterbildung sowie dem Berufsleben widmen. Ziel dieser Teiluntersuchung ist die Entwicklung eines computerbasierten Fördermoduls zum Textverständnis.

Dieser Beitrag stellt kurz die Strukturen und die Konzeption des Projektes Mathe-Meister vor und ordnet diese nachfolgend in bestehende Untersuchungen aus dem Bereich der Berufsbildung ein.

Bedeutung mathematischer und sprachlicher Kompetenzen

„Mathematische Grundqualifikationen sind nach allgemeiner Überzeugung für eine solide berufliche Ausbildung und längerfristig für eine erfolgreiche Berufsausübung unerlässlich.“ (Ivanov, Lehmann 2005, S. 1) Diese Aussage erhärten auch empirische Untersuchungen wie unter anderem die Untersuchungen von Leistungen, Motivation und Einstellungen der Schülerinnen und Schüler in den Abschlussklassen der Berufsschulen (ULME I, II und III, vgl. u. a. Lehmann et al 2007) des Amtes für berufliche Bildung und Weiterbildung in Hamburg oder die in Baden-Württemberg durchgeführten Untersuchungen von Nickolaus, Gschwendtner und Geißel (2008). Letztere verdeutlichen ebenso die hohe Relevanz auch der sprachlichen Fähigkeiten insbesondere der Lesekompetenz auf, die sich als wichtige Einflussfaktoren für die Entwicklung von Fachkompetenzen herausstellen lassen.

Mathematische Defizite im berufsbildenden Bereich

Schon im berufsbildenden Bereich – also in einer der Vorstufen des Meisterlehrgangs – lassen sich große mathematische Defizite bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern in allen Berufsbereichen feststellen. Dies bestätigen nicht nur Lehrende aus diesen Bereichen, sondern auch aktuelle empirische Studien.

In einer Untersuchung von Berufschülern des Berufsfeldes Bautechnik mittels schriftlicher Tests beispielsweise gelangten Averweg et al 2009 zu umfangreichen Ergebnissen bezüglich der mathematischen Kompetenzen von Berufsschülern dieses Beruffeldes. Die Aufgabenanforderungen hinsichtlich der mathematischen Anforderungen waren dabei sehr unterschiedlich gestaltet, um ein breites Spektrum zu erfassen. „Auffällig war, dass viele Schüler bereits Probleme mit den Grundrechenarten hatten. Ein Großteil dieser Fehler ließ sich darauf zurückführen, dass den Schülern das Verständnis über den Aufbau des Dezimalsystems fehlt, was sich zum Beispiel durch fehlende Überträge bei der schriftlichen Addition oder Subtraktion äußert. Auch das Nichtbeachten der Stellenwerte bei der Multiplikation – Teilergebnisse wurden nicht seitlich versetzt untereinander geschrieben – deutet darauf hin.

Es wurde auch deutlich, dass manche Schüler mathematische Begriffe wie Produkt, Differenz oder Durchschnitt nicht kennen. Aber auch Relationszeichen wie „<“ oder „>“ wurden mehrfach verwechselt. […] Eine weitere Hürde stellten Textaufgaben zum Thema Prozentrechnen dar, denn viele Schüler konnten die im Aufgabentext angegebenen Größen nicht zuordnen bzw. hatten Probleme bei der Anwendung des Dreisatzes.“ (Averweg et al 2009, S. 26)

Neben den konkreten mathematischen Inhaltsbereichen und dem Blick auf grundlegende mathematische Qualifikationen bzw. Aufgaben und Inhalte, muss dabei insbesondere in der berufsbildenden Forschung auch der Relevanzbereich der mathematischen Inhalte betrachtet werden – d. h., ob diese für die Ausbildung und den Berufsalltag oder nur für eines von beiden von Bedeutung sind und in welcher Form sie dort jeweils auftreten. Die Berufsbildungsforschung unterscheidet hierzu die Aspekte des *exchange value* und des *use value* (vgl. u. a. Coben 2002; O’Donoghue 2004; Taylor 2006). Der exchange value umfasst dabei die Anforderungen der Ausbildungsbereiches – schulische Anforderungen – der use value steht für die mathematischen Anforderungen, die tatsächlich im Berufsalltag relevant sind.

Das Selbsttestmodul

Die Entwicklung des Selbsttestmoduls zielt darauf ab, dass angehende Teilnehmerinnen und Teilnehmer von Meisterlehrgängen verschiedener Berufsrichtungen konkret auf ihren Berufszweig abgestimmte

- mathematische Anforderungen überblicken und nachvollziehen können und

- ihre eigenen Kompetenzen in diesen konkreten mathematischen Bereichen selbst online überprüfen können.

Im Anschluss an den Onlinetest erhält jeder Teilnehmer eine individuelle Defizitanalyse, in der ihm zum einen seine defizitären mathematischen Bereiche aufgezeigt und zum anderen konkrete Hinweise für Fördermaßnahmen zu diesen Defiziten gegeben werden, wie zum Beispiel Übungsmaterialien oder konkrete Lehrgänge seiner Kammer.

Dabei stehen mathematische Grundlagen, die zu Beginn der Meisterausbildung vorausgesetzt werden (exchange value), im Vordergrund der Tests. In umfangreichen Analysen von Lehrwerken sowie von Dozenten verschiedener Kammern bereitgestelltem eigenem Lehr- und Prüfungsmaterial wurden im Rahmen des Projektes bereits für unterschiedliche Berufsfelder konkrete Anforderungsbereiche aus den Grundqualifikationen erstellt. Grundlegende Aspekte wie die Kenntnis mathematischer Begrifflichkeiten (vgl. auch Averweg et al 2005) als notwendige Grundkenntnisse heraus, die überprüft und erläutert werden müssen, wie auch die Grundrechenarten sowie das Anwenden von Rechenregeln in N, das Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen, das Umrechnen von Einheiten, die Prozentrechnung und Zinsrechnung, der Satz des Pythagoras etc..

Diese Anforderungen unterscheiden sich je nach Berufsfeld. So ist der Satz des Pythagoras in Kenntnis und Anwendung insbesondere in Berufen wie Tischler oder Elektrotechniker relevant, für angehende Friseurmeister aber uninteressant. Dementsprechend werden die Tests und Anwendungsbereiche differenziert.

Das Fördermodul zum Textverständnis

Das Fördermodul zum Textverständnis widmet sich sowohl Inhalten und Bezugstexten aus dem Bereich der Meisterausbildung als auch der Berufsbildung sowie dem Berufsalltag verschiedener Berufsrichtungen. Die Entwicklungen und Untersuchungen umfassen dementsprechend sowohl die Anforderungen des exchange value als auch des use value. Dabei müssen außerdem für dieses Modul sprachwissenschaftliche und mathematikdidaktische Aspekte verknüpft werden. So ist wurde in umfangreichen Literaturanalysen, Analysen von Texten aus dem beruflichen Alltag und Interviews ermittelt, in welcher Form Texte (Textaufgaben) auftreten. Hierbei stellte sich heraus, dass vor allem der Umfang solcher Texte, wie zum Beispiel öffentliche Ausschreibungen, bei Weitem über die aus schulischer Sicht bekannten Text- oder Modellierungsaufgaben hinausgehen und in der Regel mehrere Seiten und entsprechend viele mathematisch relevante Inhalte und Verknüpfungen umfassen. Bei der Gliederung und Extraktion konkreter Aufgabenaspekte und möglicher Fördermaßnahmen wird unter anderem zurückgegriffen auf die Untersuchungen von Hasemann/Stern (2002), die Textaufgaben aus dem Primarstufenbereich in unterschiedliche Anforderungsstufen unterteilt. Aus sprachwissenschaftlicher Sicht ist hierbei vor allem zu beachten, wie sich die Lesekompetenz prinzipiell entwickelt (vom Buchstaben lesen über das Lesen von Wörtern hin – mit vielen weiteren Zwischenstufen – zum „Sinn entnehmenden Lesen“). Rückschließen auf diese Entwicklungsstufen müssen mögliche Fördermaßnahmen entwickelt und evaluiert werden (vgl. Haas 2002, Grabe 2004).

Erstes Resümee und Ausblick

Alle Projektteile sind grundsätzlich geprägt durch eine stets enge Verzahnung mathematikdidaktischer, mediendidaktischer und technischer Fragestellungen. Im Bereich der Entwicklung des Fördermoduls zum Textverständnis werden zusätzlich mathematikdidaktische und sprachwissenschaftliche Erkenntnisse verknüpft. Das Projekt soll Ende 2010 abgeschlossen werden. Bis dahin werden umfangreiche empirische Untersuchungen mittels Tests und Interviews unter anderem zur Erfassung von Leistungsständen (als Ausgangsituation), von Lösungsschemata (für die Konzeption von Lösungsvorgaben z. B. in Multiple-Choice Aufgaben) oder zur Evaluation einzelner Fördermaßnahmen durchgeführt.

Literatur

Averweg, A., Schürg, U., Geißel, B., Nickolaus, R. (2009). Förderungsbedarf im Bereich der Mathematik bei Berufsschülern im Berufsfeld Bautechnik. *Die berufsbildende Schule 61*, S. 22-28.

Grabe (2004). *Arbeitstechniken fürs Textverständnis*, Verlag an der Ruhr, Mühlheim.

Haas (2002). *Texte lesen, Inhalte verstehen – Ein systematisches Training zur Lesekompetenz*, Verlag an der Ruhr, Mühlheim.

Hasemann, K., Stern, E. (2002). Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben – Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematikdidaktik,* 23(3/4), S. 222–242.

Ivanov, St., Lehmann, R. (2005). Mathematische Grundqualifikation zu Beginn der beruflichen Ausbildung. *bwp@ – Ausgabe Nr. 8*, http://www. bwpat.de /ausgabe8/ivanov_lehmann_bwpat8.pdf.

Lehmann, R. H. et al (2007). *ULME III: Untersuchungen von Leistungen, Motivation und Einstellungen der Schülerinnen und Schüler in den Abschlussklassen der Berufsschulen.* Behörde für Bildung und Sport, Amt für berufliche Bildung und Weiterbildung, Hamburg.

Nickolaus, R., Gschwendtner, T., Geißel, B. (2008): Entwicklung und Modellierung beruflicher Fachkompetenz in der gewerblich-technischen Grundbildung. Zeitschrift *für Berufs- und Wirtschaftspädagogik, 104 1,* S. 48–73.

Kinga SZŰCS, Jena

Problemlösen in der wirtschaftsmathematischen Ausbildung

Ziel dieses Beitrages ist es, an einem Beispiel deutlich zu machen, wie durch Anregungen zum Modellieren und Problemlösen auch in der kaum beachteten Fachhochschulausbildung Fachkompetenz und Motivation für relativ abstrakte mathematische Begriffe gefördert werden kann.

1. Rolle der Mathematik als Nebenfach an Fachhochschulen

Es ist ein wesentliches Ziel in der Fachhochschulausbildung, Fachkräfte auszubilden, die nicht nur auf ihrem Hauptgebiet kompetent sind, sondern den Erwartungen des Arbeitsmarktes in vielfältiger Weise genügen und bei Bedarf ihr Wissen immer wieder aktualisieren können. Daher spielt in der Fachhochschulausbildung neben der Entwicklung der Schlüsselkompetenzen (Kommission der Europäischen Gemeinschaften, 2005) und der Vermittlung fachlicher Kenntnisse auch die Förderung der Berufskompetenzen (Vgl. Wissenschaftsrat, 1999) eine entscheidende Rolle. In dieser komplexen Situation hat die Mathematik eine zentrale Funktion, da durch sie das logische Denken entwickelt werden kann, was wiederum zur Förderung mehrerer Schlüssel- und Berufskompetenzen[1] beitragen kann. Durch Modellieren und Problemlösen kann auch die Entwicklung der Fachkompetenz gefördert werden. In diesem Sinne sollte der Schwerpunkt im Mathematikstudium an Fachhochschulen insbesondere auf dem Problemlösen liegen (Vgl. Curdes, 2008). Die Praxis zeigt allerdings ein anderes Bild: Es ist zu bedauern, dass die Mathematik als Nebenfach an Fachhochschulen oft als Selektionsinstrument missbraucht wird, um die Überfüllung von Hochschulen zu verringern (Vgl. Roos, 1998).

Im Folgenden wird anhand eines ökonomischen Problems dargestellt, wie man sich einen praxisorientierten, und dennoch mathematisch anspruchsvollen Mathematikunterricht an Fachhochschulen vorstellen kann.

2. Ein Beispiel aus der Ökonomie

Folgende Aufgabe stammt aus einem Lehrbuch (Schöwe, Knapp, Borgmann, 1996) für Schüler der Sekundarstufe II mit Schwerpunkt Wirtschaft und Verwaltung:

---

[1] Mathematikunterricht trägt u. a. zur Förderung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Kompetenz bei, weiterhin zur Förderung folgender Berufskompetenzen: Motivation und positive Einstellung Aufgaben gegenüber, Problemlösefähigkeit, Kreativität, Selbständigkeit in den Anfangsentscheidungen, Lernen aus Fehlern, Entscheidungen treffen, Aufstellung von Strategien, Fokussierung auf Ergebnisse und konsequentes Durchführen von Prozessen. (s. o.)

„Ein Elektronik-Unternehmen geht pro Rechnungsperiode von einem Bedarf an 1,5-V-Batterien von 48000 Stück zum Bezugspreis von 1,-€ je Stück aus. Es rechnet mit Lagerkosten von 15% berechnet vom Wert des durchschnittlichen Lagerbestandes, und Bestellkosten von 100,-€ pro Bestellung."

Es wird an dieser Stelle vorgeschlagen, den folgenden Arbeitsauftrag zu formulieren: *Ermitteln Sie die optimale Bestellmenge des Unternehmens!* Diese Formulierung kann die Aufgabe in mindestens zwei mathematische Richtungen öffnen, die im Folgenden kurz dargestellt werden und die einen Einblick in die mathematische Modellierung ermöglichen. Inwieweit die formulierte Aufgabe bereits eine Idealisierung des Problems beinhaltet, bzw. was aus Sicht des Unternehmens in dieser Situation als optimal gelten könnte, kann/soll im Unterricht zum Thema gemacht werden.

3. Lösungsansätze

1. Schritt: Analyse, Aufdeckung von Möglichkeiten

In diesem Schritt sollen insbesondere folgende Fragen beantwortet werden: Welche Parameter sind in dieser ökonomischen Situation festgelegt, welche sind variabel? Wo hat das Unternehmen einen Spielraum?

Die Analyse der Situation spielt bei jeder Art von Modellierung eine wichtige Rolle. Nach der Unterscheidung zwischen festen und variablen Größen ist allerdings für das Lösen des Problems die Erkenntnis entscheidend, dass alle variablen Größen von der Anzahl der Bestellungen pro Periode abhängen. Das Unternehmen kann also die Kosten beeinflussen, indem es die Anzahl der Bestellungen variiert.

2. Schritt: Vorwärtsarbeiten: Aus Gegebenem erste Folgerungen ziehen

Hier können durch Untersuchung konkreter Fälle Tendenzen erkannt und Hypothesen aufgestellt werden.

Da die Gesamtkosten im Falle von 1, 2, 3, 4 Bestellungen eine fallende Tendenz zeigen, könnte man vermuten, dass bei wachsender Anzahl der Bestellungen die Kosten immer weiter fallen. Es stellt sich die Frage, ob überhaupt ein Minimum der Gesamtkosten existiert. Es besteht offensichtlich ein *funktionaler Zusammenhang* zwischen der Anzahl der Bestellungen (also einer natürlichen Zahl) und den Gesamtkosten.

An dieser Stelle kann im Unterricht motiviert werden, den Begriff der Folge einzuführen bzw. Verknüpfung (konkret: Summe) von Folgen zu definieren. Der Kontext legt fernerhin nahe Folgen als spezielle Funktionen aufzufassen. Außerdem kann die Frage nach dem Minimum die Einführung „Beschränktheit" und „Monotonie" aus praktischer Sicht motivieren.

3. Schritt: Aufstellung eines diskreten mathematischen Modells

Bezeichnet *n* die Anzahl der Bestellungen, dann ergibt sich $K(n) = B(n) + L(n) = 100 \cdot n + \frac{48000}{2 \cdot n} \cdot 0{,}15 = 100 \cdot n + \frac{3600}{n}$ für die Gesamtkosten.

4. Schritt: Übersetzung der Fragestellung in die Sprache der Mathematik

Gesucht ist damit der kleinste Wert der Folge $K(n)$ - wenn er denn existiert.

5. Schritt: Lösung der mathematischen Aufgabe

Es stellt sich die Frage, wie eine unendliche aber diskrete Zahlenmenge auf ihr Minimum hin überprüft werden kann. Hierfür bieten sich u. a. folgende Ansätze an: [1] Abschätzung mit Hilfe des geometrischen und arithmetischen Mittels, [2] Überprüfung der Monotonie der Folge durch Differenzbildung, [3] Überprüfung der Monotonie durch Quotientenbildung.

6. Schritt: Auswertung des Ergebnisses, bzw. Übersetzung der Lösung der mathematischen Aufgabe in die Sprache der Wirtschaft

Die Gesamtkosten sind minimal, wenn 6 Bestellungen pro Periode erfolgen, die optimale Bestellmenge ist demnach 8000 Stück.

Nach dem 2. Schritt ist es durchaus denkbar, den funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bestellungen und den entstandenen Kosten durch eine stetige Funktion zu modellieren. Diese Herangehensweise hat die Vorteile, dass die Definition von Verknüpfungen (Summe) von Funktionen und durch die Frage nach dem Minimum aus praktischer Sicht die Einführung der Begriffw Beschränktheit, Monotonie und Extremwerte von Funktionen motiviert werden kann. Weiterhin könnte man die Studenten motivieren, einen Zusammenhang zwischen Änderung im Monotonieverhalten und Existenz von Extremwerten herzustellen. Diese Stelle kann auch als Ausgangspunkt für die Einführung des Ableitungsbegriffs dienen. Die Bedeutung der Kurvendiskussion könnte an einem recht einfachen Beispiel klar werden. In diesem Fall sieht eine skizzenhafte Lösung folgendermaßen aus:

3. Schritt: Aufstellung eines stetigen Modells

Bezeichne *x* ($x \geq 1$) die Anzahl der Bestellungen, dann ergibt sich für die Gesamtkosten: $K(x) = B(x) + L(x) = 100 \cdot x + \frac{48000}{2 \cdot x} \cdot 0{,}15 = 100 \cdot x + \frac{3600}{x}$, $x \geq 1$.

4. Schritt: Übersetzung der Fragestellung in die Sprache der Mathematik

Gesucht ist damit der kleinste Wert der Funktion K: $x \to K(x)$, $x \geq 1$ (sofern er denn existiert).

5. Schritt: Lösung der mathematischen Aufgabe

Hierfür bieten sich folgende Ansätze an: [1] Ermittlung der Extremwerte der Funktion mithilfe der ersten und der zweiten Ableitung bzw. [2] Ermittlung des Monotonieverhaltens mithilfe der ersten Ableitung:

6. Schritt: Auswertung des Ergebnisses bzw. Übersetzung der Lösung der mathematischen Aufgabe in die Sprache der Wirtschaft

Die Kostenfunktion hat bei $x=6$ einen Tiefpunkt. Da die Anzahl der Bestellungen ganzzahlig sein muss, ist dieser Tiefpunkt mit zugehörigem Minimum akzeptabel. Die Gesamtkosten sind also minimal, wenn 6 Bestellungen pro Periode erfolgen, die optimale Bestellmenge ist 8000 Stück.

4. Anmerkungen

Die Aufgabe gibt nicht nur zum echten Problemlösen Anlass, sondern sie ermöglicht die Einführung von Begriffen (Folge, Monotonie, Beschränktheit, Verknüpfungen von Folgen) und kann somit grundlegende Konzepte der Analysis motivieren helfen. Weiterhin kann durch den Vergleich des diskreten und mit dem stetigen Modell der modellhafte Aspekt der Mathematik thematisiert werden. Die beiden Lösungsansätze geben Anstoß, die Frage der Übertragbarkeit auf andere Kontexte zu debattieren, sie führen also zur Thematisierung der Verallgemeinerbarkeit verschiedener mathematischer Ansätze und deren Grenzen. Eine Untersuchung von Variationen der Aufgabe (z. B. variable Parameter) kann weitere Zusammenhänge zwischen der Aufgabenstellung und dem Ergebnis aufdecken und führt zur weiteren Verallgemeinerung der Aufgabe bzw. der Lösungsansätze.

Literatur

Curdes, B. (2008). Genderbewusste Mathematikdidaktik an der Fachhochschule. In: Zeitschrift für Hochschulentwicklung 3, Nr. 2, 17-29.

Kommission der Europäischen Gemeinschaften (2005). Vorschlag für eine Empfehlung des Europäischen Parlaments und des Rates zu Schlüsselkompetenzen für lebenslanges Lernen. Brüssel, 2005/0221 (COD).

Roos, R. (1998). Weg von der traditionellen Mathematikvorlesung. Aktivierungsstrategien in der Mathematik. In: Schwarze, B., Webler, W-D. (Hrsg.), Lernen in Europa. Neue Anforderungen an die Ausbildung von Ingenieurinnen und Ingenieuren. Weinheim: Beltz Deutscher Studien Verlag, 221-234.

Schöwe, R., Knapp, J., Borgmann, R. (1996). Mathematik zur Fachhochschulreife. Kaufmännisch-wirtschaftliche Richtung. Analysis und lineare Algebra. Berlin: Cornelsen, 278.

Wissenschaftsrat (1999). Stellungnahme zum Verhältnis von Hochschulausbildung und Beschäftigungssystem. Würzburg, Drs. 4099/99.

Maike TESCH, Christoph DUCHHARDT, Kiel

Erhebungen mathematischer Kompetenz im Nationalen Bildungspanel

Das Nationale Bildungspanel (National Educational Panel Study, NEPS) ist eine vom BMBF geförderte umfassende Längsschnittstudie im Deutschen Bildungswesen. Einer der Forschungsschwerpunkte ist die Untersuchung der Kompetenzentwicklung von Individuen über die Lebensspanne. Notwendig dafür ist eine Rahmenkonzeption mathematischer Kompetenz, welche für die gesamte Lebensspanne tragfähig ist, d.h. sowohl für die mathematische Kompetenz von Vierjährigen als auch für die der Erwachsenen. In diesem Beitrag wird ein Überblick über das im Februar 2009 gestartete NEPS gegeben und beispielhaft vorgeführt, wie mathematische Kompetenz vom Elementarbereich bis ins Berufsleben definiert und erhoben wird.

1. Das Nationale Bildungspanel

Bildung spielt in einer modernen Gesellschaft für jeden einzelnen Menschen, für seine Entwicklung und Teilhabe am gesellschaftlichen Leben, eine entscheidende Rolle. Dabei bietet das Bildungssystem den Menschen Chancen für ihre Entwicklung und Weiterentwicklung – vom Kindergarten über die Schule bis zur Erwachsenenbildung. Spezifische Stellen im Bildungswesen – beispielsweise Übergänge zwischen Bildungsinstitutionen – können zu Stolpersteinen persönlicher Entwicklung werden. Tritt dies systematisch auf, so kann es zu Benachteiligungen von ganzen Bevölkerungsgruppen kommen. Große Leistungsvergleichsstudien wie TIMSS, PISA und IGLU haben wichtige Informationen über das Bildungswesen geliefert. Doch die individuelle Entwicklung einzelner Menschen innerhalb des Bildungssystems sowie ursächliche Zusammenhänge zwischen Bildungsentscheidungen, Lernangebot und Kompetenzerwerb können durch Querschnittstudien nicht angemessen untersucht werden.

Um eine gute empirische Basis zur Steuerung bildungspolitischer Entscheidungsprozesse zu erhalten, wurde ein Konsortium gebildet, welches die Nationale Bildungspanelstudie (NEPS) durchführt. Zentraler Standort des NEPS ist die Universität Bamberg. Am IPN in Kiel sind die Verantwortungsbereiche für die Kompetenzerhebungen in Mathematik, Naturwissenschaften und ICT angesiedelt.

Ziel der Panelstudie ist die Erstellung sogenannter *Scientific Use Files*, es geht also zunächst allein um die Datenerhebung und -aufbereitung. Forschungsarbeiten mit den erhobenen Daten werden später von der DFG im Rahmen eines öffentlich ausgeschriebenen Schwerpunktprogramms gefördert.

2. Design der Erhebungen

Im NEPS werden vielfältige Forschungsansätze und -themen aus Bereichen wie Soziologie, Erziehungswissenschaft, Psychologie und Ökonomie integriert. Die gemeinsame Erforschung des Bildungserwerbs und seiner Folgen für individuelle Lebensläufe wird thematisch gegliedert in fünf übergeordnete Themenschwerpunkte (Säulen): Kompetenzentwicklung, Lernumwelten, Bildungsentscheidungen, Migration und Bildungsrenditen. Diese werden in allen Altersstufen (Etappen), insbesondere aber in Phasen des Übergangs von einer Bildungsinstitution in die nächste untersucht.

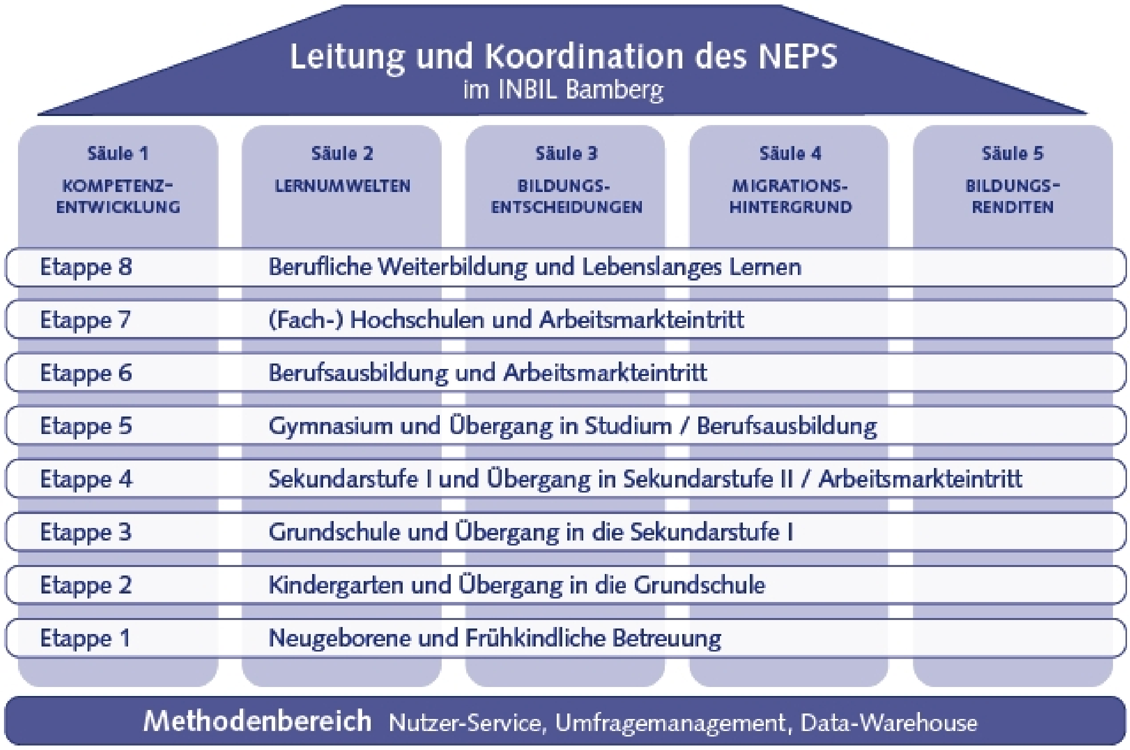


Abbildung 1: Säulen und Etappen des NEPS

Um möglichst früh aussagekräftige Daten zur Verfügung zu haben, wird ein Multi-Kohorten-Sequenz-Design verwendet. Die Erhebungen starten gleichzeitig in verschiedenen Altersstufen, so dass bereits nach wenigen Jahren Daten aus allen Altersstufen vorliegen. Es werden Kompetenzerhebungen in den Domänen Lesen, Hören, Englisch, Mathematik, Naturwissenschaften und ICT durchgeführt. Bis in das Grundschulalter wird die mathematische Kompetenz jährlich, später alle zwei Jahre erhoben. Bei Erwachsenen werden alle fünf Jahre Kompetenztests durchgeführt.

3. Modellierung mathematischer Kompetenz

Im Bildungspanel werden Kompetenzentwicklungen über die Lebensspanne untersucht. Innerhalb der Kompetenzsäule werden für die relevanten

Domänen Rahmenkonzeptionen entwickelt, die eine möglichst konsistente und kohärente Beschreibung und Messung von Kompetenzentwicklungen über alle Altersstufen hinweg ermöglichen. Theoretischer Bezugsrahmen für mathematische Kompetenz ist *Mathematical Literacy*, wie sie im Sinne von PISA 2003 für 15-Jährige definiert wurde (OECD, 2003). Mathematical Literacy bezeichnet mathematische Kompetenz, die eine mündige und aktive Teilhabe an einer wissensbasierten Gesellschaft ermöglicht. Bei den jüngeren Kindern der NEPS-Stichproben liegt der Fokus auf der Entwicklung von Vorläuferkompetenzen.

Zur Entwicklung eines ausgewogenen 30-minütigen Tests werden in Anlehnung an PISA und die Bildungsstandards eine inhaltliche und eine prozessbezogene Dimension mathematischer Kompetenz angenommen. Inhaltliche Bereiche sind dabei *Quantität, Raum und Form, Veränderung und Beziehungen* sowie *Daten und Zufall.* Kognitive (Prozess-)Komponenten sind *Argumentieren, Kommunizieren, Modellieren, Problemlösen, Repräsentieren* und *technische Fertigkeiten* - jeweils in mathematischen Zusammenhängen. Die Aufgaben werden in inner- und außermathematischen Kontexten eingebettet in Units formuliert. Aufgrund der eingeschränkten Erhebungszeit und des Verzichts auf ein Multi-Matrix-Design wird das Resultat ein eindimensionaler Kompetenzwert sein.

Die verschiedenen kognitiven Komponenten und Inhaltsbereiche spielen in den Stadien des Bildungslebenslaufes unterschiedliche Rollen: Der Bereich der Veränderung und Beziehungen rückt beispielsweise in der Sekundarstufe viel stärker in den Mittelpunkt als zuvor, der Bereich Quantität hingegen ist im Primar- und Elementarbereich zentral und somit detaillierter zu erfassen. In dieser Altersstufe wird im Bereich Quantität zwischen zwei Teilbereichen differenziert, die unterschiedliche Anforderungen für Kinder dieses Alters darstellen: *Messen und Größen* beinhaltet den Umgang mit Messinstrumenten und -größen und umfasst somit auch den Umgang mit einer kontinuierlichen Quantitätsvorstellung. *Mengen, Zahlen und Operationen* beinhaltet die Entwicklung des (diskreten) Zahlbegriffs und den Umgang mit den Grundrechenarten.

Die Entwicklung und Durchführung der Datenerhebung im Kindergarten stellt eine besondere Herausforderung dar: Für die inhaltliche Kohärenz des Konstrukts „mathematische Kompetenz“ mussten in der Rahmenkonzeption die einzelnen Inhaltsbereiche und kognitiven Komponenten so gefasst und konkretisiert werden, dass sie auch für den Kindergarten sinnvoll sind. Die Testaufgaben im Elementarbereich sollten entsprechend anschlussfähig an die des Primarbereichs sein. Da mathematisches Denken in diesem Stadium noch sehr gegenständlich und handlungsorientiert ist, sollten die

Tests zudem möglichst in materialbasierten und mündlichen Einzelinterviews durchgeführt werden.

Für die Testung älterer Schülerinnen und Schüler stehen mit IGLU, PISA etc. schon Untersuchungen zur Verfügung, an deren Tests sich das NEPS orientieren kann.

Im Anschluss an die Sekundarstufe II werden zwei Kohorten weiterverfolgt, die sich an der beruflichen Ausbildung bzw. dem Bildungsweg Gymnasium/Universität orientieren. Die Testitems werden an die Anforderungen dieser unterschiedlichen Bildungswege angepasst. Während im ersten Bereich der Schwerpunkt auf der Bewältigung von alltäglichen und allgemeinen mathematikhaltigen beruflichen Anforderungen liegt (z.B. Rechnungen, Dosierungen, Bauen), werden im universitären Zweig zusätzlich differenziertere mathematische Inhalte und Anwendungsbereiche thematisiert (z.B. Optimierung, krumme Flächen).

4. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen des Nationalen Bildungspanels sollen individuelle Bildungsverläufe im institutionellen und familiären Zusammenhang über die Lebensspanne erhoben werden. Das BMBF fördert die Erstellung von *Scientific Use Files*, die im Rahmen eines zukünftigen DFG-Schwerpunktprogramms ausgewertet werden sollen. Für die Kompetenzerhebungen werden auf Basis von Rahmenkonzeptionen altersstufenbasierte Tests entwickelt. Die Kompetenzerhebungen beginnen 2010, so dass die Fragestellungen nach Kompetenzentwicklung über die Lebensspanne sowie die Zusammenhänge mit Lernumgebungen und Bildungsentscheidungen erst im Laufe einiger Jahre untersucht werden können.

Literatur

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD.

Aktuelle Informationen zum NEPS:

http://www.uni-bamberg.de/neps

http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/neps.html

Sandra THOM, Vechta

Montessori und die ‚Alten Chinesen'

oder

Über historisch-genetischen Mathematikunterricht bei Montessori am Beispiel des ‚Großen Multiplikationsbrettes'

1. Das ‚Große Multiplikationsbrett' oder ‚Schachbrett'

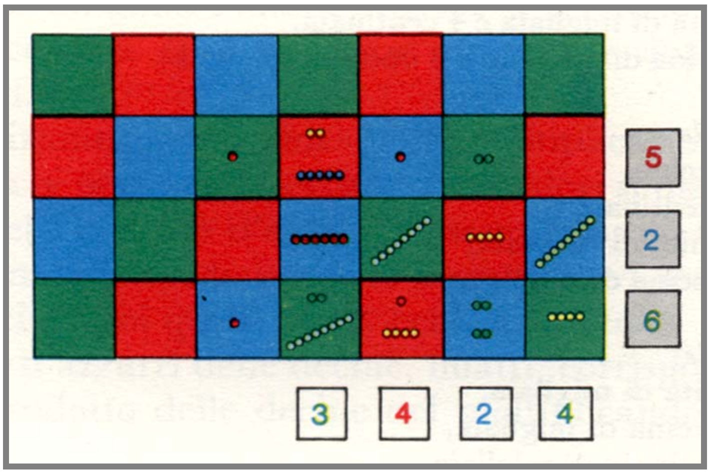
Das ‚Schachbrett', wie das Große Multiplikationsbrett im Alltag meist genannt wird, wurde in seiner ältesten bekannten Form in MONTESSORIS Arithmetiklehrbuch aus den frühen 1930er-Jahren publiziert. Es erfuhr im Laufe der Zeit einige Erweiterungen, wobei in der vorliegenden Darstellung die älteste, die sog. ‚Zweite Stufe', betrachtet werden soll. Entstand es zunächst als ergänzendes Material, ist das Schachbrett heute in einer genetischen Unterrichtskonzeption der MONTESSORI-Mathematik eingebunden in ein Netz vorausgehender und folgender Materialien. Es erfordert vor der Anwendung Grundvorstellungen und Vorwissen der Kinder zur Multiplikation und zum Zählen (Zahl und Stellenwertsystem).

Wie jedes Material für die Hand des Kindes ist auch das Schachbrett zunächst ein Lerninhalt, d.h. vor einer multiplikativen Übung muss das Kind mit der Struktur des Materials vertraut werden: Beim Schachbrett werden Zahlen materialisiert durch die Zerlegung in ihre g-adische Zahlstruktur dargestellt: Der Zahlenwert wird durch Perlenstäbchen ausgelegt, der Stellenwert ergibt sich aus der Multiplikation der Stellen vom an der rechten Seite ausgelegten Multiplikator und dem auf der unteren Leiste ausgelegten Multiplikanden, z.B. $10^1 \bullet 10^1 = 10^2$ (in der Sprechweise der Einführung: ‚Einer mal Einer ergibt Zehner.'). Die typisch MONTESSORI'sche Farbgebung der Stellenwerte wird auch beim Schachbrett aufgegriffen; die auf den ersten Blick abstrakt anmutende Zahldarstellung erschließt sich den Kindern dabei im Zuge einer zunehmenden Abstraktion der Zahldarstellungen, die an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden kann.

Die Multiplikation erfolgt in drei Schritten, die am Beispiel der Aufgabe 3.424•625 kurz beschrieben werden sollen:

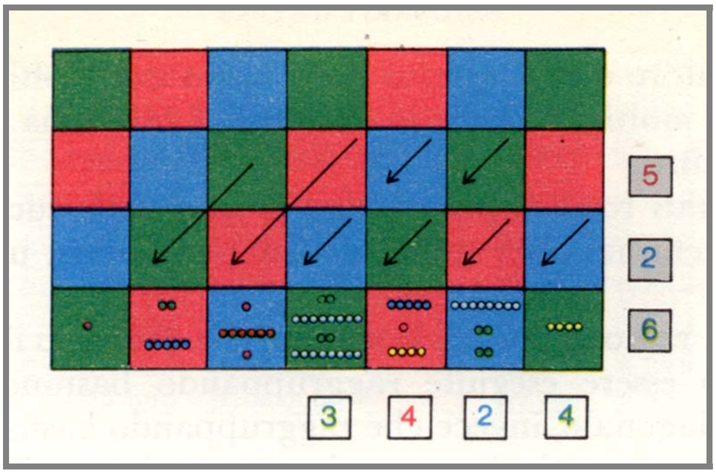
1. Schritt: Die Teilprodukte der Multiplikation ergeben sich durch stellenweises Multiplizieren, beginnend mit dem Einer des Multiplikators. Sind die Teilprodukte zweistellig, werden sie in Einer und Zehner stellengerecht aufgelegt, d.h. bei der Multiplikation der Einer (6•4=24) werden die sich ergebenden Einer (eine Viererstange) in das rechte Feld gelegt, die sich ergebenden Zehner (eine Zweierstange) in das linke, das dem nächsthöheren

Stellenwert entspricht. Der Multiplikator, hier das rechte Plättchen mit der ‚6' im Einer, ‚wandert' über das Schachbrett über die jeweils zu multiplizierende Stelle des Multiplikanden und ist so Hilfe zur korrekten Ausführung des Algorithmus.



Teilprodukte des Multiplizierens, aus: Montessori (1971) 241

2. Schritt: Die Teilprodukte der Multiplikation werden durch eine diagonale Operation des Zusammenfügens stellenwertweise addiert.



Addition der Teilprodukte, aus: Montessori (1971) 243

3. Schritt: Das Gesamtergebnis wird über Bündeln ermittelt (1.701.024).

2. Das Schachbrett als Materialisierung eines historischen Algorithmus

Das Schachbrett wurde als ein Material konzipiert, das den Kindern handlungsorientiert das Multiplizieren erleichtern und zum Verstehen der Schriftlichen Multiplikation beitragen sollte. Damit kommt ihm eine den Malstreifen im Zahlenbuch der Klasse 4 durchaus vergleichbare Funktion zu.

MONTESSORI materialisiert im Schachbrett einen historischen Algorithmus mit langer Tradition, der vermutlich in Indien entstanden ist, dann nach China und in den arabischen Raum verbreitet wurde, von wo aus er dann seinen Weg nach Europa fand: den Gelosia-Algorithmus aus der Familie der auch so genannten ‚Schachbrett-Algorithmen'. Damit ist das Material wohl ein Beispiel für die implizite Nutzung von Mathematikgeschichte:

„The simplest way is to see history implicitly: history is not an aim for itself, but a teaching itinerary is constructed which must utilise suggestions from various sectors, always keeping in mind the didactic aims. […]

In the case of an explicit use of history […], the emphasis is on history."

(MENGHINI (2002) 86ff.)

Das Schachbrett kann gleichsam ein Beispiel für eine mögliche explizite Nutzung im Mathematikunterricht 6-12jähriger Kinder sein, deren besondere Sensibilitäten MONTESSORI im Unterricht aufgreift und fördert.

3. Das Schachbrett als Beispiel für die explizite Nutzung von Mathematikgeschichte im MONTESSORI-Mathematikunterricht

Wie schon in früheren Aufsätzen ausgeführt[1], soll eine globale Darstellung der von MONTESSORI so genannten ‚Geschichte des Zählens und der Zahlen' in Form einer mit Modellen und Bildern veranschaulichten Erzählung Kindern einen Überblick verschaffen, an dem weiteres Arbeiten in Projekten und Freiarbeit anknüpfen kann. Neben dieser Geschichte, einer der großen *cosmic tales*, werden noch weitere Geschichten für den Mathematikunterricht empfohlen, zum Beispiel *Key Lessons*.

Diese können an die Geschichte des Zählens und der Zahlen anknüpfen, wie eine Geschichte der Gelosia-Multiplikation beispielsweise den ‚Weg' unseres Ziffern- und Zahlsystems von Indien über den östlichen Mittelmeerraum nach Norden erneut aufgreifen und damit vertiefen könnte. Die Darstellung muss wie bei der Geschichte des Zählens und der Zahlen von Bildern oder Modellen unterstützt werden, um den Kindern Material für ihre Imaginationskraft zu geben. Hier bieten sich u.a. Bilder historischer Mathematiker an, deren Rechenbücher als ‚Stationen' des Algorithmus' aufgegriffen werden. Auch konkrete Rechenhilfen wie beispielsweise die von John NAPIER im frühen 17. Jahrhundert publizierten Rechenstäbe (NAPIER*'s* Bones), können von Kindern genutzt, erforscht und analysiert werden; die Personalisierung und exemplarische Betrachtung einzelner ‚Statio-

---

[1] Für eine ausführlichere Darstellung muss ich an dieser Stelle auf meinen Beitrag zum Fächerübergreifenden Lernen (2007) sowie auf die breiter angelegte Darstellung zum Mehrdimensionalen Lernen mit einer vergleichenden Berücksichtigung von Parallelen zur Ethnomathematik (2004) verweisen.

nen' des Algorithmus ermöglicht dabei eine ,originale Begegnung' im Sinne ROTHS oder genetisches Lernen nach WAGENSCHEIN.

MONTESSORI fordert beim fächerübergreifenden Arbeiten eine Orientierung an den Grundlagen der jeweiligen Wissenschaft, was im Bereich des historischen Forschens unter anderem auch die kritische Würdigung von Quellen beinhaltet. Im Gespräch mit Kindern wird eine solche Überlegung durch zum Teil offene oder halboffene Fragen wie ,Woher weiß man denn das?' in kindgerechter Form angesprochen und regt so zu Diskussionen und weiteren Forschungen an. Dabei können auch im Rahmen eines Philosophierens mit Kindern Fragen zur Bedeutung und Würdigung von inzwischen als überholt betrachteten, aber in ihrer damaligen Bedeutung nicht zu unterschätzenden Rechenhilfen wie NAPIER's Bones als Zwischenstation auf dem Weg zu unserem modernen Taschenrechner diskutiert werden.

Kinder mögen Geschichte(n) und lassen sich gern von ihr (ihnen) faszinieren. Geschichte der Mathematik ist jedoch nicht nur zur Motivation geeignet, sondern kann durch kontrastierendes Untersuchen historischer Darstellungen (z.B. der mit semi-konkreten Zahlzeichen im dezimalen Stellenwertsystem unserem Zahlsystem sehr ähnlichen chinesischen Variante des Algorithmus mit der o.g. mechanischen Rechenhilfe) auch zur Vertiefung des Verständnisses des Stellenwertsystems, beispielsweise zur Funktion der Null als Platzhalter beitragen. Geschichte der Mathematik dient der Förderung sowohl inhaltlicher als auch allgemeiner Kompetenzen. *Key Lessons* ermöglichen dabei die Anwendung und Festigung von Fertigkeiten und Fähigkeiten. Daneben unterstützen sie die Erschließung der Welt im Sinne eines allgemeinbildenden Unterrichts.

Literatur

Sandra HECKMANN: Fächerverbindendes Arbeiten im Montessori-Mathematikunterricht, in: BMU, Franzbecker: Salzdetfurth 2007, 247-250

Sandra HECKMANN: Mehrdimensionales Lernen im Montessori-Mathematikunterricht (Oldenburger VorDrucke, Heft 498), Didaktisches Zentrum: Oldenburg 2004

Marta MENGHINI: On potentialities, limits and risks, in: John Fauvel / Jan van Maanen (Hgg.): History in Mathematics Education. The ICMI Study (New ICMI Study Series, Bd. 6), Kluwer Academic Publishers: Dordrecht / Boston / London ^{2}2002, 86-90

Maria MONTESSORI: Psicoaritmetica. L'Aritmetica Sviluppata Secondo le Indicazioni della Psicologia Infantile Durante Venticinque Anni di Esperienze, mit einem Vorwort von Mario M. Montessori, hg. v. Camillo Grazzini, Aldo Garzanti: o.O. 1971

Frank J. SWETZ: Capitalism & Arithmetic. The New Math of the 15th Century, including the full text of the Treviso Arithmetic of 1478, übers. v. David Eugene Smith, Open Court: La Salle ^{2}1989

Erich Ch. WITTMANN / Gerhard N. MÜLLER (Hg.): Das Zahlenbuch. Mathematik im 4. Schuljahr, Ernst Klett Grundschulverlag: Leipzig / Stuttgart / Düsseldorf 2002

Marie TICHÁ, Praha

Die Aufgabenbildung als Motivation zur Entwicklung der mathematischen Grundbildung

1. Einleitende Anmerkungen

Im Zentrum unserer Erwägungen über die Lehrerbildung ist die Suche neuer Wege, wie man ihre professionelle Kompetenzen verbessern kann. Wir fokussieren vor allem an die Herausbildung der fachdidaktischen Kompetenz; darunter verstehen wir die Kenntnis der Mathematik; die Kenntnis der Möglichkeiten dessen didaktischen Verarbeitung und die Fähigkeit der Geltendmachung dieser Kenntnisse in dem Unterricht. Unsere Erfahrungen aus der Arbeit mit Studenten der Fachrichtung Lehrer der Grundschule zeigen die „unglückliche" Tatsache, dass ihre Vorstellungen und das Begreifen von Begriffen und Vorgänge falsch sind (inkonsistent). Und es ist ein Problem, dass sie dessen nicht bewusst sind und im Gegenteil von der Richtigkeit eigener Vorstellungen und Kenntnisse überzeugt sind. Die Misskonzeptionen zeichnen sich durch lange Beharrlichkeit und Mängel werden nur schwer abgeschafft.

2. Die Aufgabenbildung in der Vorbereitung der künftiger Lehrer

Eine der Varianten, wie man die professionellen Kompetenzen verbessern kann ist die Entfaltung der Fertigkeit die Aufgaben zu bilden und den damit verbundenen Tätigkeiten. Die Bedeutung der Tätigkeiten die an Bildung von Aufgaben gezielt sind hob als einen Bestandteil der mathematischen Bildung z. B. H. Freudenthal, J. Kilpatrick, G. Polya und viele andere (erwähnt z.B. in Tichá, 2008) hervor.

Die Bildung der Aufgaben (problem posing) fassen wir als (a) Bildung der neuen Aufgaben (welche aus bestimmten „mathematischen" oder „nichtmathematischen" Situationen entstehen; auch Koman, Tichá, 2001) oder (b) als Umformulierung der gegebenen Aufgaben durch die Änderung der Bedienungen z. B. auf Grund der Frage „Was wenn (nicht)?" usw.

Wir stellten den Studenten der Fachrichtung Grundschule allmählich folgende Tasks, die im Regel drei bis fünf Aufgaben zu bilden forderten: (a) die aus gewissen frei beschriebenen Situation hervorgehen, (b) bei deren Lösung eine gewisse Errechnung reicht, (c) die gewissen Angaben erhalten, (d) bei deren Lösung wir zum gewissen Ergebnis kommen.

Im Hinblick auf die wichtige Stellung des Lehrstoffes „Brüche", haben wir uns auch bei der Bildung der Aufgaben auf dieses Thema orientiert.

Wir verfahren in einigen Schritten: Bildung der Aufgabe; die Lösung der gebildeten Aufgabe und die individuelle Reflexion der gebildeten Aufgabe (der Autor der Aufgabe wie andere Studenten führen beides durch); gemeinsame Reflexion der gebildeten Aufgabe oder Aufgabengruppe.

3. Einige Beispiele der Aufgaben gebildet zum Task (c) und (d).

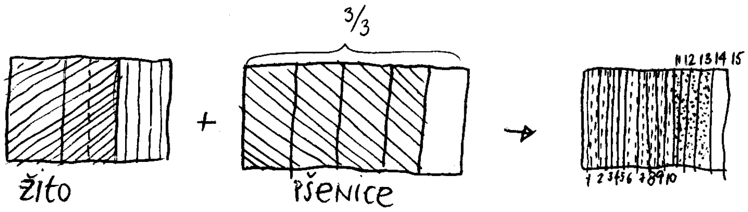
Task (c): *Situation: Hanka schrieb eine ½ Stunde Aufgaben und lernte eine ¼ Stunde Vokabeln. Bilden sie drei bis fünf Textaufgaben.*

Die Mehrheit der von den Studenten gebildeten Aufgaben hatte denselben Charakter wie die folgenden Fragen: *Wie lange widmete sich Hanka den Schulpflichten? Um wie viel Minuten mehr widmete sich Hanka den Aufgaben gegenüber den Vokabeln?* Vereinzelt kamen folgende Fragen vor: *Wievielmal mehr Zeit hat sie mit den Aufgaben verbracht? Im welchen Verhältnis hat sie sich dem Studium gewidmet?*

Task (d): *Bilden sie drei bis fünf Textaufgaben, dessen Ergebnis wird als Bruch 8/15 angegeben.*

Eine Studentin bildete folgende Aufgabe (mit Lösung): *Der Landwirt hat Feld mit 2/3 Roggen und 4/5 Weizen ausgesät. Der Rest der Fläche des Feldes ist mit Mais besät. Welches Teil des Feldes macht Korn?*

(Roggen ~ žito, Weizen ~ pšenice; Korn bildet 8/15 des Feldes. ~ Obilí tvoří 8/15 pole.).



$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ obilí tvoří $\frac{8}{15}$ pole.

Die Aufgabe und ihre Lösung zeugen von schweren Missverständnissen. Beseitigung dieser Missverständnisse erfordert tiefe Intervention.

Dem Charakter der Mehrheit der Aufgaben, die bei der Lösung des Tasks (d) gebildet waren, entspricht folgende: *Die Mutter hat den Kuchen in 15 Teile geteilt. Peter hat 2/15 des Kuchens gegessen, Anna 1/15 des Kuchens und der Vater 4/15 des Kuchens. Wieviele Teile blieben von gesamter Zahl?*

Im nachfolgenden Gespräch hat sich bewiesen, dass „Fünfzehntel“ für die Autorin ein Synonym für „Stück“ ist. Sie erklärte: *Acht fünfzehntel das ist wie acht Stücke.* Das Ganze ist in 15 Stücke geteilt.

4. Was beweisen die gebildeten Aufgaben

Die Studenten haben Mängel in der Fähigkeit unterschiedliche Interpretationen und Repräsentationen auszunützen (z.B. Behr et al., 1983).

Es hat sich gezeigt, dass die Studenten zu viel in den natürlichen Zahlen „beheimatet“ sind. Und sie „beschränken sich“ zu viel auf Addieren.

Wenn die Studenten herausgefordert sind mehr als eine Aufgabe zu bilden, dann können wir stereotypen Charakter dieser Aufgaben beobachten.

Wir sehen auch Stereotype in der Wahl des Kontextes oder der Umgebung (diskrete oder kontinuierliche). In der rekapitulierenden Diskussion haben die Studenten oft angeführt, dass es verhältnismäßig einfach war viele Aufgaben vom selben Typ zu bilden. Sie haben Probleme mit Bildung der „Kaskade” der Aufgaben mit steigendem/sinkendem Schwierigkeitsgrad.

5. Zum Nachdenken

Wir haben den Studenten auch folgende Fragen gestellt: War die „Bildung der Aufgaben“ nützlich für Sie? Was für ein Beitrag hatte es? Ist für ihre Vorbereitung die „Lösung“ oder die „Bildung“ der Aufgaben wichtiger? Wir führen einige Antworten auf:

Ich habe festgestellt, dass oft die Bildung der Aufgabe mehr Aufwand erfordert, als man erwarten würde. Früher hatte ich das Gefühl, dass es nicht so ein Problem ist – eine Aufgabe auszudenken.

Während der Bildung der Aufgaben habe ich die Probleme wahrgenommen, welche die Kinder mit der Wortaufgabe haben können.

Wichtiger ist die Bildung, denn bei der Lösung denke ich nur schnell über die Aufgabe nach und die bereichernden Erkenntnisse können mir leichter entgehen. Respektive: Ich würde sagen es geht Hand in Hand.

6. Der Beitrag der Eingliederung der „Bildung der Aufgaben” in die Vorbereitung der Lehrer – Einige bisherige Feststellungen

Die Bildung der Aufgaben begreifen wir von Anfang an als **Ziel** und als **Mittel** der mathematischen Bildung der Lehramtsstudenten. Wiederum haben wir uns überzeugt, dass die von Studenten gebildeten Aufgaben Informationen über das Niveau des Verständnisses bieten und deswegen ist es möglich sie als Mittel für die **Diagnostik** des Niveaus des Verständnisses, als Mittel für Erschließung der Misskonzeptionen anwenden (Tichá, 2003; Tichá, Hospesová, 2009).

Wir sind darüber hinaus zum Schluss gekommen, dass man die Aufgabenbildung als **Motivationsfaktor** ansehen kann – die Tätigkeit ist

Quelle der Herausforderung für die Studenten zur Vertiefung eigener Kenntnisse; im Rahmen der Bildung der Aufgaben, der Lösung der gebildeten Aufgaben und der folgenden (kooperativen) Reflektion werden Studenten eigener Mängel, Unkenntnisse bewusst und das führt manche Studenten zur Bemühung eigene Kenntnisse zu vertiefen und so auch zur Entwicklung der mathematischen Grundbildung (mathematical literacy) und professionellen Kompetenz.

Weiterer Beitrag: Den Studenten wird es klar, dass der erste Schritt der Vorbereitung für den Unterricht das Durchdringen in den mathematischen Bildungsinhalt, die Durchführung dessen didaktischen Analyse ist, selbstverständlich mit Hinsicht auf konkrete Kinder.

Es hat sich unsere ursprüngliche Ansicht bestätigt (mit welcher wir zur Bildung der Aufgaben herangetreten sind), dass die Bildung der Aufgaben ergänzt um (kooperative) Reflexion ein nützlicher Weg zur Weiterentwicklung, Vertiefung und Qualitätsverbesserung der fachdidaktischen Kompetenz (also auch der mathematischen Grundbildung) ist.

Anderseits: Wir sehen verschiedene **offene Fragen**. Besonders bedeutende ist folgende: Wie kann man den Beitrag der Bildung der Aufgaben für die Autoren und den Progress in Fachkompetenzen dieser Autoren feststellen?

Literatur

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E.A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh, M. Landau (eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York : Academic Press, 91-125.

Koman, M., Tichá, M. (2001). Von der spielerischen Untersuchung der Situation zum Rechnen. In: *Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand (Festschrift für G. N. Müller*), Ch. Selter, G. Walther (eds.). Düsseldorf, Leipzig : Ernst Klett, 100-111.

Tichá, M. (2003). Following the path of discovering fractions. In J. Novotná (ed.) *Proceedings of SEMT '03*. Praha : UK PedF, 17-27.

Tichá, M. (2008). Wir lernen die Missverständnisse und Fehlvorstellungen der Studenten zu beheben . In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008 (Budapest)*, Hildesheim : Franzbecker, 761-764.

Tichá, M., Hospesová, A.(2009): Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. *Proceedings of CERME 6,* in print.

Anmerkung: Diese Untersuchung wurde durch das Förderungsprojekt GACR 406/08/0710 und durch AdW CR Institutional Research Plan No. AV0Z10190503 unterstützt.

Karel TSCHACHER, Erlangen

Das W-Seminar Ein Angebot in der Oberstufe des G8 in Bayern

1. Bildungslandschaft Bayern

1.1. Das G 8 mit der neuen Oberstufe

1.2. Die Seminare

2. Das W-Seminar

2.1. Ziele, Aufbau, Zeitplan Auf einer Seite

http://www.isb-oberstufegym.de/userfiles/Die_Seminare/W-Seminar_auf_einer_Seite.pdf

2.2. Bewertung Leistungsmessung

http://www.gymnasium.bayern.de/gymnasialnetz/oberstufe/seminare/w-seminar/leistungserhebung/beispiele/

3. Hyperreelle Zahlen eine Alternative zur herkömmlichen Analysis

3.1. Ziel der Arbeit (Text 1)

3.2. Das Wesen der Mathematik

3.3. Wissenschaftspropädeutik

3.4. Infinitesimalrechnung und die hyperreellen Zahlen

3.5. Hyperreelle Zahlen im Schulunterricht

3.6. Mögliche Umsetzung als W-Seminar(Text 3)

4. Kegelschnitte am Computer

I Allgemeines

I.1. Ein Überblick über die neue Oberstufe des Gymnasiums in Bayern

I.2. “Kegelschnitte am Computer” als Thema im wissenschaftspropädeutischen Seminar (Text 2)

I.3. Aufbau des wissenschaftspropädeutischen Seminars zum Thema Kegelschnitte

II. Begleitheft für Lehrkräfte

II.1. Einführung in Cabri3D

II.2. Einführung in DynaGeo

II.3. Basiswissen

II.4. Der Kegel

II.5. Die Scheitelgleichung der Kegelschnitte

II.6. Die Mittelpunktsgleichung

II.7. Entartete Kegelschnitte

II.8. Brennpunkte

II.9. Leitlinien

II.10. Der Zylinderschnitt

II.11. Anwendungen der Kegelschnitte

II.12. Die Seminararbeit (Text 4)

II.13. Schriftliche Leistungserhebungen

III. Begleitheft für Schüler "Kegelschnitte am Computer"

5. Zusammenfassung

Text 1 Ziel der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit soll die Theorie der hyperreellen Zahlen, ein Teilgebiet der Nichtstandard-Mathematik, erklärt und für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe aufbereitet werden. Es werden einige Unterrichtseinheiten entworfen unter dem Aspekt einer möglichen Umsetzung in den neu entstandenen Seminarfächern, insbesondere dem so genannten W-Seminar. Dazu wird auch der vielschichtige und umfassende Begriff „Wissenschaftspropädeutik“ geklärt und auf die Intention eingegangen, die das Bayerische Staatsministerium für Unterricht und Kultus mit der Einführung eines solchen Seminars verbindet. Eine Hauptkomponente der wissenschaftlichen Kompetenz, die die Schüler des Lehrgangs bzw. Seminars erwerben sollen, ist die Fähigkeit des Beweisens. Dies und die Tatsache, dass das Gebiet „Nichtstandard-Analysis“ in der Mathematik historisch und philosophisch „vorbelastet“ ist, d. h. dass bzgl. ihrer Berechtigung und Gültigkeit lange kontrovers diskutiert wurde, lässt es auch wichtig erscheinen, zunächst das Wesen der Mathematik und die Philosophie, die sich hinter dem mathematischen Denken verbirgt, zu durchleuchten und detaillierter zu beschreiben.

Text 2 Seminararbeitsthemen

Im Folgenden sei noch kurz eine Liste möglicher Facharbeitsthemen vorgestellt, die die Schüler im Rahmen eines wissenschaftspropädeutischen Seminars bearbeiten könnten:

- Geschichte der Infinitesimalrechnung
- Philosophie der Mathematik
- Flächenberechnung nach Archimedes
- Näherungsverfahren
- Folgen und Reihen (hyperreell betrachtet)
- Die Zahlenkörper Q, R, *R (algebraische Betrachtung)
- Das Transferprinzip, interne Mengen
- Die Unendlichkeitsbrille (evtl. technische Umsetzung, Funktionsgraphen unter dem Mikroskop)
- Kurvendiskussion mit hyperreellen Zahlen
- Differentialgleichungen mit hyperreellen Zahlen
- Reelle und hyperreelle Beweise im Vergleich (Sätze)
- Gleichmäßige Stetigkeit
- Integration mit hyperreellen Zahlen
- Krümmungskreis
- Hyperreelle Zahlen in der Physik / in den Naturwissenschaften
- Computerprogramme für hyperreelle Zahlen (DERIVE, MAPLE)
- Hyperreelle Methoden in der Stochastik

Text 3 Warum soll man Kegelschnitte am Computer behandeln?

- Die Abbildungen von Kegelschnitten sind meist zweidimensional, der eigentlich doch wichtige und interessante Charakter einer Schnittfigur geht dabei völlig verloren.
- Im “computerfreien” Unterricht kann nur ein Modell des Kegels, eventuell mit Schnittebene, gezeigt werden, fast schon als Luxus muten Plexiglasmodelle mit den zum jeweiligen Kegelschnitt gehörigen Dandelinkugeln und Schnittebenen an. Zudem liegen diese Modelle meist nur in geringer Stückzahl vor, die Lehrkraft kann also lediglich kurz für die gesamte Klasse den Schnitt am Kegel demonstrieren, eingehendere Betrachtungen durch die einzelnen Schüler ihrer Lerngeschwindigkeit entsprechend sind fast unmöglich.
- Dreidimensionale, statische Abbildungen des Schnitts eines Kegels sind der Verständlichkeit wegen oft stark vereinfacht und trotzdem für den Schüler verwirrend.
- statische Abbildungen verwehren den erfahrbaren Zugang zu Zusammenhängen zwischen den einzelnen Kegelschnitten Mit geeigneter Software können viele dieser Probleme, die die Einsichtnahme des Schülers in die Materie oft beeinträchtigen, vollständig beseitigt werden. Dies sei an folgenden Beispielen illustriert:
- Kegelschnitte können mit dynamischen Geometrie-Programmen wie Cabri3D oder Archimedes leicht als zweidimensionale Ergebnisse eines Schnitts von Ebene und Kegel im dreidimensionalen Raum begriffen werden. Der Schnittcharakter der Kegelschnitte bleibt erhalten und kann durch zweidimensionale Konstruktionen ergänzt werden.

- dynamische Geometrie-Software erlaubt es jedem Schüler, seinen eigenen Kegel eingehend von allen Richtungen zu betrachten, so dass das Verständnis des Schülers durch diese Anpassung an seine persönliche Lerngeschwindigkeit gefördert wird.
- Dreidimensionale Abbildungen des Schnitts eines Kegels können hier vollständig unvereinfacht vorliegen und bestimmte Objekte und Benennungen, je nach Belieben und Notwendigkeit, "sichtbar" oder "unsichtbar" gemacht werden.
- Durch den dynamischen Aufbau der Arbeitsblätter können die Kegel nicht nur, wie es schon beim Plexiglasmodell möglich ist, von allen Seiten betrachtet werden, sondern einzelne Punkte bewegt und damit auch die Lage des Kegels oder der Schnittebene im Raum verändert werden. So kann der Schüler zum Beispiel selbst durch Experimentieren den Übergang vom Kreis über Ellipse und Parabel zur Hyperbel herausfinden oder nachvollziehen.

Text 4 Seminararbeiten

- Polaren und Hüllkurven
- allgemeiner Kegel - allgemeiner Kegelschnitt
- "Die Dandelinschen Kugeln"
- Zylinderschnitte
- Kegelschnitte in 3D am Modell (Modellbau aus Styropor etc)
- Archimedes und die Quadratur der Parabel
- Geschichtliche Betrachtung der Kegelschnitte
- Projektive Kegelschnitte
- Kegelschnitte als Lösungen quadratischer Gleichungen
- die Rotationskörper der Kegelschnitte
- Kegelschnitte in der Physik
- Brückenbau mit Kegelschnitten
- Bau eines Parabolspiegels für Schallwellen
- Kegelschnitte in der Architektur
- Kegelschnitte in der Technik
- Spiegelteleskope - eine Erfolgsgeschichte
- Funknavigation - Wie funktionieren GPS, Loran und andere Navigationssysteme?
- Der Mathematische Garten - Kegelschnitte in der Landschaftsarchitektur
- Mathematik und Kunst am Beispiel der Kegelschnitte
- Die Ellipsenbahnen der Planeten unseres Sonnensystems

Literatur:

Fokus Mathematik Gymnasium Bayern, Seminare W und P Themenvorschläge mit Kopiervorlagen, Cornelsen, Berlin 2008

Die Seminare in der gymnasialen Oberstufe, ISB München, München, 2008

Aufbau eines wissenschaftspropädeutischen Seminars über Kegelschnitte mit dem Titel: "Kegelschnitte am Computer", Angela Steffanides, Erlangen, 2008, nicht veröffentlicht.

Hyperreelle Zahlen - eine Alternative zur herkömmlichen Analysis -, Georg Willert Erlangen, 2008, nicht veröffentlicht.

Stefan UFER, Elisabeth LORENZ, München

Wahr oder falsch? Der Umgang mit Vermutungen als mathematische Kompetenz

1. Warum gerade Vermutungen?

Eine mathematische Vermutung ist zunächst eine Aussage, deren Wahrheit innerhalb der mathematischen Community nicht letztgültig durch einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel geklärt ist. Der Umgang mit solchen Vermutungen, beziehungsweise allgemeiner mit mathematischen Aussagen, deren Wahrheitsgehalt subjektiv noch nicht geklärt ist (obwohl u.U. doch irgendwo ein Beweis bzw. ein Gegenbeispiel existiert), ist zunächst für Mathematiker im Bereich der Forschung alltäglich. Insofern wird im Folgenden unter einer Vermutung eine mathematische Aussage verstanden, deren Wahrheit (subjektiv) nicht abschließend gesichert ist. Eine Vermutung kann dabei einerseits mit einer Einschätzung ihrer Plausibilität verbunden sein, andererseits mit dem Wissen über einschränkende Bedingungen ihrer Gültigkeit.

Der Umgang mit Vermutungen ist nicht nur Teil der professionellen Tätigkeit von Mathematikern, sondern wird im Bereich des Argumentierens als ein Ziel von Mathematikunterricht formuliert (KMK, 2003; KMK, 2004). Die Fähigkeit zum Umgang mit unsicheren Informationen ist darüber hinaus für Schülerinnen und Schüler von Bedeutung, weil mathematisches Wissen in der Regel nicht immer korrekt und genau erinnert wird. Die Rekonstruktion unvollständig oder ungenau erinnerter Zusammenhänge ist eine Anforderung, der sich Lernende wiederholt gegenüber gestellt sehen.

Letztlich ist der Umgang mit Vermutungen eine Komponente bei der Planung von Problemlöseprozessen. Für das mathematische Beweisen wird bereits von Koedinger und Anderson (1990) eine solche Planungsphase postuliert. Dass hier der Identifikation potentiell hilfreicher Zwischenbehauptungen, die in obigem Sinne auch Vermutungen sind, eine zentrale Rolle zukommt, zeigt die Analyse von Heinze et al. (2008). Auch in mathematischen Problemlöseprozessen im allgemeineren Sinn ist die Untersuchung von potentiellen Zusammenhängen zwischen relevanten Elementen der Problemsituation ein grundlegender Teil der Lösungsplanung.

2. Prozessmodelle und empirische Befunde

Ganz allgemein wird die Fähigkeit zum Umgang mit Vermutungen als „Conjecturing“ bezeichnet. Koedinger (1998) schlägt dafür ein Prozessmodell vor, das zwei Zielbereiche sowie mögliche Strategien (sub-goals) beschreibt, die zum Erreichen der Ziele eingesetzt werden können. Zu den

Zielbereichen zählt Koedinger das *Aufstellen von Vermutungen* sowie das *Argumentieren*. Strategien sind unter anderem das *Untersuchen von Vermutungen*, wie z.B. durch Umformulierung, Betrachtung von Einzelbeispielen, die *Deduktion*, im Sinne des Abwägens notwendiger und hinreichender Bedingungen für eine Behauptung sowie die *Konstruktion von Beweisen*, auch für Teile der Vermutung.

Im Folgenden wird in diesem Beitrag die Evaluation von Vermutungen durch induktive Arbeitsweisen im Mittelpunkt stehen, also inwiefern Vorwissen und Informationen aus stützenden bzw. widerlegenden Einzelbeispielen die Evaluation einer Hypothese beeinflussen. Für die Untersuchung von Beispielen fanden Barkai, Tsamir, Tirosh und Dreyfus (2003) bei einer Untersuchung an 27 Grundschullehrkräften heraus, dass etwa die Hälfte der Probanden stützende Beispiele für die Begründung von Allaussagen heranzog, ein Fünftel wertete Gegenbeispiele als ausreichend zur Ablehnung von Existenzaussagen. Ein differenziertes Bild zeigt sich in den Untersuchungen von Lin und Wu Yu (2005, Sekundarstufe I, jeweils über 1000 SchülerInnen): 10-20% der Probanden lehnen eine Aussage nicht vollständig ab und schränken ihre Gültigkeit nur ein, obwohl sie explizite Gegenbeispiele angegeben haben.

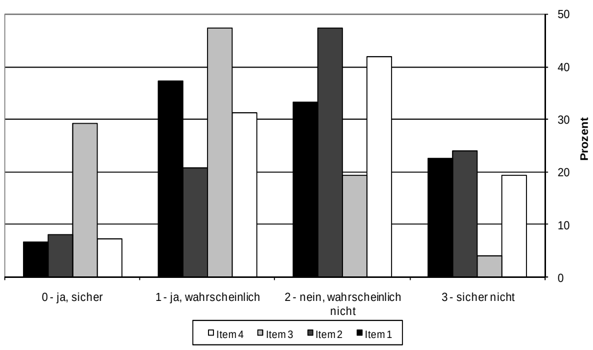
Eine Erklärung für diese unvollständige Interpretation von Informationen aus Gegenbeispielen können Theorien über den Umgang mit deduktiven Schlüssen im Alltag bieten. Basierend auf empirischen Ergebnissen eigener und fremder Untersuchungen schlagen Verschueren, Schaeken und d'Ydewalle (2005) ein Zwei-Prozess-Modell zur Evaluation deduktiver Aussagen vor. Ein schneller, heuristischer Prozess nutzt dabei probabilistisches Erfahrungswissen über die Häufigkeit des gemeinsamen Auftretens von Voraussetzung und Behauptung. Ein zweiter, langsamerer aber in vielen Fällen exakterer Prozess integriert Informationen über mögliche Ausschlussgründe der Behauptung und Gegenbeispiele. Eine offene Frage ist, ob sich Einflüsse des ersten Prozesses auch auf die Evaluation von mathematischen Aussagen zeigen und ob sich dadurch fehlerhafte Evaluationen von Vermutungen zumindest teilweise erklären lassen.

3. Spontane Einschätzung und gezielte Untersuchung von Vermutungen

Zur Untersuchung dieser Frage wurde eine erste empirische Untersuchung mit 150 Zehntklässlern zweier bayerischer Gymnasien durchgeführt. Unter anderem wurden den Teilnehmern nacheinander vier mathematische „Vermutungen“ aus dem Bereich der elementaren Zahlentheorie vorgelegt, beispielsweise: „*Wenn ich zu einer ganzen Zahl ihr Quadrat und eins addiere,* *dann bekomme ich immer eine Primzahl als Ergebnis*“ (Item 1). Für jede Vermutung sollte zunächst eine spontane Einschätzung ihrer Plausibilität auf einer vierstufigen Skala abgegeben werden. Anschließend waren die Vermutungen weiter zu untersuchen, eine neue, u.U. angepasste Formulierung der Vermutung anzugeben und ggf. ein Beweis dieser neuen Vermutung zu formulieren. Eine der vier vorgelegten Vermutungen (Item 3) war korrekt, ansonsten waren im Zahlbereich bis 20 Gegenbeispiele zu finden.

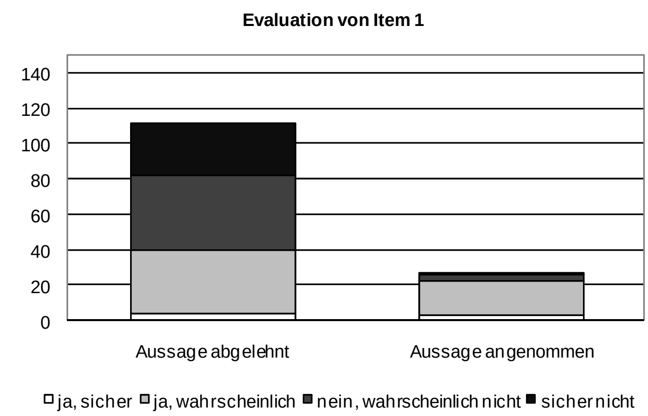
Wie die Ergebnisse von Johnson-Laird und Hasson (2003) für Alltagsargumentationen erwarten ließen, nutzten die Probanden zur Untersuchung der Vermutungen vorwiegend spezifische Beispiele, lediglich in zwei Fällen fand sich ein Ansatz zu Formalisierung und Deduktion. Zur Auswertung werden hier nur die spontanen Anfangseinschätzungen, die Anzahlen der in der Bearbeitung der SchülerInnen angegebenen Beispiele und Gegenbeispiele herangezogen sowie die letztendliche Evaluation der Aussagen.

Zunächst zeigte sich, dass die spontanen Einschätzungen der SchülerInnen relativ treffsicher waren. So wurde die korrekte Aussage signifikant häufiger positiv bewertet als negativ, bei den anderen drei Vermutungen zeigte sich der umgekehrte Effekt.



Der Zusammenhang zwischen den spontanen Einschätzungen und der Angabe eines Beispiels bzw. Gegenbeispiels wurde mittels Rangkorrelationen untersucht. Bei zwei Items ergaben sich mäßige, aber signifikante Korrelationenzwischen der anfänglichen Einschätzung der Aussage und der Anzahl stützender Beispiele. Bei allen drei Items war eine positive Anfangseinschätzung negativ mit der Angabe von Gegenbeispielen korreliert. Beispiele, die weder als Beispiele noch als Gegenbeispiele einzuordnen waren wurden kaum angegeben.

Letztendlich wurde die korrekte Aussage von 8% der SchülerInnen abgelehnt, die falschen Vermutungen wurden von 20%, 13% bzw. 20% angenommen. Dabei zeigte sich, dass die inkorrekten Evaluationen vornehmlich von Schülerinnen und Schülern



stammten, die bereits eine inkorrekte Anfangseinschätzung der Aussagen angegeben hatten (Siehe z.B. Diagramm für Item 1). Auch für die einzelnen Items durchgeführte logistische Regressionsanalysen ergaben, dass neben der Anzahl der angegebenen Gegenbeispiele auch die anfängliche Einschätzung der Vermutungen einen signifikanten Zusammenhang mit der letztendlichen Entscheidung zur Annahme oder Ablehnung der Vermutung zeigt.

4. Diskussion

Auch wenn sich auf methodischer Seite noch einige Möglichkeiten zur Verbesserung des Studiendesigns aufgetan haben, deuten die Ergebnisse der Untersuchung darauf hin, dass neben den betrachteten Einzelbeispielen in der Tat auch die anfängliche, spontane Einschätzung der Vermutung einen Einfluss auf die letztendliche Entscheidung über Annahme oder Ablehnung der Vermutung hat. Dies ist mit entsprechenden Ergebnisse aus der Psychologie zum Umgang mit deduktiven Schlüssen im Alltag konsistent (Verschueren et al., 2005). Um einen genaueren Eindruck von den dieser Beobachtung zugrunde liegenden individuellen Prozessen zu bekommen ist eine Interviewstudie in Planung.

Literatur

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D. & Dreyfus, T. (2003). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In: A.D. Cockburn, E. Nardi (Hrsg.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 57-64. Norwich: PME.

Heinze, A., Ufer, S., Cheng, Y.-H., Lin, F.-L. & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. In: *ZDM - International Journal on Mathematics Education 40*(3), 443-453.

Johnson-Laird, P.N. & Hasson, U. (2003). Counterexamples in sentential reasoning. In: *Memory & Cognition 31*(7), 1105-1113.

Koedinger, K.R. & Anderson, J.R. (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of Expertise in Geometry. In: *Cognitive Science 14*, 551-550.

Koedinger, K.R. (1998). Conjecturing and argumentation in high-school geometry students. In: D. Lehrer & D. Chazan, *Designing learning environements for developing understanding of geometry and space*, 319-347.

KMK (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.

Lin, F.-L. & Wu Yu, J.-Y. (2005). False Proposition - As a means for making conjectures in mathematics classrooms. Vortrag auf der *Asian Mathematical Conference (AMC)*. http://ww1.math.nus.edu.sg/AMC/papers/Lin-Fou-Lai.pdf, (24.3.2009).

Verschueren, N., Schaeken & W., d'Ydewalle, G. (2005). A dual-process specification of causal conditional reasoning. In: *Thinking & Reasoning 11*(3), 239-278.

Philipp ULLMANN, Frankfurt

Klio geht zur Schule. Vom Ruhm der Geschichte im Mathematikunterricht

Klio (griech. „die Rühmende“) ist die Muse der Geschichtsschreibung. Trotz ihrer Anmut verspürt man ihren Kuss im Mathematikunterricht selten. Und warum auch? Was Mathematik ist, davon haben SchülerInnen der Stufe 11 eine ziemlich klare Vorstellung:

- „Mathematik bedeutet für mich *Rechnen*.“
- „Für mich ist Mathematik in erster Linie *rechnen* & verstehen bzw. logisches Denken.“
- „Mit Mathematik verbinde ich Zahlen, *Formeln*, komplizierte Aufgaben und das damit verbundene Denken und Lösen von *Rechen*aufgaben.“

Abb. 1: Vorstellungen von Mathematik

Wenn Mathematik aber auf Rechnen und Formeln reduziert ist, dann verwundert es nicht, dass die meisten SchülerInnen keine Verbindung zwischen Geschichte und Mathematik sehen.

Mathematik als persönlich nicht relevantes, oftmals halb- bzw. unverstandenes Manipulieren von Zahlen und Zeichen – fraglos ist eine solch verkürzte Sichtweise nicht wünschenswert, zumal sie einem anti-emanzipatorischen Moment Vorschub leistet (vgl. Ullmann 2008). Hier nun schlägt Klios Stunde. Weil die historische Dimension – nicht eng als Mathematikgeschichte gefasst, sondern allgemeiner die Bildungs- und Unterrichtsgeschichte umschließend – als ungewohnt und dadurch als irritierend wahrgenommen wird, ermöglicht sie das Aufbrechen der gewohnten Vorstellungen und im Idealfall einen neuen, aktiv-gestaltenden Blick auf die Mathematik – gerade auch bei SchülerInnen, deren Verhältnis zur Mathematik prekär ist.

Geschichtliche Exkurse im Mathematikunterricht

In den vergangenen drei Jahren habe ich an einer Gesamtschule mit GOS in Mathematik-Grundkursen der Stufe 11 (Orientierungsstufe) unterschiedliche Fragestellungen erprobt, von denen ich exemplarisch drei vorstellen möchte.

<u>Exkurs 1</u>: Reflexion der eigenen Lernbiographie

Den Übergang in die Oberstufe erleben viele SchülerInnen als spürbaren Einschnitt. Insofern bietet sich der Beginn des Schuljahres an, um den

SchülerInnen in einem ersten Schritt der Historisierung bewusst zu machen, dass ihr eigenes (Mathematik-)Lernen eine Geschichte hat.

Verfassen Sie einen Text, in dem Sie auf Ihre Erfahrungen mit Mathematik eingehen (ca. 400 Wörter).

Dieses Aufgabenformat ist den SchülerInnen prinzipiell vertraut und erfreut sich großer Beliebtheit. Die ersten Sätze sind vielfach Programm und spiegeln das gesamte Spektrum von Affirmation bis Ablehnung:

- „Von Anfang an hatte ich keine Probleme mit der Mathematik."
- „Anfangs war ich eigentlich kein großer Fan der Mathematik."
- „Die Mathematik und ich waren noch nie die engsten Freunde."
- „Meine Erfahrung mit Mathematik war meistens sehr frustrierend."
- „Das naturwissenschaftliche Fach Mathematik war mir schon immer ein Hindernis."

Trotz aller Offenheit sind die Texte durchaus quellenkritisch zu lesen. Nach (mindestens) zehn Jahren Schule haben die SchülerInnen gelernt, den (vermeintlichen) Erwartungen der Lehrkraft zu entsprechen. So schreibt eine Schülerin, die mit schwindender Motivation um ihr schulmathematisches Überleben ringt:

„Im Großen und Ganzen finde ich das Fach Mathe sehr interessant macht meistens Spaß und die Zeit geht immer ohne Langeweile rum und man hat das Gefühl etwas wichtiges was man vielleicht im Leben auch im Alltag gebrauchen könnte, gelernt zu haben."

<u>Exkurs 2</u>: Reflexion der Rahmenbedingungen des MU

Da Hessen (noch) einen Lehrplan für Mathematik hat, liegt es nahe, sich auf dieser Grundlage mit Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts auseinander zusetzen. Den meisten SchülerInnen ist nicht bewusst, dass die LehrerInnen (zumindest theoretisch) an weitreichende Vorgaben gebunden sind. Dieser Arbeitsauftrag kann ggf. auf den ersten bezogen werden.

Informieren Sie sich im Lehrplan für Mathematik über Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts (allgemein und in der Oberstufe). Nehmen Sie kritisch Stellung. In welchem Verhältnis stehen die Vorgaben zu Ihren Erfahrungen?

Im Gegensatz zum ersten Arbeitsauftrag fühlen sich die SchülerInnen durch den als schwer verständlich wahrgenommenen Quellentext und den unklaren Arbeitsauftrag (was ist eine „kritische Stellungnahme"?) tendenziell verunsichert. Im Hinblick auf die Aufgabenstellung sind die Resultate von zum

Teil sehr fraglicher Qualität, fördern aber einiges über die unausgesprochen Vorstellungen von Mathematik zutage, die im Klassenraum die Erwartungen strukturieren.

„Das Ziel des Unterrichts hört sich ziemlich hochgesetzt an, wobei man das persönlich nicht so sieht beziehungsweise spürt. Außerdem glaube ich nicht, dass der Mathematikunterricht die Zusammenarbeit mit anderen Fächern fördert. […] Man darf zwar elektronische Werkzeuge wie Taschenrechner benutzen, aber ob das so relevant ist find ich eher nicht, da es vielleicht doch zu faul macht um es im Kopf zu rechnen. Desweiteren kann man keine Lösung interpretieren, diese ist tatsache. In dem Fach Deutsch muss man schon genug interpretieren […].“

Exkurs 3: Reflexion der Historizität der Rahmenbedingungen des MU

Dass ein Lehrplan eine Vorgeschichte hat, ist SchülerInnen nicht unmittelbar klar. Die gegenwärtigen Lehrpläne gehen maßgeblich zurück auf die Diskussionen im Kontext der Meraner Reform (vgl. Schubring 2007). Die von mir verwendete Quelle (Neue Lehrpläne 1922) hat den Vorteil, dass sie nicht in Fraktur gesetzt ist und die „Methodischen Bemerkungen“ zur Mathematik durchnummeriert sind.

Lesen sie den Auszug aus den „Neuen Lehrplänen“ und sortieren Sie die elf „Allgemeinen Grundsätze“ in drei Kategorien ein: Kategorie 1: Für Sie verständlich und sinnvoll. Kategorie 2: Für Sie verständlich und nicht sinnvoll. Kategorie 3: Für Sie unverständlich.

Greifen Sie sich eine bis höchstens drei der elf Bemerkungen heraus, die Ihnen am wichtigsten scheinen. Begründen Sie Ihre Auswahl und stellen Sie eine Verbindung zu Ihren Erfahrungen im Mathematikunterricht her. Wie zeitgemäß ist der Text, der immerhin 86 Jahre alt ist?

Abb. 2: Klio – Muse der Geschichte

Spätestens hier werden die SchülerInnen nachhaltig irritiert. Da Geschichte und Mathematik in ihrer Vorstellung keine Verbindung haben, ist nicht klar, welchen Status die Besprechung eines solchen Textes im Mathematikunterricht hat, zumal er nicht direkt mit Mathematik in Verbindung steht. So spiegeln – verstärkt durch die historische Verfremdung – die Antworten einerseits den Versuch, den vermuteten Anforderungen zu genügen, aber auch die Verunsicherung.

Als besonders sinnvoll wird der erste Grundsatz bewertet: „Die Schüler sollen […] sichere, auf klarem Verständnis beruhende Erkenntnisse erlangen. Ein gedankenloses Auswendiglernen von Erklärungen, Sätzen und Regeln ist zu vermeiden.“ Als nicht sinnvoll angesehenen wird der Grundsatz: „Die Geschichte der Mathematik ist […] bei der Aufgabenstellung zu berücksichtigen. Der Zusammenhang mit der allgemeinen Kulturentwicklung ist dabei nach Möglichkeit hervorzukehren.“

Fazit

„Mathe wird gelernt um eine gute Note zu bekommen, ist toll, wenn mann das Gelernte im Alltag anwenden kann.“ Folgerichtig ist das Hauptargument der SchülerInnen gegen geschichtliche Exkurse im Mathematikunterricht, das bringe nichts für die Klausuren bzw. für das Abitur; in dieser Zeit solle man lieber Aufgaben rechnen. Was es heißt, wenn ganze Schülergenerationen mit entsprechenden Vorstellungen die Schule verlassen, ist nur allzu bekannt. Es gilt also nicht nur, solchen Erwartungen nicht zu genügen, sondern das dahinterliegende Mathematikverständnis ins Bewusstsein zu holen und aufzubrechen. Die (erfahrungsgemäß langanhaltende) Irritation, die durch geschichtliche Elemente hervorgerufen wird, scheint mir ein geeigneter und lohnender Weg. Wer Sätze wie die folgenden schreibt, hat in meinen Augen jedenfalls etwas Wichtiges über Mathematik gelernt:

„Die meisten Schüler denken, glaube ich, dass Mathematikgeschichte nichts mit Mathematik zu tun hat weil wir das nicht anders kennen. Für uns bestand das Fach Mathematik immer nur aus Aufgabe + Formel = Lösung“

Abbildungsnachweis

Abb. 1: *Mathematics*. Marcia Danielson (2006). Abdruck mit freundlicher Genehmigung von Divine Image Graphics, Inc.

Abb. 2: *Klio*. Nach einer Wandmalerei in Herculaneum. In Roscher, W. (1884-1937). *Ausführliches Lexikon der Griechischen und Römischen Mythologie*

Literatur

Neue Lehrpläne für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten. Nach den Meraner Lehrplänen vom Jahre 1905 neubearbeitet vom Deutschen Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig/Berlin: Teubner (1922)

Schubring, G. (2007). Der Aufbruch zum „funktionalen Denken“. Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich. 100 Jahre Meraner Reform. *NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin, 15 (1)*, 1-17

Ullmann, P. (2008). *Mathematik – Moderne – Ideologie. Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik*. Konstanz: UVK (2008)

Ödön VANSCÓ, Budapest

Die Analyse der Veränderungen im MU fokussiert auf den früheren und heutigen Abituraufgaben

In diesem Beitrag gibt es Möglichkeit nur für eine kurze Zusammenfassung. Als Illustration werden eine frühere und eine neue heutige Abituraufgaben in diesem Mal gewählt. Die wichtigsten Veränderungen können in folgenden aufgelistet werden (ohne den Verspruch der Vollständigkeit).

- Demokratisieren den Mathematikunterricht

- Schwerpunktsverschiebung von der Richtung reine Mathematik in die Richtung angewandte Mathematik

- Wichtigste mathematische Kompetenzen zu bestimmen

- Neue wichtige Themen in Curriculum einzubauen

- Eine standardisierte Matura auf zweien Stufe in Hinsicht genommen die neue Ziele des MU-s. Siehe [2].

Bemerkungen zu (1): Der ganze Schulunterricht war dem Interesse der Wissenschaft und der Universitäten untergeordnet. Das ist elitäre und gar nicht demokratisch; zu (4) Graphen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik und Elemente der Differential- und Integralrechnung (Erhöhte Stufe).

Erst sei das neue Abitur vorgestellt. Es funktioniert auf den zweien Stufen. Normale Stufe ist für alle und Erhöhte Stufe für den Schüler die mit der Mathematik später etwas zu tun haben. Die Universitäten haben aber vor allem aus finanziellen Gründen die Erhöhte Stufe nicht verlangen wollen. Bis 2005 haben jährlich ca. 25 000 Schüler eine Aufnahmeprüfung aus der Mathematik gemacht. Dagegen jetzt haben ca. 4000 Schüler die Mathematik auf Höhere Stufe gewählt. Die alte normale Stufe ist aus 7 Aufgaben bestanden. Diese sind aus einem Standard Buch [1] (seit 1979) ausgewählt. Heute bekommen die Schüler ein ganzes Heft (24-32 Seiten), wobei die Aufgaben in zwei Teilen eingeordnet sind. Der erste Teil „kostet“ 30 Punkte und 45 Minuten, der zweite 70 Punkten und 135 Minuten. Die Anzahl der Aufgaben des ersten Teiles ist 10-12 (sehr einfache Fragen für 2-4 Punkte). Der zweite Teil besteht auch noch aus zweien Unterteile. IIA ist drei Mathematikaufgabe nicht besonders komplex und durch 12 Punkte bewertet. Der Teil IIB auch besteht aus drei Aufgaben aber davon nur zwei herausgewählt werden sollen. Diese sind 17 Punkte pro Aufgabe. Die untere Grenze der Note „genügend“ ist 20 (20%). Zwischen 10 und 19 gibt es eine mündliche Prüfung für genügend, unter 10 muss das schriftliche Abitur wiederholt werden. Vor 2005 unter 18 Punkten haben alle Schüler mündliche Prüfung machen können. Mein erstes Beispiel ist für die „alten“ Abituraufgaben aus der Mathematik Normalstufe 2005.

1. 813. Welche reellen Zahlenpaare erfüllen sich die folgende Gleichungssysteme:
   $$x^2 + y^2 = 34$$
   $$x - y = 2$$
   9 Punkte
2. 2611. Ein Rhombus hat zwei Diagonale mit dem Längen 6 cm und 8 cm. Bestimmen sie die Angeln des Rhombus und den Radius seines Innenkreises!
   12 Punkte
3. 3542. Die Summe der ersten neun Mitglieder einer arithmetischen Folge ist 297 und die Summe der ersten sechs Mitgliedern ist 261. Bestimmen sie den ersten Glieder und die Differenz dieser arithmetischen Folge! 14 Punkte
4. 2331. Eine vierseitige Pyramidenstumpf hat als Grund ein Quadrat mit dem Seitenlänge 7 cm und als Decke ein Quadrat mit dem Seitenlänge 4 cm. Die Länge der Seitenecken sind 10 cm. Bestimmen sie den Flächeninhalt und Volumen dieser Pyramidenstumpf! 16 Punkte
5. 1077. Lösen sie die folgende Gleichung unter den reellen Zahlen!
   $\log_2 \log_3 (x-1) = 1$ 9 Punkte
6. 4052 Wie viele vierstellige durch 5 dividierbare Zahl kann aus den Ziffern 0, 1, 3, 5 ohne Wiederholung der Ziffer gegeben werden? Rechnen sie auch die Summe dieser Zahlen aus! 8 Punkte
7. Beweisen Sie dass ein Kreis mit dem Mittelpunkt $C(u; v)$ und mit dem Radius r durch die folgende Gleichung bestimmt werden soll
   $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$! 12 Punkte

Für genügend soll 18 Punkte erreicht werden, für Ausgezeichnet 60 Punkte.
Sie erlauben Taschenrechner und die vierstellige Logarithmentafel zu brauchen!
Die Lösungszeit ist 120 Minuten.

Zum Vergleich ein Beispiel aus dem Jahre 2006

Erster Teil

1. Die Proportionen des inneren Winkelmaßes eines Dreiecks sind 2:5:11. Wie viel Grad ist der kleinste Winkel? 2 Punkte
2. Der erste Glieder einer arithmetischen Folge ist 8 und die Differenz ist $-\frac{2}{3}$. Geben Sie die vierten Glieder an! 2 Punkte
3. Nehmen Sie die Reihenfolge der natürlichen Zahlen. Welche ist größer der siebente durch 13 teilbare Zahl oder der dreizehnte durch 7 teilbare Zahl? 2 Punkte
4. Die folgende Tabelle zeigt die Maximumstemperaturen der ersten Märzwoche in Celsius.

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
5,2	1,6	3,1	-0,6	-1,1	1,6	0

   Wie viel Grad ist der Durchschnitt dieser Maximaltemperaturen 2 Punkte
5. Wir wissen über die reelle Zahlen a und b, die erfüllen die Gleichung: $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = 20$.
   Geben sie den Wert $a+b$ an! 2 Punkte
6. Die innere Kantenlänge eines Quaderförmige Aquariums sind 42 cm, 25 cm und 0,3

m. Wenn wir 20 Liter Wasser in diesen Aquarium füllen wird das voll sein? Begründen sie ihre Antwort! Antwort 1 Punkt

Begründung 2 Punkte

7. Wählen Sie solche aus der folgenden Gleichungen aus, die nicht gültig für alle reellen Zahlen!

$\sqrt{(x-2)^4}=(x-2)^2$ $\qquad$ $\sqrt{(x-2)^2}=(x-2)$ $\qquad$ $\sqrt{(x-2)^2}=(2-x)$ 2 Punkte

8. Péter hat 150 000 HUF in eine Bank für ein ganzes Jahr gesetzt. Die Bank gibt 4% Zinsen für ein Jahr. Wie viel Geld kann Péter nach einem Jahr aufnehmen?

2 Punkte

9. Vier Personen sind miteinander in einer E-Mail Kontakt. Das bedeutet jeder von ihnen Maximum einen Brief zu allen anderen in einer Woche schreibt. Maximum wie viel Briefe könnten unter diesen Personen in einer Woche geschrieben werden? Wählen Sie die gute Antwort aus und erklären sie ihre Wahl!

a) $4\cdot 4=16$ $\qquad$ b) $4\cdot 3=12$ $\qquad$ c) $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ $\qquad$ gute Wahl 1 Punkt

Erklärung 2 Punkte

10. Geben sie die Gleichung der Gerade die berührt den Punkt P_0 (3; -5) und parallel mit der Gerade gegeben durch die Gleichung $4x+5y=0$! 3 Punkte

11. In einer Gruppe mit 10 Leuten spricht jeder Deutsch oder Englisch. 6 Personen sprechen Deutsch und 8 Englisch. Wie viele sprechen beide Sprachen? Begründen Sie ihre Antwort mit dem Rechnen oder einem Venn-Diagram! Antwort 1 Punkt

Begründung 2 Punkte

12. Bestimmen Sie die Minimums- und Maximumswerte der Funktion f gegeben durch seinen Graphen! Welche x-Werte gehören zu diesen Extremwerten? $f:[-2;\ 6]\mapsto \Re$

Minimum, Maximum 1-1 Punkt $\qquad$ x-Werten 1-1 Punkt

Zweiter Teil (IIA)

13. Lösen Sie die folgende Gleichungen!

a) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$ a) 6 Punkte

b) $\sin^2 x=2\sin x+3$ b) 6 Punkte

14. Ein regelmäßiges Dreieck basierte Quader hat 6 cm Grundkantenlänge und der Flächeninhalt der Seitenfläche (drei Rechtecken) ist sechsmal so viel wie den Inhalt des Grunddreiecks. Bestimmen Sie die Volumen und Flächeninhalt dieses Quaders!

12 Punkte

15. Einige Schüler des 12. Jahrganges in Ungarn haben ein Probe-Abitur aus ungarischer Sprache und Literatur geschrieben. Jeder Schüler hat eine Kode-Zahl von den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bekommen so, dass alle Ziffern genau zweimal in dem Kode vorkommen.

a) Maximum wie viele Schüler haben die Probe geschrieben, wenn jeder eine andere Kode haben musst? 3 Punkte

b) Die folgende Kreisdiagramm zeigt die Ergebnisse der Probe. (Sehe oben) Bestimmen Sie wie viele Schüler die verschiedenen Noten erreicht haben und visualisieren sie die Ergebnisse durch ein Stabdiagramm auch! 6 Punkte

c) Aus allen Arbeit sei eine zufällig ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dass ein gut oder ausgezeichnete (Noten 4 oder 5) Arbeit ausgewählt worden ist?

3 Punkte

Dritter Teil (IIB)

Aus folgenden drei Aufgaben nur zwei bewertet werden. Sie müssen diese bestimmen!

16. Die folgende Gleichungssysteme sei gegeben.

(1) $2\lg(y+1)=\lg(x+11)$

(2) $y=2x$

a) Bestimmen Sie und zeichnen in einem Descartes-Koordinatensystem die Punkte P(x; y) die erfüllen Gleichung nummeriert durch (2)! 2 Punkte

b) Welche Zahlenpaare (x; y) gehören zu dem Definitionsbereich (1) und (2)? 2 Punkte

c) Lösen Sie die Gleichungssysteme! 11 Punkte

d) Geben sie die Lösungen in den a) gezeichneten Koordinatensystemen! 2 Punkte

Diese Aufgabe wurde nur 36% der Schüler gewählt, 64% nicht bewertet.

17. In einem TV Show fünf Aufgaben können den Spielern durch dem Moderator aufgegeben werden. An dem Spiel wird die erste richtige Antwort des Spielers durch 40 000 HUF als Preis bezahlt. Bei den nächsten vier Fragen kann er eine Entscheidung treffen ob er 50%, 75% oder 100% seines bisherig gewonnenen Geldes aufsetzt. Wenn er die Frage richtig beantwortet, ist sein Gewinn der Doppelte des von ihm aufgesetzten Geldes; wenn falsch beantwortet dann das Spiel beendet und der Spieler sein nicht aufgesetztes Geld mitnehmen kann.

a) Wie viel Geld nimmt der Spieler mit, der alle fünf Fragen richtig beantwortet und sehr brave ist immer die totale Summe aufzusetzen? 4 Punkte

b) Ein anderer Spieler ist vier sorgfältiger und setzt immer nur 50% seines gewonnenen Geldes auf. Wie viel Geld nimmt er mit, wenn er auch alle fünf Fragen richtig beantwortet hat. 4 Punkte

c) Ein dritter Spieler hat die ersten vier Fragen richtig beantwortet. Bei der zweiten Frage hat er 100%, bei der 3., 4. und 5. Frage nur 75% seines Geldes aufgesetzt. Die fünfte Frage hat er falsch beantwortet. Wie viel Geld hat er gewonnen? 5 Punkte

d) Ein Spieler hat alle Fragen richtig beantwortet. Jedes mal hat er zufällig entschlossen ob er 50%, 75% oder 100% seines Geldes aufsetzt. Wie wahrscheinlich ist dass er das Maximum mitnehmen kann? 4 Punkte

Diese Aufgabe wurde von meisten Schülern gewählt, nur 10,5% nicht gewertet.

18. Auf eine senkrecht gestandene Halter wurde ein bewegungsempfindliche Apparat fixiert so dass eine Lampe dem Apparat hinzugefügt das Boden belichtet wie ein Drehkegel mit dem Öffnungswinkel 140°.

a) Skizzieren Sie die Situation auf einer Abbildung! 2 Punkte

b) Wie weit ist der fernste belichtete Punkt von der Lampe? 4 Punkte

c) Wird der Punkt auf dem Boden belichtet, der 15 m Entfernung von dem Endpunkt des Halters hat? 4 Punkte

d) Auf dem Halter werden Hänger in jedem Meter angesetzt, woran die Lampe des Apparates fixiert werden kann. Auf wie vielten Hänger von unten gemessen muss eine Lampe angehackt werden, wenn die weniger als 100 m^2 auf dem Boden belichtet? 7 Punkte

Diese Aufgabe wurde von 72% Schüler gewählt nur 28% nicht gewertet.

Literatur

[1] Összefoglaló feladatgyűjtemény („Grünes Buch“) Tankönyvkiadó 1984

[2] Lukács Judit-Vancsó Ödön: Jelentés a matematikaérettségi vizsgamodelljének méréséről, kézirat OKI Értékelési és Érettségi Vizsgaközpont Budapest, 1999

[3] National Curriculum 2007 siehe www.om.hu auch in Englisch

[4] Deutsche Aufgabenreihen: www.om.hu “közoktatás“ menü

IngridaVEILANDE, Seefahrt Akademie Lettlands

Das Schubfachprinzip bei den Lösungen der kombinatorischen Aufgaben in den Mathematikolympiaden

Einführung

Die Gesamtheit der mathematischen Wettbewerbsaufgaben enthält einen bedeutenden Teil tematisch - vielfältiger kombinatorischen Aufgaben. Diese Probleme untersuchen die endlichen Mengen, die Sortierung oder die Alghoritmen der Suche, die Ausarbeitung und die Analyse der Alghoritmen. Bei den Lösungen dieser Probleme kann man verschiedene kombinatorische Methoden anwenden, um z.B. die Elemente in der Äquivalenzklassen einzuteilen, um die gemeinsamen Repräsentanten zu bestimmen, um die gegenseitige Entsprechung der Elementen zu feststellen. Oft ist es zweckmäßig die Ergebnisse der Geometrie, der Zahlentheorie, der Graphentheorie mit solchen allgemeinen Urteilsmethoden wie die mathematische Induktion, die Methode der Interpretationen, die Methode des Mittelwertes vereinigen.

Vielfältigkeit kombinatorischer Aufgaben

Die Aufgaben, bei welchen die kombinatorischen Berechnungen nötig sind, kann man nach den behandelten Themen (z.B.Verkehr, Anordnung, Freundschaft u.a.), oder nach dem Bereich der Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie u.a.), oder nach der Lösungsverfahren klassifizieren. Die allgemeinen Urteilsmethoden werden bei der Berechnungen gemeinsam mit der Gruppierung und Bewertung von Objekten benutzt. Eine von diesen Methoden ist das bekannte **Schubfachprinzip** (Lovasz, Pelikan, & Veszergombi, 2005):

Haben wir n Kästen und geben mehr als n Objekte in diese hinein, dann gibt es mindestens einen Kasten, der mehr als ein Objekt enthält.

In den Computerwissenschaften, Graphen- und Zahlentheorien werden verschiedene kombinatorische Tatsachen bewertet und begründet. Das Schubfachprinzip wird dabei oft benutzt. Bei der Lösung von Wettbewerbsaufgaben kann man mit Hilfe von Schubfachprinzip die Menge der Elementenauslese verringern. Man kann auch den Ausmass der Auslese bewerten, auch die gemeinsame Elementenexsistenz begründen. Mann kann auch das gegenseitige Nichtübereinstimmen gegebener Äquivalenzklassen zeigen.

Beispiele kombinatorischer Aufgaben

Weiter werden kombinatorische Aufgaben verschiedener Art betrachtet (Васильев, Егоров, 1988; Sammlung der Aufgaben), wo man bei stufen-weiser Lösung das Schubfachprinzip gebrauchen kann. Manchmal werden die Bedingungen der Aufgabe begreiflicher, wenn man sie mit Hilfe passender verständlicher Interpretation veranschaulicht.

Wiegen: Das Hauptziel bei den Aufgaben mit dem Wiegen ist die bestmögliche Strategie zu finden, mit deren Hilfe in einem bestimmten Mass gleichwertiger Objektenmenge den Aufgabenbedingungen entsprechende Objekte aussondern kann. Das Schubfachprinzip wird meistens gebraucht, um in der Teilmenge die Anzahl der gesuchten Elemente zu bewerten, oder, um die minimale Anzahl der Schritte beim Prüfungsprozess auszuwerten.

1. Aufgabe. Unter 12 gleichen Münzen 2 sind falsch. Das Gewicht der falschen Münzen Unterscheidet sich vom Gewicht der echten Münzen. Alle echten Münzen haben das gleiche Gewicht, auch die falschen Münzen haben das gleiche Gewicht. Wie kann man die Münzen in zwei Häufchen gleichen Gewichts einteilen, wenn man die Hebelwaage ohne Gewichte benutzt, und die Münzen werden nicht mehr als dreimal gewogen?

2. Aufgabe. Karl hat auf jedem Feldchen des Schachbrettes eine von natürlichen Zahlen (von 1 bis 64) geschrieben. Auf jedem Feldchen gibt es eine natürliche Zahl. Hanna kann die bestimmte Zahlenmenge erfahren, die auf diese Feldchen geschrieben sind, wenn sie eine Frage über eine x-beliebige Feldermenge stellt. Karl offenbart nicht, auf welchen Feldchen sich die Zahlen befinden.Welche ist die geringste Anzahl der Fragen, die Hanna stellen muss, damit sie die Zahlenaufstellung auf den Feldchen erfahren könnte?

Färbung: In diesem Aufgabenbereich könnte man zwei grundunterschiedliche Teilmengen von Aufgaben betrachten. In einer von diesen Mengen könnte man bedingt die Aufgaben einteilen, deren „Färbung” oder die Artenanzahl der gegebenen Elementenäquivalenz bei den Bedingungen der Aufgabe gegeben ist. Hier könnte man auch die bekannten Aufgaben vom Typ Ramsey (Ferneyhough, Haas, Hanson & MacGillivray, 2002) erwähnen, bei welchen die Existenz einer speziellen Art von der Elementenstruktur beweisen kann. Im zweiten Teil könnte man die Aufgaben einordnen, wo die „Färbung” während der Lösung der Aufgabe gestalten kann, um die gegebene Elementeneinteilung nach gemeinsamen Merkmalen zu veranschaulichen. Bei den Aufgaben, wo die „Färbung” als ein Zusatzargument eingeführt wird, ziemlich oft wird das Schubfachprinzip gebraucht, um eine Behauptung abzuweisen. Als Beispiele könnte man die Aufgaben mit Figurenaufstellung oder die Aufgaben mit dem Rundgang durch das orthogonale Feld nennen.

3. Aufgabe. Drei Fluggesellschaften bedienen auf bestimmten Routen 11 Städte. Aus jeder Stadt kann man hin- und zurückfliegen. Die Fluglinien der Fluggesellschaften doublieren nicht. Man muss beweisen, dass eine von Fluggesellschaften eine zyklische Reiseroute organisieren kann, die in einer und derselben Stadt beginnt und endet, und da gibt es eine ungerade Anzahl der Flüge eingeschlossen, und jede Stadt wird nur einmal besucht.

Bemerkung. Das gegebene Schema des Flugverkehrs kann man mit einem vollen 11 Knotengraph wiederspiegeln, deren Kanten in drei Farben gefärbt sind. Man kann den grössten möglichen Untergraph ansehen, in welchem alle Kanten einfarbig sind. Den Beweis kann man mit dem Theorem von König über zweiteilige Graphen (Емеличев, Мельников, Сарванов. & Тышкевич, 1990) begründen.

4. Aufgabe. Das Eckchen ist eine L – artige Tiomino Figur, die aus drei Zellen besteht. Kann man das Rechteck mit dem Ausmass 5 x 7 mit den Eckchen in mehreren Schichten so bedecken, damit über jeder Zelle des Rechtecks dieselbe Anzahl der Zellen wären, die zu den Eckchen gehören. Die ganze Bedeckung befindet sich im Rahmen des Rechtecks.

Disponierungsaufgaben: Einordnungsaufgaben untersuchen die Aufstellung verschiedener Objekte, z.B. Figuren, Zahlen, Personen u.a., in verschiedenen Typen der Konfigurationen, z.B. in der Kette, im Kreis oder auf der Tabelle. Bei der Aufstellung von Zahlen kann man quantitative Schlussfolgerungen ziehen, wenn man bei der Bewertung auf verschiedene Fakten der elementaren Zahlentheorie stützt, z.B. auf die Parität, Teilbarkeit, Zahlensumme oder auf das Produkt. Wenn man die Objekte anderer Art betrachtet, werden bei den Schlussfolgerungen mögliche Variantenanzahl der Einordnungen verglichen.

5. Aufgabe. Die Regierung hat 12 Abgeordneten. Unter ihnen sind 4, die einander nicht leiden können. Kann man alle 12 Abgeordneten in die Ausschüsse einteilen, damit in jedem Ausschuss genau 4 Abgeordneten sind, damit jeder Deputierte in genau 2 Ausschüssen arbeitet, damit zwei Abgeordneten gleichzeitig nur in einem Ausschuss arbeiten, und damit in keinem Ausschuss keine 2 Feinde gibt?

Bemerkung. Die Einteilung der Deputierten in die Ausschüssen kann man mit Hilfe von Oktaeder wiederspiegeln. Wenn man eine x-beliebige von 4 Kanten der Oktaeder betrachtet, gibt es zwischen ihnen wenigstens zwei Kanten, die eine gemeinsame Spitze haben.

Aufgaben, bei denen die gegebenen Systeme untersucht werden: Es wird da festgestellt, ob die Eigenschaften der Systeme im Laufe der fixierten Zeitmomenten sich bewahren. Bei der Aufgabenlösung kann man das

Schubfachprinzip in einer verallgemeinerten Art anwenden. Man muss die Dauer des Veränderungsprozesses oder das Feld des Tätigkeitsprozesses auswerten.

6. Aufgabe. Auf jedem infinitesemalen karierten Papier in jeder Zelle befindet sich ein Pfeilchen, dass in die Richtung der neben befindenden Zelle gerichtet ist. Auf dem karierten Papier befindet sich ein Roboter, der nach der Richtung des Pfeiles aus einer Zelle in die andere steigt. In der Zelle, aus welcher gerade der Roboter ausgestiegen ist, richtet sich das Pfeilchen um 90 Grad im Uhrzeigersinn. Man muss beweisen, dass der Roboter aus der fixierten Zelle des karierten Papiers bei jeder Konfiguration der Pfeilchen in die Entfernung von wenigstens einer Million Zellen sich begeben kann.

Anmerkung

Eine analytische Forschung der Materialien in der Mathematik gibt dem Lehrer die Möglichkeit die Lehrmetoden hervorzuheben, die den Schülern besser die Grundlagen der Kombinatorik zu verstehen. Eine genauere Analyse der Aufgaben ermöglicht:

- universale Aufgabenlösungsmethoden zu erschliessen;
- die Prinzipien der Zusammenstellung von Beispielen zu geachten;
- entsprechende Erklärungen zu wählen;
- den Sinn der Aufgabe zu beachten, das bedeutet, - man muss feststellen, welche mathematische Tatsache im gegebenen Beispiel widerspiegelt wird.

Die selbstständige Arbeit von Schülern, wenn man detailliert die speziellen Einzelfälle der Kombinatorikaufgaben betrachtet, auch, wenn man die Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Verallgemeinerung der Beurteilungsmethoden aneignet – das alles ist eine wichtige Voraussetzung, um gute Leistungen bei den Mathematikolympiaden zu zeigen.

Literatur

Васильев, Н.Б., Егоров А.А. (1988). *Задачи всесоюзных математических олимпиад.* Москва, Наука.

Емеличев, В.А., Мельников, О.И., Сарванов, В.И. & Тышкевич, Р.И. (1990). *Лекции по теории графов.* Москва, Наука.

Ferneyhough, S., Haas, R., Hanson, D. & MacGillivray, G. (2002). *Star Forests, Dominating Sets and Ramsey-type Problems.* Discrete Math., Vol. 245, No. 1.

Lovasz, L., Pelikan, J., Vesztergombi, K. (2005). *Discrete Mathematik.* Berlin: Springer – Verlag.

Die elektronische Sammlung der Aufgaben von Mathematik Olympiaden Lettlands. Erhalten am März, 2009 von: http://nms.lu.lv/arhiivs/uzdarh.shtml

Andreas VOHNS, Klagenfurt

Was fängt man mit dem Wissen um fundamentale Ideen in der (AHS-)Oberstufe an?

Im Vortrag wurde keine Antwort auf obige Frage gegeben, sondern es wurde motiviert, warum man sich diese Frage stellen sollte und vor welchem theoretischen Hintergrund der Vortragende sie im Rahmen seines Habilitationsprojekts zu beantworten gedenkt. Dabei wurden zwei zentrale Voraussetzungen hervorgehoben:

- Eine Rückbesinnung auf das Wort ‚Ideen' in seinem alltäglichen Begriffsumfang, oder jedenfalls eine Interpretation dieses Wortes, die man auch außerhalb der fachdidaktischen Subkultur um ‚fundamentale Ideen' gelten lassen würde.
- Eine Konkretisierung des häufig verwendeten Vorspanns ‚Orientierung an …' derart, dass klar werden kann, wem, woran entlang und in welcher Weise Orientierung geboten werden soll.

Diese Vorraussetzungen wurden durch die Formulierung der folgenden sechs, auf einer sorgfältigen Analyse der Ideengeschichte dieser didaktischen Kategorie (Vgl. Vohns 2007, S. 4-68) beruhenden Thesen weiter untermauert und mit Blick auf mögliche Konsequenzen präzisiert:

These 1:

Eine mathematische Idee ist ein entscheidender Gedanke, den man hinter gewissen Strategien, Techniken, Denk- und Handlungsmustern auszumachen sucht, der Versuch einer Antwort auf die Frage nach dem springenden Punkt.

These 2:

Didaktisch bedeutsam kann eine mathematische Idee dann werden, wenn sie zum Nachdenken über einen konkreten schulmathematischen Gegenstand einlädt, wenn sie hilft, ihn besser oder anders oder überhaupt einmal zu verstehen sowie hinsichtlich seiner Bedeutung einzuordnen.

Solche Ideen sollten insbesondere geeignet erscheinen, Lehrer(innen) ebenso wie Schüler(innen) zum Nachdenken über Kohärenzen und Differenzen

- zwischen bereits Gelerntem und noch zu Lernendem,
- zwischen implizit Genutztem / Geahntem und explizit Thematisiertem,
- zwischen alltäglichen und mathematischen Denk- und Handlungsweisen

anzuregen.

These 3:

Hinter dem Konzept ‚fundamentale Idee' steckt die Überzeugung (die Hoffnung), dass man für die gesamte Mathematik (oder jedenfalls für bestimmte Teilbereiche) eine Hand voll mathematischer Ideen angeben kann, die die entscheidenden Gedanken hinter dem Mathematiktreiben (in diesem Teilbereich) berühren.

Es beschreibt den Versuch, eine ‚Antwort auf die Frage nach dem springenden Punkt' für ganze Bündel von Strategien, Techniken, Denk- und Handlungsmustern zu beantworten.

Wenn behauptet wird, dass es solche fundamentale Ideen „gibt", so ist damit stets die Vorstellung eines im Wesentlichen kohärenten mathematischen Wissens verbunden.

These 4:

Wer ‚Orientierung an fundamentalen Ideen' fordert, will Kohärenzerfahrungen stiften. Seit Bruner hat sich zwar die Art der angestrebten Kohärenzstiftung laufend verändert und fachdidaktisch ausdifferenziert, allerdings wenig getan, was die theoretische und empirische Absicherung dieser Forderung, sowie Überlegungen zu ihrer praktischen Umsetzung angeht.

These 5:

Je ausdifferenzierter die angestrebte Kohärenzstiftung, desto problematischer ist die permanente Verwechslung von mathematischen Ideen hinter den Strukturen, Konzepten und Begriffen mit den mathematischen Strukturen, Konzepten und Begriffen.

These 6:

Wenn fundamentale Ideen mathematische Ideen im Sinne der ersten These sein sollen, so ist den Überlegungen in These 2 gerade und erst recht für fundamentale Ideen zu folgen.

Orientierung an fundamentalen Ideen kann nur heißen, das Spannungsfeld von Kohärenzen *und Differenzen*

- zwischen bereits Gelerntem und noch zu Lernendem,
- zwischen implizit Genutztem / Geahntem und explizit Thematisiertem,
- zwischen alltäglichen und mathematischen Denk- und Handlungsweisen

im Unterricht selbst, dort wo es geboten scheint, auch über einzelne Begriffe und Verfahren hinausgehend zum Thema zu machen.

Im zweiten Teil des Vortrags wurden die Konsequenzen aus der letzten These bildungstheoretisch unter Bezugnahme auf Konzeptionen von Dressler, Fischer, Lengnink und Peschek verortet und präzisiert (vgl. Dressler 2007, Fischer o.J., Lengnink / Peschek 2001). Zentral ist dabei die Forderung, aus bildungstheoretischer Perspektive nicht mehr vornehmlich auf Kohärenzen und Kontinuitäten hin zu arbeiten, sondern der Erfahrung von Diskontinuitäten innerhalb des mathematischen Denkens und Arbeitens, Differenzen zwischen alltäglichem und mathematischen Denken und Arbeiten eine integrale Rolle für den Bildungsprozess zuzugestehen.

Dazu wurde die Forderung erhoben, die Klärung der Kohärenzhypothese zum Gegenstand der Auseinandersetzung zwischen Lehrer(inn)en und Schüler(inn)en zu machen. In diesem Zusammenhang wurde betont, dass vieles von dem, was in der Mathematikdidaktik normalerweise als ‚fundamentale Idee' bezeichnet wird, im Sinne von These 1 und These 3 eher als Kristallisationspunkt für das Nachdenken *über* solche Ideen im Unterricht verstanden werden sollte und nicht schon für die Idee selbst gehalten. Insbesondere wurde betont, dass die Klärung, was noch als kohärente Fortsetzung einer Idee aufgefasst werden kann und was nicht, aus dieser Perspektive keine Frage ist, die Didaktiker vorab entscheiden sollten, sondern vielmehr eine, deren (offene) Diskussion Gegenstand des Unterrichts sein müsste.

Der Vortrag schloss mit einer Motivation der einleitenden Frage für die Oberstufe (als Ort zunehmender Reflexion über das mathematische Arbeiten und wenigstens für die ‚Analytische Geometrie und Lineare Algebra' mit einem Curriculum, dass einer Rückbesinnung auf zentrale Leitideen dringend bedarf (Vgl. Schupp 2000)) und präsentierte einen ersten Ausblick auf zwei mögliche, sehr basale Kristallisationspunkte für das Nachdenken über fundamentale Ideen in der Oberstufe: Quantität und Form.

Der Abbildung auf der folgenden Seite können lernbereichsspezifische Konkretisierungen dieser übergreifenden Kristallisationspunkte entnommen werden. In seiner weiteren Arbeit plant der Vortragende ausgehend von diesem Katalog folgenden Fragen nachzugehen:

- Könnte Nachdenken darüber, welchen Beitrag dieser Inhalt zum Umgang mit Quantität und Form leistet, bei diesen Inhalten sinnvoll sein? Hilft es mir, sie besser zu verstehen oder einordnen zu können?
- Was erschließen mir genau diese Inhalte über den Umgang mit Quantität und Form, was sich mir nicht bereits vorher erschlossen haben könnte? Was erschließt es mir weniger deutlich, was deutlicher?

– Was fehlt eigentlich noch, wenn ich die neuen Aspekte etwas weiter verfolge? Wo stößt das Curriculum an Grenzen, die eigentlich nicht nachvollziehbar sind? Wo gibt es offene Fragen der Unterstufe, die mir auch diese Themen nicht erschließen? Warum ist das so? Muss das so sein?

Quantität

Lineare Algebra:
Vektoren, Matrizen und LGS als Möglichkeit, mit Mengen (Systemen) von Zahlen als algebraischen Objekten zu arbeiten „wie mit Zahlen"

Analytische Geometrie:
Arithmetisierung von zweidimensional und dreidimensional gerichteten Größen (Vektoren in Ebene und Raum)

Funktionen und Analysis:
Umgang mit veränderlich(gedacht)en Größen (Änderungen),
Umgang mit infinitesimalen Größen

Beschreibende Statistik:
Kenngrößen als Möglichkeit zur Orientierung in Mengen von Daten (Raffung)

Beschreibende Statistik:
Möglichkeiten und Grenzen der Messbarkeit, des empirischen Zugriffs auf Realität

Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik:
Arithmetisierung nicht-deterministischer Phänomene,
Umgang mit unsicheren Größen

Form

Analytische Geometrie:
Beschreibung und Realisierung von Formen durch Nutzung der (relativen und) gegenseitigen Lage mit Hilfe von Koordinaten, Vektoren und LGS (lineare Geometrie)

Trigonometrie:
Austauschbarkeit von Winkeln und Seitenverhältnissen bei der Beschreibung und Realisierung von Formen

Analysis und Analytische Geometrie:
Beschreibung des „Krummen" /
von Kurven, Flächen und Körpern
mit Gleichungen und Funktionen,
mit und ohne infinitesimale Kalküle

Beschreibende Statistik:
Möglichkeiten und Grenzen graphischer Darstellungen zur (Re-)Präsentation von / Orientierung in Datenmengen (Mustererkennung)

Literatur

Dressler, A. (2007). Modi der Weltbegegnung als Gegenstand fachdidaktischer Analysen. *JMD, 28 (3/4)*, 249-262.

Fischer, R. (o.J.). *Höhere Allgemeinbildung*. Klagenfurt (Manuskript). URL: http://imst2.uni-klu.ac.at/materialien/_design/fischer190901.pdf (zuletzt abgerufen am 12.03.2009).

Lengnink, K., Peschek, W. (2001). Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung. In K. Lengnink & al. (Hrsg.), *Mathematik und Mensch – Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik* (65 - 82). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Schupp, H. (2000). Geometrie in der Sekundarstufe II. In: *JMD*, *21 (1)*, 50-60.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *JMD, 13 (2/3)*, 199-214.

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht*. Norderstedt: Books on Demand.

Maike VOLLSTEDT, Hamburg

"After I do more exercise, I won't feel scared anymore" – Sinnkonstruktionen einer Hongkonger Schülerin aus einer kulturellen Perspektive

1. Fokus und Design der Studie

Welchen Sinn konstruieren Schülerinnen und Schüler im Kontext schulischen Mathematiklernens? Und in wiefern kann eine Verbindung zwischen den von ihnen vorgenommenen Sinnkonstruktionen und ihrem kulturellen Hintergrund hergestellt werden? Diese Fragen stehen im Fokus meines Dissertationsprojektes und werden im Rahmen dieser qualitativ-empirischen Zweiländerstudie untersucht. Datengrundlage sind insgesamt 33 leitfadengestützte Interviews mit Schülerinnen und Schülern aus je drei deutschen und Hongkonger Klassen der 9. bzw. 10. Klassenstufe (16 Interviews in Deutschland, 17 in Hongkong), die auf der Basis einer kurzen Sequenz nachträglichen lauten Denkens (Gass & Mackey, 2000) zur videographierten letzten Mathematikstunde der Interviewten durchgeführt wurden. Dabei wurden verschiedene Aspekte erhoben, z.B. Assoziationen zu(m) Mathematik(unterricht), Gefühle, die mit Mathematik(unterricht) verbunden werden, Lösungsstrategien bei der Bearbeitung von Aufgaben, oder die Rolle von Mathematik für das eigene Leben. Die transkribierten Interviews wurden nach Methoden der Grounded Theory ausgewertet (Strauss & Corbin, 1996). Im Anschluss daran wurden Typen gebildet (Kelle & Kluge, 1999).

2. Sinn und Sinnkonstruktion

Wie bereits an anderer Stelle dargelegt (vgl. etwa Vollstedt & Vorhölter, 2008), wird *Sinn* in dieser Studie als persönliche Relevanz, die einem (Lern-) Gegenstand oder einer Handlung beigemessen wird, präzisiert, wobei die Perspektive der Lernenden im Fokus steht. Entsprechend dem in dieser Studie entwickelten Verständnis von Sinn und dem theoretischen Ansatz der Sinnkonstruktion können beim Lernen von bzw. der Auseinandersetzung mit Mathematik verschiedene Aspekte von einem Schüler/einer Schülerin als persönlich relevant wahrgenommen werden. So kann sich der Sinn in Form von Bedeutung, Nutzen, Ziel, Zweck oder Wert eines Gegenstandes bzw. einer Handlung ausgestalten.

Diesem theoretischen Ansatz folgend findet Sinnkonstruktion statt, wenn sich ein Individuum, also ein Schüler oder einer Schülerin, in einer Situation, z.B. bei der Auseinandersetzung mit fachlichen Inhalten im Mathematikunterricht, befindet. Es wird dabei davon ausgegangen, dass das Individuum geprägt ist von verschiedenen persönlichen Merkmalen (Überzeugungen, Ziele, Denkstil u.a.) sowie Hintergrundmerkmalen (kultureller oder Migrationshintergrund, Alter, u.a.). Diese Merkmale werden als relevant für die Konstruktion von Sinn angenommen.

In den folgenden Abschnitten werden nun zum einen verschiedene Sinnkonstruktionen einer Hongkonger Schülerin aufgezeigt, zum anderen wird ein Zusammenhang zwischen diesen Sinnkonstruktionen und ihrer ostasiatischen Kultur bzw. den darunterliegenden kulturellen Werten dargestellt.

3. Ein Fallbeispiel aus Hongkong: Emmas Sinnkonstruktionen

Emma (15) ist eine leistungsstarke Hongkonger Schülerin. Sie besucht eine Privatschule des höchsten akademischen Zweiges und ist dort Schülerin in der Klasse der 40 leistungsstärksten Schülerinnen und Schüler. Entsprechend beschreibt sie eine starke Konkurrenzsituation zwischen den Klassenkamerad(inn)en und erlebt daher hohen Druck. Sie leidet stark unter diesem Druck, besonders, da sie ein geringes mathematisches Selbstkonzept aufweist. Sie schildert, dass sie Schwierigkeiten mit dem Denken habe, da sie langsam denke, und sieht dies in Zusammenhang mit ihrer Angst vor Mathematik und Prüfungen. Um dem zu begegnen, bearbeitet sie über das hohe Pensum im Mathematikunterricht hinausgehend viele Aufgaben.

Basierend auf diesen Voraussetzungen konstruiert Emma verschiedene Arten von Sinn. Die erste Sinnkonstruktion, die hier präsentiert werden soll, richtet sich auf das Betreiben von Mathematik: *Übung macht die Meisterin*. Emma bearbeitet, wie gerade erwähnt, viele (Extra-) Aufgaben. Sie trainiere damit zum einen – so ihre Einschätzung – ihren Geist und die Logik, und wirke damit ihren Schwierigkeiten mit dem Denken entgegen. Auch sei das Bearbeiten von vielen Aufgaben eine gute Prüfungsvorbereitung. Je mehr Aufgaben sie bearbeite, umso schneller könne sie erkennen, welcher Algorithmus der passende für die jeweilige Aufgabe sei. So würden dann auch Prüfungssituationen eher wie Hausaufgaben auf sie wirken, da sie im besten Falle direkt wisse, wie sie zu einer Lösung käme. Das viele Üben begegnet auf diese Weise also dem hohen Druck und dem Wettbewerb, den Emma mit Mathematik(unterricht) in Verbindung bringt.

Die zweite Sinnkonstruktion, die sich rekonstruieren lässt, richtet sich auf das Lernen von Mathematik: *Gute Resultate in Examina sind Voraussetzung für eine erfolgversprechend Zukunft*. Mathematik hat zusammen mit Englisch und Chinesisch einen Sonderstatus unter den Fächern, da die hier erzielten Noten doppelt gewichtet werden. Der wichtigste Aspekt jedoch ist das nach der 11. Klassenstufe stattfindende *HKCEE* (*Hong Kong Certificate of Education Examination*). Das HKCEE ermöglicht den besten Schülerinnen und Schülern einen direkten Sprung an die Universität, oder aber bei guten Abschneiden die Möglichkeit, weiter die Schule zu besuchen und später ggf. zu studieren. Da alle als erstrebenswert geltenden Berufe ein (sehr) gutes HKCEE benötigen, wird dieses folglich als Nadelöhr zum Studium bzw. zu einem erwünschten späteren Leben wahrgenommen. Entsprechend wichtig ist das Lernen von Mathematik für Emma.

Die letzte zentrale Sinnkonstruktion, die rekonstruiert werden kann, richtet sich auf den Mathematikunterricht. Hier ist Emma eine *positive Lernatmosphäre* besonders wichtig. Sie charakterisiert den Unterricht als sehr freundlich; besonders das gute Verhältnis zu ihrer Lehrerin ist ihr bedeutsam. Emma bezeichnet diese als Freundin, zeigt also ein starkes Bedürfnis nach sozialer Eingebundenheit mit der Lehrerin. Sie betont, dass dieses Verhältnis sie leichter lernen lasse, da es einfacher sei, sich an die Worte einer Freundin zu erinnern. Die positive Unterrichtsatmosphäre formt sich als positiver Gegenpol zu dem Druck und den hohen Anforderungen, die auf Emma lasten. Emma zieht aus ihr die Kraft, sich dem Druck zu stellen.

Nach der Vorstellung der drei zentralen Sinnkonstruktionen, die bei Emma rekonstruiert werden konnten, sollen diese im Folgenden auf der Basis von kulturellen Werten, wie sie in Ostasien verbreitet sind, interpretiert werden.

4. Diskussion aus einer kulturellen Perspektive

Hongkong wird in der einschlägigen wissenschaftlichen Diskussion als Teil der *CHC* (*Confucian Heritage Culture*) bezeichnet, also einer ostasiatischen Kultur, die durch konfuzianische Wertvorstellung in Erziehung und Bildung geprägt ist. Leung (2001) beschreibt verschiedene Eigenschaften von Mathematikunterricht und dem Lernen von Mathematik, die in ostasiatischen und westlichen Kulturen unterschiedlich ausgeprägt seien. Zur Kennzeichnung der Tendenzen verwendet er dabei jeweils Dichotomien, nutzt also überzeichnete Idealtypen zur Charakterisierung der Endpole der jeweiligen Kontinua. Zudem stellt er Verbindungen zu zugrundeliegenden kulturell geprägten Werten her. Für das Lernen von Mathematik stellt Leung folgende Begriffspaare auf: *rote learning* vs. *meaningful learning* (Schemata (auswendig) lernen vs. sinnhaftes Lernen), *studying hard vs. pleasurable learning* (hartes Arbeiten vs. Lernen mit Freude) und *extrinsic* vs. *intrinsic motivation* (extrinsische vs. intrinsische Motivation).

Diese drei Kennzeichen des ostasiatischen Verständnisses vom Lernen von Mathematik stehen offenbar in engem Zusammenhang mit Emmas Sinnkonstruktionen. Emma arbeitet hart und bearbeitet möglichst viele Aufgaben, um Schemata so schnell wie möglich verwenden zu können. Außerdem nimmt sie harte Arbeit über Jahre hinweg auf sich, um möglichst gute Resultate im HKCEE, zu erlangen, ist also extrinsisch motiviert.

Diese Elemente des südostasiatischen Verständnisses von Mathematiklernen gründen sich in der Auffassung, dass das (auswendig) Lernen von ggf. noch nicht vollständig verstandenen Schemata ein notwendiger Teil des Lernprozesses darstellt (Leung, 2001). Dieser Aspekt ist nicht negativ belegt und wird durch die in China weitverbreitet Auffassung des ‘practice makes perfect’ gestützt. Lernen ist demnach ein Prozess der wiederholten Praxis, des Erinnerns und Verstehens. Dieser Prozess muss an sich nicht mit Freude verbunden sein; Lernen wird als ernsthaftes Anliegen betrachtet. Wie tief dieses Verständnis in der chinesischen Kultur verwurzelt ist, wird deutlich, wenn man das chinesische Schriftzeichen für 'Bildung' genauer betrachtet: 教育. Das linke Zeichen besteht unten links aus einem Zeichen für 'Kind', darüber ein Zeichen für 'schwere Last'; das rechte Zeichen bedeutet 'Entwicklung'. Kinder wachsen und entwickeln sich also, indem sie jede Anstrengung unternehmen, schwierige Aufgaben anzugehen, die auf ihren Schultern lasten (Li, 2006). Freude stellt sich erst als Ergebnis harter Arbeit in Form von tiefem Verständnis ein. Schließlich wird extrinsische Motivation als eine legitime Quelle angesehen, die Energien der Schülerinnen und Schüler auf das Lernen und Arbeiten zu lenken. Auch dies ist historisch verankert, da soziale Selektion in der chinesischen Geschichte durch Examina stattfand (z.B. bei der Vergabe hoher Regierungsämter). Folglich ermöglichte Bildung sozialen Aufstieg und eröffnete Zukunftschancen (Leung, 2001) – ähnlich wie es heute beim HKCEE in Hongkong noch immer der Fall ist. Zusammenfassend kann also eine klare Verbindung zwischen Emmas Sinnkonstruktionen und ihrem kulturellen Hintergrund bzw. darin begründeten kulturellen Wertvorstellungen aufgezeigt werden.

Literatur

Gass, S.M., & Mackey, A. (2000). *Stimulated Recall Methodology in Second Language Research.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kelle, U., & Kluge, S. (1999). *Vom Einzelfall zum Typus: Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung.* Opladen: Leske + Budrich.

Leung, F.K.S. (2001). In Search of an East Asian Identity in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 35–51.

Li, S. (2006). Practice Makes Perfect: A Key Belief in China. In F.K.S. Leung & al. (Hrsg.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West* (S. 129-138). New York: Springer.

Strauss, A.L., & Corbin, J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung.* Weinheim: Beltz.

Vollstedt, M., & Vorhölter, K. (2008). Zum Konzept der Sinnkonstruktion am Beispiel von Mathematiklernen. In H.-C. Koller (Hrsg.) *Sinnkonstruktion und Bildungsgang* (S. 25–46). Opladen: Barbara Budrich.

Katrin VORHÖLTER, Hamburg

Zur Rolle von Modellierungsaufgaben bei der Sinnkonstruktion von Schülerinnen und Schülern

Kompetenzen des mathematischen Modellierens haben inzwischen Eingang in die Bildungsstandards gefunden, trotzdem stößt die Berücksichtigung von Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht noch immer auf Widerstand seitens der Lehrenden. Die Zweifel dieser an dem Nutzen der Bearbeitung solcher Aufgaben sind nachvollziehbar, sind doch viele der mit der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben verbundenen Hoffnungen und Ziele noch nicht empirisch überprüft. Eines der bisher nicht untersuchten Ziele ist es, den Schülerinnen und Schülern Nutzungsmöglichkeiten von Mathematik aufzuzeigen und ihnen somit "Einsicht in den Sinn mathematischer Inhalte" (Kaier 1995: 70) zu geben. Die Rolle von Modellierungsaufgaben bei der Sinnkonstruktion von Schülerinnen und Schülern herauszustellen war das Ziel einer qualitativen empirischen Studie. Die Studie wurde in fünf zehnten Klassen zweier Gymnasien durchgeführt. In allen Klassen wurde jeweils eine herkömmliche Mathematikstunde videographiert sowie eine Stunde, in der die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen eine selbstgewählte Modellierungsaufgabe (von insgesamt 4 vorgeschlagenen) bearbeiten sollten. Im Anschluss an jede dieser Stunden wurden mit insgesamt 15 Schülerinnen und Schülern ein nachträgliches lautes Denken und ein Leitfadeninterview geführt. Darüber hinaus füllten alle beteiligten Lernende offene Fragebögen aus.

1. Theoretischer Hintergrund

Dem Sinn, wie auch immer inhaltlich gefasst, wird eine große Bedeutung für das menschliche Leben zugeschrieben. Beispielsweise postuliert Fankl, die tiefe Verwurzelung des "Willen zum Sinn" verdeutliche, dass es dem Menschen um den Sinn und nichts als den Sinn gehe (Frankl 2005: 111). Doch nicht nur für das menschliche Leben allgemein, sondern insbesondere auch für das Lernen wird dem Sinn eine große Bedeutung beigemessen. So behauptet beispielsweise Volk, nachhaltiges Wissen gäbe es nicht ohne Sinn (Volk 1997: 17).

Problematisch am Sinnbegriff ist seine Vieldeutigkeit. In der Vergangenheit wurde mehrfach versucht, die verschiedenen Dimensionen des Sinnbegriffs zu systematisieren (vgl. bspw. Biller 1999). In der vorliegenden Studie wird von dem Sinn eines Gegenstands gesprochen, wenn Schülerinnen und Schüler diesem Gegenstand eine Bedeutung beimessen, mit ihm einen Nutzen oder Zweck verbinden oder ein Ziel erreichen wollen oder ihm einen bestimmten Wert beimessen und der Gegenstand gleichzeitig für sie persönlich relevant ist.

Dem hier verwendeten Begriff der Sinnkonstruktion liegt eine konstruktivistische Auffassung vom Sinnerwerbsprozess zugrunde (Vollstedt/ Vorhölter 2008). Es wird davon ausgegangen, dass Sinnkonstruktionen sowohl Einflüssen bzw. Voraussetzungen unterliegen als auch in Konsequenzen resultieren. Die Voraussetzungen werden unterteilt in so genannte Hintergrundmerkmale (unveränderliche Merkmale wie das Geschlecht oder das Alter) und persönlichen Merkmale (Eigenschaften einer Person gefasst, die beeinflusst und verändert werden können wie die Wünsche und Ziele der Lernenden sowie ihre beliefs). Die Notwendigkeit, selbst einen Sinn zu konstruieren, bedeutet jedoch nicht, dass Lehrende keinen Einfluss auf die Sinnkonstruktionsprozesse Lernender nehmen können. Vielmehr können sie durch geeignete Maßnahmen Schülerinnen und Schüler Sinnangebote machen, die diese annehmen, verändern oder ablehnen können.

Modellierungsaufgaben stellen aufgrund ihres Realitätsgehalt und ihrer authentischen Problemstellung ein spezifisches Sinnangebot bereit und können somit, so der theoretische Ansatz, direkt auf die Sinnkonstruktionen von Schülerinnen und Schülern einwirken. Darüber hinaus beinhalten Modellierungsaufgaben weitere Aspekte (Maaß 2007: 12), die – so wiederum die Theorie – durch die persönlichen Merkmale auf die Sinnkonstruktionen der Schülerinnen und Schüler wirken können.

2. Ergebnisse

Aus den Äußerungen der 15 befragten Lernenden konnten 12 verschiedene Sinnkonstruktionen rekonstruiert werden, die wiederum in die folgenden fünf Bereichen kategorisiert werden konnten. Den ersten Bereich bilden Sinnkonstruktionen zur Mathematik als **Hilfsmittel zum Leben**. Die betreffenden Lernenden möchten die Mathematik in ihrem jetzigen oder späteren Leben, im privaten Alltag oder auch im Beruf als Hilfsmittel einsetzen und in der Schule auf diesen Gebrauch vorbereitet werden. Den zweiten Bereich bilden Sinnkonstruktionen zur **gesellschaftlichen Anerkennung**. Schülerinnen und Schüler möchten mithilfe von Mathematik gesellschaftliche Anerkennung erlangen, etwa, indem sie eine gute Allgemeinbildung aufweisen oder indem sie mithilfe guter Mathematikkenntnisse einen Ausbildungsplatz in einem angesehenen Beruf bekommen. Einige Schülerinnen und Schüler, wenn auch vergleichsweise wenige, möchten durch Mathematik **Selbsterfüllung** erlangen: Sie möchten Freude erleben und sich herausgefordert fühlen. Diese Sinnkonstruktionen beziehen sich nicht so sehr auf die Mathematik an sich, sondern vielmehr auf das Betreiben von Mathematik, welches für diese Schülerinnen und Schüler einen sehr hohen Stellenwert einnimmt. Die vierte Kategorie schließlich zeugt von der **Auseinandersetzung** der Lernenden **mit dem Mathematikunterricht**. Es wird deutlich, dass diese Sinnkonstruktionen sich rein auf den Mathematikunterricht beziehen und ihnen der Inhalt des Unterrichts gleichgültig ist. Quer zu diesen Kategorien liegen Sinnkonstruktionen der Kategorie **mathematisches Wissen**. Der Grund hierfür ist, dass Schülerinnen und Schüler diese Sinnkonstruktionen oft als Voraussetzung für das Erreichen weiterer Sinnkonstruktionen ansehen.

Eine besondere Position nehmen die Sinnkonstruktionen der Kategorie Hilfsmittel zum Leben sowie Selbsterfüllung ein. Denn nur, wenn Lernende Sinnkonstruktionen in diesen Bereichen erfolgreich vornehmen können, sind sie nicht auf der Suche nach einem weiteren Sinn.

Neben den verschiedenen Sinnkonstruktionen konnte eine Vielzahl an Faktoren rekonstruiert werden, die aus der Bearbeitung der Modellierungsaufgaben resultierten und Einfluss auf die Sinnkonstruktionen der Lernenden hatte. Die von den Schülerinnen und Schülern genannten Faktoren variieren in ihrer Bedeutung für den Einzelnen und lassen sich nur auf der Personenebene, nicht aber generell hierarchisieren: Der Sachkontext der Aufgaben stellte für viele Schülerinnen und Schüler ein Sinnangebot dar. Er berührte darüber hinaus zusammen mit dem Ergebnis der Aufgabe, das für viele Lernenden erstaunlich war, die Interessen einzelner Schülerinnen und Schüler. Die Möglichkeit, in einer Kleingruppe zu arbeiten sowie das Verhalten der Lehrperson, das sich nach Auffassung der Schülerinnen und Schüler in deutlicher Weise von dem "normalen" Verhalten unterschied, konnten als Einflussfaktoren auf das Gefühl der sozialen Eingebundenheit der Schülerinnen und Schüler rekonstruiert werden. Das Verhalten der Lehrperson konnte darüber zusammen mit der Möglichkeit, selbst aktiv sein zu können, der Möglichkeit zwischen Aufgaben zu wählen sowie der Anforderung einen eigenen Lösungsweg zu erarbeiten als maßgeblicher Faktor dafür rekonstruiert werden, dass die Lernenden das Gefühl ahnten, autonom handeln zu können. Schließlich entsprach die Tatsache, dass die Schülerinnen und Schüler das Gefühl hatten, keine genauen Arbeitsanweisungen und nicht alle zum Lösen des Probleme benötigten Informationen zu haben sowie das projektartige Vorgehen sowie die Anforderung, einen eigenen Lösungsweg erarbeiten zu müssen, in vielen Fällen nicht den beliefs der Schülerinnen und Schüler. Diese können per definitionem zwar nicht kurzfristig verändert werden, doch führten die aufgeführten Faktoren dazu, dass die Schülerinnen und Schüler anfingen, ihre bisherigen Erfahrungen im und mit Mathematikunterricht zu überdenken.

Das Sinnangebot (und damit der Sachkontext der Aufgabe) konnte als direkter Einflussfaktor auf Sinnkonstruktionsprozesse rekonstruiert werden; die weiteren Faktoren wirkten indirekt über die jeweiligen persönlichen Merkmale auf die Sinnkonstruktionen der Schülerinnen und Schüler.

3. Zusammenfassung

Schülerinnen und Schüler bedürfen der Sinnkonstruktionen zu schulischen Gegenständen und Fächern. Die Wünsche der Lernenden nach Vorbereitung auf das zukünftige Leben und Selbsterfüllung stellen somit kein ‚Extra' dar, sondern müssen als Bedingung für als persönlich relevant empfundenen Mathematikunterricht angesehen werden.

Die Sinnkonstruktionsprozesse der Lernenden wurden in der Studie durch die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben durch vielfältige Faktoren beeinflusst. Die von den Schülerinnen und Schülern genannten Faktoren differieren in ihrer Bedeutung für den Einzelnen und lassen sich nicht generell hierarchisieren.

Auch wenn die von den Schülerinnen und Schülern genannten Faktoren sich auch in anderer Weise im Mathematikunterricht berücksichtigen lassen, muss dennoch festgehalten werden, dass die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben all diese Faktoren umfasst und Modellierungsaufgaben somit eine wirkungsreiche Möglichkeit darstellen, möglichst viele unterschiedliche Sinnkonstruktionen der Lernenden auf vielfältige Weise anzusprechen.

Literatur

Biller, K. (1991): Habe Sinn und wisse Sinn zu wecken: Sinntheoretische Grundlagen der Pädagogik. Hohengehren: Schneider.

Frankl, V. E. (2005): Ärztliche Seelsorge: Grundlagen der Logotherapie und Existenzanalyse. Wien: Deuticke.

Kaiser, G. (1995): Realitätsbezüge im Mathematikunterricht: Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In: Graumann, G., Jahnke, T., Kaiser, G., Meyer, J. (Hrsg.). Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 66–81.

Maaß, K. (2007): Mathematisches Modellieren: Aufgaben für die Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Volk, D. (1997): Mathematik für's tägliche Leben: Beispiele und Überlegungen für einen lebensnahen und aufklärungskräftigen Mathematikunterricht. Bönen: Verlag für Schule und Weiterbildung.

Vollstedt, M. / Vorhölter, K. (2008): Zum Konzept der Sinnkonstruktion am Beispiel von Mathematiklernen. In: H.-C. Koller (Hrsg.). Sinnkonstruktion und Bildungsgang. Zur Bedeutung individueller Sinnzuschreibungen im Kontext schulischer Lehr-Lern-Prozesse. Opladen: Barbara Budrich.

Ralf WAGNER, Engelbert NIEHAUS, Koblenz-Landau

Verbindung von Tabellenkalkulation, Dynamischer Geometriesoftware und Geographischen Informationssystemen zur Visualisierung von glatten Wegen im mathematischen Umweltlabor

Zielsetzung ist es, aus einzelnen Punkten der Ebene, als gemessene oder berechnete Ortskoordinaten, einen der zeitlichen Abfolge entsprechenden glatten Weg durch die Punkte zu rekonstruieren. Mit dieser Interpolationsaufgabe wird exemplarisch die Bedeutung mathematischer Modellbildung im Kontext eines mathematischen Umweltlabors verdeutlicht. Dabei wird eine Verbindung von algebraischen Aspekten der Tabellenkalkulation und der geometrischen Veranschaulichung in DGS-Systemen hergestellt, da dort die Möglichkeit der visuellen und der geometrischen Analyse der Konstruktion besteht.

1. Mathematikdidaktische Konzeption des mathematischen Umweltlabors

Das mathematische Umweltlabor ist ein problemorientiertes Projekt, welches an der Universität Koblenz-Landau, Campus Landau durch eine Kooperation der Institute für Umweltwissenschaften und Mathematik entstanden ist. Dabei steht eine anwendungsorientierte Bearbeitung von authentischen Problemlöseaufgaben aus dem Bereich der Umwelt-wissenschaften, insbesondere von Risikoanalysen, im Vordergrund. Im Wesentlichen sieht das Konzept die projektorientierte Zusammenarbeit (siehe [7] und [8]) von drei Teilnehmergruppen vor. Dies sind zum Einen Studierende des Diplomstudiengangs Umweltwissenschaften, zum Anderen Studierende der Lehramtsstudiengänge mit Hauptfach Mathematik und schließlich SuS mit besonderer mathematisch naturwissenschaftlicher Begabungen. Die Heterogenität der Teilnehmer bedingt natürlich unterschiedliche fachliche Kenntnisse. Die Schulmathematik stellt sich den SuS oftmals als Ansammlung unterschiedlicher Verfahren dar, wobei zu vorhandenen mathematischen Kompetenzen der Lernenden geeignete Probleme gesucht werden. Authentische Probleme besitzen i.d.R. eine höhere Komplexität, die die Lernvoraussetzung der SuS zunächst übersteigt. An dieser Stelle knüpft das Konzept des mathematischen Umweltlabors an, denn hier werden komplexe Problemstellung bearbeitet, welche durch Modellbildung im heterogenen Team zu lösen sind. Die beteiligten Studierenden der Umweltwissenschaften können auf Grund ihres fachlich breit gefächerten Studiums wichtige fächerübergreifende Beiträge zur mathematischen Modellbildung leisten. In diesem Artikel wird beispielhaft die Rekonstruktion glatter Wege durch ein bestimmtes Risikogebiet betrachtet und die entsprechende Modellbildung erläutert. Ausgehend von einer sich bewegenden Person werden in zeitlichen Abständen zugehörige Ortskoordinaten gesammelt. Für die spätere Risikobewertung ist der berechnete Wege wesentlich, da die Personen auf dem Weg unterschiedlich hohen Risiken ausgesetzt waren. Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Beteiligten alle notwendigen mathematischen Verfahren beherrschen, werden Lernprozesse in direkter Abhängigkeit von dem gegebenen Problem initiiert. Den beteiligten Lehramtsstudierenden kommt eine wichtige Rolle zu. Ihre Aufgabe besteht nun darin, die mathematische Theorie für die anderen fachlich und didaktisch aufzubereiten. Durch die Teilnahme an diesem Projekt lernen die Lehramtsstudierenden authentische Lehr- und Lernumgebungen zur mathematischen Modellbildung kennen und sammeln Erfahrungen im Umgang mit SuS. Den beteiligten Schülerinnen und Schüler wird die Möglichkeit gegeben, durch die Bearbeitung konkreter und realistischer Aufgabenstellungen mit mathematischen Werkzeugen zu arbeiten, die in vielen Anwendungsbereichen, insbesondere im Risikomanagement, curriculare Lerninhalte projektorientiert weiter vertiefen.

Im Folgenden werden drei unterschiedliche Niveaustufen der mathematischen Modellierung differenzierbarer Wege beschrieben. Die erstellte Webapplikation dient der Veranschaulichung der entsprechenden Wege. Dies kann ohne Kenntnis der internen Berechnung verwendet und zu Risikobewertungen herangezogen werden. Die graphische Darstellung der Splines in Geogebra durch Verwendung von Komplexkombinationen setzt das Verständnis des Konstruktionsprinzips voraus Die algebraische Beschreibung bildet schließlich die anspruchsvollste Ebene.

2. Fachwissenschaftliche Hintergründe

Bei der hier betrachteten Anwendnung handelt es sich, wie bereits erläutert, um die Rekonstruktion glatter Wege durch Verwendung einer zeitliche Abfolge diskreter Ortskoordinaten. Um die entsprechenden Wege beschreiben und später auch sinnvoll visualisieren zu können, ist eine mathematische Modellierung unabdingbar. Bei diesem Problem ist es naheliegend, unterschiedliche Interpolationsverfahren zu betrachten, um eine Verbindung der einzelnen Koordinaten zu erhalten. Bei der Modellierung von Problemen ist es sinnvoll, einfache Modelle aus den Lernvoraussetzungen der Gruppe zu entwickeln und diese dann schrittweise zu verbessern. Lineare Interpolation liefert aufgrund fehlender Differenzierbarkeit an manchen Stellen unrealistische Wegverläufe. Da es sich um Ortskoordinaten einer zweidimensionalen Ebene handelt, gelangt man schließlich zur Modellierung differenzierbarer Kurven (Splines). Die so modellierten Kurven entstehen durch eine einfache Bildung von Konvexkombinationen (siehe [2]). Ausgangspunkt sind eine Anzahl von Koordinatenpunkten, beispielsweise vier. Es werden zuerst Bezierkurven für jeweils zwei benachbarte Punkte gebildet gemäß $B_{1,2}(t) = c \bullet A_2 + (1 - c) \bullet A_1$ (c aus [0,1]). Die so enstendenen Bezierkurven werden dann wieder durch Konvexkombinationen kombiniert und das Verfahren so lange fortgesetzt, bis schließlich eine Kurve für alle betrachteten Koordinatenpunkte gefunden wurde.

Die so berechneten glatten Wege sollen schließlich visualisiert werden, um den Verlauf durch das betrachtete Risikogebiet veranschaulichen zu können. Die Dynamische Geometriesoftware Geogebra (siehe [3]) leistet hier gute Dienste, denn durch die algebraische Komponente ist es hier möglich, die berechneten Bezierkurven zu konstruieren. Außerdem kann eine dynamische Veränderung der entsprechenden Kurve betrachtet werden. Dadurch wird ein weitergehendes Verständnis dieser Kurven und deren Abhängigkeit von den verwendeten Ortskoordinaten ermöglicht. Ist lediglich das Ergebnis (differenzierbarer glatter Weg) im Lernprozess wesentlich kann man durch einen online verfügbaren Konverter automatisch eine entsprechende Geogebra-Datei erstellen lassen. Anhand einer bereitgestellten Webanwendung (siehe [1]) kann sich der Leser selbst ein Bild davon machen. Diese Visualisierungsmöglichkeiten sind eine wichtige Komponente bei der Aufbereitung gegebener Daten. Bei vielen Anwendungen ist es erforderlich, benutzerfreundliche Lösungen bereitzustellen. Eine häufig verwendete Visualisierungsmöglichkeit von geographischen Daten sind so genannte Geographische Informationssysteme (GIS). Im mathematischen Umweltlabor kommt das OpenSource Programm GRASS zum Einsatz, welches auch im Hinblick von Risikoanalysen entwickelt wurde (siehe [4]). Durch die Verwendung dieses lernen die Beteiligten, mit einer in der Realität wirklich verwendeten professionellen Software umzugehen und ihre Ergebnisse enstprechend aufzubereiten und zur Verfügung zu stellen.

3. Lehrplanbezug

Da im mathematischen Umweltlabor sehr unterschiedliche Fragestellungen behandelt werden, sind viele Bezüge zum Lehrplan für das Fach Mathematik vorhanden. Betrachtet man das vorgestellte Anwendungsbeispiel, dann spielt dort der Begriff der Differenzierbarkeit (siehe [5]) eine besondere Rolle, wobei nicht nur der in der Schule behandelte eindimensionale Fall, sondern die Differenzierbarkeit von räumlichen Kurven betrachtet werden muss, zu deren Verständnis selbstverständlich der eindimensionale Fall grundlegend ist. Durch die Aufbereitung der vorhandenen Daten aus einer Tabellenkalkulation spielen algebraische Begriffe eine wichtige Rolle (siehe [6]). Durch die Behandlung von Kurven wird außerdem das Verständnis des Funktions- und Abbildungsbegriffes erweitert.

4. Gewonnene Ergebnisse und Erkenntnisse

Bei den bereits an diesem Projekt teilgenommenen Schülerinnen und Schülern hat sich gezeigt, dass diese bei vorhandenen besonderen Begabungen im mathematischen und naturwissenschaftlichen Bereich gut in der Lage sind, sich mit einiger Hilfestellung neue Verfahren anzueignen und diese auch gewinnbringend einzusetzen. Auch zeigte sich großes Interesse an den Modellbildungsprozessen und den authentischen Problemen, was das entwickelte Konzept bestätigt.

5. Fazit

Die bis jetzt gewonnenen Erkenntnisse lassen einen Mehrwert für die Beteiligten erkennen. Allerdings ist bei den teilnehmenden SuS eine gewisse mathematische und naturwissenschaftliche Begabung erforderlich, um auch selbstständig einen Beitrag leisten zu können und an dem Modellbildungsprozess teilnehmen zu können. Dies bedingt auch eine vorhandene Motivation, sich gegebenenfalls neue Verfahren anzueignen und gemeinsam ein Problem zu lösen. Dieser letzte Punkt kann auch einen wichtigen Beitrag für soziale Schlüsselqualifikationen leisten, welche für das spätere Berufsleben erforderlich und gewünscht sind.

6 Literatur und Links auf verwendete Programme

[1] Webapplikation Universität Koblenz-Landau. Ralf Wagner. http://mathematik.uni-landau.de/cgi-bin/riskmap/path.cgi, 2009

[2] M. Hanke-Bourgeois: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens. 2. Auflage. Vieweg+Teubner Stuttgart, 2006.

[3] OpenSource-Entwicklerteam, GeoGebra, http://www.geogebra.org/ (URL geprüft am 28.01.2009)

[4] OpenSource-Entwicklerteam , GRASS GIS, http://grass.osgeo.org/ (URL geprüft am 26.03.2007)

[5] Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach. Ministerium für Bildung. Wissenschaft und Weiterbildung Rheinland-Pfalz, 1998.

[6] Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5 – 9/ 10). Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz, 2007.

[7] J. Dewey, W.H. Kilpatrick: Der Projektplan. Grundlegung und Praxis. Weimar, 1935.

[8] K. Frey: Die Projektmethode. 10. Auflage. Beltz. Weinheim, 1982, 1990, 2005.

Sebastian WARTHA, Bielefeld

Rechenstörungen jenseits der Grundschule

Der Umgang mit Kindern, die besonders schwerwiegende und lang anhaltende Probleme beim Lernen von Mathematik haben (diese Probleme werden in diesem Beitrag als „Rechenstörungen“ bezeichnet) wird von Schuladministration, Lehrkräften, Eltern und Fachdidaktik aktuell intensiv diskutiert. Interessanterweise beschränkt sich die Diskussion in Bezug auf Rechenstörungen fast ausschließlich auf den Primarbereich, obgleich es zahlreiche Hinweise darauf gibt, dass diese grundlegenden Probleme nicht mit der Grundschulzeit enden.

1. Fragestellung

Wiederholt haben die Untersuchungen von PISA auf eine so genannte „Risikogruppe“ hingewiesen, der bei den Erhebungen von 2000, 2003 und 2006 zwischen 20% und 25% der Fünfzehnjährigen zugeordnet werden (Frey et al., 2007). An Hauptschulen gehört nahezu jeder zweite Schüler zu dieser Gruppe. Diese Schülerinnen und Schüler sind nicht in der Lage, typische mathematische Aufgaben für Ausbildungsplatzbewerber zu lösen (Klieme et al., 2003).

Inwieweit diese – am Ende der Sekundarstufe I festgestellten Defizite – mit Kompetenzen zusammenhängen, die in der Grundschule erworben werden, stellt eine Studie von Moser Opitz (2005) dar. Schüler „mit unterdurchschnittlichen Mathematikleistungen [in Klassen 5 und 8] haben den Basisstoff der ersten vier Schuljahre nicht oder nur teilweise erworben, und zwar trifft dies auf Schülerinnen und Schüler mit durchschnittlichem und unterdurchschnittlichem IQ in gleicher Weise zu“ (Moser Opitz, 2005, 124).

Die Erforschung von Risikofaktoren und Symptomen für Rechenstörungen in der Sekundarstufe steht jedoch erst am Anfang. Hier wird ein großes Forschungsdesiderat gesehen (Gaidoschik, 2008). In einer empirische Untersuchung im Rahmen der Arbeit der Beratungsstelle für Rechenstörungen an der Uni Bielefeld wurden daher folgende Fragen an einer Hauptschulstichprobe untersucht:

- Inwiefern können Defizite in der Sekundarstufe auf mangelndes Wissen aus der Primarstufe zurückgeführt werden?
- An welchen Symptomen manifestieren sich diese Defizite?
- Welche Konsequenzen ergeben sich für die Diagnostik und Förderarbeit?

2. Symptome für Rechenstörungen

Verfestigtes Zählendes Rechnen: Beim (auch gestützten) Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100 (oder 20) müssen Ergebnisse über Zählstrategien ermittelt werden. Eine Ablösung vom zählenden Rechnen ist nur möglich, wenn ein Repertoire an auswendig gewussten Aufgaben (z. B. Zahlzerlegungen bis einschließlich 10), die Fähigkeit zur quasisimultanen Zahlauffassung und -darstellung sowie ein Wissen über das Nutzen von Analogien (30 + 40 = 70, weil 3 + 4 = 7) vorhanden ist. Problematisch ist verfestigtes zählendes Rechnen, da es keine universelle und fortsetzbare Strategie ist, sich keine Zahlvorstellungen ausbilden und durch die Fehleranfälligkeit das Auswendiglernen von Aufgaben erschwert ist. Schüler, die sich vom zählenden Rechnen nicht lösen, müssen in größeren Zahlenräumen mit gelernten, aber in der Regel unverstandenen Hilfsstrategien arbeiten.

Probleme beim Stellenwertverständnis: Ein Verständnis des Aufbaus des dezimalen Stellenwertsystems ist die Grundlage für den Erwerb von operativen Strategien. Dieser wird u.a. im Deutschen dadurch erschwert, dass zweistellige Zahlen ab 13 invers (zunächst Einer, dann Zehner) gesprochen werden.

Grundvorstellungsdefizite: Grundvorstellungen ermöglichen das Übersetzen zwischen Realität, einer ikonischen oder enaktiven Darstellung und der mathematischen Symbolsprache. Ohne Grundvorstellungen zu den natürlichen Zahlen (z. B. Zahl als Mengenangabe) und den Rechenoperationen (z. B. Dividieren als Aufteilen) ist ein weiteres Lernen (z. B. Bruch als Anteil) auf Verständnisgrundlage nicht möglich.

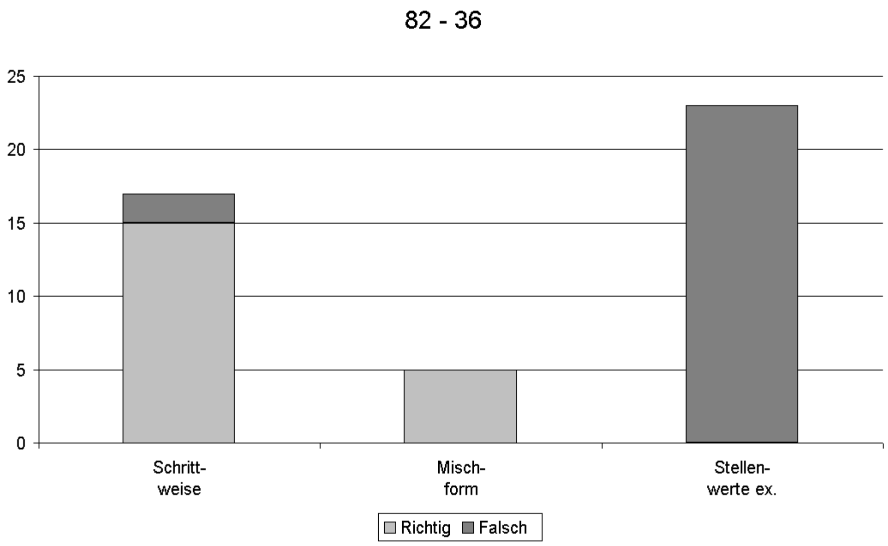
Die Diagnosearbeit der Beratungsstelle für Rechenstörungen der Universität Bielefeld orientiert sich auch bei Schülern der Sek I oder bei Erwachsenen an diesen Symptomen. Sie erweisen sich als praktikable Leitlinie für eine Diagnostik, die mathematisches Wissen bis zur Einschulung zurück untersucht.

3. Ergebnisse einer Studie mit Hauptschülern

Im Juli 2007 wurde im Raum Bielefeld mit 45 Schülern einer Hauptschule am Ende des sechsten Schuljahres ein schriftlicher Test zum Bruchzahlbegriff und Rechnen mit Brüchen (12 Items) und halbstandardisierte Interviews zu Bruchzahlen (4 Items) und Grundschulwissen (25 Items) durchgeführt.

Die arithmetischen Kompetenzen der befragten Schülerinnen und Schüler streuen breit. Unter den Befragten befinden sich drei verfestigte zählende Rechner, die alle Additions- und Subtraktionsaufgaben im ZR bis 100 über

Zählverfahren lösen mussten. Stellvertretend ist hier die Wahl der Rechenstrategien bei der Subtraktion 82 – 36 dargestellt. Weniger als die Hälfte der Schüler konnte diese Aufgabe richtig bearbeiten.



Kein Schüler konnte mit der Strategie „Stellenwerte extra" ein richtiges Ergebnis erzielen. Das ist verständlich, da negative Zahlen im Lösungsprozess [80 – 30 = 50; 2 – 6 = – 4; 50 + (– 4) = 46] unvermeidlich sind, im Unterricht in der Regel jedoch noch nicht thematisiert wurden. Die Strategie „Stellenwerte extra" ist eine charakteristische Ausweichstrategie für zählende Rechner, da die Ziffern der Stellenwerte zählend einfach verrechnet werden können. Wenn die Rechnung mit der Teilaufgabe 80 – 30 begonnen wurde, so fuhren fünf Schüler mit schrittweisem Rechnen fort („Mischform") und gelangten zum richtigen Ergebnis. Lösungen mit schrittweisen Strategien (17 Schüler) wurden mit zwei Ausnahmen richtig gelöst. Die Bearbeitung dieser und anderer Aufgabe zeigt, dass der Stoff des zweiten Schuljahres von weniger als der Hälfte der Lernenden sicher beherrscht wird (vgl. Wartha & Güse, in Vorb.).

Die Defizite im aktuellen Stoff (Bruchrechnung) sind ebenfalls deutlich: Aufgaben, die die Aktivierung von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (z. B. das Einzeichnen eines einfachen Anteils in einen Kreis) erfordern, werden von höchstens einem Drittel der Schüler gelöst. Die Zusammenhänge zwischen den Bereichen lassen sich wie folgt charakterisieren:

- Schüler, die in der Bruchrechnung Grundvorstellungen aktivieren können, haben höchstens kleine Defizite im Stoff der GS.
- Schüler, die große Defizite im Primarbereich haben, können keine Grundvorstellungen zu Bruchzahlen aktivieren.

– Die Gruppe der Lernenden, die so gut wie keine Grundvorstellungen zu Brüchen aktivieren kann, ist zweigeteilt: Rund die Hälfte hat gleichzeitig große Probleme mit dem Stoff der Primarstufe, die andere Hälfte hat den Primarstufenstoff angemessen gelernt.

4. Konsequenzen

Die Ergebnisse der Studie (ausführlich in Wartha & Güse (in Vorb.) dargelegt) haben Konsequenzen für die diagnostische Arbeit mit Kindern, die in der Sekundarstufe große Probleme beim Lernen von Mathematik haben. Neben aktuellen Inhalten des Unterrichts muss auch der Stoff der Primarstufe (insbesondere die unter 2. genannten Symptome) Gegenstand der Diagnose sein. Hierbei ist es unverzichtbar, dass die Prozesse, vor allem die Lösungsstrategien von nichtschriftlichen Verfahren im Mittelpunkt der Untersuchung stehen. Für die Förderarbeit schließt sich an, dass ein Üben am aktuellen Stoff bei Kindern, deren Probleme im Primarbereich liegen, höchstens kurzfristigen Erfolg bringen kann, oftmals sogar Probleme verstärkt, da subjektive Hilfsstrategien häufig fehlerhaft sind oder im weiteren Lernprozess eine Sackgasse darstellen. Vielmehr müssen zunächst die Grundlagen erarbeitet werden, die die Vorraussetzungen für ein erfolgreiches Weiterlernen sind. Hier ist auch die Forschung und Schuladministration gefragt, indem verbindlich geklärt wird, welche Minimalstandards aus dem Primarbereich unverzichtbar sind und welche Inhalte der Sekundarstufe zu Gunsten der Aufarbeitung der Grundschulprobleme verzichtbar sind.

Literatur

Frey, A., Asseburg, R., Carstensen, C., Ehmke, T., & Blum, W. (2007). Mathematische Kompetenz. In M. Prenzel, C. Artelt, J. Baumert, W. Blum, M. Hammann, E. Klieme, & R. Pekrun (Hrsg.) *PISA 2006. Ergebnisse der dritten internationalen Vergleichsstudie.* S. 249 – 275. Münster: Waxmann.

Gaidoschik, M. (2008). „Rechenschwäche“ in der Sekundarstufe: Was tun? *Journal für Mathematik-Didaktik, 29 (3/4)*, 287-294.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E., Vollmer, H.-J (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – eine Expertise.* Bonn: BMBF.

Moser Opitz, E. (2005). Lernschwierigkeiten Mathematik in Klassen 5 und 8: Eine empirische Untersuchung. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbarsgebiete, 73,* 179-190.

Schipper, W. (2002). Thesen und Empfehlungen für den schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23 (3/4),* 243-261.

Wartha, S. & Güse, M. (in Vorb.). Rechenstörungen in der Sekundarstufe: Auswirkungen fehlenden arithmetischen Grundwissens im weiteren Lernprozess.

Ysette WEISS-PIDSTYGACH, Göttingen

Lernen, zu sagen was man meint

1. Klassifizieren, Zuordnen, Strukturerhalten - Universelle Ideen als Motivation

Man benutzt das 'gleiche' Wort, meint jedoch völlig verschiedene Sinninhalte. Eine Flut von Informationen wird ständig bewusst und unbewusst eingeordnet, klassifiziert, bewertet. Probleme der Kommunikation und der Datenstrukturierung nehmen mit der wachsenden Globalisierung einen immer größeren Teil des Alltags ein. Das bewusste Erlernen charakteristischer Merkmale von Objekten und des Ignorierens fast aller Unterschiede ist ein leicht zu motivierender Rahmen, in welchen viele Themen von der Grundstufe bis zur Sek II eingebettet werden können.

Über den Inhalt der mentalen Schublade mit der Bezeichnung 'Dreieck' kann man sich anhand weniger charakteristischer Merkmale absprechen. Zugehörigkeit zur Schublade ist durch (mentale) Tätigkeiten überprüfbar. Wir können außerdem Unterschubladen aufmachen und in Abhängigkeit von Ordnungssinn und Prioritäten nach Ähnlichkeit oder Kongruenz oder Gleichheit weitersortieren. Sind wir in einer der Schubladen, so haben wir konstruktive Methoden alle anderen Objekte darin und somit eine passende Bezeichnung zu finden. Die gleiche Bezeichnung für alle Objekte einer Schublade machen diese ununterscheidbar.

2. Mathematischer Hintergrund

Die Aufteilung einer Menge von Objekten in Schubladen ist mathematisch formalisiert eine Zerlegung der Menge in Äquivalenzklassen. Sie kann durch Zuordnungen realisiert werden. Beim prädikativen Zugang stehen die Klassen (Urbilder der Zuordnung) und die charakterisierenden Merkmale (Bildpunkte) im Vordergrund, der funktionale Zugang identifiziert die zu einer Klasse gehörenden Objekte. Die Äquivalenzklassen sind von der Struktur einfach, da die einzige Beziehung zwischen zwei Elementen äquivalent oder nicht äquivalent ist.

Viele Inhalte der Schulmathematik weisen jedoch eine reichhaltigere Struktur auf: Die Operation einer Gruppe. Durch die Gruppenoperation erhalten wir außer der Aufteilung der Menge in Orbits (Klassifikation) die konstruktive Möglichkeit, ausgehend von einem Objekt die ganze Klasse zu erzeugen. In diesem Fall bilden die Invarianten der Gruppenoperation oder ausgezeichnete Repräsentanten mögliche Bezeichnungen der Schubladen. Verfeinerungen der Invarianten entsprechen der Einführung von Unterschubladen.

Die Bedeutung der Ideen Invarianz, Funktion, Charakterisierung für den Schulunterricht wurde z.B. von A. Schreiber (S.167) hervorgehoben. Eine ausführliche Darstellung dieser und mit damit im Zusammenhang stehender universeller Ideen findet man z.B. bei F. Schweiger (Kap.1, Kap.9).

3. Umgangssprachliche Formulierung und Instrumentalisierung

Die Aufteilung einer Menge in Äquivalenzklassen kann spielerisch dargestellt werden. Den Elementen der Menge entsprechen dann Positionen (A,B,C,D…), die Aufteilung der Menge erfolgt durch Spielzüge (→), durch welche man von einer Position in eine andere kommen kann. Um die disjunkte Aufteilung zu erzielen müssen die Spielzüge folgende Eigenschaften haben:

- kann man von der Position A in die Position B ziehen (A→B), so kann man auch von B nach A ziehen (B→A), m. a. W. die Züge sind umkehrbar (←)
- Kann man von der Position A in die Position B (A→ B), und von der Position B in die Position C (B→C) ziehen, so kann man von A nach C ziehen (A→C)
- der Zug (A→A) existiert für alle Positionen, m.a.W. eine Art Aussetzen.

Betrachten wir als Beispiel die Menge aller Dreiecke. Jedes Dreieck ist eine Position. Die Spielzüge sind alle möglichen Drehungen, Spieglungen und Verschiebungen. Positionen, die durch Züge verbunden werden können, sind in unserem Spiel äquivalent. In unserem Dreiecksbeispiel sind durch Züge miteinander verbundene Dreiecke kongruent. Der entwickelte Zugang ist abbildungsgeometrisch. Diese Repräsentation werden wir „Positionsspiel“ nennen.

Eine andere umgangssprachliche Übersetzung ist: Schublade (oder Ordner) für Äquivalenzklasse, Schubladenbezeichnung für die Werte der Zuordnung oder ausgewählte Repräsentanten und Wühlen in Schubladen im Falle der Operation einer Gruppe. In unserem Dreiecksbeispiel befinden sich in einer Schublade alle zueinander kongruenten Dreiecke. Eine mögliche Bezeichnung für eine Schublade ist z.B. die Angabe der drei Seitenlängen eines Dreiecks der Schublade. Wählt man die Länge einer Seite als charakteristisches Merkmal, so liegen in einer Schublade alle Dreiecke, mit einer gleichlangen Seite. Es gibt dann jedoch ist keine eindeutige Zuordnung Dreieck → Schublade. Ein aus der Alltagserfahrung kommender Ansatz ist der Versuch, für die in mehrere Schubladen passenden Dreiecke (z.B. Dreiecke mit zwei gleichlangen Seiten) neue Schubladen aufzumachen und umzusortieren. Da es auch hier noch Dreiecke gibt, die in mehrere Schubladen passen, werden nochmals neue Schublade für die in mehrere Schubladen passenden Dreiecke eingeführt und umsortiert. Dieser Ansatz führt uns zur Euklidischen Klassifikation von Dreiecken. Wir werden diese Repräsentation „Schubladendenken" nennen.

Sowohl in der Präsentation Positionsspiel als auch beim Schubladendenken erfolgt eine Loslösung vom fachspezifischen Kontext. In dieser Form sind die Ideen Klassifizieren, Zuordnung und Invarianz nicht an mathematische Objekte oder Objekte der physikalischen Welt gebunden. Wir befinden uns auf der obersten Stufe der Hierarchie universeller Ideen (Schweiger, S.14).

Die zu den universellen Ideen gehörenden Problemlösemethoden werden damit universell einsetzbare Instrumente: Denkmethoden.

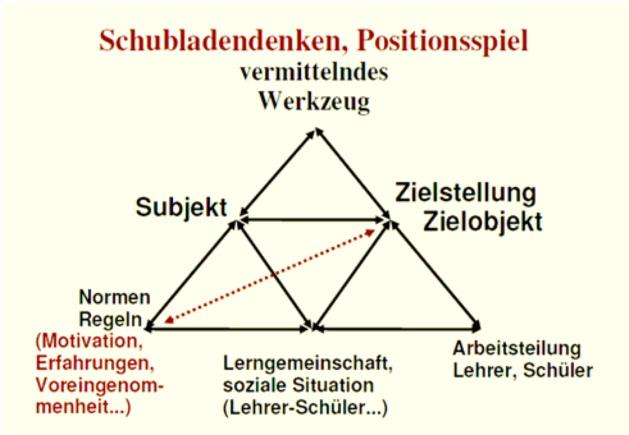
Die typische Situation zur Anwendung der universellen Werkzeuge Positionsspiel und Schubladendenken ist das Vorhandensein einer Menge, welche durch eine Zuordnung aufgeteilt wird. Beispiele der Schulmathematik sind:

Menge	Zuordnung	Invariante Spielzüge
endliche Mengen	Zählen	1-1-Zuordnung der Elemente
Objektmengen	Messen	die Messgröße erhaltende Operationen
Menge der Dezimalzahlen	Runden	+½ und Weglassen der entsprechenden Dezimalstellen
Menge der natürlichen Zahlen	Teilen mit Rest	Addieren von Vielfachen des Teilers
Menge der Brüche	Dezimalzahlbestimmung	Kürzen und Erweitern
Menge der Dreiecke	Messen der Seitenlängen	Isometrien (Spiegeln, Drehen, Verschieben)
Gleichungssysteme	Lösen	äquivalente Umformungen
Menge der Dreiecke	Messen der Winkel	Isometrien, Streckungen , Stauchungen
Menge der Polynomfunktionen	Abbildung auf Grad	Parametervariation
Menge der diff.-baren Funktionen	Differenzieren	Addieren von Konstanten

Eine Zuordnung durch Messen ist z.B.: Objekt → Farbe des Objekts.

An diesem Beispiel lassen sich weitere Möglichkeiten situierten entdeckenden Lernens im Rahmen unserer Instrumentalisierung gut veranschaulichen. Das Spiel „Ich sehe was, was Du nicht siehst...“ klärt durch seinen diagnostischen Ansatz die bereits existierende Klassifikation beim Spieler. Der Spieler benennt Objekte, die in seine individuelle mentale Schublade zur gewählten Farbe passen. Ausgehend von diesem aktuellen Entwicklungsstand kann durch soziale Interaktion die Notwendigkeit neuer Farbbezeichnungen zum Gesprächsthema gemacht werden. Innerhalb der Zone der möglichen Entwicklung erfolgt eine Verfeinerung der Werkzeuge und sprachliche Anpassung. Mögliche Variationen des Spiels sind in [Weiss-Pidstrygach] beschrieben.

4. Fundamentale Ideen im sozial-kulturellen Paradigma



Die Herangehensweise vernetzt verschiedene Themen horizontal. Außerdem wird durch die verschiedenen Sichtweisen das Werkzeug variiert, formalisiert und verinnerlicht. Die Loslösung der Methode vom Objekt gestattet die nebenstehende Formalisierung in der Terminologie der Tätigkeitstheorie.

Die Fixierung des vermittelnden Werkzeugs und die Handhabung des Werkzeugs als Lernziel erlauben Variationen beim Zielobjekt und der Lernsituation innerhalb einer Tätigkeit. Sowohl für das Schubladendenken, als auch für das Positionsspiel kann man ähnlich wie es bei der Variation von Aufgaben geschieht, einfache Variationsprinzipien dieser Methoden aufstellen.

Literatur

Schreiber A., (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. *Mathematica Didactica* 2 (S. 165-171).

Schweiger, A., Fundamentale Ideen.
http://www.uni-salzburg.at/pls/portal/docs/1/550958.PDF

Weiss-Pidstrygach Y. Ich sehe was, was Du nicht siehst –für Farbenblinde. Erscheint in *Praxis der Mathematik* .

Annika M. WILLE, Bremen

Von Schülerinnen und Schülern erdachte Dialoge im Kontext der Zahlbereichserweiterungen in Klasse 5

Abstrakt

Für die Zahlenbereichserweiterungen in einer 5. Klasse in Bremen wurde das Zahlenleitermodell eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler führten außerdem ein Forscherheft, in dem sie sowohl Reisetagebucheinträge, als auch selbst erdachte Dialoge schrieben. Die Videoaufzeichnungen der Schreibprozesse wurden dahingehend untersucht, wie die Schülerinnen und Schüler ihre Überlegungen darlegten.

Theoretischer Rahmen

Anna Sfard (2008) definiert das Denken als *individualisierte Form von (interpersonaler) Kommunikation* oder auch als *Selbstkommunikation*. Dabei prägt sie den Begriff *Commognition* und bezieht sich damit sowohl auf den *Prozess des Denkens* als auch auf das *Kommunizieren*. In dieser Sichtweise wird Mathematik als Diskurs gesehen. Dieser Diskurs ist ihm Rahmen von Commognition der Forschungsgegenstand.

Das *Schreiben im Mathematikunterricht* kann auf unterschiedliche Weise erfolgen, wie zum Beispiel in Form von *Reisetagebüchern*, *Forscherheften* und *Journals*. Borasi & Rose (1989) beschreiben Vorteile, die das Schreiben im Mathematikunterricht für das Lernen und Lehren hat. Ruf & Gallin (1998) untersuchen Reisetagebücher und führen aus, wie durch sie ein schriftlicher Dialog zwischen Lernenden und Lehrenden entsteht. Clarke, Waywood & Stephens (1993) wiederum unterscheiden zwischen drei verschieden Arten von Journal-Einträgen. Sie nennen sie *Recount*, *Summary* und *Dialogue*, wobei Dialogue einen inneren Dialog des Schreibenden mit sich selbst meint. Über diese inneren Dialoge schreiben sie, dass auf diese Weise die Schülerinnen und Schüler ihre Fehler analysieren und identifizieren und ihre Gedankengänge begründen könnten. Eine weitere Form des Schreibens im Mathematikunterricht sind *erdachte Dialoge* (Wille, 2008). Schülerinnen und Schüler schreiben hierbei einen Dialog zwischen zwei Protagonisten auf, die sich über eine mathematische Fragestellung unterhalten.

Sfard (2008) schreibt: „Mathematical self communication may be difficult to observe.“ Es stellt sich also die Frage, wie man den mathematischen Diskurs von Schülerinnen und Schülern sichtbar machen kann. Dies kann auf viele verschiedene Weisen geschehen. In Beispielen möchte ich zeigen, wie von Schülerinnen und Schülern erdachte Dialoge einen inneren Diskurs anregen konnten, dessen Spuren in den Aufzeichnungen zu sehen sind. Dabei können wir nicht erwarten, dass wir dabei direkt beim Denken zusehen. Möglich ist aber eine Untersuchung der mathematischen Ideen, die in ihnen dargestellt werden, und der inneren Dynamik der erdachten Dialoge. Die Forschungsfragen sind daher: Werden während des Schreibens erdachter Dialoge mathematische Ideen entwickelt? Welche mathematischen Ideen werden von den Schülerinnen und Schülern genannt? Kann man Typen von Darstellungen unterscheiden.

Methode des laufenden Projektes

In einem ganzen Schuljahr (2008/2009) schreiben Schülerinnen und Schüler einer 5. Klasse eines Bremer Gymnasiums regelmäßig Einträge in ihr Forscherheft. Dabei schreiben sie sowohl Reisetagebucheinträge im Sinne von Ruf & Gallin (1998) als auch erdachte Dialoge. Der Prozess des Schreibens der erdachten Dialoge wird bei sieben bis acht Schülerinnen und Schülern gefilmt. Anschließend wird mit den Schülerinnen und Schülern ein Interview, bzw. ein Stimulated Recall durchgeführt und ebenfalls auf Video aufgenommen.

Lernumgebung

Der Bremer Lehrer Klaus Lies entwickelte für seinen Unterricht (2002 bis 2006) ein Leitermodell, das den Zahlenstrahl aufrecht stellt und mit Sprossen versieht. Das Modell wurde später von Stefan Halverscheid ebenfalls eingesetzt und untersucht (Halverscheid, Henseleit & Lies 2006). Bei Bruchzahlen können dabei neue Sprossen eingezogen werden. Bei Vielfachen werden Sprossen ausgelassen. Zu der unten stehenden Aufgabe war Folgendes inhaltlich vorausgegangen: ganze Zahlen, kleinstes gemeinsames Vielfaches, größter gemeinsamer Teiler, Bruchzahlen erkennen, erweitern, kürzen, vergleichen. Außerdem besaßen die Schülerinnen und Schüler selbst gemachte Bruchzahlleitern aus Papier. Die Aufgabestellung war diese:

Führe das unten stehende Gespräch zweier Schülerinnen oder Schüler fort. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Die beiden wollen im Gespräch so viel wie möglich mathematisch entdecken. Schreibe mindestens eine Seite.

S1: Ich denke gerade über Bruchzahlen nach. Möchtest du mir dabei helfen?
S2: Ja, gerne! Worüber denkst du denn nach?
S1: Ich versuche gerade herauszufinden, wie ich zwei Bruchzahlen addieren kann.
S2: Spannend!
S1: Wenn ich innerhalb einer Leiter bleibe, ist es einfach.
S2 denkt nach...
S2: Stimmt! $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{6}$ kann ich auch leicht zusammenzählen.

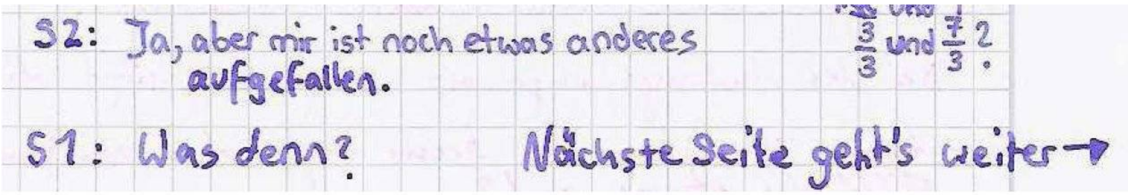
S1: Aber was mache ich, wenn ich zwei Leitern habe?
S2: Lass uns einmal ein Beispiel angucken! Vielleicht bekommen wir so eine Idee.

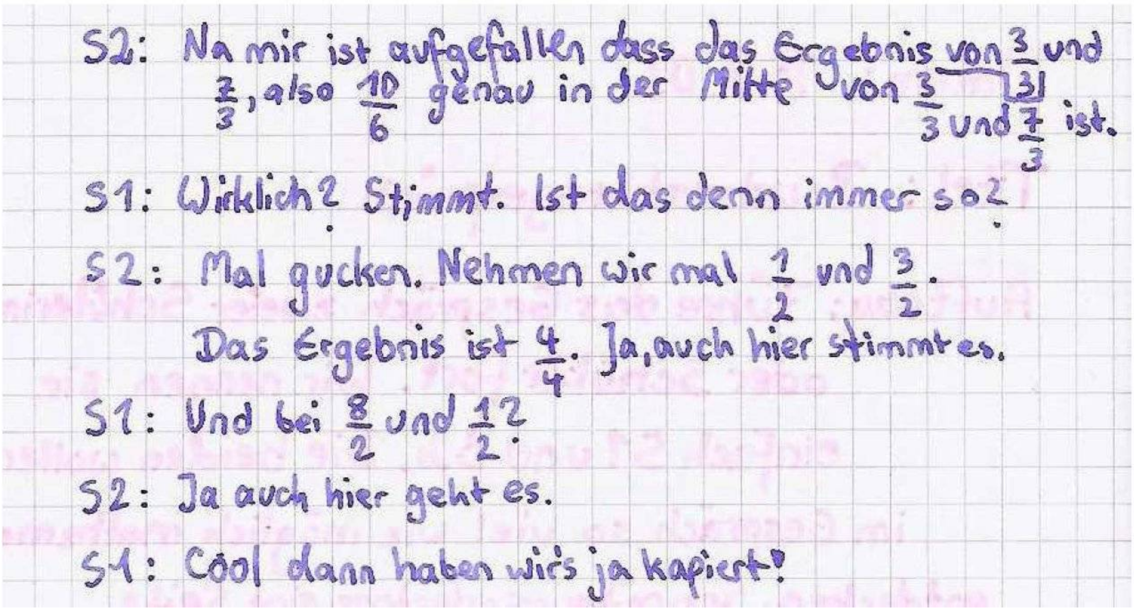
Ergebnisse

Eine Schülerin, die wir hier Kathrin nennen, entwickelt verschiedene mathematische Ideen während des Schreibens ihres erdachten Dialogs. Zunächst findet sie zwei Zahlenpaare, bei denen überkreuzt gerechnet der Zähler plus Nenner gleich dem anderen Zähler plus Nenner ist. Diese Idee verwirft sie wieder anhand eines Gegenbeispiels und sagt dazu im Stimulated Recall:

„Aber das hat mich dann doch nicht weitergebracht, als ich gemerkt habe, dass mir noch eine Idee kam.“

Die nächste Idee ist das Addieren von gleichnamigen Bruchzahlen durch das Addieren des Zählers. Als letztes fällt ihr mit Hilfe ihrer Leitern auf, dass bei gleichnamigen Brüchen der Bruch, der aus Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner besteht, *genau in der Mitte* zwischen den anderen beiden liegt. Sie entdeckt also das arithmetische Mittel bei zwei gleichnamigen Bruchzahlen. Es folgt ein Ausschnitt aus Kathrins erdachten Dialog:


S2: Ja, aber mir ist noch etwas anderes aufgefallen.
$\frac{3}{3}$ und $\frac{7}{3}$?
S1: Was denn?
Nächste Seite geht's weiter →


S2: Na mir ist aufgefallen dass das Ergebnis von $\frac{3}{3}$ und $\frac{7}{3}$, also $\frac{10}{6}$ genau in der Mitte von $\frac{3}{3}$ und $\frac{7}{3}$ ist.
S1: Wirklich? Stimmt. Ist das denn immer so?
S2: Mal gucken. Nehmen wir mal $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$.
Das Ergebnis ist $\frac{4}{4}$. Ja, auch hier stimmt es.
S1: Und bei $\frac{8}{2}$ und $\frac{12}{2}$.
S2: Ja auch hier geht es.
S1: Cool dann haben wirs ja kapiert!

Bei einer anderen Schülerin, die wir hier Fatma nennen, kann man im erdachten Dialog ahnen, wo sie nachgedacht hat. Sie schreibt beispielsweise an einer Stelle: „Ich muss jetzt mal nachdenken.“ In der Videoaufzeichnung ist an dieser Stelle zu sehen, dass die Schülerin 37 Sekunden mit dem Schreiben aufhört, bevor sie weiterschreibt.

In vorherigen Untersuchungen über erdachte Dialoge kristallisierten sich drei Formen von erdachten Dialogen heraus: Die erste Form besteht aus einer kurzen Frage, einer langen Antwort und einem kurzen Dank. Bei der zweiten Form haben die beiden Protagonisten eine Art Lehrer-Schüler-Verhältnis, bei der einer viel mehr weiß als der andere. Die dritte Form ist ein sich entwickelnder Dialog, der an die inneren Dialoge wie bei Clarke, Waywood & Stephens (1993) erinnert. Bei dem hier vorgestellten Projekt war immer ein Anfangsdialog gegeben. Es ist bisher zu beobachten, dass die erste Form überhaupt nicht auftritt. Die zweite Form tritt vor allem dann auf, wenn der Schreibende etwas verstanden hat und noch einmal reflektiert. Die dritte Form tritt häufig dann auf, wenn die Schülerin oder der Schüler selbst versucht, während des Schreibens etwas herauszufinden.

Zusammenfassung

Die Schülerinnen und Schüler entwickelten während des Schreiben erdachter Dialoge mathematische Ideen. Unter den Ideen waren verschiedene Arten, die vier Ziffern der beiden Bruchzahlen miteinander zu verrechnen. Andere erhielten das korrekte Ergebnis entweder durch das Aneinanderlegen ihrer Zahlenleitern oder durch Rechnungen. Bei manchen erdachten Dialogen, wie bei dem von Fatma, kann man durch die Formulierung darauf schließen, an welchen Stellen nachgedacht wurde. Schließlich entdeckte Kathrin das arithmetische Mittel bei Bruchzahlen.

Literatur

Borasi, R. & Rose, B. J. (1989). Journal writing and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 347-365.

Clarke, D. J., Waywood, A. & Stephens, M. (1993). Probing the structure of mathematical writing. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 235-250.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Seelze: Kallmeyer.

Halverscheid, S., Henseleit, M. & Lies, K. (2006). Rational numbers after elementary school: realizing models for fractions on the real line. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (Eds.) *Proc. 30 th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 255-232). Prague: PME.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communication: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York, USA: Cambridge University Press.

Wille, A. M. (2008). Aspects of the concept of variable in imaginary dialogues written by students. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sépulveda (Eds.) *Proc. 32 th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 417-424). Cinestav-UMSNH, Mexico: PME.

Jan WÖRLER, Würzburg

Konkrete Kunst: Mathematik in Bildern finden und dynamisch erforschen

Modellierung ist ein zentrales Thema aktueller mathematikdidaktischer Forschung und Diskussion. Auch im Mathematikunterricht werden Anwendungsaufgaben stärker unter dem Gesichtspunkt realer Modellierung betrachtet. Dabei ist die Anwendung mathematischer Methoden zur Lösung realer Anwendungsprobleme i. d. R. vor allem deswegen sehr komplex, weil oft die Randbedingungen und die das System beeinflussenden Parameter unbekannt sind oder nur näherungsweise ermittelt werden können.

Anders ist die Situation in einem speziellen Gebiet der Alltagswelt, in der Konkreten Kunst (vgl. Lauter 2007): Die Werke dieser Kunstgattung basieren meist auf einigen wenigen Systemelementen, die – das fordert die Theorie – „einfach" und für einen Betrachter auch „visuell nachprüfbar" sind. Die Randbedingungen für die Bilder sind von den Künstlern fest vorgegeben, die bildbestimmenden Parameter haben häufig einen direkten Bezug zu mathematischen Objekten oder Verfahren. Ein Betrachter ist demnach prinzipiell in der Lage vom Kunstwerk auf das zugrunde liegende mathematische Modell schließen zu können. Ein solches Vorgehen entspricht damit weitgehend der Modellierung von Realsituationen. Fasst man schließlich ein Konkretes Kunstwerk als System von mathematischen Größen und Relationen auf und sucht nach einer „möglichst guten" mathematischen Beschreibung dieses Systems, so ist dies unter didaktischen Gesichtspunkten eine gute Lern- oder Übungsumgebung für die Hinführung zur Modellierung von Realsituationen.

Im Folgenden wird anhand eines 2-Phasen-Schemas vorgestellt, wie unter diesem Blickwinkel die Behandlung Konkreter Kunst im Mathematikunterricht erfolgen kann. Der zentrale Aspekt der Phase I ist dabei die Modellierung Kunstwerks. In der Phase II steht die dynamische Erforschung des gefundenen Modells mit Hilfe interaktiver Computersimulationen im Zentrum.

Phase I: Mathematik in Bildern finden – Modellierung

Ausgangspunkt bei der Behandlung Konkreter Kunst im Unterricht ist das Kunstwerk, das von den Schülerinnen und Schülern unter mathematischen Gesichtspunkten untersucht wird. Das Ziel ist es, Größen und Zusammenhänge zu finden, die den Bildaufbau möglichst vollständig beschreiben. Dazu sind im Wesentlichen drei Schritte notwendig (vgl. Abb. 1):

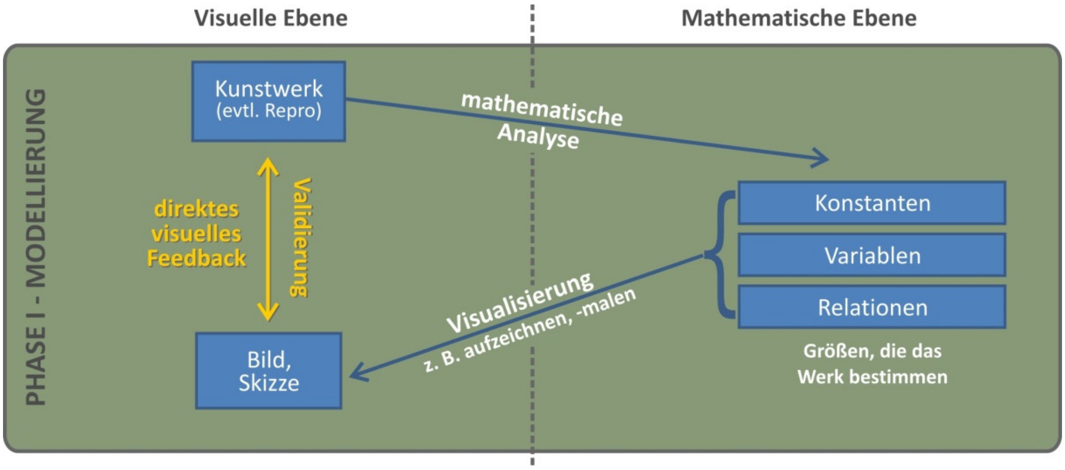


Abb. 1: In der Phase der Modellierung werden die mathematischen Größen gesucht, die das Werk bestimmen.

Mathematische Analyse. In diesem Schritt wird das Werk auf seinen mathematischen Gehalt hin untersucht. Dazu werden Muster freigelegt oder Regelmäßigkeiten erkannt und mathematisch beschrieben. Fähigkeiten wie Reduzieren, Abstrahieren und Generalisieren werden hierbei besonders gefordert. Die Analyse führt auf Konstanten (wie etwa das Bildformat) und Variablen (z. B. Farben), sowie auf die funktionalen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen (etwa die Verteilung der einzelnen Farben über die Farbfläche).

Visualisierung: Die gefundenen mathematischen Zusammenhänge werden in geeigneter Weise veranschaulicht, im Allgemeinen auf Papier skizziert.

Validierung: Der Vergleich von Skizze und Kunstwerk gibt eine Rückmeldung über die Qualität der Analyse; stimmen beide unter mathematischer Perspektive überein, kann der gefundene Satz an Größen und Relationen als vollständig angesehen werden.

Phase II: dynamische Erforschung des modellierten Systems

Am Ende der Phase I liegt eine mathematische Beschreibung des Kunstwerkes vor, die im Übergang zur Phase II als interaktive Computersimulation implementiert und in Form eines Applets zum Ausgangspunkt weitergehender Fragestellungen gemacht werden kann. Offen ist allerdings die Frage, inwieweit SchülerInnen– zumindest einfache –Simulationen selbst erstellen können oder ob sie von einem Dritten zur Verfügung gestellt werden müssen. Die interaktiven Elemente solcher Applets machen es dabei möglich, direkt auf einzelne Parameter des Modells zuzugreifen, sie dynamisch zu verändern und so ihren Einfluss zu erforschen. Dadurch wird das Verständnis der funktionalen Zusammenhänge gefördert und die Leistungsfähigkeit und Grenzen des Simulationsmodells aufgezeigt (vgl. Abb. 2).

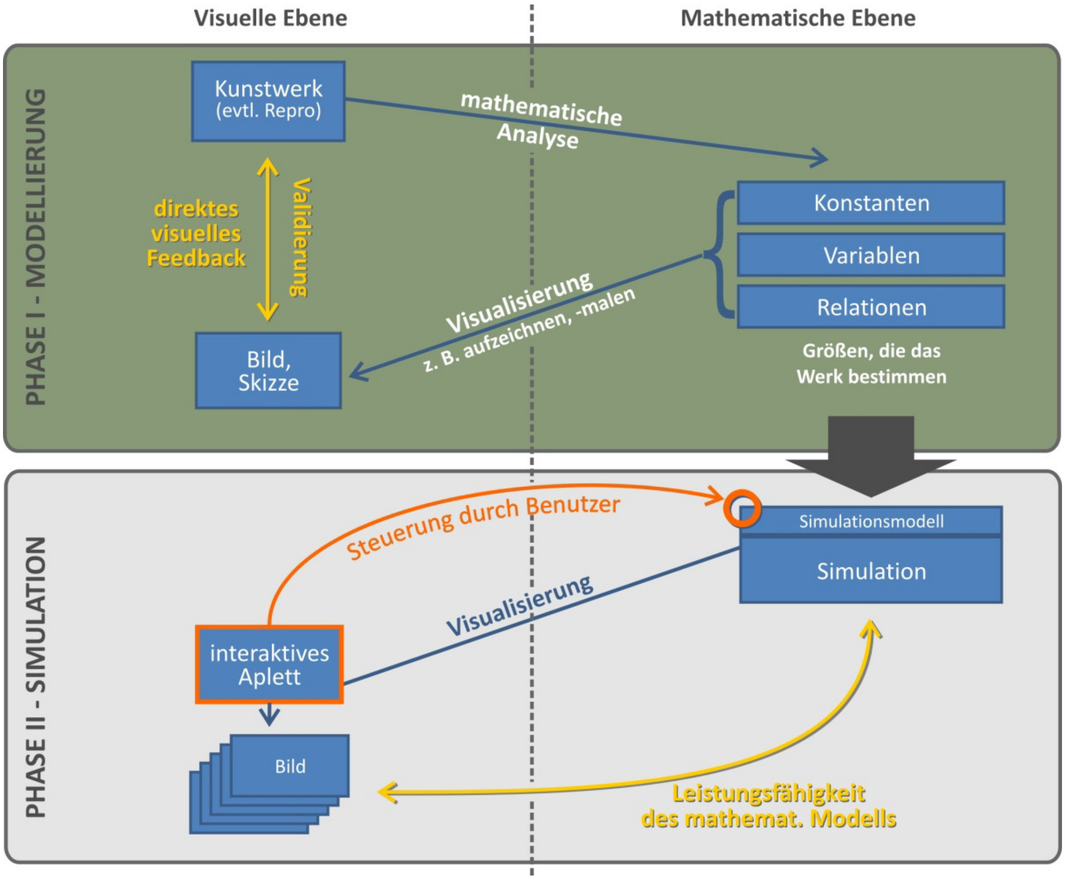


Abb. 2.: In der Phase II wird das mathematische Modell als Ergebnis der Modellierungsphase mit Hilfe von Computersimulationen dynamisch auf Leistungsfähigkeit und Grenzen untersucht.

Ein Beispiel: Das „Primzahlbild 1-9216“

Das 2-Phasen-Schema wird exemplarisch am Beispiel des Werkes „Primzahlenbild 1-9216“ der Schweizer Künstlerin Suzanne Daetwyler vorgestellt (vgl. Abb. 4):

Phase I: (vgl. dazu Woerler 1998) Die bildbestimmenden Größen des Werkes sind, das verrät bereits der Titel, die Primzahlen. Sie heben sich als farbige Kästchen vom hellgrauen Hintergrund ab. Ihre Anordnung ergibt sich zustande, indem die Bildfläche in 9216 Felder unterteilt wird. Die Felder werden, im Bildzentrum des Bildes bei der Zahl 1 beginnend, spiralförmig durchnummeriert und die mit primer Nummer farbig markiert.

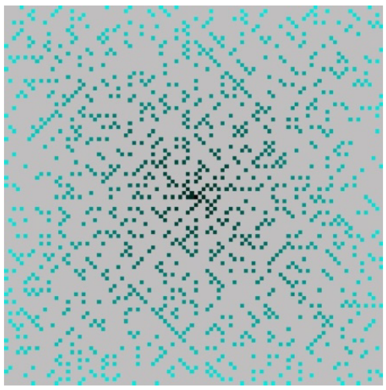


Abb. 4: S. Daetwyler (1996): „Primzahlenbild 1-9216“

Phase II: Da die Anordnung der Kästchen nun geklärt ist, drängen sich weitere Fragen geradezu auf: Wie könnte das gefundene Muster über die realen Bildgrenzen hinaus fortgeführt werden? Zwar gibt es unendlich viele Primzahlen, aber sie werden auch „nach außen hin“ weniger – treten Bereiche auf in denen gar keine Primzahlen liegen, gibt es „Löcher“ im Muster? Wie stark nimmt die Dichte der Primzahlen nach außen hin eigentlich ab? Wie dicht liegen die Primzahlen überhaupt in den natürlichen Zahlen? Und wie ändert sich das Bild, wenn man eine andere als die spiralförmige Anordnung der Primzahlkästchen wählt? Was ändert sich, wenn man statt der Primzahlen ganze Zahlen oder Quadratzahlen auf die gleiche Weise anordnet? Welche Eigenschaften dieser Mengen kann man aus dem Bild ablesen?

Simuliert man die Spiralbewegung am Computer und schaltet einen Primzahltest nach, erhält man ein Applet, mit dem man diese Fragen erforschen, klären und weiterentwickeln kann (vgl. Abb. 5). Ein entsprechendes Applet ist unter http://www.dmuw.de/projekt/kunst abrufbar.

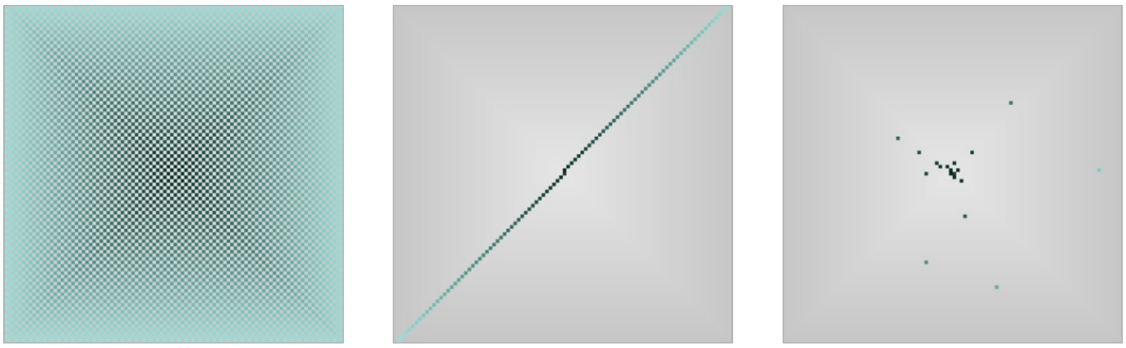


Abb. 5: Bei der Simulation des Werkes wir die Menge der betrachteten Zahlen verändert. Statt der Primzahlen werden gerade Zahlen (li.), Quadratzahlen (mi.) oder Fibonacci-Zahlen (re.) angezeigt.

Literatur

Bossel, H. (1992). *Modellbildung und Simulation.* Braunschweig: Vieweg

Schröder, B. (2007). *Konkrete Kunst: Mathematisches Kalkül und programmiertes Chaos.* Berlin: Reimer.

Lauter, M.; Weigand, H.-G. (2007). *Ausgerechnet… Mathematik und Konkrete Kunst.* Baunach: Spurbuchverlag.

Wörler, J. (2008). Mathematik und Konkrete Kunst: Verbindungen zwischen scheinbar fremden Welten. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008,* 235 - 283. Münster: WTM

Simon ZELL, Schwäbisch Gmünd

Mathematical literacy

Seit PISA ist „mathematical literacy“ ein wohlbekannter und oft verwendeter Begriff. Es scheint so, dass jeder weiß, was eine mathematically literate oder mathematically illiterate Person kennzeichnet, aber dabei gehen die Ansätze manchmal sehr weit auseinander. In diesem Artikel sollen Aspekte aufgezeigt werden, die es erlauben Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf mathematically literacy zu charakterisieren. Sie können eine Basis für Untersuchungen zu Unterrichtsentwürfen bzw. Unterrichtsstrategien sein, ob und wie diese einen Beitrag zu mathematical literacy leisten.

Mathematical literacy umfasst allgemeine mathematische Fähigkeiten, die Schülerinnen und Schüler besitzen sollen. Zum ersten Mal wurden solche bei den NCTM Standards im Jahre 1989 aufgestellt. Diese Standards definieren allgemeine Ziele, die vor allem das Anwenden der Mathematik betonen. Um diese Ziele zu erreichen wurden fünf Aspekte von mathematical literacy genannt: to value mathematics, self-confidence to do mathematics, to communicate mathematically and to reason mathematically. Populär wurde der Begriff durch die PISA-Rahmenkonzeption. Die Autoren definieren:

„Mathematical literacy is an individual’s capacity to identify and understand the role mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways, that meet the need of that individuals life as a constructive, concerned and reflective citizen.”(OECD, 2006)

Mathematik soll in authentischen Situationen angewendet werden können. Dabei spielt in der Konzeption der Prozess des Mathematisierens eine bedeutende Rolle. Die Schülerinnen und Schüler sollen ein Problem strukturieren, dieses in die mathematische Formelsprache übersetzen, mit Hilfe der Mathematik lösen und das Ergebnis auf die Problemstellung hin interpretieren können. Dafür sind mathematische Kompetenzen notwendig. Die Autoren nennen folgende: Thinking and reasoning, Argumentation, Communication, Modelling, Problem posing and solving, Representation, Using symbolic, formal and technical language and operations and Use of aids and tools. Bei authentischen Kontexten können mehrere Kompetenzen gleichzeitig notwendig sein und bei Schülerinnen und Schülern unterschiedlich ausgeprägt sein. Ein Grundproblem an der PISA-Rahmenkonzeption ist die Zielsetzung. Es geht auch um das Abtesten von Schülerleistungen. Deshalb spielt der Mathematisierungsprozess eine so große Rolle. Außerdem hat man außer dem Mathematisierungsprozess keine konkreten Ansätze, wie Mathematikunterricht im Sinne von mathematical literacy ablaufen sollte. Die am besten ausgearbeitete Konzeption von allgemeinen Zielen in der Mathematik stammt von Kilpatrick et. al. (2001). Sie analysieren, wie erfolgreiches Lernen in Mathematik aussehen kann. Dabei wählten sie den Begriff mathematical proficiency, der ihrem Verständnis nach am besten passt. Der Term mathematical proficiency soll Lernziele für alle Schülerinnen und Schüler auflisten, die mathematische Sachkundigkeit (proficiency) der Schüler zu bewerten erlauben und aufzeigen, wie Mathematik sachkundig zu unterrichten ist und gliedert sich in fünf verschiedene Stränge:

- “conceptual understanding - comprehension of mathematical concepts, operations, and relations
- procedural fluency - skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately
- strategic competence - ability to formulate, represent, and solve mathematical problems
- adaptive reasoning - capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification
- productive disposition - habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one’s own efficacy.”

Diese sind miteinander verwoben und bedingen einander. Beim Lösen von mathematischen Problemen können alle Stränge angesprochen werden. Südafrika hat neben Mathematik ein neues Fach Mathematical Literacy eingeführt. Mathematische Fertigkeiten und Inhalte sollen durch Probleme aus dem Alltag eingeführt und gefestigt werden. Diese sollen die Schülerinnen und Schüler ermuntern, Probleme aus dem Alltag kritisch zu untersuchen. Nach Winter (1995) sollte der Mathematikunterricht den Schülerinenn und Schülern Grunderfahrungen ermöglichen. Erscheinungen der Welt, die uns alle angehen, sollen in einer spezifischen Art wahrgenommen und verstanden werden, mathematische Gegenstände sollen als deduktiv geordnete Welt kennengelernt werden und in der Auseinandersetzung mit Aufgaben sollen heuristische Fähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen erworben werden.

Aspekte von Mathematical literacy

In fast jedem Artikel über mathematical literacy geht es um den funktionalen Gebrauch mathematischer Begriffe und Prozeduren und um heuristische Fähigkeiten. Dazu sind Denkoperationen notwendig die „in *typischer*

Weise von Nutzen sind“ (Polya, 1949). Diese Denkoperationen helfen nicht nur beim Lösen mathematischer Probleme, sondern auch beim Erfassen und Interpretieren von Informationen und sind daher essentiell für das Anwenden von Mathematik in unterschiedlichen Kontexten. Deshalb muss im Kern von mathematical literacy der Einsatz heuristischen Denkens im Alltag liegen. Um heuristisches Denken zu charakterisieren, folgt eine Liste heuristischer Fähigkeiten, die heuristisches Denken unterstützen. Die Art und Weise des Einsatzes ist abhängig von gesellschaftlichen Einflüssen (Jablonka, 2003); die Fähigkeit an sich aber dennoch enthalten. Kennzeichen heuristischen Denkens sind:

- Erfassen der Informationen, Problemstellung und der wichtigsten Faktoren

  Zu Beginn eines Problemlöseprozesses muss man sich zuerst der Problemstellung bewusst werden und die entscheidenden Inhalte und Faktoren erkennen, interpretieren und einordnen. Dabei kommen *typische* heuristische Strategien zum Einsatz, die auch auf anschaulicher Ebene angewendet werden können.

  - Induktion
  - Analogien
  - Spezialisierung
  - Zerlegung und Zusammenfassung
  - Skizzen
  - Erkennen der wichtigen Faktoren
- Wechseln zwischen innermathematischen Repräsentationsformen
- Kommunizieren
- Reflektieren und Interpretieren der Argumentationsschritte und des Ergebnisses
- bewusster Umgang mit Hilfsmitteln

Diese heuristischen Fertigkeiten lehnen sich neben Polya stark an die Kompetenzen von PISA an. Der entscheidende Unterschied liegt in der Zielsetzung. Die PISA Autoren betrachten mathematical literacy sehr stark von der Schulperspektive aus. Hier liegt die Betrachtung im Hinblick auf die Anwendung in der Schule und besonders nach der Schullaufbahn. Als Bürger einer Gesellschaft gilt es Informationen einzuordnen und interpretieren zu können. Dazu bedarf es keines kompletten Mathematisierungsprozesses. Denkt man auch an die Übertragbarkeit heuristischen Denkens, liegt die Betonung nicht im Anwenden einzelner Schritte, sondern in der strukturierten Herangehens- und Vorgehensweise. Dafür sind die oben genannten Punkte passender.

Das Anwenden von Problemen mit mathematischem Inhalt erfordert auch begriffliches Wissen. Im Sinne von conceptual understanding und procedural fluency sollten Begriffe zusammenhängend, funktional und aspektreich gelehrt werden. Deshalb ist eine zweite Säule von mathematical literacy ein umfassendes Verständnis mathematischer Begriffe und Prozeduren.

Die letzte Säule ist Vertrautheit in deduktiven Schlussfolgerungen, zum einen weil Mathematik eine streng deduktive Wissenschaft ist. Zum anderen hilft diese Vertrautheit, wenn Inhalte abstrakt werden und Intuitionen nicht mehr greifen.

Zusammenfassend lässt sich der Begriff mathematical literacy durch drei Aspekte kennzeichnen:

- Heuristische Denkweisen, die strukturiertes und plausibles Vorgehen ermöglichen und auf inner- und außermathematische Kontexte anwendbar sind,
- Umfassendes Verständnis mathematischer Begriffe und Prozeduren in den Gebieten: Zahlen und arithmetische Operationen, funktionaler Zusammenhänge, Flächen, Räumen und Messung und Umgang mit Daten.
- Vertrautheit in deduktiven Schlussfolgerungen

Literatur

Jablonka, E. (2003). Mathematical Literacy. In A. J. Bishop & al. (Hrsg.). *Second International of Mathematics Education* (S.75-102). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001) (Hrsg.). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington: National Academy Press.

OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical literacy – A framework for PISA.*

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme.* Bern: Francke

Department of Education Republic of South Africa (2003). *National Curriculum Statement Grades 10-12 (General) MATHEMATICAL LITERACY.*

Winter, H. (1995). Mathematik und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61,*37-46.

Stefanie MEIER, Dortmund

Modellieren im Mathematikunterricht – Aufgaben und Erfahrungen aus einem Comenius-Netzwerk (DQME II)

Ein Schwerpunkt unseres Comenius-Netzwerk-Projektes „Developing Quality in Mathematics Education II" (DQME II), an dem Lehrer, Lehrerfortbildner und Wissenschaftler aus elf europäischen Ländern beteiligt sind, ist es, realitätsnahe Aufgaben zu entwickeln, zu testen und zu modifizieren. Diese werden mit Erfahrungsberichten versehen und der europäischen Öffentlichkeit zur Verfügung gestellt. In diesem Workshop wurden den Teilnehmern einige dieser Materialien vorgestellt, die sie dann selbst bearbeitet und im Hinblick auf ihren eigenen Unterricht diskutiert und modifiziert haben.

1. Der Swimming-Pool

Die Einstiegsaufgabe zum Thema Swimming Pool sollte von den Teilnehmern gelöst werden. Ihre Lösung wurde dann anhand eines Modellierungskreislaufs evaluiert.

Die ursprüngliche Aufgabe entstammt einem schwedischen Schulbuch, ist aber auch in deutschen Schulbüchern zu finden.

„Wegen des eher kalten Wetters im Winter sind kleine Gartenpools in Schweden sehr beliebt. Stell Dir einen Pool vor, der rund ist und einen Radius von 2,75m hat, sowie eine Tiefe von 1,18m. Die Entfernung zwischen der Wasseroberfläche und dem Poolrand beträgt 0,06m."

- *Wie viel Wasser passt in den Pool? (Beantworte die Frage in Kubikmetern!)*
- *Wie teuer ist es, den Pool zu füllen?*
- *Wie lange dauert es, bis der Pool voll ist?*
- *Wie viele Menschen können gleichzeitig in dem Pool schwimmen, bevor das Wasser überschwappt? Finde das mittlere Volumen einer mittleren Person selbst.*

(aus: Matte Direkt, Grade 9, 2003, p. 53, ins Deutsche übersetzt)

Die Teilnehmer sollten lediglich die Frage „Wie viele Menschen müssen in den Pool steigen, damit er überläuft?" beantworten.

Im Anschluss an diesen Einstieg wurde vorgestellt, wie diese ursprünglich sehr geschlossene Aufgabe geöffnet werden und im Unterricht eingesetzt werden kann.

Die ursprünglichen Fragen wurden von einem im Projekt teilnehmenden Lehrer entfernt und durch folgende ersetzt:

- *Denkt euch zwei mathematische Fragestellungen zu dem Text aus und beantwortet diese mit einer Rechnung.*
- *Einigt euch auf eine Frage in der Gruppe, die ihr an die Tafel schreiben wollt.*
- *Löst die Fragen der anderen Gruppen.*

Zur Veranschaulichung des Umgangs der Schüler mit dieser Art Aufgabe wurde der Einsatz der Aufgabe im Unterricht gefilmt und im Workshop gezeigt.

Die Schüler entwickelten ihrem Leistungsniveau entsprechende Aufgaben. So war in der Stunde von einer Gruppe zu hören: „Ne, lass mal eine andere Aufgabe überlegen. Die ist zu schwer, die können wir nicht einmal selber lösen." Von einer anderen Gruppe war zu hören, dass die ersten Aufgaben zu leicht erschienen und doch nach einer schwereren gesucht werden sollte. Am Schluss standen acht verschiedene Aufgaben an der Tafel, die unterschiedlichen Leistungsniveaus entsprachen, so dass sich alle Schüler auf ihrem Niveau mit der Aufgabe auseinandersetzen konnten und auch einen Schritt weiter gehen konnten und auch mussten. Um auch die leistungsstärkeren Schüler herauszufordern, hat die Lehrperson die Frage „Wie viele Menschen müssen in den Pool steigen, damit er überläuft?" an die Tafel geschrieben. Diese Frage macht die Aufgabe zu einer Modellierungsaufgabe. Dies wurde schon an anderer Stelle diskutiert (vgl. Meier 2008). Nach diesem Einstieg waren die Workshop-Teilnehmer gefordert:

2. Beurteilung weiterer Aufgaben aus dem Projekt

Die Teilnehmer haben sich mit in unserem Projekt entwickelten Aufgaben auseinandergesetzt und diskutiert, ob und wie sie diese in ihrem Unterricht einsetzen können und ob eine ähnliche Modifizierung wie bei der Einstiegsaufgabe möglich sei. Hierbei kam es zu Kontroversen ob z.B. eine Aufgabe eine Modellierungsaufgabe sei und was Realitätsnähe in Bezug auf Mathematikaufgaben heiße. Eine dieser Aufgaben war folgende:

Schneide 25 gleichgroße Würfel aus Wassermelone, Gouda, Edamer, Cheddar, geräuchertem Truthahn und Fleischwurst sowie eine Tasse Joguhrtdressing. Baue einen großen Würfel, indem Du abwechselnd Würfel zu einer 5 x 5 Fläche zusammenlegst. Dann bau 4 weitere Schichten der Art obendrauf, so dass ein Würfel entsteht. Serviere den Würfel mit Spieschen.

(Quelle: http://www.watermelon.org/recipe_detail.asp?recipeDisp=211)

- *Wie viele Zutaten benötigst Du für einen Würfel, wenn die kleinen Würfel eine Kantenlänge von 2cm haben?*
- *Kannst Du einen Würfel bauen in dem jede Reihe und jede Spalte fünf verschiedene Zutaten hat?*

Eine der Teilnehmerinnen fand diese Aufgabe so ansprechend, dass sie diese innerhalb der nächsten zwei Wochen mit einer ihrer Klassen testen wollte. Dazu sollte selbstverständlich gehören, dass dieser Würfel gebaut wird, so dass die erste Aufgabe zur Vorbereitung der Zubereitung dient. Insofern kann diese Aufgabe als realitätsnah gelten. Ist die zweite Aufgabe auch realitätsnah? Beim Zusammenbau dieses Würfels spielt die Mathematik in der Realität sicherlich eine untergeordnete Rolle. Dieser Fall macht die Subjektivität der Entscheidung, ob eine Aufgabe eine „gute“ realitätsnahe Aufgabe ist sehr deutlich. Denn nur wenn die Lehrperson der Ansicht ist, dass die Aufgabe „gut“ ist, besteht die Chance auch skeptische Schüler davon zu überzeugen. Dies gilt insbesondere dann wenn, wie in diesem Fall, die Aufgabe handelnd bearbeitet werden kann.

Eine weitere Aufgabe, die diskutiert wurde, war „Das Volumen der Oestertalsperre“:

Wasserkraft ist eine besonders umweltfreundliche Art der Energiegewinnung. Der Nutzen von Staudämmen zeigt sich auch in der Regulierung der Wassermenge bei großer Trockenheit im Sommer und starken Niederschlägen und Schneeschmelzen von Herbst bis Frühjahr. Außerdem wird das Wasser von Talsperren oft auch als Grundlage zur Trinkwasseraufbereitung genutzt. Hier geht es um die Oestertalsperre in Mitteldeutschland. An der tiefsten Stelle hat sie eine Wassertiefe von ca. 25 m. (Anm.: zu der Aufgabe sind Bilder der Talsperre, sowie ein Kartenausschnitt gegeben)

- *Wo liegt die Oestertalsperre genau?*
- *Wo ist bei solchen Talsperren der tiefste Punkt?*
- *Bestimme näherungsweise die Wasseroberfläche in m² und das Fassungsvermögen der Oestertalsperre in m³.*
- *Wie lange braucht man ungefähr, um um den See herum zu joggen?*

Der Hauptkritikpunkt an dieser Aufgabe war, dass die mathematischen Fragestellungen sowohl die Berechnung von Flächen, als auch von Volumina, als auch von Zeiten beinhaltet. Dies könne nicht gleichzeitig Thema einer einzelnen Mathematikstunde sein. Im Sinne des Spiralprinzips könnten und sollten diese Themen allerdings meines Erachtens nach miteinander verknüpft werden und dies auch innerhalb einer Unterrichtsstunde. Eine Teilnehmerin hat dies mit einer Modifikation der Aufgabe begründet:

Wenn die Fragen zu der Aufgabe entfernt werden und wie bei der Swimming Pool Aufgabe ersetzt werden, erfinden die Schüler Fragen zu dem Thema, wobei sich auch verschiedene mathematische Inhalte ergeben können. Damit werden Differenzierung und Spiralprinzip als didaktische Prinzipien innerhalb einer Mathematikstunde berücksichtigt, ohne dass die Lehrperson den Lehrstoff vorgibt oder die Lernenden nach Leistungsstärken einteilt.

3. Resümee

Die oben dargestellten Analysen sind keinesfalls fundierte Forschungsergebnisse, ebenso wie die im Folgenden dargestellte Zusammenfassung. Dennoch sind sie interessante Ansatzpunkte für weitere Forschung im Zusammenhang mit realitätsnahen Aufgaben.

Nicht nur aus diesem Workshop mit Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe I, sondern aus diversen vorherigen mit gleichem Inhalt ergibt sich die Schlussfolgerung, dass es eine subjektive Sicht in Hinblick auf den Grad der Realitätsnähe gibt. Für die eine Lehrperson reicht hierfür aus, dass eine Aufgabe einen Bezugspunkt zur Realität hat, für eine andere ist zwingend wichtig, dass die Aufgabe einen Bezug zur Realität der Schüler hat, um als realitätsnah zu gelten.

Ein weiterer erstaunlicher Punkt, der wiederum in diversen Lehrerfortbildungen bestätigt wurde, ist der, dass vielen Lehrpersonen ein Modellierungskreislauf unbekannt ist. Somit können sie diesen zur Beurteilung von Modellierungsaufgaben auch nicht zu Rate ziehen. Wie werden dann Aufgaben ausgesucht, um die Modellierungsfähigkeiten von Schülern und Schülerinnen zu fördern? Wir entwickeln in unserem Projekt Modellierungsaufgaben, die von der Forschergruppe innerhalb des Projektes teilweise analysiert werden, so dass ein Ergebnis am Ende des Projektes eine Sammlung von realitätsnahen und Modellierungsaufgaben sein wird, die der breiten europäischen Lehrerschaft zur Verfügung gestellt wird. Ein weiteres Ergebnis wird ein Lehrerfortbildungsmodul sein, zur Erstellung von Modellierungsaufgaben, zur Modifikation von Aufgaben und zum Einsatz dieser im Unterricht.

Literatur

Blomhøj, M.; Jensen, T.H. (2006): What's all the fuss about competencies? *In: Blum, W.; Galbraith, P.L.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Eds.): Applications and Modelling in Mathematics Education. New York: Springer,(p. 45-56.)*

Meier, S. (2008): Mathematical Modelling in a European Context *In: Henn, H.W.; Meier S. (Eds.): Planting Mathematics, Dortmund, TU Dortmund*

Homepage: *www.dqme2.eu*

Fritz NESTLE, Ulm (Ludwigsburg)

Lernkontrollen für Mathematik im Internet

Es gibt genügend Gründe, mit Lernkontrollen für Mathematik im Internet zu experimentieren:

1. gibt es bei entsprechender Gestaltung damit eine Chance, einen Teil der Attraktivität der Computerspiele auf inhaltlich bedeutsamere Themen zu übertragen. (Ein Teil dieser Motivation liegt an der unverzüglichen Rückmeldung über die Bemühungen des Spielenden beziehungsweise Lernenden – ohne eine öffentliche Zurschaustellung des Lernenden vor der Klasse.)
2. sparen sie den Lehrkräften Zeit und verringert Pressionen durch Eltern und die Schulverwaltung.
3. dienen sie in weitaus größerem Maß der Entwicklung einer demokratischen Grundhaltung als die derzeitige Praxis.
4. ist die Einbeziehung der Lernenden selbst in die Entwicklung der Lernkontrollen möglich – eine wenig genutzte aber meistens überaus effektive Möglichkeit der Aktivierung der Lernenden.

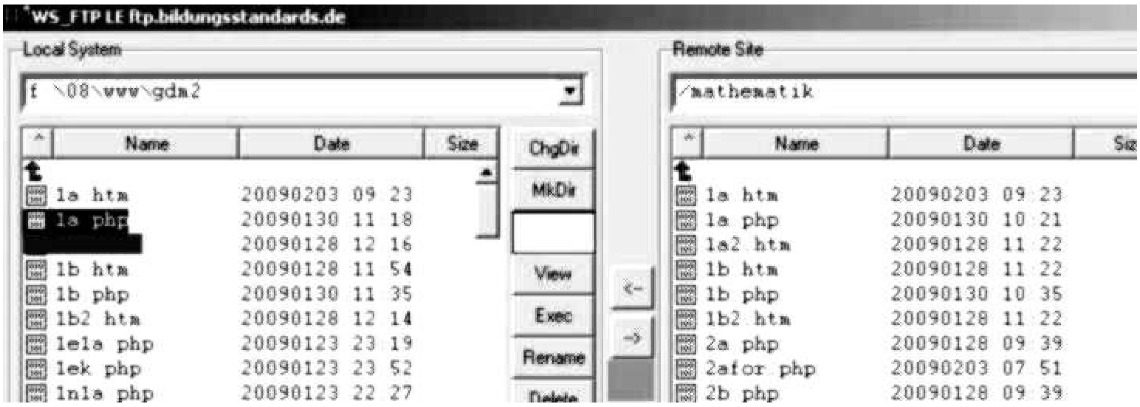
www.bildungsstandards.de/old09/z1.php ist ein Beispiel für ein Programm, in dem es um schnelles und sorgfältiges Zählen eines vorgegebenen Buchstabens in einer Textpassage geht. Wir kommen weiter unten nochmals auf Modifikationen dieses Programms zurück.

Ziel des Workschops war es, aufzuzeigen, wie gering der Aufwand ist, mit dem man schnell und erfolgreich entsprechende Lernkontrollen ins Internet stellen kann. Neben einem Elementarwissen über das Internet sind für den Start Programme nützlich, aus denen man durch Modifikation neue Lernkontrollen entwickeln kann. Zur Adaptation genügen geringe Vorkenntnisse über Programmierung – und etwas Beharrlichkeit und Experimentierfreude.

Der Weg ins Internet. Um einen Inhalt ins Internet zu stellen, brauchen wir Verschiedenes, das in der Regel in Schule oder Hochschule verfügbar ist:

- einen **Domainnamen,** z.B. mathematik.bildungsstandards.de/old09 . Dieser dient als Adresse beim Aufruf der Lernkontrolle.
- **Webspace**, das heißt, Speicherplatz für Dateien (Diesen Webspace stellt ein Provider zur Verfügung, zum Beispiel www.netbeat.de für weniger als 3 Euro im Jahr einschließlich der Gebühr für den Domainnamen).

- **Dateien**, die die Browser (z.B. der Firefox oder der Microsoft Internet Explorer) entschlüsseln können. Das sind zum Beispiel HTML-Dateien oder bei Interaktivität PHP-Dateien. In diesen Dateien wird unser Inhalt mit Zusätzen versehen, mit deren Hilfe der Browser diesen aus dem Internet auslesen und auf dem Schirm darstellen kann.
- Ein **FTP-Programm**(**F**ile-**T**ransfer **P**rogramm) mit dessen Hilfe wir Dateien in den Webspace übertragen oder aus dem Internet zurückholen können.



Beispiel: WS_FTP

In der linken Hälfte sehen wir ein Verzeichnis unserers lokalen Rechners (hier im Laufwerk F: das Verzeichnis f:\08\www\gdm2) , in der rechten Hälfte ein Verzeichnis beim Provider. Wenn die mit einem schwarzen Rechteck gekennzeichnete Datei links angeklickt wird, kann sie mit einem Klick auf den mit einem grauen Rechteck unterlegten Rechtspfeil in der Mitte zwischen den beiden Verzeichnissen ins Internet übertragen werden; eine rechts markierte Datei holt der Linkspfeil aus dem Internet zurück.

Neben WS_FTP, das für Bildungszwecke kostenlos ist, sind Filezilla, www.WebFTP.de, ... FTP-Programme mit jeweils eigenen Stärken und Schwächen. Bei Google findet man Näheres.

Ein praktischer Editor. Bekanntlich zählt in einem Programm jedes Zeichen. Ein Zeichen zuviel, eines zuwenig oder ein falsches kann das Versagen eines Programms nach sich ziehen. Programme wie „Golive“ oder „Dreamweaver“ helfen, Fehler in großen Internetpräsenzen vermeiden; bei kleineren Programmen, wie die von uns zu bearbeitenden sind spezielle Editoren hilfreich. Wir haben mit dem **Editor PROTON** gearbeitet. PROTON ist freeware und kann gleichfalls aus dem Internet auf lokale Rechner geladen werden. In PROTON werden verschiedenartige Programmkomponenten in verschiedenen Farben dargestellt. Das unterstützt die Fehlersuche. (Es gibt Leute, die behaupten, dass sie beim Programmieren nie einen Fehler machen. Zehn Fehlversuche pro Seite sind noch normal.)

Vorgehen. Für ein erstes Beispiel für die Modifikation eines Programms benützen wir die Datei 1a.php. Wir können Sie aus www.bildungsstandards.de/old09/1a.php herunterladen. Das folgende Bild zeigt die Darstellung der 13 Zeilen 15 bis 27 im Editor Proton:

```
15<?
16<srand(microtime()*1000000);
17<$zahl = rand(0,9);          echo $zahl;
18< //$a1 = $zahl[$nummer];
19< $a1 = $zahl;
20< $zahl = rand(0,9);
21< //$a2 = $zahl[$nummer];
22< $a2 = $zahl;
23< $startzeit = time();
24< $Produkt="";
25< ?>
26< <form action="1b.php" method="post"></center>
27<<input type = "hidden" name = "startzeit" value =<? echo "$startzeit" ?>>
```

Die Zeilen 15 bis 25 erscheinen im Editor Proton in grüner Farbe, weil es sich um Programmtext in PHP handelt, die übrigen Zeilen enthalten blau Befehle, rot Daten. Mit // beginnende Zeilen sind als Kommentare grau.

Die vollständige Datei präsentiert eine einzelne, zufällig – mit dem Befehl rand () - erzeugte Einmaleinsaufgabe aus dem kleinen Einmaleins. Eine genauere Betrachtung der Zeilen 17 und 20 zeigt, dass Aufgaben mit dem Faktor 10 fehlen, dagegen Aufgaben mit dem Faktor 0 gleichrangig zu den anderen Faktoren behandelt werden.

Eine einfache Aufgabe besteht darin, die Datei so zu modifizieren, dass statt dessen eine Aufgabe aus dem großen Einmaleins präsentiert wird: Als Lösung genügt es, die beiden Zahlen in Zeile 20 durch geeignete andere zu ersetzen. Speichert man jetzt die Datei unter einem neuen Namen ab und transferiert sie zurück ins Internet, entstehen Aufgaben aus dem großen Einmaleins. In diesem Fall muss die Auswertungsdatei www.bildungsstandards.de/old09/1b.php nicht geändert werden, weil die Struktur ungeändert geblieben ist.

Anders ist dies, wenn man die Aufgabe auf zwei Abfragen erweitert. Eine Lösung finden Sie hier www.bildungsstandards.de/old09/2a.php . Dabei musste auch die Datei www.bildungsstandards.de/old09/2b.php analog erweitert werden.

Das Gleiche gilt, wenn Sie in der Zählaufgabe unter www.bildungsstandards.de/old09/z1.php den Zähltext verändern wollen. Dann muss beim augenblicklichen Programmstand noch die Buchstabenzählung für die verschiedenen Buchstaben in die Auswertungsdatei www.bildungsstandards.de/old09/z2.php aufgenommen werden. Das ließe sich auch mit geeigneter Programmierung automatisch erreichen.

Für den Bearbeiter ist es wichtig, dass er unverzüglich Rückmeldungen über die Bewertung seiner Arbeit bekommt. Das leisten die Score-Dateien. Wenn nicht nur wenige Bearbeiter zu erwarten sind, sollte man eine gestufte Scoreliste anbieten, das heißt neben eine Gesamtscoreliste einen Wochenscore oder Monatsscore vorsehen. Damit erhalten mehr Nutzer eine Chance auf einen Platz auf der Scoreliste. Unter Umständen sind statt einer solchen Regionallisten interessanter. In diesem Fall muss man die Postleitzahl des Wohnorts eintragen lassen und auswerten.

Die Organisation der Verkettung der verschiedenen Dateien soll hier nochmals am Beispiel einer umfangreicheren Einmaleinsübung (10 Einzelaufgaben) dargestellt werden:

Als erstes wird die Datei www.bildungsstandards.de/old09/2afor.php aufgerufen. Mit diesem Aufruf werden 10 Einmaleinsaufgaben präsentiert. Mit „Einsenden“ geht es zu www.bildungsstandards.de/old09/2bfor.php und damit zur Auswertung.Am Ende der Datei wird man aufgefordert, bei Interesse mit www.bildungsstandards.de/old09/2sco2.php eine Scoredatei aufzurufen. www.bildungsstandards.de/old09/2sco2.txt enthält die aktualisierten Daten dieser Liste. Auf Wunsch ist der Vergleich mit der Gesamtscoreliste www.bildungsstandards.de/old09/2sco1.php möglich; dazu enthält www.bildungsstandards.de/old09/2sco1.txt die zugehörigen Daten.

Die Scoreberechnung kann hier nicht thematisiert werden. Persönliche Präferenzen gehen ein in die Bewertung richtig, falsch oder gar nicht bearbeiteter Antworten, der Gesamtzahl möglicher Antworten, der Bearbeitungszeit, für Verzerrungen statt Linearität, ...

Die obigen Darlegungen erheben nicht den Anspruch, alle mit Lernkontrollen im Internet abschließend erörtert zu haben. Als Beitrag zu der in ersten Anfängen steckenden Diskussion kann noch auf die Datei

www.bildungsoptionen.de/manifest.htm

verwiesen werden. Diese Diskussion kann nicht auf das Fach Mathematik beschränkt werden.

Interaktive Fassung dieses Beitrags: www.bildungsstandards.de/old09

Kontakt zum Autor: www.bildungsstandards.de/00/emasan.htm

Christine SCHARLACH, Berlin

Einführung in die geschlechtergerechte (Hochschul-)Lehre – Ein Workshop

1. 100 Jahre Frauenstudium in Preußen

Zunächst eine kurze historische Reflektion zum Thema. Noch am Ende des 19. Jahrhunderts waren Frauen an den Hochschulen nicht zugelassen, aber die Diskussion darüber fand statt, dokumentiert zum Beispiel im Buch „Die Akademische Frau. Gutachten hervorragender Universitätsprofessoren, Frauenlehrer und Schriftsteller über die Befähigung der Frau zum wissenschaftlichen Studium und Berufe“ (Kirchhoff, 1897). Dort plädiert Max Planck (S. 256 f.) für die Zulassung „immer nur als Ausnahme“ und gegen die Ausbildung der Frauen zum akademischen Studium. Denn „Amazonen sind auch auf geistigem Gebiete naturwidrig“ und man kann „nicht stark genug betonen, daß die Natur selbst der Frau ihren Beruf als Mutter und als Hausfrau vorgeschrieben habe und daß Naturgesetze unter keinen Umständen ohne schweren Schädigungen, welche sich im vorliegenden Falle besonders an dem nachwachsenden Geschlecht zeigen würden, ignoriert werden können.“ Man kann sich vielleicht vorstellen, wie die Gegner, von denen es viele gab, argumentiert haben. Bemerken möchte ich allerdings auch, dass sich die vier Mathematiker, die zu Worte kommen, alle für Frauen an den Hochschulen aussprechen.

2. Geschlechtergerechte Lehre

Macht man sich also bewusst, dass Frauen erst seit ca. 100 Jahren überhaupt Zugang zu den Hochschulen haben, versteht man vielleicht besser, dass die Veränderung der dort praktizierten didaktischen Methoden ein aktuelles Thema ist. So äußert sich die Bund-Länder-Kommission (2002) zu den Lehr- und Lernformen in den ingenieur- und naturwissenschaftlichen Studiengängen:

„Die didaktischen Methoden sind überwiegend noch an der bisherigen, überwiegend männlichen Klientel ausgerichtet. Eine Sensibilisierung der Lehrenden für unterschiedliche Kommunikationsmuster von Frauen und Männern sowie differentes Lernverhalten birgt die Chance, die Studiengänge offener, attraktiver für Frauen zu gestalten.“ (S. 64)

Auch in den Rahmenplänen der Schulen ist die Wichtigkeit geschlechtergerechter Lehre mittlerweile zu finden[1]. Zur Bedeutung geschlechtergerechter Lehre (in der Erwachsenenbildung) zitieren wir Anna Stiftinger:

---

1 z. B. Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I – Mathematik, S. 7

„Geschlechtergerechte Didaktik hat zum Ziel, Gleichstellungsziele auch in der koedukativen Bildung umzusetzen. Werden Lerninteressen und Lernbedürfnisse von Frauen und Männern, also von allen Menschen, berücksichtigt, können sich alle Teilnehmenden gleichberechtigt in den Lernprozess einbringen.“

Im Workshop geht es darum, im gemeinsamen Austausch einen Anstoß zur Reflektion über Geschlechterverhältnisse in der Lehre zu geben. Dazu wurde mit den Teilnehmenden die im folgenden beschriebene Übung durchgeführt und kurz reflektiert.

3. Die Übung: „Eher weiblich, eher männlich?“

Nach einer (sehr) kurzen Einführung (Konstruktion von Geschlecht, geschlechtliche Konnotierung von Fähigkeiten und Eigenschaften) werden die Teilnehmenden in zwei Gruppen aufgeteilt. Jede Gruppe erhält eine zufällige Auswahl von 12 Karten, auf denen unterschiedliche Einstellungen und Handlungsweisen stehen, die bei Untersuchungen aus der Schule, aber auch aus dem Wissenschaftsbetrieb, gefunden wurden. Einige Beispiele folgen im Anschluss. Die Gruppe soll herausfinden, welche davon vorwiegend bei Frauen bzw. bei Männern beobachtet wurden. Hierbei geht es zunächst um die Reflektion der eigenen Geschlechterstereotypen, aber auch des eigenen Lernverhaltens. Spätestens hier kommt es zu ersten Diskussionen über Geschlechterverhältnisse und die Relevanz, sich damit auseinander zu setzen, aber auch zu Geschlechterrollen und Stereotypisierungen. Hilfreich erweist sich der Hinweis darauf, dass es sich um wissenschaftliche Ergebnisse handelt, aber auch auf die soziale Konstruktion von Geschlecht, also dass Geschlechterrollen gesellschaftlich gemacht und auch verändert werden können ((Un)doing Gender). Und dass die individuellen Unterschiede innerhalb einer Geschlechterkategorie oft größer sind als zwischen den beiden Kategorien.

In den Gruppen kommt es dann zu weiteren Diskussionen und einem intensiven Austausch über eigene Erfahrungen. An die Dozentin werden vor allem Verständnisfragen gestellt, da die stark verkürzte Formulierung der Sachverhalte unterschiedliche Interpretationen zulässt. Es wird versucht, diese mit der Gruppe zu klären, die dann ihre Interpretation bei der anschließenden Präsentation der Ergebnisse der anderen Gruppe vermittelt. Die Ergebnisse werden präsentiert, indem jede Gruppe ihre Karten vorliest, an die Tafel heftet (die vorher geteilt wurde in eine „weibliche“ und eine „männliche“ Seite) und die Positionierung der Karte auf der Tafel begründet. Auch hier ist Raum für und Bedarf nach Diskussionen. Karten, für die es auch abschließend keine Einigung gibt, landen in der Mitte. Zum Abschluss wird ein Handout verteilt, welches die Einordnung nach wissenschaftlichen Erkenntnissen dokumentiert.

Exemplarisch stellen wir im Folgenden einige der Karten aus der Übung vor und erläutern sie kurz:

- *Übernehmen Macht und Autorität der Leitungsfunktion mit Selbstverständlichkeit*

Diese Aussage bezieht sich unter anderem auf ein Verhalten, welches in Gruppen- und Teamarbeit häufig bei männlichen Teilnehmern beobachtet werden kann und welches Anna Stiftinger (2005) so beschreibt: „In gemischten Teams in der Weiterbildung zeigt sich häufig, dass Männer dominierende und repräsentativere Rollen einnehmen: Sie präsentieren die Gruppenergebnisse und stellen sie auch auf Präsentationsmaterialien dar."

- *Gemeinsame Position erarbeiten*

In Diskussionen, aber auch bei Gruppen- und Teamarbeit, übernehmen Frauen eher eine vermittelnde Rolle und stellen Gemeinsamkeiten heraus. So beobachtet Anna Stiftinger (2005): „Ein wichtiger Unterschied in der Präsentation von Ergebnissen besteht zudem darin, dass Frauen Gruppenergebnisse als Ergebnis der Gesamtgruppe präsentieren, Männer hingegen eher dazu neigen, die Ergebnisse als ihre persönliche Leistung darzustellen."

- *Erfolg wird instabil begründet (Umstände, ausreichender Arbeitseinsatz), Misserfolg stabil (nicht ausreichende eigene Begabung)*

In vielen Arbeiten zum geschlechtergerechten Unterricht wird auf das häufig gegensätzliche Attributionsverhalten für Erfolg und Misserfolg beim Lernen bei Frauen und Männern hingewiesen. Wir zitieren hierzu aus einer Arbeit von Beate Curdes (2007), in der man weitere Untersuchungen zu Unterschieden in den Einstellungen bei Mathematikstudierenden findet: „Beim Attributionsverhalten hat man, wie beim Leistungsselbstkonzept, Geschlechterunterschiede zu Ungunsten der Frauen und Mädchen besonders in männlich stereotypisierten Fächern gefunden, auch in der Mathematik. Frauen erklären sich Erfolge seltener als Männer mit ihren eigenen Fähigkeiten und führen gleichzeitig Misserfolge häufiger auf mangelnde Fähigkeiten zurück. Männer dagegen erklären Misserfolge mit mangelnder Anstrengung oder einfach mit „Pech", Erfolge dagegen mit eigenen Fähigkeiten."

4. Fazit

Die Übung ist sehr gut geeignet für eine erste Auseinandersetzung mit dem Thema. Da es kaum inhaltliche Vorgaben gibt, sind große Unterschiede beim Vorwissen der Teilnehmenden kein Problem, sondern eher förderlich im Austausch. Dies hat sich auch im aktuellen Workshop bewahrheitet, an dem überwiegend Expertinnen im Genderbereich teilnahmen. Erprobt wurde die Übung zuvor im Rahmen der Projekte „Lehren und Lernen von Mathematik“[2] und „Get-IT! [Girls, Education, Technology]“[3], vgl. hierzu auch Scharlach und Sens (2009) und den Beitrag von Scharlach (2009) zum erstgenannten Projekt im Tagungsband. Die stark verkürzten Formulierungen auf den Karten, die zum Teil keine eindeutigen Zuweisungen erlauben und somit auch keine „richtige“ Lösung, tragen zur Aktivierung bei, aber auch zur Reflexion. Auffällig ist die große Emotionalität der Diskussionen, was sicherlich mit der persönlichen Betroffenheit (jede sieht sich als Frau bzw. jeder sieht sich als Mann) zusammen hängt und verstärkt wird durch die (oft unbewussten und unreflektierten) Bewertungen der Fähigkeiten und Eigenschaften. Am Ende der Übung bleiben viele Fragen offen, aber wir hoffen, genug Interesse und Verständnis für das Thema geweckt zu haben, dass die Teilnehmenden sich weiter informieren. Als Einstieg empfehlen wir Kaschuba (2005), Dereichs-Kunstmann (2001) und spezifisch für die Mathematik Curdes (2007).

Literatur

Curdes, Beate (2007), *Unterschiede in den Einstellungen zur Mathematik*, In: Curdes, Marx et al. (Hrsg.), Gender lehren - Gender lernen in der Hochschule : Konzepte und Praxisberichte, Oldenburg: BIS-Verlag .

Dereichs-Kunstmann, Karin (2001), *Lernen Frauen anders? Empirische Befunde zur Inszenierung des Geschlechterverhältnisses in Lernsituationen*, GeQuaB-Arbeitsmaterial Nr. 1.

Kaschuba, Gerrit (2005), *Theoretische Grundlagen einer geschlechtergerechten Didaktik - Begründungen und Konsequenzen*, GeQuaB-Arbeitsmaterial Nr. 2.

Kirchhoff, Arthur (1897), *Die Akademische Frau. Gutachten hervorragender Universitätsprofessoren, Frauenlehrer und Schriftsteller über die Befähigung der Frau zum wissenschaftlichen Studium und Berufe*, Berlin: Hugo Steinitz Verlag.

Scharlach, Christine und Ulrike Sens (2009), *Projekt „Lehren und Lernen von Mathematik"*, in J. Steinbach et al. (Eds.), Gender im Experiment – Gender-Experiences, Gender-Technik-Projekte an der TU Berlin, Universitätsverlag der TU Berlin, erscheint demnächst

Scharlach, Christine (2009), *Mathematik-Didaktik für Tutor/-innen (und WMs) – Ein Projekt an der TU Berlin*, Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, Franzbecker: Hildesheim, Berlin.

Stiftinger, Anna (2005), *Gender in der IKT-Weiterbildung, Ein Handbuch zur Qualitätssicherung in der Erwachsenenbildung*, http://erwachsenenbildung.at/services/publikationen/gender_ikt-weiterbilung_04-2005.pdf (27.03.09)

2 http://www.math.tu-berlin.de/llm/

3 http://www.eecs.tu-berlin.de/get-it