Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion

Stoffdidaktische Analysen und
empirische Befunde
von Schülerinnen und Schülern des 1. Schuljahres

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Pädagogik (Dr. paed.)

der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund

Vorgelegt von
Jan Wessel

Dortmund, den 24.10.2014

Dissertation Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, 2014

Tag der Disputation: 24.10.2014

Erstgutachter: Prof. Dr. Christoph Selter
Zweitgutachter: Prof. Dr. Sebastian Wartha

Geleitwort

Vor mehr als 100 Jahren hat John Dewey in seinem bahnbrechenden Aufsatz 'The Child and the Curriculum' (1902) klar heraus gearbeitet, dass es für die Organisation und Gestaltung von Lehr-/Lernprozessen nicht ausreichend ist, sich allein auf die mathematische Analyse der Lerninhalte einerseits oder auf die Vorgehensweisen und Denkwege der Lernenden andererseits zu konzentrieren. Es sei eine kontinuierliche Rekonstruktion erforderlich, die stets die zahlreichen Wechselwirkungen zwischen Lernenden und Lernstoff beachten müsse.

Diese Erkenntnis ist sicherlich nicht nur für das Lehren und Lernen im Mathematikunterricht zutreffend, sondern auch für Lernprozesse innerhalb der mathematikdidaktischen Kommunität relevant. Hier ist ebenfalls eine kontinuierliche Rekonstruktion erforderlich, bei der stoffdidaktische Analysen und empirische Forschung beständig aufeinander zu beziehen sind.

Während stoffdidaktische Analysen und empirische Forschung bisweilen nicht hinreichend gut aufeinander bezogen werden und häufig nicht in ein und derselben Hand liegen, zeichnet sich die vorliegende Arbeit von Jan Wessel dadurch aus, dass die beiden Arten mathematikdidaktischer Forschungstätigkeit eng und durchgängig aufeinander bezogen werden.

Thematisch befasst sich der Autor mit zentralen Grundvorstellungen der Subtraktion, dem Rest und dem Unterschied, oder anders: dem Abziehen und dem Ergänzen. Hierzu arbeitet Herr Wessel im ersten Kapitel in klarer Weise heraus, dass das Grundvorstellungskonzept das oben beschriebene Spannungsverhältnis aufgreift, um auf dieser Grundlage Lehr-/Lernprozesse zu strukturieren.

Im Weiteren analysiert Herr Wessel im Kapitel 2 den theoretischen Hintergrund aus mathematikdidaktischer Perspektive, bevor im Kapitel 3.1 eine klar strukturierte Darstellung existierender empirischer Befunde zum Thema erfolgt, die in 3.2 darin mündet, dass offene Fragen und Grenzen bisheriger empirischer Forschung klar markiert werden. Auf dieser Grundlage werden sodann die Forschungsfragen für die vom Autor durchgeführte empirische Untersuchung in sehr gut nachvollziehbarer Weise abgeleitet.

Zunächst wird im vierten Kapitel in klar nachvollziehbarer Weise ausgeführt, welche Methodologie, welches Design und welche Auswertungsmethoden in der eigenen Untersuchung aus welchen Gründen verwendet werden.

Die Ergebnisse der eigenen Forschungstätigkeiten werden zunächst in Kapitel 5.1 im Hinblick auf den Gebrauch der verschiedenen Grundvorstellungen und der Vorgehensweisen dargestellt, bevor im Kapitel 5.2 die Forschungsfragen beantwortet werden, die den Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung thematisieren. Die Arbeit schließt mit dem Kapitel 6, welches zunächst die zentralen stoffdidaktischen und empirischen Resultate der Arbeit beschreibt und klar aufeinander bezieht, bevor Konsequenzen für den Mathematikunterricht und die mathematikdidaktische Forschung formuliert werden.

Insgesamt zeigt die Arbeit deutlich den Mehrwert, den die enge Verknüpfung von stoffdidaktischen Analysen und empirischer Forschungstätigkeit bietet, ganz im Sinne des eingangs angeführten Dewey-Zitats.

Christoph Selter

Danksagung

Prof. Dr. Christoph Selter danke ich für die Betreuung meiner Dissertation. Du hast es stets geschafft, mir auf der einen Seite notwendige Freiräume zu lassen, um so eigene Wege zu gehen. Auf der anderen Seite hast du mir aber auch zu jeder Zeit die für die Fertigstellung der Arbeit notwendige Unterstützung gegeben. Dabei hast du Verständnis für jede noch so kleine Schwierigkeit gezeigt, auftretende Probleme gelöst und meine Gedanken und Ideen immer wieder geordnet.

Prof. Dr. Sebastian Wartha danke ich für das Interesse an meinem Forschungsprojekt und die Betreuung meiner Arbeit als Zweitgutachter.

Dr. Andreas Marx und *Prof. Dr. Tobias Huhmann* danke ich für die zahlreichen Stunden, zusammengenommen wahrscheinlich eher Tage, des überaus produktiven und intensiven Austausches über verschiedenste Aspekte meiner Arbeit. Ihr habt meine Sichtweise auf die Dinge – auch über die Dissertation hinaus – sehr geprägt.

Dr. Kathrin Akinwunmi und *Dr. Katharina Kuhnke* danke ich für die intensive, produktive und immer kritisch konstruktive Zusammenarbeit während unserer gemeinsamen Zeit am IEEM. Der gemeinsame Austausch mit euch und das Diskutieren meiner Ideen und Sichtweisen haben mir sehr geholfen.

Dem *PIK- und KIRA-Team* danke ich für unsere schöne gemeinsame Zeit am IEEM. Mit euch gemeinsam die Höhen und Tiefen des Promovierens zu erleben hat mir immer sehr viel Freude bereitet. Dabei danke ich insbesondere *Dr. Martin Reinold* für die zahlreichen Gespräche, Hilfen und Ablenkungen während unserer gemeinsamen Bürozeit.

Den verschiedenen Arbeitsgruppen des IEEM in Form der *AG Selter*, der *AG Primarstufe* sowie des *Forschungsseminars* danke ich für die stets konstruktive Begleitung meiner Arbeit.

Andrea Laferi danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und die vielen Stunden des Korrekturlesens.

Maren Laferi danke ich für die Unterstützung während der verschiedenen – mitunter stressigen – Phasen des Promovierens. Du hast es immer wieder geschafft, mich in meiner Arbeit zu bestärken und mich bei der Lösung von Problemen zu unterstützen.

Jan Wessel

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

SELTER ET AL. (2012, 391 f.) erhoben im Rahmen einer qualitativen Feldstudie unter anderem folgende Vorgehensweisen von Schülern des zweiten Schuljahres zur Lösung der formalen Subtraktionsaufgabe 83-79=?:

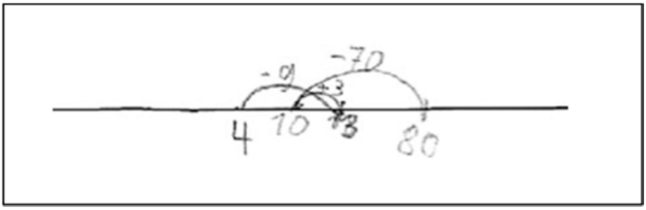


Abbildung 0-1: Julius' Lösung (aus SELTER ET AL. 2012, 392)

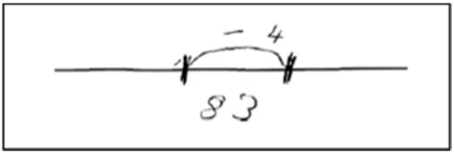


Abbildung 0-2: Jonathans Lösung (aus SELTER ET AL. 2012, 392)

Julius (vgl. Abb. 0-1) geht abziehend vor. Er zieht von den 8 Zehnern des Minuenden zunächst die 7 Zehner des Subtrahenden ab und erhält 10 als erstes Zwischenergebnis. Zu diesem Zwischenergebnis addiert er anschließend die 3 Einer des Minuenden und erhält so als zweites Zwischenergebnis 13. Von diesem Zwischenergebnis zieht er abschließend die 9 Einer des Subtrahenden ab und bestimmt so 4 als Ergebnis der Aufgabe.

Jonathan (vgl. Abb. 0-2) wählt hingegen einen völlig anderen Zugang zur Lösung der Aufgabe: Er fokussiert den Unterschied zwischen 79 und 83. Aufbauend auf seiner Darstellung ergibt sich dabei folgende Szene[1]:

1	Jo[2]:	I have calculated 79 to 83 is 4.
2	I:	Oh, but I see you have put down a minus 4, not a plus 4.

[1] Aus SELTER ET AL. 2012, 392
[2] Vgl. Abkürzungsverzeichnis im Anhang

3	Jo:	Yeah, that's beacause it is a minus problem. When there is a minus we have to use subtraction and not addition

Jonathan beschreibt, dass er zur Lösung der Aufgabe von 79 bis 83 ergänzt (Zeile 1), wobei das ‚Hinzugefügte' – in Form des Unterschiedes zwischen 79 und 83 – das Ergebnis der gegebenen Aufgabe darstellt, auch, wenn er – wahrscheinlich auf der Grundlage soziomathematischer Normen (Zeile 3) – das ‚Hinzugefügte' als „-4" (vgl. Abb. 1-2) beschreibt (SELTER ET AL. 2012, 392 unter Bezug auf VOIGT 1995 und YACKEL & COBB 1996).

‚Abziehen' und ‚Ergänzen' als zwei grundsätzlich verschiedene Wege zur Lösung von Subtraktionsaufgaben

In diesen zwei Lösungen wird deutlich, dass es mindestens zwei grundsätzlich verschiedene Wege zur Lösung von Subtraktionsaufgaben gibt: Zum einen das *Abziehen*, bei dem das Ergebnis der zu lösenden Aufgabe durch ein Abziehen des Subtrahenden vom Minuenden bestimmt wird. Zum anderen das *Ergänzen*, bei dem zur Lösung der Aufgabe vom Subtrahenden zum Minuenden ergänzt wird, wobei das ‚Hinzugefügte' das Ergebnis der Aufgabe darstellt.

Die Berücksichtigung und Thematisierung dieser beiden grundsätzlich verschiedenen Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsaufgaben findet sich auch in den Schulbüchern der Grundschule wieder: So zum Beispiel im Zahlenbuch 2 (WITTMANN & MÜLLER 2012c) (vgl. Abb. 0-3), in welchem das Ergänzen als Vorgehensweise zur Lösung von formalen Subtraktionsaufgaben explizit thematisiert wird.

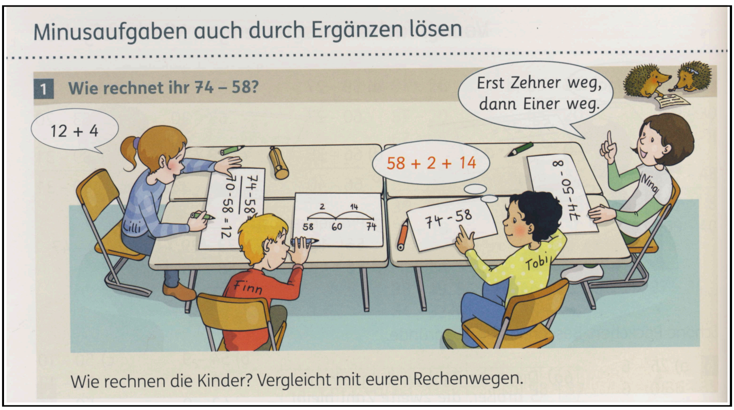


Abbildung 0-3: „Minusaufgaben auch durch Ergänzen lösen" (aus WITTMANN & MÜLLER 2012c, 54)

Betrachtet man die empirischen Forschungsergebnisse der jüngeren Jahre, die sich mit dem Gebrauch und der Effizienz von Abziehen und Ergänzen beschäftigen, so wird deutlich, dass das Ergänzen im Gegensatz zum Abziehen eher selten von Schülerinnen und Schülern genutzt wird, obwohl es sich laut der Forschungsergebnisse um eine sehr effiziente Vorgehensweise zu handeln scheint. SELTER ET AL. (2012, 391 – Hervorhebungen im Original) fragen sich daher in diesem Zusammenhang:

> „What are possible explanations for the observation that the dd model [synonym für Ergänzen] seems to be *efficient, but rarely being used?*"

Für die vorliegende Arbeit stellt diese Frage den Ausgangspunkt der Überlegungen dar. Im Rahmen der Arbeit soll allerdings nicht nur der wissenschaftliche Diskurs auf empirischer Ebene bereichert werden, auch soll vorab auf theoretischer Ebene der Forschungsgegenstand der Subtraktion analysiert werden. Dazu wird auf der Grundlage von stoffdidaktischen Überlegungen geklärt, was eigentlich unter Subtraktionsproblemen verstanden werden kann und welche Grundvorstellungen und Vorgehensweisen sich bei der Subtraktion identifizieren lassen.

Struktur der vorliegenden Arbeit

Insgesamt ergibt sich dabei folgende Struktur für die vorliegende Arbeit (vgl. Abb. 0-4):

Zunächst beschreibt Kapitel 1, warum in der vorliegenden Arbeit eine Fokussierung auf Grundvorstellungen – und damit auf mentale Repräsentationen – verfolgt wird. Außerdem wird das Konstrukt der Grundvorstellung durch Rückgriff auf die Kognitionspsychologie ausgeschärft sowie die Rolle des Grundvorstellungskonzepts in der Mathematikdidaktik beleuchtet. Dabei stellt sich unter anderem heraus, dass das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik sowohl *theoretisch – im Sinne einer theoretischen Analyse* des jeweiligen mathematischen Inhalts – als auch *deskriptiv – im Sinne einer empirischen Analyse* von individuellen Grundvorstellungen bezüglich bestimmter mathematischer Inhalte bei Lernenden – genutzt wird. Diese beiden Ebenen in der vorliegenden Arbeit berücksichtigend wird in Kapitel 2 zunächst eine theoretische Perspektive auf die Grundvorstellungen und Vorgehensweisen der Subtraktion eingenommen. Dabei werden ausgehend von der Darstellung des diesbezüglichen Forschungsstandes die theoretischen Ergebnisse weiterführender stoffdidaktischer Analysen des Autors der vorliegenden Arbeit entfaltet. Anschließend wird in Kapitel 3 eine deskriptive Perspektive auf die Grundvorstellungen und Vorgehensweisen der Subtraktion eingenommen und auf der Grundlage der Darstellung des diesbezüglichen Forschungsstandes die Forschungsfragen des deskriptiven und damit empirischen Teils der vorliegenden Arbeit hergeleitet. Kapitel 4 widmet sich dann der Methodologie und dem Design der durchgeführten empirischen Untersuchung. Kapitel 5 stellt schließlich das Ergebniskapitel des deskriptiven Teils der vorliegenden Arbeit dar und beantwortet damit die Forschungsfragen. In Kapitel 6 werden abschließend die Ergebnisse zusammengefasst und diskutiert sowie Konsequenzen für die Unterrichtspraxis und mathematikdidaktische Forschung beschrieben.

<table>
<tr><td colspan="3">Kapitel 1
Das Grundvorstellungskonzept</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Theoretische Perspektive auf die Subtraktion</td><td colspan="2">Kapitel 2
Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion aus theoretischer Perspektive – Stoffdidaktische Analysen</td></tr>
<tr><td>2.1 Forschungsstand</td><td>2.2 Weiterführende stoffdidaktische Überlegungen</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Deskriptive Perspektive auf die Subtraktion</td><td colspan="2">Kapitel 3
Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion aus deskriptiver Perspektive – Empirische Befunde</td></tr>
<tr><td>3.1 Forschungsstand</td><td>3.2 Herleitung und Formulierung der Forschungsfragen des empirischen Teils der vorliegenden Arbeit</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kapitel 4
Von den Forschungsfragen zur Methodologie und dem Design der empirischen Untersuchung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kapitel 5
Empirische Ergebnisse</td></tr>
<tr><td colspan="3">Kapitel 6
Zusammenfassung und Ausblick</td></tr>
</table>

Abbildung 0-4: Struktur der vorliegenden Arbeit

1 Das Grundvorstellungskonzept

Die theoretische Analyse von mathematischen Inhalten auf der einen Seite und der Deskription der tatsächlichen Vorgehensweisen, Vorstellungen und Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler auf der anderen Seite besitzt in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition. Das Grundvorstellungskonzept greift genau dieses Spannungsfeld auf und bietet eine Möglichkeit sowohl die theoretisch-möglichen beziehungsweise normativ-anzustrebenden als auch die tatsächlichen mentalen Repräsentationen der Schülerinnen und Schülern zu analysieren, um darauf aufbauend Lernprozesse zu initiieren und zu strukturieren.

In diesem Kapitel wird zunächst losgelöst vom Untersuchungsgegenstand der Subtraktion das Grundvorstellungskonzept dargestellt. Dazu wird in Kapitel 1.1 den Fragen nachgegangen, was unter Grundvorstellungen zu verstehen ist und welche Bedeutung Grundvorstellungen im Lernprozess zukommt. Kapitel 1.2 beschreibt anschließend, wie sich Grundvorstellungen im Lernprozess ausbilden und (weiter-) entwickeln. In Kapitel 1.3 wird darauf aufbauend die Rolle des Grundvorstellungskonzeptes in der Mathematikdidaktik beleuchtet. Abschließend werden in Kapitel 1.4 die zentralen Erkenntnisse dieses Kapitels zusammengefasst.

1.1 Begriffsklärung: Was sind Grundvorstellungen?

Der Kern der Mathematikdidaktik ist laut WITTMANN (1995) das Design von substantiellen Lernumgebungen. Dazu ist es auf der einen Seite notwendig vorab die Lernziele, welche mit der jeweiligen Lernumgebung verfolgt werden sollen, zu formulieren (‚Soll-Zustand') (GLASER nach WITTMANN 2002, 11 ff.). Dabei sind die Lernziele nicht etwa willkürlich zu wählen, sondern sollen auf Grundlage sorgfältiger fachlicher, fachdidaktischer und psychologischer Analysen formuliert werden (VOM HOFE 1995, 128; WITTMANN 1995). Auf der anderen Seite ist es für das Design von Lernumgebungen notwendig, die Ausgangslage der Lernenden bezogen auf die zuvor formulierten Lernziele mittels Diagnoseverfahren zu erheben (‚Ist-Zustand'), um darauf aufbauend individuelle Lernprozesse durch die Lernumgebung von der Ausgangslage hin zu den intendierten Lernzielen zu initiieren und strukturieren (WOLLRING 1999; GLASER nach WITTMANN 2002, 11 ff.) (vgl. auch Kapitel 1.3).

Die Frage, die sich jedoch in diesem Zusammenhang stellt, ist, von welcher Art die Diagnoseergebnisse sind. MARX (2011, 326) führt dazu aus, dass die „Mathematikdidaktische Diagnose [...] nach geistigen Konstrukten – nennen wir sie Vorstellungen – von Lernenden zu mathematischen Theorieelementen fragen“ muss, da es sich bei mathematischen Inhalten „um gedankliche Entwürfe und Konstruktionen [handelt], mit denen man die Wirklichkeit deuten und gestalten kann“ (HEFENDEHL-HEBEKER 1999, 6 unter Bezug auf HEIDEGGER 1962, BAUERSFELD 1983 und STEINBRING 1998). Diese Sichtweise soll auch richtungweisend für die vorliegende Arbeit sein.

Die gleiche Argumentation lässt sich auch auf die zu formulierenden Lernziele übertragen. Auch hier wäre eine Fokussierung auf Vorstellungen wünschenswert (vgl. OEHL 1962; FREUDENTHAL 1983, 31 ff.).

Aufbauend auf einer langen Tradition[3] greift das Grundvorstellungskonzept[4] genau dies auf, indem es die „gedanklichen Entwürfe und Konstruktionen“, oder mit anderen Worten die mentalen Repräsentationen der Lernenden, in den Blick nimmt. Um dies weiter zu vertiefen, wird im Folgenden zunächst der Begriff der Grundvorstellungen durch Rückgriff auf die Kognitionspsychologie ausgeschärft (Kapitel 1.1.1). Darauf aufbauend wird anschließend die Bedeutung von Grundvorstellungen im Lernprozess aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet (Kapitel 1.1.2).

1.1.1 Grundvorstellungen zur Beschreibung von mentalen Repräsentationen

In der vorliegenden Arbeit wird in Anlehnung an WARTHA (2007a, 187; 2007b, 29 ff.) der Begriff der *Grundvorstellungen* synonym zu dem aus der Kognitionspsychologie entstammenden Begriff der *mentalen Modelle* genutzt, welche auch FREUDENTHAL (1983, xi f.) in seiner „Didactical Phenomenology of Mathematical Structures“ für mathematische Inhalte fordert[5] (vgl. auch PREDIGER 2008, 6 f.).

Der Begriff des *mentalen Modells* geht zurück auf KRAIG (1967), der bereits 1943 ausführt, dass Kinder interne Modelle konstruieren. JOHNSON-LAIRD (1983) greift dies wieder auf und beschreibt mit dem Begriff der mentalen Modelle interne und damit mentale Repräsentationen eines Individuums von der Umwelt. Doch wie lassen sich diese mentalen Repräsentationen charakterisieren? Hinsichtlich dieser Frage lässt sich in der kognitionspsychologischen Literatur keine einheitliche Antwort finden. So schreiben manche Autoren mentalen Modellen analogen und damit bildlichen Charakter zu (vgl. SCHNOTZ 1994, 158 ff.). Andere Autoren sehen in mentalen Modellen hingegen das Zusammenwirken von analogen (bildlichen) und propositionalen (aussagenartigen)

---

3 Diese ist sehr detailliert und umfassend in VOM HOFE (1995) dargestellt.

4 Das Grundvorstellungskonzept stellt ein spezifisch deutschsprachiges mathematikdidaktisches Konzept dar (WARTHA 2007b, 34). In der internationalen Literatur lassen sich jedoch auch vergleichbare Konzepte finden (z.B. die Theorie der „intuitive models“ (vgl. WARTHA 2007b, 37 ff.)).

5 Wobei er von „mental objects“ spricht.

Repräsentationen (vgl. EDELMANN 2000, 261 ff.).[6] Diese zweite Sichtweise soll auch in der vorliegenden Arbeit eingenommen werden.

Laut SCHNOTZ (1994, 159 unter Bezug auf JOHNSON-LAIRD 1983) dürfen mentale Modelle nicht mit Vorstellungen gleichgesetzt werden, da Vorstellungen

> „vielmehr eine spezielle Variante analoger Repräsentationen [sind], die darauf zurückzuführen [sind], daß ein quasi-räumliches mentales Modell intern aus einer bestimmten Perspektive abgebildet wird. Kennzeichnend für ein mentales Modell ist lediglich, daß es bestimmte Eigenschaften besitzt, die den zu repräsentierenden Eigenschaften des Originals [...] analog sind. Mit anderen Worten: Die zwischen dem repräsentierten und dem repräsentierenden System bestehende strukturelle Übereinstimmung beruht auf bestimmten [Eigenschaften] des Modells, die diesem inhärent sind.“

Für das Grundvorstellungskonzept bedeutet dies, dass eine konkrete Vorstellung eines Individuums zu einem mathematischen Inhalt nicht gleichbedeutend mit der Grundvorstellung des Individuums zu diesem Inhalt ist, da diese Vorstellung zumeist noch zu konkrete Eigenschaften besitzt, welche für die Charakterisierung der *Grund*vorstellung nicht von Bedeutung sind. So kann es durchaus möglich sein, dass ein Individuum unterschiedliche Vorstellungen zu einem mathematischen Inhalt besitzt, welchen jedoch allen die gleiche Grundvorstellung zugrunde liegt. *Die Grundvorstellung ist demnach vielmehr die Abstraktion einer Klasse von Vorstellungen zu einem mathematischen Inhalt, das heißt das ‚Abstreifen' jeglicher Eigenschaften, welche nicht allen Vorstellungen gemein ist und damit die Fokussierung auf bestimmte Eigenschaften dieser; oder kürzer: Das Gemeinsame aller Vorstellungen.*

1.1.2 Zur Bedeutung von Grundvorstellungen im Lernprozess

Hinsichtlich der Bedeutung von mentalen Modellen lassen sich in der kognitionspsychologischen Literatur einheitlichere Antworten finden. So schreibt JOHNSON-LAIRD (1983) mentalen Modellen zu, dass mit deren Hilfe Vorhersagen und Folgerungen getroffen werden können. SCHNOTZ (1994, 158) führt dazu aus:

> „So wie man unter einem gegenständlichen Modell ein Objekt versteht, das auf der Grundlage einer Struktur- oder Funktionsanalogie zu einem Original dazu genutzt wird, bestimmte Aufgaben und Probleme stellvertretend an diesem Objekt statt direkt am Original zu lösen, handelt es sich bei einem mentalen Modell um eine Art inneren Gegenstand, ein hypothetisches Quasi-Objekt, das aufgrund einer entsprechenden Analogie zum Wissensgegenstand dazu dient, bestimmte Aufgaben und Probleme mental zu lösen Die Lösung geschieht dadurch, daß das Modell in bestimmter Weise manipuliert wird, um dann bestimmte Modellmerkmale abzulesen, aus denen auf die gesuchte Eigenschaft des Originals rückgeschlossen wird“.

---

[6] Eine ausführlichere Darstellung der verschiedenen Repräsentationen des Wissens kann beispielsweise THOM (2010, 122 ff.) entnommen worden.

Auch in der mathematikdidaktischen Literatur lässt sich bezogen auf das Grundvorstellungskonzept hinsichtlich der Bedeutung von Grundvorstellungen eine relativ einheitliche Linie finden. Demnach fungieren Grundvorstellungen:

- zur Übersetzung zwischen Darstellungen,
- zur (mentalen) Lösung von Aufgaben und Problemen sowie
- als verständniskonstituierendes Moment.

Diese drei Punkte werden im Folgenden näher betrachtet.

Grundvorstellungen zur Übersetzung zwischen Darstellungen

Der Prozess der Lösung von Modellierungs- beziehungsweise Sachaufgaben kann idealtypisch mittels des Modellierungskreislaufs (vgl. Abb. 1-1) beschrieben werden (vgl. u.a. POLLACK 1979; LEISS & BLUM 2007; BORROMEO FERRI ET AL. 2006; PREDIGER 2010). Nach LEISS & BLUM (2007, 312) wird dabei eine Problemstellung aus dem „Rest der Welt“ (von manchen Autoren auch kurz „Welt“ oder „Realität“ genannt (z.B. SCHUPP 1988; BORROMEO FERRI 2007; PREDIGER 2010) in die „Mathematik“ übersetzt und auf dieser Ebene gelöst. Ausführlich gestaltet sich ein ‚Durchlauf’ des Modellierungskreislaufs wie folgt: Zunächst wird eine gegebene reale Problemstellung („Realsituation“) „verstanden“ und ein „Situationsmodell“ gebildet (1). Dieses wird zu einem „realen Modell“ beziehungsweise „Problem“ „vereinfacht“ beziehungsweise „strukturiert“ (2). Anschließend wird dazu ein „mathematisches Modell“ beziehungsweise „mathematisches Problem“ gebildet („mathematisieren“) (3). Dabei werden mathematische Begriffe gesucht, welche das „reale Modell“ beziehungsweise „Problem“ darstellen. Für dieses „mathematische Modell“ wird wiederum ein mathematisches Resultat ermittelt („mathematisch arbeiten“) (4). Dieses „mathematische Resultat“ wird vor dem Hintergrund des „realen Modells“ beziehungsweise „Problems“ interpretiert, also in den „Rest der Welt“ zurückübersetzt, wodurch man ein „reales Resultat“ erhält (5). Dieses wird „validiert“, indem es auf das „Situationsmodell“ bezogen wird (6). Im Anschluss kann die „Realsituation“ „erklärt“ beziehungsweise „dargelegt“ werden (7).

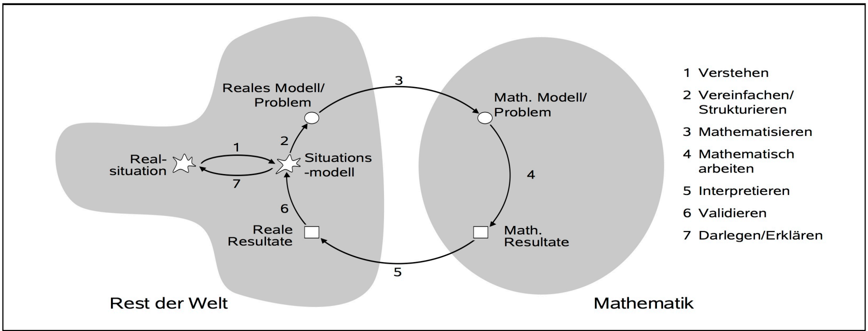


Abbildung 1-1: Der Modellierungskreislauf (aus LEISS & BLUM 2007, 312)

Dabei ist nochmals zu betonen, dass der Kreislauf idealtypisch zu verstehen ist. Tatsächliche Modellierungsprozesse laufen nicht so linear wie dargestellt ab und beinhalten auch nicht immer jeden der dargestellten Schritte (BORROMEO 2007).

Das Grundvorstellungskonzept lässt sich innerhalb des Modellierungskreislaufes in den Schritten 3 („mathematisieren“) und 5 („interpretieren“) – also bei der Übersetzung vom „Rest der Welt“ (im Folgenden kurz Realität) in die „Mathematik“ und zurück – verorten (vgl. die vereinfachte Darstellung des Modellierungskreislaufs in Abb. 1-2) (u.a. OEHL 1962; VOM HOFE 2003, 5 in Anlehnung an SCHUPP 1988; WARTHA 2007b, 30; PREDIGER 2010, 7). Möchte man beispielsweise wissen, „welche mathematischen Inhalte oder Verfahren zu einer bestimmten Sachsituation passen könnten und umgekehrt, welche Situationen sich mit bestimmten mathematischen Inhalten modellieren lassen“ (VOM HOFE 2003, 5) – kurz möchte man zwischen Realität und Mathematik übersetzen – ist es notwendig über Grundvorstellungen zu verfügen, welche zwischen der ‚Darstellung in der Mathematik’ auf der einen Seite und der Darstellung ‚in der Realität’ auf der anderen Seite vermitteln. Dies beginnt bereits bei einfachen Sachaufgaben: Wer beispielsweise mit der Addition nicht die [Grund-] Vorstellung verbindet, welche mittels ‚Dazugeben’ bzw. ‚Zusammenfügen’ charakterisiert werden kann, kann eine Problemstellung wie zum Beispiel „Ernie hat 4 Kekse. Bert gibt ihm noch 3 Kekse dazu. Wie viele Kekse hat Ernie jetzt?“ (RADATZ ET AL. 1996, 79 in Anlehnung an CARPENTER & MOSER 1982 und FUSON 1992a) nicht in die mathematische Darstellung 4+3=? übersetzen. Oder anders herum: Nur wer Grundvorstellungen zu einem bestimmten mathematischen Inhalt besitzt, kann Übersetzungen von der Sachebene in die Mathematik beziehungsweise von der Mathematik auf die Sachebene vornehmen (z.B. einen passenden Term zu einer gegebenen Sachaufgabe nennen oder zu einem gegebenen Term eine passende Sachaufgabe angeben, (vgl. u.a. BLUM & VOM HOFE 2003; KUHNKE 2013, 118 ff.), wobei dabei die Grundvorstellungen „wieder wirksam werden“ (OEHL 1962, 103), welche auch schon „bei der Einführung zur Gewinnung der Einsicht führten“ (OEHL 1962, 103). Die mathematschen Inhalte und Verfahren lassen sich jedoch zumeist nicht nur mit einer Grundvorstellung beschreiben, sondern vielmehr durch ein Zusammenspiel mehrerer Grundvorstellungen, welche miteinander vernetzt sein sollten (WARTHA 2007b, 33 in Anlehnung an VOM HOFE 1995, BLUM & VOM HOFE 2003; VOM HOFE 2003, 6; aber auch OEHL 1970). Weiterhin können nach VOM HOFE (2003, 6) zwei Arten von Grundvorstellungen unterschieden werden. Erstens die primären Grundvorstellungen, welche sich auf konkrete Operationen an Objekten beziehen und zweitens die sekundären Grundvorstellungen, welche meistens abstrakter sind und sich eher auf mathematische Darstellungen (z.B. Zahlenstrahl, Koordinatensystem oder Graphen) beziehen.

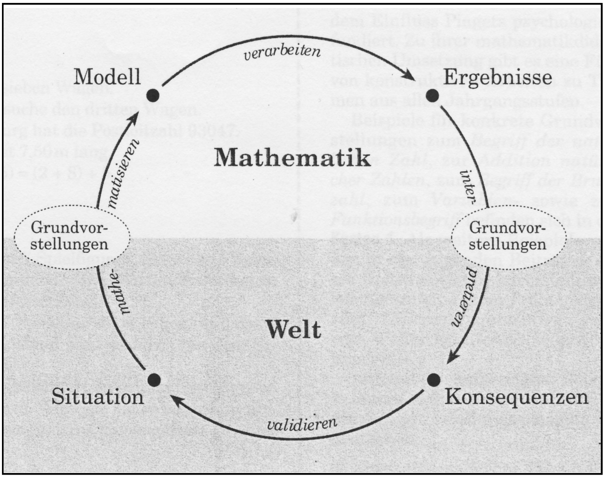


Abbildung 1-2: Der Modellierungskreislauf (aus VOM HOFE 2003, 5)

WARTHA (2010; 2011; WARTHA & SCHULZ 2011, 5 f.) verallgemeinert den Modellierungskreislauf dahingehend, dass er die Übersetzung zwischen Realität und Mathematik noch weiter fasst (vgl. Abb. 1-3). Diese Sichtweise auf Übersetzungsprozesse soll auch grundlegend für die vorliegende Arbeit sein. (vgl. Kapitel 4.4).

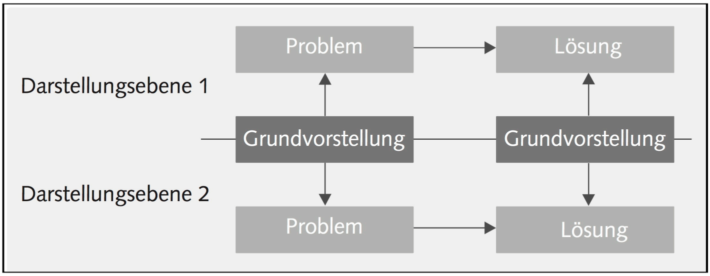


Abbildung 1-3: Der „Grundvorstellungskreislauf“ (aus WARTHA & SCHULZ 2011, 5)

WARTHA (2010; 2011; WARTHA & SCHULZ 2011, 5 f.) unterscheidet nicht mehr die beiden Ebenen „ Realität“ und „Mathematik“, zwischen denen im Modellierungsreislauf übersetzt wird, sondern lediglich „Darstellungsebenen“, zwischen denen Grundvorstellungen bereichsspezifisch übersetzen. Dabei ist der Begriff „Darstellungsebene“ sehr weit gefasst. WARTHA (2010, 911 f.) spricht davon, dass die Darstellungen symbolische, ikonische, algebraische und geometrische Charakteristika aufweisen können, wobei diese Auflistung keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Um dies weiter zu präzisieren, bietet es sich an zu klären, welche verschiedenen Darstellungen überhaupt unterschieden werden können und damit einhergehend zwischen welchen Darstellungen übersetzt werden kann. In Anlehnung an KUHNKE (2013, 31 f.) (unter Bezug auf u.a. BRUNER 1974; KAUFMANN & WESSOLOWSKI 2006) sollen unter Darstellungen „Bilder, Handlungen mit Material [und] mathematische und sprachliche Symbole“ verstanden werden, zwischen denen Übersetzungsprozesse stattfinden können (intermodaler Transfer – schwarze Pfeile in Abb. 1-4). Weiterhin sind jedoch auch Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungen innerhalb einer Darstellungsebene möglich (intramodaler Transfer – graue Pfeile in Abb. 1-4) (KUHNKE 2013, 32).[7]

[7] Vergleiche dazu auch DUVAL (2000, 2006), der davon spricht, dass mathematische Begriffe und Strukturen immer an Darstellungen gebunden sind, da diese nicht (physisch) fassbar sind. Zur Vertiefung kann eine Übersicht über die besondere Rolle von Darstellungen in der mathematischen Kommunikation KUHNKE (2013, 7 ff.) entnommen werden.

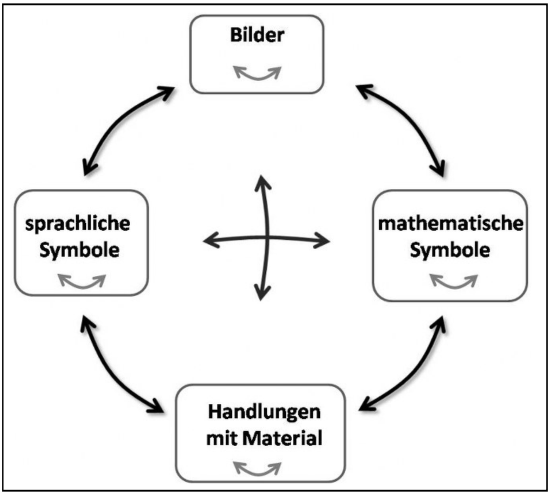


Abbildung 1-4: Der Wechsel zwischen Darstellungen (aus KUHNKE 2013, 32)

Der Grundvorstellungskreislauf ist nun durch die Verallgemeinerung der beiden Ebenen „Mathematik“ und „Realität“ nicht nur, wie der Modellierungskreislauf, auf das Lösen außermathematischer Problemstellungen (z.B. Sachaufgaben) anwendbar, sondern auch auf das Lösen innermathematischer Problemstellungen (z.B. formalen Rechenaufgaben), bei denen auch Übersetzungsprozesse stattfinden.

Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen (in Anlehnung an WARTHA & SCHULZ 2011, 3 ff.):

Soll die formale Rechenaufgabe 7+8=? gelöst werden und das Ergebnis kann nicht – ähnlich wie bei einer Vokabel – auswendig abgerufen werden, *muss* zwangsläufig die Darstellung gewechselt und damit einhergehend Grundvorstellungen aktiviert werden (vgl. Abb. 1-5), da sonst eine Lösung der Aufgabe nicht möglich ist. Dabei können beispielsweise „Grundvorstellungen zur Addition (z.B. Hinzufügen) und zu den Zahlen (z.B. als Anzahl) aktiviert werden (1), anschließend auf bildlicher oder handelnder Ebene zu 7 Objekten 8 dazugefügt werden (2) und über eine Grundvorstellung zur Kardinalzahl die Anzahl der entstandenen Menge als >>15<< auf symbolische Ebene zurückübersetzt“ (3) (WARTHA & SCHULZ 2011, 5) werden. Die erwähnte „bildliche oder handelnde Ebene“ bezieht sich an dieser Stelle auf konkretes – für einen Beobachter beobachtbares – Handeln. Die der Handlung zugrunde liegende Grundvorstellung (respektive das mentale Modell) kann demnach genau in diesem Übersetzungsprozess rekonstruiert werden (vgl. Kapitel 4.4).

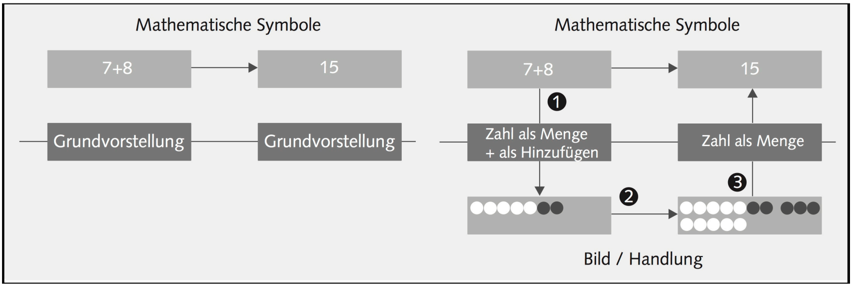


Abbildung 1-5: Der „Grundvorstellungskreislauf" bei der Aufgabe 7+8=? (aus WARTHA & SCHULZ 2011, 6)

Grundvorstellungen zur (mentalen) Lösung von Aufgaben und Problemen

Bezieht man jedoch auch JOHNSON-LAIRD (1983) und SCHNOTZ (1994) in die Diskussion mit ein, die, wie bereits oben erwähnt, davon ausgehen, dass es sich bei einem mentalen Modell um ein internes Modell handelt, mit welchem Aufgaben und Probleme mental gelöst werden können, so sollten sich die Darstellungsebenen, zwischen welchen im Grundvorstellungskreislauf übersetzt wird, auch auf mentale Repräsentationen beziehen – oder anders formuliert: Die Darstellungsebenen sollten vielmehr als ‚Repräsentationsebenen' bezeichnet und dahingehend erweitert werden, dass sie sowohl mentale (interne) Repräsentationen als auch konkret-beobachtbare (externe) Repräsentationen umfassen[8]. So spricht beispielsweise FREUDENTHAL (1983, 101) von „Addition [...] [and] Subtraction as A *Mental Act*" (Hervorhebung durch den Autor) und auch AEBLI (1963) sieht in den Rechenoperationen ‚innere' Handlungen, mit denen Probleme gelöst werden können.

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, dass bei jedem, zur Lösung einer Aufgabe beziehungsweise Problems, stattfindenden Darstellungswechsel Grundvorstellungen aktiviert werden müssen, welche zwischen den Darstellungen respektive Repräsentationen – seien es mentale oder konkret-beobachtbare – vermitteln (vgl. KUHNKE 2013, 35 ff. unter Bezug auf STÖLTING 2008). Um eine gegebene Aufgabe beziehungsweise ein gegebenes Problem zu lösen, kann dann innerhalb der Darstellungsebene respektive Repräsentation, welche sich durch eine bestimmte Grundvorstellung charakterisieren lässt, auf unterschiedliche Weisen gehandelt werden. In der vorliegenden Arbeit

8 MARTSCHINKE (2001, 21 ff.) greift in diesem Zusammenhang den Begriff „Arbeitsmodell" auf: Das „Arbeitsmodell" macht das mentale Modell „in Form einer Vorstellung vor dem inneren Auge sichtbar [...]; außerdem können mentale Operationen an [...] [ihm] ablaufen. Damit stehen Arbeitsmodelle dem Lerner für Aufgabenbewältigungen unterschiedlichster Art zur Verfügung." (MARTSCHINKE 2001, 23).

soll dies mit dem Begriff der *Vorgehensweise* umschrieben werden. Somit können innerhalb einer Grundvorstellung unterschiedliche Vorgehensweisen zum Tragen kommen. Dies können beispielsweise unterschiedliche Rechenstrategien sein, welche jedoch auf ein und derselben Grundvorstellung aufbauen. WARTHA (2010, 912; WARTHA & SCHULZ 2011, 7 f.) spricht in diesem Zusammenhang davon, dass nicht nur Rechenoperationen, sondern auch Strategien Grundvorstellungen zugeordnet werden können und beschreibt „Beispiele für Grundvorstellungen zu Strategien am Beispiel 7+8“ (WARTHA & SCHULZ 2011, 7 f.) (vgl. Abb. 1-6).

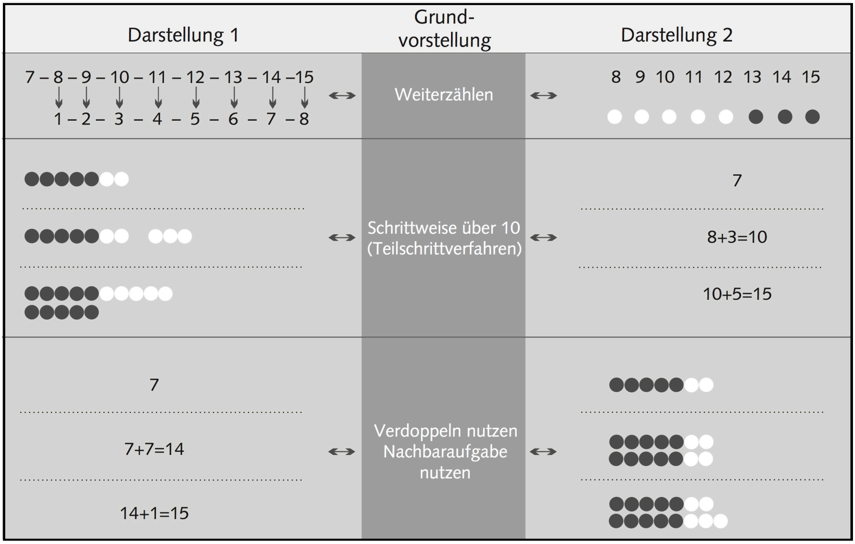


Abbildung 1-6: Beispiele für Grundvorstellungen zu Strategien am Beispiel 7+8=?[9] (aus WARTHA & SCHULZ 2011, 7)

Grundvorstellungen als verständniskonstituierendes Moment

Eine weitere Bedeutung von Grundvorstellungen, die eng mit den obigen Erläuterungen verbunden ist, sind die Ausführungen mancher Autoren, in denen die Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen für ein auf Verständnis ausgerichtetes Lernen unabdingbar ist (u.a. GRIESEL 1971; BENDER 1991; VOM HOFE 1995, 97 f.; PREDIGER 2010; WARTHA 2010, 912).

Als verständniskonstituierend wird dabei die „inhaltliche Deutung“ mathematischer Inhalte gesehen (BENDER 1991; VOM HOFE 1996). Erst durch

[9] Man beachte den Fehler in Zeile 4: Anstatt „8+3=10“ muss es 7+3=10 heißen.

das Ausbilden von tragfähigen Grundvorstellungen „kann die Ausbildung unverstandener schematischer Fertigkeiten [...] verhindert [werden]“ (VOM HOFE 2003, 7). WARTHA (2010, 911 f.; 2011, 8; WARTHA & SCHULZ 2011, 5) geht davon aus, dass einem Individuum immer dann Verständnis zu einem mathematischen Inhalt zugesprochen werden kann, wenn es den oben dargestellten „Umweg“ (vgl. Abb. 1-5) über eine andere Darstellungsebene beim Lösen einer Aufgabe gehen kann. In diesem Zusammenhang wird von einigen Autoren auch das mathematikdidaktische Konstrukt *Operationsverständnis* genutzt (u.a. RADATZ 1989; BÖNIG 1995; SCHÄFER 2005; MOSER OPITZ 2007; ROYAR 2013), welches Individuen meistens dann zugesprochen wird, wenn sie in der Lage sind, zwischen mathematisch-symbolischen Darstellungen und Bildern beziehungsweise Handlungen ‚tragfähig' zu übersetzen (u.a. RADATZ 1989; BÖNIG 1995; SCHÄFER 2005; LADEL 2009).

1.2 Zur Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen im Lernprozess

Im Laufe eines Lernprozesses sind Grundvorstellungen einer ständigen Bildung, Veränderung, Reorganisation und Neuinterpretation unterworfen. Dabei entsteht im besten Fall ein immer leistungsfähigeres System von Grundvorstellungen zu bestimmten mathematischen Inhalten (WARTHA 2007b, 33 in Anlehnung an VOM HOFE 1995; MARX & WESSEL 2010, 40).

Dieser Prozess wird dabei in der Literatur aus mindestens zwei, sich gegenseitig bedingenden Perspektiven beschrieben[10]. Auf der einen Seite aus einer eher deskriptiven Perspektive (Kapitel 1.2.1), bei der das Ziel verfolgt wird, den Prozess der Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen besser zu verstehen. Auf der anderen Seite aus einer eher präskriptiven Perspektive (Kapitel 1.2.2), aus der zumeist Tätigkeiten der Lernenden, aber auch der Lehrenden, beschrieben werden. Diese Tätigkeiten sollen dazu dienen Grundvorstellungsentwicklungen anzuregen und zu unterstützen. Beide Ebenen sollen im Folgenden näher betrachtet werden.

1.2.1 Zur Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen im Lernprozess aus deskriptiver Perspektive

Im Zusammenhang mit der Beschreibung des Ausbildens und der (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen aus deskriptiver Perspektive wird häufig der Begriff der „Verinnerlichung“ oder „Interiorisierung“ genutzt (vgl. u.a. AEBLI 1963; VOM HOFE 1995; GERSTER & SCHULZ 2004, 46 f.; LORENZ 2011). Dabei wird beschrieben, dass ein mathematischer Inhalt bezie-

[10] Diese Perspektiven sind sicherlich nicht immer trennscharf voneinander zu unterscheiden.

hungsweise Begriff (hier Grundvorstellungen zu diesem Inhalt bzw. Begriff) mental aufgebaut wird, indem Strukturen von Handlungen verinnerlicht – quasi „aus der Wirklichkeit herausgelöst“ (LORENZ 2011, 43) – werden (vgl. auch OEHL 1962). AEBLI (1980) spricht in diesem Kontext davon, dass durch das Beobachten von Handlungen innere Bilder bei den Lernenden erzeugt werden. Folgendes Beispiel soll dies konkretisieren (in Anlehnung an LORENZ 2011, 43): Sollen Lernende im ersten Schuljahr beispielweise die Grundvorstellung des ‚Hinzufügens' beziehungsweise der ‚Vereinigung von Mengen' zur Addition aufbauen, müssen sie diese „Struktur“ als das Gemeinsame der im Unterricht dargebotenen und genutzten Darstellungen (z.B. konkrete Handlungen mit Materialien, ikonische Darstellungen im Schulbuch) sehen und abstrahieren, also alles „schmückende Beiwerk“ weglassen beziehungsweise „wegdenken“ (LORENZ 2011, 43). Oder mit anderen Worten: Die Eigenschaft[11] des „Hinzufügens“ beziehungsweise „Zusammenfügens“ als das Gemeinsame – für diese Grundvorstellung konstituierende – sehen. (vgl. Kapitel 1.1) DÖRFLER (1988, 55) sieht hingegen „das mathematische Konstrukt [...] als nicht [...] aus der Handlung herauslösbar [...], sondern es tritt [seiner Ansicht nach] konstruktiv-integrativ zu ihr hinzu“. Doch wie genau der Prozess der „Verinnerlichung“ abläuft ist nach wie vor nicht hinreichend geklärt (LORENZ 2007; 2011) und verbleibt (bis jetzt) als „black-box“ (LORENZ 2011, 51).

1.2.2 Zur Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen im Lernprozess aus präskriptiver Perspektive

Da eine umfassende Darstellung sämtlicher Ansätze zur Beschreibung der Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung aus präskriptiver Perspektive den Rahmen der Arbeit übersteigen würde, werden im Folgenden exemplarisch einige Ansätze beschrieben.

WARTHA (2007b, 33 in Anlehnung an VOM HOFE 1995) betrachtet beispielsweise die Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen eher aus präskriptiver Perspektive und beschreibt zunächst zentrale, allgemeine Tätigkeiten, welche beim Ausbilden und der (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen zum Tragen kommen sollten:

- „die Konstituierung von Bedeutung eines neuen mathematischen Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge;
- den Aufbau generalisierter mentaler Modelle [hier synonym zu Grundvorstellungen zu verstehen], die den Begriff auf der Vorstellungsebene repräsentieren;

[11] CAMPBELL (2005) spricht in diesem Zusammenhang von (Handlungs-) Merkmalen.

- und die Anwendung des Begriffs auf neue Sachsituationen bzw. durch Modellierung von Sachsituationen mit Hilfe des mathematischen Begriffs.“

Weiterhin beschreibt WARTHA (2010, 913; 2011, 10 ff.; WARTHA & SCHULZ 2011, 11 ff.) in einem „Vierphasenmodell zur Unterstützung des Prozesses der „Verinnerlichung“ von Grundvorstellungen konkrete Möglichkeiten der Begleitung von Lernenden (vgl. Abb. 1-7):

1	*Das Kind handelt am geeigneten Material.* Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.
2	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.* Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.
3	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.* Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.
4	*Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.* Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

Abbildung 1-7: Vierphasenmodell zum Aufbau von Grundvorstellungen (nach WARTHA & SCHULZ 2011, 11)

Um vom konkreten Handeln (Phase 1) zum mentalen Handeln (Phase 4) zu gelangen,

> „ist es hilfreich, das Kind zunächst (beispielweise in Partnerarbeit) die Handlung nicht mehr selbst durchführen, jedoch den Handlungsprozess beschreiben zu lassen (Phase 2). Um nun den Aufbau des gedanklichen Modells weiter zu fördern, wird dem Kind die Sicht auf das Material genommen, das beispielsweise hinter einem Sichtschirm verborgen wird. Das Kind soll nun beschreiben, wie der Partner die Handlung durchführen soll. Hierzu ist es darauf angewiesen, sich ein Bild vor einem >> geistigen Auge << zu konstruieren und hiermit mental zu operieren (Phase 3)“. (WARTHA & SCHULZ 2011, 12)

Grundsätzlich sollte dabei nach WARTHA (2010, 913) folgendes berücksichtigt werden:

> „Der Prozess ist [...] keineswegs stets linear von Phase (1) bis (4) zu verstehen. Auch wenn ein Kind Phase (4) bei einer Aufgabenstellung erreicht hat, so ist es häufig nötig, in anderen Situationen zum gleichen Inhalt noch einmal auf Phase (3) zurückzukommen. Es sollte jedoch keine Phase übersprungen werden – weder nach oben noch nach unten.“

Weiterhin formuliert er bezogen auf die einzelnen Phasen Leitfragen und Beobachtungsschwerpunkte:

> Phase (1): Beobachtung und Bewertung der Schülerhandlung mit Hinblick auf die mentale Fortsetzbarkeit. Hier findet die Thematisierung und Erarbeitung eines gemeinsamen Vokabulars statt.
>
> Phase (2): Nutzung des gemeinsamen Handlungsvokabulars und Thematisierung von Missverständnissen und Unklarheiten.
>
> Phase (3): Aktivierung mentaler Handlungen durch ein gemeinsames Vokabular und eines „inneren Bildes“ der Operation. Dabei wird berücksichtigt, dass immer noch auf verschiedenen Darstellungsebenen operiert und die Handlungsebene nicht vorschnell verlassen wird, indem auf die hinter dem Sichtschirm tatsächlich durchgeführte Handlung fokussiert wird.
>
> Phase (4): Es wird immer wieder der Rückbezug zu Phase (3) hergestellt, um eine Verselbstständigung der symbolischen Ebene zu vermeiden.“

Auch PREDIGER (2010. 17 ff.) beschreibt vier Stufen der Ausbildung und der (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen im Lernprozess (vgl. dazu Kapitel 1.1). Dabei bezieht sie sich auf das Konzept des „emergent modelling“ von GRAVEMEIJER (1999). Die vier Stufen lassen sich verkürzt wie folgt skizzieren:

- „1. Stufe: Aufbau eines ‚model of situation’ ausgehend von informellem Können“: Auf dieser Stufe sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst eine bestimmte Grundvorstellung erwerben, indem sie verschiedene Problemsituationen (welche sich mit der jeweiligen Grundvorstellung beschreiben lassen) betrachten, mit ihrem informellen Können lösen und in die Sprache der Mathematik übersetzen.
- „2. Stufe: Übergang zu einem ‚model for reasoning’“: Auf dieser Stufe sind die Schülerinnen und Schüler in der Lage die jeweilige Grundvorstellung auch zur Übersetzung von der Mathematik in die Realität zu nutzen, indem beispielsweise „inhaltlich-anschauliche Begründungen für formale Fragen“ herangezogen werden können.
- „3. Stufe: Entwicklung und Anwendung eines interpretationsfreien Kalküls“: Auf dieser Stufe soll ein Kalkül „aus den lebensweltlichen Regeln“ entwickelt werden, „der auch unabhängig von der Interpretation in lebensweltlichen Situationen funktioniert“.
- „4. Stufe: Flexible Nutzung aller drei Stufen“: Auf dieser Stufe können „je nach Anforderung alle drei Varianten der Beziehung von Lebenswelt und Mathematik genutzt werden.“

VOM HOFE (1995, 123 ff.) beschreibt hingegen das Ausbilden von Grundvorstellungen modellhaft auf zwei Ebenen (vgl. Abb. 1-8). Dabei stützt er sich auf die Annahme, dass sich *überhaupt* durch die ‚Thematisierung’ von Grundvorstellungen durch die Lehrkraft Grundvorstellungen bei den Lernenden, welche „bei allen subjektiven Schattierungen […] [doch] einen gemeinsamen Kern haben“, ausbilden und (weiter-) entwickeln lassen (VOM HOFE 1995, 123; vgl. auch BENDER 1991).

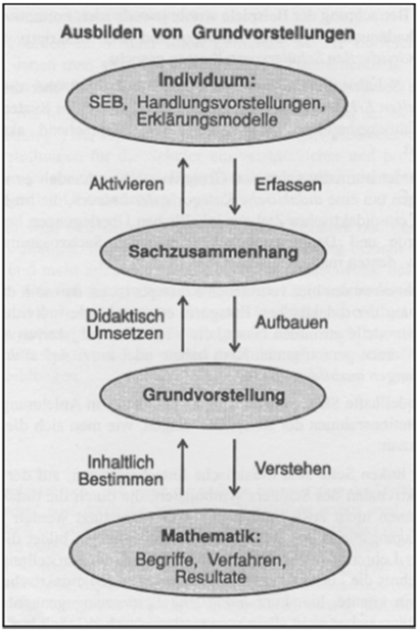


Abbildung 1-8: Ausbilden von Grundvorstellungen (aus VOM HOFE 1995, 124)

Auf der einen Seite führt er auf der Ebene der „didaktischen Entscheidungen“ (linke Seite in der Abb. 1-8), welche sich auf die Aktivitäten des Lehrenden beziehen und auf der anderen Seite bezogen auf die Aktivitäten der Lernenden (rechte Seite der Abb. 1-8) aus:

> „Den Ausgangspunkt der didaktischen Entscheidungen bildet die Reflexion des Lehrenden über die auszubildenden Grundvorstellungen, deren Ergebnis die Formulierung einer entsprechenden didaktischen Kategorie [hier synonym zu Grundvorstellung zu verstehen] sein könnte, hier kurz *inhaltliche Bestimmung* genannt. Dieser Schritt kann sicher nicht allein vom mathematischen Inhalt her, etwa in Form einer eindeutigen Ableitung erfolgen; er ist von vornherein auf ein didaktisches Ziel gerichtet, sollte sich an der Anwendungsdimension des mathematischen Inhalts und am Erfahrungshorizont des Schülers orientieren und stellt somit eine grundsätzliche didaktische Entscheidung dar.
>
> Die *didaktische Umsetzung* der Kategorie, d.h. die Konstruktion bzw. Identifikation eines entsprechenden *Sachzusammenhangs*, sollte den strukturellen Kern des aufzubauenden Begriffs in

> einer dem Schüler gemäßen Art repräsentieren[12]. Die inhaltlichen Elemente und die methodische Struktur des Sachzusammenhangs bilden Ausgangspunkte für entsprechende Lern- bzw. Interaktionsprozesse und sollten dazu geeignet sein, beim Schüler *Erfahrungsbereiche* zu *aktivieren*, die es diesem ermöglichen, den *Kern des Sachzusammenhangs* aus der Perspektive seiner Vorstellungs- und Handlungsmöglichkeiten zu *erfassen*. Auf der Grundlage solcher Schritte kann dann der Schüler langfristig die entsprechende *Grundvorstellung aufbauen*, sie in das System seiner Erklärungs- und Handlungsmöglichkeiten integrieren und – in einem seinen individuellen Bedingungen entsprechenden Ausmaß – am *Kern des mathematischen Begriffs* teilhaben, d.h. diesen „*verstehen*". (VOM HOFE 1995, 123 ff. – Hervorhebungen im Original)

BENDER (1991, 56 f.) schreibt neben „echten Anwendungen" (hier synonym zu VOM HOFES „Sachzusammenhängen" zu verstehen) Metaphern, welche beispielsweise in den Didaktiken der Naturwissenschaften eine lange Tradition besitzen (vgl. z.B. MOSER 2003, 188 ff.), eine wichtige Rolle beim Ausbilden und der (Weiter-) Entwicklung von „Grundvorstellungen und Grundverständnissen" (kurz GVV) zu (vgl. auch LAKOFF & NUNEZ 2000). Diese sollen einen bestimmten mathematischen Inhalt „*sparsam* abbilden und [...] [ihn] insbesondere *nicht verkomplizieren oder verdunkeln*" (BENDER 1991, 56 – Hervorhebungen im Original), da „echte Anwendungen" nicht immer für GVV geeignet sind, „weil die ihnen innewohnenden Sachstrukturen die mathematischen Begrifflichkeiten überlagern und deren psychologische Grundlegung stören können" (BENDER 1991, 56).

1.3 Zur Rolle des Grundvorstellungskonzepts in der Mathematikdidaktik

Wie in Kapitel 1.1 erläutert, sollten beim Design von Lernumgebungen zunächst die Lernziele, welche durch die Lernumgebung verfolgt werden sollen, formuliert werden (‚Soll-Zustand'). Weiterhin sollten die Ausgangslagen der Lernenden berücksichtigt werden (‚Ist-Zustand'), um darauf aufbauend Lernprozesse zu initiieren und strukturieren.

Nach VOM HOFE (1995, 128 f.; 1996, 8) bietet das Grundvorstellungskonzept die Möglichkeit diese beiden Sichtweisen, welche sich nach WARTHA (2007b, 32) keinesfalls widersprechen, sondern eher bereichern, einzunehmen und sowohl die Ausgangslagen als auch die angestrebten Lernziele bezogen auf die mentalen Repräsentation der Lernenden (vgl. Kapitel 1.1) zu beschreiben. Zum einen wird dabei der Frage nachgegangen, welche Grundvorstellungen Schülerinnen und Schüler ausbilden sollen beziehungsweise können ((normativ-) theoretische Perspektive (Kapitel 1.3.1)), zum anderen wird der Fokus auf die individuellen Grundvorstellungen respektive mentalen Modelle der Lernenden

12 BREIDENBACH (1969) spricht in diesem Zusammenhang von „Spielhandlungen", welche für ihn für die mathematische Definition stehen sollten.

gerichtet (deskriptive Perspektive (Kapitel 1.3.2))[13] (VOM HOFE 1995, 128 f., KLEINE 2007; WARTHA & SCHULZ 2011). VOM HOFE (1995, 112 – Hervorhebungen im Original) schreibt in diesem Zusammenhang:

> „Die Betrachtung möglicher Divergenzen zwischen normativer und deskriptive Ebene, d.h. zwischen *sachadäquaten Grundvorstellungen, die der Lehrer anzielt*, und *individuellen Vorstellungen bzw. Fehlvorstellungen des Schülers*, dient dann als Ausgangspunkt für Überlegungen zur *konstruktiven* Behebung der entsprechenden Mißverständnisse."

Im Folgenden werden beide Perspektiven näher betrachtet und anschließend um weitere Perspektiven rund um das Grundvorstellungskonzept ergänzt (Kapitel 1.3.3).

1.3.1 Theoretische Perspektive

Aus normativ-theoretischer Perspektive geht es darum die Frage zu klären, welche Grundvorstellungen einen mathematischen Inhalt adäquat beschreiben (u.a. BENDER 1991; VOM HOFE 1995, 128; MALLE 2004; JORDAN 2006; KLEINE 2007). Dabei sollte „“normativ“ [...] nicht etwa im Sinne von „dogmatisch“ [...] [verstanden werden]; Grundvorstellungen als “normative Kategorie“ beschreiben vielmehr Erklärungsmodelle, die aus sachlichen, didaktischen oder psychologischen Überlegungen hergeleitet wurden und die der Schüler i.S. eines adäquaten Begriffsverständnis ausbilden *soll*“ (VOM HOFE 1995, 23 ff. – Hervorhebung im Original), wobei in der vorliegenden Arbeit das „soll“ vielmehr als ‚*kann*' verstanden wird. Daher wird in den folgenden Kapiteln lediglich von einer *theoretischen Perspektive* gesprochen.

Doch wie genau die „sachlichen, didaktischen oder psychologischen Überlegungen“ zur theoretischen Analyse von Grundvorstellungen aussehen, darauf lassen sich in der Literatur nur sehr vereinzelte Hinweise finden. BENDER (1991, 56) schreibt in diesem Zusammenhang, dass sich die Analyse von Grundvorstellungen aus theoretischer Perspektive aufgrund ihrer charakteristischen „Vagheit“ einer „Algorithmisierung“ entzieht.

Das Ziel solcher Grundvorstellungsanalysen aus theoretischer Perspektive kann beispielsweise sein, adäquate und tragfähige Kataloge von Grundvorstellungen für mathematische Inhalte zu bestimmen (vgl. z.B. PREDIGER 2010, 12). Dies ist sicherlich noch nicht für jeden mathematischen Inhalt geschehen (vgl. PREDIGER 2010, 12), doch es lassen sich bezogen auf einzelne Inhaltsbereiche der Mathematik zahlreiche Beispiele finden. In der Grundschulmathematik beispielsweise zu den vier Grundrechenarten: So beschreibt zum Beispiel KUHNKE (2013, 39 u.a. in Anlehnung an SCHMIDT & WEISER 1993 und

[13] In der Vergangenheit wurde das Grundvorstellungskonzept dabei vorwiegend aus normativ-theoretischer Perspektive genutzt (VOM HOFE 1995) und damit schwerpunktmäßig der ‚Soll-Zustand' betont.

KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007) die Grundvorstellungen der Multiplikation mit „Vervielfachung/Vereinigung" (zeitlich-sukzessiv, räumlich-simultan), „Vergrößerung: multiplikative Veränderung eines Objektes" und „Kombinatorik: kartesisches Produkt von Mengen, welches die Anzahl von Kombinationsmöglichkeiten beschreibt." Aber auch zu Inhalten des Mathematikunterrichts der Sekundarstufen finden sich zahlreiche Beispiele von Grundvorstellungsanalysen aus theoretischer Perspektive: zum Beispiel bei MALLE (2004) und VAN GALEN ET AL. (2008) zum Inhaltsbereich der Brüche, bei DANCKWERTS & VOGEL (2006) zur Analysis oder bei BENDER (1991) zur Integralrechnung.

Die Grundvorstellungskataloge können dann auf nicht immer trennscharf zu unterscheidenen und sich gegenseitig beeinflussenden Ebenen genutzt werden[14] (vgl. dazu PREDIGER 2010):

- Curriculumsentwicklung[15]: Auf dieser Ebene werden die Grundvorstellungskataloge genutzt, um Lernziele zu formulieren. Diese können sich beispielsweise in Lehrplänen, Schulbüchern und weiteren unterrichtspraktischen Anregungen niederschlagen.
- Aufgabenanalyse/Aufgabenkonstruktion: Auf dieser Ebene, welche natürlich eng mit der Curriculumsentwicklung verbunden ist, werden Grundvorstellungskataloge genutzt, um konkrete Aufgabenstellungen dahingehend zu analysieren, welche Grundvorstellung sie ansprechen oder Aufgaben bezogen auf bestimmte Grundvorstellungen zu konstruieren. Diese Aufgaben können dann zum Beispiel zur Curriculumsentwicklung oder aber zur Konstruktion von empirischen Untersuchungen genutzt werden (vgl. Kapitel 4.2.2.2).
- Deskription von individuellen Grundvorstellungen: Auf dieser Ebene können die Grundvorstellungskataloge genutzt werden, um individuelle Grundvorstellungen von Lernenden zu kategorisieren, indem die – theoretisch hergeleiteten Grundvorstellungen den individuellen Grundvorstellungen gegenübergestellt werden (vgl. Kapitel 4.4).

1.3.2 Deskriptive Perspektive

Aus deskriptiver Perspektive geht es darum die Frage zu klären, welche Grundvorstellungen ein Individuum zu einem bestimmten mathematischen Inhalt in einer spezifischen Situation besitzt beziehungsweise aktivieren kann (u.a. VOM HOFE 1995, 128 f.; VOM HOFE 1996, 8; KLEINE 2007; WARTHA 2007a;

[14] Genau durch das Nutzen des Grundvorstellungskonzept auf verschiedenen Ebenen entfaltet es nach VOM HOFE (1996, 8) seine „konstruktive" Kraft.

[15] PREDIGER (2010, 12) beschreibt „Grundvorstellungen [zwar] als präskriptives Konstrukt in der Curriculumsentwicklung". Im Sinne der Ausführungen anderer Autoren (u.a. VOM HOFE 1995, 1996; WARTHA 2007b) wird die Curriculumsentwicklung jedoch in der vorliegenden Arbeit der theoretischen Perspektive zugeordnet.

WARTHA & SCHULZ 2011). Dazu können zum einen, wie bereits oben erwähnt, die zuvor theoretisch hergeleiteten Grundvorstellungen – welchen einen mathematischen Inhalt adäquat beschreiben – den individuellen Grundvorstellungskonstruktionen der Lernenden gegenübergestellt werden, um so die individuellen Grundvorstellungen der Lernenden zu kategorisieren (vgl. Kapitel 4.4): so beispielweise WARTHA (2005; 2007b) bei Aufgaben zur multiplikativen Anteilsbildung oder PREDIGER (2008) zur Multiplikation von Brüchen. Somit können Aussagen getroffen werden, ob ein Individuum eine bestimmte Grundvorstellung in einer bestimmten Situation besitzt beziehungsweise aktivieren kann. Um jedoch auch darüber hinaus von den theoretisch hergeleiteten Grundvorstellungen abweichende, individuelle (Grund-) Vorstellungen in den Blick nehmen zu können, sollte von offeneren Vorgehensweisen der Analyse Gebrauch gemacht werden (vgl. Kapitel 4.4).

Zur Erhebung der Daten bieten sich aus deskriptiver Perspektive verschiedene Möglichkeiten an. Nach KLEINE (2007, 184 f.) können „Verschriftlichungsprozesse“, zum Beispiel auf der „Ebene von Übersetzungsprozessen zwischen realen Situationen und mathematischen Modellen“ (vgl. dazu auch PREDIGER 2010) oder „Interviewstudien“, in denen sich „die Denkstrukturen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben [sehr detailliert] erfassen lassen, genutzt werden. Dabei betont er, dass die Analyse der Grundvorstellungen in periodisch angelegten Interviewstudien detaillierter möglich ist (vgl. Kapitel 4).

1.3.3 Weitere Perspektiven

Eine weitere Perspektive auf das Grundvorstellungskonzept wird bei KLEINE (2007) beschrieben. Er betrachtet Grundvorstellungen unter einem sogenannten „segmentiven Aspekt“. Dabei liegt der Fokus nicht, wie häufig bei der deskriptiven Perspektive, auf dem einzelnen Individuum, sondern auf einer Gruppe von Schülerinnen und Schülern. Dies ist mit dem Ziel verbunden, Aussagen über die Gesamtheit einer Stichprobe zu treffen. Beispiele lassen sich dazu unter anderem bei BLUM ET AL. (2005) und BLUM ET AL. (2004) finden, die „Grundvorstellungen als empirische Kategorie für quantitative Studien“ nutzen. Dabei konnten sie zum Beispiel nachweisen, „dass die in stoffdidaktischen Analysen hervorgehobene Rolle von Grundvorstellungen offenbar auch eine quantitative empirische Entsprechung hat“ (BLUM ET AL. 2005, 106) und weiterhin, „dass die normativ definierte Variable „Grundvorstellungsintensität“ in Regressionsanalysen zu *Leistungsstudien* wesentlich zur Varianzaufklärung der empirischen Schwierigkeit bei begrifflichen und mathematischen Modellierungsaufgaben beiträgt“ (KLEINE 2007, 185 unter Bezug auf BLUM ET AL. 2004 – Hervorhebungen im Original). PREDIGER (2010, 14 – Hervorhebungen im Original) beschreibt in diesem Zusammenhang Grundvorstellungen als „Prädikatoren zur bereichs**spezifischen** [und „bereichs**übergreifenden**“] Vorhersage von Aufgabenschwierigkeiten bei Mathematisierungsaufgaben“.

Weitere Perspektiven, welche bereits an einzelnen Stellen in der vorliegenden Arbeit Erwähnung fanden, ist zum einen die präskriptive Perspektive (vgl. Kapitel 1.2), welche sicherlich nicht trennscharf von der theoretischen Perspektive unterschieden werden kann (vgl. dazu auch die Anmerkung zur Curriculumsentwicklung in Kapitel 1.3.1) und zum anderen die konstruktive Perspektive, welche nach VOM HOFE (1996, 8) dann eingenommen wird, wenn konkrete didaktische Umsetzungen zum Aufbau von adäquaten Grundvorstellungen beschrieben werden.

1.4 Zusammenfassung

In den drei vorherigen Kapiteln wurde den Fragen nachgegangen, was unter Grundvorstellungen zu verstehen ist, welche Bedeutung Grundvorstellungen im Lernprozess zukommt (Kapitel 1.1), wie sich Grundvorstellungen im Lernprozess ausbilden und (weiter-) entwickeln (Kapitel 1.2) und welche Rolle das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik spielt (Kapitel 1.3). Im Folgenden werden die zentralen Aussagen der drei vorherigen Kapitel zusammengefasst.

In Kapitel 1.1 wurde herausgestellt, dass Grundvorstellungen, welche in der vorliegenden Arbeit synonym zu dem aus der Kognitionspsychologie stammenden Begriff der mentalen Modelle genutzt werden, mentale Repräsentationen eines Individuums beschreiben. Sie dienen dazu zwischen Darstellungen respektive Repräsentationen – seien es mentale oder konkret-beobachtbare – zu übersetzen und Aufgaben und Probleme (mental) zu lösen, wobei die einer Darstellung respektive Repräsentation zugrundeliegende Grundvorstellung genau in den Übersetzungsprozessen rekonstruiert werden kann. Innerhalb einer bestimmten Grundvorstellung kann dann auf unterschiedliche Weisen gehandelt werden. Somit können innerhalb einer Grundvorstellung verschiedene Vorgehensweisen zum Tragen kommen. Eine weitere Bedeutung, welche eng mit den oben Erwähnten verbunden ist, ist die verständniskonstituierende Rolle von tragfähigen Grundvorstellungen im Lernprozess.

In Kapitel 1.2 wurde beschrieben, dass Grundvorstellungen einer ständigen Bildung, Veränderung, Reorganisation und Neuinterpretation unterworfen sind, wobei im besten Fall ein immer leistungsfähigeres System von Grundvorstellungen zu bestimmten mathematischen Inhalten entsteht. In der Literatur wird dieser Prozess aus mindestens zwei, sich gegenseitig bedingenden Perspektiven beschrieben. Auf der einen Seite aus einer eher deskriptiven Perspektive, bei der das Ziel verfolgt wird, den Prozess der Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen besser zu verstehen. Um diesen Prozess zu beschreiben wird dabei häufig der Begriff der „Verinnerlichung“ oder „Interiorisierung“ genutzt. Auf der anderen Seite wird die Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung aus einer eher präskriptiven Perspektive betrachtet. Dabei werden zumeist Tätigkeiten der Lernenden, aber auch der Lehrenden, beschrieben, welche dazu dienen sollen Grundvorstellungsentwicklungen anzuregen und zu unterstützen. WARTHA beschreibt beispielsweise neben zentralen, allgemeinen Tätigkeiten zum Ausbilden von Grundvorstellungen (WARTHA 2007b) konkrete Förderhinweise zur Unterstützung des Prozesses der Verinnerlichung von Grundvorstellungen in einem Vierphasenmodell (WARTHA & SCHULZ 2011). Auch PREDIGER (2010) beschreibt vier Stufen zur Ausbildung und (Weiter-) Entwicklung von Grundvorstellungen im Lernprozess, welche vom Aufbau von Grundvorstellungen ausgehend von den individuellen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler bis zur Entwicklung und Anwendung des Kalküls reichen. VOM HOFE (1995) beschreibt hingegen den Prozess auf zwei Ebenen. Zum einen bezieht er sich dabei auf die Aktivitäten der Lehrenden, durch die passende Sachzusammenhänge zum Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen identifiziert werden sollen. Zum anderen bezieht er sich auf die Aktivitäten der Lernenden, mit dem Ziel tragfähige Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten aufzubauen.

In Kapitel 1.3 wurde herausgestellt, dass das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik sowohl theoretisch als auch deskriptiv genutzt wird. Dabei wird zum einen der Frage nachgegangen, welche Grundvorstellungen Schülerinnen und Schüler ausbilden sollen beziehungsweise können (theoretische Perspektive), zum anderen wird der Fokus auf die individuellen Grundvorstellungen respektive mentalen Modelle der Lernenden gerichtet (deskriptive Perspektive). Aus theoretischer Perspektive geht es darum die Frage zu klären, welche Grundvorstellungen einen mathematischen Inhalt adäquat beschreiben. Das Ziel solcher Grundvorstellungsanalysen aus theoretischer Perspektive kann beispielsweise sein, adäquate und tragfähige Kataloge von Grundvorstellungen für mathematische Inhalte zu bestimmen, die dann wiederum zur Curriculumsentwicklung, zur Aufgabenanalyse beziehungsweise Aufgabenkonstruktion und zur Deskription von individuellen Grundvorstellungen genutzt werden können. Aus deskriptiver Perspektive geht es darum, die Frage zu klären, welche Grundvorstellungen ein Individuum zu einem bestimmten mathematischen Inhalt in einer spezifischen Situation besitzt beziehungsweise aktivieren kann. Zur Datenerhebung bieten sich dabei verschiedene Möglichkeiten an (z.B. Schriftliche Tests oder Interviews). Eine weitere Perspektive, auf das Grundvorstellungskonzept ist die „segmentive“ Perspektive bei der der Fokus nicht, wie häufig bei der deskriptiven Perspektive, auf dem einzelnen Individuum liegt, sondern Aussagen über einer gesamte Stichprobe getroffen werden.

2 Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion aus theoretischer Perspektive – Stoffdidaktische Analysen

In Kapitel 1 wurde zunächst losgelöst vom Untersuchungsgegenstand der Subtraktion den Fragen nachgegangen, was unter Grundvorstellungen zu verstehen ist, welche Bedeutung Grundvorstellungen im Lernprozess zukommt (Kapitel 1.1), wie sich Grundvorstellungen im Lernprozess ausbilden und (weiter-) entwickeln (Kapitel 1.2) sowie welche Rolle das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik spielt (Kapitel 1.3). Unter anderem wurde in Kapitel 1.3 herausgestellt, dass das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik sowohl theoretisch als auch deskriptiv genutzt wird. Dabei wird zum einen der Frage nachgegangen, welche Grundvorstellungen Schülerinnen und Schüler ausbilden sollen beziehungsweise können (theoretische Perspektive), zum anderen wird der Fokus auf die individuellen Grundvorstellungen respektive mentalen Modelle der Lernenden gerichtet (deskriptive Perspektive).

In diesem Kapitel soll zunächst die theoretische Perspektive bezüglich der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion Beachtung finden, wobei es dabei – wie bereits erwähnt – nicht darum geht, zu klären, welche Grundvorstellungen und Vorgehensweisen entwickelt werden sollten. Vielmehr soll herausgearbeitet werden, welche Grundvorstellungen und Vorgehensweisen entwickelt werden *können*. Dies ist zum einen mit dem Ziel verbunden, zu analysieren, was allgemein unter der Subtraktion beziehungsweise Subtraktionsproblemen verstanden werden kann, sowie mögliche Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen bei der Subtraktion zu identifizieren. In Kapitel 2.1 wird diesbezüglich zunächst der Forschungsstand beschrieben. Dabei werden in Kapitel 2.1.1 Analysen der syntaktischen und semantischen Struktur der Subtraktion dargestellt. Darauf aufbauend werden in Kapitel 2.1.2 die in der Literatur beschriebenen Grundvorstellungen der Subtraktion sowie in Kapitel 2.1.3 die in der Literatur als mögliche Lösungswege von Subtraktionsproblemen beschriebenen Vorgehensweisen dargestellt. In Kapitel 2.2 werden anschließend weiterführende stoffdidaktische Überlegungen des Autors entfaltet. Dabei soll herausgearbeitet werden, was in der vorliegenden Arbeit unter Subtraktionsproblemen (Kapitel 2.1.1) sowie Grundvorstellungen (Kapitel 2.2.2) und darauf aufbauenden Vorgehensweisen (Kapitel 2.2.3) verstanden wird. Kapitel 2.3 fasst abschließend die wichtigsten Punkte des gesamten Kapitels zusammen.

2.1 Forschungsstand

Möchte man die in der Literatur beschriebenen Möglichkeiten zur Lösung von Subtraktionsproblemen analysieren und klassifizieren, sollte zunächst geklärt werden, was unter Subtraktionsproblemen und damit verbunden unter der Subtraktion im Allgemeinen verstanden werden kann. Dieser Frage wird in Kapitel 2.1.1 nachgegangen. Darauf aufbauend werden in Kapitel 2.1.2 die in der Literatur beschriebenen Grundvorstellungen der Subtraktion dargestellt. In Kapitel 2.1.3 werden schließlich die möglichen Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen charakterisiert, bevor in Kapitel 2.1.4 die zentralen Aussagen dieses Kapitels zusammengefasst werden.

2.1.1 Zur Syntax und Semantik der Subtraktion

Bevor in Kapitel 2.1.2 und 2.1.3 die Grundvorstellungen der Subtraktion sowie Möglichkeiten zur Lösung von Subtraktionsproblemen dargestellt werden, soll in diesem Kapitel zunächst geklärt werden, was unter Subtraktionsproblemen beziehungsweise allgemeiner der Subtraktion verstanden werden kann. Dabei wird sowohl die syntaktische (Kapitel 2.1.1.1) als auch die semantische Struktur (Kapitel 2.1.1.2) der Subtraktion näher beschrieben.[16]

2.1.1.1 Die syntaktische Struktur der Subtraktion

Nach JENSEN (2003, 47 ff.) ist die Subtraktion als Umkehroperation der Addition definiert.[17] Die Umkehrung kann dabei auf zwei Wegen erfolgen. Zum einen als „comparative subtraction“, zum anderen als „take-away subtraction“. Beide Wege sind möglich, da die Addition kommutativ ist. JENSEN (2003, 47 f. – Hervorhebungen im Original) führt dazu aus:

> „**Definition 2.15** (Comparative subtraction). If a and b are wohle numbers and if $b \leq a$, then $a - b$ is that hole number c for which $a = b + c$.
>
> In words, $7 - 3$ is what must be added to 3 to get 7. It is the amount 7 is larger than 3. To calculate $7 - 3$, start at 3 and count {4, 5, 6, 7} until you reach 7. There are $7 - 3$ numbers in this set.
> **Definition 2.16** (Take-away subtraction). If a and b are wohle numbers and if $b \leq a$, then $a - b$ is that hole number c for which $a = c + b$.
> In words, $7 - 3$ is the number of elements remaining after 3 elements are taken away from a set of 7 elements. Add back the 3 removed elements and we have again a set of $(7 - 3) + 3$ elements.

---

16 Diese Unterscheidung bei der Analyse der Grundrechenarten findet bei einer Vielzahl von Autoren Beachtung (vgl. u.a. CARPENTER & MOSER 1982; DE CORTE & VERSCHAFFEL 1987; FUSON1992b; RADATZ ET AL. 1996, 77 ff.).

17 Vgl. dazu auch u.a. FREUDENTHAL 1983, 106 f.; HASEMANN 2007, 101; WITTMANN 2010, 35 ff.

> The statement $a - b$ is read a minus b and the result is called the difference. The number a is called the minuend and the number b is called the subtrahend. [...]
> **Theorem 2.18**. *If a and b are whole numbers and $b \leq a$, then $a - b$ in comparative subtraction is equal to $a - b$ in take away subtraction.*
>
> **Proof**. If $c = a - b$ for comparative subtraction, then $b + c = a$. But $b + c = c + b$, by the commutative property of addition, and therefore $c + b = a$ and $c = a - b$ for take-away subtraction as well.“

Diese Sichtweise auf die Subtraktion hat sich auch in der mathematikdidaktischen beziehungsweise psychologischen Literatur niedergeschlagen. So unterscheidet beispielsweise USISKIN (2008) zwei Modelle der Subtraktion, das sogenannte „take-away model“ und das „comparison model“[18], wobei beim erstgenannten Modell das Ergebnis der Subtraktion als *Rest* und beim zweitgenannten Modell als *Unterschied* repräsentiert ist (vgl. auch FREUDENTHAL 1983, 106 f.; USISKIN & BELL 1983; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS 2009; SELTER, ET AL. 2012). Diese Charakteristika der beiden Modelle werden dabei besonders durch Darstellungen am leeren Zahlenstrahl deutlich (JENSEN 2003, 50) (vgl. Abb. 2-1). JENSEN (2003, 50) schreibt in diesem Zusammenhang, dass es manchmal durchaus schwierig ist, die beiden Modelle der Subtraktion zu unterscheiden, „their representations on the number line, however, are very different.“

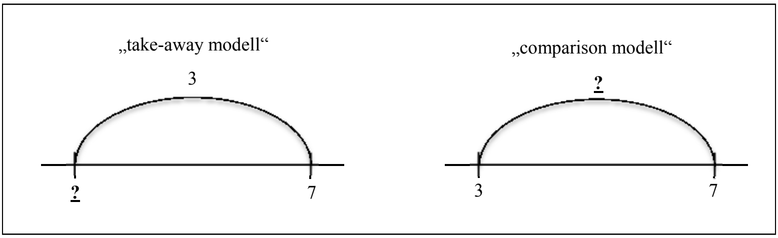


Abbildung 2-1: Die zwei Modelle der Subtraktion – exemplarisch dargestellt an der Aufgabe 7-3=?

Doch was kann nun unter Subtraktionsproblemen verstanden werden? RADATZ ET AL. (1996, 77 ff.) beschreiben im Zuge ihrer syntaktischen Analyse der Addition und Subtraktion jeweils drei „Typen von Additions- und Subtraktionsaufgaben“ (vgl. Abb. 2-2), welche dadurch zustande kommen, dass die gesuchte Zahl entweder das „Ergebnis“ oder „die Veränderung“ oder die Ausgangslage“ darstellt, wobei Subtraktionsaufgaben dadurch gekennzeichnet sind, dass sie ein Minuszeichen (-) beinhalten.

---

18 Manche Autoren nutzen in diesem Zusammenhang auch „taking away“ und „determining the difference“ als Bezeichnungen für die beiden Modelle der Subtraktion (z.B. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS 2009; SELTER ET AL. 2012).

a + b = □	a - b = □
a + □ = b	a - □ = b
□ + a = b	□ - a = b

Abbildung 2-2: Die syntaktische Struktur der Addition und Subtraktion (nach RADATZ ET AL. 1996, 77)

CAMPBELL (2008, 1096) beschreibt hingegen, dass Subtraktionsprobleme nicht zwangsläufig vom Minuszeichen (-) abhängen. Vielmehr sieht er in allen Äquivalenzumformungen der Gleichung a-b=? Subtraktionsprobleme und damit die Operation der Subtraktion. Dadurch ergeben sich für ihn auf formaler Ebene vier verschiedene Problemstellungen der Subtraktion:

a-b=?,

b+?=a,

a-?=b,

?+b=a.

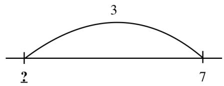
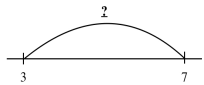
Die zwei Subtraktionsprobleme b+?=a und ?+b=a sind dabei im sogenannten Additionsformat – also mit Additionszeichen (+) – gestellt, wohingegen die Subtraktionsprobleme a-b=? und a-?=b im sogenannten Subtraktionsformat – also mit Subtraktionszeichen (-) – gestellt sind. Er führt dazu aus:

> „it is important to distinguish between arithmetic operation and arithemtic format. The subtraction operation is defined by the formula *minuend* (*c*) - *subtrahend* (*b*) = *difference* (a*)*. Therefore, a problem that presents *c* and *b* requires answer *a* is, by definition, a subtraction problem. Thus, both 13-6=_ and 6+_=13 are subtraction problems, but the former is a subtraction problem in subtraction format [...], whereas the latter is subtraction in addition format“. (CAMPBELL 2008, 1069 – Hervorhebungen im Original)[19]

Den Zusammenhang zwischen den vier beschriebenen Subtraktionsproblemen nach CAMPBELL (2008) sowie den zwei Modellen der Subtraktion sehen SELTER ET AL. (2012, 391) in ihrer längsschnittlichen, mathematikdidaktischen Analyse der beiden Modelle der Subtraktion darin, dass die beiden Subtraktionsprobleme a-b=? und ?+b=a dem „take-away model“, die Subtraktionsprobleme b+?=a und a-?=b hingegen dem „comparison model“ zugeordnet werden können (vgl. Tab. 2-1).

[19] Diese Ausführungen bezieht CAMPBELL (2008, 1096) auch analog auf die Operation der Addition:
„Addition is defined by the formular *augend* (*a*) + *addend* (*b*) = *sum* (*c*). A problem that presents *a* and *b* and requires answer *c* is therefore an addition problem. Consequently, 7+6=_ and _-6=7 are both addition problems. The former is addition in additon format [...], and the latter is addition in subtraction format“.

Tabelle 2-1: Der Zusammenhang von Operation, Format und dem Modell der Subtraktion (in Anlehnung an SELTER ET AL. 2012, 391[20])

Operation	Subtraktion	Subtraktion
Subtraktionsformat	7-3=?	7-?=3
Additionsformat	?+3=7	3+?=7
Veranschaulichung am leeren Zahlenstrahl		
Modell der Subtraktion	„Take-away“	„Comparison"

Diese Sichtweise auf die Subtraktion, also sowohl bezogen auf die beiden unterschiedlichen Modelle der Subtraktion („take-away“ bzw. „comparison“) als auch auf die Ausführungen zu den vier möglichen Subtraktionsproblemen nach CAMPBELL (2008), soll auch grundlegend für die vorliegende Arbeit sein und stellt in Kapitel 2.2 den Ausgangspunkt weiterführender stoffdidaktischer Überlegungen des Autors dar.

2.1.1.2 Die semantische Struktur der Subtraktion

Eine Analyse der semantischen Struktur der Subtraktion gestaltet sich im Gegensatz zur Analyse der syntaktischen Struktur als ungleich komplexer (vgl. u.a. SELTER ET AL. 2012, 390) und wird in der Literatur eigentlich durchgängig in Zusammenhang mit der Addition betrachtet (vgl. u.a. FUSON 1992b; RADATZ ET AL. 1996, 77 ff.). Dem folgt auch die Darstellung im Folgenden.

FUSON (1992b, 244 ff.) unterscheidet in Anlehnung an CARPENTER & MOSER (1982) und RILEY ET AL. (1983) zunächst vier grundlegende Sachsituationen der Addition und Subtraktion: „Compare“, „Combine“, „Change Add To“ und „Change Take From“ (vgl. Abb. 2-3). Weiterhin führt sie aus:

> „When there are *two* quantities, one can compare them or combine them; the Compare and Combine situations are *binary* operations, in which two numbers are operated on to produce a unique third number. When there is only *one* quantity, one can add to that quantity or take from that quantity; the Change Add To and Change Take From situations are *unary* operations, in which one number is operated on to produce a unique third number“. (FUSON 1992b, 244 – Hervorhebungen im Original)

Ein weiteres Kriterium, nach dem die Sachsituationen der Addition und Subtraktion differenziert werden können, ist die Unterscheidung der Situationen in „static“ beziehungsweise „dynamic“:

---

[20] Im Original benennen die Autoren die beiden Modelle als „taking away“ und „determining the difference“.

„The distinction between static situations – of related quantities that do not change – and active situations – in which quantities do change – has been made almost in all category systems. Most category systems collapse this static/active distinction into binary/unary distinction, yieldig only the static binary Combine and Compare categories and the active unary Change Add To and Change From categories. However, active binary forms Combine and Compare problems can be constructed; the actions in these problems cue solution procedures, so they are easier than the static forms. Active binary Compare problems, called Equalize problems, are combinations of Compare and Change problems in which the difference between two quantities is expressed as unary Change Add To or Change Take From actions [...] rather than as a static state as in Compare problems.“ (FUSON 1992b, 244)

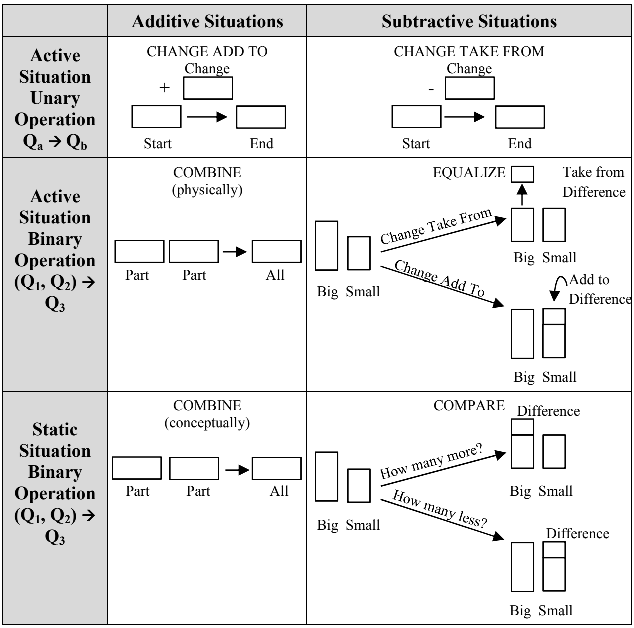


Abbildung 2-3: Übersicht über die semantische Struktur der Addition und Subtraktion (nach FUSON 1992b, 245)

Unterscheidet man schlussendlich nun auch noch welcher Wert respektive welche Menge (Ergebnis, Veränderung, Ausgangslage) in den einzelnen Sachsituationen gesucht ist, ergeben sich nach FUSON (1992b) 22 verschiedene additive beziehungsweise subtraktive Sachsituationen (vgl. Tab. 2-2[21]).

[21] Die meisten der Beispiele stammen dabei aus NESHER & TEUBAL (1975); CARPENTER & MOSER (1982); CARPENTER & MOSER (1983); BRIARS & LARKIN (1984); FUSON & WILLIS (1986); THOMSON & HENDRICKSON (1986); DE CORTE & VERSCHAFFEL (1987); RILEY & GREENO (1988).

Tabelle 2-2: Übersicht über die verschiedenen Sachsituationen der Addition und Subtraktion (nach FUSON 1992b, 245)

Additive Situations	**Subtractive Situations**	
Change Add To	Change Take From	
Missing End Pete had 3 apples. Ann gave Pete 5 more apples. How many apples does Pete have now?	*Missing End* Joe had 8 marbles. Then he gave 5 marbles to Tom. How many marbles does Joe have now?	
Missing Change Kathy had 5 pencils. How many more pencils does she have to put with them so she has 7 pencils altogether?	*Missing Change* Fred had 11 pieces of candy. He lost some of the pieces. Now he has 4 pieces of candy. How many pieces of candy did Fred lose?	
Missing Start Bob got 2 cookies. Now he has 5 cookies. How many cookies did Bob have in the beginning?	*Missing Start* Karen had some word problems. She used 22 of them in this table. She still has 79 word problems. How many word pro-blems did she have to start with?	
Combine physically	Equalize	
	Add to	Take From
Missing all Sara has 6 sugar donuts and 9 plain donuts. Then she puts them all on a plate. How many donuts are there on the plate?	*Difference Unknown* Susan has 8 marbles. Fred has 5 marbles. How many more marbles does Fred have to get to have as many marbles as Susan has?	*Difference Unknown* Jane has 7 dolls. Ann has 3 dolls. How many dolls does Jane have to lose to have as many as Ann?
Missing Part Joe and Tom have 8 marbles when they put all their marbles together. Joe has 3 marbles. How many marbles does Tom have?	*Difference Sentence Cues Solution* There were 6 boys on the soccer team. 2 more boys joined the team. Now there is the same number of boys and girls on the team. How many girls are on the team?	*Difference Sentence Cues Solution* There were 11 glasses on the table. I put 4 of them away so there would be the same number of glasses as plates on the table. How many plates were on the table?
	Difference Sentence Cues Opposite Solution Procedure Connie has 13 marbles. If Jim wins 5 marbles, he will have the same number of marbles as Connie. How many marbles does Jim have?	*Difference Sentence Cues Opposite Solution Procedure* There were some girls in the dancing group. 4 of them sat down so each boy would have a partner. There are 7 boys in the dancing group. How many girls are in the dancing group?

Additive Situations	**Subtractive Situations**	
Combine conceptually	Compare	
Missing All There are 6 boys and 8 girls on the soccer team. How many children are on the team?	*Difference Unknown* Joe has 3 balloons. His sister Connie has 5 balloons. How many more balloons does Connie have than Joe?	*Difference Unknown* Janice has 8 sticks of gum. Tom has 2 sticks of gum. Tom has how many sticks less than Janice?
Missing Part Brian has 14 flowers. 8 of them are red and the rest are yellow. How many yellow flowers does Brian have?	*Difference Sentence Cues Solution* Luis has 6 pet fish. Carla has 2 more fish than Luis. How many fish does Carla have?	*Difference Sentence Cues Solution* The milkman brought on Sunday 11 bottles of milk and on Monday he brought 4 bottles less. How many bottles did he bring on Monday?
	Difference Sentence Cues Opposite Solution Procedure Maxine has 9 sweaters. She has 5 sweaters more than Sue. How many sweaters does Sue have?	*Difference Sentence Cues Opposite Solution Procedure* Jim has 5 marbles. He has 8 fewer marbles than Connie. How many marbles does Connie have?

Bezogen auf die semantische Struktur der Subtraktion werden demnach von FUSON (1992b) 15 Sachsituationen, welche der Subtraktion zugeordnet werden können, identifiziert: drei „Change Take From“-Situationen, drei „Equalize – Add To“-Situationen, „Equalize – Take From“-Situationen sowie sechs „Compare-Situationen“. Diese 15 Sachsituationen stellen demnach nach FUSON (1992b) mögliche Subtraktionsprobleme auf semantischer Ebene dar.

In der deutschsprachigen Literatur findet man bei RADATZ ET AL. (1996, 77 ff.; in Anlehnung an CARPENTER & MOSER 1982 und FUSON 1992a) im Handbuch für den Mathematikunterricht des 1. Schuljahres eine ausführliche Analyse der semantischen Struktur der Addition und Subtraktion (vgl. Tab. 2-3), wobei von den Autoren nicht explizit ausgeführt wird, welche Sachsituationen additive und welche Sachsituationen subtraktive darstellen. Sie arbeiten dabei insgesamt 20 verschiedene Sachsituationen der Addition und Subtraktion heraus.

Tabelle 2-3: „Die semantische Struktur erster Additions- und Subtraktionsaufgaben" (nach RADATZ ET AL. 1996, 78)

<table>
<tr><th rowspan="4"></th><th colspan="6">Dynamische Situationen</th><th colspan="6" rowspan="3">Statische Situationen</th></tr>
<tr><td colspan="6">Verändern</td></tr>
<tr><td colspan="3">ansteigend</td><td colspan="3">abfallend</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dazugeben</td><td colspan="3">Weggeben</td><td colspan="6">Vereinigen (Teil-Teil-Ganzes)</td></tr>
<tr><td>2 Mengen sind Teilmen-gen einer dritten Menge.</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td colspan="3">Das Ganze ist unbekannt.</td><td colspan="3">Ein Teil ist unbekannt.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Die Mengen sind disjunkt.</td><td colspan="3" rowspan="2">Ausgleich nach oben</td><td colspan="3" rowspan="2">Ausgleich nach unten</td><td colspan="6">Vergleichen</td></tr>
<tr><td colspan="3">mehr</td><td colspan="3">weniger</td></tr>
<tr><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td></tr>
</table>

Diese charakterisieren RADATZ ET AL. (1996, 77ff.) hinsichtlich ähnlicher Kriterien wie FUSON (1992b):

- „Dynamik der Situation (dynamisch vs. statisch)"
- „Beziehung der Mengen untereinander (Teil-Teil-Ganzes vs. disjunkte Mengen)"
- „Richtung der Veränderung (ansteigend vs. abfallend)" [22]
- „Gesuchter Wert (Ergebnis oder Veränderung oder Ausgangslage gesucht)"

Im Zuge der Überarbeitung der Handbücher für den Mathematikunterricht (SCHIPPER 2009) stellt sich die Analyse der semantischen Struktur der Sub-

[22] „Dieses Kriterium ist im Sinne einer echten Veränderung nur auf dynamische Situationen [...] anwendbar, weil es bei den statischen keine Veränderung gibt. Die Richtung der Veränderung kann ansteigend (Zu den 3 Kindern kommen 4 dazu.) oder abfallend (Von 5 Keksen werden 3 aufgegessen.) sein. Beim statischen Vergleich kann allerdings die Berechnung des Unterschieds mit einer Frage nach „mehr" oder „weniger" angeregt werden." (RADATZ ET AL. 1996, 78)

traktion für SCHIPPER (2009, 98 ff.; in Anlehnung an RADATZ 1983; RILEY ET AL. 1983) im Detail jedoch etwas anders dar als noch im Jahr 1996. Es werden nach wie vor die „Situationstypen" „Verändern", „Verbinden", „Vergleichen" und „Aus- bzw. Angleichen" unterschieden, wobei jetzt eine konkrete Zuordnung zur syntaktischen Struktur der Addition beziehungsweise der Subtraktion in Form von Rechensätzen gegeben ist. Weiterhin werden nicht mehr 20 „Situationstypen", sondern lediglich 16 Typen von additiven beziehungsweise subtraktiven Kontexten unterschieden (vgl. Tab. 2-4).

Tabelle 2-4: „Typen von Rechengeschichten" (nach SCHIPPER 2009; 100)

Typ	Beispiel
1. Verändern (Change)	
Ergebnis unbekannt a + b = x a - b = x	 Maria hatte 3 Murmeln. Dann gab ihr Hans 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt? Maria hatte 6 Murmeln. Dann gab sie Hans 4 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?
Veränderung unbekannt a + x = b a - x = b	 Maria hatte 2 Murmeln. Dann gab ihr Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 9 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans ihr gegeben? Maria hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat sie Hans gegeben?
Ausgangsposition unbekannt x + a = b x - a = b	 Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab ihr Hans 3 Murmeln. Jetzt hat Maria 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang? Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab sie Hans 2 Murmeln. Jetzt hat Maria 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?
2. Verbinden (Combine)	
Vereinigung unbekannt a + b = x	Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln haben die beiden zusammen?
Rest/Teil unbekannt a + x = b bzw. a - b = x	 Maria und Hans haben zusammen 8 Murmeln. Maria hat 7 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?
3. Vergleichen (Compare)	
Unterschied unbekannt	Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans mehr als Maria? Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans weniger als Maria?
Vergleichsgröße unbekannt	Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 4 Murmeln mehr als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans? Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 3 Murmeln weniger als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?
Ausgangsgröße unbekannt	Maria hat 9 Murmeln. Sie hat 4 Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?

Typ	Beispiel
	Maria hat 4 Murmeln. Sie hat 3 Murmeln weniger als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?
4. Aus-/Angleichen (Equalizing)	
a + x = b a - x = b	Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln muss Maria noch bekommen, damit sie genau so viele Murmeln hat wie Hans? Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln muss Maria abgeben, damit sie genau so viele hat wie Hans?

Eine weitere Systematisierung der semantischen Struktur der Subtraktion findet sich in der deutschsprachigen Literatur bei PADBERG (2005, 104 ff.). Dieser beschreibt Sachsituationen, welche „einheitlich durch eine einzige Subtraktionsgleichung, wie z.B. 7-3=4, beschrieben werden können". Auch er unterscheidet dabei „zwischen *dynamischen* [...] und *statischen* [...] Situationen und auch danach, ob das *Ergebnis* [...], die *Ausgangsgröße* oder eine Teilgröße [...] oder die *Veränderung* bzw. der Unterschied [...] gesucht wird" (PADBERG 2005, 106 – Hervorhebungen im Original). Dadurch ergeben sich für ihn die vier „subtraktiven Sachsituationen" (PADBERG 2005, 106):

- „Abziehen" (z.B. Anne hat 7 Bonbons. Sie gibt ihrer Freundin 3 Bonbons. Wie viele Bonbons bleiben ihr noch?"),
- „Ergänzen" (z.B. „Anne hat 3 Bonbons. Sie bekommt von ihrer Freundin einige Bonbons. Danach hat sie 7 Bonbons. Wie viele Bonbons hat sie bekommen?"),
- „Vergleichen" (z.B. „Anne hat 7 Bonbons. Ihre Freundin hat 3 Bonbons. Wie viele Bonbons hat die Freundin weniger?") sowie
- „Vereinigen" (z.B. Anne hat insgesamt 7 Bonbons, und zwar 3 Karamellbonbons und einige Pfefferminzbonbons. Wie viele Pfefferminzbonbons hat sie?").

Interessant ist dabei, dass die subtraktive Sachsituation „Ergänzen" von ihm auch als „Additionssituation" (dort von ihm als „Ausgleichen" bezeichnet) gesehen wird (PADBERG 2005, 84 ff., 106), wohingegen FUSON (1992b, 245) in dieser Sachsituation eine reine „additive Situation" sieht (vgl. Tab. 2-2).

2.1.2 Grundvorstellungen der Subtraktion

Nachdem im vorherigen Kapitel beschrieben wurde, was unter Subtraktionsproblemen beziehungsweise allgemeiner unter der Subtraktion verstanden werden kann, werden in diesem Kapitel die in der Literatur beschriebenen Grundvorstellungen der Subtraktion dargestellt. Diese Darstellung ist dabei natürlicherweise eng mit den Ausführungen zur Syntax und Semantik der Subtraktion (vgl. Kapitel 2.1.1) verbunden, da die Identifikation beziehungsweise Klassifikation der syntaktischen und semantischen Strukturen der Operationen dazu dienen kann Grundvorstellungen zu diesen zu bestimmen (vgl. Kapitel 1.2). Somit könnte beispielsweise die von PADBERG (2005, 105) beschriebene Klassifikation der vier „subtraktiven Sachsituationen“ „Abziehen“, „Ergänzen“, „Vergleichen“ und „Vereinigen“ (vgl. Kapitel 2.1.1.2) auch die Klassifikation der Grundvorstellungen der Subtraktion darstellen – auch wenn der Autor dies nicht explizit ausführt. Aber auch die in Kapitel 2.1.1.1 beschriebenen zwei Modelle der Subtraktion, das „take-away model“ und das „comparison model“ (FREUDENTHAL 1983, 106 f.; USISKIN 2008; VAN DEN HUUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS 2009; SELTER ET AL. 2012), könnten demnach als Grundvorstellungen der Subtraktion angesehen werden.

Betrachtet man die Literatur, in der explizit der Terminus *Grundvorstellung* genutzt wird oder aber Förderhinweise zum Aufbau von (Grund-) Vorstellungen beziehungsweise von Operationsverständnis bei der Subtraktion, lassen sich insgesamt drei verschiedene Grundvorstellungen der Subtraktion ausmachen (u.a. WITTMANN 1997; KLEINE & FISCHER 2003 in Anlehnung an PADBERG 1996; GERSTER & SCHULZ 2004, 358 ff.; FROMME, ET AL. 2011 in Anlehnung an SCHIPPER 2009, 98 ff.; VERBOOM 2010a; HÄSELWEIDE & NÜHRENBÖRGER 2012, 29 ff.):

- „Abziehen“ beziehungsweise „Wegnehmen“[23],
- „Ergänzen“ sowie
- „Vergleichen“.[24]

Im Folgenden werden die drei Grundvorstellungen näher charakterisiert sowie ihre unterrichtspraktische Einführung in der Grundschule exemplarisch dargestellt.

‚Abziehen' als Grundvorstellung der Subtraktion

Die Grundvorstellung des ‚Abziehens' ist dadurch charakterisiert, dass von einem gegebenen Wert (a bzw. Minuend) ein anderer gegebener Wert (b bzw. Subtrahend) *abgezogen* wird. Das gesuchte Ergebnis (? bzw. Differenz) ist dabei der Wert, welcher durch diese Handlung entsteht. Das ‚Abziehen' besitzt also einen „dynamischen Charakter“ (FROMME ET AL. 2011, 36). Am leeren Zahlenstrahl lässt sich dies wie folgt darstellen (siehe Abb. 2-4):

[23] Im Folgenden nur ‚Abziehen' genannt.

[24] Von manchen Autoren werden auch lediglich ‚Abziehen' und ‚Ergänzen' als (Grund-) Vorstellungen der Subtraktion aufgeführt (u.a. WITTMANN 1997, WITTMANN 2010, 35 ff.).

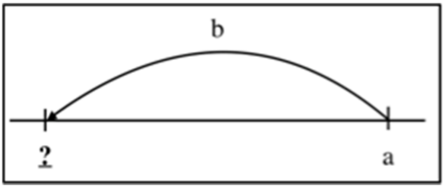


Abbildung 2-4: ‚Abziehen' als Grundvorstellung der Subtraktion – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Realisiert man diese Grundvorstellung kardinal, so wird von einer gegebenen Menge (Minuend) eine Teilmenge (Subtrahend) abgespalten. Das gesuchte Ergebnis (Differenz) dieser Handlung ist dabei als *Rest*, welcher übrig bleibt, repräsentiert. GRIESEL (1970) spricht in diesem Zusammenhang auch von der Subtraktion als „Restmengenbildung". Von einigen Autoren wird jedoch kritisiert, dass diese „Restmengenbildung" beim ‚Abziehen' häufig zu sehr in den Mittelpunkt gerückt wird, sodass eine Anbindung an das Teile-Ganzes-Konzept (vgl. u.a. RESNICK 1983) nicht stattfindet (u.a. GERSTER & SCHULZ 2004, 358 ff.; WITTMANN & MÜLLER 2012a, 74 ff.). Von diesen Autoren wird daher favorisiert die Subtraktion nicht als „Restmengenbildung", sondern vielmehr als „Bestimmung des fehlenden Teils im Teile-Ganzes-Konzept" zu verstehen (GERSTER & SCHULZ 2004, 358, vgl. auch WITTMANN & MÜLLER 2012b, 74 ff.).

Diese Sichtweise hat sich bereits in den Darstellungen der meisten Schulbücher niedergeschlagen (vgl. z.B. SCHÜTTE 2004, 25; RINKENS ET AL. 2009, 58 ff.; WITTMANN & MÜLLER 2012a, 58 ff.), und es wird versucht die „Grundvorstellung [...] so darzustellen, dass alle drei Teilmengen der Subtraktion [...] sichtbar und vorstellbar sind; sprich die Ausgangszahl, die abzuziehende Zahl und der Rest als Ergebnis" (HÄSEL-WEIDE & NÜHRENBÖRGER 2012, 32) (vgl. Abb. 2-5 und Abb. 2-6).

Das Minuszeichen (-) wird dabei in Sachsituationen beispielsweise als ‚Auspusten', ‚Zerplatzen', ‚Aufessen' oder ‚Umfallen' (vgl. Abb. 2-5) oder an didaktischen Materialien, wie zum Beispiel dem Zwanzigerfeld, als angedeutetes Wegschieben, Abspalten, Abdecken (vgl. Abb. 2-6) oder auch Durchstreichen dargestellt.

Abbildung 2- 5: ‚Abziehen' als Grundvorstellung der Subtraktion – Sachsituationen im Zahlenbuch 1 (aus WITTMANN & MÜLLER 2012a, 59)

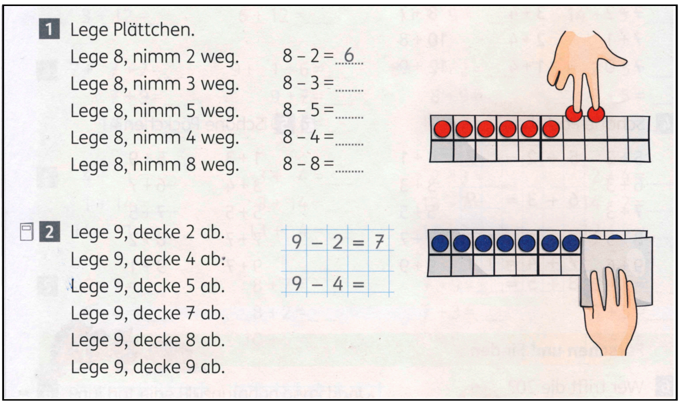


Abbildung 2-6: ‚Abziehen' als Grundvorstellung der Subtraktion – dargestellt Zwanzigerfeld im Zahlenbuch 1 (aus WITTMANN & MÜLLER 2012a, 58)

‚Ergänzen' als Grundvorstellung der Subtraktion

Die Grundvorstellung des ‚Ergänzens' ist dadurch charakterisiert, dass der Unterschied zwischen zwei gegebenen Werten (a bzw. Minuend bzw. Summe und b bzw. Subtrahend bzw. erster Summand) durch die Handlung des Hinzufügens bestimmt wird. Das gesuchte Ergebnis (? bzw. Differenz bzw. zweiter Summand) ist dabei der hinzugefügte Wert. Das ‚Ergänzen' weist also auch wie das ‚Abziehen' einen dynamischen Charakter auf. Am leeren Zahlenstrahl lässt sich dies wie folgt darstellen (siehe Abb. 2-7):

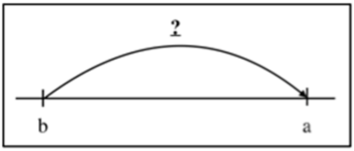


Abbildung 2-7: ‚Ergänzen' als Grundvorstellung der Subtraktion – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Realisiert man diese Grundvorstellung kardinal, so werden solange zu einer gegebenen Ausgangsmenge (Subtrahend bzw. erster Summand) Elemente (Differenz bzw. zweiter Summand) hinzugefügt, bis eine bestimmte Zielmenge (Minuend bzw. Summe) erreicht ist. Das gesuchte Ergebnis dieser Handlung ist dabei die hinzugefügte Menge an Elementen, welche den Unterschied zwischen der gegebenen Ausgangs- und Zielmenge repräsentiert. HÄSEL-WEIDE & NÜHRENBÖRGER (2012, 35) sprechen dabei von einer „additiven Grundvorstellung der Subtraktion". Für WITTMANN (1997, 45) ändert jedoch die Tatsache, dass „bei der Ergebnisbestimmung ggf. addiert werden muß, [nichts daran,] daß es sich um eine Subtraktionsaufgabe handelt." Dies sieht er darin begründet, dass es sich bei der Grundvorstellung des ‚Ergänzens' „um eine besondere Form des Wegnehmens" handelt (WITTMANN 2010, 35 ff.; WITTMANN & MÜLLER 2012b, 115), bei der der Subtrahend „von links her **weggenommen**" wird (WITTMANN 1997, 45 – Hervorhebung im Original) und der „verbleibende Rest [...] durch Ergänzen bestimmt wird" (WITTMANN & MÜLLER 2012b, 115)[25]. WITTMANN & MÜLLER (2012b, 115) konkretisieren dies an der Aufgabe 16-13=?;

> „Von 16 Plättchen, die auf dem Zwanzigerfeld angeordnet sind, werden die ersten 13 weggenommen oder abgedeckt. Der verbleibende Rest wird durch Ergänzen bestimmt."

Eine im Vergleich zu anderen Lehrwerken ausführliche Einführung der Grundvorstellung des ‚Ergänzens' inklusive der Thematisierung des Zusammenhangs mit der Grundvorstellung des ‚Abziehens' findet sich beispielsweise im Zahlen-

---

25 Vgl. auch FREUDENTHAL (1983, 107), der von „taking away at the end" und „taking away at the start" spricht.

buch 1 (WITTMANN & MÜLLER 2012a, 92 f.). Darin wird zunächst auf einer Schulbuchseite die Grundvorstellung des ‚Ergänzens' thematisiert (vgl. Abb. 2-8). Im Begleitband für die Lehrkräfte (WITTMANN & MÜLLER 2012b, 114) heißt es dazu:

> „Auf dieser Seite wird das Ergänzen als zweite Umkehrung der Addition eingeführt. Dabei wird an einen realen Kontext angeknüpft, bei dem sich das Ergänzen aus dem Zusammenhang heraus anbietet: Puzzles, zu deren Fertigstellung noch ein paar Teile fehlen. Der Kontext erklärt auch das Wort „Ergänzen" („Ganzmachen").
>
> Im Buch wird auch vorgemacht, wie die Aufgabe 13+_=16 an der Zwanzigerreihe gelöst werden kann: Mit einem Blatt Papier werden 16 Felder (die gewünschte Anzahl) abgedeckt, und der erste Summand wird in Gestalt von 13 Plättchen gelegt. Es zeigt sich, dass noch 3 Plättchen dazugelegt werden müssen."

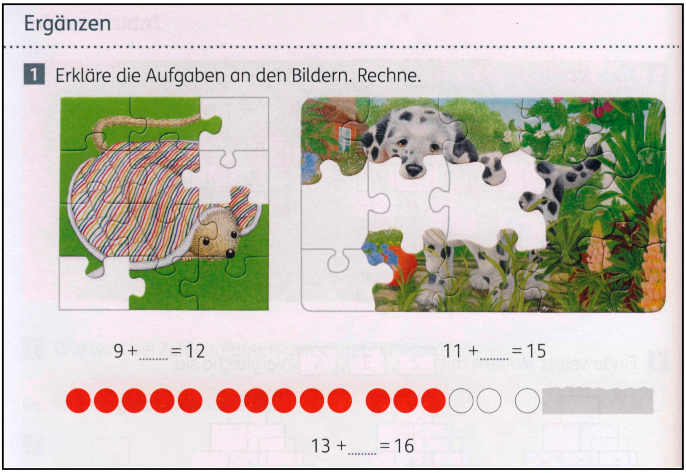


Abbildung 2-8: ‚Ergänzen' als Grundvorstellung der Subtraktion – Einführung im Zahlenbuch 1 (aus WITTMANN & MÜLLER 2012a, 92)

Auf der folgenden Schulbuchseite findet dann die Anbindung an die Grundvorstellung des ‚Abziehens' statt (vgl. Abb. 2-9), wodurch die Grundvorstellung des ‚Ergänzens' auch für die Lösung formaler Subtraktionsaufgaben der Form a-b=? nutzbar gemacht werden soll. Dazu wird thematisiert, dass das ‚Abziehen' – also die Restbestimmung – und das ‚Ergänzen' – also die Unterschiedsbestimmung – das gleiche Ergebnis liefern.

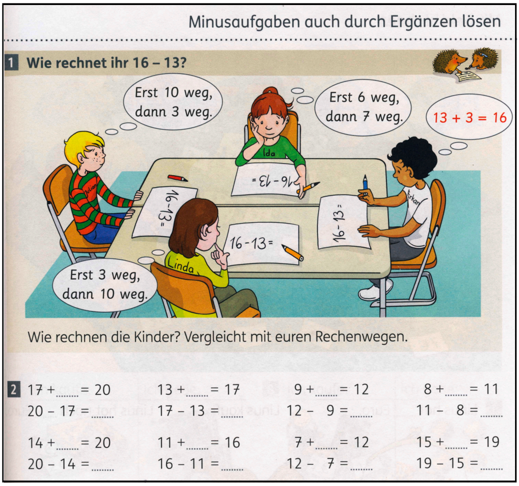


Abbildung 2-9: ‚Ergänzen' als Grundvorstellung der Subtraktion – Zusammenhang zum ‚Abziehen' (aus WITTMANN & MÜLLER 2012a, 93)

‚Vergleichen' als Grundvorstellung der Subtraktion

Die Grundvorstellung des ‚Vergleichens' ist dadurch charakterisiert, dass der Unterschied (?) zwischen zwei gegebenen Werten (a und b) bestimmt werden soll, wobei „eine Handlung zur Bearbeitung nicht in der [...] [Darstellung] gegeben wird" (FROMME AT AL. 2011, 36). Das ‚Vergleichen' weist also im Gegensatz zum ‚Abziehen' und ‚Ergänzen' einen „statischen Charakter" auf (FROMME ET AL. 2011, 36). Am leeren Zahlenstrahl lässt sich dies wie folgt darstellen (siehe Abb. 2-10):

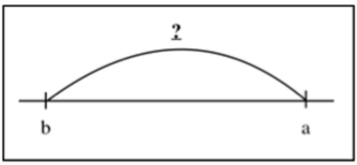


Abbildung 2-10: ‚Vergleichen' als Grundvorstellung der Subtraktion – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Realisiert man diese Grundvorstellung kardinal, so wird nach dem Unterschied zwischen zwei Mengen gefragt. Diese können sowohl disjunkt als auch nicht disjunkt sein. In konkreten Sachsituationen wird dabei häufig ‚Wie viel mehr?' beziehungsweise ‚Wie viel weniger?' gefragt. Da aufgrund des „statischen Charakters" keine Handlung zur Bestimmung des Unterschieds angegeben ist, muss zur Bestimmung des Unterschieds eine andere Grundvorstellung der Subtraktion (z.B. ‚Ergänzen') mit der Grundvorstellung des ‚Vergleichs' in Beziehung gesetzt werden (vgl. z.B. VERBOOM 2010b). Nach FROMME ET AL. (2011, 36) stellt aber auch die Eins-zu-eins-Zuordnung eine Möglichkeit der Lösung dar.

In vielen Schulbüchern findet sich zu dieser Grundvorstellung im Vergleich zu den anderen beiden Grundvorstellungen zumeist keine explizite Einführung[26]. Vielmehr lassen sich vereinzelt Sachaufgaben, wie zum Beispiel des Typs „Fünf Vögel haben Hunger. Sie finden drei Würmer. Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?" (FROMME AT AL. 2011, 38) finden, welche die Grundvorstellung des ‚Vergleichens' ansprechen.

Ein Beispiel für die explizite unterrichtspraktische Thematisierung dieser Grundvorstellung ist beispielsweise das Spiel „Hamstern" (VERBOOM 2010b), bei dem Unterschiede zwischen zwei nicht disjunkten Mengen betrachtet werden.[27]

2.1.3 Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen

Nachdem in Kapitel 2.1.1 dargestellt wurde, was unter der Subtraktion beziehungsweise Subtraktionsproblemen verstanden werden kann und in Kapitel 2.1.2 die in der Literatur aufgeführten Grundvorstellungen der Subtraktion beschrieben wurden, sollen in diesem Kapitel die in der Literatur als mögliche Lösungswege von Subtraktionsproblemen beschriebenen Vorgehensweisen entfaltet werden. Betrachtet man diese Kategoriensysteme, so wird deutlich, dass manche Autoren die Vorgehensweisen eindimensional, manche hingegen mehrdimensional kategorisieren[28]. Im Folgenden werden zunächst zwei eindimensionale Kategoriensysteme vorgestellt (Kapitel 2.1.3.1), bevor anschließend zwei mehrdimensionale Kategoriensysteme in den Blick genommen werden (Kapitel 2.1.3.2).[29]

2.1.3.1 Eindimensionale Kategoriensysteme

Betrachtet man die Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen eindimensional, so lassen sich in der Literatur mindestens zwei, sich zum Teil überlagernde Kategoriensysteme finden, welche im Folgenden dargestellt werden:

---

26 Eine Ausnahme stellt bspw. das Schulbuch „Fredo & Co" (BALINS ET AL 2009, 18 f.) dar.

27 Vgl. VERBOOM (2010b) für eine ausführliche Spielanleitung.

28 Auch DE SMEDT ET AL. (2010, 205 f.) beschreiben, dass sich Vorgehensweisen zur Lösung von Rechenaufgaben hinsichtlich verschiedener Dimensionen charakterisieren lassen.

29 Der schriftliche Subtraktionsalgorithmus wird dabei aufgrund der Auswahl einer ersten Klasse als Stichprobe (vgl. Kapitel 3.2) an dieser Stelle nicht dargestellt, stellt aber selbstverständlich auch eine mögliche Vorgehensweise zur Lösung von Subtraktionsproblemen dar. Eine ausführliche Darstellung der verschiedenen schriftlichen Subtraktionsverfahren findet sich bspw. bei PADBERG (2005, 221 ff.) oder in SELTER ET AL. (2012, 395 f.).

- ‚Zählen' / ‚Ableiten' / ‚Auswendigwissen' zur Klassifikation der Vorgehensweisen
- ‚Direct subtraction' / ‚indirect addition' / ‚indirect subtraction' zur Klassifikation der Vorgehensweisen

Zählen' / ‚Ableiten' / ‚Auswendigwissen' zur Klassifikation der Vorgehensweisen

Betrachtet man zunächst die Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen global, lassen sich drei verschiedene Kategorien ausmachen (u.a. GINSBURG 1982; BENZ 2005, 46 ff.; SCHIPPER 2009 102 ff.; GAIDOSCHICK 2010a; PETERS ET AL. 2012; aber auch ASHCRAFT 1992; SEYLER Et AL. 2003; LEFEVRE, ET AL. 2006)[30]:

- Zählen,
- Ableiten sowie
- Auswendigwissen.[31]

‚Zählen'

Beim ‚Zählen' wird die Zahlwortreihe zur Lösung des Subtraktionsproblems genutzt, wobei der Zählprozess durch Material beziehungsweise die Nutzung der Finger oder Gesten unterstützt werden kann (vgl. FUSON 1982; CARPENTER & MOSER 1984; DE CORTE & VESCHAFFEL 1987). Der Zählprozess zur Lösung des Subtraktionsproblems kann dabei rückwärts – vom Minuenden ausgehend wird um den Subtrahenden rückwärts gezählt – oder aber vorwärts – vom Subtrahenden wird zum Minuenden vorwärts gezählt – orientiert sein (u.a. GROEN & POLL 1973; WOODS ET AL. 1975; PADBERG 2005, 101 ff.; SCHIPPER 2009, 104 ff.). Die rückwärtszählenden Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen sind im Gegensatz zu vorwärtszählenden Vorgehensweisen dadurch gekennzeichnet, dass zwei Zählvorgänge entgegengesetzt ausgeführt werden müssen (u.a. STEFFE ET AL. 1983; BAROODY 1987; PADBERG 2005, 101 ff.; SCHIPPER 2009, 105). BENZ (2005, 57 – Hervorhebung im Original) schreibt dazu:

> „Dieser doppelte Zählvorgang führt vor allem beim *Rückwärtszählen* zum Lösen von Subtraktionsaufgaben zu zusätzlichen Schwierigkeiten. Denn hier müssen die gleichzeitig ablaufenden Zählprozesse in entgegengesetzter Richtung ablaufen. Die Kinder müssen in der Zahlwortreihe

[30] Dieses Kategoriensystem ist dabei selbstverständlich nicht auf die Subtraktion beschränkt.

[31] „For a long time, researchers assumed that children move from counting-based strategies over procedural strategies to the (adult way of) direct retieval of an answer from long-term memory. However, in the last decades, various studies [...] indicated that even adults use non-retrieval strategies as well as direct retrieval to solve subtraction problems." (PETERS, ET AL. 2012, 335 f. unter Bezug auf u.a. ASHCRAFT 1992; ROBINSON 2001; CAMPELL & XUE 2001)

rückwärts zählen und dabei die Anzahl der Schritte, die sie rückwärtsgehen sollen, durch vorwärts zählen mitzählen.“

‚Ableiten’

Beim ‚Ableiten’[32] wird das Ergebnis des Subtraktionsproblems im Gegensatz zum Zählen und Auswendigwissen nicht zählend bestimmt, ist aber auch nicht auswendig verfügbar (vgl. GERSTER & SCHULZ, 364). Vielmehr wird das Ergebnis über ‚einfachere’ beziehungsweise auswendigverfügbare Aufgaben oder Zahlensätze beziehungsweise Zahlbeziehungen abgeleitet. Demnach stellen die beispielsweise von PADBERG (2005, 107 ff.) oder SCHIPPER (2009, 100 ff.) beschriebenen heuristischen Strategien und Kopfrechenstrategien beziehungsweise halbschriftlichen Strategien Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen im Sinne des Ableitens dar. Im Folgenden (vgl. Tab. 2-5) wird in Anlehnung an PADBERG (2005, 170 ff.) ein Überblick über die dabei grundsätzlich verschiedenen Vorgehensweisen gegeben (vgl. auch u.a. BEISHUIZEN 1993; BEISHUIZEN, ET AL. 1997; KLEIN ET AL. 1998; HEIDRDSFELD 1999; BLÖTE ET AL. 2000; PELTENBURG ET AL. 2012;)[33]:

Tabelle 2-5: ‚Ableiten’ als Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen (in Anlehnung an PADBERG 2005, 170 ff.)

Bezeichnung	Erläuterung	Beispiel
Schrittweise In der englischsprachigen Literatur z.B. als „stringing“ (u.a. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2001), „jump method“ (BEISHUIZEN 1993) oder „sequential procedure“ (u.a. KLEIN 1998) bezeichnet.	Beim schrittweisen Rechnen wird der Subtrahend beliebig zerlegt (im Beispiel entlang der Bündelungsstufen des dezimalen Stellenwertsystems) und in Schritten vom Minuenden subtrahiert.	69-28=? 69-20=49 49-8=47
Stellenweise In der englischsprachigen Literatur z.B. als splitting“ (u.a. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2001), „decompensation“ (u.a. BEISHUIZEN ET AL. 1997) oder „seperate tens“ (u.a. FUSON ET AL. 1997) bezeichnet.	Beim stellenweisen Rechnen werden Minuend und Subtrahend entlang der Bündelungsstufen des dezimalen Stellenwertsystems zerlegt und separat verrechnet.[34]	69-28=? 60-20=40 9-8=1 40+1=41

32 In der englischsprachigen Literatur z.B. als „procedural strategies“ (u.a.. PETERS AL. 2012, 335) oder „derived facts“ (u.a. GRAY 1991; FUSON 1992b, 257 ff.; GRAY & TALL 1994) bezeichnet.

33 Dem Autor der vorliegenden Arbeit ist bewusst, dass dies einen sehr idealisierten Überblick darstellt und dem Facettenreichtum an Kombinationen von Vorgehensweisen bzw. individuellen Varianten der Vorgehensweisen von Kindern (und Erwachsenen) nicht gerecht wird (vgl. FUSON ET AL. 1997; SELTER ET AL. 2012, 393),

34 Der Umgang mit der Übertragsproblematik beim stellenweisen Rechnen wird in der Literatur durchaus kontrovers diskutiert. Bspw. bei PADBERG (2005, 171) findet sich ein Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten des Umgangs mit Überträgen.

Bezeichnung	Erläuterung	Beispiel
Hilfsaufgabe In der englischsprachigen Literatur wird diese Vorgehensweise zusammen mit dem *Vereinfachen als* „short cut“-Strategie z.B. unter „varying“ (u.a. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2001) oder „auxilery task“ (u.a. SELTER ET AL. 2012, 393) beschrieben.	Bei der Hilfsaufgabe wird die gegebene Aufgabe durch Auf- oder Abrunden des Minuenden oder Subtrahenden verändert. In einem zweiten Schritt wird die Veränderung anschließend wieder korrigiert.	69-28=? 69-30=39 39+2=41
Vereinfachen In der englischsprachigen Literatur wird diese Vorgehensweise zusammen mit der *Hilfsaufgabe* als „short cut“-Strategie z.B. unter „varying“ (u.a. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2001) oder „balancing“ (u.a. SELTER ET AL. 2012, 393) beschrieben.	Diese Vorgehensweise beruht auf der Konstanz der Differenz als Eigenschaft der Subtraktion (vgl. auch MARX & WESSEL 2010, 41 ff.). Dabei werden Minuend und Subtrahend gleichsinnig verändert. Im Unterschied zur Hilfsaufgabe wird die Veränderung in einem Schritt vorgenommen.	69-28=? 70-29=41
Ergänzen In der englischsprachigen Literatur z.B. als „subtraction by addition“ (u.a. CAMPBELL 2008) oder „indirect additon“ (u.a. TORBEYNS ET AL. 2009c) bezeichnet.	Bei dieser Vorgehensweise wird eine additive Sichtweise eingenommen und vom Subtrahenden ausgehend schrittweise zum Minuenden (additiv) ergänzt.	69-28=? 28+**2**=30 30+**30**=60 60+**9**=69 28+**41**=69

‚Auswendigwissen'

Beim ‚Auswendigwissen'[35] ist das Ergebnis des gegebenen Subtraktionsproblems über Zahlensätze beziehungsweise Zahlbeziehungen auswendig – ähnlich wie beim Abruf einer Vokabel – verfügbar (vgl. GINSBURG 1982; GERSTER 1994, 38; GRUBE 2006, 3). Im Gegensatz zum ‚Zählen' und ‚Ableiten' muss dabei zur Lösung des gegebenen Problems nicht gezählt oder abgeleitet – und damit nicht explizit gehandelt – werden.

GAIDOSCHIK (2010b, 11, unter Bezug auf GERSTER 1994, 37 ff.) beschreibt, dass ein „solches Auswendigwissen [...] das Ergebnis eines Prozesses [ist], der als "Auswendiglernen" oder auch "Automatisieren" bezeichnet wird“.

‚Direct subtraction' / ‚indirect addition' / ‚indirect subtraction' zur Klassifikation der Vorgehensweisen

Eine weitere eindimensionale Kategorisierung der Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen ist eingebettet in die Diskussion um „mathematical

[35] In der englischsprachigen Literatur z.B. als „direct retrieval (from long-term menory)“ (PETERS ET AL. 2012.; vgl. auch SIEGLER & JENKINS 1989, 12) oder „known fact“ (u.a. PELTENBRUG ET AL. 2012, 360) bezeichnet.

inversion“[36]. Dabei wird unter anderem beschrieben, dass Subtraktionsprobleme sowohl durch ‚direct subtraction’[37] – also durch Abziehen des Subtrahenden vom Minuenden (formal: a-b=?) – als auch durch die „inverse relation“ zur Addition gelöst werden können. Nutzt man die „inverse relation“ zur Addition, so ergeben sich neben der ‚direct subtraction“’ zwei weitere Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen (vgl. u.a. GROEN & PARKMAN 1972; GEARY ET AL. 1993; BEISHUIZEN 1997; BRYANT ET AL. 1999; CAMPBELL 2008; BAROODY ET AL. 2009; PETERS ET AL. 2010b; PELTENBURG ET AL. 2012), welche im Folgenden dargestellt werden:

- ‚indirect addition’ und
- ‚indirect subtraction’.

‚Indirect addition’
Nutz man die ‚indirect addition’ zur Lösung von Subtraktionsproblemen, so nimmt man eine additive Sicht auf das Subtraktionsproblem ein und stellt sich beispielsweise zur Lösung der Aufgabe 7-3=? die Frage, welche Zahl zu 3 addiert werden muss (bzw. um wie viel weitergezählt werden muss), um 7 zu erhalten. Formal ausgedrückt löst man folglich die Gleichung 3+?=7.

Diese Vorgehensweise basiert dabei nach SELTER ET AL. (2012) auf dem in Kapitel 2.1.1.1 beschriebenen „determing the difference“-Modell der Subtraktion (vgl. auch PETERS ET AL. 2012).

Während im deutschsprachigen Raum diese Vorgehensweisen als Ergänzen beschrieben wird (vgl. Tab. 2-5), finden sich in der englischsprachigen Literatur hingegen noch weitere Bezeichnungen, wie zum Beispiel „subtracion by (means of) addition“ (u.a. BEISHUZEN 1997; CAMPBELL 2008) oder „counting up“ (u.a. FUSON 1986).

‚Indirect subtraction’
Eine weitere Vorgehensweise, welche ebenfalls auf dem „determing the differnce“-Modell aufbaut (SELTER ET AL. 2012), stellt die ‚indirect subtraction’ dar. Dabei wird sich beispielsweise zur Lösung der Aufgabe 7-3=? die Frage gestellt, welche Zahl von 7 subtrahiert werden muss (bzw. um wie viel von 7 rückwärts gezählt werden muss), um 3 zu erreichen. Formal ausgedrückt löst man folglich die Gleichung 7-?=3.

---

[36] Einen ausführlichen Einblick in die aktuelle Diskussion findet sich in der Special Issue der „Educational Studies in Mathematics“ mit dem Thema „The inverse principle: Psychological, mathematical, and educational considerations“ (VERSCHAFFEL 2012) anlässlich des Advanced Study Colloqium on „Mathematical Inversion“, welches vom 20. bis 22. September 2010 in Leuven, Belgien stattfand.

[37] SELTER ET AL. (2012) ordnen diese Vorgehensweise dem „taking away“-Modell der Subtraktion zu (vgl. Kapitel 2.1.1.1).

Im deutschsprachigen Raum findet diese Vorgehensweise so gut wie keine Beachtung und wird lediglich sehr vereinzelt beschrieben (bspw. bei BENZ (2005, 60) als „ergänzende Subtraktion“).

2.1.3.2 Mehrdimensionale Kategoriensysteme

Aufbauend auf den Kategoriensystemen, welche in Kapitel 2.1.3.1 dargestellt wurden, systematisieren manche Autoren die Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen hinsichtlich weiterer Dimensionen.

So beschreiben SELTER ET AL. (2012, 392 ff.), dass sich die in Kapitel 2.1.3.1 beschriebenen ableitenden Vorgehensweisen Schrittweise (hier „Sequential“), Stellenweise (hier „Decompensation“), Hilfsaufgabe (hier „Auxilary task“) und Vereinfachen (hier „Balancing“) nicht nur abziehend im „taking away“-Modell realisieren lassen, sondern auch im „determing the difference“-Modell ihre Realisierung finden können (vgl. Tab. 2-6). Dadurch fällt das Ergänzen als eigenständige ‚ableitende’ Vorgehensweise weg und es werden vielmehr vier ergänzende Vorgehensweisen beschrieben.

Tabelle 2-6: Kopfrechenstrategien der Subtraktion (nach SELTER ET AL. 2012, 393)

Mental subtraction	**Taking away**		**Determining the difference**	
Decom-position*	83-79=10-6=? 80-70 3-9	Get the tens-remainder by taking away 70 from 80. Get the ones-remainder by taking away 9 from 3. Add/subtract the two preliminary results.	79+ ? = 83 70+10= 80 9+(-6) = 3 10-6 = 4	*rather uncommon:* Determine the tens-difference by adding 10 to 70. Determine the ones-difference by adding -6 to 9. Add/subtract the two preliminary results.
Sequential	83-79 = ? 83-70 = 13 13- 9 = 4	Take away the tens of the subtrahend from the minuend. Take away the ones of the subtrahend from the preliminary result.	79+ ? = 83 79+ 1 = 80 80+ 3 = 83 1+ 3 = 4	Determine the difference by adding 1 to 79 and then adding 3 to 80. Add the two preliminary results.
Shortcuts	83-79 = ? 83-80 = 3 3+ 1 = 4	*Auxiliary task* Take away a round number (80 instead of 79). Compensate (as 79 and not 80 has to be subtracted).	79+ ? = 83 80+ 3 = 83 79+1+3=83	*Auxiliary task* Use a round number to deter-mine the difference (80 instead of 79). Compensate.
	83-79 = ? 84-80 = 4	*Balancing* Add/subtract the	79+ ? = 83 80+ 4 = 84	*Balancing* Add/subtract the same

Mental subtraction	**Taking away**		**Determining the difference**	
		same number to/from both numbers in order to arrive at an easier problem.		number to/from both numbers in order to arrive at an easier problem.
*Children in primary schools are not familiar with negative numbers. However it is discussed at least in Germany, if and how the decomposition strategy is useful for subtraction problems with bigger digits in the second number than in the first one (An alternative strategy, used by some children is 83-79=_: 80-70=10, 9-3=6, 10-6=4 or 70-70=0, 13-9=4). A representation of the decomposition strategy with the empty number line is not possible.				

Ein weiteres mehrdimensionales Kategoriensystem zur Klassifizierung von Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen findet sich bei PELTENBURG ET AL. (2012, 353 ff.) (vgl. Tab. 2-7) und weist einige Parallelen zu der oben beschriebenen Kategorisierung von SELTER ET AL. (2012) auf (vgl. Tab. 2-6). Auch PELTENBURG ET AL. (2012) klassifizieren die Vorgehensweisen hinsichtlich zweier Dimensionen. Sie orientieren sich dabei an den Begriffen Prozeduren („operation perspective“) und Strategien („number perspective“), wobei bei den Prozeduren zwischen „direct subtraction“ (DS), „indirect addition“ (IA), „indirect addition“ (IA) und „multiple operations“ (MO) und bei den Strategien zwischen den ableitenden Vorgehenswesien „splitting“, „stringing“ und „varying“ unterschieden wird (vgl. Kapitel 2.1.3.2). PELTENBURG ET AL. (2012, 353 – Hervorhebungen im Original, unter Bezug auf TORBEYNS ET AL. 2009c) führen dazu aus:

> „According to Torbeyns, De Smedt et al. (2009[c]), splitting, stringing, and varying belong to the class of DS procedures, whereas IA considered as a seperate class of procedures which do not fit the three strategies. However, we see this differently. Splitting, stringing and varying can be considered as *strategies* which all describe *how we deal with the numbers involved* [...]. In contrast to these strategies, we can call DS, IA, IS *procedures* which describe calculations from the perspective of *how the operation is carried out.*“

Tabelle 2-7: Die Orientierung an Prozeduren und Strategien zur Klassifikation der Vorgehensweisen (nach PELTENBURG ET AL. 2012, 354)

Procedures [Operation perspective]	**Strategies [number perspective]**		
	Splitting	Stringing	Varying
DS Direct subtraction	63-31 = [a] 60-30=30 3-1=2 30+2=32	63-47= 63-40=23 23-3=20 20-4=16	
IA Indirect addition	67-52= [b] 50+10=60 2+5=7 10+5=15	62-58= 58+2=60 60+2=62 2+2=4	
IS Indirect subtraction	67-52= [b] 60-10=50 7-5=2 10+5=15	62-58= 62-2=60 60-2=58 2+2=4	
MO Multiple operations			77-29= 77-30=47 47+1=48 or 78-30=48

[a] The problem can be solved by the following calculation steps. The description of these steps does not necessarily reflect how the problems are or should be notated by students. The student's use of materials and models is left out as well
[b] These calculation steps are not very common to solve this problem; they are only given to explain this particular combination of procedure and strategy

2.1.4 Zusammenfassung des Forschungsstandes

Die Intention des Kapitel 2.1 lag darin, den Forschungsstand bezüglich der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen aus theoretischer Perspektive aufzuarbeiten.

Dazu wurde in Kapitel 2.1.1.1 zunächst dargestellt, dass die Subtraktion auf syntaktischer Ebene als Umkehroperation der Addition definiert ist. Die Umkehrung kann dabei zum einen als „comparative subtraction", zum anderen als „take-away subtraction" erfolgen. Darauf aufbauend kann man zwei Modelle der Subtraktion unterscheiden. Zum einen das „take-away model", bei dem das Ergebnis der Subtraktion als Rest dargestellt ist, zum anderen das „comparison model", bei dem das Ergebnis der Subtraktion als Unterschied repräsentiert ist. Weiterhin wurde dargestellt, dass es für RADATZ ET AL. (1996, 77 ff.) drei Typen von Subtraktionsproblemen gibt (?-b=c, a-?=c, a-b=?). CAMPBELL (2008) sieht hingegen in allen Äquivalenzumformungen der Ausgangsgleichung a-b=? Subtraktionsprobleme (a-b=?, b+?=a, a-?=b, ?+b=a). Die beiden Subtraktionsprobleme a-b=? und ?+b=a sind dabei dem „take-away model", die Subtraktionsprobleme b+?=a und a-?=b hingegen dem „comparison model“ zuzuordnen. Weiterhin wurden in Kapitel 2.1.1.2 die Ergebnisse semantischer Analysen der Subtraktion einzelner Autoren dargestellt (FUSON 1992a; RADATZ ET AL. 1996, 77 ff., PADBERG 2005, 104 ff.; SCHIPPER 2009, 98 ff.). Um Sachsituationen der Addition und Subtraktion zu klassifizieren, bedienen sich die Autoren dabei größtenteils ähnlicher strukturgebender Kriterien wie ‚Dynamik der Situation’, ‚Beziehung der Zahlen untereinander’, ‚ansteigende beziehungsweise abfallende Veränderung’ sowie ‚Ausgangslage, Veränderung oder Ergebnis gesucht’. Die Ergebnisse der semantischen Analysen in Form von Klassen von Sachsituationen sind dabei global betrachtet sehr ähnlich. Es lassen sich im Detail jedoch auch Unterschiede ausmachen, wie die Anzahl an unterschiedlichen Klassen von Sachsituationen oder bei welchen Sachsituationen es sich um Subtraktionsprobleme handelt.

In Kapitel 1.1.2 wurde aufgezeigt, dass sich in der Literatur die drei Grundvorstellungen ‚Abziehen’, ‚Ergänzen’ und ‚Vergleichen’ ausmachen lassen. Die Grundvorstellung des ‚Abziehens’ ist dabei dadurch charakterisiert, dass von einem gegebenen Wert (a bzw. Minuend) ein anderer gegebener Wert (b bzw. Subtrahend) *abgezogen* wird. Das gesuchte Ergebnis (? bzw. Differenz) ist dabei der Wert, welcher durch diese Handlung entsteht. Das ‚Abziehen’ besitzt also einen dynamischen Charakter. Die Grundvorstellung des ‚Ergänzens’ ist hingegen dadurch charakterisiert, dass der Unterschied zwischen zwei gegebenen Werten (a bzw. Minuend bzw. Summe und b bzw. Subtrahend bzw. erster Summand) durch die Handlung des Hinzufügens bestimmt wird. Das gesuchte Ergebnis (? bzw. Differenz bzw. zweiter Summand) ist dabei der hinzugefügte Wert. Das ‚Ergänzen’ weist also auch wie das ‚Abziehen’ einen dynamischen Charakter auf. Im Gegensatz zum ‚Abziehen’ und ‚Ergänzen’ weist die Grundvorstellung des ‚Vergleichens’ einen statischen Charakter auf. Sie ist dadurch charakterisiert, dass der Unterschied (? bzw. Differenz) zwischen zwei gegebenen Werten (a und b) bestimmt werden soll, wobei „eine Handlung zur Bearbeitung nicht in der [...] [Darstellung] gegeben wird“ (FROMME, ET AL. 2011, 36).

In Kapitel 2.1.3 wurden zwei eindimensionale (Kapitel 2.1.3.1) sowie zwei mehrdimensionale Kategoriensysteme (Kapitel 2.1.3.2) zur Klassifikation von Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsaufgaben beschrieben. Eine eindimensionale Kategorisierung stellt die Einteilung der Vorgehensweisen in ‚Zählen’ / ‚Ableiten’ / ‚Auswendigwissen’ dar. Beim ‚Zählen’ wird die Zahlwortreihe zur Lösung des Subtraktionsproblems genutzt, wobei der Zählprozess durch Material beziehungsweise die Nutzung der Finger oder Gesten unterstützt werden kann. Der Zählprozess zur Lösung des Subtraktionsproblems kann dabei rückwärts – vom Minuenden ausgehend wird um den Subtrahenden rückwärts gezählt – oder aber vorwärts – vom Subtrahenden wird zum Minuenden vorwärts gezählt – orientiert sein. Beim ‚Ableiten’ wird das Ergebnis des Subtraktionsproblems über ‚einfachere' beziehungsweise auswendig verfügbare Aufgaben oder Zahlensätze beziehungsweise Zahlbeziehungen abgeleitet. Demnach stellen die beispielsweise von PADBERG (2005, 107 ff.) oder SCHIPPER (2009, 100 ff.) beschriebenen heuristischen Strategien und Kopfrechenstrategien beziehungsweise halbschriftlichen Strategien Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen im Sinne des Ableitens dar (‚Schrittweise', ‚Stellenweise', ‚Hilfsaufgabe', ‚Vereinfachen', ‚Ergänzen'). Beim ‚Auswendigwissen' ist das Ergebnis des gegebenen Subtraktionsproblems über Zahlensätze beziehungsweise Zahlbeziehungen verfügbar und muss nicht zählend oder ableitend bestimmt werden. Eine weitere eindimensionale Kategorisierung der Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen stellt die Einteilung der Vorgehensweisen in ‚direct subtraction', ‚indirect addition' sowie ‚indirect subtraction' dar. Dabei wird zur Lösung des gegebenen Subtraktionsproblems bei der ‚direct subtraction' der Subtrahend vom Minuenden abgezogen (formal: a-b=?), bei der ‚indirect addition' vom Subtrahenden zum Minuenden additiv ergänzt (formal: b+?=a) und bei der ‚indirect subtraction' vom Minuenden zum Subtrahenden subtraktiv ‚ergänzt' (formal: a-?=b=). Eine mehrdimensionale Kategorisierung der Vorgehensweisen findet sich bei SELTER ET AL. (2012, 392 ff.). Diese führen aus, dass sich die ‚ableitenden' Vorgehensweisen Schrittweise (hier „Sequential"), Stellenweise (hier „Decompensation"), Hilfsaufgabe (hier „Auxilary task") und Vereinfachen (hier „Balancing") nicht nur abziehend im „taking away"-Modell realisieren lassen, sondern auch im „determing the difference"-Modell realisierbar sind. Ein weiteres mehrdimensionales Kategoriensystem zur Klassifizierung von Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen findet sich bei PELTENBURG ET AL. (2012, 353 ff.). Sie orientieren sich dabei an Prozeduren („operation perspective") und Strategien („number perspective"), wobei bei den Prozeduren zwischen „direct subtraction", „indirect addition", „indirect subtraction" und „multiple operations" und bei den Strategien zwischen „splitting", „stringing" und „varying" unterschieden wird.

2.2 Weiterführende stoffdidaktische Überlegungen

Nachdem im vorherigen Kapitel der Forschungsstand bezüglich der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen der Subtraktion aus theoretischer Perspektive beschrieben wurde, werden auf dieser Grundlage im Folgenden weiterführende stoffdidaktische Überlegungen des Autors der vorliegenden Arbeit dargestellt. Dies ist mit dem Ziel verbunden zu klären, was in der vorliegenden Arbeit unter Subtraktionsproblemen (Kapitel 2.2.1), Grundvorstellungen der Subtraktion[38]

[38] Vgl. dazu die Ausführungen von VOM HOFE (1995) in Kapitel 1.2.2.

(Kapitel 2.2.2) sowie Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen (Kapitel 2.2.3) verstanden wird.

2.2.1 Subtraktionsprobleme

Grundsätzlich kann zwischen formalen Subtraktionsproblemen und subtraktiven Kontextproblemen unterschieden werden (vgl. Kapitel 2.1.1). Welche subtraktiven Problemstellungen sich jeweils auf formaler Ebene (Kapitel 2.2.1.1) beziehungsweise Kontextebene (Kapitel 2.2.1.2) identifizieren lassen, wird im Folgenden dargestellt.

2.2.1.1 Formale Subtraktionsprobleme

Nach CAMPBELL (2008) lassen sich auf formaler Ebene vier Subtraktionsprobleme unterscheiden, wobei die Subtraktionsprobleme dabei nicht vom Auftreten eines Minuszeichen (-) abhängig sind, sondern durch Äquivalenzumformungen der Gleichung a-b=? entstehen (vgl. Kapitel 2.1.1.1):

a-b=?,

b+?=a,

a-?=b,

?+b=a.

Diese Sichtweise auf formale Subtraktionsprobleme soll auch grundlegend für die vorliegende Arbeit sein. Dabei werden die Subtraktionsprobleme wie folgt bezeichnet (siehe Tab. 2-8):

Tabelle 2-8: Die vier formalen Subtraktionsprobleme

Formale Darstellung	Bezeichnung
a-b=?	*Abzieh-Problem*
b+?=a	*Additives-Ergänzungs-Problem*
a-?=b	*Subtraktives-Ergänzungs-Problem*
?+b=a	*Start-Finden-Problem*

Die Problemstellungen ‚Abziehen' und ‚Start-Finden' sind dabei nach SELTER ET AL. (2012) dem „Take-away"-Modell der Subtraktion, die Problemstellungen ‚Additives-Ergänzen' und ‚Subtraktives-Ergänzen' hingegen dem „Comparison"-Modell der Subtraktion zuzuordnen (vgl. Kapitel 2.1.1.1). In der vorliegenden Arbeit werden die beiden Modelle dabei als *Restmodell* („Take-away"-Modell) beziehungsweise *Unterschiedsmodell* („Comparison"-Modell) bezeichnet.

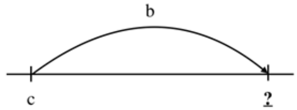
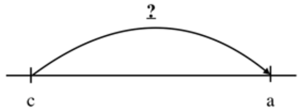
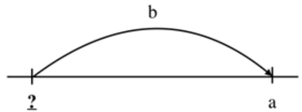
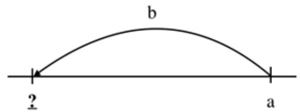
2.2.1.2 Subtraktive Kontextprobleme

In Anwendungssituationen können Subtraktionsprobleme sehr unterschiedlich realisiert werden (vgl. Kapitel 2.1.1.2). Um nun zunächst zu klären, bei welchen der in Kapitel 2.1.1.2 durchaus unterschiedlich kategorisierten Kontextproblemen es sich für die vorliegende Arbeit um subtraktive Problemstellungen handelt und zwischen welchen subtraktiven Kontextproblemen im Folgenden unterschieden werden soll, wird die von FUSON (1992b) vorgenommene Systematisierung von additiven und subtraktiven Kontextproblemen als ausführlichste der in Kapitel 2.1.1.2 dargestellten Kategoriensysteme mit den Ausführungen von CAMPBELL (2008), USISKIN (2008) sowie SELTER ET AL. (2012) (vgl. Kapitel 2.1.1) in Verbindung gebracht (vgl. Tab. 2-9). Dabei wird zunächst jeder Klasse von Sachsituationen der entsprechende verallgemeinerte Rechenausdruck[39], die entsprechende verallgemeinerte Darstellung am leeren Zahlenstrahl[40] sowie die damit verbundene Zuordnung zu einem der beiden Modelle der Subtraktion zugewiesen. Durch diese Zuordnung ist es möglich die subtraktiven Kontextprobleme zu identifizieren.

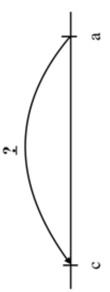
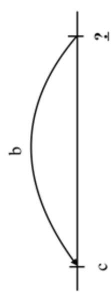
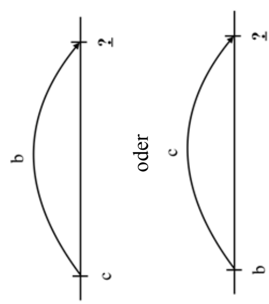
[39] Das Pluszeichen (+) wird dabei als symbolische Darstellung für die *Handlung* des Hinzufügens bzw. Zusammenfügens verstanden. Das Minuszeichen (-) hingegen als symbolische Darstellung für die *Handlung* des Abziehens (vgl. dazu OEHL 1970, 135). Die Variablen a, b und c stehen für die gegebenen Werte sowie die Variable ? für den gesuchten Wert.

[40] Der nach rechts orientierte Pfeil wird dabei als ikonische Darstellung für die *Handlung* des Hinzufügens bzw. Zusammenfügens verstanden. Der nach links orientierte Pfeil hingegen als ikonische Darstellung für die *Handlung* des Abziehens. Die Variablen a, b und c stehen in den Darstellungen für die gegebenen Werte sowie die Variable ? für den gesuchten Wert.

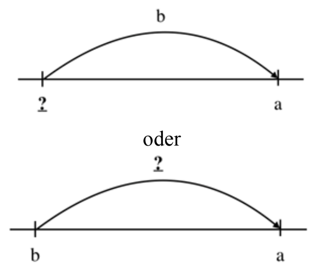
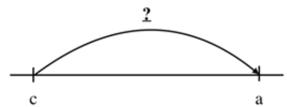
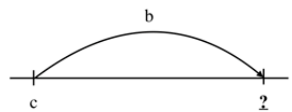
Tabelle 2-9: Analyse additiver und subtraktiver Kontextprobleme

Bezeichnung[41]	**Beispiel**	**Formale Darstellung**	**Darstellung am leeren Zahlenstrahl**	**Operation**	**Modell der Subtraktion**
Change Add To – Missing End	Pete had 3 (c) apples. Ann gave Pete 5 (b) more apples. How many Apples does Pete have now?	c+b=?		Addition	-
Change Add – Missing Change	Kathy had 5 (c) pencils. How many more pencils does she have to put with them so she has 7 (a) pencils altogether?	c+?=a		Subtraktion	Unterschied
Change Add To – Missing start	Bob got 2 (b) cookies. Now he has 5 (a) cookies. How many cookies did Bob have in the beginning?	?+b=a		Subtraktion	Rest
Change Take From - Missing End	Joe had 8 (a) marbles. Then he gave 5 (b) marbles to Tom. How many marbles does he have now?	a-b=?		Subtraktion	Rest

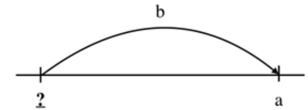
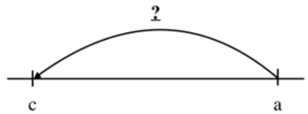
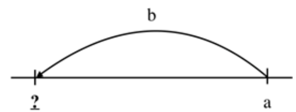
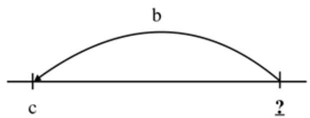
[41] Nach FUSON (1992b)

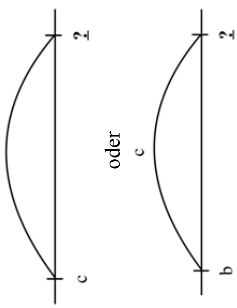
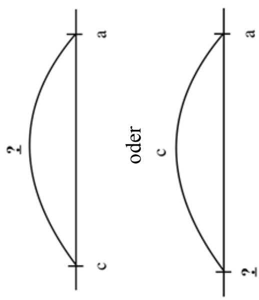
Change Take From - Missing Change	Fred had 11 (a) pieces of candy. He lost some of the pieces. Now he has 4 (c) pieces of candy. How many pieces of candy did Fred lose?	a-?=c		Subtraktion	Unterschied
Change Take From - Missing Start	Karen had some word problems. She used 22 (b) of them in this table. She still has 79 (c) word problems. How many word problems did she have to start with?	?-b=c		Addition	-
Combine physically – Missing All	Sara has 6 (c) sugar donuts and 9 (b) plain donuts. Then she puts them all on a plate. How many donuts are there on the plate? [42]	c+b=? oder b+c=?		Addition	-

[42] Aufgrund der Gleichwertigkeit der beiden Werte in der Sachsituation kann hier nicht eindeutig entschieden werden, welcher Wert die Veränderung respektive den Operator repräsentiert. Daher werden beide möglichen Darstellungen aufgeführt.

Combine physically – Missing Part	Joe and Tom have 8 (a) marbles when they put all their marbles together. Joe has 3 (b) marbles. How many marbles does Tom have?[43]	?+b=a oder b+?=a		Subtraktion	Rest oder Unterschied
Equalize – Add To – Difference Unknown	Susan has 8 (a) marbles. Fred has (c) marbles. How many more marbles does Fred have to get to have as many marbles as Susan has?	c+?=a		Subtraktion	Unterschied
Equalize – Add To – Difference Sentence Cues Solution	There were 6 (c) boys on the soccer team. 2 (b) more boys joined the team. Now there is the same number of boys as girls on the team. How many girls are on the team?	c+b=?		Addition	-

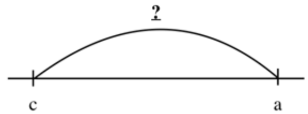
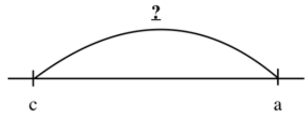
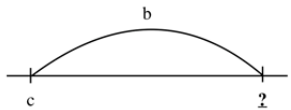
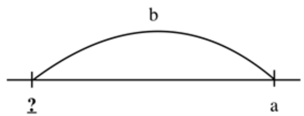
43 Aufgrund der Gleichwertigkeit der beiden Werte in der Sachsituation kann hier nicht eindeutig entschieden werden, welcher Wert die Veränderung respektive den Operator repräsentiert. Daher werden beide möglichen Darstellungen aufgeführt.

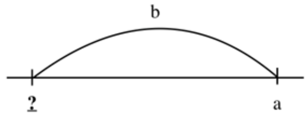
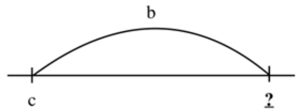
Equalize – Add To – Difference Sentence Cues Opposite Solution Procedere	Connie has 13 (a) marbles. If Jim wins 5 (b) marbles, he will have the same number of marbles as Connie. How many marbles does Jim have?	?+b=a		Subtraktion	Rest oder Unterschied
Equalize – Take From – Difference Unknown	Jane has 7 (a) dolls. Ann has 3 (c) dolls. How many dolls does Jane have to lose to have as many as Ann?	a-?=c		Subtraktion	Unterschied
Equalize – Take From – Difference Sentence Cues Solution	There were 11 (a) glasses on the table. I put 4 (b) of them away so there would be the same number off glasses as plates on the table. How many plates were on the table?	a-b=?		Subtraktion	Rest
Equalize – Take From – Difference Sentence Cues Opposite Solution Procedere	There were some girls in the dancing group. 4 (b) of them sat down so each boy would have a partner. There are 7 (c) boys in the dancing group. How many girls are in the dancing group?	?-b=c		Addition	-

Combine conceptually – Missing All	There are 6 (c) boys and 8 (b) girls on the soccer team. How many children are on the team?[45]	-[44]		Addition	-
Combine conceptually – Missing Part	Brian has 14 (a) flowers. 8 (c) of them are red and the rest are yellow. How many yellow flowers does Brian have?	-		Subtraktion	Rest oder Unterschied

44 Dieser sowie allen folgenden Klassen von Sachsituationen kann aufgrund der statischen Eigenschaft keine formale Darstellung zugeordnet werden. Eine Zuordnung zu den beiden Modellen der Subtraktion ist aufgrund der Darstellung am leeren Zahlenstrahl dennoch möglich.

45 Aufgrund der Gleichwertigkeit der beiden Werte in dieser und der folgenden Klasse von Sachsituationen kann hier nicht eindeutig entschieden werden, welcher Wert den Unterschied repräsentiert. Daher werden beide möglichen Darstellungen aufgeführt.

Compare – Difference Unknown	Joe has 3 (c) balloons. His sister Connie has 5 (a) balloons. How many more balloons does Connie have than Joe?	-		Subtraktion	Unterschied
	Janice has 8 (a) sticks of gum. Tom has 2 (c) sticks of gum. Tom has how many sticks less than Janice?	-		Subtraktion	Unterschied
Compare – Difference Sentence Cues Solution	Luis has 6 (c) pet fish. Carla has 2 (b) more fish than Luis. How many fish does Carla have?	-		Addition	-
	The milkman brought on Sunday 11 (a) bottles of milk and on Monday he brought 4 (b) bottles less. How many bottles did he bring on Monday?	-		Subtraktion	Rest

	Maxine has 9 (a) sweaters. She has 5 (b) sweaters more than Sue. How many sweaters does Sue have?	-		Subtraktion	Rest
	Jim has 5 (c) marbles. He has 8 (b) fewer marbles than Connie. How many marbles does Connie have?	-		Addition	-

Damit ergibt sich durch diese Analyse eine etwas andere Sichtweise auf subtraktive Kontextprobleme als bei FUSON (1992b) selbst (vgl. Kapitel 2.1.1.2): Durch die verallgemeinerte Darstellung der einzelnen Klassen von Sachsituationen am leeren Zahlenstrahl und deren Zuordnung zu den beiden Modellen der Subtraktion (vgl. Kapitel 2.1.1) können insgesamt 14 unterschiedliche subtraktive Kontextprobleme identifiziert werden. So kann beispielsweise gezeigt werden, dass das von FUSON (1992b) als „Additive Situation“ klassifizierte Kontextproblem „Change Add - Missing Change“[46] (vgl. Tab. 2-2) durch die Zuordnung zum Unterschiedsmodell der Subtraktion eigentlich als Subtraktionspro-blem angesehen werden kann.

Insgesamt ergeben sich durch die Analyse sechs Kontextprobleme, welche auf dem Unterschiedsmodell der Subtraktion aufbauen (davon sind vier dynamisch und zwei statisch) und sechs Kontextprobleme, welche auf dem Restmodell der Subtraktion aufbauen (davon sind vier dynamisch und eins statisch).

Bei zwei Kontextproblemen kann aufgrund der Problemstellung keine eindeutige Zuordnung zu einem der beiden Modelle der Subtraktion getroffen werden (davon ist eins dynamisch und eins statisch). So zum Beispiel bei dem Kontextproblem „Combine physically – Missing Part“[47], bei welchem aufgrund der Gleichwertigkeit der beiden Werte in der Problemstellung nicht entschieden werden kann, welcher Wert die Veränderung beziehungsweise den Operator repräsentiert.

Dynamische subtraktive Kontextprobleme

Betrachtet man lediglich die dynamischen subtraktiven Kontextprobleme im Zusammenhang mit ihren formalen Darstellungen beziehungsweise den beiden Modellen der Subtraktion, so ergibt sich folgende Systematik (siehe Tab. 2-10):

---

[46] Beispiel: Kathy had 5 pencils. How many more pencils does she have to put with them so she has 7 pencils altogether?

[47] Beispiel: Joe and Tom have 8 marbles when they put all their marbles together. Joe has 3 marbles. How many marbles does Tom have?

Tabelle 2-10: Dynamische subtraktive Kontextprobleme und deren Zusammenhang zu den beiden Modellen der Subtraktion[48]

	Restmodell		**Unterschiedsmodell**	
	a-b=?	?+a=b	a+?=b	a-?=b
Nicht disjunkt	Change Take From - Missing End	Change Add To – Missing start	Change Add – Missing Change	Change Take From - Missing Change
Disjunkt	Equalize – Take From – Difference Sentence Cues Solution	Equalize – Add To – Difference Sentence Cues Opposite Solution Procedere	Equalize – Add To – Differenc Unknown	Equalize – Take From – Difference Unknown

Für die vorliegende Arbeit ergeben sich dadurch vier Klassen von dynamischen subtraktiven Kontextproblemen, welche in Analogie zu den Bezeichnungen der formalen Subtraktionsprobleme, auch als *Abzieh-Probleme* (a-b=?), *Additive-Ergänzungs-Probleme* (a+?=b), *Subtraktive-Ergänzungs-Probleme* (a-?=b) sowie *Start-Finde-Probleme* (?+a=b) bezeichnet werden. Das bedeutet, dass beispielsweise alle dynamischen Kontextprobleme, welche formal als a-?=b beschrieben werden können, als Subtraktive-Ergänzungs-Probleme bezeichnet werden.

Dabei ist jede Klasse von Kontextproblemen in ihrer kardinalen Realisierung dadurch gekennzeichnet, dass die auftretenden Mengen disjunkt oder nicht disjunkt sein können – ihre jeweiligen Darstellungen am leeren Zahlenstrahl sind jedoch identisch (vgl. z.B. die Problemstellungen „Change Add – Missing Change“[49] und „Equalize – Add To – Differenc Unknown“[50] in Tab. 2-9). In der vorliegenden Arbeit soll diese Unterscheidung keine Rolle spielen.

Statische subtraktive Kontextprobleme

Betrachtet man lediglich die statischen subtraktiven Kontextprobleme und deren Zuordnung zu den beiden Modellen der Subtraktion, ergibt sich folgende Systematik (siehe Tab. 2-11):

---

48 Das nicht eindeutig zuordenbare Kontextproblem „Combine physically – Missing Part“ würde in dieser Systematik in den beiden Zellen „Nicht disjunkt“ / „?+b=a“ bzw. „Nicht disjunkt“ / „a+?=b“ eingeordnet werden.

49 Beispiel: Kathy had 5 pencils. How many more pencils does she have to put with them so she has 7 pencils altogether?

50 Beispiel: There were 6 boys on the soccer team. 2 more boys joined the team. Now there is the same number of boys and girls on the team. How many girls are on the team?

Tabelle 2-11: Statische subtraktive Kontextprobleme und deren Zusammenhang zu den beiden Modellen der Subtraktion

	Restmodell	**Unterschiedsmodell**
Nicht disjunkt	Combine conceptually – Missing Part	
Disjunkt	Compare – Difference Sentence Cues Solution	Compare – Difference Unknown

Dabei wird deutlich, dass der statische Problemkontext „Combine conceptually – Missing Part“[51] aufgrund seiner Problemstellung beiden Modellen der Subtraktion zugeordnet werden kann (vgl. Tab. 2-9). In der vorliegenden Arbeit wird dieser Problemkontext in Anlehnung an RADATZ ET AL. (1996, 77 ff.) und PADBERG (2005, 106) als *Vereinigen* bezeichnet. Bei den statischen Kontextproblemen, bei welchen in ihrer kardinalen Realisierung die auftretenden Mengen disjunkt sind, lassen sich hingegen wieder zwei Klassen von Problemkontexten unterscheiden. Diese werden in der vorliegenden Arbeit als *Vergleichen: Rest gesucht* („Compare – Difference Sentence Cues Solution“[52]) und *Vergleichen: Unterschied gesucht* (Compare – Difference Unknown[53]) bezeichnet. Dabei kann in jedem Problemkontext nochmals differenziert werden, ob in der Problembeschreibung die Frage nach dem Unterschied mit „wie viele mehr“ oder „wie viele weniger“ umschrieben wird (vgl. dazu auch RADATZ ET AL. 1996, 77 ff.; SCHIPPER 2009, 98 ff.) – ihre jeweiligen Darstellungen am leeren Zahlenstrahl sind jedoch identisch (vgl. Tab. 2-9). In der vorliegenden Arbeit soll diese Unterscheidung keine Rolle spielen.

2.2.2 Grundvorstellungen der Subtraktion

In der Literatur werden die drei Grundvorstellungen ‚Abziehen’, ‚Ergänzen’ und ‚Vergleichen’ beschrieben (vgl. Kapitel 2.1.2). In der vorliegenden Arbeit sollen jedoch vielmehr die beiden Modelle der Subtraktion *Rest* und *Unterschied* als Grundvorstellungen der Subtraktion angesehen werden. Warum genau diese beiden Grundvorstellungen unterschieden werden sollen, wird im Folgenden begründet.

---

[51] Beispiel: Brian has 14 flowers. 8 of them are red and the rest are yellow. How many yellow flowers does Brian have?

[52] Beispiel: The milkman brought on Sunday 11 bottles of milk and on Monday he brought 4 bottles less. How many bottles did he bring on Monday? bzw. Maxine has 9 sweaters. She has 5 sweaters more than Sue. How many sweaters does Sue have?

[53] Beispiel: Joe has 3 balloons. His sister Connie has 5 balloons. How many more balloons does Connie have than Joe? bzw. Janice has 8 sticks of gum. Tom has 2 sticks of gum. Tom has how many sticks less than Janice?

‚Rest' und ‚Unterschied' als Grundvorstellungen der Subtraktion

In Kapitel 1.1 wurde herausgestellt, dass ein Individuum zu einem mathematischen Inhalt durchaus unterschiedliche Vorstellungen respektive interne Repräsentationen besitzen kann, die jedoch alle auf der gleichen Grundvorstellung beruhen. Weiterhin wurde beschrieben, dass die Grundvorstellung dabei als Abstraktion einer Klasse von Vorstellungen und damit die Fokussierung auf bestimmte Eigenschaften dieser, zu verstehen ist.

Legt man diese Sichtweise zugrunde und versteht die im Kapitel 2.2.1 beschriebenen subtraktiven Problemstellungen als mögliche (mentale) Repräsentationen der Subtraktion – und damit als mögliche tragfähige Subtraktionsvorstellungen, kann man das *Rest*- und das *Unterschiedsmodell* als Grundvorstellungen der Subtraktion ansehen. Die fokussierte Eigenschaft, durch die sich die beiden Grundvorstellungen bilden und unterscheiden lassen, ist dabei die Rolle des Ergebnisses innerhalb der subtraktiven Repräsentation: Entweder kann das Ergebnis innerhalb der Repräsentation als Rest (bzw. „Start" bei ?+a=b) – in der Sprache der Addition: als erster Summand – oder aber als Unterschied – in der Sprache der Addition: als zweiter Summand – repräsentiert sein.

Betrachtet man mit dieser Brille die in der Literatur beschriebenen Grundvorstellungen der Subtraktion ‚Abziehen', ‚Ergänzen' und ‚Vergleichen' (vgl. Kapitel 2.1.2), so kann man feststellen, dass sich durch diese Systematisierung nicht alle denkbaren subtraktiven Repräsentationen erfassen lassen. Die Kategorien ‚Ergänzen' sowie ‚Vergleichen' erfassen dabei als Unterkategorien der Grundvorstellung *Unterschied* lediglich einen Teil der Unterschiedsvorstellungen und auch die Kategorie ‚Abziehen' als Unterkategorie des Restmodells stellt lediglich einen Ausschnitt der Restvorstellungen dar. Beispielsweise würde sich die subtraktive Problemstellung ‚Start-Finden' keiner der drei Grundvorstellungen ‚Abziehen', ‚Ergänzen' und ‚Vergleichen' zuordnen lassen, wohingegen sich diese Problemstellung bei der Unterscheidung der beiden Grundvorstellungen *Rest* und *Unterschied* der Restvorstellung zuordnen lässt.

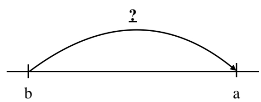
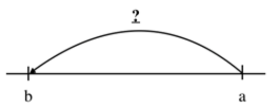
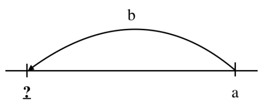
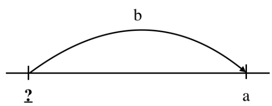
2.2.3 Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen

In Kapitel 2.1.3 wurden unterschiedliche Kategoriensysteme zur Systematisierung dargestellt, dabei wurden ein- und mehrdimensionale Systematisierungen beschrieben. Im Folgenden wird darauf aufbauend das in der vorliegenden Arbeit theoretisch zugrunde gelegte System zur Kategorisierung der Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen dargestellt, welches eine Erweiterung des Kategoriensystems von SELTER ET AL. (2012, 393) darstellt und sich in zwei Dimensionen gliedern lässt.

Erste Dimension

Betrachtet man die formalen Darstellungen der Vorgehensweisen ‚direct subtraction', ‚indirect addition' und ‚indirect subtraction' (vgl. Kapitel 2.1.3.1), sowie ihre Darstellungen am leeren Zahlenstrahl, so erkennt man, dass die beiden erstgenannten Vorgehensweisen auf der Grundvorstellung ‚Unterschied' und die Vorgehensweise ‚direct subtraction' auf der Grundvorstellung ‚Rest' fußen. Aus Gründen der Vollständigkeit sollten diese drei Vorgehensweisen jedoch nach Meinung des Autors der vorliegenden Arbeit um eine Weitere ergänzt werden: So stellt auch die Vorgehensweise *Start-Finden*, welche sich formal als ?+b=a beschreiben lässt und damit auf der Grundvorstellung ‚Rest' aufbaut, eine Möglichkeit zur Lösung von Subtraktionsproblemen dar (vgl. Tab. 2-12). Möchte man beispielsweise die formale Aufgabe 7-3=? durch diese Vorgehensweisen lösen, so stellt man sich die Frage, zu welcher Zahl 3 addiert werden muss, um 7 zu erhalten.

Tabelle 2-12: Vorgehensweisen und deren Zuordnung zu den beiden Grundvorstellungen der Subtraktion

Bezeichnung[54]	**Formale Darstellung**	**Darstellung am leeren Zahlenstrahl**	**Grundvorstellung der Subtraktion**
„indirect addition" (in der vorliegenden Arbeit als *Additives Ergänzen* bezeichnet)	b+?=a		Unterschied
„indirect subtraction" (in der vorliegenden Arbeit als *Subtraktives Ergänzen* bezeichnet)	a-?=b		Unterschied
„direct subtraction" (in der vorliegenden Arbeit als *Abziehen* bezeichnet)	a-b=?		Rest
Start-Finden	?+b=a		Rest

54 Die Bezeichnungen in der vorliegenden Arbeit lehnen sich dabei an die Bezeichnungen der Subtraktionsprobleme aus Kapitel 2.2.1 an.

Diese Unterscheidung von vier grundlegend verschiedenen Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen sowie deren Zuordnung zu den beiden Grundvorstellungen der Subtraktion bildet die erste Dimension der Kategorisierung und wird im Rahmen der empirischen Untersuchung der vorliegenden Arbeit schwerpunktmäßig fokussiert.

Zweite Dimension

Innerhalb der vier beschriebenen Vorgehensweisen kann weiterhin differenziert werden, ob das Ergebnis ‚zählend' oder ‚ableitend' bestimmt wird beziehungsweise ‚auswendig' verfügbar ist, wobei beim Ableiten nochmals zwischen den Kategorien ‚Schrittweise', ‚Stellenweise', ‚Hilfsaufgabe' und ‚Vereinfachen' unterschieden werden kann (vgl. Kapitel 2.1.3.1). Dadurch ergibt sich folgende ausdifferenzierte Systematik zur Analyse von subtraktiven Vorgehensweisen (siehe Tab. 2-13):

Tabelle 2-13: Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen – exemplarisch dargestellt an der Aufgabe 17-12=?

		Rest		**Unterschied**	
		Abziehen (a-b=?)	Start-Finden (?+b=a)[55]	Additives Ergänzen (b+?=a)	Subtraktives Ergänzen (a-?=b)
Zählen		17,16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, **5** → Endpunkt des Zählprozesses	6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 → **5** Startpunkt des Zählprozesses	13, 14, 15. 16, 17 → **5** Zählschritte	16, 15, 14, 13, 12 → **5** Zählschritte
Ableiten	Schrittweise	17-2=15 15-10=**5**	**5**+5=10 10+7=17	12+3=15 15+2=17 3+2=**5**	17-2=15 15-3=12 2+3=**5**
	Stellenweise	10-10=0 7-2=5 0+5=**5**	0+10=10 5+2=7 0+5=**5**	10+0=10 2+5=7 0+5=**5**	10-0=10 7-5=2 0+5=**5**
	Hilfsaufgabe	20-12=8 8-3=**5**	8+12=20 8-3=**5**	12+8=20 8-3=**5**	20-8=12 8-3=**5**
	Vereinfachen	20-15=**5**	**5**+15=20	15+**5**=20	20-**5**=15
Wissen		17-12=**5**	**5**+12=17	12+**5**=17	17-**5**=12

55 Bei der Vorgehensweise Start-Finden ist zu beachten, dass sie zumindest beim Bestimmen des Ergebnisses durch Zählen einen probierenden Charakter aufweist, da der gesuchte Startpunkt des Zählprozesses unbekannt ist. Dieses Probieren kann dabei selbstverständlich systematisch als auch unsystematisch erfolgen.

Diese Vorgehensweisen stellen somit die theoretisch hergeleiteten Möglichkeiten zur Lösung der in Kapitel 2.2.1 dargestellten Subtraktionsprobleme in der vorliegenden Arbeit dar.

2.3 Zusammenfassung

In Kapitel 2 wurde eine theoretische Perspektive auf die Subtraktion eingenommen. Dabei wurde geklärt, was in der vorliegenden Arbeit theoretisch unter Subtraktionsproblemen, Grundvorstellungen der Subtraktion sowie Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen verstanden wird.

Dazu wurde zunächst in Kapitel 2.1 der Forschungsstand hinsichtlich der oben genannten Punkte aufgearbeitet: Nach JENSEN (2003) ist die Subtraktion auf syntaktischer Ebene als Umkehroperation der Addition definiert, wobei die Umkehrung zum einen als „comparative subtraction“, zum anderen als „take-away subtraction“ erfolgen kann. Darauf aufbauend kann man zwei Modelle der Subtraktion unterscheiden (‚Restmodell’ bzw. ‚Unterschiedsmodell’). Weiterhin wurde dargestellt, dass es für RADATZ ET AL. (1996, 77 ff.) drei Typen von Subtraktionsproblemen gibt (?-b=c, a-?=c, a-b=?), wohingegen CAMPBELL (2008) in allen Äquivalenzumformungen der Ausgangsgleichung a-b=? Subtraktionsprobleme (a-b=?, b+?=a, a-?=b, ?+b=a) sieht. Die beiden Subtraktionspro-bleme a-b=? und ?+b=a sind dabei dem ‚Restmodell’, die Subtraktionsprobleme b+?=a und a-?=b hingegen dem ‚Unterschiedsmodell’ zuzuordnen. Betrachtet man die semantische Ebene der Subtraktion, so wirken die Ergebnisse der einzelnen Autoren (FUSON 1992a; RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE ET AL. 1996, 77 ff., PADBERG 2005, 104 ff.; SCHIPPER 2009, 98 ff.) auf den ersten Blick recht ähnlich. Im Detail lassen sich jedoch einige Unterschiede konstatieren, wie die Anzahl an unterschiedlichen Klassen von Sachsituationen oder bei welchen Sachsituationen es sich um Subtraktionsprobleme handelt.

Weiterhin wurde aufgezeigt, dass sich in der Literatur drei Grundvorstellungen der Subtraktion ausmachen lassen: ‚Abziehen’, ‚Ergänzen’ und ‚Vergleichen’.

Außerdem wurden Kategoriensysteme zur Klassifikation von Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsaufgaben beschrieben. Dabei wurde zwischen ein- und mehrdimensionalen Kategorisierungen unterschieden. Eindimensionale Kategorisierungen stellen dabei die Einteilung der Vorgehensweisen in ‚Zählen’ / ‚Ableiten’ / ‚Auswendigwissen’ dar oder aber die Kategorisierung der Vorgehensweisen in ‚direct subtraction’, ‚indirect addition’ sowie ‚indirect subtraction’. Eine mehrdimensionale Kategorisierung der Vorgehensweisen findet sich bei SELTER ET AL. (2012). Diese führen aus, dass sich die ‚ableitenden’ Vorgehensweisen nicht nur abziehend im „taking away“-Modell realisieren lassen, sondern auch im „determing the difference“-Modell realisierbar sind. Ein weiteres mehrdimensionales Kategoriensystem zur Klassifizierung von Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen findet sich bei PELTENBURG ET AL. (2012). Sie orientieren sich dabei an Prozeduren („operation perspective") und Strategien („number perspective"), wobei bei den Prozeduren zwischen „direct subtraction", „indirect addition", „indirect addition" und „multiple operations" und bei den Strategien zwischen „splitting", „stringing" und „varying" unterschieden wird.

In Kapitel 2.2 wurden darauf aufbauend weiterführende stoffdidaktische Überlegungen des Autors entfaltet. Dabei wurde geklärt, was in der vorliegenden Arbeit unter Subtraktionsproblemen, Grundvorstellungen der Subtraktion sowie Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen verstanden wird. Auf der Ebene der Subtraktionsprobleme kann dabei zunächst zwischen formalen Subtraktionsproblemen und subtraktiven Kontextproblemen differenziert werden. Während sich dabei auf formaler Ebene die vier Problemstellungen ‚Abziehen' (a-b=?), ‚additives Ergänzen' (b+?=a), ‚subtraktives Ergänzen' (a-?=b) sowie ‚Start-Finden' (?+b=a) unterscheiden lassen, kann man bei den Kontextproblemen wiederum zwischen dynamischen und statischen Problemstellungen differenzieren. Dabei wurden auf der einen Seite vier Klassen von dynamischen Kontextproblemen herausgearbeitet, welche in Analogie zu den Bezeichnungen der formalen Subtraktionsprobleme auch als ‚Abzieh-Probleme' (a-b=?), ‚Additive-Ergänzungs-Probleme' (a+?=b), ‚Subtraktive-Ergänzungs-Probleme' (a-?=b) sowie ‚Start-Finde-Probleme' (?+a=b) bezeichnet werden. Auf der anderen Seite wurden bei der Analyse der statischen Problemstellungen die Problemkontexte ‚Vereinigen', ‚Vergleichen: Rest gesucht' und ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' identifiziert.

Darauf aufbauend wurde begründet, warum die beiden Modelle der Subtraktion ‚Rest' und ‚Unterschied' in der vorliegenden Arbeit als Grundvorstellungen der Subtraktion angesehen werden. Dabei wurde ausgeführt, dass sich durch die in der Literatur beschriebenen Grundvorstellungen ‚Abziehen', ‚Ergänzen' sowie ‚Vergleichen' lediglich ein Teil der möglichen tragfähigen Subtraktionsvorstellungen erfassen lässt, wohingegen sich durch die Unterscheidung der Grundvorstellungen ‚Rest' und ‚Unterschied' sämtliche tragfähige Subtraktionsvorstellungen den beiden Grundvorstellungen zuordnen lassen.

Anschließend wurde die in der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegte Sichtweise auf mögliche Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen dargestellt. Diese Sichtweise ist dadurch gekennzeichnet, dass Vorgehensweisen hinsichtlich zweier Dimensionen charakterisiert werden können. Erstens lassen sich vier subtraktive Vorgehensweisen (‚Abziehen', ‚Start-Finden', ‚additives Ergänzen' sowie ‚subtraktives Ergänzen') unterscheiden und dahingehend charakterisieren, auf welcher Grundvorstellung sie aufbauen (‚Rest' bzw. ‚Unterschied'). Zweitens kann innerhalb der vier Vorgehensweisen unterschieden werden, ob das Ergebnis ‚zählend' oder ‚ableitend' bestimmt wird beziehungsweise ‚auswendig’ verfügbar ist, wobei beim ‚Ableiten’ nochmals ‚Schrittweise’, ‚Stellenweise’, ‚Hilfsaufgabe’ und ‚Vereinfachen’ unterschieden werden können.

3 Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion aus deskriptiver Perspektive – Empirische Befunde

In Kapitel 1 wurde zunächst losgelöst vom Untersuchungsgegenstand der Subtraktion das Grundvorstellungskonzept im Allgemeinen beschrieben. Dabei wurde unter anderem dargelegt, dass das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik sowohl theoretisch als auch deskriptiv genutzt wird.

Diese beiden Perspektiven in der vorliegenden Arbeit berücksichtigend, wurde in Kapitel 2 eine theoretische Perspektive auf die Grundvorstellungen und Vorgehensweisen der Subtraktion eingenommen.

In diesem Kapitel wird nun eine deskriptive Perspektive auf die beschriebenen Grundvorstellungen und Vorgehensweisen der Subtraktion eingenommen. Dazu wird in Kapitel 3.1 zunächst der Forschungsstand bezüglich des Gebrauchs und der Effizienz der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen dargestellt. Darauf aufbauend werden in Kapitel 3.2 die Forschungsfragen des deskriptiven und damit empirischen Teils der vorliegenden Arbeit hergeleitet.

3.1 Forschungsstand

Betrachtet man die empirische Forschungslandschaft bezüglich des Gebrauchs der Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen beim Lösen von Subtraktionsproblemen, so lässt sich konstatieren, dass in der Vergangenheit häufig der Schwerpunkt der Studien auf der Analyse von unterschiedlichen abziehenden Vorgehensweisen und damit auf der zweiten Dimension des in der vorliegenden Arbeit hergeleiteten Kategoriensystems (vgl. Kapitel 2.2.3) lag (vgl. z.B. BENZ 2005, GAIDOSCHIK 2010). In den letzten Jahren ist jedoch vermehrt die erste Dimension der Vorgehensweisen (*Abziehen*, *Start-Finden*, *Additives Ergänzen*, *Subtraktives Ergänzen*)[56] und damit – wenn auch nicht immer explizit von den jeweiligen Autoren ausgewiesen – die Berücksichtigung der beiden Grundvorstellungen der Subtraktion (*Restvorstellung*, *Unterschiedsvorstellung*) in den Forschungsfokus gerückt[57]. Dabei stand vor allem im Inte-

---

[56] Auch wenn dabei zum Großteil lediglich zwischen den Kategorien Abziehen und additivem Ergänzen unterschieden wurde.

[57] Vor allem in der internationalen Forschungslandschaft; insbesondere sei hier die Forschergruppe des Center for Instructional Psychology & Technology aus Leuven (Belgien) um Lieven VERSCHAFFEL erwähnt (vgl. dazu z.B. TORBEYNS ET AL. 2010)

resse der Forschung, inwiefern die auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden, ergänzenden Vorgehensweisen – mit dem Fokus auf dem additivem Ergänzen[58] – im Gegensatz zu den auf der Restvorstellung aufbauenden, abziehenden Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen genutzt werden. Dabei bedienten sich die Autoren vielfältiger Forschungsansätze und damit verbunden einer Fülle an Datenerhebungs- und Auswertungsmethoden, wie zum Beispiel Transkriptanalysen und Reaktionszeitmessungen (VERSCHAFFEL ET AL. 2012), wobei sich der Großteil der Studien an quantitativen Auswertungsmethoden bediente. Da die vorliegende Arbeit genau zu dieser Diskussion einen Beitrag leisten möchte, wird im Folgenden diesbezüglich der Forschungsstand fokussiert.

Dies geschieht auf zwei Ebenen: Zunächst werden in Kapitel 3.1.1 die empirischen Befunde und daraus abgeleitete Schlussfolgerungen bezüglich des Gebrauchs der Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen beim Lösen von Subtraktionsproblemen dargelegt. Anschließend werden in Kapitel 3.1.2 Forschungsergebnisse bezüglich der Effizienz der Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen beschrieben. Kapitel 3.1.3 fasst schließlich die wichtigsten Aussagen dieses Kapitels zusammen.

3.1.1 Gebrauch der Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen

Betrachtet man die Ergebnisse der Studien zunächst global, so lässt sich festhalten, dass sowohl bei der Lösung von formalen subtraktiven Problemstellungen als auch bei der Lösung von subtraktiven Kontextproblemen der Gebrauch von auf der Grundvorstellung des Unterschieds aufbauenden Vorgehensweisen beobachtet werden konnte – dies auch bei ‚Abzieh-Problemen' (vgl. SELTER ET AL. 2012,, 390 unter Bezug auf u.a. BAROODY 1983; BAROODY & GINSBURG 1986; PUTNAM ET AL. 1990; THORNTON 1990; FUSON 1992b; BEISHUIZEN 1997; TREFFERS 2001; CAMPBELL 2008).

Betrachtet man die einzelnen Ergebnisse jedoch etwas differenzierter, so wird deutlich, dass dieses Ergebnis nicht für alle Stichproben und Problemstellungen einheitlich zutrifft (vgl. PELTENBURG ET AL. 2012, 354 f.; SELTER ET AL. 2012, 390, VERSCHAFFEL AT AL. 2012).

[58] Die Forschungsergebnisse bezüglich des subtraktiven Ergänzens sind äußerst spärlich und lassen sich wie folgt zusammenfassen: Subtraktives Ergänzen wird nur extrem selten zur Lösung von Subtraktionsproblemen genutzt (BEISHUIZEN ET AL. 1997; VAN LIESHUIT 1997; TORBEYNS ET AL. 2009b).

Gebrauch der Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen von Erwachsenen und Kindern

Während die Ergebnislage bezogen auf die Gruppe der Erwachsenen recht eindeutig zu sein scheint (diese nutzen ergänzende Vorgehensweisen zur Lösung von formalen ‚Abzieh-Problemen' flexibel in Abhängigkeit von der relativen Größe der Differenz[59] (u.a. GEARY, FRENSCH & WILEY 1993; CAMPBELL & XUE 2001; LEFEVRE ET AL. 2006; TORBEYNS ET AL. 2009d; PETERS ET AL. 2010a)), ist die Ergebnislage bezogen auf die Gruppe der Grundschulkinder heterogener und differenzierter (vgl. SELTER ET AL. 2012, 390; VERSCHAFFEL ET AL. 2012).

Während Forschungsergebnisse aus den 1970er Jahren aussagen, dass Grundschulkinder, auch schon der unteren Klassenstufen, Unterschiedsvorstellungen zur Lösung von Subtraktionsproblemen, auch bei formalen auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen', flexibel in Abhängigkeit von der relativen Größe der Differenz nutzen (GROEN & POLL 1973; WOODS, ET AL. 1975), haben sich die Ergebnisse der empirischen Studien in den letzten Jahren vielmehr dahingehend gewandelt, dass mittlerweile konstatiert wird, dass ergänzende Vorgehensweisen im Gegensatz zu abziehenden Vorgehensweisen äußerst selten von Grundschulkindern *zur Lösung von abziehenden Subtraktionsproblemen* (formale Problemstellungen als auch Kontextprobleme) genutzt werden, sofern sie nicht explizit dazu aufgefordert werden, diese zu nutzen (u.a. BRISSIAUD 1994; BAROODY 1999; KLEIN 1998; BLÖTE ET AL. 2001; SELTER 2001; GAIDOSCHIK 2010, 373 ff.; TORBEYNS ET AL.2010; PETERS ET AL. 2012; PELTENBURG ET AL. 2012).

TORBEYNS ET AL. (2009a) fanden beispielsweise in einer Untersuchung mit 195 Zweit- bis Viertklässlern heraus, dass lediglich 10% der Zweit- und Drittklässler und 15% der Viertklässler wenigstens einmal von sich aus additives Ergänzen bei 15 formalen ‚Abzieh-Problemen' im Hunderterraum, mit zum Teil sehr kleinen Differenzen, zur Lösungsbestimmung nutzten.

Auch in einer weiteren Studie von TORBEYNS ET AL. (2009b) wurde der äußerst geringe Gebrauch von unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen bei formalen ‚Abzieh-Problemen' deutlich. Dabei lösten 157 Zweit- bis Viertklässler, wobei ein Teil der Kinder in Klassen unterrichtet wurden, welche explizit die Vorgehensweise des additiven Ergänzens thematisierten, insgesamt 16 Aufgaben aus dem Hunderterraum mit kleinen Differenzen (<10) beziehungsweise mit Differenzen zwischen 10 und 20 schriftlich. Die Hauptergebnisse dieser

---

[59] Das heißt bei kleinen Differenzen (z.B. 71-69=?) additiv ergänzende Vorgehensweisen und bei großen Differenzen (z.B. 54-6=?) abziehende Vorgehensweisen (PETERS ET AL. 2010a). Dies erscheint unter ökonomischen Gesichtspunkten wie zum Beispiel der Schnelligkeit auch sinnvoll zu sein (vgl. BRISSIAUD 1994; BEISHUIZEN 1997; BLÖTE ET AL. 2000; SELTER 2001; CAMPBEL 2008; TORBEYNS ET AL. 2009d). (vgl. auch Kapitel 3.1.2)

Studie lassen sich wie folgt zusammenfassen: Während lediglich 7,53% der Aufgaben von den Kindern, mit welchen die Vorgehensweise des additiven Ergänzens explizit thematisiert wurde, durch additives Ergänzen gelöst wurden, war die Quote bei den übrigen Kindern noch niedriger (0,19%).

In einer ähnlich designten Follow-up Studie (TORBEYNS ET AL. 2009b), in welcher lediglich die Erhebungsmethode dahingehend geändert wurde, dass die Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler nicht mehr schriftlich, sondern in Form von Interviews erhoben wurden, bestätigten sich die Ergebnisse nochmals.

Da sich jedoch retrospektiv für die Autoren herausstellte, dass „the unexpectedly low frequency of IA strategies [synonym für additives Ergänzen] in the IA-oriented school was probably due to the weak instruction in IA as provided by the textbook and as implemented by the teachers, both from a quantitative and a qualitative perspective“ (TORBEYNS ET AL. 2010, 35), führten sie eine weitere Untersuchung in Form einer Interventionsstudie im Kontrollgruppendesign durch (DE SMEDT ET AL. 2010): 35 Drittklässler, welche zuvor an keinem auf ein Ergänzen ausgerichteten Unterricht teilnahmen und auch von sich aus keine unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen nutzen, wurden dabei zufällig in zwei Gruppen eingeteilt. Während die eine Gruppe explizit in Form von vier Übungssitzungen dazu angeleitet wurde additives Ergänzen zur Lösung von Subtraktionsproblemen zu nutzen, erhielt die andere Gruppe keine explizite Förderung. Das Hauptergebnis der Studie, welches durch drei Tests und einen Nachtest gewonnen wurde, stellt sich dabei wie folgt dar: Während kein Kind aus der Gruppe, welches keine explizite Förderung im additiven Ergänzen erhielt, auch nur zu einem Testzeitpunkt die Vorgehensweise des additiven Ergänzens nutzten, ließ sich auch bei den Kindern, welche explizit gefördert wurden, nur sehr unregelmäßig und selten der Gebrauch des additiven Ergänzens beobachten (Test 1: 0%; Test 2: 5,83%; Test 3: 10,63%; Nachtest: 10,63%[60]).

An dieser Stelle sollte jedoch nochmals betont werden, dass sich die Ergebnisse dieser Studien lediglich auf formale Abzieh-Probleme beziehen. Ganz anders stellen sich nämlich die Ergebnisse dar, wenn Kinder aufgefordert werden subtraktive Problemstellungen – sowohl formale Probleme als auch Kontextprobleme und dabei im Speziellen dynamische – zu lösen, welche auf der Grundvorstellung des Unterschiedes aufbauen (u.a. DE CORTE & VERSCHAFFEL 1987; DE SMEDT ET AL. 2010; PELTENBURG ET AL. 2012; PETERS ET AL. 2012). So konnten PELTENBURG ET AL. (2012) in einer Studie mit einer Stichprobe von 56 Kindern des zweiten Schuljahres aus drei Förderschulen zeigen, dass die Vorgehensweise des additiven Ergänzens im Gegensatz zum Abziehen signifikant ($p<0,05$) häufiger bei Kontextproblemen,

60 Die Prozentangaben beziehen sich dabei jeweils auf den Anteil der Aufgaben, welche durch additives Ergänzen gelöst wurden.

welche das additive Ergänzen ansprechen, genutzt wird, als bei formalen oder in Kontexte eingebundenen ‚Abzieh-Problemen'.

Einflussfaktoren auf den Gebrauch von auf Unterschiedsvorstellungen aufbauenden Vorgehensweisen

Es kann somit als Zwischenfazit festgehalten werden, dass der Gebrauch von unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen schwerpunktmäßig von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung beziehungsweise Vorgehensweise beeinflusst wird (vgl. dazu auch VAN DEN HUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS 2009; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2005; VERSCHAFFEL ET AL. 2007; PETERS ET AL. 2012; VERSCHAFFEL ET AL. 2012). PETERS ET AL. (2012, 342 – Hervorhebung im Original) halten in diesem Zusammenhang auf der Grundlage einer von ihnen durchgeführten quantitativen Studie mit 106 Kindern des dritten bis sechsten Schuljahres als Fazit fest:

> „Children were *not* flexibly switching between direct subtraction [synonym für Abziehen] and subtraction by addition [synonym für additives Ergänzen] depending on the relative size of the subtrahend, neither in the subtraction nor in the addition format [„subtraction format" synonym für formales ‚Abzieh-Problem', „addition format" synonym für formales ‚Additives-Ergänzungs-Problem'].
>
> Rather, they were constantly applying the strategy evoked by the presentation format."

Es lassen sich jedoch neben der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung noch weitere Faktoren ausmachen, welche einen Gebrauch von auf Unterschiedsvorstellungen aufbauenden Vorgehensweisen zu beeinflussen scheinen. So werden in der Literatur, bezogen auf die jeweilige Problemstellung, die Zahleigenschaften und in diesem Zusammenhang vor allem die relative Größe der Differenz als weiterer Einflussfaktor genannt[61] (u.a. GROEN & POLL 1973; WOODS ET AL. 1975; FUSON & WILLIS 1988; BRISSIAUD 1994; BEISHUIZEN 1997; BLÖTE ET AL. 2001; KLEIN ET AL. 1998; DE SMEDT ET AL. 2010; PETERS ET AL. 2012). So konnten PELTENBURG ET AL. (2012, 356) in der von Ihnen durchgeführten Studie signifikante Unterschiede ($p<0.05$) beim Gebrauch des additiven Ergänzens bei Problemstellungen mit kleinen Differenzen im Gegensatz zu Problemstellungen mit großen Differenzen feststellen und damit die Hypothese, dass Schülerinnen und Schüler additives Ergänzen häufiger „in small-difference subtraction problems with crossing the ten than in large-difference problems with or without crossing the ten" nutzen, bestätigen. Sie schreiben in diesem Zusammenhang:

---

[61] U.a. FUSON & WILLIS 1988; BLÖTE ET AL. 2001; KLEIN ET AL.1998 verweisen dabei vor allem auf kleine Differenzen mit Zehnerübergang.

> „IA [synonym für additives Ergänzen] was most frequently applied in small-difference problems without and with crossing ten [...]. DS [synonym für Abziehen] appeared to be most popular procedure in large difference problems [...], even in large large-difference problems that have the minuend and the subtrahend both close to ten". (PELTENBURG ET AL. 2012, 360 p.)

Ab welchem Wert jedoch eine Differenz als klein bezeichnet werden kann, darüber gibt es in der Literatur weder theoretische Ausführungen, noch empirische Befunde, die eine bestimmte Differenzgröße als Schwellenwert für den Gebrauch des additiven Ergänzens identifizieren (vgl. TORBEYNS ET AL. 2009c).

Als möglicher weiterer Einflussfaktor auf den Gebrauch von Unterschiedsvorstellungen zur Lösung von Subtraktionsproblemen – neben der in der jeweiligen Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung und der relativen Größe der Differenz – wird in der Literatur auch der jeweilige Unterricht identifiziert, an welchem die Kinder der verschiedenen Studien teilnahmen. In diesem Zusammenhang beschreiben beispielsweise BLÖTE ET AL. (2000), dass ein auf den flexiblen Gebrauch von unterschiedlichen Vorgehensweisen ausgerichteter Unterricht den Gebrauch von ergänzenden Vorgehensweisen erhöht. Und auch KLEIN ET AL. (1998) und TORBEYNS ET AL. (2009d) identifizieren den Unterricht als Einflussfaktor auf den Gebrauch von Unterschiedsvorstellungen zur Lösung von Subtraktionsproblemen und beschreiben, dass ein Unterricht, welche den Zusammenhang der beiden Grundvorstellungen und den darauf aufbauenden Vorgehensweisen explizit in den Blick nimmt, den Gebrauch von Unterschiedsvorstellungen zur Lösung von Subtraktionsproblemen beeinflusst. PELTENBURG ET AL. (2012) konnten jedoch nicht empirisch nachweisen, dass eine Thematisierung der Vorgehensweise des additiven Ergänzens in der Grundschule den Gebrauch dieser Vorgehensweise tatsächlich beeinflusst. Zu ähnlichen Ergebnissen kommen auch TORBEYNS ET AL. (2009b) und DE SMEDT ET AL. (2010). Bei der Interpretation dieser Ergebnisse sollte man jedoch die Förderung von ergänzenden Vorgehensweisen nicht nur danach beurteilen, ob ergänzende Vorgehensweisen im Rahmen der Förderung überhaupt thematisiert wurden, sondern vielmehr den Blick auf die Qualität der einzelnen Fördermaßnahmen und deren möglichen Wirkungen richten.

Eng mit diesem dritten Einflussfaktor verbunden, lässt sich in der Literatur noch ein weiterer, vierter Einflussfaktor auf den Gebrauch von unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen ausmachen. Dieser fokussiert Eigenschaften der jeweiligen Stichproben: So werden neben dem Alter und der mathematischen Leistung der Kinder (TORBEYNS ET AL. 2009b, vgl. auch PELTENBURG ET AL. 2012, 366) auch ein Verfügen über die beiden Grundvorstellungen der Subtraktion (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS 2009; PETERS ET AL. 2012; GREER 2012; SELTER ET AL. 2012) sowie ein Wissen um den Zusammenhang dieser als mögliche Einflussfaktoren ausgemacht (DE SMEDT 2009). VERSCHAFFEL ET AL. (2012, 331) führen auf dieser Grundlage aus,

„that the ability to transcend the influence of the arithmetical sign and thus to add in the face of a minus and subtract in the face of a plus sign must rest on a strong and flexible understanding of the inverse relation between addition and subtraction.“

3.1.2 Effizienz der Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen

Betrachtet man die Forschungsergebnisse bezüglich der Effizienz der genutzten Vorgehensweisen und damit auch implizit der dahinterliegenden Grundvorstellungen, so kann man feststellen, dass die Effizienz von Vorgehensweisen in der Literatur unter zwei Aspekten analysiert wird. Zum einen kann der Fokus auf der Schnelligkeit einer bestimmten Vorgehensweise in Abgrenzung zu einer Anderen betrachtet werden, zum anderen kann der Blick auf die Erfolgsquoten bestimmter Vorgehensweisen gerichtet sein.

Betrachtet man nun mit diesem Verständnis von Effizienz die empirischen Befunde bezüglich des Gebrauchs von additiv ergänzenden Vorgehensweisen in Abgrenzung zu Abziehenden, so wird deutlich, dass additiv ergänzende Vorgehensweisen effizienter als abziehende Vorgehensweisen zu sein scheinen.

Erfolgsquoten

Bezogen auf die Erfolgsquoten konnten TORBEYNS ET AL. (2009d, 7) in einer von ihnen durchgeführten Untersuchung mit 25 Studierenden, bei denen insgesamt 12 formale Abziehprobleme im Tausenderraum gelöst werden sollten[62], herausfinden, dass

„IA [synonym für additives Ergänzen] was executed with the same (high level of) accuracy as DS [synonym für Abziehen] not only on medim-, but also on small- and large difference subractions.“

In einer darauf aufbauenden Studie mit 39 Studierenden mit ähnlichem Design konnten sogar signifikant höhere Erfolgsquoten beim additiven Ergänzen im Gegensatz zum Abziehen festgestellt werden – und das bei kleinen, mittleren und großen Differenzgrößen.

Aber auch bezogen auf die Gruppe der Grundschulkinder scheinen diese Ergebnisse zuzutreffen. So wiesen PELTENBURG ET AL. (2012) in der von ihnen durchgeführten Studie mit 56 Schülerinnen und Schülern mit sonderpädagogischen Förderbedarf signifikante höhere Erfolgsquoten beim additiven Ergänzen im Gegensatz zum Abziehen nach ($p<0,05$), wobei additives Ergänzen am erfolgreichsten bei kleinen Differenzen angewandt wurde (vgl. dazu auch DE SMEDT ET AL. 2010, TORBEYNS ET AL. 2010). Als Einschränkung

[62] Dabei nutzten die Autoren die „choice/no-choice method“ nach SIEGLER & LEMAIRE (1997), in der die Probandinnen und Probanden die Aufgabenstellungen zum einen mit freier Wahl der Vorgehensweise, zum anderen mit einer vorgegebenen Vorgehensweise lösen sollen.

führen sie jedoch auf Grundlage einer Mehrebenenanalyse an, dass additives Ergänzen kein Prädiktor für hohe Erfolgsquoten ist.

Schnelligkeit

Auch bezogen auf die Schnelligkeit des additiven Ergänzens beim Lösen von Subtraktionsproblemen im Gegensatz zum Abziehen konnte in den letzten Jahren für die Gruppe der Erwachsenen nachgewiesen werden, dass additives Ergänzen nicht nur bei Subtraktionsproblemen mit kleinen Differenzen[63], sondern auch bei Problemstellungen mit mittleren und großen Differenzen signifikant schneller zur Lösung der jeweiligen Problemstellung führt (TORBEYNS ET AL. 2009d).

3.1.3 Zusammenfassung des Forschungsstandes

In Kapitel 3.1.1 wurde herausgestellt, dass Erwachsene zur Lösung von formalen ‚Abzieh-Problemen' ergänzende Vorgehensweisen im Gegensatz zu abziehenden flexibel in Abhängigkeit von der Größe der Differenz nutzen: bei kleinen Differenzen ergänzende Vorgehensweisen, bei großen Differenzen abziehende Vorgehensweisen. Bezogen auf die Gruppe der Kinder sind die Ergebnisse jedoch heterogener und differenzierter. Während sich in den Ergebnissen aus den 1970er Jahren auch Hinweise finden, dass Kinder additives Ergänzen in Abhängigkeit von der Größe der Differenz flexibel nutzen, lässt sich auf der Grundlage der Forschungsergebnisse der letzten Jahre konstatieren, dass Kinder sehr selten von sich aus auf ergänzende Vorgehensweisen zur Lösung von formalen Subtraktionsproblemen zurückgreifen. Vielmehr wird in den Ergebnissen deutlich, dass der Gebrauch von Unterschiedsvorstellungen zur Lösung von subtraktiven Problemstellungen durch bestimmte Faktoren beeinflusst wird. Als anscheinend zentralster Einflussfaktor wurde dabei die durch die Problemstellung angesprochene Grundvorstellung beziehungsweise Vorgehensweise identifiziert. Weiterhin spielt auch die relative Größe der Differenz eine Rolle. So wurde bestätigt, dass additives Ergänzen signifikant häufiger bei Problemstellungen mit kleinen Differenzen genutzt wird. Als weiterer Einflussfaktor auf den Gebrauch von unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen wird weiterhin der Unterricht, an dem die jeweiligen Stichproben teilnahmen, identifiziert. So werden ergänzende Vorgehensweisen häufiger von Kindern genutzt, welche an

[63] Hierzu finden sich in der Literatur zahlreiche theoretische Ausführungen, die betonen, dass ergänzende Vorgehensweisen gerade bei kleinen Differenzen schneller zur Lösung führen als abziehende (vgl. z.B. BRISSIAUD 1994; BEISHUIZEN 1997; SELTER 2001; THRELLFALL 2002; CAMPBELL 2008; TORBEYNS ET AL. 2009d; TRFFERS 2001; VERSCHAFFEL ET AL. 2012). BARRODY ET AL. (2009, 5) bezeichnen in diesem Zusammenhang additives Ergänzen als „computation shortcut".

einem Unterricht teilnahmen, in welchem additives Ergänzen explizit thematisiert wurde. Der vierte Einflussfaktor bezieht sich auf bestimmte Eigenschaften der Stichproben. So werden neben dem Alter und der mathematischen Leistung auch das Verfügen über beide Grundvorstellungen sowie das Wissen um deren Zusammenhang als Einflussfaktoren auf den Gebrauch von ergänzenden Vorgehensweisen beschrieben.

In Kapitel 3.1.2 wurde anschließend dargelegt, dass additives Ergänzen im Gegensatz zu abziehenden Vorgehensweisen effizienter – im Sinne von höheren Erfolgsquoten und Schnelligkeit – zu sein scheint. Dabei gibt es sogar Befunde, die diese Effizienz, bezogen auf beide Ebenen, nicht nur bei Subtraktionsproblemen mit kleinen Differenzen konstatierten, sondern auch für mittlere und große Differenzen nachweisen konnten.

3.2 Herleitung der Forschungsfragen der empirischen Untersuchung

Nachdem in Kapitel 3.1 zunächst aus deskriptiver Perspektive auf die Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen der Subtraktion geschaut wurde und dabei Forschungsergebnisse bezüglich des Gebrauchs und der Effizienz der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen dargestellt wurden, werden in diesem Kapitel darauf aufbauend die Forschungsfragen des empirischen Teils der vorliegenden Arbeit hergeleitet.

Dazu werden in Kapitel 3.2.1 zunächst auf der Grundlage des beschriebenen Forschungstandes offene Fragen sowie Grenzen der in Kapitel 3.1 zitierten empirischen Studien (Kapitel 3.2.1) dargelegt. Dies ist mit dem Ziel verbunden Forschungslücken aufzuzeigen. In Kapitel 3.2.2 werden als Folge dessen die Forschungsfragen des empirischen Teils der vorliegenden Arbeit formuliert.

3.2.1 Offene Fragen und Grenzen der bisherigen empirischen Untersuchungen

Die zentrale Frage, die sich aus den empirischen Forschungsbefunden ergibt und sich auf die Lösung von Abziehproblemen bezieht, bringen SELTER AT AL. (2012, 391 – Hervorhebungen im Original) auf den Punkt:

> „What are possible explanations for the observation that the dd model [synonym für Unterschiedsmodell] seems to be *efficient, but rarely being used?*"

Mögliche Antworten

Als mögliche Antwort auf die von ihnen formulierte Frage führen SELTER ET AL. (2012, 391 – Hervorhebungen im Original) unter Bezug auf FUSON (1992b) aus:

> „Possibly, it is *efficient* because counting on/up is a natural strategy and children are practising to count on as well as to add quite often in different situations, whereas counting down as well as to subtract are usually not being practiced to a similar extend (FUSON 1992[b], p. 256). We hypothise that it has *rarely been used* as the ta model [synonym für Restmodel] is often seen as *the* model of subtraction in daily-life situations as well as in school, whereas the dd model [synonym für Unterschiedsmodell] does not occur that often in both domains. Especially in formal subtractions which are not embedded in a real-life context, the minus sign seems to be closely connected to the ta model for many children.“

In der Literatur lassen sich jedoch von verschiedenen Autoren noch weitere mögliche Antworten auf diese Frage finden, wobei sich diese Antworten auf unterschiedlichen Ebenen klassifizieren lassen.

So wird erstens auf einer unterrichtspraktischen Ebene argumentiert, dass der vorherrschende Unterricht zu sehr die Restvorstellung der Subtraktion und dabei eigentlich ausschließlich das Abziehen fokussiert (u.a. FUSON ET AL. 1997; SELTER 2001; TORBEYNS ET AL. 2009c; DE SMED ET AL. 2010; PETERS ET AL. 2012). Weiterhin wird auf der unterrichtspraktischen Ebene ausgeführt, dass im Unterricht die Lösung von Subtraktionsproblemen mit kleinen Differenzen nur eine untergeordnete Rolle spielt und die ‚Effizienz-Vorteile' der ergänzenden Vorgehensweisen dadurch nicht deutlich werden (DE SMEDT ET AL. 2010). Aber auch die sozio-kulturellen Normen der Lehrerinnen und Lehrer werden auf dieser Ebene als mögliche Antwort vorgebracht: Dabei wird davon ausgegangen, dass Lehrkräfte eher abziehende Vorgehensweisen thematisieren und unterschiedsbestimmende nur marginal beachten (TORBEYNS ET AL. 2009a; PETERS ET AL. 2012; vgl. auch SIEGLER & STERN 1998). Weiterhin wird beschrieben, dass häufig eine ‚Kultur des flexiblen Rechnens' im Unterricht fehlt (vgl. TORBEYNS ET AL. 2009c; DE SMEDT ET AL. 2010).

Zweitens wird auf einer (kognitions-)psychologischen Ebene nach möglichen Erklärungen für den seltenen Gebrauch von Unterschiedsvorstellungen zur Lösung von Abzieh-Problemen gesucht. Beispielsweise wird als mögliche Erklärung angesehen, dass der Zusammenhang der beiden Grundvorstellungen sowie der darauf aufbauenden Vorgehensweisem häufig von den Schülerinnen und Schülern nicht ‚verstanden' wird (vgl. TORBEYNS ET AL. 2009c; TORBEYNS ET AL. 2010). In die gleichen Richtung zielen die Argumentationen mancher Autoren, die den seltenen Gebrauch mit einem Mangel an konzeptuellen Wissen zur Subtraktion erklären (vgl. DE CORTE & VERSCHAFFEL 1981; BAROODY 2003; BAROODY ET AL. 2009; DE SMEDT ET AL. 2010). Ein weiterer Aspekt auf der (kognitions-)psychologischen Ebene befasst sich unter dem Aspekt „strategy switch costs“ mit der kognitiven Anstrengung, die mit einem Wechsel der Grundvorstellung einhergeht. Dabei beschreiben die Autoren, dass die Vorteile, welche durch einen Wechsel der Grundvorstellung entstehen (im Sinne einer schnelleren Lösung), die kognitive Anstrengung des Wechsels häufig nicht aufwiegen und Individuen deshalb in der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung beziehungsweise Vorgehensweise verbleiben (vgl. LEMAIRE & LECACHEUR 2010; LUWEL ET AL. 2009).

Offene Fragen und Forderungen an nachfolgende empirische Untersuchungen

Es lassen sich jedoch in der Literatur beziehungsweise auf der Grundlage der Grenzen der einzelnen empirischen Studien noch weitere offene Fragen und Forderungen an nachfolgende empirische Untersuchungen festhalten.

Zunächst lässt sich konstatieren, dass nach wie vor nicht zufriedenstellend geklärt ist, wie, wann und warum unterschiedsbestimmende Vorgehensweisen genutzt werden (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS 2009) und welche Schwierigkeiten dabei auftreten (vgl. PETERS ET AL. 2012; VERSCHAFFEL ET AL. 2012).

Auch ist nicht geklärt, ob beziehungsweise welcher Zusammenhang zwischen dem Verständnis des Zusammenhanges der beiden Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen und dem Gebrauch von ergänzenden Vorgehensweisen besteht (vgl. BAROODY ET AL. 2009; PETERS ET AL. 2012; aber auch GILMORE & PAPADATOU-PASTOU 2009).

Kaum deutschsprachige Studien

Dies gilt vor allem auch für Schülerinnen und Schüler aus Deutschland, da sich nahezu keine Studien systematisch mit dem expliziten Fokus auf dem Zusammenspiel der beiden Grundvorstellungen der Subtraktion zur Lösung von Subtraktionsproblemen im deutschsprachigen Raum finden lassen.[64]

Nahezu keine Längsschnittanalysen

Weiterhin lässt sich festhalten, dass sich nahezu keine Längsschnittanalysen finden lassen, welche mit dem Fokus auf den beiden Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen die Subtraktion untersuchen[65] (vgl. BAROODY ET AL. 2009; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS 2009; TORBEYNS ET AL 2009c; PETERS ET AL. 2012). Diese längsschnittliche Perspektive könnte unter anderem mit dem Ziel verbunden sein, zu klären, wie sich zum einen Unterschiedsvorstellungen im Allgemeinen, zum anderen aber auch das Loslösen von der durch die Problemstellung angesprochenen

---

[64] Eine Ausnahme stellt hier die zu der vorliegenden Arbeit parallel entstandene Dissertation von SCHWÄTZER (2014) dar, der den Gebrauch von unterschiedsbestimmenden halbschriftlichen ableitenden Vorgehensweisen in einem dritten Schuljahr über ein Halbjahr dokumentiert.

[65] Hier sei zwar auf die Längsschnittanalyse von GAIDOSCHIK (2010) verwiesen, der jedoch in seiner Studie die zweite Dimension der Vorgehensweisen (Zählen, Ableiten, Wissen) fokussiert. Damit verbunden kategorisiert er die Vorgehensweisen nicht entlang der beiden Grundvorstellungen der Subtraktion.
Weiterhin sei auch hier auf SCHWÄTZER (2014) verwiesen.

Grundvorstellung beziehungsweise Vorgehensweise – oder kürzer das Wechseln der Grundvorstellungen – (weiter-) entwickelt.[66]

Nahezu keine Forschungsergebnisse bezogen auf das erste Schuljahr
Außerdem wird mit Blick auf die bisherigen Studien deutlich, dass sich diese größtenteils auf die Schuljahre zwei bis sechs konzentrieren und Schülerinnen und Schüler der ersten Jahrgangsstufe keine Beachtung finden. Mit dem Fokus auf Erstklässlerinnen und Erstklässler könnte beispielsweise untersucht werden, über welche Vorkenntnisse Schülerinnen und Schülern vor der schulischen Einführung in die Subtraktion verfügen und wie sich diese während der ersten systematischen Thematisierung (weiter-) entwickeln.

Nahezu keine Interventionsstudien
Eine weitere Perspektive, welche in den bisherigen Studien nur eine untergeordnete Rolle spielt, ist die der Intervention. Zwar lassen sich einzelne Studien finden, welche diese Perspektive einnehmen (z.B. DE SMEDT ET AL. 2010; aber auch FUSON & WILLIS 1988; KLEIN ET AL. 1998; BLÖTE ET AL. 2000; HEINZE ET AL. 2009). Diese fokussieren jedoch zum Großteil nicht den Gebrauch von Unterschiedsvorstellungen zur Lösung von Subtraktionsproblemen, sondern versuchen flexibles Rechnen im Allgemeinen zu fördern (z.B. HEINZE ET AL. 2009), oder haben aber nicht explizit zum Ziel lernförderliche Elemente der Lernumgebung zu identifizieren (z.B. DE SMEDT ET AL. 2010).

Abschließend sei noch auf vier Aspekte, die bisherigen Studien betreffend, verwiesen:

Größtenteils quantitative Ausrichtung der Studien
Erstens sei darauf verwiesen, dass sich der Großteil der Studien dem Forschungsgegenstand aus dem quantitativen Paradigma nähert. Damit verbunden werden im Zentrum dieser methodologischen Forschungsausrichtung entweder die auf der Grundlage von theoretischen Überlegungen und beziehungsweise oder früheren empirischen Ergebnissen formulierten Hypothesen ‚lediglich' verifiziert beziehungsweise falsifiziert (vgl. z.B. FLICK 2002, 68) oder aber Verteilungen von Phänomen bei bestimmten Stichproben erhoben (vgl. z.B. STEINKE 2008, 326 f.). Eine qualitative und damit eher hypothesengenerierende Forschungsausrichtung (vgl. z.B. FLICK 2002, 68) könnte dagegen den Diskurs bereichern, indem durch den offenen Zugang die Möglichkeit besteht, auch *neue* empirisch gewonnene Zusammenhänge zu erschließen (vgl. dazu auch KUHNKE 2012, 107).

---

[66] GREER (2012, 433 in Anlehnung an SELTER ET AL. 2012) führt in diesem Kontext sogar aus: „In general, the teaching of mathematics requires a „longitudinal perspective".“

Keine einheitliche Zuordnung der Vorgehensweisen zu den beiden Grundvorstellungen der Subtraktion

Zweitens sei darauf verwiesen, dass die erhobenen Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler in den einzelnen Studien nicht einheitlich den Grundvorstellungen der Subtraktion zugeordnet werden. PELTENBURG ET AL. (2012, 354) ordnen beispielsweise die ableitenden Vorgehensweisen Hilfsaufgabe und Vereinfachen sowie das Auswendigwissen (zweite Dimension der Vorgehensweisen; vgl. Kapitel 2.2.3) nicht den beiden Grundvorstellungen der Subtraktion zu. In Kapitel 2.2 wurde jedoch dargelegt, dass auch auf dieser Ebene Zuordnungen zu den Grundvorstellungen der Subtraktion möglich sind.

Nahezu keine Betrachtung der zweiten Dimension zur Analyse der unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen

Drittens sei in diesem Zusammenhang auch darauf hingewiesen, dass genau zu dieser Frage, wie sich ergänzende Vorgehensweisen hinsichtlich der zweiten Dimension (Zählen, Ableiten (Schrittweise, Stellenweise, Hilfsaufgabe, Vereinfachen), Wissen; vgl. Kapitel 2.2.3) realisieren, so gut wie keine Forschungsergebnisse finden lassen (PELTENBURG ET AL. 2012).[67]

Größtenteils Fokussierung auf formale Subtraktionsprobleme

Viertens sei darauf verwiesen, dass in den Studien, welche sich explizit mit dem Zusammenspiel der beiden Grundvorstellungen der Subtraktion zur Lösung von Subtraktionsproblemen beschäftigen, häufig formale Subtraktionsprobleme fokussiert werden und kontextgebundene – dabei vor allem statische – eine eher untergeordnete Rolle spielen.

3.2.2 Formulierung der Forschungsfragen

Aufbauend auf den Ausführungen des vorherigen Kapitels 3.2.1 werden im Folgenden die Forschungsfragen für den empirischen Teil der vorliegenden Arbeit formuliert. Dabei können selbstverständlich nicht alle der im vorherigen Kapitel aufgeführten Aspekte berücksichtigt werden. Vielmehr soll folgende Auswahl in der vorliegenden Arbeit Berücksichtigung finden:

- Qualitative und damit hypothesengenerierende Ausrichtung der Forschungsfragen,
- Fokussierung auf das erste Schuljahr,
- Berücksichtigung der ersten *und* zweiten Dimension zur Analyse der subtraktiven Vorgehensweisen sowie

---

[67] Auch hier sei auf die parallel zu der vorliegenden Arbeit entstandene Dissertation von SCHWÄTZER (2014) verwiesen.

- Berücksichtigung von formalen und kontextgebundenen (dynamischen und statischen) Subtraktionsproblemen.

Damit ergibt sich für den empirischen Teil dieser Arbeit folgende übergeordnete Forschungsfrage:

Inwiefern nutzen Schülerinnen und Schüler des ersten Schuljahres Unterschiedsvorstellungen und darauf aufbauende Vorgehensweisen zur Lösung von formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen?

Diese übergeordnete Forschungsfrage wird dabei entlang von zwei Forschungsschwerpunkten und insgesamt sechs Forschungsfragen beantwortet.

Forschungsschwerpunkt 1: Gebrauch der Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen

- *FF 1: Wie nutzen Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen der Subtraktion zur Lösung von formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen beziehungsweise zur Rechtfertigung ihrer Ergebnisse?*
- *FF 2: Welche Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen werden von Schülerinnen und Schülern bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen genutzt?*
- *FF 3: Inwiefern wirken Vorgehensweisen innerhalb einer Grundvorstellung zusammen?*
- *FF 4: Inwiefern wirken Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg zusammen?*

Forschungsschwerpunkt 2: Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung

- *FF 5: Wie wechseln Schülerinnen und Schüler von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen?*
- *FF 6: Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen?*

4 Von den Forschungsfragen zur Methodologie und dem Design der empirischen Untersuchung

Nachdem im vorherigen Kapitel die Forschungsfragen des deskriptiven und damit empirischen Teils der vorliegenden Arbeit auf der Grundlage der Darstellung des empirischen Forschungsstandes hergeleitet und formuliert wurden, hat dieses Kapitel zum Ziel das gewählte Design der Untersuchung zu entfalten. Dazu wird zunächst in Kapitel 4.1 die methodologische Ausrichtung der empirischen Untersuchung beschrieben. Anschließend wird in Kapitel 4.2 das konkrete Design der Untersuchung dargelegt. In Kapitel 4.3 wird im Anschluss die Stichprobe näher charakterisiert, bevor in Kapitel 4.4 abschließend der Ablauf der Analyse der Daten sowie die diesbezüglichen Auswertungsmethoden beschrieben werden.

4.1 Methodologie der empirischen Untersuchung

In Kapitel 3.2.1 wurde unter anderem herausgestellt, dass sich nur ein sehr geringer Anteil der empirischen Untersuchungen, welche dem qualitativen Forschungsparadigma zugeordnet werden können, dem Untersuchungsgegenstand nähert. Daher wurden die Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit explizit so gewählt, um den empirischen Diskurs um den Forschungsgegenstand auf einer qualitativen Ebene zu bereichern. Dabei ist neben der hypothesengenerierenden Ausrichtung (vgl. z.B. FLICK 2002, 68) ein weiteres Charakteristikum der qualitativen Forschung, dass nicht die Repräsentativität der Ergebnisse – so wie bei der quantitativen Forschungsausrichtung – im Mittelpunkt steht (vgl. FLICK 2002, 68; aber auch LAMNEK 2005, 183). Diese Repräsentativität kann jedoch nach JUNGWIRTH (2003, 196) auch nicht negiert werden. So führt sie unter Bezug auf BECK & MAIER (1994, 65) aus:

> „Die Frage der Generalisierung ist in der interpretativen Forschung [hier synonym zu qualitativer Forschung verstanden] nicht mit „nein“ zu beantworten: Sie würde „hinter ihren Möglichkeiten zurückbleiben und ihr Erkenntnispotential verkennen, wenn sie sich auf die Rekonstruktion der jeweiligen Situation in ihrer Spezifität beschränken würde“ (Beck & Maier 1994 [...]). So kann texttheoretisch begründet werden, dass das Allgemeine in den intentions-, situations- und adressatenüberschreitenden Deutungen selbst angelegt ist. Dadurch, dass diese sich von den direkten Bezügen auf die sie eingehenden Daten lösen und ihren Gegenstand auf einer theoretischen Ebene rekonstruieren, erweitert sich ihr Anwendungsbereich. Die Deutungshypothesen passen auf die Daten, anhand derer die generiert wurden, aber sie weisen aufgrund ihrer begrifflich-theoretischen Qualität auch darüber hinaus auf andere, neue.“ (JUNGWIRTH 2003, 169)

Neben diesen beiden Charakteristika ist eine weitere Eigenschaft qualitativer Forschungsprozesse, dass die Forschungsergebnisse mittels abduktiver Schlüsse gewonnen werden. Nach JUNGWIRTH (2003, 192 f.) bedeutet Abduktion dabei

> „die Konstruktion einer neuen Regel, mit der sich ein gegebenes, noch nicht einordenbares Phänomen erklären lässt. Gleichsam probeweise wird ein Zusammenhang formuliert, unter dessen angenommener Gültigkeit das Phänomen plausibel erscheint."

Weiterhin führt sie unter Bezug auf KELLE (1994, 150) in diesem Zusammenhang aus:

> „die Abduktion rekurriert [dabei] auf Bekanntes, macht aber auch den entscheidenden Schritt darüber hinaus: „Neue wissenschaftliche Ideen entstehen also aus einer Kombination von altem Wissen und neuer Erfahrung [...]" (Kelle 1994, 150)". (JUNGWIRTH 2003, 193)

Somit nimmt das theoretisch begründete und hergeleitete Vorwissen der jeweiligen Forscherinnen und Forscher eine sehr entscheidende Rolle im Forschungsprozess ein (vgl. dazu auch MOSER 2001, 323). BECK & MAIER (1993, 167) schreiben dazu:

> „Ein zunächst noch wenig determiniertes theoretisches Vorverständnis wird in einem steten Austausch zwischen offener Materialerhebung und theoriegeleiteter Interpretation genauer bestimmt, verändert und korrigiert."

Gütekriterien qualitativer Forschung

Stellt man die Frage, an welchen Gütekriterien qualitative Forschungsarbeiten gemessen werden können, so wird deutlich, dass die Gütekriterien des quantitativen Forschungsparadigmas – Objektivität, Reliabilität, Validität (vgl. z.B. SEIPEL & RIEKER 2003, 126 ff.) – nicht einfach auf das qualitative Paradigma übertragen werden können (z.B. FLICK 1995, 167; STEINKE 2008; JUNGWIRTH 2003, 169 f.; SEIPEL & RIEKER 2003, 128 ff.; LAMNEK 2005, 142 ff.).

Dies sieht STEINKE (2008, 323) darin begründet, da die Kriterien Objektivität, Reliabilität und Validität für „standardisierte Forschung [hier synonym zu quantitativer Forschung verstanden] entwickelt [wurden] und [...] daher nur bedingt auf qualitative Forschung übertragbar" sind. Daher formuliert sie (STEINKE 2008, 232 ff.) auf der Grundlage der Besonderheiten qualitativer Forschung (geringe Formalisierbarkeit und Standardisierbarkeit) sogenannte „Kernkriterien qualitativer Forschung"[68]. Diese lauten:

- Intersubjektive Nachvollziehbarkeit,

[68] Andere Autoren sprechen sich hingegen dafür aus, die drei Gütekriterien quantitativer Forschung mit einem etwas anderen, erweiterten Begriffsverständnis auch auf die qualitative Forschung zu übertragen (vgl. SEIPEL & RIEKER 2003, 128 ff.). STEINKE (2008, 323) plädiert jedoch dafür, dass bewusst auf die drei Kriterien verzichtet werden sollte, um so ein *eigenes* Profil der Gütekriterien qualitativer Forschung zu prägen.

- Indikation des Forschungsprozesses,
- Empirische Verankerung,
- Limitation,
- Kohärenz sowie
- Reflektierte Subjektivität.

Im Folgenden wird eine Auswahl der Kernkriterien kurz erläutert und deren Berücksichtigung in der vorliegenden Arbeit dargestellt.[69] Dies ist mit dem Ziel verbunden die methodologische und methodische Ausgestaltung des empirischen Teils der vorliegenden Arbeit zu begründen.

Intersubjektive Nachvollziehbarkeit
Um intersubjektive Nachvollziehbarkeit herzustellen, sollten folgende drei Ebenen Berücksichtigung werden:

- Dokumentation des Forschungsprozesses:

  Dieser Punkt zielt auf die möglichst umfassende Darstellung des Forschungsprozesses.

  Dieses Kriterium wird in der vorliegenden Arbeit dahingehend erfüllt, da sowohl das theoretische Vorverständnis des Autors (Kapitel 4.4.1.1) als auch der Ablauf und die Datenerhebungsmethoden der empirischen Untersuchung umfassend dargestellt werden (Kapitel 4.2). Weiterhin wird die Stichprobe charakterisiert (Kapitel 4.3) und die Auswertungsmethode explizit beschrieben (Kapitel 4.4). Die Darstellung der Ergebnisse wird außerdem immer zusammen mit der dazugehörigen Analyse der Daten dargestellt (Kapitel 5).
- Interpretationen in Gruppen:

  Dieser Punkt meint, dass die Analyse des Datenmaterials mit dem Ziel der konsensuellen Validierung diskursiv stattfinden sollte.

  Dies wurde in der vorliegenden Arbeit dahingehend berücksichtigt, da die Interpretation des Datenmaterials in Arbeitsgemeinschaften innerhalb einer Arbeitsgruppe des Instituts für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (kurz IEEM) an der Technischen Universität Dortmund stattfand.
- Anwendung kodifizierter Verfahren:

  Dieses Kriterium zielt auf die Offenlegung der zur Datenanalyse eingesetzten Analysemethoden.

---

69 Dass lediglich eine Auswahl der Kernkriterien betrachtet wird, liegt darin begründet, dass die Kriterien nicht immer trennscharf sind und nach STEINKE (2008, 232 f.) die Berücksichtigung der Kriterien untersuchungsspezifisch erfolgen sollte.

In der vorliegenden Arbeit ist dieser Punkt realisiert, da in Kapitel 4.4 die Auswertungsmethoden explizit dargelegt werden.

Indikation des Forschungsprozesses
Die Indikation des Forschungsprozesses realisiert sich dabei auf sechs Ebenen. Im Folgenden werden jedoch nur die zwei zentralsten Ebenen erläutert:

- Indikation des qualitativen Vorgehens angesichts der Fragestellung:

  Wie bereits in Kapitel 3.2 erläutert, soll die vorliegende Arbeit den Diskurs um den Forschungsgegenstand auf einer qualitativen Ebene bereichern. Demzufolge wurde bereits den Forschungsfragen eine qualitative Ausrichtung verliehen.

- Indikation der Methodenwahl:

  Dieser Punkt beschäftigt sich mit der Frage, ob die eingesetzten Methoden gegenstandsangemessen sind.

  In Kapitel 1.1.2 wurde herausgestellt, dass Grundvorstellungen in Übersetzungsprozessen zwischen Darstellungen rekonstruiert werden können – wobei der Begriff der *Darstellung* dabei sehr weit gefasst wird (vgl. Kapitel 1.1.2). Daher ist eines der zentralen Elemente dieser empirischen Untersuchung Übersetzungsprozesse von Schülerinnen und Schülern zur Lösung von Subtraktionsproblemen zu rekonstruieren (vgl. Kapitel 4.4.1.1). Diese Übersetzungsprozesse wurden in Einzelinterviews erhoben (vgl. Kapitel 4.2.2). Weiterhin wurde aufgrund der längsschnittlichen Ausrichtung der Forschungsfragen ein dementsprechendes Forschungsdesign gewählt (vgl. Kapitel 4.2.1).

Limitation
STEINKE (2008, 329) schreibt dazu:

> „Dieses Kriterium dient dazu, im Sine eines <testing the limits> die Grenzen des Geltungsbereichs, d. h. der Verallgemeinerbarkeit einer im Forschungsprozess entwickelten Theorie, herauszufinden und zu prüfen.“

Dabei sind ihres Erachtens Techniken wie die „*Fallkontrastierung*“ und die „explizite Suche und Analyse *abweichender, negativer und extremer Fälle*“ hilfreich (STEINKE 2008, 330 – Hervorhebungen im Original). In der vorliegenden Arbeit ist dieses Kriterium insofern berücksichtigt, da die Typenbildung auf der Grundlage von Fallkontrastierungen ein zentrales Vorgehen bei der Datenanalyse darstellt (vgl. Kapitel 4.4.1.2).

4.2 Design der empirischen Untersuchung

Nachdem im vorherigen Kapitel die methodologische Ausrichtung der empirischen Untersuchung der vorliegenden Arbeit dargelegt wurde, widmet sich dieses Kapitel der konkreten Beschreibung des Designs der empirischen Untersuchung. Dazu wird zunächst der Ablauf der Studie beschrieben (Kapitel 4.2.1). In Kapitel 4.2.2 wird anschließend die Konzeption der eingesetzten Datenerhebungsmethode in Form von Interviews entfaltet.

4.2.1 Ablauf der empirischen Untersuchung

Um dem Fokus auf ein erstes Schuljahr Rechnung zu tragen (vgl. Kapitel 3.2.2) und dabei möglichst ein breites Spektrum an Vorgehensweisen und (Grund-) Vorstellungen *über ein gesamtes Schuljahr* beschreiben zu können, wurden die Vorgehensweisen und (Grund-) Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern eines ersten Schuljahres über ein Schuljahr hinweg (2009/2010) in insgesamt vier Erhebungszeitpunkten mittels jeweils der gleichen leitfadengestützten Einzelinterviews[70] (vgl. Kapitel 4.2.2) erhoben (vgl. Abb. 4-1)[71]. Ein Interview war dabei in zwei Teile gegliedert und wurde – wenn möglich – an zwei aufeinanderfolgenden Schultagen durchgeführt. Dies liegt darin begründet, dass die Gesamtdauer eines Interviews durchaus über 45 Minuten betrug und die Aufmerksamkeitsspanne der Erstklässlerinnen und Erstklässler als eher kurz eingeschätzt wurde. Die Interviews wurden dabei vom Autor der vorliegenden Arbeit während der Unterrichtszeit in einem separaten Raum in der Schule selbst durchgeführt und videographiert. Anschließend wurden die Interviews durch studentische Hilfskräfte des IEEM transkribiert. Dabei wurden neben den Äußerungen der Akteure auch deren Handlungen festgehalten. Diese Transkripte dienten schließlich als Auswertungsgrundlage (vgl. Kapitel 4.4).

---

70 Die Interviews wurden von Mai bis Juni 2009 mit vier Kindern aus einem ersten Schuljahr einer Grundschule sowie acht Kindern aus zwei Kindergärten erprobt und infolgedessen weiterentwickelt. Dabei stand vor allem im Fokus passende Problemstellungen zu identifizieren (vgl. Kapitel 4.2.2.2) sowie Verständnisschwierigkeiten bei den einzelnen Aufgaben und Fragen bereits im Vorfeld aufzudecken.

71 Außerdem war es dadurch auch möglich Forschungsfrage 6 (‚Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen?') zu beantworten.

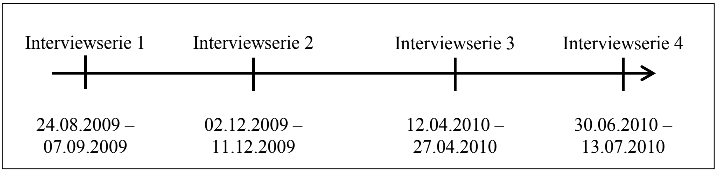


Abbildung 4-1: Zeitlicher Ablauf der Datenerhebung

Um zusätzlich zu den mittels Interviews erhobenen Daten Hintergrundinformationen bezüglich der unterrichtlichen Thematisierung der Subtraktion zu erheben, wurden in Absprache mit der Mathematiklehrerin der Klasse ausgewählte Unterrichtsstunden in Form von teilnehmenden, offenen Beobachtungen (vgl. BORTZ & DÖRING 2006, 267) durch den Autor der vorliegenden Arbeit dokumentiert[72]. Dies umfasste die ‚Einführungsstunden' in die Vorgehensweise des Abziehens sowie in die Vorgehensweise des additiven Ergänzens. Diese Dokumentation wurde dabei jedoch nicht durchgeführt, um Rückschlüsse auf den Unterricht und dabei im Speziellen lernförderliche beziehungsweise lernhemmende Elemente zu identifizieren. Vielmehr sollte die punktuelle Dokumentation des Unterrichts dazu dienen Hintergrundinformationen zur unterrichtlichen Thematisierung der Subtraktion beschreiben zu können (Kapitel 4.3.2) und vor diesem Hintergrund die gewonnenen Ergebnisse (Kapitel 5) einzuordnen. Dabei sei darauf hingewiesen, dass der Mathematiklehrerin der Klasse keine Vorgaben hinsichtlich der inhaltlichen und methodischen Ausrichtung des Mathematikunterrichts und dabei im Speziellen der Thematisierung der Subtraktion erteilt wurden.

4.2.2 Konzeption der Interviews

Zur Erhebung der Daten wurden leitfadengestützte Interviews, welche sich sowohl an der revidierten klinischen Methode PIAGETS (vgl. z.B. HUNTING 1997; SELTER & SPIEGEL 1997) als auch an Ideen der Klientenzentrierung nach ROGERS (1945) orientierten, eingesetzt. Inwiefern Elemente beziehungsweise Ideen dieser beiden Methoden berücksichtigt wurden, wird in Kapitel 4.2.2.1 dargestellt. Kapitel 4.2.2.2 konkretisiert anschließend die für die Untersuchung ausgewählten Typen von Problemstellungen. Darauf aufbauend wird in Kapitel 4.2.2.3 der Leitfaden der Interviews beschrieben.

---

72 Vgl. dazu GREER (2012, 437):
„Document the instructional history of the students, such as what they have been taught, the teaching approaches adopted, the nature of the curriculum, textbooks, and so on.“

4.2.2.1 Zur Interviewmethode

Wie bereits in der Einleitung in dieses Teilkapitel erwähnt, orientierte sich die Durchführung der Interviews zum einen an der von PIAGET (weiter-) entwickelten und genutzten revidierten klinischen Methode (vgl. HEINZEL 1997; HUNTING 1997; SELTER & SPIEGEL 1997) und zum anderen an Ideen der Klientenzentrierung nach ROGERS (1945). Im Folgenden wird erläutert, inwiefern Elemente der beiden Methoden in der vorliegenden Studie berücksichtigt wurden.[73]

Zur revidierten klinischen Methode

Die revidierte klinische Methode ist mittlerweile in der Mathematikdidaktik eine bewährte Interviewmethode, um Vorgehensweisen und Vorstellungen von Lernenden zu erheben (vgl. HUINKER 1993, 86) und geht zurück auf PIAGET, der diese zur Kinderpsychoanalyse (weiter-) entwickelte.

Das intendierte Ziel der Methode ist dabei das interviewte Kind „durch behutsames Nachfragen [...] zur Offenlegung seiner Gedankenwelt zu animieren“ (SPIEGEL & SELTER 1997, 100 f.) und nicht möglichst schnell zur ‚richtigen’ Lösung zu ‚leiten’. Dabei werden nicht nur die sprachlichen Äußerungen, sondern auch die Handlungen der Kinder betrachtet (SPIEGEL & SELTER 1997). Dies liegt darin begründet, dass PIAGET davon ausging, dass Kinder durchaus Schwierigkeiten haben können ihre Gedankengänge zu verbalisieren (SPIEGEL & SELTER 1997; GINSBURG & OPPER 2004; 150).

Insgesamt handelt es sich bei der Methode um ein halbstandardisiertes Interviewverfahren, welches dadurch bestimmt ist, dass den Kindern auf der einen Seite festgelegte Aufgaben beziehungsweise Leitfragen gestellt werden, auf der anderen Seite jedoch der konkrete Interviewverlauf im Detail nicht festgelegt ist und somit vom Interviewer flexibel gestaltet werden kann (WITTMANN 1982, 37; SPIEGEL & SELTER 1997).

Ein weiteres zentrales Charakteristikum ist das Erzeugen sogenannter „kognitiver Konflikte“ (SPIEGEL & SELTER 1997, 108). Dabei geht es darum die Aussage und Argumente des Kindes mit widersprüchlichen Aussagen und Argumenten zu konfrontieren, um so die Konsistenz beziehungsweise Stabilität des Denkens der Kinder untersuchen zu können.

---

[73] Für eine ausführliche Darstellung der beiden Methoden sei verwiesen auf:
Zur klinischen Methode: SPIEGEL & SELTER (1997)
Zur Klientenzentrierung: ROGERS (1945)

Zur Klientenzentrierung

Die Methode, welche auch als „weiches Interview“ (ATTESLANDER 2006, 126) bezeichnet werden kann, geht zurück auf ROGERS (1945), der sie in der psychologischen Beratung und Psychoanalyse verwendete und anschließend auch für die Sozialforschung nutzbar machte (DIECKMANN 2005, 376).
Zentrales Charakteristikum ist dabei der bewusste Verzicht auf Neutralität. Vielmehr sollen die Interviewten zu weiteren Antworten und Erläuterungen durch zustimmende Reaktionen des Interviewers ermuntert werden (vgl. DIEKMANN 2005, 376). HUHMANN (2013, 68) beschreibt in diesem Zusammenhang, dass unter zustimmenden Reaktionen

> „Verhaltensweisen in der Gestik und Mimik sowie unterstützende sprachliche Hinweise, die Übernahme der Sprache des Interviewten zur Herstellung einer gemeinsamen Sprache und die Anwendung der Gesprächstechnik des „Spiegelns“ verstanden [werden], bei der der exakte Wortlaut des Interviewten vom Interviewer wiederholt wird.“

Die Gesprächsatmosphäre wird dabei von „empathischen Aspekten“ getragen und sollte mit einem „offenen Gespräch unter Freunden“ vergleichbar sein (HUHMANN 2013, 69).

4.2.2.2 Zur Auswahl der Problemstellungen

In Kapitel 3.1 wurde herausgearbeitet, dass der Gebrauch von auf Unterschiedsvorstellungen aufbauenden Vorgehensweisen durch bestimmte Faktoren, unter anderem die gegebenen Typen von subtraktiven Problemstellungen betreffend, beeinflusst werden können. Dabei ist sicherlich die durch die Problemstellung angesprochene Grundvorstellung beziehungsweise Vorgehensweise als am zentralsten anzusehen. Weiterhin scheint die relative Größe der Differenz den Gebrauch von Unterschiedsvorstellungen zur Lösung von Subtraktionsproblemen zu beeinflussen. Diese beiden Ebenen wurden auch in der vorliegenden empirischen Untersuchung berücksichtigt und um die Perspektive der Größe des Zahlenraums erweitert[74]. Die Größe des Zahlenraums als weitere Ebene miteinzubeziehen liegt darin begründet, dass die Schülerinnen und Schüler im Laufe des ersten Schuljahres zahlreiche Ergebnisse zu Subtraktionsproblemen des Zwanzigerraumes, dessen Erarbeitung im ersten Schuljahr idealtypisch vorgesehen ist, über auswendig gewusste Zahlensätze und Zahlbeziehungen direkt benennen können (vgl. dazu z.B. die Ergebnisse von GAIDOSCHIK 2010). Um die Kinder im Gesamtverlauf des Schuljahres jedoch immer wieder mit Problemstellungen zu konfrontieren, dessen Ergebnisse sie nicht auswendig wussten, wurde

[74] Vgl. dazu PELTENBURG ET AL. (2012), die fordern möglichst alle Einflussfaktoren zu berücksichtigen und nicht explizit nach unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen zu fragen.

der in den Problemstellungen genutzte Zahlenraum über den Zwanzigerraum hinaus erweitert.

Bevor ein Gesamtüberblick über die in der Studie eingesetzten Problemstellungen gegeben wird, werden die auf den drei Ebenen getroffenen Entscheidungen dargelegt.

Typen von Problemstellungen

Betrachtet man die Ergebnisse der weiterführenden stoffdidaktischen Überlegungen in Kapitel 2.2.1, so kann man auf der Ebene der formalen Subtraktionsprobleme vier Typen von Problemstellungen (‚Abzieh-Probleme',, ‚Start-Finde-Probleme', ‚Additive-Ergänzungs-Probleme' und ‚Subtraktive-Ergänzungs-Probleme') und auf der Ebene der Kontextprobleme vier dynamische (‚Abzieh-Probleme', Start-Finde-Probleme', ‚Additive-Ergänzungs-Probleme' und ‚Subtraktive-Ergänzungs-Probleme') und drei statische Typen von Problemstellungen (‚Vereinigen', ‚Vergleichen: Unterschied' gesucht und ‚Vergleichen: Rest gesucht') unterscheiden.

Da es den Rahmen der vorliegenden Arbeit überstiegen hätte, alle möglichen Typen von Problemstellungen systematisch zu untersuchen, wurde sich für eine Auswahl von Typen von Problemstellungen entschieden, wobei sowohl formale Subtraktionsprobleme als auch dynamische und statische Kontextprobleme aufgegriffen werden sollten.

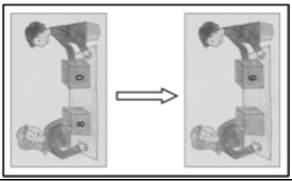
Da das übergeordnete Forschungsinteresse darin besteht, zu untersuchen, inwiefern auf Unterschiedsvorstellungen aufbauende Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen genutzt werden und dabei unter anderem der Frage nachzugehen, inwiefern die Kinder dabei von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung beziehungsweise Vorgehensweise in die jeweils andere Grundvorstellung beziehungsweise andere Vorgehensweisen wechseln (Forschungsfrage 5 und Forschungsfrage 6), wurde sich bezogen auf die *formalen Subtraktionsprobleme* und die *dynamischen Kontextprobleme* für auf der Grundvorstellung des Rests aufbauende *‚Abzieh-Probleme'* entschieden. Weiterhin bilden diese Problemtypen den Kern der Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit der Subtraktion im Mathematikunterricht der Grundschule.

Auf der Ebene der *statischen Kontextprobleme* wurde sich zum einen für das keiner der beiden Grundvorstellungen eindeutig zuordenbares *‚Vereinigen'* entschieden. Zum anderen wurde das auf der Grundvorstellung des Unterschieds aufbauende Kontextproblem *‚Vergleichen: Unterschied gesucht'* ausgewählt. Die Auswahl dieser beiden Problemtypen liegt darin begründet, dass sie häufig in Schulbüchern des ersten Schuljahres zur Einführung in die Vorgehensweise des additiven Ergänzens genutzt werden (vgl. Kapitel 2.1.2 und Kapitel 4.3.2).

Konkret realisiert wurden die ausgewählten Kontextprobleme in einem kardinalen Sachkontext.

Tabelle 4-1 gibt einen Überblick über die in der Studie eingesetzten Typen von subtraktiven Problemstellungen (inklusive zugehöriger Materialbeispiele).

Tabelle 4-1: Überblick über die eingesetzten Typen von Subtraktionsproblemen

Problem-stellungstyp	Formal	Kontextgebunden		
	Formal	Dynamisch	Statisch[75]	
	‚Abzieh-Problem'	‚Abzieh-Problem'	‚Vereinigen'	‚Vergleichen: Unterschied gesucht'
Material-beispiel[77]	7-4=__	 Fragestellung: Sofie hat 8 Bauklötze in ihrer Kiste. Finn hat keine Bauklötze in seiner Kiste. Sie gibt ihm 6 Bauklötze ab. Wie viele hat sie dann noch?	 Fragestellung: Sofie und Finn haben zusammen 6 Steine. Sofie hat 2 Bauklötze. Wie viele muss Finn dann haben?	 Fragestellung: Sofie hat 9 Bauklötze. Finn hat 8. Was ist der Unterschied? Wie viele hat sie mehr beziehungsweise er weniger?
Angesprochene Vorgehensweise	Abziehen	Abziehen	-	-
Angesprochene Grund-vorstellung	Rest	Rest	-[76]	Unterschied

75 Aufgrund der statischen Eigenschaft der beiden Problemkontexte wird in den Problemstellungen jeweils keine Vorgehensweise zur Lösung dieser angesprochen.

76 Da dieser Problemkontext nicht eindeutig einer Grundvorstellung zugeordnet werden kann, ist hier eine Zuordnung zu einer der beiden Grundvorstellungen nicht möglich (vgl. Kapitel 2.2.2).

77 Bei den Kontextproblemen wurde die dazugehörige Fragestellung in den Interviews mündlich erläutert.

Größe der Differenz

In der vorliegenden Studie wurden drei Typen von Differenzgrößen unterschieden: Neben Problemstellungen mit kleinen und großen Differenzen[78] wurden den Schülerinnen und Schülern auch Problemstellungen mit mittleren Differenzen vorgelegt.
Dabei wurden die Differenzgrößen wie folgt definiert:

- Große Differenzen: Subtrahend ≤ 4
- Mittlere Differenzen: Differenz ≈ Hälfte des Minuenden
- Kleine Differenzen: Differenz ≤ 4

Zahlenraum

Zusätzlich zu den beiden zuvor beschriebenen Variationen der subtraktiven Problemstellungen wurde wie bereits erwähnt der Zahlenraum variiert. Dabei wurde zwischen Problemstellungen im Zahlenraum bis 15 und Problemstellungen im Zahlenraum bis 30 unterschieden. Dabei lag der Schwerpunkt aufgrund des Fokus' auf dem ersten Schuljahr auf dem Zahlenraum bis 15, was sich durch eine größere Anzahl von Problemstellungen in diesem Zahlenraum niederschlug. Zusätzlich dazu wurden als ‚Zusatzaufgaben' (ab Interviewzeitpunkt 3) Problemstellungen im Hunderterraum den Kindern vorgelegt. Diese wurden aus zeitlichen Gründen jedoch lediglich für die formalen Problemstellungen realisiert.

Gesamtüberblick über die Problemstellungen

Berücksichtigt man alle drei Ebenen, so ergibt sich eine dreidimensionale Matrix mit insgesamt 36 + 3 (Zusatzaufgaben) Problemstellungen (vgl. Tab. 4-2). Diese für ein erstes Schuljahr durchaus hohe Quantität an Problemstellungen ist, wie bereits an einzelnen Stellen dieses Kapitels erläutert, damit zu begründen, dass verschiedene Dimensionen bei der Konstruktion der Problemstellungen berücksichtigt wurden:

- Problemstellungstyp
- Größe der Differenz
- Zahlenraum

Weiterhin sollte durch diese durchaus für ein erstes Schuljahr große Anzahl an Problemstellungen ermöglicht werden, dass sich in den Interviews überhaupt Unterschiedsvorstellungen rekonstruieren lassen, da der Gebrauch von unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen bei Kindern insgesamt sehr gering zu sein scheint (vgl. Kapitel 3.1.1).

---

78 Diese Unterscheidung findet sich auch bei den meisten Studien (vgl. Kapitel 3.1).

Tabelle 4-2: Gesamtüberblick über die eingesetzten Problemstellungen (inklusive Zahlenwerte)[79]

Zahlenraum	Differenzgröße	Formal	Kontext		
		‚Abzieh-Problem'	‚Abzieh-Problem'	‚Vereinigen'	‚Vergleichen: Unterschied gesucht'
Bis 15	Groß	8-3	7-1	9-4	8-2
	Mittel	12-5	12-7	11-5	11-6
	Klein	7-4	8-6	6-2	9-8
	Groß	11-4	13-2	14-1	12-3
	Mittel	15-7	14-6	13-6	15-8
	Klein	14-13	11-8	15-13	13-9
Bis 30	Groß	29-1	23-4	21-3	18-2
	Mittel	16-7	27-13	17-9	26-14
	Klein	21-17	18-17	22-19	28-26
Bis 100	Groß	83-4			
	Mittel	53-27			
	Klein	71-69			

4.2.2.3 Interviewleitfaden

Im Folgenden wird der idealtypische Ablauf der Interviews konkret dargelegt. Dazu werden zunächst allgemeine Informationen beschrieben, bevor die beiden Interviewteile (vgl. Kapitel 4.2.1) separat erläutert werden.

Allgemeine Informationen

Während des Interviews konnten die Schülerinnen und Schüler auf folgende Materialien zurückgreifen:

- Bauklötze,
- Wendeplättchen und
- Steckwürfel

Dies liegt darin begründet, dass den Kindern die Möglichkeit gegeben werden sollte die Problemstellungen mit konkreten Materialien zu modellieren.[80] Außerdem konnten sie Papier und Stifte nutzen.

Die Problemstellungen wurden den Kindern in A4-Format (Kontextprobleme) beziehungsweise A5-Format (formale Probleme) vorgelegt und anschließend vorgelesen (formale Probleme) beziehungsweise erläutert (Kontextprobleme).

---

[79] Dabei sind die konkreten Zahlenwerte der Problemstellungen in Form von Termen in der Abbildung einheitlich in der Form a-b dargestellt.

[80] Wendeplättchen und Steckwürfel kannten die Kinder aus dem Mathematikunterricht. Die Bauklötze wurden aufgrund der gewählten Sachkontexte bereitgestellt (vgl. Kapitel 4.2.2.2).

Grundsätzlich wurden die Schülerinnen und Schüler vorab aufgefordert während des Interviews ihre Handlungen und Gedanken zu verbalisieren.

Interviewteil 1 (Tag 1)

Als Einstieg in das Interview – sozusagen als ‚warm-up' – und um die Kinder mit der Interviewsituation sowie mit dem Material vertraut zu machen, wurden den Kindern zunächst folgende Aufgaben gestellt (siehe Tab. 4-3):

Tabelle 4-3: Einstieg in das Interview

Aufgabe		**Fragstellungen und Impulse**
Zählen	Vorwärts zählen	„*Kannst du denn schon zählen?*" Wenn das Kind nicht von alleine beginnt: „*Eins, zwei, drei, ...*" Wenn das Kind über 30 zählt: „*Wie weit hast du denn schon mal gezählt?*"
	Rückwärts zählen	„*Kannst du denn auch rückwärts-zählen?*" Wenn das Kind nicht von alleine beginnt: „*Zwanzig, neunzehn, ...*" Wenn das Kind noch nicht von 20 rückwärts zählen kann: „*Und von 10?*
Anzahlerfassung	8 Bauklötze abzählen	8 Bauklötze vor das Kind legen: „*Wie viele sind das?*"
	12 Bauklötze abzählen	12 Bauklötze vor das Kind legen: „*Wie viele sind das?*"
	7 Bauklötze abzählen	*Kannst du für mich 7 Bauklötze hinlegen?"* „*Wie viele haben wir, wenn ich noch 2 dazulege? ... Und wenn ich noch 3 weitere hinzulege?"*
‚Vorkenntnisse' zur Addition/Subtraktion		„*Kennst du auch schon Plusaufgaben?"* Wenn das Kind keine nennt: „*Z. B. 1+1? ... Oder 2+2? ... Oder 3+3?*" „*Und kennst du auch schon Minusaufgaben?"*

Anschließend wurden den Schülerinnen und Schülern die subtraktiven Problemstellungen in folgender Reihenfolge gestellt (siehe Tab. 4-4):

Tabelle 4-4: Reihenfolge der Problemstellungen in Teilinterview 1[81]

Nr.	Problemstellung	Zahlenraum	Größe der Differenz	Zahlenmaterial
1	Formal – ‚Abzieh-Problem'	Bis 15	Groß	8-3
2			Mittel	12-5
3			Klein	7-4
4			Groß	11-4
5			Mittel	15-7
6			Klein	14-13
7	Kontext – Dynamisch – ‚Abzieh-Problem'	Bis 30	Groß	23-4
8			Mittel	27-13
9			Klein	18-17
10	Kontext – Statisch – ‚Vereinigen'	Bis 30	Groß	21-3
11			Mittel	17-9
12			Klein	22-19
13	Kontext – Statisch – ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'	Bis 30	Groß	18-2
13			Mittel	26-14
14			Klein	28-26

Lösten die Schülerinnen und Schüler die Problemstellung mental oder konkret handelnd, wurden sie nach dem Nennen des Ergebnisses gefragt: „*Wie bist du darauf gekommen?*“. Wussten sie das Ergebnis vermeintlich auswendig wurde gefragt „*Warum kommt da ... heraus?*“

Außerdem wurden die Schülerinnen und Schüler je nach Interviewverlauf und Interviewsituation gefragt, ob sie auch noch auf eine andere Weise das Problem lösen könnten („*Kannst du das Ergebnis auch noch anders herausfinden?*“)? Wenn dem so war, wurde außerdem eine Begründung für diese weitere Möglichkeit der Lösungsbestimmung eingefordert („*Warum geht das denn auch so?*“).

Zusätzlich zu diesen Problemstellungen wurden den Kindern ab Interviewzeitpunkt 3 (vgl. Kapitel 4.2.2.2) anschließend noch die drei Zusatzaufgaben in folgende Reihenfolge gestellt (siehe Tab. 4-5):

Tabelle 4-5: Zusatzaufgaben[82]

Nr.	Problemstellung	Zahlenraum	Größe der Differenz	Zahlenmaterial
1	Formal – ‚Abzieh-Problem'	Bis 100	Groß	83-4
2			Mittel	53-27
3			Klein	71-69

81 Dabei sind die konkreten Zahlenwerte der Problemstellungen in Form von Termen in der Abbildung einheitlich in der Form a-b dargestellt.

82 Dabei sind die konkreten Zahlenwerte der Problemstellungen in Form von Termen in der Abbildung einheitlich in der Form a-b dargestellt.

Zum Abschluss des Interviewteils 1 wurde den Schülerinnen und Schülern noch folgende Aufgabe gestellt[83]: *„Jetzt gucken wir uns noch mal die Aufgaben an [dabei eine formale Problemstellung mit kleiner Differenz vor das Kind legen]. Stell' dir vor, du sollst einem anderen Kind, das nicht unsere Sprache und unsere Zahlen und Zeichen kennt, diese Aufgabe mit einem Bild erklären. Wie würdest du das machen?*" Diese zusätzliche Aufgabenstellung wurde gestellt, um noch über das reine Lösen der Problemstellungen hinaus Einsichten in die (Grund-) Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu erhalten.

Interviewteil 2 (Tag 2)

Beim zweiten Interviewteil wurde auf ein ‚warm-up' aufgrund der größeren Aufgabenanzahl verzichtet. Die Problemstellungen wurden den Schülerinnen und Schülern in folgender Reihenfolge gestellt (siehe Tab. 4-6), wobei die gleichen Impulse und Fragen zum Einsatz kamen, welche schon in Interviewteil 1 beschrieben wurden:

Tabelle 4-6: Reihenfolge der Problemstellungen in Teilinterview 2[84]

Nr.	Problemstellung	Zahlenraum	Größe der Differenz	Zahlenmaterial
1	Kontext – Dynamisch – ‚Abzieh-Problem'	Bis 15	Groß	7-1
2			Mittel	12-7
3			Klein	8-6
4			Groß	13-2
5			Mittel	14-6
6			Klein	11-8
7	Kontext – Statisch – ‚Vereinigen'	Bis 15	Groß	9-4
8			Mittel	11-5
9			Klein	6-2
10			Groß	14-1
11			Mittel	13-6
12			Klein	15-13
13	Kontext – Statisch – ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'	Bis 15	Groß	8-2
14			Mittel	11-6
15			Klein	9-8
16			Groß	12-3
17			Mittel	15-8
18			Klein	13-9

83 In Anlehnung an RADATZ (1989), der diese Art von Fragestellung nutzte, um „Schülervorstellungen zu Zahlen und elementaren Rechenoperationen" zu erheben.

84 Dabei sind die konkreten Zahlenwerte der Problemstellungen in Form von Termen in der Abbildung einheitlich in der Form a-b dargestellt.

Nr.	**Problemstellung**	**Zahlenraum**	**Größe der Differenz**	**Zahlenmaterial**
19	Formal – ‚Abzieh-Probleme'	Bis 30	Groß	29-1
20			Mittel	16-7
21			Klein	21-17

Zum Abschluss des Interviewteils 2 wurde den Kindern noch folgende Frage gestellt: „*Jetzt gucken wir uns noch mal die Aufgaben an [dabei eine formale Problemstellung mit kleiner Differenz vor das Kind legen]. Stell' dir vor, ein anderes Kind weiß nicht was ‚Minus' heißt. Wie würdest du das diesem Kind erklären?*". Auch an dieser Stelle konnte noch nach alternativen Erklärungen gefragt werden („*Und kann man das auch noch anders erklären?*"). Auch hier war das Ziel weitere Einsichten in die (Grund-) Vorstellungen der Kinder zu erhalten.

4.3 Informationen zur Stichprobe

In diesem Kapitel wird die Stichprobe der empirischen Untersuchung näher charakterisiert. Dabei werden in Kapitel 4.3.1 allgemeine Informationen bezüglich der Stichprobe beschrieben und anschließend in Kapitel 4.3.2 Hintergrundinformationen zur unterrichtlichen Thematisierung der Subtraktion dargelegt.

4.3.1 Allgemeine Informationen

Im Schuljahr 2009/2010 wurde eine erste Klasse einer Stadtrandgrundschule im westlichen Bochum über ein Schuljahr begleitet[85]. Die Klasse besuchten insgesamt 29 Kinder (12 Mädchen und 17 Jungen).

Um eine möglichst große Stichprobe über die vier Interviewzeitpunkte hinweg erhalten zu können, wurde mit der maximalen Anzahl von Kindern zu Interviewzeitpunkt 1 begonnen. Da jedoch nicht allen Kindern der Klasse das Einverständnis zur Teilnahme an der videographierten Studie durch die Erziehungsberechtigten gegeben wurde und einige Kinder während des ersten Interviewzeitpunkts krankheitsbedingt nicht am Unterricht teilnahmen, begann die Studie zu Interviewzeitpunkt 1 mit einer Stichprobengröße von N=16. Im Verlauf des Schuljahres entwickelte sich die Stichprobengröße anschließend auf-

[85] Da die explizite Thematisierung von Unterschiedsvorstellungen im Unterricht den Gebrauch von ergänzenden Vorgehensweisen beeinflussen kann (vgl. Kapitel 3.1.1), wurde bei der Auswahl der Klasse darauf geachtet, dass das eingesetzte Schulbuch explizit ergänzende Vorgehensweisen thematisierte. Da dies im Zahlenbuch 1 realisiert ist (vgl. Kapitel 2.1.2), wurde eine Klasse begleitet, welche mit dem Zahlenbuch 1 (WITTMANN & MÜLLER 2004) arbeitete (vgl. dazu Kapitel 2.1.2, in diesem die unterrichtliche Einführung des Zahlenbuchs 1 in das Abziehen und Ergänzen dargestellt wird).

grund von Fehlzeiten einzelner Schülerinnen und Schüler während der Interviewzeitpunkten wie folgt (siehe Abb. 4-7):

Tabelle 4-7: Entwicklung der Stichprobengröße über die vier Interviewzeitpunkte

Interviewzeitpunkt	Stichprobengröße
1	N=16
2	N=9
3	N=6
4	N=6

4.3.2 Hintergrundinformationen zur unterrichtlichen Thematisierung der Subtraktion

Die Dokumentation der unterrichtlichen Thematisierung der Subtraktion umfasste die Beobachtung der ‚Einführungsstunden' in die Vorgehensweise des Abziehens sowie in die Vorgehensweise des additiven Ergänzens. Dabei wurden insgesamt fünf Unterrichtsstunden bezogen auf die ‚Einführung' der Vorgehensweise des Abziehens[86] und drei Unterrichtsstunden bezogen auf die Vorgehensweise des additiven Ergänzens[87] in Form von Unterrichtsverlaufsskizzen dokumentiert.

Einführung in die Vorgehensweise des Abziehens

Erste Unterrichtsstunde

Die Vorgehensweise des Abziehens und damit verbunden das Minuszeichen wurde in der Klasse über die Thematisierung von kontextgebunden dynamischen ‚Abzieh-Problemen' ‚eingeführt'. Dazu wurde folgende Problemstellung im Sitzkreis durch die Mathematiklehrerin mit konkreten Materialien (Spielzeugautos, Plättchen im Zwanzigerfeld) dargestellt und begleitend erläutert: „*Auf einem Parkplatz befinden sich sechs Autos. Eins fährt weg. Wie viele sind noch da?*" Parallel dazu wurde die formale Problemstellung 6-1=5 notiert und am Zwanzigerfeld dargestellt (sechs Plättchen in einer Reihe, das letzte Plättchen hochgeschoben). Anschließend wurden die Kinder aufgefordert in diesem Kontext weitere Abziehproblemstellungen zu nennen und diese auf allen drei Ebenen darzustellen. Daran schloss sich eine Plenumsphase an, in der die Kinder aufgefordert wurden, zu einer Schulbuchabbildung eine ‚passende' verbale Darstellung in Form einer ‚Rechengeschichte' zu finden (vgl. Abb. 4-2). Parallel

86 Die Unterrichtsstunden fanden am 08.02.2010, 09.02.2010, 10.02.2010, 11.02.2010 sowie am 12.02.2010 und damit zwischen dem zweiten und dritten Interviewzeitpunkt statt.

87 Diese Unterrichtsstunden fanden am 20.05.2010, 26.05.2010 sowie 02.06.2010 und damit zwischen dem dritten und vierten Interviewzeitpunkt statt.

dazu wurde auch wieder die formale ‚Abzieh-Darstellung' notiert (8-2=6) sowie das Problem am Zwanzigerfeld dargestellt (acht Plättchen in einer Reihe, die zwei letzten Plättchen hochgeschoben).

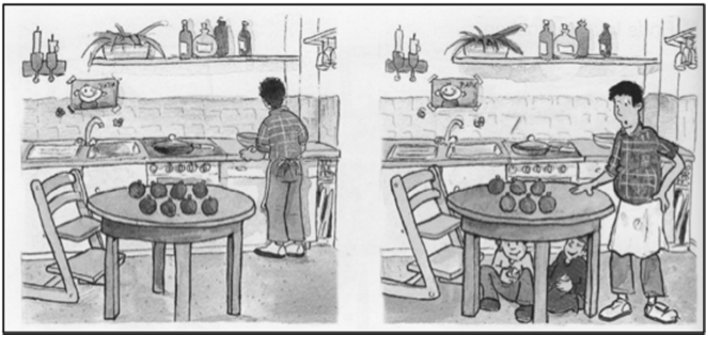


Abbildung 4-2: Schulbuchabbildung aus dem Zahlenbuch 1 (WITTMANN & MÜLLER 2004, 54)

In einer daran anschließenden Einzelarbeitsphase wurden die Kinder aufgefordert selbst ‚Rechengeschichten' zu erfinden und diese sowohl formal als auch ikonisch festzuhalten. Zum Abschluss wurden die Ergebnisse der Kinder im Plenum gesammelt.

Zweite Unterrichtsstunde

In der darauf folgenden Unterrichtsstunde wurden zunächst im Plenum an der Tafel verschiedene ‚Abzieh-Probleme' mit Plättchen im Zwanzigerfeld dargestellt (Subtrahend wurde dabei stets als ‚nach oben geschoben' dargestellt) und parallel dazu als formale ‚Abzieh-Darstellung' notiert. Während dieser Unterrichtsaktivität wurden zusätzlich auch Plättchendarstellungen an der Tafel zeichnerisch fixiert. Dabei wurde der Subtrahend jeweils als ‚durchgestrichene Plättchen' dargestellt. In einer anschließenden Arbeitsphase wurden die Kinder aufgefordert analog zur Plenumsphase selbstgewählte ‚Abzieh-Probleme' sowohl enaktiv mit Plättchen darzustellen als auch ikonisch und formal zu notieren.

Dritte Unterrichtsstunde

Auch zum Einstieg in die dritte Unterrichtsstunde wurden an der Tafel mit Plättchen ‚Abzieh-Probleme' dargestellt. Die Kinder sollten dabei zu jeder Plättchendarstellung die ‚passende' formale Problemstellung nennen. In diesem Kontext wurde auch im Plenum darüber diskutiert, dass zu den gegebenen Plättchendarstellungen nicht nur formale ‚Abzieh-Darstellungen' ‚passen', sondern auch formale ‚Start-Finde-Darstellungen' eine mögliche Passung aufweisen.

Insgesamt wurde während dieser Unterrichtsphase mehrfach von der Mathematiklehrerin darauf hingewiesen, wie sich die Ausgangslage, die Veränderung und das Ergebnis der Handlung in den verschiedenen Darstellungen realisieren. An diese Phase schloss sich eine Einzelarbeitsphase an, in der die Kinder in die Arbeit mit einem sogenannten ‚Rechengeschichtenbuch' eingeführt wurden. Jedes Kind erhielt dazu ein Heft im A5-Format mit leeren Seiten, welche mit erfundenen ‚Minusgeschichten' in Form von zeichnerischen und beziehungsweise oder sprachlichen Darstellungen gefüllt werden sollten. Als Anregung waren auf dem Deckblatt des ‚Rechengeschichtenbuches' mögliche Darstellungen abgebildet (vgl. Abb. 4-3).

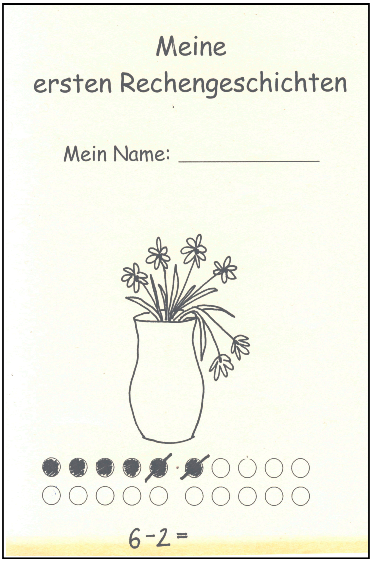


Abbildung 4-3: Deckblatt der ‚Rechengeschichtenbücher'

Zusätzlich dazu erhielten die Kinder zur Anregung ein Arbeitsblatt mit weiteren möglichen Darstellungen (vgl. Abb. 4-4).

Abbildung 4-4: Arbeitsblatt zur Anregung der Produktion eigener ‚Minusgeschichten'

Vierte Unterrichtsstunde

In der ersten Hälfte der vierten Unterrichtsstunde arbeiteten die Kinder zunächst in ihren ‚Rechengeschichtenbüchern' weiter. Dabei wurden einzelne Kinder in Form von Differenzierungsmaßnahmen dazu angeregt, sich Darstellungen von dem in der vorherigen Stunde ausgeteilten Arbeitsblatt (vgl. Abb. 4-4) auszuschneiden, in ihr Rechengeschichtenbuch einzukleben und eine ‚passende' Plättchendarstellung, formale Darstellung sowie Beschreibung zu zeichnen beziehungsweise zu notieren. Anschließend wurde auf einem Overheadprojektor das den Kindern als Anregung ausgeteilte Arbeitsblatt (vgl. Abb. 4-4) aufgelegt und im Plenum thematisiert, welche verbalen und formalen Darstellungen zu den einzelnen Abbildungen ‚passen'.

Fünfte Unterrichtsstunde

In der fünften Unterrichtsstunde wurden zu einer Schulbuchabbildung ‚passende' verbale Darstellungen sowie Plättchendarstellungen im Plenum gesammelt (vgl. Abb. 4-5 – Aufgabe 1). Daran schloss sich eine Einzelarbeitsphase an, in der die Kinder zunächst formale ‚Abzieh-Probleme' durch den möglichen Rückgriff auf Plättchen lösen sollten (vgl. Abb. 4-5 – Aufgabe 2). Anschließend sollten sie formale Abziehprobleme ohne Plättchen lösen und die Struktur der operativ strukturierten Aufgabenserien fortsetzen (vgl. Abb. 4-5 – Aufgabe 3).

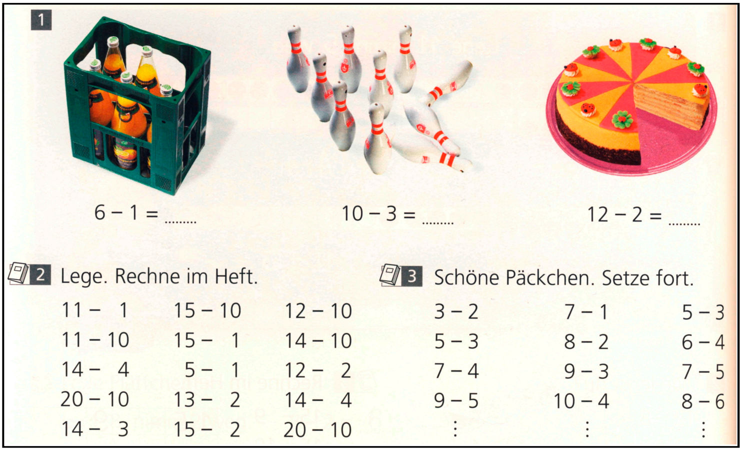


Abbildung 4-5: Schulbuchausschnitt aus dem Zahlenbuch 1 (WITTMANN & MÜLLER 2004, 56)

Einführung in die Vorgehensweise des additiven Ergänzens

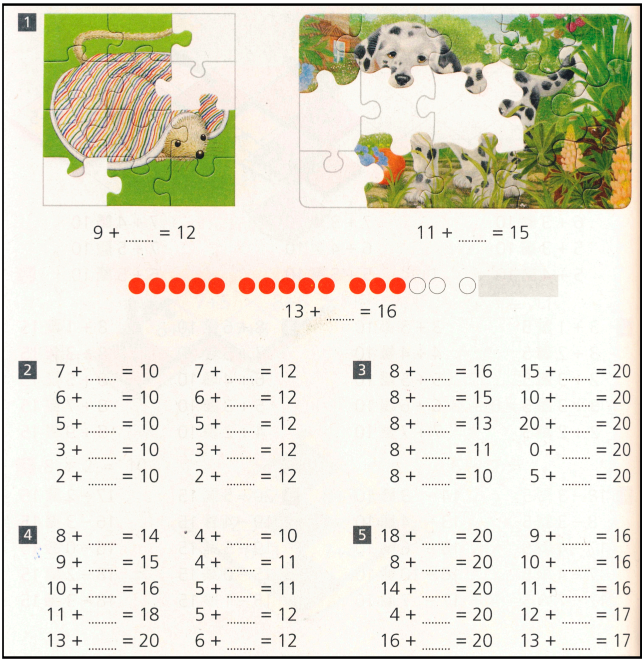
Erste Unterrichtsstunde

Als Vorbereitung auf die eigentliche Unterrichtsstunde zur ‚Einführung' in die Vorgehensweise des additiven Ergänzens, wurden in dieser Mathematikstunde im Plenum an der Tafel mit Plättchen im Zwanzigerfeld dargestellte ‚Additive-Ergänzungs-Probleme' gelöst. Dazu wurde jeweils eine bestimmte Anzahl an Plättchen in das Zwanzigerfeld gelegt und die Kinder wurden von der Mathematiklehrerin aufgefordert jeweils bis 20 zu ergänzen:„*Wie viele Plättchen müssen noch dazu gelegt werden, um 20 Plättchen zu erhalten?*"

Zweite Unterrichtsstunde

In der darauffolgenden Unterrichtsstunde wurde diese Aktivität wieder aufgegriffen. Diesmal wurden jedoch auch unterschiedliche ‚Ergebniszahlen', auf die ergänzt werden sollte, betrachtet. Daran schloss sich ein Plenumsgespräch über zwei Schulbuchdarstellungen an (vgl. Abb. 4-6 – ‚Puzzledarstellungen'), welche ohne weitere Erläuterungen zunächst dem Subtraktionsproblem ‚Vereinigen' zugeordnet werden können. Durch die Fragestellung der Mathematiklehrerin „*Wie viele Teile müssen noch dazu gelegt werden, damit das Puzzle vollständig ist?*", erhielten die Problemstellungen jedoch eher den Charakter dynamischer

‚Additiver-Ergänzungs-Probleme'. Während dieser Gesprächsphase wurde auch darüber diskutiert, welche formalen ‚Additiven-Ergänzungs-Darstellungen' zu den Problemstellungen ‚passen'. Darauf aufbauend wurden die Kinder dazu aufgefordert in einer Einzelarbeitsphase Aufgabenserien mit formalen Additiven-Ergänzungs-Problemen zu lösen (vgl. Abb. 4-6 – Aufgaben 2 bis 5).



1

9 + ... = 12 11 + ... = 15

13 + ... = 16

2		3	
7 + ... = 10	7 + ... = 12	8 + ... = 16	15 + ... = 20
6 + ... = 10	6 + ... = 12	8 + ... = 15	10 + ... = 20
5 + ... = 10	5 + ... = 12	8 + ... = 13	20 + ... = 20
3 + ... = 10	3 + ... = 12	8 + ... = 11	0 + ... = 20
2 + ... = 10	2 + ... = 12	8 + ... = 10	5 + ... = 20

4		5	
8 + ... = 14	4 + ... = 10	18 + ... = 20	9 + ... = 16
9 + ... = 15	4 + ... = 11	8 + ... = 20	10 + ... = 16
10 + ... = 16	5 + ... = 11	14 + ... = 20	11 + ... = 16
11 + ... = 18	5 + ... = 12	4 + ... = 20	12 + ... = 17
13 + ... = 20	6 + ... = 12	16 + ... = 20	13 + ... = 17

Abbildung 4-6: Schulbuchausschnitt aus dem Zahlenbuch 1 (WITTMANN & MÜLLER 2004, 80)

Dritte Unterrichtsstunde

Das Ziel der dritten Unterrichtsstunde war die Vorgehensweise des additiven Ergänzens auch für die Lösung von ‚Abzieh-Problemen' nutzbar zu machen. Dazu wurden als Einstieg in die Stunde zunächst wieder verschiedene mit Plättchen dargestellte ‚Additive-Ergänzungs-Probleme' im Plenum – analog zu den zuvor beschriebenen Stunden – gelöst. In der daran anschließenden Unterrichtsphase wurden die Kinder aufgefordert das formale ‚Abzieh-Problem' 17-15=? in Einzelarbeit zu lösen. Die von den Kindern genutzten Vorgehensweisen wurden anschließend im Plenum gesammelt. Dabei wurden neben abziehenden Vorgehensweisen auch additiv ergänzende Vorgehensweisen und subtraktiv ergänzende Vorgehensweisen genannt. In der darauf aufbauenden Einzelarbeitsphase wurden die Kinder aufgefordert formale Additive-Ergänzungs- und Abzieh-

Probleme mit jeweils dem gleichen Zahlenmaterial zu bearbeiten (vgl. Abb. 4-7 – Aufgaben 2 und 3). Zum Abschluss der Stunde sollten sie schließlich noch formale Abziehprobleme explizit durch additives Ergänzen lösen (vgl. Abb. 4-7 – Aufgabe 4).

2	17 + ... = 20	13 + ... = 17	9 + ... = 12
	20 − 17 = ...	17 − 13 = ...	12 − 9 = ...
3	14 + ... = 20	11 + ... = 16	7 + ... = 12
	20 − 14 = ...	16 − 11 = ...	12 − 7 = ...

4 Löse durch Ergänzen.

14 − 11	12 − 8	15 − 10	20 − 17	16 − 11	11 − 7
18 − 15	13 − 9	17 − 12	19 − 15	16 − 9	14 − 8

Abbildung 4-7: Schulbuchausschnitt aus dem Zahlenbuch 1 (WITTMANN & MÜLLER 2004, 81)

4.4 Auswertung der Daten

Insgesamt wurde sich bei der Datenauswertung an verschiedenen qualitativen Auswertungsmethoden angelehnt, wobei als Grundlage der Datenauswertung die anhand der Videographien erstellten Transkripte dienten, welche neben der sprachlichen Äußerungen auch eine Beschreibung der Handlungen beinhalteten.

Im Folgenden wird das diesbezügliche Vorgehen dargestellt. Dazu werden in Kapitel 4.4.1 zunächst die theoretischen Vorannahmen des Autors der vorliegenden Arbeit zusammengefasst sowie die genutzten Auswertungsmethoden allgemein charakterisiert. Anschließend wird in Kapitel 4.4.2 der konkrete Ablauf der Auswertung beschrieben.

4.4.1 Allgemeines zur Datenauswertung

Wie bereits in Kapitel 4.1 beschrieben, nimmt auch bei der qualitativen Analyse der Daten das theoretische Vorverständnis der beziehungsweise des Forschenden eine zentrale Rolle im Auswertungsprozess ein. Dieses wird in Kapitel 4.4.1.1 überblickartig zusammengefasst.

In Kapitel 4.4.1.2 wird anschließend die in der Arbeit genutzte Auswertungsmethodenauswahl charakterisiert.

4.4.1.1 Zum theoretischen Vorverständnis des Forschenden

In der vorliegenden Arbeit wurde das theoretische Vorverständnis des Autors der vorliegenden Arbeit bezogen auf die Subtraktion ausführlich in Kapitel 2 hergeleitet. Somit dienten die dort beschriebenen Kategorien (vgl. Kapitel 2.2.2 und Kapitel 2.2.3) zur Strukturierung beziehungsweise Kategorisierung des Datenmaterials, aber auch als ‚Sprache' um neu gewonnenen Erkenntnisse zu beschreiben. Die Kategorien wurden dabei jedoch explizit als nicht ‚abgeschlossen' angesehen, sondern wurden durch die Analyse des Datenmaterials verändert, korrigiert und erweitert (vgl. auch dazu Kapitel 4.1).

Grundlegend für die Analyse der Daten wurde dabei zunächst folgendes Modell zur Analyse der Vorgehensweisen und Grundvorstellungen idealtypisch angenommen (siehe Abb. 4-8):

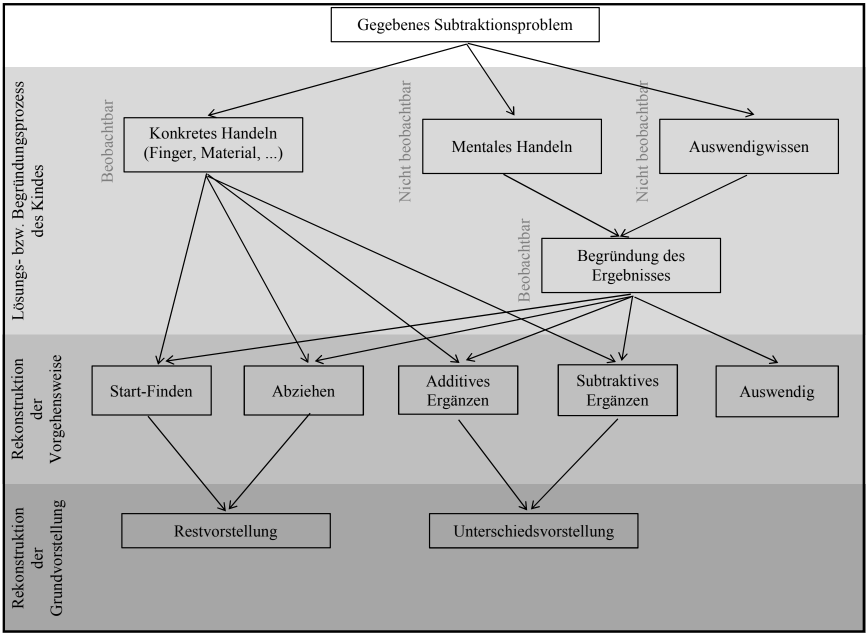


Abbildung 4-8: Theoretisch hergeleitetes Modell zur Analyse der Vorgehensweisen und Grundvorstellungen[88]

Der Lösungsprozess von gegebenen Subtraktionsproblemen kann zunächst dahingehend charakterisiert werden, ob die Kinder die Lösung der Problemstel-

[88] In der Ebene ‚Rekonstruktion der Vorgehensweisen' ist dabei nur die erste Charakterisierungsebene der Vorgehensweisen aufgeführt (vgl. Kapitel 2.2.3). Selbstverständlich kann innerhalb jeder der vier Kategorien (Start-Finden, Abziehen, additives Ergänzen, subtraktives Ergänzen) differenziert werden, wie sich die Vorgehensweisen hinsichtlich der zweiten Charakterisierungsdimension ausgestalten (vgl. Kapitel 2.2.3).

lung konkret handelnd, das heißt zum Beispiel mit ihren Fingern oder den bereitgestellten Materialien[89], mental handelnd oder über ‚Auswendigwissen' lösen. Dabei kann die konkrete Handlung vom Forschenden beobachtet werden. Da der Vollzug der Handlung einen Darstellungswechsel respektive Repräsentationswechsel darstellt, kann die der konkreten Handlung zugrundeliegende Vorgehensweise und damit verbunden die dahinterliegende Grundvorstellung genau in diesem Wechselprozess rekonstruiert werden (vgl. Kapitel 1.1.2). Lösen die Schülerinnen und Schüler die gegebene Problemstellung hingegen mental handelnd beziehungsweise wissen sie das Ergebnis auswendig, so ist dieser Prozess für den Forschenden nicht beobachtbar. Werden die Kinder allerdings anschließend aufgefordert ihre mentalen Handlungen zu beschreiben beziehungsweise ihr Ergebnis zu rechtfertigen, so stellen diese Ausführungen Begründungen für das ermittelte beziehungsweise auswendig gewusste Ergebnis dar. Da diese Begründungen wiederum Darstellungswechsel respektive Repräsentationswechsel darstellen, welche beobachtbar sind, kann auch hier die der Begründung zugrundeliegende Vorgehensweise und die dahinterliegende Grundvorstellung in diesem Wechselprozess rekonstruiert werden (vgl. Kapitel 1.1.2). Dabei sei jedoch darauf hingewiesen, dass es auch eine Begründung darstellen kann, dass die Kinder beschreiben, das Ergebnis des Subtraktionsproblems auswendig gewusst zu haben. An dieser Stelle kann daher keine Grundvorstellung rekonstruiert werden.

Dabei ist dem Autor der vorliegenden Arbeit bewusst, dass nicht alleine auf der Grundlage der Begründungen der Kinder auf deren tatsächlichen mentalen Lösungsprozess geschlossen werden kann. Gleichwohl gewähren die Erläuterungen der Schülerinnen und Schüler dem Forschenden Einblicke in ihre ‚(Grund-) Vorstellungswelten'.

4.4.1.2 Charakterisierung der genutzten Auswertungsmethoden

Die bei der Analyse der Daten genutzten Auswertungsmethoden umfassen Elemente folgender auswertungsmethodischer Ansätze:

- Qualitative Inhaltsanalyse nach MAYRING (1995)
- Komparative Analyse nach GLASER & STRAUSS (1998)
- Empirisch begründete Typenbildung

Im Folgenden werden die bei der Auswertung der vorliegenden Arbeit berücksichtigten Elemente der einzelnen Auswertungsmethoden überblicksartig beschrieben.

---

[89] Auch das beobachtbare Nutzen der Zahlwortreihe zur Ergebnisbestimmung – also das Zählen – wird dabei als konkretes Handeln verstanden.

Qualitative Inhaltsanalyse nach MAYRING (1995)[90]

Die qualitative Inhaltsanalyse umfasst drei Grundformen, welche auch – wie in der vorliegenden Arbeit – als Mischformen genutzt werden können: *Zusammenfassung*, *Explikation*, *Strukturierung* (MAYRING 1995).

Bei der *Zusammenfassung* wird der Textkorpus unter anderem durch Paraphrasierungen auf den wesentlichen Inhalt des Datenmaterials reduziert.

Bei der *Explikation* wird bei zunächst noch unklaren Textpassagen zusätzliches Material in die Interpretation, mit dem Ziel die Unklarheiten auszuräumen, miteinbezogen. Dabei kann zwischen einer „engen Kontextanalyse" und einer „weiten Kontextanalyse" (MAYRING 1995, 212) unterschieden werden. Bei der engen Kontextanalyse wird nur das Textumfeld direkt um die zu interpretierende Textpassage betrachtet. Bei der weiten Kontextanalyse wird hingegen auch noch Material über den Text hinaus in die Interpretation miteinbezogen (z.B. Informationen über den Verfasser, Informationen über die Entstehungsgeschichte, aber auch weiteres nonverbales Datenmaterial).

Bei der *Strukturierung* wird der Textkorpus hinsichtlich bestimmter Aspekte geordnet. So stellt beispielsweise die Gliederung des Textkorpus' oder aber die Kategorisierung von einzelnen Textpassagen ein strukturierendes Element im Sinne der qualitativen Inhaltsanalyse dar.

Komparative Analyse nach GLASER & STRAUSS (1998)[91]

Die komparative Analyse

> „eignet sich im besonderem Maße für die Überprüfung und Bestätigung von Fakten, Kategorien, Hypothesen. Implizit wie explizit überprüft der Forscher auf diese Weise ständig seine vorläufigen Annahmen und Ergebnisse anhand des gesammelten und beobachteten Datenmaterials." (LAMNEK 2005, 104)

Zentral ist dabei die Idee der theoretischen Sättigung. Dabei werden die Ergebnisse in Form von Kategorien und Hypothesen parallel zur Datenauswertung so lange modifiziert und angepasst bis diese im Auswertungsprozess nicht mehr verändert werden müssen.

Empirisch begründete Typenbildung[92]

Mit dem Ziel sowohl prototypische Beispiele für die gewonnenen Kategorien zu beschreiben als auch idealtypische Entwicklungsverläufe bezogen auf Forschungsfrage 6 (‚*Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen?*') zu

---

90 Für eine ausführliche Darstellung sei auf MAYRING (2008) verwiesen.
91 Für eine ausführliche Darstellung sei auf LAMNEK (2005, 100 ff.) verwiesen.
92 Für eine ausführliche Darstellung sei auf LAMNEK (2005, 230 ff.) verwiesen.

skizzieren, wurde bei der Datenauswertung auf die empirisch begründeten Typenbildung zurückgegriffen. Zur Typenbildung wurden dabei zentral fallvergleichende Kontrastierungen genutzt, bei der sowohl „maximal und minimal verschiedene Fälle“ als auch abweichende, negative und extreme Fälle gesucht werden (STEINKE 2008, 330).

4.4.2 Ablauf der Datenauswertung

Zunächst wurde der Textkorpus der einzelnen Interviews auf der Grundlage des Interviewleitfadens im Sinne der qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. Kapitel 4.2.1) entlang der einzelnen Subtraktionsprobleme gegliedert. Anschließend wurden die dadurch entstandenen Textpassagen hinsichtlich des beobachteten Lösungsprozesses des jeweiligen Subtraktionsproblems und beziehungsweise oder der Begründung des Ergebnisses paraphrasiert. Anhand dieser Paraphrasen wurde anschließend die der beobachteten Handlung beziehungsweise der Begründung zugrundeliegende Vorgehensweise und dahinterliegende Grundvorstellung auf der Grundlage der empirisch begründeten Typenbildung (vgl. Kapitel 4.4.1) rekonstruiert. Dabei erwies sich neben der Paraphrasierung der Äußerungen der einzelnen Kinder auch der Rückgriff auf Darstellungen am leeren Zahlenstrahl als große Bereicherung im Analyseprozess. Dabei wurden die Paraphrasen am leeren Zahlstrahl, mit dem Ziel die Vorgehensweisen und deren zugrundeliegende Grundvorstellungen zu identifizieren, modelliert.[93] Weiterhin stellte der Einbezug von „weiten Kontextanalysen“ im Sinne der qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. Kapitel 4.4.1) eine weitere Hilfe bei der Interpretation der Textpassagen dar. Die gewonnenen beziehungsweise modifizierten Kategorien wurden dabei solange verändert, bis eine theoretische Sättigung im Sinne der Komparativen Analyse (vgl. Kapitel 4.4.1) erreicht wurde.

Den einzelnen Textpassagen wurden dabei auf verschiedenen Ebenen Kategorien zugewiesen. Diese Ebenen umfassen:

- Rekonstruierte Vorgehensweise (erste und zweite Dimension),
- Rekonstruierte Grundvorstellung,
- Materialeinsatz sowie
- Ergebnisbestimmung (konkret handelnd, mental handelnd, auswendig)

[93] Auch bei den theoretischen (stoffdidaktischen) Analysen in Kapitel 2 spielten Darstellungen am leeren Zahlenstrahl eine wichtige Rolle um die Grundvorstellungen der Subtraktion zu identifizieren und zu analysieren. Dies deckt sich mit den Erfahrungen einiger Autoren (u.a. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS 2009; SCHNEIDER 2012; SELTER ET AL. 2012), die den leeren Zahlenstrahl dabei u.a. als „representational tool“ (SCHNEIDER 2012, 541) bezeichnen. Genau dieser ‚Werkzeugcharakter’ des Darstellungsmittels wurde auch in der vorliegenden Arbeit deutlich.

Um den Analyseprozess mit einem möglichst breiten Spektrum an beobachtbaren Handlungen und vorgebrachten Begründungen beginnen zu können, wurden zunächst für Interviewzeitpunkt 1 vier (in den Interviewsituationen als unterschiedlich wahrgenommene) der insgesamt sechs Interviews analysiert. Anschließend wurde dieselbe Auswahl an Kindern auch für die Interviewzeitpunkte 2, 3 und 4 analysiert. Da sich bereits vor der Analyse von Interviewzeitpunkt 4 abzeichnete, dass keine neuen Erkenntnisse zu beobachten waren, konnte anschließend durch die Analyse der verbleibenden zwei Interviews je Interviewzeitpunkt) die ‚theoretische Sättigung' des Kategoriensystems (im Sinne der Komparativen Analyse (vgl. Kapitel 4.4.1)) bestätigt werden. In einem zweiten Analyseschritt wurden anschließend nochmals alle 24 Interviews (sechs Interviews mal vier Interviewzeitpunkte) mit dem gewonnenen Kategoriensystem analysiert.

Um auch bezogen auf Forschungsfrage 6 (‚*Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen?*') eine längsschnittliche Perspektive auf die Daten einnehmen zu können, wurden die kategorisierten Lösungs- beziehungsweise Argumentationsprozesse der einzelnen Kinder anschließend über die vier Interviewzeitpunkte hinweg betrachtet. So war es auch auf dieser Ebene möglich, aufgrund von Fallkontrastierungen idealtypische Entwicklungsverläufen zu rekonstruieren.

5 Empirische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die empirisch gewonnenen Ergebnisse bezogen auf die Forschungsfragen (vgl. Kapitel 3.3) dargestellt. Damit soll insgesamt auf qualitativer Ebene die übergeordnete Forschungsfrage

> ‚*Inwiefern nutzen Schülerinnen und Schüler des ersten Schuljahres Unterschiedsvorstellungen und darauf aufbauende Vorgehensweisen zur Lösung von formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen?*'

beantwortet werden. Dies geschieht entlang der in Kapitel 3.3.2 formulierten Forschungsschwerpunkte.

In Kapitel 5.1 werden zunächst die Ergebnisse bezogen auf *den Forschungsschwerpunkt 1:* ‚*Gebrauch der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen*' dargelegt und damit die ersten vier Forschungsfragen

- ‚*FF 1: Wie nutzen Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen und darauf aufbauende Vorgehensweisen der Subtraktion zur Lösung von formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen beziehungsweise zur Rechtfertigung ihrer Ergebnisse?*' (Kapitel 5.1.1),
- ‚*FF 2: Welche Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen werden von Schülerinnen und Schülern bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen genutzt?*' (Kapitel 5.1.2)
- ‚*FF 3: Inwiefern wirken Vorgehensweisen innerhalb einer Grundvorstellung zusammen?*' (Kapitel 5.1.3) und
- ‚*FF 4: Inwiefern wirken Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg zusammen?*' (Kapitel 5.1.4)

beantwortet.

Kapitel 5.2 widmet sich darauf aufbauend dem *Forschungsschwerpunkt 2:* ‚*Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung*' und damit den gewonnenen Ergebnissen bezogen auf die fünfte und sechste Forschungsfrage

- ‚*FF 5: Wie wechseln Schülerinnen und Schüler von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen?*' (Kapitel 5.2.1) und
- ‚*FF 6: Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen?*' (Kapitel 5.2.2).

5.1 Forschungsschwerpunkt 1: Gebrauch der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen

In diesem Kapitel werden die empirisch gewonnenen Ergebnisse global, das heißt über alle vier Interviewzeitpunkte hinweg, betrachtet. Dabei werden die ersten vier Forschungsfragen

- *‚FF 1: Wie nutzen Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen und darauf aufbauende Vorgehensweisen der Subtraktion zur Lösung von formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen beziehungsweise zur Rechtfertigung ihrer Ergebnisse?'* (Kapitel 5.1.1),
- *‚FF 2: Welche Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen werden von Schülerinnen und Schülern bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen genutzt?'* (Kapitel 5.1.2)
- *‚FF 3: Inwiefern wirken Vorgehensweisen innerhalb einer Grundvorstellung zusammen?'* (Kapitel 5.1.3) und
- *‚FF 4: Inwiefern wirken Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg zusammen?'* (Kapitel 5.1.4)

beantwortet:

Kapitel 5.1.6 fasst schließlich die zentralen Ergebnisse zu Forschungsschwerpunkt 1 zusammen.

5.1.1 Zum operationalen und relationalen Gebrauch der Grundvorstellungen

Im Rahmen der Ergebnisauswertung stellte sich heraus, dass die zuvor theoretisch hergeleiteten Kategorien zur Analyse der konkreten Handlungen beziehungsweise Begründungen der ermittelten Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler (vgl. Kapitel 4.4.1.1) weiter ausdifferenziert werden mussten (vgl. Kapitel 4.4.2). Dabei wurde deutlich, dass der Gebrauch der Grundvorstellungen in einem Spektrum zwischen *operationaler* und *relationaler* Realisierung stattfindet.

In den folgenden beiden Kapiteln werden die beiden Pole dieses Spannungsfeldes näher dargestellt[94]: Kapitel 5.1.1.1 beschäftigt sich zunächst mit dem operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen und Kapitel 5.1.1.2 mit dem relationalen Gebrauch.

---

[94] Die Darstellung erfolgt dabei sowohl – wie bereits erwähnt – losgelöst von den vier Interviewzeitpunkten als auch losgelöst von den gegebenen Subtraktionsproblemen.

5.1.1.1 Zum operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen

Der Gebrauch einer Grundvorstellung realisiert sich immer dann als *operational*, *wenn eine auf einer Grundvorstellung aufbauende Vorgehensweise – im Sinne einer dynamischen Handlung – zur Lösung der Problemstellung konkret durchgeführt oder aber als Möglichkeit zur Lösung beschrieben wird*. Der operationale Gebrauch der Grundvorstellung in Form einer Beschreibung einer möglichen Vorgehensweise kann dabei auf zwei Ebenen stattfinden: Zum einen in Form einer Rechtfertigung eines mental bestimmten oder aber auswendig gewussten Ergebnisses, oder aber zum anderen in Form eines sogenannten *Handlungsplanes*, bei dem das Kind eine Möglichkeit zur Lösung der Problemstellung, ohne diese umzusetzen, erläutert: So zum Beispiel Toni während des ersten Interviewzeitpunktes, der die kontextgebundene Problemstellung ‚Vereinigen' lösen möchte (vgl. Abb. 5-1).

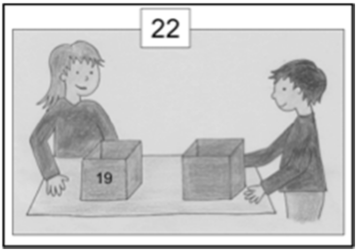


Abbildung 5-1: ‚Vereinigen' (22-19[95])

Transkriptausschnitt[96]

1	I:	Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf, zwölf, dreizehn, vierzehn fünfzehn, sechszehn, siebzehn, achtzehn, neunzehn. L*egt dabei einen Bauklotz nach dem anderen auf die 19 auf dem Arbeitsblatt, so dass am Ende 19 Bauklötze auf der Abbildung liegen.* (2) Neunzehn Steine (.) Und weiter die. (3) Das kapier ich gerade nicht. *Wendet sich dabei von der Problemstellung ab*. (3)
2	T:	Was würdest du denn jetzt gerne? Wie würdest du das denn jetzt rauskriegen? Vielleicht kannst mir nur erzählen, wie du es jetzt rauskriegst ?
3	I:	Ja, ich wollte das so machen. Eh, ich zähl dann weiter von neunzehn, zähle ich dann weiter und stelle mir vor, die nächste Zahl ist die eins, die übernächste Zahl ist die zwei und so weiter.

95 Die Notation der gegebenen Zahlenwerte erfolgt in diesem Kapitel analog zu der Notation in Kapitel 4 einheitlich in der Form a-b.

96 Die verwendeten Transkriptionsregeln sowie Abkürzungen können dem Anhang entnommen werden.

Analyse
Toni möchte die Aufgabe durch eine konkrete Handlung mit Bauklötzen lösen. Dazu stellt er zunächst die 19 als Menge von 19 Baukötzen dar. An dieser Stelle bricht er jedoch seine Vorgehensweise ab (Zeile 1). Nach Aufforderung des Interviewers (Zeile 2) gelingt es ihm jedoch anschließend seine geplante Vorgehensweise zu erläutern (Zeile 3), allerdings ohne diese konkret umzusetzen. Eine solche Erläuterung eines geplanten Vorgehens zur Lösung einer Problemstellung wird in der vorliegenden Arbeit als *Handlungsplan* bezeichnet.

In allen drei Fällen (konkrete Durchführung einer Vorgehensweise, Beschreibung einer Vorgehensweise zur Rechtfertigung des Ergebnisses, Beschreibung eines Handlungsplanes) ist jedoch für den operationalen Gebrauch der Grundvorstellung zentral, dass diese explizit zur *Lösungsbestimmung* der gegebenen Problemstellung in Form einer auf ihr aufbauenden Vorgehensweise genutzt wird beziehungsweise genutzt werden kann (vgl. Kapitel 1.1 und Kapitel 2.2.3).

Insgesamt konnte der operationale Gebrauch der Grundvorstellungen sowohl für die Restvorstellung als auch für die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion rekonstruiert werden. Wie sich der operationale Gebrauch der beiden Grundvorstellungen konkret realisiert, wird im Folgenden dargestellt.

Operationaler Gebrauch der Restvorstellung

Die Restvorstellung der Subtraktion wurde von den Schülerinnen und Schülern im Verlauf des ersten Schuljahres sowohl *abziehend* als auch *start-findend* gebraucht. Tabelle 5-1 charakterisiert den Gebrauch der abziehenden und start-findenden Vorgehensweisen hinsichtlich weiterer Eigenschaften (zweite Dimension der Vorgehensweisen (vgl. Kapitel 2.2.3)) und gibt damit einen Überblick über den rekonstruierten, operationalen Gebrauch der Restvorstellung.

Tabelle 5-1: Überblick über den operationalen Gebrauch der Restvorstellung

1. Dimension der Vorgehensweise	2. Dimension der Vorgehensweise
Abziehen	Schrittweise (1)
	Stellenweise (2)
	Hilfsaufgabe (3)
	Vereinfachen (4)
Start-Finden	Schrittweise (5)
	Hilfsaufgabe (6)

Dabei wurden im Verlauf des ersten Schuljahres alle vier verschiedenen abziehenden Vorgehensweisen von den Schülerinnen und Schülern genutzt. Bei den start-findenden Vorgehensweisen konnten hingegen keine stellenweisen und vereinfachenden Vorgehensweisen beobachtet werden Dies ist eventuell damit zu erklären, dass, wenn das Ergebnis der Problemstellung nicht auswendig verfügbar ist, der Gebrauch von start-findenden Vorgehensweisen beispielsweise im Vergleich zu den abziehenden Vorgehensweisen weniger zielgerichtet ist und einen eher probierenden Charakter aufweist (vgl. Kapitel 2.2.3).

Im Folgenden wird die Vielfalt an rekonstruierten, auf der Restvorstellung aufbauenden, Vorgehensweisen näher erläutert und durch prototypische Transkriptausschnitte konkretisiert.

(1) Abziehen – Schrittweise

Bei den schrittweise abziehenden Vorgehensweisen zur Lösungsbestimmung wird der Subtrahend in einem oder mehreren Schritten vom Minuenden abgezogen.

Im Verlauf des ersten Schuljahres nutzten beziehungsweise beschrieben die Kinder bei den in mehreren Schritten abziehenden schrittweisen Lösungsbestimmungen zählende als auch nicht-zählende Vorgehensweisen. So löst beispielsweise Laura während des ersten Interviewzeitpunktes das formale ‚Abzieh-Problem' 7-4 in Einzelschritten zählend:

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.*
2	L:	Ja, das ist wieder einfach.
3	I:	Sieben minus vier.
4	L:	*Zeigt fünf Finger mit der rechten Hand und zwei Finger mit der linken Hand.* Sieben minus vier. Vier zurückzählen. Sechs. *Klappt dabei nacheinander die zwei Finger der linken Hand zu und klappt anschließend einen Finger der rechten Hand zu.* Sechs. (1) Dann wäre es. (2) *Bricht den Zählprozess wieder ab.* Vier zurückzählen. (.) Mhm. (2) *Zeigt fünf Finger mit der rechten Hand und zwei Finger mit der linken Hand.* Eins, zwei, drei, vier. *Klappt dabei nacheinander die zwei Finger der linken Hand und zwei Finger der rechten Hand zu.* Ja, vier, dann wären es drei.

Analyse

Laura modelliert die gegebene Problemstellung mit ihren Fingern. Sie zeigt 7 Finger und klappt anschließend 4 Finger nacheinander zu. So erhält sie das Ergebnis 3 (Zeile 4). Stellt man diese Vorgehensweise am leeren Zahlenstrahl dar, so erkennt man, dass Laura aufbauend auf der Restvorstellung der Subtraktion abziehend vorgeht (vgl. Abb. 5-2), wobei die schrittweise Abziehhandlung in Einzelschritten mit ihren Fingern umgesetzt wird.

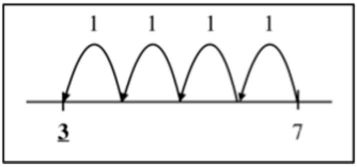


Abbildung 5-2: Lauras Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl[97]

Neben diesen konkreten Modellierungen – mit Fingern oder aber auch mit Materialien, wie zum Beispiel Bauklötzen und Plättchen, bei denen der Minuend modelliert und anschließend verändert wird, nutzten die Kinder auch die Zahlwortreihe um die Problemstellung abziehend in Einzelschritten zu lösen: So zum Beispiel Nils bei der Lösung eines kontextgebundenen ‚Abzieh-Problems' während dem ersten Interviewzeitpunkt (vgl. Abb. 5-3).

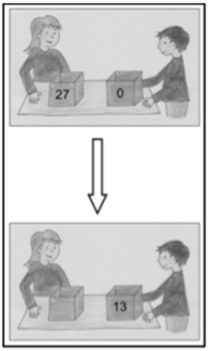


Abbildung 5-3: Kontextgebundenes ‚Abzieh-Problem' (27-13)

Transkriptausschnitt

1	Nil:	Siebzehn minus dreizehn. (6*) Flüstert unverständlich und hält beide Hände unter den Tisch.* (11) Vierzehn.
2	I:	Wie hast du das rausgekriegt?
3	Nil:	Ich hab einfach mit den Fingern gezählt.
4	I:	Mhm, kannst du mal vormachen? Wie du das gemacht hast? Kannst du mir das einmal zeigen?
5	Nil:	Einfach. *Guckt auf seine Hände unter dem Tisch.*
6	I:	Zeig mal hier, dann sehe ich das besser *Klopft auf den Tisch.*
7	Nil:	Minus gemacht. So.
8	I:	Zeig mal so. *Hält beide Hände über den Tisch* Mit den Händen.
9	Nil:	So habe ich gemacht. Hier.

[97] In den Darstellungen am leeren Zahlenstrahl ist dabei stets der gesuchte Wert fett und unterstrichen markiert.

10	I:	Mhm.
11	Nil:	Sechsundzwanzig, fünfundzwanzig, vierundzwanzig, dreiundzwanzig, zweiundzwanzig, einundzwanzig, zwanzig, neunzehn, achtzehn, siebzehn. *Klappt dabei, bis er zehn Finger zeigt, einen Finger nach dem anderen seiner geschlossenen Hände aus. Anschließend schließt er beide Hände wieder.* Sechzehn fünfzehn vierzehn. *Klappt dabei nacheinander drei Finger aus.*

Analyse

Nils zählt wahrscheinlich zur Lösung der Problemstellung von 27 um 13 zurück (Zeile 1). Auf Nachfragen des Interviewers (Zeilen 4 – 8) führt er diesen Zählprozess nochmals durch: Er zählt von 27 um 13 zurück. Dabei überwacht er den Zählprozess mit seinen Fingern, indem er für jeden Zählschritt einen Finger abspreizt. Betrachtet man sein Vorgehen am leeren Zahlenstrahl, so wird deutlich, dass er die Restvorstellung abziehend nutzt (vgl. Abb. 5-4), wobei er in Einzelschritten vorgeht.

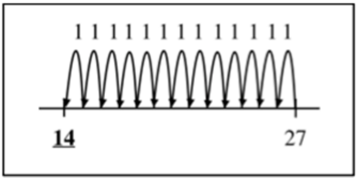


Abbildung 5-4: Nils' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Aber nicht nur zählende abziehende Vorgehensweisen ließen sich beobachten. Die Kinder nutzten beziehungsweise beschrieben auch nicht-zählende, schrittweise abziehende Vorgehensweisen zur Lösung gegebener Problemstellungen. So zum Beispiel Nils während des vierten Interviewzeitpunktes bei der Lösung des formalen ‚Abzieh-Problems' 16-7 .

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.*
2	Nil:	(2) *Schreibt 11 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Woher weißt du das? (.) So schnell?
4	Nil:	Ah nee. S*treicht die 11 wieder durch*. Das sind ja neun. S*chreibt 9 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
5	I:	Woher weißt du das denn?
6	Nil:	Weil (.) sechzehn *Zeigt dabei auf den Minuenden (16).* minus sechs sind zehn und noch einen (.) weg.
7	I:	Mhm.
8	Nil:	Das sind dann neun.

Analyse

Nils nennt zunächst 11 als Ergebnis (Zeile 2). Wie er darauf kommt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Auf Nachfragen des Interviewers (Zeile 3) verändert er jedoch das Ergebnis zu 9. Als Begründung des Ergebnisses beschreibt er, dass man durch das schrittweise Abziehen von 6 und 1 von 16, 9 erhält (Zeilen 6 – 8). Stellt man diese Vorgehensweise am leeren Zahlenstrahl dar, so erkennt man, dass er aufbauend auf der Restvorstellung schrittweise abziehend vorgeht (vgl. Abb. 5-5).

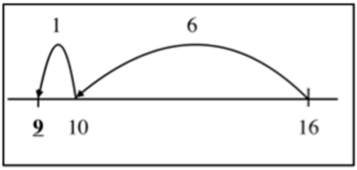


Abbildung 5-5: Nils' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Die formale Beschreibung in Zeile 6 („sechzehn minus sechs“) kann dabei auch als Beschreibung einer dynamischen Handlung aufgefasst werden.[98] Dies ist damit zu begründen, dass für sämtliche Kinder der Strichprobe zu allen vier Interviewzeitpunkten die formalen Operationszeichen stets als Darstellung der Handlung des Abziehens (beim Operationszeichen ‚-') beziehungsweise des Hinzufügens (beim Operationszeichen ‚+') gedeutet wurden: So auch Nils, der bei der Lösung der vorherigen Problemstellung folgendes anmerkt.

Transkriptausschnitt

1	Nil:	Weil man muss einfach immer eine runter zählen bei minus. (.) Bei plus eins mehr zählen.

Wie bereits erwähnt nutzten die Schülerinnen und Schüler jedoch nicht nur in mehreren Schritten abziehende Vorgehensweisen, sondern zeigten auch schrittweise abziehende Vorgehensweisen, bei denen in einem Schritt der Subtrahend vom Minuenden abgezogen wurde: Beispielsweise Toni bei der Lösung der Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (12-3) während des zweiten Interviewzeitpunktes (vgl. Abb. 5-6).

98 Dies gilt auch für alle weiteren Analysen.

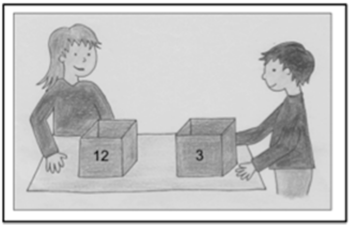


Abbildung 5-6: Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (12-3)

Transkriptausschnitt

1	T:	*Schreibt eine 9 auf das Arbeitsblatt.* Das war doch die Aufgabe, die ich vorhin erklärt habe. (.) Zwölf. *Zeigt dabei auf die 12 auf dem Arbeitsblatt.*
2	I:	Ja, stimmt.
3	T:	Minus drei.

Analyse

Toni bestimmt 9 als Ergebnis und damit als Unterschied zwischen den gegebenen Zahlenwerten 12 und 3 (Zeile 1). Ob er das Ergebnis auswendig weiß oder mental handelt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Er führt jedoch aus, dass der Term 12-3 die Problemstellung beschreibt (Zeile 1 – 3). Er wechselt also von der durch die Problemstellung angesprochene Unterschiedsvorstellung in die Restvorstellung und beschreibt dabei die Vorgehensweise des Abziehens (vgl. Abb. 5-7). Dabei nutzt er die formale Darstellung („minus" in Zeile 3) der Abziehhandlung.

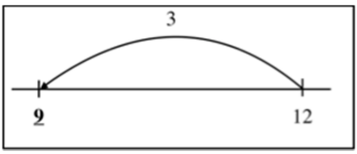


Abbildung 5-7: Tonis Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Auch zur Rechtfertigung seines Ergebnisses bei dem kontextgebundenen ‚Abzieh-Problem' 13-2 während des zweiten Interviewzeitpunktes (vgl. Abb. 5-8) beschreibt er die Vorgehensweise des Abziehens in einem Schritt.

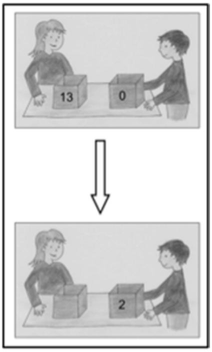


Abbildung 5-8: Kontextgebundenes ‚Abzieh-Problem' (13-2)

Transkriptausschnitt

1	T:	Zwei. (2) Nicht so leicht. *Schreibt 11 als Ergebnis in die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*
2	I:	Wie hast du das jetzt gemacht?
3	T:	Mh, zwei weggezogen. Von dreizehn zwei weg.

Analyse

Toni bestimmt elf als Ergebnis (Zeile 1). Er begründet das Ergebnis, indem er beschreibt, dass er von 13 zwei abgezogen hat (Zeile 3). Er verbleibt also in der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung und beschreibt dabei die Vorgehensweise des Abziehens in einem Schritt (vgl. Abb. 5-9).

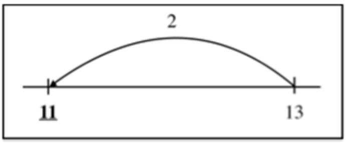


Abbildung 5-9: Tonis Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

(2) Abziehen – Stellenweise

Beim abziehenden stellenweisen Vorgehen werden Minuend und Subtrahend zunächst in ihre Stellenwerte zerlegt und anschließend separat voneinander abgezogen.

Diese Vorgehensweise beschreibt Nikolas während des ersten Interviewzeitpunktes bei der Lösung des formalen ‚Abzieh-Problems 14-13'.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.* Vierzehn minus dreizehn.
2	Nik:	(.) Ja eins.
3	I:	Woher weißt du das denn jetzt so schnell.

4	Nik:	Das geht doch ganz leicht. Weil vier. *Zeigt dabei auf die Einer des Minuenden (14).* (.) Vierzehn plus dreizehn. Dann bleibt ja nur noch einer dann übrig. (.) Ist ja ganz leicht.
5	I:	Mhm.
6	Nik:	Weil drei minus vier ergibt eins.
7	I:	Mhm.
8	Nik:	Dann zieht man ja auch von vier drei ab.

Analyse
Nikolas bestimmt sehr schnell 1 als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 2). Er begründet es damit, dass er lediglich die Einer des Minuenden und die Einer des Subtrahenden betrachtet (Zeile 6). Er zerlegt also die gegebenen Zahlenwerte in ihre Stellenwerte. Dabei beschreibt er als Rechtfertigung des Ergebnisses der Berechnung der Einer die Vorgehensweise des Abziehens (Zeile 6 – 8). Er nutzt also die Restvorstellung der Subtraktion, wobei er stellenweise abziehend vorgeht.

(3) Abziehen – Hilfsaufgabe
Bei der Vorgehensweise ‚Abziehen mit Hilfsaufgabe' werden die gegebenen Zahlenwerte zunächst verändert, anschließend wird die veränderte Problemstellung durch Abziehen gelöst und schließlich wird die Veränderung wieder rückgängig gemacht.

Insgesamt konnte im Verlauf des ersten Schuljahres der Gebrauch von zwei unterschiedlichen abziehenden ‚Hilfsaufgaben' bei den Kindern rekonstruiert werden. Zum einen wurde der Minuend, zum anderen der Subtrahend verändert.

Nils verändert beispielsweise während des vierten Interviewzeitpunktes bei dem formalen ‚Abzieh-Problem' 12-5 den Minuenden.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.*
2	Nil:	(5) *Schreibt 7 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Und wie hast du es bei der Aufgabe gemacht?
4	Nil:	Eh ,wenn das fünfzehn wären, wären es zehn. *Zeigt dabei auf den Minuenden (12).*
5	I:	Ja.
6	Nil:	Und dann noch drei weniger machen.
7	I:	Mhm (.) Und hast auch mit einer Plusaufgabe wieder gerechnet? Oder?
8	Nil:	*Schüttelt den Kopf.* Minus.

Analyse
Nils bestimmt nach kurzem Überlegen sieben als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 2). Er begründet das Ergebnis, indem er beschreibt, dass wenn man von 15 5 abzieht, 10 herauskommen (Zeile 4). Anschließend beschreibt er, dass die

Veränderung des Minuenden um +3 wieder rückgängig gemacht werden muss (Zeile 6). Insgesamt bestimmt er also den ‚Rest' durch die Vorgehensweise des Abziehens (vgl. auch Zeile 8), wobei er den Minuenden der Problemstellung verändert (vgl. Abb. 5-10).

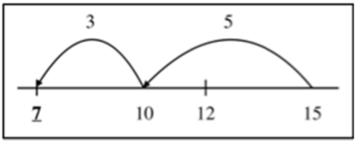


Abbildung 5-10: Nils' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Bei dem kontextgebundenen ‚Abzieh-Problem' 13-2 während des vierten Interviewzeitpunktes (vgl. Abb. 5-11) verändert er hingegen den Subtrahenden der Problemstellung.

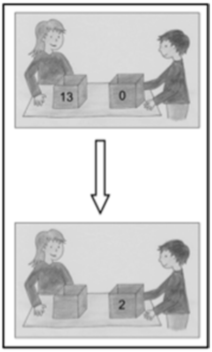


Abbildung 5-11: Kontextgebundenes ‚Abzieh-Problem' (13-2)

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.*
2	Nil:	(3) *Schreibt 11 als Ergebnis auf die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*
3	I:	Und die?
4	Nil:	Eh, die war mit (.) minus.
5	I:	Wie hast du die gemacht?
6	Nil:	(2) Dreizehn weniger (.) drei sind zehn.
7	I:	Mhm.
8	Nil:	Und noch ein dazu.

Analyse

Nils bestimmt nach kurzem Überlegen 11 als Ergebnis (Zeile 2). Er begründet das Ergebnis, indem beschreibt, dass er von 13 drei abgezogen hat (Zeile 6). Anschließend korrigiert er die Veränderung des Subtrahenden, indem er zur 10 wieder eins addiert (Zeile 8). Betrachtet man seine Vorgehensweise am leeren Zahlenstrahl (vgl. Abb. 5-12), so wird deutlich, dass dieses Vorgehen der Restvorstellung und im Speziellen der Vorgehensweise des Abziehens zuzuordnen ist.

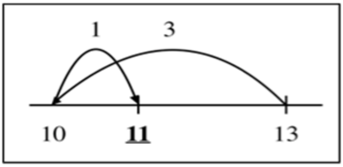


Abbildung 5-12: Nils' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

(4) Abziehen – Vereinfachen

Auch die Vorgehensweise des ‚Abziehens mit Vereinfachen', bei der die gegebenen Zahlenwerte auf der Grundlage der Konstanz der Differenz in einem Schritt verändert werden, konnte bei den Kindern rekonstruiert werden.

So bedient sich beispielsweise Toni während des vierten Interviewzeitpunktes zur Begründung des Ergebnisses bei dem formalen ‚Abzieh-Problem' 16-7 einer ‚vereinfachten' Problemstellung.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.*
2	T:	(5) *Schreibt 9 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Woher weiß du das?
4	T:	*Schiebt das Arbeitsblatt zur Seite.* Geht doch einfach.
5	I:	Was hast du denn überlegt?
6	T:	Gar nichts.
7	I:	Weißt du das einfach so?.
8	T:	Ja.
9	I:	*Legt das Arbeitsblatt zur Seite und legt die nächste Problemstellung auf den Tisch (formales ‚Abzieh-Problem' 21-17).*
10	T:	(3) Ist genau so wie (.) zwölf minus (.) drei.
11	I:	Welche? Die? *Zeigt dabei auf die Problemstellung 21-17.*
12	T:	Nein. (.) Die. *Deutet dabei auf die vorherige Problemstellung.*
13	I	Die? *Legt dabei erneut die vorherige Problemstellung auf den Tisch.*
14	T:	Mhm.
15	I:	Wie zwölf minus drei?
16	T:	Ja.
17	I:	Das musst du mir erklären. (.) Das, eh, verstehe ich jetzt nicht.
18	T:	Nein, erkläre ich nicht, erkläre ich nicht.
19	I:	Versuch mal. (.) Ich hab das nicht verstanden. (.) Das ist (.) bestimmt eine gute Idee.
20	T:	Guck, das is so, eh, (2) man kann auch so sagen. (.) Zwölf sind es.
21	I:	Ja.

22	T:	Dann, eh, kommen ja zwei weg. *Zeigt dabei zwei Finger.*
23	I:	Ja.
24	T:	Dann sind es noch zehn und einen weg. *Zeigt dabei einen Finger.* Neun.

Analyse
Toni nennt nach kurzem Überlegen neun als Ergebnis. (Zeile 2). Wie er darauf kommt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Zunächst führt er auch keine Begründung des Ergebnisses an (Zeilen 3 – 9). Erst als der Interviewer bereits die nächste Problemstellung vorlegt, verweist Toni auf einen zu der Problemstellung ‚passenden' Term (Zeilen 10 – 14). Dabei beschreibt er, dass auch die Problemstellung 12-3 zu der gegebenen Problemstellung 16-7 ‚passt' (Minuend und Subtrahend auf der Grundlage der Konstanz der Differenz um -4 verändert (vgl. Abb. 5-13)). Eine Begründung für diese Veränderung des gegebenen Zahlenmaterials führt er nicht an (Zeilen 15 – 18). Er beschreibt lediglich, dass man die ‚veränderte' Problemstellung durch schrittweises Abziehen (zwei abziehen und dann noch eins abziehen) lösen kann (Zeilen 19 – 24).

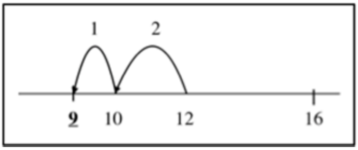


Abbildung 5-13: Tonis Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

(5) Start-Finden – Schrittweise
Die Restvorstellung der Subtraktion wurde allerdings – wie bereits erwähnt – nicht nur abziehend, sondern auch start-findend genutzt.

So wurde von den Kindern neben einem in ‚mehreren Schritten' schrittweisen Start-Finden, bei dem der zweite Summand in mehreren Schritten zum gesuchten Ergebnis – dem Start – hinzugefügt wird, auch ein ‚in einem Schritt' schrittweises Start-Finden genutzt. Dabei wird der zweite Summand in einem Schritt zum gesuchten Ergebnis hinzugefügt.

So begründet beispielsweise Nils während des vierten Interviewzeitpunktes das Ergebnis des formalen ‚Abzieh-Problems' 11-4 mit einem in mehreren Schritten schrittweisen Start-Finden.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.*
2	Nil:	(5) *Schreibt 7 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Und da? Was hast du da gerechnet?
4	Nil:	Sieben. *Zeigt auf die Differenz (7).* Plus drei. *Zeigt auf den Subtrahenden (4).* Sind zehn. *Zeigt auf den Minuenden (11).* (.) Und dann noch einen mehr. *Zeigt auf den Subtrahenden (4).* (.) Plus vier. (.) Das sind elf. *Zeigt auf den Minuenden (11).*

Analyse

Nils nennt bestimmt sieben als Ergebnis (Zeile 2). Wie er auf die Sieben kommt, wird dabei jedoch nicht ersichtlich. Er begründet das Ergebnis über eine schrittweise Hinzufügehandlung von 3 und 1 zu 7 (Zeile 4). Nils deutet also die Abzieh-Problemstellung innerhalb der Restvorstellung der Subtraktion in ein Start-Finde-Problem um (vgl. Abb. 5-14).

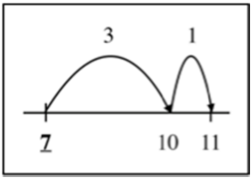


Abbildung 5-14: Nils Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Auch Amian nutzt während des vierten Interviewzeitpunktes bei der Lösung der formalen Problemstellung 8-3 in der Restvorstellung das schrittweise Start-Finden, wobei er in ‚einem Schritt' den zweiten Summanden hinzufügt.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.*
2	A:	*Schreibt sofort 5 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Woher weißt du das, dass fünf rauskommt?
4	A:	Weil (.) fünf. *Zeigt dabei fünf Finger mit der linken Hand.* Und drei. *Zeigt dabei drei Finger mit der rechten Hand.* Machen acht.
		...
7	I:	Hast das so gerechnet? Oder wusstest du das Ergebnis schon auswendig?
8	A:	Ich wusste das schon auswendig.

Analyse

Amian bestimmt 5 als Ergebnis (Zeile 2). Da er dieses direkt benennen kann, ist zu vermuten, dass er das Ergebnis der Problemstellung auswendig abrufen kann. Er bestätigt diese Vermutung auch in Zeile 8. Er begründet das Ergebnis durch Rückgriff auf die Vorgehensweise des Start-Findens (vgl. Abb. 5-15), indem er beschreibt, dass, wenn man zu fünf drei hinzufügt, 8 herauskommen (Zeile 4).

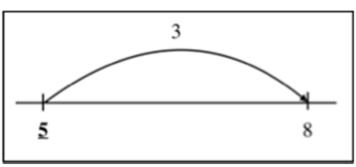


Abbildung 5-15: Amians Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Auch Önal nutzt während des vierten Interviewzeitpunktes bei der formalen Problemstellung 8-3 die Vorgehensweise des Start-Findens in ‚einem Schritt', um sein Ergebnis zu begründen. Dabei bedient er sich jedoch im Gegensatz zu Amian, der die Handlung des Hinzufügens anschaulich beschreibt beziehungsweise durchführt, der formalen Darstellung der Handlung des Hinzufügens.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.* Die erste.
2	Ö	(4) *Schreibt 5 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Ist einfach?
4	Ö:	*Nickt.*
5	I:	Woher weißt du, dass das fünf ist?
6	Ö:	Weil, ich manchmal (.) fünf plus drei rechne. *Zeigt dabei zunächst auf die Differenz (5) und anschließend auf den Subtrahenden (3).*

Analyse

Önal benennt 5 als Ergebnis (Zeile 2). Wie er es mental bestimmt oder ob er es auswendig weiß, wird in der Szene nicht ersichtlich. Zur Begründung des Ergebnisses bezieht er sich auf den Term 5+3 (Zeile 6), der am leeren Zahlenstrahl dargestellt, genau der Vorgehensweise ‚Start-Finden' entspricht (vgl. Abb. 5-16).

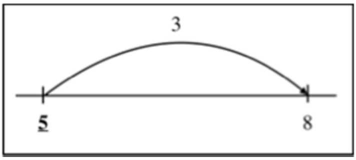


Abbildung 5-16: Önals Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

(6) Start Finden – Hilfsaufgabe

Bei der Vorgehensweise ‚Start-Finden mit Hilfsaufgabe' werden die gegebenen Zahlenwerte zunächst verändert, anschließend wird die veränderte Problemstellung durch Start-Finden gelöst und schließlich wird die Veränderung wieder rückgängig gemacht.

Insgesamt konnte im Verlauf des ersten Schuljahres der Gebrauch von zwei unterschiedlichen start-findenden ‚Hilfsaufgaben' bei den Kindern rekonstruiert werden. Zum einen wurde die Summe, zum anderen der zweite Summand verändert.

Beispielsweise beschreibt Önal während des vierten Interviewzeitpunktes bei der Rechtfertigung des genannten Ergebnisses bei der formalen Abzieh-Problemstellung 11-4 diese Vorgehensweise, wobei er die Summe verändert.

Transkriptausschnitt

1	I::	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.*
2	Ö:	(26) *Spielt zunächst mit den auf dem Tisch befindlichen Bauklötzen. Schreibt dann 7 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Wie hast du das denn jetzt überlegt?
4	Ö:	Ja, da brauchte ich schon ein bisschen lange.
5	I:	Was hast du denn überlegt? Kannst du mir das sagen?
6	Ö:	Ja, das hier so. (.) Das plus vier. (.) Ob das gleich acht ergibt. (3) Ob das gleich acht ergibt, oder so.
7	I:	Und wie hast du dann herausgefunden, dass es gleich sieben ist?
8	Ö:	Naja, weil.
9	I:	Hast du gezählt? Oder hast du dir was anderes überlegt?
10	Ö:	Naja, weil acht plus vier sind ja zehn.
11	I:	Sind zehn?
12	Ö:	Mhm. (.) Plus vier. (.) Sind ja zwölf.
13	I:	Mhm. Und woher weißt du, dass das dann sieben sind?
14	Ö:	Weil dann einen weniger sein muss.

Analyse
Önal bestimmt 7 als Ergebnis (Zeilen 1 – 2). Zur Begründung des Ergebnisses beschreibt er, dass man zur Lösung der gegebenen Problemstellung die Gleichung 8+4=12 nutzen kann (Zeilen 10 – 12), indem man die 11 um 1 verringert und sich dadurch bei konstantem zweiten Summanden der erste Summand ebenfalls um 1 verringert (Zeilen 13 – 14). Er deutet die gegebene ‚Abzieh-Problemstellung' innerhalb der Restvorstellung der Subtraktion in eine ‚Start-Finde-Problemstellung' (_+4=11) um. Dazu nutzt er – wie beschrieben – die Gleichung 8+4=12, aus der er sich das Ergebnis ableitet (vgl. Abb. 5-1.

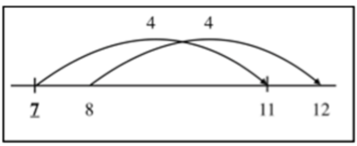


Abbildung 5-17: Önals Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Bei der Problemstellung ‚Vergleichen', bei der der Unterschied von zwei und acht bestimmt werden soll (vgl. Abb. 5-18), nutzt Nils während des zweiten Interviewzeitpunktes hingegen die Vorgehensweise des ‚Start-Findens', indem er den zweiten Summanden verändert.

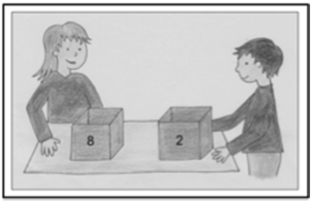


Abbildung 5-18: ‚Vergleichen: Unterschied gesucht (8-2)

Transkriptausschnitt

1	Nil:	Mh. (5) Fünf.
2	I:	Fünf?
3	Nil:	(2) Nein, sechs. *Schüttelt dabei den Kopf.*
4	I:	Wie hast du es gerechnet?
5	Nil:	(.) Äh. (.) Fünf plus drei. Das sind acht.
6	I:	(.) Ja.
7	Nil:	Ja und zwei ist ein weniger als drei. *Zeigt dabei auf die 2 in der Problemstellung.*
8	I:	Mhm.
9	Nil:	Also ein mehr.

Analyse
Nils bestimmt nach kurzem Überlegen zunächst 5 als Ergebnis, verbessert sich jedoch auf Nachfragen des Interviewers und nennt 6 als Ergebnis (Zeilen 1 – 3). Wie er auf dieses Ergebnis kommt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Er begründet das Ergebnis jedoch über die Gleichung 5+3=8. Aus der leitet er sich das Ergebnis der Problemstellung ab, indem er den zweiten Summanden, die 3, um 1 verringert. Damit erhält er die Gleichung 6+2=8 (Zeilen 4 – 9) (vgl. Abb. 5-19). Er wechselt also von der durch die Problemstellung angesprochene Unterschiedsvorstellung in die Restvorstellung der Subtraktion und löst dabei das ‚Start-Finde-Problem' _+2=8. Dazu nutzt er – wie beschrieben – die Gleichung 5+3=8, aus der er sich das Ergebnis ableitet.

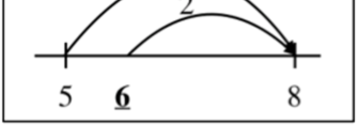


Abbildung 5-19: Nils' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Operationaler Gebrauch der Unterschiedsvorstellung

Die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion wurde von den Schülerinnen und Schülern im Verlauf des ersten Schuljahres sowohl *additiv ergänzend* als auch *subtraktiv ergänzend* gebraucht. Tabelle 5-2 konkretisiert den Gebrauch der *additiv ergänzenden* und *subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen* hinsichtlich weiterer Charakteristika (2. Dimension der Vorgehensweisen (vgl. Kapitel 2.2.3)) und gibt damit einen Überblick über den rekonstruierten, operationalen Gebrauch der Unterschiedsvorstellung.

Tabelle 5-2: Übersicht über den operationalen Gebrauch der Unterschiedsvorstellung

1. Dimension der Vorgehensweise	2. Dimension der Vorgehensweise
Additives Ergänzen	Schrittweise (7)
	Stellenweise (8)
	Hilfsaufgabe (9)
	Vereinfachen (10)
Subtraktives Ergänzen	Schrittweise (11)

Dabei wurden im Verlauf des ersten Schuljahres alle vier verschiedenen additiv ergänzenden Vorgehensweisen von den Schülerinnen und Schülern genutzt. Bei den subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen konnte hingegen lediglich ein schrittweises Vorgehen beobachtet werden Dies ist eventuell damit zu erklären, dass das subtraktive Ergänzen insgesamt eine eher untergeordnete Rolle zur Lösung von Subtraktionsproblemen zu spielen scheint (vgl. Kapitel 3.1).

Im Folgenden wird die Vielfalt an auf Unterschiedsvorstellungen aufbauenden Vorgehensweisen – analog zu den Ausführungen zum operationalen Gebrauch der Restvorstellung – dargestellt.

(7) Additives Ergänzen – Schrittweise

Bei den schrittweise additiv ergänzenden Vorgehensweisen zur Lösungsbestimmung wird in einem oder mehreren Schritten vom ersten Summanden zur Summe ergänzt. Dabei stellt das schrittweise ‚Hinzugefügte' – also der Unterschied (bzw. der zweite Summand) – das Ergebnis der Problemstellung dar.

Im Verlauf des ersten Schuljahres nutzten beziehungsweise beschrieben die Kinder bei den in mehreren Schritten additiv ergänzenden schrittweisen Lösungsbestimmungen zählende als auch nicht-zählende Vorgehensweisen. So löst Amian während des dritten Interviewzeitpunktes eine Problemstellung des Typs ‚Vereinigen' (vgl. Abb. 5-20) in Einzelschritten zählend.

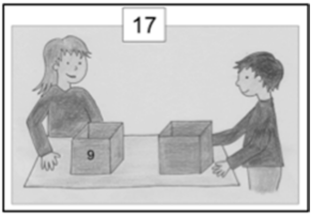


Abbildung 5-20: ‚Vereinigen' (17-9)

Transkriptausschnitt

1	A:	Neun. *Zeigt dabei neun Finger.* Hab (.) haben wir (.) und siebzehn sollen es werden. Eins *Klappt dabei einen weiteren Finger aus, so dass er zehn zeigt.* zwei drei. *Bricht den Zählprozess* Eins, zwei, drei, vier, fünf sechs, sieben. *Legt dabei nacheinander sieben Holzwürfel in einer Reihe auf den Tisch. Legt anschließend zwei weitere Holzwürfel in die Reihe.* Also neun habe ich (.) und siebzehn sollen es (.) brauch ich (.) eins *Legt dabei einen weiteren Holzwürfel in die Reihe mit den neun Steinen*. zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, (2) acht. *Legt dabei einen Holzwürfel nach dem anderem unter die Reihe mit den neun Steinen. Schreibt 8 in die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*

Analyse

Amian deutet die vereinigende Problemstellung als ‚Additives-Ergänzungs-Problem' („Neun [...] haben wir und siebzehn sollen es werden"). Zur Lösung möchte er seine Problemdeutung zunächst mit den Fingern modellieren. Diesen Lösungsansatz bricht er jedoch ab und modelliert seine Problemdeutung mit den Holzwürfeln. Er legt zunächst 9 Steine in eine Reihe und fügt anschließend solange Steine hinzu, bis er 17 Steine hat. Die in Einerschritten hinzugefügten Steine stellen dabei den Unterschied zwischen 9 und 17 dar (vgl. Abb. 5-21)

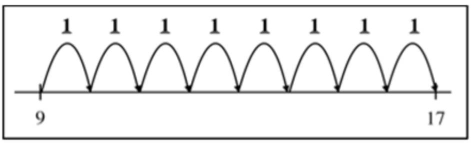


Abbildung 5-21: Amians Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Neben diesen Modellierungen – mit Bauklötzen oder aber auch mit Fingern – nutzten die Kinder auch die Zahlwortreihe, um die Problemstellung in Einzelschritten abziehend zu lösen: So beispielsweise Toni während des dritten Interviewzeitpunktes bei der Lösung des formalen ‚Abzieh-Problems' 53-27.

Transkriptausschnitt

1	I:	Dreiundfünfzig minus (.) siebenundzwanzig. *Zeigt dabei auf den Minuenden und Subtrahenden in der Problemstellung.*
2	T:	Naja (.) das könnten so dreißig sein, oder?
3	I:	Könnten so dreißig sein?
4	T:	Ja.
5	I:	Woher weißt du das denn?
6	T:	Dreißig sind es?
7	I:	Nö, aber (.) woher weißt du, dass es ungefähr dreißig sein könnten?
8	T:	Ja (.) weil das schon eine große Aufgabe ist?
9	I:	Mhm.
10	T:	(11) acht (.) achtundzwanzig, neunundzwanzig, dreißig, einunddreißig, zweiunddreißig, dreiunddreißig, vierunddreißig, fünfunddreißig, sechsunddreißig, siebenunddreißig, achtunddreißig, neununddreißig, vierzig, einundvierzig, zweiundvierzig, dreiundvierzig, vierundvierzig, fünfundvierzig, sechsundvierzig, siebenundvierzig, achtundvierzig, neunundvierzig, fünfzig, einundfünfzig, zweiundfünfzig, dreiundfünfzig, vierundfünfzig, sechsundfünfzig, siebenundfünfzig, achtundfünfzig. *Klappt dabei jeweils nacheinander einen Finger seiner geschlossenen Hände aus. Zeigt er zehn Finger, schließt er beide Hände wieder und beginnt von vorne.* Ach, jetzt habe ich schon zu weit gerechnet. (2) achtundzwanzig, neunundzwanzig, dreißig, einunddreißig, zweiunddreißig, dreiunddreißig, vierunddreißig, fünfunddreißig, sechsunddreißig. *Klappt dabei jeweils nacheinander einen Finger seiner geschlossenen Hände ab.* Häh (.) sechsunddreißig? Siebenunddreißig, achtunddreißig, neununddreißig, vierzig, einundvierzig, zweiundvierzig, dreiundvierzig, vierundvierzig, fünfundvierzig, sechsundvierzig, siebenundvierzig, achtundvierzig, neunundvierzig, fünfzig, einundfünfzig, zweiundfünfzig, dreiundfünfzig. *Klappt dabei jeweils nacheinander einen Finger seiner geschlossenen Hände aus. Zeigt er zehn Finger, schließt er beide Hände wieder und beginnt von vorne.* Dreiundfünfzig. (2) Ergibt doch, glaub ich. *Schaut auf seine abgespreizten sechs Finger.* Sechsundzwanzig.

Analyse

Toni schätzt das Ergebnis zunächst ab (Zeilen 2 – 8). Zur Lösung der Problemstellung zählt Toni von 27 bis 53 und bestimmt so 26 als Ergebnis, wobei er die Zählschritte mit seinen Fingern überwacht (Zeile 10). Diese Zählschritte stellen den Unterschied zwischen 27 und 53 dar (vgl. Abb. 5-22). Toni wechselt also von der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung der Subtraktion zur Lösung in die Unterschiedsvorstellung. Dabei nutzt er schrittweises additives Ergänzen in Einzelschritten.

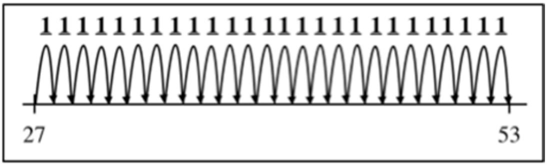


Abbildung 5-22: Tonis Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Aber nicht nur zählende additiv ergänzende Vorgehensweisen ließen sich beobachten. Die Kinder nutzten beziehungsweise beschrieben auch nicht-zählende schrittweise additiv ergänzende Vorgehensweisen zur Lösung gegebener Problemstellungen: So zum Beispiel Nils während des dritten Interviewzeitpunktes bei der Lösung der Problemstellung ‚Vereinigen' (13-6) (vgl. Abb. 5-23).

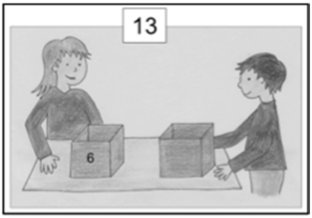


Abbildung 5-23: ‚Vereinigen' (13-6)

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	Nil:	Ah, sieben. *Schreibt 7 in die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*
3	I:	Wie hast du das gemacht?
4	Nil:	Sechs *Zeigt dabei auf die 6 auf dem Arbeitsblatt.* plus sechs *Zeigt dabei auf die von ihm eingetragene 7 auf dem Arbeitsblatt.* sind zwölf. *Zeigt dabei auf die 12 auf dem Arbeitsblatt.* Einer mehr (.) zu der *Zeigt dabei auf die von ihm eingetragene 7 auf dem Arbeitsblatt*. sechs die da dann war. (.) Sieben.

Analyse

Nils nennt direkt 7 als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 1). Wie er dazu kommt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Er begründet es, indem er aufbauend auf der Unterschiedsvorstellung eine schrittweise additiv ergänzende Vorgehensweise beschreibt (Zeile 4): Er fügt zu den gegebenen 6 zunächst sechs (dabei nutzt er die formale Darstellung zur Beschreibung der Handlung des Hinzufügens („plus" in Zeile 4)) und anschließend 1 hinzu, um zu 13 zu gelangen (vgl. Abb. 5-24). Das schrittweise ‚Hinzugefügte' stellt dabei den Unterschied zwischen 6 und 13 dar (vgl. Nils' Handlung in Zeile 4).

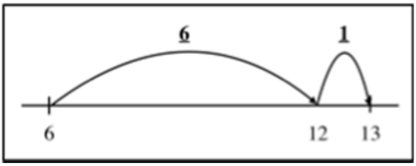


Abbildung 5-24: Nils' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Wie bereits erwähnt nutzten die Schülerinnen und Schüler jedoch nicht nur in mehreren Schritten additiv ergänzende Vorgehensweisen, sondern zeigten auch schrittweise additiv ergänzende Vorgehensweisen, bei denen in einem Schritt vom ersten Summanden zur Summe additiv ergänzt wurde: So beispielsweise Ömer bei der Lösung der Problemstellung ‚Vereinigen' (6-2) während des dritten Interviewzeitpunktes (vgl. Abb. 5-25).

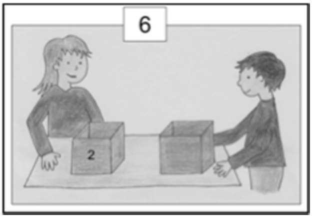


Abbildung 5-25: Problemstellung ‚Vereinigen' (6-2)

Transkriptausschnitt

1	Ö:	Warum nimmst du für mich immer so leichte Aufgaben. *Schreibt 4 in die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*
2	I:	Warum ist die denn so? Woher weißt du, dass es vier sind?
3	Ö:	Zwei (.) plus (2) vier gleich sechs.

Analyse

Önal nennt vier als Ergebnis (Zeile 1). Wie er auf die 4 kommt, wird in der Szene nicht explizit ersichtlich. Aufgrund Önals Aussage in Zeile 1 kann vermutet werden, dass er das Ergebnis eventuell auswendig weiß. Als Begründung für das Ergebnis verweist er auf die Gleichung 2+4=6 (Zeile 3). Stellt man diese am leeren Zahlenstrahl dar, so erkennt man, dass er die Vorgehensweise des additiven Ergänzens beschreibt (vgl. Abb. 5-26). Dabei bedient er sich der formalen Darstellung der Handlung des Hinzufügens („plus" in Zeile 3).

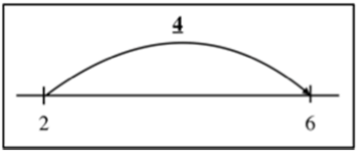


Abbildung 5-26: Önals Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

(8) Additives Ergänzen – Stellenweise
Beim additiv ergänzenden stellenweisen Vorgehen werden die gegebenen Zahlenwerte zunächst in ihre Stellenwerte zerlegt. Anschließend werden innerhalb der Zerlegungen die Teilergebnisse mittels additivem Ergänzen bestimmt.

Diese Vorgehensweise beschreibt Toni während des dritten Interviewzeitpunktes bei der Lösung des kontextgebundenen ‚Abzieh-Problems' 18-17 (vgl. Abb. 5-27).

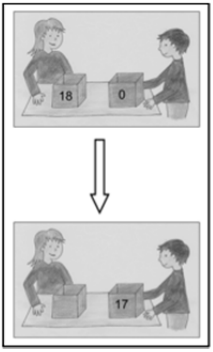


Abbildung 5-27: Kontextgebundenes ‚Abzieh-Problem' (18-17)

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	T:	Eh, achtzehn. *Zeigt dabei auf die 18 auf dem Arbeitsblatt.* (2) Siebzehn. *Zeigt dabei auf die 17 auf dem Arbeitsblatt.* (.) Hat die noch einen. *Schreibt 1 in die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*
3	I:	Woher weißt du das?
4	T:	Sieben *Zeigt dabei auf die 17 auf dem Arbeitsblatt.* und ein dazu *Zeigt dabei auf die 18 auf dem Arbeitsblatt.* ergibt acht.

Analyse
Toni nennt direkt 1 als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 1). Er begründet es, indem er lediglich auf die Einer der gegebenen Zahlenwerte fokussiert. Er beschreibt, dass wenn man zu 7 1 hinzufügt, 8 erhält (Zeile 4). Er betrachtet also nur die Einer, wobei er den Unterschied zwischen den Einern beziehungsweise

den Stellenwerten der gegebenen Zahlenwerte bestimmt. Zur Bestimmung des Unterschiedes nutzt er die Vorgehensweise des additiven Ergänzens. Insgesamt wechselt er also von der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung in die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion.

(9) Additives Ergänzen – Hilfsaufgabe

Bei der Vorgehensweise ‚Additives Ergänzen mit Hilfsaufgabe' werden die gegebenen Zahlenwerte zunächst verändert, anschließend wird die veränderte Problemstellung durch additives Ergänzen gelöst und schließlich wird die Veränderung wieder rückgängig gemacht.

Insgesamt konnte im Verlauf des ersten Schuljahres der Gebrauch von zwei unterschiedlichen additiv ergänzenden ‚Hilfsaufgaben' bei den Kindern rekonstruiert werden. Zum einen wurde die Summe, zum anderen der erste Summand verändert.

Önal verändert beispielsweise während des zweiten Interviewzeitpunktes zur Rechtfertigung des Ergebnisses einer Problemstellung des Typs ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' die Summe (vgl. Abb. 5-28).

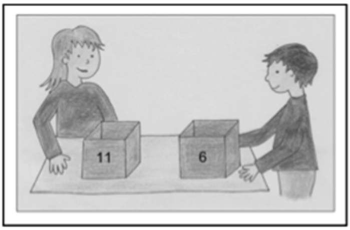


Abbildung 5-28: ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (11-6)

Transkriptausschnitt

1	Ö:	(6) Fünf.
2	I:	Fünf? Woher weißt du das? (.) Das ist richtig.
3	Ö:	Weil das sechs. *Zeigt dabei auf die 6 auf dem Arbeitsblatt.*
4	I:	Ja.
5	Ö:	Plus sechs machen gleich (.) zwölf. (.) Aber ich habe dafür fünf gemacht.

Analyse

Önal nennt 5 als Unterschied zwischen 6 und 1 (Zeile 1). Wie er diesen bestimmt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Als Begründung für das Ergebnis verweist er auf die Gleichung 6+6=12 (Zeilen 3 – 5), wobei der erste Summand für den gegeben Zahlenwert steht (vgl. Önals Handlung in Zeile 3). Anschließend verändert er den zweiten Summanden – also den Unterschied zwischen 6 und 12 – um -1, um so den Unterschied zwischen 6 und 1 zu bestimmen (vgl. Abb. 5-29). Insgesamt verbleibt Önal also in der durch die Problemstellung angesprochenen Unterschiedsvorstellung, wobei er zunächst den Unterschied von 6 und 12 bestimmt, um daraus anschließend den Unterschied zwischen 5 und 11 abzuleiten.

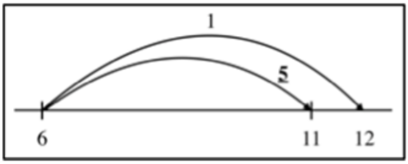


Abbildung 5-29: Önals Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Nils verändert während des vierten Interviewzeitpunktes bei der Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (vgl. Abb. 5-30) hingegen den ersten Summanden.

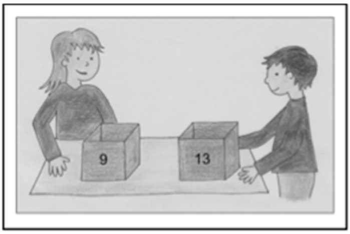


Abbildung 5-30: ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (13-9)

Transkriptausschnitt

1	Nils:	(5) Vier hat der Finn mehr.
2	I:	Und wie hast du das rausgekriegt?
3	Nil:	(3) Ich hab einfach das gezählt. (.) Zehn *Zeigt dabei auf die 9 auf dem Arbeitsblatt.* und dann hat der Finn drei plus (.) aber das sind neun (.) und dann einen dazu.

Analyse

Nils bestimmt 4 als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 1). Er begründet das Ergebnis, indem er auf den Term 10+3 verweist („Zehn [...] und dann hat der Finn drei plus" in Zeile 3). Daraus leitet er sich das Ergebnis der gegebenen Problemstellung ab, indem er den ersten Summanden um 1 verringert („aber da sind neun" in Zeile 3). Ihm ist klar, dass sich dann der zweite Summand um 1 erhöhen muss („und dann einen dazu" in Zeile 3). Stellt man sein Vorgehen am leeren Zahlenstrahl dar, so wird deutlich, dass Nils die Vorgehensweise des additiven Ergänzens beschreibt, wobei er den ersten Summanden verändert (vgl. Abb. 5-31).

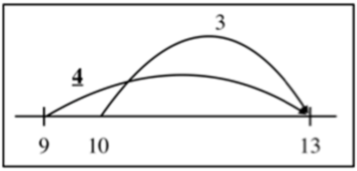


Abbildung 5-31: Nils' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

(10) Additives Ergänzen – Vereinfachen
Auch die Vorgehensweise des ‚Additiven Ergänzens mit Vereinfachen', bei der die gegebenen Zahlenwerte auf der Grundlage der Konstanz der Differenz in einem Schritt verändert werden, konnte bei den Kindern rekonstruiert werden.

So begründet beispielsweise Nils während des vierten Interviewzeitpunktes das Ergebnis einer Problemstellung des Typs ‚Vereinigen' (vgl. Abb. 5-32) über ‚additiv ergänzendes Vereinfachen'.

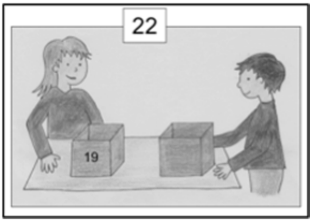


Abbildung 5-32: ‚Vereinigen' (22-19)

Transkriptausschnitt

1	Nil:	*Schreibt 3 auf das Arbeitsblatt.*
2	I:	Wie das?
3	Nil:	Eh (.) zwanzig *Zeigt dabei auf die 19 auf dem Arbeitsblatt.* plus drei *Zeigt dabei auf die vom ihm geschriebene 3 auf dem Arbeitsblatt.* sind dreiundzwanzig. (.) Da ist aber einer weniger *Zeigt dabei auf die 19 auf dem Arbeitsblatt.* und da ist dann auch ein weniger. *Zeigt dabei auf die 2 auf dem Arbeitsblatt.*
4	I:	Kannst du auch eine Aufgabe hierzu schreiben? Noch zu dem Bild? Die dazu passt?
5	Nil:	Ja, (.) neunzehn plus wie viel gleich zweiundzwanzig. *Schreibt dabei 19+_=22 auf das Arbeitsblatt.*

Analyse
Toni bestimmt sofort 3 als Ergebnis (Zeile 1). Wie er darauf kommt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Als Begründung bezieht Toni sich auf die Gleichung 20+3=23 (Zeile 3), aus der er sich das Ergebnis der gegebenen Zahlenwerte ableitet („Da ist aber einer weniger *Zeigt dabei auf die 19 auf dem Arbeitsblatt.*

und da ist dann auch ein weniger. *Zeigt dabei auf die 2 auf dem Arbeitsblatt*.“ in Zeile 3). Insgesamt deutet er die Problemstellung also als Additives-Ergänzungs-Problem, wobei er sich das Ergebnis über die Veränderung des ersten Summanden und der Summe um jeweils um +1 ableitet (vgl. Abb. 5-33). Dass er die gegebene Problemstellung als Additives-Ergänzungs-Problem deutet, wird auch in Zeile 5 deutlich.

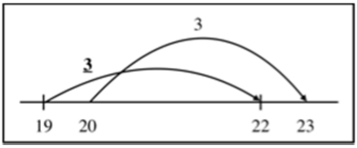


Abbildung 5-33: Nils’ Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

(11) Subtraktives Ergänzen – Schrittweise

Bei den schrittweise subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen zur Lösungsbestimmung wird in einem oder mehreren Schritten vom Minuenden zur Differenz subtraktiv ergänzt. Dabei stellt das schrittweise Abgezogene – also der Unterschied (bzw. der Subtrahend) – das Ergebnis der Problemstellung dar.

Im Verlauf des ersten Schuljahres nutzten beziehungsweise beschrieben die Kinder bei den in mehreren Schritten subtraktiv ergänzenden schrittweisen Lösungsbestimmungen lediglich zählende Vorgehensweisen.

So löst Nikolas während des ersten Interviewzeitpunktes eine Problemstellung des Typs ‚Vergleichen: Unterschied gesucht’ (vgl. Abb. 5-34) in Einzelschritten zählend.

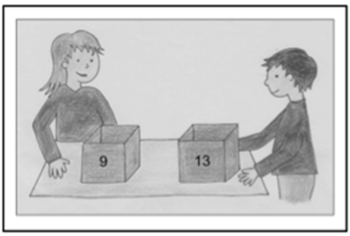


Abbildung 5-34: ‚Vergleichen: Unterschied gesucht’ (13-9)

Transkriptausschnitt

1	Nik:	Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf, zwölf, dreizehn. *Nimmt sich dabei nacheinander 13 Bauklötze und legt diese zu einer ungeordneten Menge zusammen. Anschließend spaltet er nacheinander 4 Bauklötze von der Menge ab.* (2) Er hat vier mehr.
2	I:	Woher weißt du das?

3	Nik:	Das hab ich einfach hier ausgerechnet.
4	I:	Zeig noch mal, wie du das gemacht hast.
5	Nik:	Ich hatte ja so viele. *Zeigt dabei auf die 13 Bauklötze.* Hatte ich mir ja schon dahinten genommen.
6	I:	Das waren dreizehn, ne?
7	Nik:	Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, (.) elf, zwölf, dreizehn. *Nimmt sich dabei erneut nacheinander 13 Bauklötze und legt diese zu einer ungeordneten Menge zusammen. Anschließend spaltet er vier Bauklötze in einem Schritt ab.* Dann habe ich ja vier weggenommen. Und das waren ja. (.) Das waren die. (.) Er hat vier mehr, weil hier sind nur noch vier übrig, wenn ich davon vier wegnehme. Dann sind es nur noch vier.

Analyse

Nikolas bestimmt den Unterschied zwischen den gegebenen Zahlenwerten, indem er, aufbauend auf der Unterschiedsvorstellung, subtraktiv ergänzend vorgeht. Er spaltet von einer Menge von 13 Holzwürfeln solange in Einzelschritten Elemente ab, bis er noch neun Holzwürfel übrig hat (Zeile 1) (vgl. auch Abb. 5-35). Dabei stellen die abgespaltenen Holzwürfel den Unterschied – also das Ergebnis der Problemstellung – dar („Er hat vier mehr.“ in Zeile 1). Auf Nachfragen des Interviewers führt er diese Vorgehensweise nochmals durch (Zeilen 2 – 7), wobei er den zuvor in Einzelschritten abgespalteten Unterschied in einem Schritt von der Ausgangsmenge abzieht (Zeile 7).

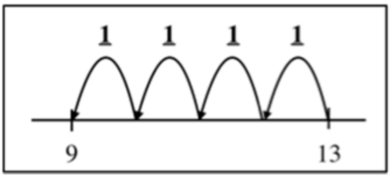


Abbildung 5-35: Nikolas Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Neben diesen Modellierungen mit Bauklötzen nutzten die Kinder auch die Zahlwortreihe, um die Problemstellung subtraktiv ergänzend zu lösen: So beispielsweise Nils während des ersten Interviewzeitpunktes bei der Lösung einer Problemstellung des Typs ‚Vereinigen’ (vgl. Abb. 5-36).

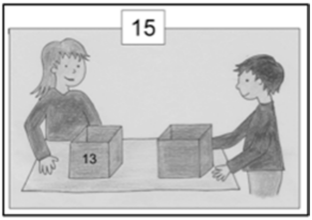


Abbildung 5-36: ‚Vereinigen' (15-13)

Transkriptausschnitt

1	Nil:	Der Finn hat dann nur zwei.
2	I:	(.) Wie hast du das gemacht?
3	Nil:	Plus.
4	I:	(.) Kann man das auch noch anders machen?
5	Nil:	(.) Ich habe keine Ahnung, wie man das noch machen kann.
6	I:	Fällt dir denn irgendwas ein? Vielleicht kann man das ja noch anders rechen auch?
7	Nil:	(3) Von fünfzehn bis dreizehn abziehen, minus gehen.
8	I:	(.) Nochmal, wie würde das gehen?
9	Nil:	Vierzehn. (.) Ich meine fünfzehn, vierzehn, dreizehn. *Klappt bei „vierzehn, dreizehn" nacheinander einen Finger aus*. Dann hat man die zwei.

Analyse

Nils bestimmt 2 als Ergebnis (Zeile 1). Er begründet es, indem er beschreibt, er habe „plus" gerechnet (Zeile 3). Die Bezeichnung „plus" steht dabei für die Vorgehensweise des additiven Ergänzens. Dies wurde bei der Bearbeitung vorheriger Problemstellungen zwischen Nils und dem Interviewer ausgehandelt. Auf Nachfragen des Interviewers (Zeilen 4 – 6) beschreibt Nils jedoch noch eine weitere Vorgehensweise in Form eines Handlungsplanes (Zeile 7), den er anschließend auch vollzieht (Zeile 9). Dabei bestimmt er den Unterschied von 15 und 13 durch die Vorgehensweise des schrittweisen subtraktiven Ergänzens, wobei er in Einzelschritten vorgeht (vgl. Abb. 5-37). Indem er für jeden Zählschritt einen Finger ausklappt, überwacht er seinen Zählprozess (Zeile 9).

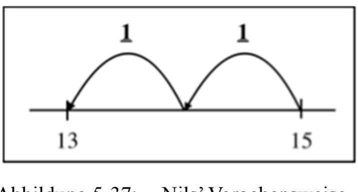


Abbildung 5-37: Nils' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Wie bereits erwähnt nutzten die Schülerinnen und Schüler jedoch nicht nur in mehreren Schritten subtraktiv ergänzende Vorgehensweisen, sondern zeigten auch schrittweise subtraktiv ergänzende Vorgehensweisen, bei denen in einem Schritt vom Minuenden zur Differenz subtraktiv ergänzt wurde: Beispielsweise Nikolas bei der Lösung der Problemstellung ‚Vereinigen' (9-4) während des ersten Interviewzeitpunktes (vgl. Abb. 5-38).

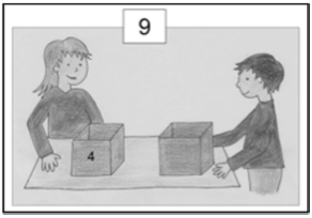


Abbildung 5-38: Problemstellung ‚Vereinigen' (9-4)

Transkriptausschnitt

1	Nik:	(2) *Zählt neun Holzwürfel ab und schiebt sie zu einer ungeordneten Menge zusammen. Anschließend spaltet er in einem Schritt fünf Bauklötze ab, welche er anschließend nochmals nachzählt.* Fünf
2	I:	Mhm. (1) Woher wusstest du denn, dass du da fünf wegnehmen musst?
3	Nik:	(1) Weil hier. Das sind ja vier. *Zeigt dabei auf die 4 auf dem Arbeitsblatt.* Hier sind ja vier. *Schiebt dabei die auf dem Tisch befindliche Restmenge von vier Holzwürfeln beiseite.* Fünf, sechs, sieben, acht, neun. *Fügt dabei nacheinander die fünf zuvor abgespaltenen Holzwürfeln zu den vier Holzwürfeln hinzu.*

Analyse

Nikolas löst die gegebene Problemstellung, indem er von 9 Holzwürfeln 5 Holzwürfel in Einzelschritten abspaltet (Zeile 1). Dabei stellt die abgezogene Menge das Ergebnis der zu lösenden Problemstellung dar. Das Ergebnis ist dabei innerhalb seiner Vorgehensweise als Unterschied zwischen 9 und 4 repräsentiert (vgl. Abb. 5-39). Auf Nachfragen des Interviewers (Zeile 2) begründet Nikolas, warum die abgespaltenen 5 Holzwürfel die Lösung der Problemstellung darstellen: Nikolas verweist dazu auf die Vorgehensweise des additiven Ergänzens – also auf die inverse Vorgehensweise zum subtraktiven Ergänzen (vgl. GREER 2012). Er erläutert, dass wenn man zu 4 Holzwürfeln 5 Holzwürfel hinzufügt, man 9 Holzwürfel erhält (Zeile 3).

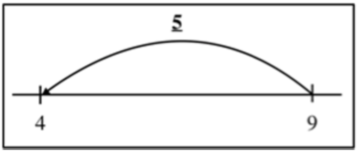


Abbildung 5-39: Nikolas Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.1.1.2 Zum relationalen Gebrauch der Grundvorstellungen

Neben dem im vorherigen Kapitel beschriebenen operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen, nutzten die Schülerinnen und Schüler im Laufe des ersten Schuljahres die beiden Grundvorstellungen auch *relational*. Dabei wird im Gegensatz zum operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen keine auf einer Grundvorstellungen aufbauende Vorgehensweise – im Sinne einer dynamischen Handlung – zur Lösungsbestimmung genutzt beziehungsweise als Rechtfertigung eines Ergebnisses oder in Form eines Handlungsplanes beschrieben, sondern *eine Beschreibung der statischen Beziehung der gegebenen Zahlenwerte zur Begründung eines mental bestimmten oder auswendig gewussten Ergebnisses vorgebracht*, wobei das Ergebnis der jeweiligen Problemstellung dabei als Rest oder Unterschied repräsentiert sein kann. Dass sich der relationale Gebrauch dabei lediglich im Begründungsprozess eines Ergebnisses rekonstruieren lässt, ist damit zu begründen, dass die statische Beziehung der gegebenen Zahenlwerte lediglich dann beschrieben werden kann, wenn diese auswendig verfügbar ist oder aber zuvor durch den operationalen Gebrauch einer der beiden Grundvorstellungen bestimmt wurde.

Auch der relationale Gebrauch konnte dabei – wie bereits erwähnt – sowohl für die Restvorstellung als auch für die Unterschiedsvorstellung rekonstruiert werden.

Relationaler Gebrauch der Restvorstellung

Nils nutzt beispielsweise während des ersten Interviewzeitpunktes zur Rechtfertigung seines Ergebnisses bei der Lösung der Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (vgl. Abb. 5-40) die Restvorstellung relational.

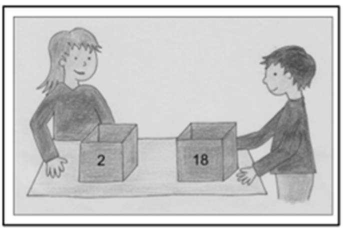


Abbildung 5-40: Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (18-2)

Transkriptausschnitt

1	Nil:	Sechzehn.
2	I:	Wie kommst du so schnell darauf?
3	Nil:	Einfach.
4	I:	(2) Was hast du dir überlegt? (.) Wie kommst du dann auf die sechzehn?
5	Nil:	Weil die zwei weniger sind (.) als die achtzehn. *Zeigt dabei auf die 18 auf dem Arbeitsblatt.*

Analyse

Nils nennt direkt 16 als Unterschied zwischen 2 und 18 (Zeile 1). Wie er auf dieses Ergebnis kommt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Er begründet das Ergebnis, indem er die statische Beziehung von 16 und 18 beschreibt („die zwei weniger sind als die achtzehn“ in Zeile 5). Betrachtet man diese Äußerung am leeren Zahlenstrahl (vgl. Abb. 5-41), so erkennt man, dass das Ergebnis der Problemstellung als Rest repräsentiert ist. Nils wechselt also von der durch die Problemstellung angesprochenen Unterschiedsvorstellung in die Restvorstellung der Subtraktion.

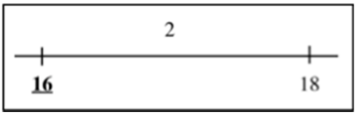


Abbildung 5-41: Nils’ relationale Begründung – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Auch Önal nutzt zur Begründung seines Ergebnisses des kontextgebundenen ‚Abzieh-Problems 7-1 (vgl. Abb. 5-42) während des zweiten Interviewzeitpunktes die Restvorstellung relational.

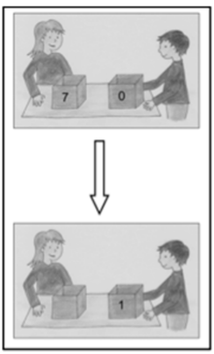


Abbildung 5-42: Kontextgebundenes ‚Abzieh-Problem’ (7-1)

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt die Problemstellung auf den Tisch.* Sieben. *Zeigt dabei auf die 7 auf dem Arbeitsblatt.* Und einen gibt sie ab. Wie viele hat sie noch?
2	Ö:	(2) Sie hat (.) eins. *Zeigt dabei auf die 1 auf dem Arbeitsblatt.* Und sie hat sieben. *Zeigt dabei auf die 7 auf dem Arbeitsblatt.*
3	I:	Mhm. Und von den sieben. *Zeigt dabei auf die 7 auf dem Arbeitsblatt.* Gibt sie einen ab. Wie viele hat sie dann noch?
4	Ö:	Sechs habe ich doch gesagt.
5	I:	Ach sechs. Habe ich nicht verstanden. (.) Sechs hat sie dann noch?
6	Ö:	Ja.
7	I:	Wie hast du das rausgekriegt?
8	Ö:	(.) Weil nach der sechs kommt die sieben.

Analyse
Önal wiederholt zunächst noch einmal die Problemstellung (Zeile 2). Dann nennt er als Ergebnis 2 (Zeile 4). Wie er darauf kommt, wird in der Szene nicht ersichtlich. Auf Nachfragen des Interviewers begründet er das Ergebnis, indem er die statische Beziehung von 6 und 7 beschreibt (Zeile 8). Er möchte damit deutlich machen, dass der Unterschied zwischen 6 und 7 1 beträgt. Betrachtet man diese Äußerung am leeren Zahlenstrahl (vgl. Abb. 5-43), so erkennt man, dass das Ergebnis der Problemstellung als Rest repräsentiert ist. Önal verbleibt also in der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung.

Abbildung 5-43: Önals relationale Begründung – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Relationaler Gebrauch der Unterschiedsvorstellung

Aber nicht nur die Restvorstellung der Subtraktion wurde von den Schülerinnen und Schülern im Verlauf des ersten Schuljahres relational genutzt, auch die Unterschiedsvorstellung wurde zur Beschreibung der statischen Beziehung der gegebenen Zahlenwerte als Begründung für genannte Ergebnisse herangezogen.

So rechtfertigt beispielsweise Nils während des ersten Interviewzeitpunktes bei der Lösung eines kontextgebundenen ‚Abzieh-Problems' (vgl. Abb. 5-44) das Ergebnis mittels einer relationalen Beschreibung der gegebenen Zahlenwerte, wobei das Ergebnis der Problemstellung als Unterschied repräsentiert ist.

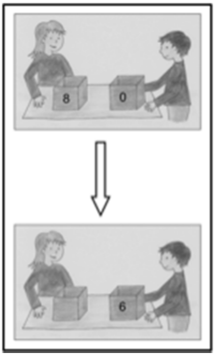


Abbildung 5-44: Kontextgebundenes ‚Abzieh-Problem' (8-6)

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	Nil:	(2) Dann hat die Sofie nur noch. *Zeigt dabei auf die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.* Zwei.
3	I:	Mhm. (.) Woher weißt du die zwei?
4	Nil:	Zwei sind mehr als sechs. Ich mein acht sind zwei mehr als sechs.

Analyse

Nils nennt nach kurzem Überlegen 2 als Ergebnis (Zeile 2). Wie er darauf kommt, wird dabei nicht ersichtlich. Er begründet das genannte Ergebnis, indem er die statische Beziehung von 8 und 6 beschreibt (Zeile 4). Betrachtet man diese Äußerung am leeren Zahlenstrahl, so wird deutlich, dass das Ergebnis der Problemstellung als Unterschied repräsentiert ist (vgl. Abb. 5-45). Nils wechselt also von der angesprochenen Restvorstellung in die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion.

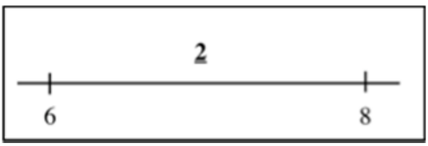


Abbildung 5-45: Nils relationale Begründung – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Und auch Laura nutzt die Unterschiedsvorstellung während des vierten Interviewzeitpunktes zur Rechtfertigung ihres Ergebnisses des formalen ‚Abzieh-Problems' 14-13 relational.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	L:	(2) Vierzehn minus dreizehn. (3) Mhm. (14) Oh, die ist gar nicht so einfach. (9) Ich muss was überprüfen.
3	I:	Mhm.
4	L:	Ich überlege gerade. Das geht mir durch den Kopf. Das. (6) Mhm. Das eins heraus gibt, weil (2) vierzehn minus dreizehn, ist ja vierzehn und dann dreizehn, einen weniger.
5	I:	Mhm. (.) Überprüfst du jetzt mal.
6	L:	Bin mir nicht sicher. *Zählt dabei 14 Plättchen ab und legt sie in eine Reihe mit zehn Plättchen (mit Fünferzäsur) und eine Reihe mit vier Plättchen. Anschließend dreht sie nacheinander 13 Plättchen um.* Mhm. Ja, eins. (1) Wusste ich es doch. *Schreibt 1 als Ergebnis der Problemstellung auf das Arbeitsblatt.*
7	I:	Super.
8	L:	Aber bevor man irgendwas hinschreibt, muss man kontrollieren.
9	I:	Mhm. (.) Was war denn deine erste Idee? Mit der eins? Wie bist du darauf gekommen, dass das eins ist?
10	L:	Weil ich das ja. Weil, wenn man jetzt vierzehn hätte, dass man (2) einfach (.) dreizehn zurückzähen muss und weil das vierzehn einen mehr ist, würde ich sagen.

Analyse

Laura merkt zunächst an, dass diese Aufgabe nicht einfach ist (Zeile 2). Dann nennt sie 1 als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 4) und begründet dies, indem sie die statische Beziehung von 13 und 14 beschreibt („einen weniger“ in Zeile 4). In dieser Äußerung ist das Ergebnis des gegebenen ‚Abzieh-Problems’ als Unterschied repräsentiert (vgl. Abb. 5-46). Laura wechselt also von der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung in die Unterschiedsvorstellung. Anschließend überprüft Laura das genannte Ergebnis, indem sie die durch die Problemstellung angesprochene Vorgehensweise des Abziehens aufgreift (Zeile 6). Sie nutzt also die Restvorstellung operational. Eventuell weiß Laura die Zahlbeziehung von 13 und 14 auswendig, wobei sie nicht sicher ist, ob dies das Ergebnis der gegebenen Problemstellung darstellt. Dies macht sie auch noch mal in Zeile 10 deutlich, indem sie ausführt, dass man bei der Problemstellung eigentlich von 14 13 abziehen muss („wenn man jetzt vierzehn hätte, dass man einfach dreizehn zurückzählen muss“), wobei 14 gleichzeitig um 1 größer ist als 13 („und weil das vierzehn einen mehr ist“).

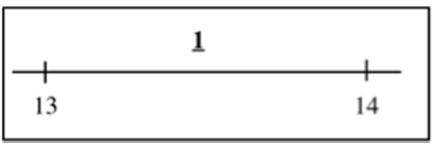


Abbildung 5-46: Lauras relationale Begründung – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.1.2 Zum Gebrauch der Grundvorstellungen bei den verschiedenen Problemstellungen

Nachdem im vorherigen Kapitel der operationale und relationale Gebrauch der Grundvorstellungen global – das heißt sowohl losgelöst von den vier Interviewzeitpunkten als auch losgelöst von den verschiedenen Problemstellungen – dargestellt wurde, wird in diesem Kapitel nun der Fokus auf die verschiedenen Problemstellungen gerichtet und damit Forschungsfrage 2 ‚*Welche Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen werden von Schülerinnen und Schülern bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen genutzt?*' beantwortet. Dazu wird dargelegt, ob und inwiefern die Grundvorstellungen über die vier Interviewzeitpunkte hinweg bei den gegebenen Problemstellungen

- formale ‚Abzieh-Probleme' (Kapitel 5.1.2.1),
- kontextgebundene ‚Abzieh-Probleme' (Kapitel 5.1.2.2),
- ‚Vereinigen' (Kapitel 5.1.2.3) sowie
- ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (Kapitel 5.1.2.4)

operational beziehungsweise relational genutzt wurden[99]. Grundsätzlich kann dabei bezüglich des operationalen Gebrauchs der Grundvorstellungen festgehalten werden, dass bei allen in der vorliegenden Arbeit eingesetzten Problemstellungen jeweils alle vier Vorgehensweisen (bezogen auf die erste Dimension zur Charakterisierung dieser) Abziehen, Start-finden, additives Ergänzen sowie subtraktives Ergänzen von den Erstklässlerinnen und Erstklässlern genutzt wurden.

5.1.2.1 Formale ‚Abzieh-Probleme'

Im Verlauf des ersten Schuljahres nutzten die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der formalen ‚Abzieh-Probleme' lediglich die Restvorstellung relational.

Operational wurden hingegen beide Grundvorstellungen der Subtraktion gebraucht, wobei sowohl aufbauend auf der Restvorstellung abziehend und start-findend als auch aufbauend auf der Unterschiedsvorstellung additiv ergänzend und subtraktiv ergänzend vorgegangen wurde (vgl. Tab. 5-3).

[99] Dazu wird dargestellt, inwiefern eine bestimmte Vorgehensweise bei den einzelnen Problemtypen im Verlauf des ersten Schuljahres mindestens einmal genutzt wurde. Auf Quantifizierungen wird dabei verzichtet.

Tabelle 5-3: Überblick über den operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen bei formalen ‚Abzieh-Problemen'[100]

Grundvorstellung	1. Dimension der Vorgehensweise	2. Dimension der Vorgehensweise
Rest	Abziehen	Schrittweise
		Stellenweise
		Hilfsaufgabe
		Vereinfachen
	Start-Finden	Schrittweise
		Hilfsaufgabe
Unterschied	Additives Ergänzen	Schrittweise
		Stellenweise
		Hilfsaufgabe
		Vereinfachen
	Subtraktives Ergänzen	Schrittweise

Auffällig ist dabei, dass im Restmodell nahezu alle Vorgehensweisen genutzt beziehungsweise beschrieben wurden (bis auf ein stellenweises abziehendes Vorgehen[101]), wohingegen aufbauend auf der Unterschiedsvorstellung lediglich schrittweise additiv beziehungsweise subtraktiv ergänzt wurde.

5.1.2.2 Kontextgebundene ‚Abzieh-Probleme'

Im Gegensatz zu den formalen ‚Abzieh-Problemen' wurden bei kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen' beide Grundvorstellungen der Subtraktion zur Rechtfertigung von Ergebnisses relational genutzt.

Auch wurden bei der Bearbeitung kontextgebundener ‚Abzieh-Probleme' sowohl die Restvorstellung als auch die Unterschiedsvorstellung operational genutzt, wobei auch bei diesem Problemtyp alle vier Vorgehensweisen (Abziehen, Start-Finden, additives Ergänzen, subtraktives Ergänzen) rekonstruiert werden konnten (vgl. Tab. 5-4).

---

[100] Dabei sind die beobachteten Vorgehensweisen grau hinterlegt.

[101] Dies kann eventuell damit erklärt werden, dass nur ein kleiner Teil der Problemstellungen entsprechendes Zahlenmaterial (Minuend und Subtrahend zweistellig) aufweist (vgl. Kapitel 4.2.2.2).

Tabelle 5-4: Überblick über den operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen bei kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen'[102]

Grundvorstellung	1. Dimension der Vorgehensweise	2. Dimension der Vorgehensweise
Rest	Abziehen	Schrittweise
		Stellenweise
		Hilfsaufgabe
		Vereinfachen
	Start-Finden	Schrittweise
		Hilfsaufgabe
Unterschied	Additives Ergänzen	Schrittweise
		Stellenweise
		Hilfsaufgabe
		Vereinfachen
	Subtraktives Ergänzen	Schrittweise

Innerhalb der Restvorstellung wurde dabei lediglich kein abziehendes Vereinfachen beobachtet – alle übrigen, auf der Restvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen konnten rekonstruiert werden. In der Unterschiedsvorstellung hingegen wurden im Verlauf des Schuljahres keine Vorgehensweisen des Typs ‚additives Ergänzen mit Hilfsaufgabe' und ‚additives Ergänzen mit Vereinfachen' von den Schülerinnen und Schülern genutzt beziehungsweise erläutert.

5.1.2.3 Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'

Bei der Bearbeitung der auf der Unterschiedsvorstellung der Subtraktion aufbauenden Problemstellungen des Typs ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' nutzten die Kinder beide Grundvorstellungen sowohl relational als auch operational. Dabei nutzten die Kinder sowohl die auf der Restvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen ‚Abziehen' und ‚Start-Finden' als auch die auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen des ‚additiven Ergänzens' und des ‚subtraktiven Ergänzens' (vgl. Tab. 5-5).

[102] Dabei sind die beobachteten Vorgehensweisen grau hinterlegt.

Tabelle 5-5: Überblick über den operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen bei Problemstellungen des Typs ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'[103]

Grundvorstellung	1. Dimension der Vorgehensweise	2. Dimension der Vorgehensweise
Rest	Abziehen	Schrittweise
		Stellenweise
		Hilfsaufgabe
		Vereinfachen
	Start-Finden	Schrittweise
		Hilfsaufgabe
Unterschied	Additives Ergänzen	Schrittweise
		Stellenweise
		Hilfsaufgabe
		Vereinfachen
	Subtraktives Ergänzen	Schrittweise

Auffällig ist hierbei, dass die Vorgehensweise des Abziehens bei diesem Problemtyp lediglich schrittweise genutzt wurde, wohingegen bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) ein größeres Repertoire an unterschiedlichen abziehenden Vorgehensweisen rekonstruiert werden konnte.

5.1.2.4 Problemstellung ‚Vereinigen'

Bei der Problemstellung ‚Vereinigen', welche keiner der beiden Grundvorstellungen eindeutig zugeordnet werden kann (vgl. Kapitel 2.2.1), wurden sowohl die Restvorstellung als auch die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion relational und operational von den Schülerinnen und Schülern genutzt. Der operationale Gebrauch realisierte sich auch bei diesem Problemtyp in den vier möglich Vorgehensweisen (Abziehen, Start-Finden, additives Ergänzen, subtraktives Ergänzen) (vgl. Tab. 5-6).

103 Dabei sind die beobachteten Vorgehensweisen grau hinterlegt.

Tabelle 5-6: Überblick über den operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen bei Problemstellungen des Typs ‚Vereinigen'[104]

Grundvorstellung	1. Dimension der Vorgehensweise	2. Dimension der Vorgehensweise
Rest	Abziehen	Schrittweise
		Stellenweise
		Hilfsaufgabe
		Vereinfachen
	Start-Finden	Schrittweise
		Hilfsaufgabe
Unterschied	Additives Ergänzen	Schrittweise
		Stellenweise
		Hilfsaufgabe
		Vereinfachen
	Subtraktives Ergänzen	Schrittweise

Dabei nutzten beziehungsweise beschrieben die Kinder im Verlauf des ersten Schuljahres aufbauend auf der Restvorstellung nicht die Vorgehensweisen ‚stellenweises Abziehen' und ‚vereinfachendes Abziehen'. Aufbauend auf der Unterschiedsvorstellung nutzten sie lediglich kein ‚stellenweises additives Ergänzen'.

5.1.3 Zum Zusammenwirken von Vorgehensweisen innerhalb einer Grundvorstellung

Bezogen auf Forschungsfrage 3 ‚*Inwiefern wirken Vorgehensweisen innerhalb einer Grundvorstellung zusammen?*' zeigte sich beim operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen während den einzelnen Interviewzeitpunkten, dass die Kinder nicht immer nur eine Vorgehensweise nutzten beziehungsweise beschrieben, sondern auch innerhalb einer Grundvorstellung jeweils beide Vorgehensweisen zusammenwirken können[105]:

- Aufbauend auf der Restvorstellung: Abziehen und Start-finden (Kapitel 5.1.3.1) beziehungsweise
- aufbauend auf der Unterschiedsvorstellung: Additives Ergänzen und subtraktives Ergänzen (Kapitel 5.1.3.2).

5.1.3.1 Zum Zusammenwirken von Vorgehensweisen innerhalb der Restvorstellung

Bezogen auf das Zusammenwirken von abziehenden und start-findenden Vorgehensweisen innerhalb der Restvorstellung der Subtraktion konnte beobachtet

---

104 Dabei sind die beobachteten Vorgehensweisen grau hinterlegt.
105 Dies bezieht sich auf die erste Dimension zur Charakterisierung der Vorgehensweisen.

werden, dass die Kinder sowohl bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) als auch bei den nicht eindeutig zu einer der beiden Grundvorstellungen zuordenbaren Problemstellung ‚Vereinigen' (vgl. Kapitel 2.2.1) beide Vorgehensweisen nutzten beziehungsweise beschrieben. Bei den auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' konnte hingegen kein Zusammenwirken der beiden auf der Restvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen rekonstruiert werden.

Beispielsweise macht Amian während des vierten Interviewzeitpunktes bei der Bearbeitung des formalen ‚Abzieh-Problems' 8-3 deutlich, dass er um den Zusammenhang der beiden Vorgehensweisen Abziehen und Start-Finden – im Sinne eines inversen Vorgehens (vgl. dazu GREER 2012) – weiß.

Transkriptausschnitt

1	I:	Fangen wir direkt mit der Aufgabe an. *Legt dabei das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	A:	*Schreibt direkt 5 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Woher weißt du das? Dass fünf rauskommt?
4	A:	Weil (.) fünf *Zeigt dabei mit der linken Hand fünf Finger.* und drei *Zeigt dabei mit der rechten Hand drei Finger.* machen acht. *Zeigt dabei beide Hände, also acht ausgeklappte Finger.*
5	I:	Mhm.
6	A:	Und drei gehen weg, *Klappt dabei die drei Finger der rechten Hand zu.* machen fünf.
7	I:	Super (.) Hast du das so gerechnet oder wusstest du das Ergebnis schon auswendig?
8	A:	Ich wusste das schon auswendig.

Analyse

Amian nennt direkt 5 als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 2), welches er wahrscheinlich auswendig abruft (vgl. dazu auch seine Aussage in Zeile 8). Im Folgenden begründet er das Ergebnis auf zwei Weisen. Zum einen verweist er auf die Vorgehensweise des Start-Findens (Ziele 4), indem er beschreibt und zeigt, dass wenn man zu einer Menge mit 5 Elementen (5 Finger) 3 Elemente (3 Finger) hinzufügt, eine Menge mit 8 Elementen (8 Finger) erhält (vgl. Abb. 5-47). Zum anderen begründet er das Ergebnis mit der inversen Handlung des Start-Findens – dem Abziehen: Er spaltet von 8 Elementen (8 Finger) 3 Elemente (3 Finger) ab und erhält so 5 als Ergebnis der Problemstellung (Zeilen 4 – 6) (vgl. Abb. 5-48). Amian verbleibt also in der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung und macht in seinen Aussagen deutlich, dass er um dem Zusammenhang beider Vorgehensweisen innerhalb der Restvorstellung weiß.

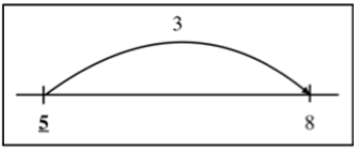


Abbildung 5-47: Amians erste Begründung: Start-Finden – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

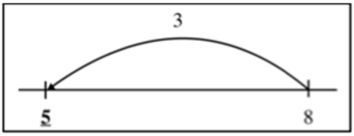


Abbildung 5-48: Amians zweite Begründung: Abziehen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Genauso wie Amian, der um den Zusammenhang der beiden Vorgehensweisen zur Restbestimmung weiß, macht dies auch Laura während des dritten Interviewzeitpunkte bei der Bearbeitung einer Problemstellung des Typs ‚Vereinigen' (vgl. Abb. 5-49) deutlich.

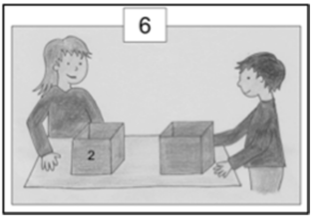


Abbildung 5-49: ‚Vereinigen' (6-2)

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.* Wie viele hat er?
2	L:	Ehm, Vier würde ich sagen. Weil wenn er. Das ist auch zurückzählen. Das war ja. Das ist die sechs. *Zeigt dabei fünf Finger mit der linken Hand und einen Finger mit der rechten Hand.* Fünf, vier. *Klappt dabei den einen Finger der rechten Hand und anschließend einen Finger der linken Hand zu.*
3	I:	Mhm.
4	L:	Weil wenn ich sechs minus eins. (.) Dann muss man einfach nur zwei. *Zeigt dabei auf die 2 auf de Arbeitsblatt.*
5	I:	Warum ist das denn auch mit (.) mit minus, mit rückwärtszähen?
6	L:	Vier plus zwei könnte man auch machen. Man kann aber auch sechs minus zwei. (.) Weil das ist eigentlich beides das Gleiche, nur eine andere Aufgabe.

Analyse
Laura nennt 4 als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 2). Sie begründet das Ergebnis, indem sie die Restvorstellung operational nutzt. Dabei beschreibt beziehungsweise zeigt sie die Vorgehensweise des Abziehens (Zeilen 2 – 4) (vgl. Abb. 5-50). Sie spaltet von 6 Elementen (6 Fingern) 2 Elemente (2 Finger) ab und erhält so den Rest 4 (4 Finger), den sie als Ergebnis der Problemstellung deutet. Auf Nachfragen des Interviewers (Zeile 5) beschreibt sie auch die Vorgehensweise des Start-Findens (Zeile 6) (vgl. Abb. 5-51), wobei sie sich dabei einer formalen Darstellung bedient („Vier plus zwei könnte man auch machen." in Zeile 6). Dabei macht sie deutlich, dass beide Vorgehensweisen das gleiche Ergebnis der Problemstellung liefern („Man kann aber auch sechs minus zwei. (.) Weil das ist eigentlich beides das Gleiche, nur eine andere Aufgabe.").

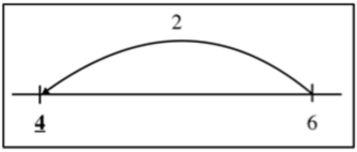


Abbildung 5-50: Lauras erste Begründung: Abziehen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

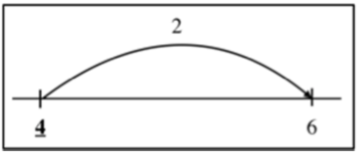


Abbildung 5-51: Lauras zweite Begründung: Start-Finden – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.1.3.2 Zum Zusammenwirken von Vorgehensweisen innerhalb der Unterschiedsvorstellung

Bezogen auf das Zusammenwirken von additiv ergänzenden und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen innerhalb der Unterschiedsvorstellung der Subtraktion, konnte beobachtet werden, dass die Kinder sowohl bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) als auch bei den auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellung ‚Vergleichen: Unterscheid gesucht' beide Vorgehensweisen nutzten beziehungsweise beschrieben. Bei den nicht eindeutig zu einer der beiden Grundvorstellungen zuordenbaren Problemstellung ‚Vereinigen' (vgl. Kapitel 2.2.1) konnte hingegen kein Zusammenwirken der beiden auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen rekonstruiert werden.

Beispielsweise nutzt Nils während des ersten Interviewzeitpunktes bei der Bearbeitung des formalen ‚Abzieh-Problems' 21-17 die Unterschiedsvorstellung operational, indem er sowohl additiv ergänzend als auch subtraktiv ergänzend vorgeht.

Transkriptausschnitt

1	I:	Und die letzte Aufgabe.
2	Nil:	Mhm.
3	I:	Einundzwanzig minus siebzehn. *Zeigt dabei zunächst auf den Minuenden und danach auf den Subtrahenden.* Die ist aber jetzt mal ein bisschen schwerer, oder?
4	Nil:	Ja. (4) Achtzehn, neunzehn, zwanzig, einundzwanzig. (.) Vier.
5	I:	Doch nicht schwer?
6	Nil:	Schüttelt den Kopf.
7	I:	Warum? (.) Wie hast du das denn jetzt so schnell gemacht?
8	Nil:	(.) Achtzehn, neunzehn, zwanzig, einundzwanzig. *Klappt dabei bei jedem Zählschritt einen Finger aus, so dass er zum Schluss des Zählprozesses vier Finger zeigt*. Vier.
9	I:	Mhm, und kann man das immer so machen mit dem Vorwärtszählen?
10	Nil:	Äh, auch rückwärts.
11	I:	Und warum hast du jetzt hier vorwärts gezählt? (2) Und nicht rückwärts?
12	Nil:	(.) Weil ich mach halt vorwärts (.) und rückwärts.
13	I:	Aber rückwärts wäre auch gegangen?
14	Nil:	Ja.
15	I:	(.) Wie hättest du das dann gemacht mit Rückwärts?
16	Nil:	Zwanzig, neunzehn, achtzehn, siebzehn (2) *Klappt dabei bei jedem Zählschritt einen Finger aus, so dass er zum Schluss des Zählprozesses vier Finger zeigt*.
17	I:	Also geht und geht es nochmal anders?
18	Nil:	Mm. *Schüttelt dabei en Kopf.*

Analyse

Nils zählt zur Lösung der Problemstellung von 17 bis 21 und bestimmt so durch additives Ergänzen den Unterschied von Minuend und Subtrahend (Zeile 4) (vgl. Abb. 5-52). Auf Nachfragen des Interviewers (Zeilen 7 – 15) wiederholt Nils zunächst seine Vorgehensweise (Zeile 8). Anschließend beschreibt Nils jedoch noch eine weitere Vorgehensweise. Dazu zählt er von 21 bis 17 rückwärts und bestimmt so durch subtraktives Ergänzen den Unterschied von Minuend und Subtrahend (Zeile 16) (vgl. Abb. 5-53). Insgesamt löst sich Nils also von der durch die gegebene Problemstellung angesprochenen Restvorstellung und wechselt in die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion. Dabei nutzt beziehungsweise beschreibt er beide möglichen auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen.

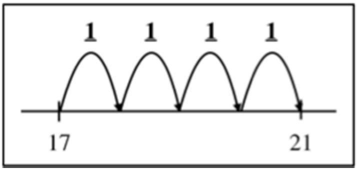


Abbildung 5-52: Nils erste Vorgehensweise: Additives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

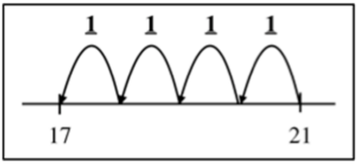


Abbildung 5-53: Nils zweite Vorgehensweise: Subtraktives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Und auch zur Rechtfertigung seines genannten Ergebnisses bei der Lösung des formalen ‚Abzieh-Problems' 71-69 verweist Nils während des dritten Interviewzeitpunktes auf die Vorgehensweisen des additiven und subtraktiven Ergänzens.

Transkriptausschnitt

1	Nil:	Und jetzt kommt die Letzte.
2	I:	Ja, das sind auch beides hohe Zahlen.
3	Nil:	(.) Ah. (.) Zwei.
4	I:	Aber das sind doch auch hohe Zahlen. (.) Ich habe gedacht, die wären so schwer?
5	Nil:	*Schreibt 2 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.* Die war nicht schwer.
6	I:	Warum ist die denn nicht schwer?
7	Nil:	Weil zwei. *Zeigt dabei auf die 69 auf dem Arbeitsblatt.* (.) Nein, (.) neunundsechzig *Zeigt dabei auf die 69 auf dem Arbeitsblatt.* plus zwei sind einundsiebzig. *Zeigt dabei auf die 71 auf dem Arbeitsblatt*
8	I:	Aha (.) und das war jetzt viel leichter?
9	Nil:	Ja.
10	I:	Mit Rückwärtszählen wäre es auch schwer gewesen, oder?
11	Nil:	Ja.
12	I:	Ja. *Nickt dabei.*
13	Nil	Aber dann hätte ich nur zwei zurück *Zeigt dabei zunächst auf die 71 und dann auf die 69 auf dem Arbeitsblatt.* zählen müssen.
14	I:	Hättest du nur zwei zurück zählen müssen?
15	Nil:	Ja, (.) weil (.) siebzig, neunundsiebzig. *Klappt dabei nacheinander einen Finger aus, so dass er zum Schluss zwei Finger zeigt.*
16	I:	Mhm.
17	Nil:	Nein, neunundsechzig.

Analyse
Nils nennt 2 als Ergebnis des formalen ‚Abzieh-Problems' (Zeile 3). Als Begründung beschreibt er, dass wenn man zu 69 2 hinzufügt, man 71 erhält (Zeile 7). Dabei bedient er sich der formalen Darstellung des Hinzufügens („plus" in Zeile 7). Nils wechselt also zur Begründung seines genannten Ergebnisses in die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion und beschreibt dabei die Vorgehensweise des additiven Ergänzens (vgl. Abb. 5-54). Auf die Frage des Interviewers, ob die Lösung der Problemstellung mit Abziehen komplizierter gewesen wäre (Zeile 10 („Rückwärtszählen" wird dabei dabei für die Vorgehensweise des Abziehens verstanden; dies wurde im vorherigen Verlauf des Interviews ausgehandelt)), wechselt Nils innerhalb der Unterschiedsvorstellung die Vorgehensweise. Dabei verweist er auf den Zählprozess von 71 bis 69 (Zeilen 13 bis 17). Nils beschreibt also als alternative Vorgehensweise zum additiven Ergänzen die Vorgehensweise des subtraktiven Ergänzens (vgl. Abb. 5-55).

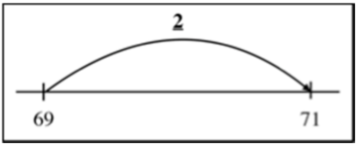


Abbildung 5-54: Nils' erste Begründung: Additives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

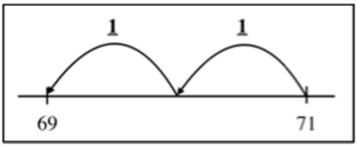


Abbildung 5-55: Nils' zweite Begründung: Subtraktives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.1.4 Zum Zusammenwirken von Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg

Bezogen auf die vierte Forschungsfrage ‚*Inwiefern wirken Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg zusammen?*' zeigte sich, dass im Bearbeitungsprozess einer gegebenen Problemstellung durchaus Vorgehensweisen auch über beide Grundvorstellungen hinweg zusammenwirken können. Dabei sind theoretisch vier verschiedene Kombinationen denkbar, wobei bis auf die Kombination von start-findenden und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen, alle übrigen Kombinationen im Datenmaterial rekonstruiert werden konnten (vgl. Tab. 5-7)[106].

Tabelle 5-7: Zusammenwirken von Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg

		Restvorstellung	
		Abziehen	Start-Finden
Unterschieds-vorstellung	Additives Ergänzen	x	x
	Subtraktives Ergänzen	x	-

Im Folgenden wird

- das Zusammenwirken von abziehenden (Restvorstellung) und additiv ergänzenden (Unterschiedsvorstellung) Vorgehensweisen in Kapitel 5.1.4.1,
- das Zusammenwirken von abziehenden (Restvorstellung) und subtraktiv ergänzenden (Unterschiedsvorstellung) Vorgehensweisen in Kapitel 5.1.4.2 sowie
- das Zusammenwirken von start-findenden (Restvorstellung) und additiv ergänzenden (Unterschiedsvorstellung) Vorgehensweisen in Kapitel 5.1.4.3

dargestellt.

5.1.4.1 Zum Zusammenwirken von abziehenden und additiv ergänzenden Vorgehensweisen

Das Zusammenwirken von abziehenden und additiv ergänzenden Vorgehensweisen konnte im Verlauf des Schuljahres bei sämtlichen Problemtypen rekonstruiert werden.

Beispielsweise verbleibt Toni während des ersten Interviewzeitpunktes bei der formalen Problemstellung 21-17 zunächst in der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung und löst das Problem mit Hilfe des Interviewers durch Abziehen. Anschließend beschreibt er jedoch in Form eines Handlungsplanes, dass man die Problemstellung auch mit additivem Ergänzen hätte lösen können. Er vollzieht also einen Grundvorstellungswechsel, wobei er auch die Unterschiedsvorstellung operational nutzt.

[106] Wie auch im vorherigen Kapitel bezieht sich dies auf die erste Dimension zur Charakterisierung der Vorgehensweisen.

Transkriptausschnitt

1	T:	Oh, einundzwanzig. (3)
2	I:	Kannst du die nicht?
3	T:	Kannst du mir helfen? Einundzwanzig.
4	I:	Ach, du willst einundzwanzig hinlegen?
5	T:	Ja.
6	I:	Ja, da kann ich dir bei helfen. Zählen wir zusammen?
		...
15	T:	Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf, zwölf, dreizehn, vierzehn, fünfzehn, sechzehn, siebzehn, achtzehn, neunzehn, zwanzig, einundzwanzig. *Der Interviewer schiebt dabei nacheinander 21 Holzwürfel zu einer Menge zusammen.*
16	I:	So. Einundzwanzig minus siebzehn.
17	T:	Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf, zwölf. *Spaltet dabei nacheinander einen Holzwürfel von den 21 Holzwürfeln ab.* (.) zwölf?
18	I:	Zwölf hast du schon. (.) Einundzwanzig minus siebzehn.
19	T:	Zwölf. (.) Dreizehn, vierzehn, fünfzehn, sechszehn, siebzehn. *Spaltet dabei fünf weitere Holzwürfel nacheinander ab und schaut auf die Restmenge.* Dann bleiben aber nur noch vier übrig.
		...
28	I:	Und jetzt noch mal eine Frage. Kann man das noch anders rechnen?
29	T:	Ja, man kann das hier. *Zeigt dabei auf die folgende Darstellung*[107].  Diese Zahl hier so hin schreiben. *Zeigt dabei zunächst auf den Minuenden (21) auf dem Arbeitsblatt und auf die 15 in der Darstellung (schwar-*

[107] Diese wurde von Toni bei der Bearbeitung einer vorherigen Problemstellung entwickelt und stellt einen von unten nach oben orientierten Zahlenstrahl dar, wobei die Zehner und Einer der Zahlsymbole größer zehn vertauscht sind.

		zer Kreis). Und dann die Siebzehn. *Zeigt dabei auf die 2 in der Darstellung (blauer Kreis).* Und dann alle Zahlen wie hier. Und dann kann man. (.) Ehm und dann noch rechnen.
30	I:	Kannst du mir das einmal noch zeigen? Das wäre super.
31	T:	Okay. Da, so hier ist jetzt mal diese Zahl *Zeigt dabei zunächst auf den Minuenden (21) auf dem Arbeitsblatt und auf die 15 in der Darstellung (schwarzer Kreis).*
32	I:	Fünfzehn hast du ja schon.
33	T:	Hier. *Zeigt dabei auf die 15 (schwarzer Kreis) in der Darstellung.*
34	I:	Okay.
35	T:	Hier ist schon mal diese Zahl. *Zeigt dabei auf die 15 (schwarzer Kreis) in der Darstellung.*
36	I:	Die Einundzwanzig.
37	T:	Und hier ist jetzt mal diese Zahl, *Zeigt dabei auf die 2 in der Darstellung (schwarzes Quadrat).* Eh (1) und dann hätte ich so eins, zwei, drei, *Tippt dabei auf die Zahlsymbole zwischen der 2 (schwarzes Quadrat) und der 15 (schwarzer Kreis) in der Darstellung.* Das hätte man auch machen können.

Analyse

Toni merkt zunächst an, dass er Hilfe bei der Lösung braucht (Zeilen 1 – 6). Mit der Unterstützung des Interviewers bildet er eine Menge mit 21 Elementen, von denen er anschließend 17 Elemente abspaltet und so den Rest 4 bestimmt. Toni verbleibt also in der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung und geht dabei abziehend vor (vgl. Abb. 5-56). Auf die Frage des Interviewers, ob er auch noch eine alternative Vorgehensweise zur Lösung der gegebenen Problemstellung kennt (Zeile 28), verweist er auf eine vom ihm bei der Bearbeitung einer vorherigen Problemstellung entwickelten Darstellung, welche einen von unten nach oben orientierten Zahlenstrahl darstellt (Zeile 29). Unter Bezug auf diese Darstellung beschreibt Toni im Folgenden den Handlungsplan, den Unterschied von 17 und 21 mittels additivem Ergänzen zu bestimmen (Zeilen 29 – 37) (vgl. Abb. 5-57). Er markiert dabei Minuend und Subtrahend der gegebenen Problemstellung in seiner Darstellung (auch wenn er dabei auf andere Zahlsymbole zeigt) und beschreibt, dass man den Unterschied zwischen Minuend und Subtrahend durch vorwärtszählen bestimmen könne („dann hätte ich so eins, zwei, drei, *Tippt dabei auf die Zahlsymbole zwischen der 2 (schwarzes Quadrat) und der 15 (schwarzer Kreis) in der Darstellung.*“ in Zeile 37*)*.

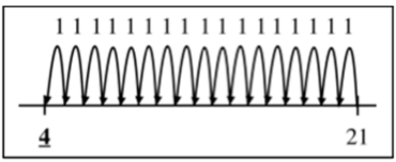


Abbildung 5-56: Tonis Vorgehensweise: Abziehen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

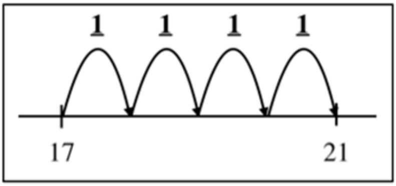


Abbildung 5-57: Tonis alternative Vorgehensweise: Additives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Auch Nikolas nutzt während des dritten Interviewzeitpunktes im Lösungsprozess einer Problemstellung des Typs ‚Vereinigen' (vgl. Abb. 5-58) sowohl eine abziehende als auch eine additiv ergänzende Vorgehensweise. Dabei beginnt er zunächst abziehend vorzugehen. Dann wechselt er jedoch die Grundvorstellung und nutzt die Unterschiedsvorstellung additiv ergänzend.

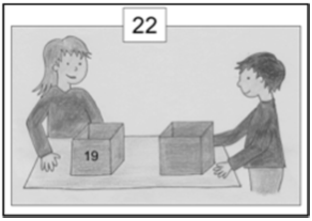


Abbildung 5-58: ‚Vereinigen' (22-19)

Transkriptausschnitt

1	Nik:	*Zählt einzeln neun Holzwürfel ab. Bricht dann jedoch den Zählprozess ab.* Da brauche ich gar nicht nachzählen. (.) Drei.
2	I:	Wieso musst du da gar nicht nachzählen?
3	Nik:	Zwanzig, einundzwanzig, zweiundzwanzig. *Klappt dabei nacheinander jeweils einen Finger aus, so dass er am Ende drei Finger zeigt.* Zweiundzwanzig insgesamt. Fehlen noch drei-

Analyse

Nikolas beginnt zunächst eine Menge an Holzwürfeln abzuzählen (Zeile 1). Betrachtet man seine Vorgehensweisen zur Lösung der vorherigen beiden Problemstellungen (17-9, 21-3), bei denen er stets abziehend in Einzelschritten, unter Nutzung der Holzwürfel, vorgegangen ist, kann auch hier davon ausgegangen werden, dass Nikolas zunächst diese Vorgehensweisen zur Lösung der Problemstellung nutzt (vgl. Abb. 5-59). Auch die Aussage „Da brauche ich gar nicht nachzählen" in Zeile 1 und in Kombination mit dem Abbruch des Zählprozesses (Zeile 1) stützt diese Vermutung. Nachdem Nikolas den Zählprozess abgebrochen hat, nennt er plötzlich 3 als Ergebnis der gegebenen Problemstellung (Zeile 1). Dieses begründet er, indem er die Unterschiedsvorstellung operational nutzt und additiv ergänzend den Unterschied zwischen 19 und 22 bestimmt (Zeile 3) (vgl. Abb.5-60). Nikolas wechselt also während der Bearbeitung der Problemstellung von der Restvorstellung in die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion.

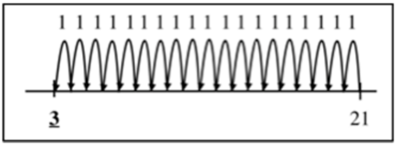


Abbildung 5-59: Nikolas geplante Vorgehensweise: Abziehen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

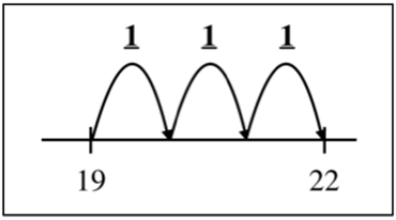


Abbildung 5-60: Nikolas Begründung: Additives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.1.4.2 Zum Zusammenwirken von abziehenden und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen

Neben dem Zusammenwirken von abziehenden und additiv ergänzenden Vorgehensweisen konnte auch ein Zusammenwirken der Restvorstellung und Unterschiedsvorstellung in Form von abziehenden und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen beobachtet werden. Dieses Zusammenwirken der Vorgehensweisen des Abziehens und subtraktiven Ergänzens konnte dabei jedoch im Verlauf des ersten Schuljahres nur bei kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen' rekonstruiert werden.

So macht Nikolas bei der Bearbeitung eines kontextgebundenen ‚Abzieh-Problems' (vgl. Abb. 5-61) während des vierten Interviewzeitpunktes deutlich, dass er um den Zusammenhang von Abziehen und subtraktivem Ergänzen weiß, indem er zwischen Problemdeutung und Problemlösung differenziert.

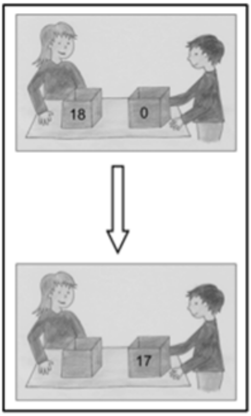


Abbildung 5-61: Kontextgebundenes ‚Abzieh-Problem (18-17)

Transkriptausschnitt

1	Nik:	Hat sie noch einen.
2	I:	Woher weißt du das denn?
3	Nik:	Das ist einfach.
4	I:	Das ist einfach wieder?
5	Nik:	Das ist einfach.
6	I:	Hast du auch wieder rückwärts gezählt?
7	Nik:	Nein. Eh, doch, das geht ja einfach. Achtzehn, siebzehn.
8	I:	Mhm. (2) Welche Aufgabe passt denn jetzt zu dem Bild? Wenn du dazu eine Rechenaufgabe schreiben solltest.
9	Nik:	Also achtzehn minus siebzehn gleich eins.

Analyse

Nikolas nennt direkt 1 als Ergebnis des gegebenen formalen ‚Abzieh-Problems' (Zeile 1). Er begründet das Ergebnis, indem er von 18 bis 17 rückwärts zählt (Zeile 7) – er bestimmt also den Unterschied von 17 und 18 mittels subtraktivem Ergänzens (vgl. Abb. 5-62). Nikolas vollzieht also zur Begründung einen Grundvorstellungswechsel, wobei er die Unterschiedsvorstellung operational nutzt. Auf die Frage des Interviewers, welche „Rechenaufgabe" die Problemstellung beschreibt (Zeile 8), nennt Nikolas die Gleichung 18-17=1 (Zeile 9). Dabei beschreibt er also die Vorgehensweise des Abziehens in einem Schritt (vgl. Abb. 5-63). Toni differenziert also zwischen der gegebenen Problemstellung (Problemdeutung) , welche für ihn ein ‚Abzieh-Problem' („achtzehn minus siebzehn gleich eins" in Zeile 9) darstellt und der Problemlösung („Achtzehn, siebzehn." in Zeile 7).

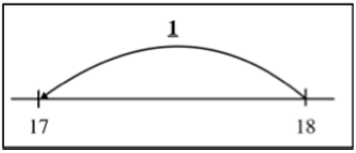


Abbildung 5-62: Tonis Problemlösung: Subtraktives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

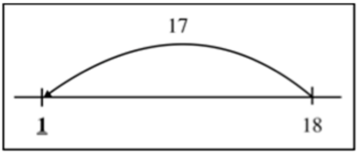


Abbildung 5-63: Tonis Problemdeutung: Abziehen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.1.4.3 Zum Zusammenwirken von start-findenden und additiv ergänzenden Vorgehensweisen

Zudem konnte im Datenmaterial das Zusammenwirken von auf der Restvorstellung aufbauenden start-findenden Vorgehensweisen und von auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden additiv ergänzenden Vorgehensweisen bei den kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen' sowie bei den Problemstellungen ‚Vereinigen' und ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' rekonstruiert werden.

Beispielsweise deutet Nils das gegebene formale ‚Abzieh-Problem' 21-17 während des vierten Interviewzeitpunktes als ‚Start-Finde-Problem' und spricht damit die Vorgehensweise des Start-Findens an, wobei er anschließend das Ergebnis durch additives Ergänzen begründet.

Transkriptausschnitt

1	Nil:	(3) *Schreibt 4 in die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*
2	I:	Das weißt du auch so schnell?
3	Nil:	Ja.
4	I:	Wie weißt, woher weißt du das denn?
5	Nil:	Vier. *Zeigt dabei auf die von ihm geschriebene 4 auf dem Arbeitsblatt.* Wie viel *Zeigt dabei auf die von ihm geschriebene 4 auf dem Arbeitsblatt.* plus siebzehn *Zeigt dabei auf die 17 auf dem Arbeitsblatt.* Gleich einundzwanzig. *Zeigt dabei auf die 21 auf dem Arbeitsblatt.*
6	I:	Mhm. (.) Und woher weißt du dann, dass das vier sind?
7	Nil:	(2) Weil (.) siebzehn *Zeigt dabei auf die 17 auf dem Arbeitsblatt.* plus drei *Zeigt dabei auf die von ihm geschriebene 4 auf dem Arbeitsblatt.* sind zwanzig.
8	I:	Mhm.
9	Nil:	Noch einen dazu.
10	I:	Ah, dann liest du das einfach so rum? *Zeigt dabei zunächst auf die 4 und*

		dann auf die 21 auf dem Arbeitsblatt.
11	Nil:	Ja.
12	I:	Mit plus?
13	Nil:	Ja.
14	I:	Mhm. (.) Und das geht auch?
15	Nil:	Ja.
16	I:	Weißt du warum das geht?
17	Nil:	Nee.
18	I:	Mhm.
19	Nil:	Aber es geht.

Analyse

Nils bestimmt 4 als Ergebnis der Problemstellung (Zeile 1), wie er darauf kommt wird in der Szene nicht ersichtlich. Als Begründung des Ergebnisses verweist Nils darauf, dass man die Problemstellung auch als ‚Start-Finde-Problem' deuten kann (Zeile 5). Dabei verbleibt Nils in der Restvorstellung der Subtraktion (vgl. Abb. 5-64). Auf die Frage des Interviewers, wie er auf die von ihm als Ergebnis genannte 4 kommt (Zeile 6), begründet Nils das Ergebnis durch die Vorgehensweise des schrittweisen additiven Ergänzens (Zeilen 7 – 9) (vgl. Abb. 5-65) und vollzieht somit einen Grundvorstellungswechsel. Auch Nils differenziert also zwischen der Problem(um)deutung und der Problemlösung im Bearbeitungsprozess, gleichwohl Nils für die Problemumdeutung vom gegebenen ‚Abzieh-Problem' in ein ‚Start-Finde-Problem' keine Begründung anführen kann (Zeilen 10 – 19).

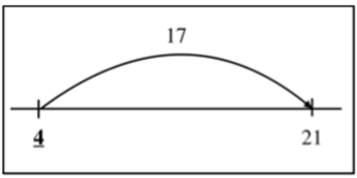


Abbildung 5-64: Nils' Problemumdeutung: Start-Finden – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

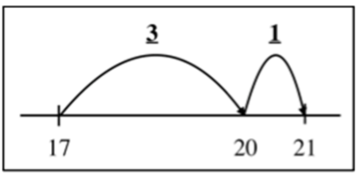


Abbildung 5-65: Nils' Problemlösung: Additives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Auch Amian beschreibt während des dritten Interviewzeitpunktes bei der Lösung einer Problemstellung des Typs ‚Vereinigen' (vgl. Abb. 5-66), dass sowohl das Start-Finden als auch dass additive Ergänzen zur gegebenen Problemstellung passen.

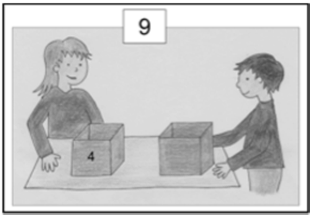


Abbildung 5-66: ‚Vereinigen' (9-4)

Transkriptausschnitt

1	A:	Eh, (3) fünf. *Schreibt 5 auf die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*
2	I:	Woher weißt du das?
3	A:	Eh, weil (.) fünf und vier machen (.) neun. (2) Und fünf und vier (.) machen auch neun und vier und fünf (.) neun.
4	I:	Eh. (.) Welche Aufgabe passt denn dann zu dem Bild? (.) Welche Rechenaufgabe?
5	A:	Vier (.) habe ich und (.) neun sollen es werden, brauche ich fünf.

Analyse

Amian nennt 4 als Ergebnis (Zeile 1). Als Begründung beschreibt er zunächst, dass wenn man zu 5 4 hinzufügt, man 9 erhält („fünf und vier machen (.) neun." in Zeile 3). Dies entspricht der Vorgehensweise des Start-Findens (vgl. Abb. 5-67). Zusätzlich verweist er auch auf die Tauschaufgabe („und vier und fünf (.) neun." in Zeile 4). Betrachtet man diese Äußerung am leeren Zahlenstrahl, so wird deutlich, dass Amian auf die Vorgehensweise des additiven Ergänzens verweist (vgl. Abb. 5-68). Auf die Frage, mit welcher „Rechenaufgabe" man die Problemstellung beschreiben könnte (Zeile 4), beschreibt Amian ein ‚Additives-Ergänzungs-Problem' (Zeile 5). Somit differenziert auch Amian zwischen der Problemdeutung (‚Additives-Ergänzungs-Problem') und der Problemlösung (Start-Finden und additives Ergänzen) der gegebenen Problemstellung.

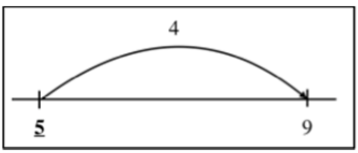


Abbildung 5-67: Amians erste Begründung: Start-Finden – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

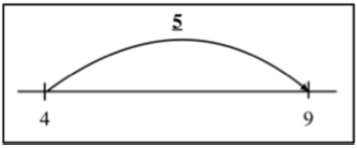


Abbildung 5-68: Amians zweite Begründung: Additives Ergänzen – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.1.5 Zusammenfassung

In Kapitel 5.1. wurden die Ergebnisse bezogen auf Forschungsschwerpunkt 1: ‚*Gebrauch der Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen*' dargelegt.

Zum operationalen und relationalen Gebrauch der Grundvorstellungen

Bezogen auf Forschungsfrage 1 ‚*Wie nutzen Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen und darauf aufbauende Vorgehensweisen der Subtraktion zur Lösung von formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen beziehungsweise zur Rechtfertigung ihrer Ergebnisse?*' wurde beschrieben, dass die Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen sowohl operational als auch relational nutzen.

Operationaler Gebrauch der Grundvorstellungen
Dabei wird beim operationalen Gebrauch der Grundvorstellung eine auf einer Grundvorstellung aufbauende Vorgehensweise – im Sinne einer dynamischen Handlung – zur Lösung der Problemstellung konkret durchgeführt oder aber als Möglichkeit zur Lösung beschrieben, wobei die Beschreibung auf zwei Ebenen stattfinden kann: Zum einen in Form einer Rechtfertigung eines mental bestimmten oder aber auswendig gewussten Ergebnisses, zum anderen in Form eines sogenannten Handlungsplanes, bei dem eine Möglichkeit zur Lösung der Problemstellung, ohne diese umzusetzen, erläutert wird.

Hinsichtlich des operationalen Gebrauchs konnte dabei im Laufe des ersten Schuljahres eine Vielfalt an unterschiedlichen Vorgehensweisen beobachtet werden. Bezogen auf die Restvorstellung wurden folgende Vorgehensweisen rekonstruiert (siehe Tab. 5-8):

Tabelle 5-8: Zusammenfassung des operationalen Gebrauchs der Restvorstellung

<table>
<tr><th>1. Dimension der Vorgehensweise</th><th colspan="3">2. Dimension der Vorgehensweise</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Abziehen</td><td rowspan="3">Schrittweise</td><td rowspan="2">In mehreren Schritten</td><td>Zählend</td></tr>
<tr><td>Nicht-zählend</td></tr>
<tr><td colspan="2">In einem Schritt</td></tr>
<tr><td colspan="3">Stellenweise</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hilfsaufgabe</td><td colspan="2">Minuenden verändern</td></tr>
<tr><td colspan="2">Subtrahenden verändern</td></tr>
<tr><td colspan="3">Vereinfachen</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Start-Finden</td><td rowspan="2">Schrittweise</td><td colspan="2">In mehreren Schritten – Nicht-zählend</td></tr>
<tr><td colspan="2">In einem Schritt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hilfsaufgabe</td><td colspan="2">Summe verändern</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zweiten Summanden verändern</td></tr>
</table>

Bezogen auf die Unterschiedsvorstellung wurden hingegen folgende Vorgehensweisen von den Schülerinnen und Schülern genutzt beziehungsweise beschrieben (siehe Tab. 5-9):

Tabelle 5-9: Zusammenfassung des operationalen Gebrauchs der Unterschiedsvorstellung

<table>
<tr><th>1. Dimension der Vorgehensweise</th><th colspan="3">2. Dimension der Vorgehensweise</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Additives Ergänzen</td><td rowspan="3">Schrittweise</td><td rowspan="2">In mehreren Schritten</td><td>Zählend</td></tr>
<tr><td>Nicht-zählend</td></tr>
<tr><td colspan="2">In einem Schritt</td></tr>
<tr><td colspan="3">Stellenweise</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hilfsaufgabe</td><td colspan="2">Summe verändern</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ersten Summanden verändern</td></tr>
<tr><td colspan="3">Vereinfachen</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Subtraktives Ergänzen</td><td rowspan="2">Schrittweise</td><td colspan="2">In mehreren Schritten</td></tr>
<tr><td colspan="2">In einem Schritt</td></tr>
</table>

Relationaler Gebrauch der Grundvorstellungen

Beim relationalen Gebrauch der Grundvorstellung wird im Gegensatz zum operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen keine auf einer Grundvorstellungen aufbauende Vorgehensweise – im Sinne einer dynamischen Handlung – zur Lösungsbestimmung genutzt beziehungsweise als Rechtfertigung eines Ergebnisses oder in Form eines Handlungsplanes beschrieben. Vielmehr wird eine

Beschreibung der statischen Beziehung der gegebenen Zahlenwerte zur Begründung eines mental bestimmten oder auswendig gewussten Ergebnisses vorgebracht, wobei das Ergebnis der jeweiligen Problemstellung dabei als Rest oder Unterschied repräsentiert sein kann. Dass sich der relationale Gebrauch dabei lediglich im Begründungsprozess eines Ergebnisses rekonstruieren lässt, ist damit zu begründen, dass die statische Beziehung der gegebenen Zahlenwerte lediglich dann beschrieben werden kann, wenn diese auswendig verfügbar ist oder aber zuvor durch einen operationalen Gebrauch einer der beiden Grundvorstellungen bestimmt wurde.

Wie auch schon beim operationalen Gebrauch beschrieben, konnte sowohl für die Restvorstellung als auch für die Unterschiedsvorstellung der relationale Gebrauch rekonstruiert werden.

Zum Gebrauch der Grundvorstellungen bei den verschiedenen Problemstellungen

Um die zweite Forschungsfrage ‚*Welche Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen werden von Schülerinnen und Schülern bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen genutzt?*' zu beantworten, wurde in Kapitel 5.1.1.2 der Fokus auf den operationalen und relationalen Gebrauch der Grundvorstellungen in Abhängigkeit von den verschiedenen Problemtypen gerichtet.

Bei den kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen', beim ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' und ‚Vereinigen' nutzen die Kinder jeweils beide Grundvorstellungen der Subtraktion relational und operational – wohingegen bei den formalen ‚Abzieh-Problemen' neben dem operationalen Gebrauch beider Grundvorstellungen lediglich die Unterschiedsvorstellung relational genutzt wurde.

Bezogen auf den operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen wurde außerdem deutlich, dass bei jedem Problemtyp im Verlauf des ersten Schuljahres beide Grundvorstellungen in Form der vier Vorgehensweisen (Abziehen, Start-Finden, additives Ergänzen, subtraktives Ergänzen) mindestens einmal genutzt wurden. Charakterisiert man die von den Kindern genutzten beziehungsweise beschriebenen Vorgehensweisen noch genauer (zweite Dimension der Vorgehensweisen), so wird deutlich, dass nicht immer alle möglichen Vorgehensweisen im Verlauf des Schuljahres bei den einzelnen Problemtypen gebraucht wurden. So ist zunächst festzuhalten, dass die abziehenden, startfindenden, additiv ergänzenden und subtraktiv ergänzenden *schrittweisen* Vorgehensweisen universell von den Kindern bei sämtlichen Problemstellungen genutzt wurden. In diesem Zusammenhang wurde außerdem deutlich, dass während des gesamten Schuljahres bei der Lösung von auf der Restvorstellung aufbauenden formalen ‚Abzieh-Problemen' bezogen auf unterschiedsbestimmende Vorgehensweisen lediglich schrittweise Vorgehensweisen beobachtet werden konnten. Anders herum konnten bei den statischen Unterschiedsbestimmungsproblemen ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' bezogen auf die Vorgehensweise des Abziehens lediglich ein schrittweises Vorgehen rekonstruiert werden.

Zum Zusammenwirken von Vorgehensweisen innerhalb einer Grundvorstellung

Bezogen auf Forschungsfrage 3 ‚*Inwiefern wirken Vorgehensweisen innerhalb einer Grundvorstellung zusammen?*' zeigte sich während der einzelnen Interviewzeitpunkte, dass die Kinder nicht immer nur eine Vorgehensweise nutzten beziehungsweise beschrieben, sondern auch innerhalb einer Grundvorstellung beide Vorgehensweisen zusammenwirken können[108]:

- Aufbauend auf der Restvorstellung: Abziehen und Start-finden (Kapitel 5.1.3.1) beziehungsweise
- aufbauend auf der Unterschiedsvorstellung: Additives Ergänzen und subtraktives Ergänzen (Kapitel 5.1.3.2).

Bezogen auf das Zusammenwirken von abziehenden und start-findenden Vorgehensweisen innerhalb der Restvorstellung der Subtraktion konnte beobachtet werden, dass die Kinder sowohl bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) als auch bei den nicht eindeutig zu einer der beiden Grundvorstellungen zuordenbaren Problemstellung ‚Vereinigen' beide Vorgehensweisen nutzten beziehungsweise beschrieben. Bei der auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' konnte hingegen kein Zusammenwirken der beiden auf der Restvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen rekonstruiert werden. Insgesamt wurde dabei deutlich, dass die Kinder um den Zusammenhang von startfindenden und abziehenden Vorgehensweisen im Sinne eines inversen Vorgehens wissen.

Bezogen auf das Zusammenwirken von additiv ergänzenden und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen innerhalb der Unterschiedsvorstellung der Subtraktion konnte beobachtet werden, dass die Kinder sowohl bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) als auch bei der auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellung ‚Vergleichen: Unterscheid gesucht' beide Vorgehensweisen nutzten beziehungsweise beschrieben. Bei der nicht eindeutig zu einer der beiden Grundvorstellungen zuordenbaren Problemstellung ‚Vereinigen' konnte hingegen kein Zusammenwirken der beiden auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen rekonstruiert werden.

---

[108] Dies bezieht sich auf die erste Dimension zur Charakterisierung der Vorgehensweisen.

Zum Zusammenwirken von Vorgehenswiesen über beide Grundvorstellungen hinweg

Bezogen auf Forschungsfrage 4 ‚*Inwiefern wirken Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg zusammen?*' konnte auch das Zusammenwirken von Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg beobachtet werden. Dabei sind theoretisch vier Kombinationen möglich, wobei im Verlauf des Schuljahres drei der vier möglichen Kombinationen rekonstruiert werden konnten[109].

So konnte
1. das Zusammenwirken von abziehenden und additiv ergänzenden Vorgehensweisen bei sämtlichen Problemtypen,
2. das Zusammenwirken von abziehenden und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen lediglich bei kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen' sowie
3. das Zusammenwirken von start-findenden und additiv ergänzenden Vorgehensweisen bei den kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen' und den Problemstellungen ‚Vereinigen' und ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'

rekonstruiert werden.

Unter anderem wurde dabei herausgestellt, dass die Kinder zum Teil bewusst zwischen der Deutung und der Lösung einer gegebenen Problemstellung differenzieren, wobei die Problemdeutung und die Problemlösung auf unterschiedlichen Grundvorstellungen aufbauen.

5.2 Forschungsschwerpunkt 2: Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung

In diesem Kapitel wird der Fokus auf den Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung gerichtet (Forschungsschwerpunkt 2). Dabei wird in Kapitel 5.2.1 zunächst Forschungsfrage 5 ‚*Wie wechseln Schülerinnen und Schüler von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen?*' und in Kapitel 5.2.2 Forschungsfrage 6 ‚*Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen?*' beantwortet. In Kapitel 5.2.3 werden abschließend die zentrale Erkenntnisse bezogen auf den zweiten Forschungsschwerpunkt zusammengefasst.

---

[109] Dies bezieht sich auf die erste Dimension zur Charakterisierung von Vorgehensweisen.

5.2.1 Explizite und implizite Grundvorstellungswechsel

Wie bereits an einigen Stellen in den Analysen in Kapitel 5.1.1 beschrieben wurde, verblieben die Kinder nicht immer in der durch die jeweilige Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung, sondern wechselten durchaus zur Lösung der Problemstellung oder aber zur Rechtfertigung von genannten Ergebnissen in die jeweils andere Grundvorstellung der Subtraktion. Dabei wurde bezogen auf Forschungsfrage 5 ‚*Wie wechseln Schülerinnen und Schüler von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen?*' deutlich, dass bezogen auf Grundvorstellungswechsel *zur Lösung* der gegebenen Problemstellungen sowohl explizite als auch implizite Grundvorstellungswechsel durchgeführt werden.[110] Im Folgenden werden beide Typen von Grundvorstellungswechseln näher charakterisiert und durch prototypische Transkriptauschnitte konkretisiert.

5.2.1.1 Zum expliziten Wechseln der Grundvorstellung

Als explizit realisiert sich ein Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung immer dann, wenn bewusst die Grundvorstellung im Sinne einer *Problemumdeutung zur Lösung* der gegebenen Problemstellung gewechselt wird. Mit anderen Worten: Die jeweils andere Grundvorstellung wird *operational zur Lösung* der gegebenen Problemstellung genutzt. Somit stellen alle Grundvorstellungswechsel, bei denen die jeweils anderen Grundvorstellungen operational zur Lösungsbestimmung genutzt werden, explizite Grundvorstellungswechsel dar.

Im Folgenden wird dargestellt, inwiefern explizite Grundvorstellungswechsel bei den verschiedenen Problemstellungen rekonstruiert werden konnten[111].

Bei formalen Abzieh-Problemen

Toni löst während des dritten Interviewzeitpunktes das formale ‚Abzieh-Problem' 21-17, indem er sich von der angesprochenen Restvorstellung löst und die Unterschiedsvorstellung operational, in Form eines schrittweise additiv ergänzenden Vorgehens, nutzt.

[110] An dieser Stelle sei noch mal auf den hypothesengenerierenden Charakter der Ergebnisse verwiesen (vgl. Kapitel 4.1).

[111] Die Problemstellung ‚Vereinigen' wird dabei nicht betrachtet, da sie keiner der beiden Grundvorstellungen der Subtraktion eindeutig zugeordnet werden kann (vgl. Kapitel 2.2.2) und sie damit keine Grundvorstellung direkt anspricht.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	T:	Achtzehn, neunzehn, zwanzig, (.) einundzwanzig. *Klappt dabei jeweils einen Finger aus. Anschließend schreibt er 4 als Ergebnis der Problemstellung auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Hast du vorwärts gezählt?
4	T:	Ja.
5	I:	Ich habe gedacht, bei minus muss man immer rückwärts zählen?
6	T:	Ja. (.) Eh, (.) vier ist falsch, oder?
7	I:	Nee, ist richtig.
8	T:	Ach ja.
9	I:	Warum kannst du das denn so machen?
10	T:	Das geht halt (.) halt. *Schiebt dabei das Arbeitsblatt zu Seite.*

Analyse
Toni löst die gegebene Problemstellung, indem er in Einzelschritten schrittweise von 17 bis 21 additiv ergänzt (vgl. Abb. 5-69), wobei er den Zählprozess mit seinen Fingern überwacht (Zeilen 1 – 4). Toni löst sich also bewusst von der durch die Problemstellung angesprochenen, auf der Restvorstellung aufbauenden Vorgehensweise des Abziehens und nutzt stattdessen die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion operational zur Lösung des Subtraktionsproblems. Die Bewusstheit über die den expliziten Wechsel der Grundvorstellung zur Lösung der gegebene Aufgabe wird auch in den Zeilen 5 bis 10 deutlich, in dem er beschreibt, dass er die von ihm genutzte Vorgehensweise des additiven Ergänzens als alternative Vorgehensweise zur Lösung der Problemstellung sieht – auch wenn er diese in der Szene nicht begründen kann (Zeilen 9 – 10).

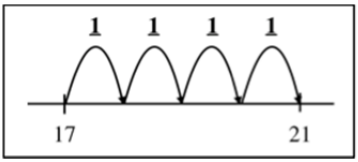


Abbildung 5-69: Tonis Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Bei kontextgebundenen Abzieh-Problemen

Auch bei einem kontextgebundenen ‚Abzieh-Problem' (vgl. Abb. 5-70) während des dritten Interviewzeitpunktes wechselt Toni zur Lösungsbestimmung von der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung in die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion, die er operational nutzt. Dabei wird deutlich, dass er die Problemstellung durchaus als Restbestimmungsproblem deutet, wobei er zur Lösung der Problemstellung einen expliziten Grundvorstellungswechsel vollzieht.

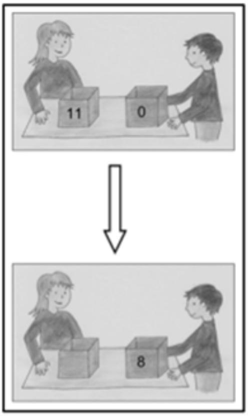


Abbildung 5-70: Kontextgebundenes Abzieh-Problem (11-8)

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	T:	(2) Neun, zehn, elf. *Klappt dabei jeweils einen Finger aus. Anschließend schreibt er 3 als Ergebnis der Problemstellung auf das Arbeitsblatt.*
3	I:	Welche Aufgabe passt zu dem Bild?
4	T:	Eh, (.) nix.
5	I:	Sag. (.) Brauchst du nur sagen. (.) Brauchst du nicht aufschreiben.
6	T:	(2) Elf (.) minus (.) acht. *Zeigt dabei auf die 8 auf dem Arbeitsblatt.* (.) Drei.

Analyse

Toni löst die Problemstellung indem er den Unterschied zwischen 8 und 11 mittels eines in Einzelschritten schrittweisen additiv ergänzenden Vorgehens löst (Zeilen 1 – 2) (vgl. Abb. 5-71). Toni löst sich also bewusst von der durch die Problemstellung angesprochenen, auf der Restvorstellung aufbauenden Vorgehensweise des Abziehens und nutzt stattdessen die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion operational zur Lösung des gegebenen Subtraktionsproblems. Als zu der gegebenen Problemstellung passend, nennt er den Term 11-8 (Zeilen 3 – 6). An dieser Aussage wird deutlich, dass Toni die gegebene Problemstellung durchaus als ‚Abzieh-Problem' deutet. Da er jedoch zur Lösung die Unterschiedsvorstellung operational nutzt, kann vermutet werden, dass er den Grundvorstellungswechsel bewusst im Sinne einer Problemumdeutung vollzieht.

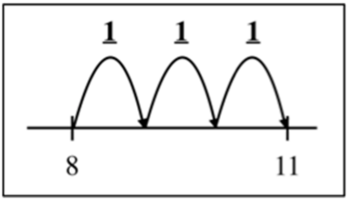


Abbildung 5-71: Tonis Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Beim ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'

Es konnten jedoch nicht nur explizite Grundvorstellungswechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung in die Unterschiedsvorstellung rekonstruiert werden. Die Kinder vollzogen im Verlauf des ersten Schuljahres auch explizite Grundvorstellungswechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Unterschiedsvorstellung in die Restvorstellung der Subtraktion.

So vollzieht beispielsweise Nikolas während des ersten Interviewzeitpunktes zur Lösung einer Problemstellung des Typs ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (vgl. Abb. 5-72) einen expliziten Grundvorstellungswechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Unterschiedsvorstellung in die Restvorstellung, die er dann schrittweise abziehend – also operational – nutzt.

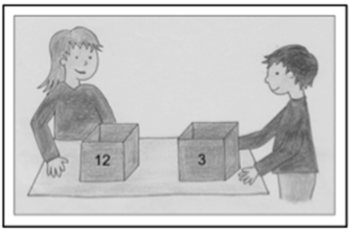


Abbildung 5-72: ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (12-3)

Transkriptausschnitt

1	Nik:	Zwölf. *Nimmt nacheinander zwölf Holzwürfel und schiebt sie zu einer Menge zusammen. Anschließend spaltet er drei Holzwürfel in einem Schritt ab und zählt die übrigen Holzwürfel einzeln ab.* Sie hat neun mehr.
2	I:	Mhm. (1) Wie hast du das jetzt rausgekriegt? Das musst du mir noch mal erklären, was du da genau gemacht hast?
3	Nik:	Ich habe die, ich habe die voreinander gepackt. *Zeigt dabei auf die zwölf Holzwürfel auf dem Tisch.* Dann habe ich die drei weggenommen. *Nimmt die drei abgespaltenen Holzwürfel in die Hand.*
4	I:	Ja.
5	Nik:	Und dann eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun. *Zählt dabei*

	die neun übrigen Holzwürfel einzeln ab. (.) Dann sind nur noch neun übrig. Also muss sie neun mehr haben.

Analyse
Nikolas löst die Problemstellung, indem er in einem Schritt von einer Menge mit 12 Elementen 3 Elemente abspaltet, wobei der entstandene Rest die Lösung repräsentiert (Zeile 1) (vgl. Abb. 5-73). Toni löst sich also von der durch die Problemstellung angesprochenen Unterschiedsvorstellung und nutzt stattdessen die Restvorstellung der Subtraktion operational zur Lösung der gegebenen Problemstellung. Auf Nachfragen des Interviewers (Zeile 2) erläutert Nikolas zusätzlich auch noch einmal dieses Vorgehen (Zeilen 3 – 5). Dabei wird in Zeile 5 deutlich („Dann sind nur noch neun übrig. Also muss sie neun mehr haben"), dass er den durch seine Vorgehensweisen ermittelten Rest („noch neun übrig") gleichzeitig als Unterschied zwischen drei und zwölf deutet („neun mehr haben"). Daher kann vermutet werden, dass er den Grundvorstellungswechsel zur Lösung der Problemstellung bewusst vollzieht und um den Zusammenhang der beiden Grundvorstellungen weiß.

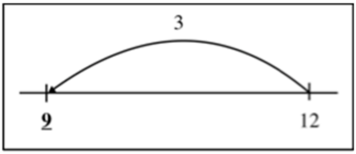


Abbildung 5-73: Nikolas' Vorgehensweise – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.2.1.2 Zum impliziten Wechseln der Grundvorstellung

Im Gegensatz zum expliziten Wechsel der Grundvorstellung, bei dem bewusst die jeweils andere Grundvorstellung operational zur Lösungsbestimmung der jeweiligen gegebenen Problemstellung genutzt wird, wird bei einem impliziten Grundvorstellungswechsel das Ergebnis der gegebenen Problemstellung über die *auswendig gewusste Relation der gegebenen Zahlenwerte* abgerufen, wobei das Ergebnis in der jeweils anderen Grundvorstellung repräsentiert ist. Konkret: Wenn das Ergebnis eines beliebigen Restbestimmungsproblems (bzw. Unterschiedsbestimmungsproblems) über die auswendig gewusste Relation der gegebenen Zahlenwerte, wobei das Ergebnis als Unterschied (bzw. Rest) repräsentiert ist, benannt werden kann, wird von einem impliziten Grundvorstellungswechsel gesprochen.

Im Folgenden wird dargestellt, inwiefern implizite Grundvorstellungswechsel bei den verschiedenen Problemstellungen vollzogen wurden[112]. Dabei ist auffällig, dass sich diese im Verlauf des ersten Schuljahres vor allem bei Restbestimmungsproblemen mit kleinen Differenzen und bei Unterschiedsbestimmungsproblemen mit großen Differenzen rekonstruieren ließen.

Bei formalen Abzieh-Problemen

Während des ersten Interviewzeitpunktes bei der Bearbeitung des formalen auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problems' 14-13 vollzieht Nils einen impliziten Grundvorstellungswechsel, indem er das Ergebnis wahrscheinlich über den auswendig gewussten Unterschied von 13 und 14 bestimmt.

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.* Vierzehn minus dreizehn.
2	Nil:	Eins.
3	I:	Wie geht das denn so schnell? Was hast du dir jetzt überlegt?
4	Nil:	Einfach vierzehn minus vierzehn und dann noch einen übrig lassen.
5	I:	Und woher weißt du, wie viel du noch übrig lassen musst?
6	Nil:	(5) Weil die Vierzehn sind einer mehr als die Dreizehn.

Analyse

Nils nennt direkt 1 als Ergebnis des formalen ‚Abzieh-Problems' (Zeile 2). Auf Nachfragen des Interviewers (Zeile 3) begründet Nils das Ergebnis, indem er beschreibt, dass wenn man 14-14 rechnet, man 0 erhalten würde (Zeile 4). Da die Aufgabe jedoch 14-13 lautet, muss das Ergebnis also 1 betragen („und dann noch einen übrig lassen" in Zeile 4). Die Frage, die sich an dieser Stelle jedoch stellt und der Interviewer auch aufgreift (Zeile 5), ist, woher Nils weiß, dass man „dann noch einen übrig lassen" muss. Zur Begründung verweist Nils auf die statische Zahlbeziehung von 13 und 14 („Weil die Vierzehn sind Einer mehr als die Dreizehn" in Zeile 6). Dabei ist die 1 – also das Ergebnis der Problemstellung – als Unterschied repräsentiert (vgl. Abb. 5-74). Nils vollzieht also einen Grundvorstellungswechsel, wobei er die Unterschiedsvorstellung relational nutzt. Somit besteht die Vermutung, dass er die von ihm als Ergebnis genannte 1 genau über den auswendig gewussten Unterschied von 13 und 14 abruft. Diese Vermutung kann neben seiner angeführten Begründung in Zeile 6 zusätzlich damit begründet werden, dass er direkt das Ergebnis nennt. Dies schließt damit sehr wahrscheinlich einen operationalen Gebrauch der Restvorstellung aus. Da er außerdem während des Interviews bei keinem vorherigen

[112] Die Problemstellung ‚Vereinigen' wird dabei nicht betrachtet, da sie keiner der beiden Grundvorstellungen der Subtraktion eindeutig zugeordnet werden kann (vgl. Kapitel 2.2.2) und sie damit keine Grundvorstellung direkt anspricht.

‚Abzieh-Problem' (formal und kontextgebunden) die Unterschiedsvorstellung operational nutzt, liegt die Vermutung nahe, dass er auch hier die Unterschiedsvorstellung nicht operational nutzt.

Insgesamt kann somit geschlossen werden, dass Nils vermutlich den Grundvorstellungswechsel implizit vollzieht.

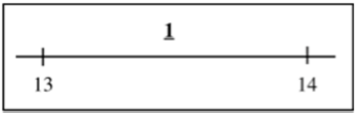


Abbildung 5-74: Nils' relationale Begründung – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Bei kontextgebundenen Abzieh-Problemen

Toni ruft das Ergebnis des gegebenen Restbestimmungsproblems (vgl. Abb. 5-75) wahrscheinlich über die Zahlbeziehung von 17 und 18 ab. Toni vollzieht also einen impliziten Grundvorstellungswechsel.

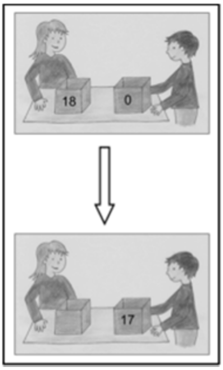


Abbildung 5-75: Kontextgebundenes ‚Abzieh-Problem' (18-17)

Transkriptausschnitt

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	T:	Achtundzwanzig.
3	I:	Achtzehn.
4	T:	Ah ja. Achtzehn und siebzehn. Siebzehn ab. (.) Dann hat sie insgesamt (2) auch siebzehn, glaub ich.
5	I:	Mhm.
6	T:	Nee, dann hat er siebzehn und, glaub ich, sie sechzehn.
7	I:	Warum?
8	T:	Oder? Dann hat sie (.) einen glaub ich nur noch. *Zeigt dabei auf die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.*
9	I:	Wie kommst du jetzt so schnell darauf.

10	T:	Weiß ich nicht.
11	I:	Doch, da hast du dir bestimmt was Gutes gedacht dabei. Das glaube ich dir.
12	T:	Weiß ich doch nicht.
13	I:	Davor hast du gesagt, sechzehn und jetzt sagst du auf einmal eins? Wie kommst du so schnell auf die eins? (.) Versuch das mal zu sagen.
14	T:	Weiß ich nicht. (.) Ich komm darauf, weil siebzehn ist ja eigentlich eine Zahl weniger als achtzehn. Und wenn sie ihm jetzt siebzehn gibt, hat sie aber nur noch einen Stein.

Analyse
Toni beschreibt zunächst die Problemstellung und nennt dann 17 und anschließend 16 als Ergebnis (Zeilen 2 – 6). Nachdem der Interviewer eine Begründung für die genannten Ergebnisse einfordert (Zeile 7), nennt Toni 1 als Lösung der Problemstellung (Zeile 8). Er begründet die Lösung über die statische Beschreibung der Relation von 17 und 18 („siebzehn ist ja eigentlich eine Zahl weniger als achtzehn“ in Zeile 14). Dabei ist die Lösung als Unterschied repräsentiert (vgl. Abb. 5-76). Toni wechselt also von der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung in die Unterschiedsvorstellung der Subtraktion. Das Wissen um den Unterschied von 17 und 18 bezieht er anschließend wieder auf die durch die Problemstellung angesprochene Restvorstellung der Subtraktion, indem er beschreibt, dass wenn man von 18 Steinen 17 Steine abzieht, 1 Stein übrig bleibt. Bezieht man nun in die Analyse zusätzlich noch mit ein, dass Toni bei den vorherigen Restbestimmungsproblemen während des Interviews lediglich die Restvorstellung operational nutzte und er das Ergebnis ohne vorherige erkennbare Handlung benennt, kann hier vermutet werden, dass Toni weder die Unterschiedsvorstellung, noch die Restvorstellung operational nutzt. Daher besteht die Hypothese, dass Toni das Ergebnis des ‚Abzieh-Problems’ aus seinem Wissen um den Unterschied von 17 und 18 abruft. Somit handelt es sich wahrscheinlich dabei um einen impliziten Grundvorstellungswechsel.

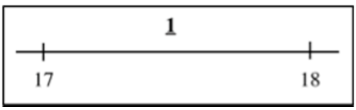


Abbildung 5-76: Tonis relationale Begründung – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

Beim ‚Vergleichen: Unterschied gesucht’

Doch nicht nur bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen’ (formal oder kontextgebunden) konnten implizite Grundvorstellungswechsel beobachtet werden, auch wurden implizite Grundvorstellungswechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Unterschiedsvorstellung in die Restvorstellung beobachtet.

So ruft Nils während des ersten Interviewzeitpunktes das Ergebnis einer Problemstellung des Typs ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (vgl. Abb. 5-77) wahrscheinlich über die auswendig gewusste statische Zahlbeziehung von 16 und 18 ab.

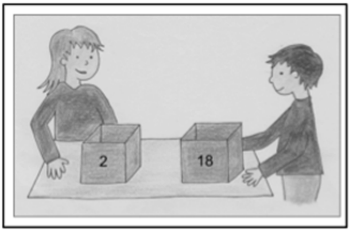


Abbildung 5-77: ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' (18-2)

Transkriptausschnitt

1	Nil:	Sechzehn.
2	I:	Wie kommst du so schnell darauf?
3	Nil:	Einfach.
4	I:	(2) Was hast du dir überlegt? (.) Wie kommst du dann auf die sechzehn?
5	Nil:	Weil die zwei weniger sind (.) als die achtzehn. *Zeigt dabei auf die 18 auf dem Arbeitsblatt.*

Analyse

Nils nennt direkt 16 als Unterschied zwischen 2 und 18 (Zeile 1). Er begründet das Ergebnis, indem er die Relation von 16 und 18 beschreibt („die zwei weniger sind als die achtzehn" in Zeile 5). Betrachtet man diese Äußerung am leeren Zahlenstrahl (vgl. Abb. 5-78) so erkennt man, dass das Ergebnis der Problemstellung als Rest repräsentiert ist. Nils wechselt also von der durch die Problemstellung angesprochenen Unterschiedsvorstellung in die Restvorstellung der Subtraktion. Bezieht man in die Analyse zusätzlich mit ein, dass Nils das Ergebnis direkt benennen kann und er zuvor lediglich die Unterschiedsvorstellung operational genutzt hat, kann vermutet werden, dass Nils das Ergebnis des Unterschiedsbestimmungsproblems über den Unterschied von 16 und 18 abruft, wobei das Ergebnis als Rest repräsentiert ist. Somit kann vermutlich von einem impliziten Grundvorstellungswechsel gesprochen werden.

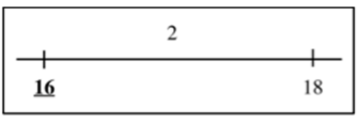


Abbildung 5-78: Nils' relationale Begründung – dargestellt am leeren Zahlenstrahl

5.2.2 Zur Entwicklung der Grundvorstellungswechsel

In Kapitel 5.1.2 wurde dargelegt, dass Kinder zur Lösung von gegebenen Problemstellungen sowohl explizite als auch implizite Grundvorstellungswechsel vollziehen. In diesem Kapitel werden die dort beschriebenen Grundvorstellungswechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung bezogen auf Forschungsfrage 6 ‚*Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen*' längsschnittlich betrachtet. Dabei konnten während der längsschnittlichen Analysen in Abhängigkeit von den durch die Problemstellungen angesprochenen Grundvorstellungen zwei unterschiedliche idealtypische Entwicklungsverläufe rekonstruiert werden[113]. Zum einen entwickelte sich das Wechseln der Grundvorstellung zur Lösung von auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal sowie kontextgebunden) von keinem Wechsel der Grundvorstellung über den impliziten Grundvorstellungswechsel zum expliziten Grundvorstellungswechsel (Kapitel 5.2.2.1). Zur Lösung der auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellungen ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' vollzogen die Kinder auf der anderen Seite, ‚von Anfang an' explizite Grundvorstellungswechsel (Kapitel 5.2.2.2).[114]

5.2.2.1 Von keinem Wechsel der Grundvorstellung über den impliziten Grundvorstellungswechsel zum expliziten Grundvorstellungswechsel bei ‚Abzieh-Problemen'

Insgesamt konnte bezogen auf den Grundvorstellungswechsel bei ‚Abzieh-Problemen' die Hypothese herausgearbeitet werden, dass sich das Wechseln der Grundvorstellung bei den Kindern idealtypisch

- von keinem Wechsel der Grundvorstellung,
- über das implizite Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen,
- über das explizite Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen,
- hin zum expliziten Wechseln der Grundvorstellung bei allen drei Differenzgrößen

entwickelt.

---

[113] Die Problemstellung ‚Vereinigen' wird, wie auch in Kapitel 5.1.2, nicht betrachtet, da sie keiner der beiden Grundvorstellungen der Subtraktion eindeutig zugeordnet werden kann (vgl. Kapitel 2.2.2) und sie damit keine Grundvorstellung direkt anspricht.

[114] An dieser Stelle sei noch mal auf den hypothesengenerierenden Charakter der vorliegenden Ergebnisse verwiesen (vgl. Kapitel 4.1). Daher stellen die in Kapitel 5.2.2.1 und Kapitel 5.2.2.2 beschriebenen Entwicklungsverläufe auf der Grundlage des empirischen Materials gewonnene Hypothesen dar.

Im Folgenden wird dazu das Spektrum an Entwicklungsverläufen bezüglich der Fähigkeit des Grundvorstellungswechsels dargestellt, wobei zwei Fallbeispiele (Nikolas und Nils) vorgestellt werden, welche die Ränder des Spektrums markieren.

Das Fallbeispiel Nikolas zeigt dabei die Entwicklung von keinem Wechsel der Grundvorstellungen hin zum Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen auf.

Das Fallbeispiel Nils macht hingegen die Entwicklung vom impliziten Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen, über das explizite Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen, hin zum expliziten Wechseln der Grundvorstellung bei alle drei Differenzgrößen deutlich.

Fallbeispiel Nikolas

Erster Interviewzeitpunkt
Nikolas nutzt beziehungsweise beschreibt während des ersten Interviewzeitpunktes bei sämtlichen ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) die auf der Restvorstellung aufbauende Vorgehensweise des Abziehens. Er vollzieht somit während dieses Interviewzeitpunktes keinerlei Grundvorstellungswechsel, sondern verbleibt stets in der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung.

Zweiter Interviewzeitpunkt
Auch während des zweiten Interviewzeitpunktes vollzieht Nikolas keine Grundvorstellungswechsel und nutzt beziehungsweise beschreibt stets abziehende Vorgehensweisen.

Dritter Interviewzeitpunkt
Während des dritten Interviewzeitpunktes wechselt Nikolas bei zwei Problemstellungen die Grundvorstellung implizit. So ruft er das Ergebnis des formalen ‚Abzieh-Problems' 14-13 und des kontextgebundenen ‚Abzieh-Problems' 18-17 wahrscheinlich über den Unterschied der gegebenen Zahlenwerte ab. Bei der formalen Problemstellung 14-13 kann beispielsweise auf einen impliziten Grundvorstellungswechsel geschlossen werden, da sich, nachdem Nikolas zunächst die zwei vor dieser Problemstellung gegebenen formalen Problemstellungen (12-5 und 11-4) durch konkrete Abziehhandlungen mit Holzwürfeln löst, folgende Szene ergibt:

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.*
2	Nik:	(.) Das ist mal wieder typisch leicht.
3	I:	Wieso ist die jetzt leicht? Das sind doch auch große Zahlen.
4	Nik:	Ja, aber wenn du davon *Zeigt dabei auf den Minuenden.* Dreizehn weg-

		nimmst, bleibt ja nur noch einer.
5	I:	Mhm.
6	Nik:	*Schreibt 1 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
7	I:	Woher weißt du denn sofort, dass das eins ist?
8	Nik:	Ist zu leicht.
9	I:	Woher weißt du sofort, dass da nur noch Einer übrig bleibt.
10	Nik:	Weil, wenn man von vierzehn (.) das ist ja einer mehr als Dreizehn.
11	I:	Ja.
12	Nik:	Und wenn man jetzt dreizehn von vierzehn wegnimmt, dann bleibt ja nur noch einer.

Nikolas benötigt zur Lösung der Problemstellung keine konkrete Modellierung, wie er sie noch bei den vorherigen beiden Problemstellungen benötigte. Vielmehr kann er das Ergebnis der Problemstellung direkt benennen. Betrachtet man dies im Zusammenhang mit seiner Begründung des Ergebnisses (relationaler Gebrauch der Unterschiedsvorstellung („vierzehn (.) das ist ja einer mehr als Dreizehn“), kann vermutet werden, dass Nikolas das Ergebnis des ‚Abzieh-Problems’ über den auswendig gewussten Unterschied von 13 und 14 abruft. Dies stellt somit einen impliziten Grundvorstellungswechsel dar.

Bei den übrigen formalen und kontextgebundenen Problemstellungen lässt sich in seinen Äußerungen und Handlungen die Restvorstellung in Form der Vorgehensweise des Abziehens rekonstruieren.

Vierter Interviewzeitpunkt

Auch während des vierten Interviewzeitpunktes nutzt und beschreibt Nikolas bei nahezu allen abziehenden Problemstellungen die Restvorstellung der Subtraktion. Lediglich bei der kontextgebundenen Problemstellung 18-17 besteht die Vermutung, dass er das Ergebnis über den Unterschied von 17 und 18 auswendig abruft und damit einen impliziten Grundvorstellungswechsel vollzieht.

Fallbeispiel Nils

Erster Interviewzeitpunkt

Nils löst beziehungsweise begründet zunächst am ersten Interviewtag des ersten Interviewzeitpunktes alle formalen ‚Abzieh-Probleme’ mit mittleren und großen Differenzen durch abziehende Vorgehensweisen. So begründet er beispielsweise das Ergebnis des formalen ‚Abzieh-Problems’ 8-3 folgendermaßen:

1	Nil:	Ich habe immer (.) acht gezählt und drei weggemacht.

Auch auf die Frage, wie er einem anderen Kind, welches noch keine ‚formalen ‚Abzieh-Probleme’ kennt, dieses erklären würde, verweist Nils auf die restbestimmende Vorgehensweise des Abziehens. Nils verbleibt also zunächst im

Bearbeitungsprozess der gegebenen ‚Abzieh-Probleme' in der durch die Problemstellungen angesprochenen Restvorstellung der Subtraktion.

Bei der Lösung eines formalen ‚Abzieh-Problems' 14-13 ergibt sich dann jedoch folgende Szene (vgl. Kapitel 5.1.2.2):

1	I:	*Legt das Arbeitsblatt auf den Tisch.* Vierzehn minus dreizehn.
2	Nil:	Eins.
3	I:	Wie geht das denn so schnell? Was hast du dir jetzt überlegt?
4	Nil:	Einfach vierzehn minus vierzehn und dann noch einen übrig lassen.
5	I:	Und woher weißt du, wie viel du noch übrig lassen musst?
6	Nil:	(5) Weil die Vierzehn sind einer mehr als die Dreizehn.

In der Szene wird deutlich, dass Nils wahrscheinlich das Ergebnis des gegebenen Subtraktionsproblems über den auswendig gewussten Unterschied von 13 und 14 abruft und somit zur Lösung der Problemstellung einen impliziten Grundvorstellungswechsel vollzieht.[115]

Im weiteren Verlauf des Interviews verbleibt Nils bei der Lösung der gegebenen kontextgebundenen ‚Abzieh-Probleme' mit großen und mittleren Differenzen in der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung und nutzt beziehungsweise beschreibt dabei die Vorgehensweise des Abziehens. Lediglich bei einem kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen' mit einer kleinen Differenz (18-17) besteht die Vermutung, dass er das Ergebnis der jeweiligen Problemstellung über den Unterschied der gegebenen Zahlenwerte abruft und somit einen impliziten Grundvorstellungswechsel vollzieht.

Auch am zweiten Interviewtag verbleibt Nils zunächst bei den formalen ‚Abzieh-Problemen' in der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung der Subtraktion, indem er abziehende Vorgehensweisen nutzt und beschreibt. Zur Lösung der formalen Problemstellung 21-17 vollzieht er dann jedoch einen expliziten Grundvorstellungswechsel, da er zur Lösungsbestimmung additiv ergänzend vorgeht[116]:

1	I:	Und die letzte Aufgabe.
2	Nil:	Mhm.
3	I:	Einundzwanzig minus siebzehn. *Zeigt dabei zunächst auf den Minuenden und danach auf den Subtrahenden.* Die ist aber jetzt mal ein bisschen schwerer, oder?
4	Nil:	Ja. (4) Achtzehn, neunzehn, zwanzig, einundzwanzig. (.) Vier.

Im weiteren Verlauf des Interviews nutzt beziehungsweise beschreibt Nils im Bearbeitungsprozess der kontextgebundenen ‚Abzieh-Probleme' abziehende

115 Vgl. Kapitel 5.2.1.2 für eine ausführliche Analyse.
116 Vgl. Kapitel 5.1.3.2 für eine ausführliche Analyse.

Vorgehensweisen und verbleibt damit in der durch die Problemstellungen angesprochenen Restvorstellung. Lediglich bei dem kontextgebundenen ‚Abzieh-Problem' mit kleiner Differenz (8-6) vollzieht Nils wahrscheinlich einen impliziten Grundvorstellungswechsel.

Zweiter Interviewzeitpunkt
Auch während des zweiten Interviewzeitpunktes nutzt beziehungsweise beschreibt Nils bei sämtlichen ‚Abzieh-Problemen' mit mittleren und großen Differenzen (sowohl formal als auch kontextgebunden) auf der Restvorstellung aufbauende Vorgehensweisen. Und auch auf die Frage, wie er einem anderen Kind das Minuszeichen eines ‚Abzieh-Problems' erklären würde, verweist er auf die Vorgehensweise des Abziehens. Lediglich bei Problemstellungen mit kleinen Differenzen vollzieht Nils zur Lösung sowohl implizite Grundvorstellungswechsel (formal: 14-13; kontextgebundenen: 8-6, 18-17) als auch einen expliziten Grundvorstellungswechsel. So geht er zur Lösung der kontextgebundenen Problemstellung 11-8 additiv ergänzend vor. Dabei macht er außerdem deutlich, dass er die auf der Unterschiedsvorstellung aufbauende Vorgehensweise des additiven Ergänzens als alternative Vorgehensweise zu dem auf der Restvorstellung aufbauenden Abziehens versteht:

1	I:	Ich habe gedacht, das wäre immer nur minus das Bild. *Zeigt dabei auf das Arbeitsblatt.*
2	Nil:	(3) Ich hab es aber anders gemacht.
3	I:	Wie hast du es denn anders gemacht?
4	Nil:	Also acht *Zeigt dabei auf die 8 auf dem Arbeitsblatt.* plus drei *Zeigt dabei auf die leere Kiste auf dem Arbeitsblatt.* sind elf. *Zeigt dabei auf die 11 auf dem Arbeitsblatt.*
5	I:	Mhm. Und so geht das auch?
6	Nil:	Ja.
7	I:	Muss man nicht immer rückwärts zählen? *Zeigt dabei auf das Arbeitsblatt.*
8	Nil:	Mm. *Schüttelt dabei den Kopf.*
9	I:	Oder rückwärts rechnen?
10	Nil:	*Schüttelt den Kopf.*

Dritter Interviewzeitpunkt
Während des dritten Interviewzeitpunktes nutzt Nils auch die Unterschiedsvorstellung zur Lösung von ‚Abzieh-Problemen' mit mittleren Differenzen (kontextgebunden 12-7 und 14-6) operational und vollzieht somit explizite Grundvorstellungswechsel. Dabei macht er außerdem deutlich, dass er auch in der durch die Problemstellung angesprochenen Restvorstellung hätte verbleiben können. So beschreibt er beispielsweise während des Lösungsprozesses des kontextgebundenen ‚Abzieh-Problems' 12-7, dass sowohl die formale Darstel-

lung „sieben plus fünf gleich zwölf“ als auch „zwölf minus sieben gleich fünf“ zu der Problemstellung ‚passen’.

Bei allen weiteren Problemstellungen mit mittleren Differenzen (formal und kontextgebunden) sowie bei den ‚Abzieh-Problemen’ mit großen Differenzen nutzt beziehungsweise beschreibt Nils abziehende Vorgehensweisen.

Bezogen auf die Problemstellungen mit kleinen Differenzen vollzieht Nils neben impliziten Wechseln zur Lösungsbestimmung (formal: 14-13; kontextgebunden: 18-17) auch explizite Grundvorstellungswechsel (formal: 71-69; kontextgebunden: 11-8).

Vierter Interviewzeitpunkt

Während des vierten Interviewzeitpunktes vollzieht Nils neben impliziten Grundvorstellungswechseln bei Problemstellungen mit kleinen Differenzen (formal: 14-13; kontextgebunden: 18-17), bei allen drei Differenzgrößen explizite Grundvorstellungswechsel (formal: 8-3, 21-17; kontextgebunden: 17-7, 27-13, 8-6, 11-8). Dabei macht er an mehreren Stellen deutlich, dass er bewusst zur Lösungsbestimmung der gegebenen ‚Abzieh-Probleme’ die Unterschiedsvorstellung operational nutzt. So beschreibt er zum Beispiel bei der formalen Problemstellung 8-3, dass er das ‚Abzieh-Problem’ in ein ‚Additives-Ergänzungs-Problem’ umdeutet:

1	Nil:	*Schreibt 5 als Ergebnis auf das Arbeitsblatt.*
2	I:	Warum kommt da fünf raus? (.) Woher weißt du das?
3	Nil:	(2) Weil man muss herausfinden, wie viel drei *Zeigt dabei auf den Subtrahenden auf dem Arbeitsblatt.* plus wie viel *Zeigt dabei auf das von ihm notierte Ergebnis auf dem Arbeitsblatt.* gleich acht *Zeigt dabei auf den Minuenden auf dem Arbeitsblatt.* ist
4	I:	Aber da steht doch minus *Zeigt dabei auf das Minuszeichen.* und nicht plus. (.) Geht das auch mit plus?
5	Nil:	Ja.

Und auch nachdem er zur Lösungsbestimmung des kontextgebundenen ‚Abzieh-Problems’ 27-13 einen expliziten Grundvorstellungswechsel vollzogen hat, führt er aus, dass man auch in der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung hätte verbleiben können:

1	I:	Und hier kann man auch mit Plus rechnen? Weil sie gibt ja eigentlich Welche ab? *Zeigt dabei auf das Arbeitsblatt.*
2	Nil:	Ja.
3	I:	Muss man da nicht (.) was anderes eigentlich rechnen?
4	Nil:	Kann man auch.

5.2.2.2 Explizite Grundvorstellungswechsel ‚von Anfang an' bei der Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'

Bei den auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellungen zeigte sich hingegen zu der in Kapitel 5.2.2.1 beschriebenen Hypothese bezüglich des Entwicklungsverlaufs der Fähigkeit des Grundvorstellungswechsels bei ‚Abzieh-Problemen', dass die Kinder ab dem ersten Interviewzeitpunkt – also ‚von Anfang an' – explizit die Grundvorstellung zur Lösung von Problemstellungen mit größtenteils großen Differenzen wechselten, sofern sie überhaupt Grundvorstellungswechsel zur Lösung der gegebenen Unterschiedsbestimmungsprobleme vollzogen[117].

Im Folgenden wird dies anhand der prototypischen Darstellung des Fallbeispiels Toni konkretisiert.

Fallbeispiel Toni

Erster Interviewzeitpunkt
Während des ersten Interviewzeitpunktes nutzt beziehungsweise beschreibt Toni bei nahezu allen Problemstellungen die durch die Problemstellungen angesprochene Unterschiedsvorstellung der Subtraktion. Dabei geht er zur Lösung der Problemstellungen entweder additiv ergänzend vor oder ruft das Ergebnis der jeweiligen Problemstellung über den auswendig gewussten Unterschied der gegebenen Zahlenwerte ab.
Bei der Problemstellung mit großer Differenz, bei der der Unterschied von 2 und 18 bestimmt werden soll, nennt er allerdings sehr schnell 16 als Ergebnis. Als Begründung führt er folgendes an:

1	T:	Wenn man von achtzehn zwei abzieht ergibt das sechzehn.
2	I:	Ja. Dann sind da sechzehn Stück drin?
3	T:	Sechzehn Stück mehr.

Betrachtet man seine Begründung für das Ergebnis in Zeile 1 in Verbindung mit der Tatsache, dass er das Ergebnis nach sehr kurzem Überlegen benennen kann, so kann vermutet werden, dass er die Problemstellung durch seine beschriebene Vorgehensweise des Abziehens gelöst hat.

117 So konnten bei zwei Kindern während aller vier Interviewzeitpunkte im Lösungs- und auch Begründungsprozess bei der Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' keine Restvorstellungen rekonstruiert werden.

Zweiter Interviewzeitpunkt

Während des zweiten Interviewzeitpunktes lassen sich bei allen Problemstellungen mit kleinen und mittleren Differenzen keinerlei Restvorstellungen in Tonis Äußerungen und Handlungen rekonstruieren.

In Abgrenzung dazu beschreibt Toni jedoch bei allen Unterschiedsbestimmungsproblemen mit großen Differenzen (8-2, 12-3, 18-2), dass er abziehend die Problemstellungen gelöst habe. Betrachtet man diese Aussage in Verbindung mit der Tatsache, dass er bei allen drei Problemstellungen nach kurzem Überlegen die Ergebnisse nannte, kann gefolgert werden, dass seine Aussagen tatsächlich seinen mentalen Lösungsprozess beschreiben. Prototypisch für diese drei Interviewszenen ist dabei die folgende, bei der der Unterschied von 2 und 18 bestimmt werden soll:

1	I:	Wer hat mehr?
2	T:	*Zeigt auf die 18 auf dem Arbeitsblatt.*
3	I:	Und wie viel mehr?
4	T:	Mh, weiß ich nicht. (2) Sechzehn.
5	I:	Sechzehn?
6	T:	*Nickt.*
7	I:	Wie hast du das gemacht?
8	T:	Habe zwei zurückgezogen
9	I:	Mhm.
10	T:	Von achtzehn.
11	I:	Rückwärts gezählt? Geht das hier auch mit vorwärts zählen?
12	T:	Mh, mit vorwärts zählen geht das ein bisschen schwerer.
13	I:	Warum?
14	T:	(.) Weil, mh, weil das ist nämlich eine andere Aufgabe. Und bei manchen Aufgaben da geht das leicht vorwärts zu zählen.

In dieser Szene wird dabei die Vermutung, dass er das Ergebnis der Problemstellung abziehend bestimmt habe, zusätzlich durch die Äußerungen in den Zeilen 11 bis 14 gestützt, da er beschreibt, dass die Vorgehensweise des additiven Ergänzens, welche hier synonym zu „vorwärts zählen“ zu verstehen ist, hier „schwerer“ gewesen wäre. Dabei kann seine Aussage sicherlich so verstanden werden, dass die Vorgehensweise des additiven Ergänzens bei den gegebenen Zahlenwerten fehleranfälliger und zeitintensiver wäre.

Dritter Interviewzeitpunkt

Auch während des dritten Interviewzeitpunktes nutzt Toni schwerpunktmäßig Unterschiedsvorstellungen zur Lösung der gegebenen Problemstellungen und vollzieht somit keine Grundvorstellungswechsel. So löst er alle Problemstellungen mit mittleren Differenzen und zwei Problemstellungen mit kleinen Differenzen durch konkrete additiv ergänzende Handlungen.

Nur bei den Problemstellungen mit großen Differenzen (8-2, 18-2)[118] und der Problemstellung mit kleiner Differenz 9-8 besteht die Vermutung, dass Toni zur Lösungsbestimmung auf der Restvorstellung aufbauende abziehende Vorgehensweisen nutzt. Diese Vermutungen können, wie auch schon während des zweiten Interviewzeitpunktes, damit begründet werden, dass Tonis Verhalten auf ein mentales abziehendes Handeln schließen lässt, welches zusätzlich durch seine retrospektive Beschreibung seines Vorgehens gestützt wird:

- Bei der Problemstellung 8-2: „Ich habe zwei *Zeigt dabei auf die 2 in der Problemstellung.* von acht weggenommen."
- Bei der Problemstellung 18-2: „Zwei von achtzehn weggenommen."
- Bei der Problemstellung 9-8: „Nimmt man einfach von neun (2) acht weg."

Vierter Interviewzeitpunkt

Während des vierten Interviewzeitpunktes kann aufgrund der fehlenden Bereitschaft Tonis, seine mental genutzten Vorgehensweisen zu beschreiben beziehungsweise seine genannten Ergebnisse zu begründen, lediglich bei fünf der neun zu lösenden Problemstellungen sein Vorgehen rekonstruiert werden.

Aufgrund seiner Äußerungen kann dabei bei vier dieser Problemstellungen davon ausgegangen werden (18-2, 11-6, 15-8, 28-26), dass Toni wahrscheinlich zur Lösung der jeweiligen Problemstellung keine Grundvorstellungswechsel vollzieht und in der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung zur Lösung verbleibt. Bei der Problemstellung mit großer Differenz 12-3 nutzt er zur Lösung jedoch wahrscheinlich die Restvorstellung operational, da er seine mentale Vorgehensweise als „minus drei" beschreibt. Somit kann vermutet werden, dass Toni zur Lösung dieser Problemstellung einen expliziten Grundvorstellungswechsel vollzieht.

5.2.3 Zusammenfassung

In Kapitel 5.2. wurden die Ergebnisse bezogen auf Forschungsschwerpunkt 2: ‚*Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung*' dargelegt.

Explizite und implizite Grundvorstellungswechsel

Bezogen auf Forschungsfrage 5 ‚*Wie wechseln Schülerinnen und Schüler von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung bei formalen und kontextgebundenen Subtraktions-*

[118] Bei der dritten Problemstellung mit kleiner Differenz sind im Datenmaterial keine Vorgehensweisen und Grundvorstellungen rekonstruierbar.

problemen?' wurde dargelegt, dass die Kinder im Verlauf des ersten Schuljahres zur Lösung von gegebenen Problemstellungen sowohl explizite als auch implizite Grundvorstellungswechsel vollziehen.

Explizite Grundvorstellungswechsel

Als explizit realisiert sich ein Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung immer dann, wenn bewusst die Grundvorstellung im Sinne einer Problemumdeutung zur Lösung der gegebenen Problemstellung gewechselt wird. Mit anderen Worten: Die jeweils andere Grundvorstellung wird operational zur Lösung der gegebenen Problemstellung genutzt. Somit stellen alle Grundvorstellungswechsel, bei denen die jeweils anderen Grundvorstellungen operational zur Lösungsbestimmung genutzt werden, explizite Grundvorstellungswechsel dar.

Explizite Grundvorstellungswechsel wurden dabei bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal sowie kontextgebunden) und den auf der Unterschiedsvorstellung aufbauendem Problemtyp ‚Vergleichen' bei den Kindern beobachtet.

Implizite Grundvorstellungswechsel

Bei einem impliziten Grundvorstellungswechsel wird das Ergebnis der gegebenen Problemstellung über die auswendig gewusste Relation der gegebenen Zahlenwerte abgerufen, wobei das Ergebnis in der jeweils anderen Grundvorstellung repräsentiert ist. Konkret: Wenn das Ergebnis eines beliebigen Restbestimmungsproblems (bzw. Unterschiedsbestimmungsproblems) über die auswendig gewusste Relation der gegebenen Zahlenwerte abgerufen wird, wobei das Ergebnis als Unterschied (bzw. Rest) repräsentiert ist, wird von einem impliziten Grundvorstellungswechsel gesprochen.

Implizite Grundvorstellungswechsel wurden dabei bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal sowie kontextgebunden) und dem auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemtyp ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' bei den Kindern beobachtet. Dabei ist auffällig, dass sich diese im Verlauf des ersten Schuljahres vor allem bei Restbestimmungsproblemen mit kleinen Differenzen und bei Unterschiedsbestimmungsproblemen mit großen Differenzen rekonstruieren ließen.

Zur Entwicklung der Grundvorstellungswechsel

Bezogen auf Forschungsfrage 6 ‚*Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen?*' wurde dargelegt, wie sich das Wechseln der Grundvorstellung von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere zur Lösung der gegebenen Problemstellungen längsschnittlich entwickelte. Dabei wurden zwei Typen von idealtypischen Entwicklungsverläufen in

Abhängigkeit von der durch die Problemstellungen angesprochenen Grundvorstellungen beschrieben.

Bei ‚Abzieh-Problemen'

Bezogen auf das Wechseln der Grundvorstellung zur Lösung von auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) konnte insgesamt die Hypothese herausgearbeitet werden, dass sich das Wechseln der Grundvorstellung bei den Kindern idealtypisch

- von keinem Wechsel der Grundvorstellung,
- über das implizite Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen,
- über das explizite Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen,
- hin zum expliziten Wechseln der Grundvorstellung bei allen drei Differenzgrößen

entwickelt.

Dazu wurden zwei Fallbeispiele, welche die Ränder des Spektrums an Entwicklungsverläufen markieren, beschrieben.

Bei der Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'

Bezogen auf das Wechseln der Grundvorstellung zur Lösung von auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellungen des Typs ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' konnte herausgearbeitet werden, dass die Kinder ab dem ersten Interviewzeitpunkt – also ‚von Anfang an' – explizit die Grundvorstellung zur Lösung von Problemstellungen mit größtenteils großen Differenzen wechselten, sofern sie überhaupt Grundvorstellungswechsel zur Lösung der gegebenen Unterschiedsbestimmungsprobleme vollzogen.

Dies wurde durch die prototypische Darstellung eines Fallbeispiels konkretisiert.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde in Kapitel 1 zunächst losgelöst vom Untersuchungsgegenstand der Subtraktion den Fragen nachgegangen, was unter Grundvorstellungen zu verstehen ist, welche Bedeutung Grundvorstellungen im Lernprozess zukommt, wie sich Grundvorstellungen im Lernprozess ausbilden und (weiter-) entwickeln sowie welche Rolle das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik spielt. Unter anderem wurde dabei herausgestellt, dass das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik sowohl theoretisch als auch deskriptiv genutzt wird. Dabei wird zum einen der Frage nachgegangen, welche Grundvorstellungen Schülerinnen und Schüler ausbilden sollen beziehungsweise können (theoretische Perspektive), zum anderen wird der Fokus auf die individuellen Grundvorstellungen respektive mentalen Modelle der Lernenden gerichtet (deskriptive Perspektive).

Beide Perspektiven berücksichtigend, wurden die Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen der Subtraktion in der vorliegenden Arbeit sowohl aus theoretischer als auch deskriptiver Perspektive betrachtet.

Aus theoretischer Perspektive ging es in Kapitel 2 darum zu klären, was theoretisch unter Subtraktionsproblemen, Grundvorstellungen der Subtraktion sowie Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen verstanden werden kann. Dazu wurde zunächst der diesbezügliche Forschungsstand dargelegt und auf dessen Grundlage weiterführende stoffdidaktische Überlegungen des Autors der vorliegenden Arbeit entfaltet.

Das Ziel des deskriptiven und damit empirischen Teils der vorliegenden Arbeit war es die in Kapitel 3 hergeleitete übergeordnete Forschungsfrage

> ‚*Inwiefern nutzen Schülerinnen und Schüler des ersten Schuljahres Unterschiedsvorstellungen und darauf aufbauende Vorgehensweisen zur Lösung von formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen?'*

zu beantworten.

Dazu wurde eine qualitative Studie durchgeführt, in der die Vorgehensweisen und (Grund-) Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern eines ersten Schuljahres über ein Schuljahr hinweg (2009/2010) in insgesamt vier Erhebungszeitpunkten mittels jeweils der gleichen leitfadengestützten Einzelinterviews erhoben wurden (vgl. Kapitel 4).

Die gewonnenen Ergebnisse wurden in Kapitel 5 entlang von zwei Forschungsschwerpunkten und insgesamt sechs Forschungsfragen dargelegt.

In diesem Kapitel wird aufbauend auf diesen Ergebnissen das Fazit der vorliegenden Arbeit gezogen. Dazu werden zunächst die empirisch gewonnenen Ergebnisse zusammengefasst und diskutiert (Kapitel 6.1). In Kapitel 6.2 werden abschließend in Form eines Ausblicks Konsequenzen für den Mathematikunterricht sowie die mathematikdidaktische Forschung formuliert.

6.1 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die zentralen empirischen Ergebnisse bezogen auf die sechs Forschungsfragen zusammengefasst und in Beziehung zu den Ausführungen der vorherigen Kapitel gesetzt. Dazu werden zunächst die zentralen Ergebnisse bezogen auf den Forschungsschwerpunkt 1 ‚*Gebrauch der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen*' (Kapitel 6.1.1) und anschließend bezogen auf den Forschungsschwerpunkt 2 ‚*Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung*' (Kapitel 6.1.2) dargestellt.

6.1.1 Forschungsschwerpunkt 1: Gebrauch der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen

In Kapitel 5.1 wurden die Ergebnisse bezogen auf *den Forschungsschwerpunkt 1: Gebrauch der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen* dargelegt und damit die ersten vier Forschungsfragen beantwortet. Im Folgenden werden die Ergebnisse entlang dieser Forschungsfragen strukturiert.

FF1: Wie nutzen Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen und darauf aufbauende Vorgehensweisen der Subtraktion zur Lösung von formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen beziehungsweise zur Rechtfertigung ihrer Ergebnisse?

Im Rahmen der Ergebnisauswertung stellte sich heraus, dass die zuvor theoretisch hergeleiteten Kategorien zur Analyse der konkreten Handlungen beziehungsweise Begründungen der ermittelten Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler weiter ausdifferenziert werden mussten (vgl. Abb. 6-1 in Abgrenzung zu Abb. 4-8 auf S. 112). Dabei wurde deutlich, dass der Gebrauch der Grundvorstellungen in einem Spektrum zwischen *operationaler* und *relationaler* Realisierung stattfindet. Durch diese Unterscheidung war es möglich, auch in den Beschreibungen der statischen Beziehungen der gegebenen Zahlenwerte, als Begründungen für mental bestimmte oder auswendig gewusste Ergebnisse, den Gebrauch der Grundvorstellungen der Subtraktion zu rekonstruieren. In diesem Zusammenhang wäre es interessant zu erfahren, wie derartige Äußerungen der Schülerinnen und Schüler in den in Kapitel 3 zitierten Studien (z.B. TORBEYNS ET AL. 2009a, 2009b; DE SMEDT ET AL. 2010; PELTENBURG ET AL. 2012) kategorisiert wurden. Das Gleiche gilt für Vorgehensweisen, welche in der vorliegenden Arbeit als Start-Finden kategorisiert wurden.

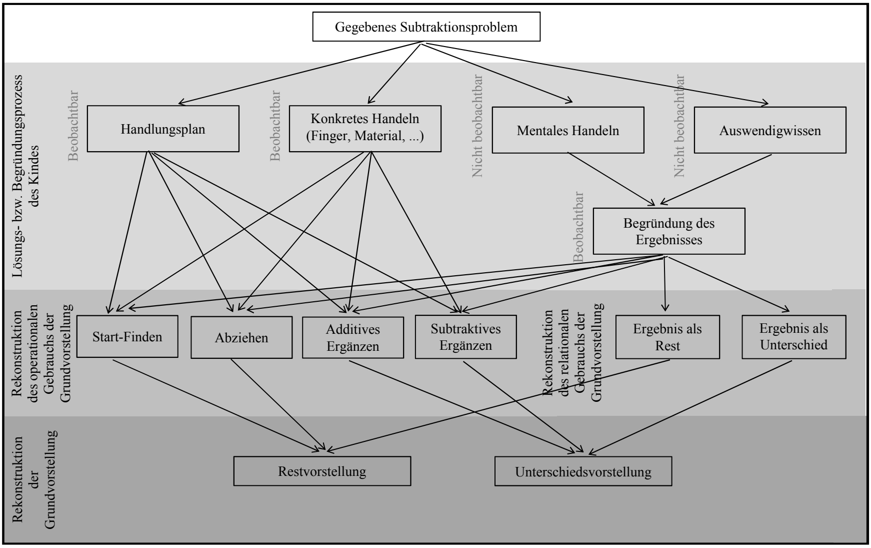


Abbildung 6-1: Überarbeitetes Modell zur Analyse von Vorgehensweisen und Grundvorstellungen

Operationaler Gebrauch der Grundvorstellung

Beim operationalen Gebrauch der Grundvorstellung wird eine auf einer Grundvorstellung aufbauende Vorgehensweise – im Sinne einer dynamischen Handlung – zur Lösung der Problemstellung konkret durchgeführt oder aber als Möglichkeit zur Lösung beschrieben, wobei die Beschreibung auf zwei Ebenen stattfinden kann: Zum einen in Form einer Rechtfertigung eines mental bestimmten oder aber auswendig gewussten Ergebnisses, zum anderen in Form eines sogenannten Handlungsplanes, bei dem eine Möglichkeit zur Lösung der Problemstellung, ohne diese umzusetzen, erläutert wird. Hinsichtlich des operationalen Gebrauchs konnte dabei im Laufe des ersten Schuljahres eine Vielfalt an unterschiedlichen, wenn auch nicht allen denkbaren, Vorgehensweisen beobachtet werden (siehe Tab. 6-1):

Tabelle 6-1: Zusammenfassung des operationalen Gebrauchs der beiden Grundvorstellungen

Grundvorstellung	**1. Dimension der Vorgehensweise**	**2. Dimension der Vorgehensweise**		
Rest	Abziehen	Schrittweise	In mehreren Schritten	Zählend
				Nicht-zählend
			In einem Schritt	
		Stellenweise		
		Hilfsaufgabe	Minuenden verändern	
			Subtrahenden verändern	
		Vereinfachen		
	Start-Finden	Schrittweise	In mehreren Schritten – Nicht-zählend	
			In einem Schritt	
		Hilfsaufgabe	Summe verändern	
			Zweiten Summanden verändern	
Unterschied	Additives Ergänzen	Schrittweise	In mehreren Schritten	Zählend
				Nicht-zählend
			In einem Schritt	
		Stellenweise		
		Hilfsaufgabe	Summe verändern	
			Ersten Summanden verändern	
		Vereinfachen		
	Subtraktives Ergänzen	Schrittweise	In mehreren Schritten	
			In einem Schritt	

Bezüglich dieser Vielfalt an unterschiedlichen Vorgehensweisen ist anzumerken, dass sich diese zwar grundsätzlich mit den Ergebnissen von PELTENBURG ET AL. (2012, 360) deckt[119], in der vorliegenden Arbeit jedoch noch ein größerer Variantenreichtum an Vorgehensweisen rekonstruiert werden konnte. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass auch bei PELTENBRG ET AL (2012, 360) lediglich schrittweise subtraktiv ergänzende Vorgehensweisen beobachtet wurden. Dies spricht eventuell dafür, dass subtraktiv ergänzende Vorgehensweisen nicht so elaboriert gebraucht werden wie die übrigen Vorgehensweisen. Hier ist sicherlich weiterer Forschungsbedarf zu konstatieren (vgl. Kapitel 6.2.2).

119 Auch wenn dort nicht die Vorgehensweise Start-Finden erhoben wurde.

Relationaler Gebrauch der Grundvorstellung
Beim relationalen Gebrauch der Grundvorstellung wird im Gegensatz zum operationalen Gebrauch eine Beschreibung der statischen Beziehung der gegebenen Zahlenwerte zur Begründung eines mental bestimmten oder auswendig gewussten Ergebnisses vorgebracht, wobei das Ergebnis der jeweiligen Problemstellung dabei als Rest oder Unterschied repräsentiert sein kann. Dass sich der relationale Gebrauch dabei lediglich im Begründungsprozess eines Ergebnisses rekonstruieren lässt, ist damit zu begründen, dass die statische Beziehung der gegebenen Zahlenwerte lediglich dann beschrieben werden kann, wenn diese auswendig verfügbar ist oder aber zuvor durch einen operationalen Gebrauch einer der beiden Grundvorstellungen bestimmt wurde. Der relationale Gebrauch konnte dabei sowohl für die Restvorstellung als auch für die Unterschiedsvorstellung rekonstruiert werden.

FF2: Welche Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen werden von Schülerinnen und Schülern bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen genutzt?

Bezogen auf den Gebrauch der Grundvorstellungen bei den verschiedenen Problemstellungen zeigte sich, dass die Kinder bei kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen', beim ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' und ‚Vereinigen' jeweils beide Grundvorstellungen der Subtraktion relational und operational nutzten, wohingegen bei den formalen ‚Abzieh-Problemen' neben dem operationalen Gebrauch beider Grundvorstellungen lediglich die Unterschiedsvorstellung relational genutzt wurde.

Bezogen auf den operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen stellte sich außerdem heraus, dass bei jedem Problemtyp im Verlauf des ersten Schuljahres beide Grundvorstellungen in Form der vier Vorgehensweisen (Abziehen, Start-Finden, additives Ergänzen, subtraktives Ergänzen) mindestens einmal genutzt wurden. Da in der vorliegenden Arbeit jedoch keine Häufigkeitsverteilungen bezüglich des Gebrauchs der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei den verschiedenen Problemstellungen betrachtet wurden, lassen sich hier keine Aussagen treffen, inwiefern die durch die Problemstellung angesprochene Grundvorstellung beziehungsweise Vorgehensweise den Gebrauch der Grundvorstellungen und Vorgehensweisen beeinflusst.

Charakterisiert man die von den Kindern genutzten beziehungsweise beschriebenen Vorgehensweisen noch genauer (zweite Dimension der Vorgehensweisen), so wird deutlich, dass nicht immer alle möglichen Vorgehensweisen im Verlauf des Schuljahres bei den einzelnen Problemtypen gebraucht wurden. So ist zunächst festzuhalten, dass die abziehenden, start-findenden, additiv ergänzenden und subtraktiv ergänzenden *schrittweisen* Vorgehensweisen universell von den Kindern bei sämtlichen Problemstellungen genutzt wurden (dies deckt sich mit den Ergebnissen von PELTENBURG ET AL. 2012, 360). In diesem

Zusammenhang wurde außerdem deutlich, dass während des gesamten Schuljahres bei der Lösung von auf der Restvorstellung aufbauenden formalen ‚Abzieh-Problemen' bezogen auf unterschiedsbestimmende Vorgehensweisen lediglich schrittweise Vorgehensweisen beobachtet werden konnten. Anders herum konnten bei den statischen Unterschiedsbestimmungsproblemen ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' bezogen auf die Vorgehensweise des Abziehens lediglich ein schrittweises Vorgehen rekonstruiert werden. Grundsätzlich lässt sich jedoch festhalten, dass bezogen auf die zweite Dimension zur Charakterisierung der Vorgehensweisen in Zusammenhang mit den gegebenen Problemstellungen weiterer Forschungsbedarf zu konstatieren ist (vgl. Kapitel 6.2.2).

FF3: Inwiefern wirken Vorgehensweisen innerhalb einer Grundvorstellung zusammen?

Beim operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen zeigte sich während der einzelnen Interviewzeitpunkte, dass die Kinder nicht immer nur eine Vorgehensweise nutzten beziehungsweise beschrieben, sondern auch innerhalb einer Grundvorstellung beide Vorgehensweisen zusammenwirken können[120]:

- Aufbauend auf der Restvorstellung: Abziehen und Start-finden beziehungsweise
- aufbauend auf der Unterschiedsvorstellung: Additives Ergänzen und subtraktives Ergänzen.

Bezogen auf das Zusammenwirken von abziehenden und start-findenden Vorgehensweisen innerhalb der Restvorstellung der Subtraktion konnte beobachtet werden, dass die Kinder sowohl bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) als auch bei den nicht eindeutig zu einer der beiden Grundvorstellungen zuordenbaren Problemstellung ‚Vereinigen' beide Vorgehensweisen nutzten beziehungsweise beschrieben. Bei den auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' konnte hingegen kein Zusammenwirken der beiden auf der Restvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen rekonstruiert werden. Insgesamt wurde dabei deutlich, dass die Kinder um den Zusammenhang von start-findenden und abziehenden Vorgehensweisen im Sinne eines inversen Vorgehens wissen.

Bezogen auf das Zusammenwirken von additiv ergänzenden und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen innerhalb der Unterschiedsvorstellung der Subtraktion konnte beobachtet werden, dass die Kinder sowohl bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) als auch bei den auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' beide Vorgehensweisen nutzten bezie-

[120] Dies bezieht sich auf die erste Dimension zur Charakterisierung der Vorgehensweisen.

hungsweise beschrieben. Bei den nicht eindeutig zu einer der beiden Grundvorstellungen zuordenbaren Problemstellung ‚Vereinigen' konnte hingegen kein Zusammenwirken der beiden auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Vorgehensweisen rekonstruiert werden.

FF4: Inwiefern wirken Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg zusammen?

Bezogen auf Forschungsfrage 4 wurde auch das Zusammenwirken von Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg beobachtet. Dabei sind theoretisch vier Kombinationen möglich, wobei im Verlauf des Schuljahres drei Kombinationen rekonstruiert werden konnten[121]: So konnte

1. das Zusammenwirken von abziehenden und additiv ergänzenden Vorgehensweisen bei sämtlichen Problemtypen,
2. das Zusammenwirken von abziehenden und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen lediglich bei kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen' sowie
3. das Zusammenwirken von start-findenden und additiv ergänzenden Vorgehensweisen bei den kontextgebundenen ‚Abzieh-Problemen' und den Problemstellungen ‚Vereinigen' und ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'

rekonstruiert werden.

Unter anderem wurde dabei herausgestellt, dass die Kinder zum Teil bewusst zwischen der Deutung und der Lösung einer gegebenen Problemstellung differenzieren, wobei die Problemdeutung und die Problemlösung auf unterschiedlichen Grundvorstellungen aufbauen.

Insgesamt bieten diese Ergebnisse interessante Anknüpfungspunkte für die Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen, bei denen das Ziel verfolgt wird Vorgehensweisen, welche auf unterschiedlichen Grundvorstellungen aufbauen, zu vernetzen (vgl. Kapitel 6.2).

6.1.2 Forschungsschwerpunkt 2: Wechsel von der durch die Grundvorstellung angesprochenen Grundvorstellung

In Kapitel 5.2 wurden die Ergebnisse bezogen auf den Forschungsschwerpunkt 2 ‚*Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung*' dargelegt und damit die fünfte und sechste Forschungsfrage beantwortet. Im Folgenden werden die Ergebnisse entlang dieser Forschungsfragen strukturiert.

[121] Dies bezieht sich auf die erste Dimension zur Charakterisierung der Vorgehensweisen.

FF5: Wie wechseln Schülerinnen und Schüler von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung bei formalen und kontextgebundenen Subtraktionsproblemen?

Bezogen auf die fünfte Forschungsfrage wurde beschrieben, dass die Kinder im Verlauf des ersten Schuljahres zur Lösung von gegebenen Problemstellungen sowohl explizite als auch implizite Grundvorstellungswechsel vollziehen.

Explizite Grundvorstellungswechsel
Als explizit realisiert sich ein Wechsel von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung immer dann, wenn bewusst die Grundvorstellung im Sinne einer Problemumdeutung zur Lösung der gegebenen Problemstellung gewechselt wird. Mit anderen Worten: Die jeweils andere Grundvorstellung wird operational zur Lösung der gegebenen Problemstellung genutzt. Somit stellen alle Grundvorstellungswechsel, bei denen die jeweils anderen Grundvorstellungen operational zur Lösungsbestimmung genutzt werden, explizite Grundvorstellungswechsel dar.

Explizite Grundvorstellungswechsel wurden dabei bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal sowie kontextgebunden) und dem auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemtyp ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' von den Kindern vollzogen.

Implizite Grundvorstellungswechsel
Bei einem impliziten Grundvorstellungswechsel wird das Ergebnis der gegebenen Problemstellung über die auswendig gewusste Relation der gegebenen Zahlenwerte, wobei das Ergebnis in der jeweils anderen Grundvorstellung repräsentiert ist, abgerufen. Konkret: Wenn das Ergebnis eines beliebigen Restbestimmungsproblems (bzw. Unterschiedsbestimmungsproblems) über die auswendig gewusste Relation der gegebenen Zahlenwerte abgerufen wird, wobei das Ergebnis als Unterschied (bzw. Rest) repräsentiert ist, wird von einem impliziten Grundvorstellungswechsel gesprochen.

Implizite Grundvorstellungswechsel wurden dabei bei den auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal sowie kontextgebunden) und bei dem auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemtyp ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' von den Kindern vollzogen. Dabei ist auffällig, dass sich diese im Verlauf des ersten Schuljahres vor allem bei Restbestimmungsproblemen mit kleinen Differenzen und bei Unterschiedsbestimmungsproblemen mit großen Differenzen rekonstruieren ließen. Dies ist jedoch vermutlich damit zu erklären, dass die Beziehungen von Zahlen mit relativ kleinen Differenzen häufiger auswendig verfügbar sind als bei Zahlen mit relativ großen Differenzen.

Betrachtet man mit dieser Brille die Ergebnisse der in Kapitel 3 zitierten Studien (z. B. TORBEYNS ET AL.2010; PETERS ET AL. 2012), die einen geringen Gebrauch von unterschiedsbestimmenden Vorgehensweisen bei ‚Abzieh-Problemen' mit kleinen Differenzen konstatieren, so wäre interessant zu erfahren, wie in diesen Studien implizite Grundvorstellungswechsel kategorisiert wurden.

Grundsätzlich ist bezüglich zu dieser Forschungsfrage jedoch anzumerken, dass die Ergebnisse als Hypothesen zu verstehen sind, welche durch weitere Studien zu vertiefen sind (vgl. Kapitel 6.2.2).

FF6: Inwiefern lassen sich bezogen auf den Grundvorstellungswechsel Entwicklungen im Verlauf des ersten Schuljahres ausmachen?

Bezogen auf Forschungsfrage 6 wurde dargestellt, dass sich das Wechseln der Grundvorstellung von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere zur Lösung der gegebenen Problemstellungen längsschnittlich entwickelte. Dabei wurden zwei Typen von idealtypischen Entwicklungsverläufen in Abhängigkeit von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung beschrieben.

Dabei ist jedoch auch hier anzumerken, dass beide idealtypischen Entwicklungsverläufe Hypothesen darstellen, welche Ausgangspunkte weiterer Studien darstellen könnten (vgl. Kapitel 6.2.2).

Bei ‚Abzieh-Problemen'
Bezogen auf das Wechseln der Grundvorstellung zur Lösung von auf der Restvorstellung aufbauenden ‚Abzieh-Problemen' (formal und kontextgebunden) konnte insgesamt die Hypothese herausgearbeitet werden, dass sich das Wechseln der Grundvorstellung bei den Kindern idealtypisch

- von keinem Wechsel der Grundvorstellung,
- über das implizite Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen,
- über das explizite Wechseln der Grundvorstellung bei kleinen Differenzen,
- hin zum expliziten Wechseln der Grundvorstellung bei allen drei Differenzgrößen

entwickelt.

Bezogen auf diesen idealisierten Entwicklungsverlauf wäre es interessant noch genauer zu untersuchen, wie diese Entwicklungen ablaufen und inwiefern sie sich initiieren lassen (vgl. Kapitel 6.2.2).

Bei der Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht'
Bezogen auf das Wechseln der Grundvorstellung zur Lösung von auf der Unterschiedsvorstellung aufbauenden Problemstellungen des Typs ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' konnte herausgearbeitet werden, dass die Kinder ab dem ersten Interviewzeitpunkt – also ‚von Anfang an' – explizit die Grundvorstellung

zur Lösung von Problemstellungen mit größtenteils großen Differenzen wechselten, sofern sie überhaupt Grundvorstellungswechsel zur Lösung der gegebenen Unterschiedsbestimmungsprobleme vollzogen.

Betrachtet man dieses Ergebnis vor dem Hintergrund, dass diese Problemstellung in Schulbüchern häufig zur Einführung der Vorgehensweise des additiven Ergänzens genutzt wird, so bietet es interessante Anknüpfungspunkte für die Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen (vgl. Kapitel 6.2).

6.2 Ausblick

Wie schon in Kapitel 6.1 angemerkt, lassen sich aufbauend auf den im vorherigen Kapitel zusammengefasst dargestellten Ergebnissen sowohl für den Mathematikunterricht (Kapitel 6.2.1) als auch für die mathematikdidaktische Forschung (Kapitel 6.2.2) Konsequenzen und weiterführende Fragen formulieren. Diese werden im Folgenden beschrieben.

6.2.1 Konsequenzen für den Mathematikunterricht

Grundsätzlich wurde in der vorliegenden Arbeit deutlich, mit welcher Komplexität Kinder bei der Bearbeitung von Subtraktionsproblemen Grundvorstellungen sowie darauf aufbauende Vorgehensweisen nutzen und dabei Grundvorstellungswechsel vollziehen. Dies zeigt, welche enorme Bedeutung der Thematisierung von Grundvorstellungen und Vorgehensweisen sowie damit verbunden Grundvorstellungswechseln im Mathematikunterricht der Grundschule zukommen sollte.

Darauf aufbauend lassen sich bezogen auf die mathematische Unterrichtspraxis folgende Konsequenzen konstatieren:

- Es konnte gezeigt werden, dass Kinder im ersten Schuljahr auch schon vor der unterrichtlichen Thematisierung der Subtraktion in vielfältiger Weise (Grund-) Vorstellungen und Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen nutzen. Diese Vielfalt im Mathematikunterricht aufzugreifen und produktiv für die Gestaltung des Unterrichts zu nutzen sollte grundlegend von Lehrpersonen berücksichtigt werden[122].
- In diesem Zusammenhang wurde in den Ergebnissen auch deutlich, dass die Kinder unterschiedliche additiv ergänzende Vorgehensweisen (bezogen auf die zweite Dimension zur Charakterisierung der Vorgehensweisen) zur Lösung von Subtraktionsproblemen nutzen. Um nicht nur – wie häufig in Schulbüchern vorgesehen – schrittweise additiv ergänzende

[122] In diesem Zusammenhang ist es sicherlich wünschenswert, wenn eine Auseinandersetzung mit der Vielfalt an Grundvorstellungen und Vorgehensweisen und deren Zusammenhänge auch in der Lehreraus- und Lehrerfortbildung Einzug halten würde.

Vorgehensweisen im Unterricht zu thematisieren, sollte diese Vielfalt im Unterricht aufgegriffen und thematisiert werden.

- Weiterhin konnte bezogen auf das Zusammenwirken von Vorgehensweisen über beide Grundvorstellungen hinweg gezeigt werden, dass die Kinder zum Teil bewusst zwischen der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung beziehungsweise Vorgehensweise (i.S. einer Problemdeutung) und der Vorgehensweise zur Lösung dieser Problemstellung differenzieren. Daher sollten Lehrkräfte sich zunächst selbst dieser Unterscheidung bewusst werden und darüber hinaus diese Unterscheidung (Problemdeutung vs. Problemlösung) im Unterricht explizit zum Gegenstand machen. Dadurch wäre es möglich Zusammenhänge zwischen den auf den Grundvorstellungen aufbauenden Vorgehensweisen mit dem Ziel eines verständigen Umgangs mit der Subtraktion zu thematisieren.
- Bezogen auf das Wechseln von der durch die Problemstellung angesprochenen Grundvorstellung in die jeweils andere Grundvorstellung wurde in der vorliegenden Arbeit herausgearbeitet, dass die Kinder im Lösungsprozess von Subtraktionsproblemen sowohl explizite als auch implizite Grundvorstellungswechsel vollziehen. Für den Mathematikunterricht kann darauf aufbauend gefolgert werden, dass Lehrkräfte sensibel auf derartige Grundvorstellungswechsel achten sollten, um diese gezielt im Unterricht aufgreifen und fördern zu können. So wäre es unter Umständen möglich implizit ablaufende Grundvorstellungswechsel bewusst zu machen und so die unter Forschungsfrage 6 beschriebene Entwicklung (bezogen auf ‚Abzieh-Probleme') zu initiieren.
- Bezüglich der Einführung in die Grundvorstellungen und Vorgehensweisen sowie deren Vernetzung lässt sich für die Unterrichtspraxis aufgrund der Ergebnisse folgern, dass Lehrkräfte sorgsam unterschiedliche subtraktive Problemstellungen einsetzen sollten. So konnte beispielsweise in den Ergebnissen gezeigt werden, dass bei der statischen Problemstellung ‚Vergleichen: Unterschied gesucht' ab dem ersten Interviewzeitpunkt explizite Grundvorstellungswechsel vollzogen wurden (vgl. Kapitel 6.2.2).

  Diesbezüglich sollte die mathematikdidaktische Entwicklungsforschung weitere Lernumgebungen entwickeln (vgl. Kapitel 6.2.2).

6.2.2 Konsequenzen für die mathematikdidaktische Forschung

Für die mathematikdidaktische Forschung lassen sich auf zwei Ebenen Konsequenzen konstatieren:

- Vertiefung und Übertragbarkeit der Untersuchungsergebnisse sowie

- Berücksichtigung der Untersuchungsergebnisse für die Entwicklungsforschung.

Vertiefung und Übertragbarkeit der Untersuchungsergebnisse

Zunächst lässt sich festhalten, dass die in der vorliegenden Arbeit herausgearbeiteten Ergebnisse, im Sinne einer hypothesengenerierenden Ausrichtung des empirischen Teils der vorliegenden Arbeit (vgl. Kapitel 4.1), als Ausgangspunkt weiterer Studien weiter vertieft werden sollten. So gilt es vor allem das zunächst theoretisch hergeleitete (vgl. Kapitel 4.4.1.1) und auf den empirischen Ergebnissen überarbeitete (vgl. Kapitel 6.1.1) Kategoriensystem zur Analyse von Grundvorstellungen und Vorgehensweisen der Subtraktion (vgl. Abb. 6-1) in weiteren Studien zu erproben. Auch die unter Forschungsschwerpunkt 2 beschriebenen Ergebnisse bezüglich der expliziten und impliziten Grundvorstellungswechsel und deren Entwicklungen sollten in weiteren Studien ausgeschärft werden.

Weiterhin stellen sich aufbauend auf den Ergebnissen die Fragen, ob der operationale und relationale Gebrauch der Grundvorstellungen auch bei den übrigen Grundrechenarten nachzuweisen ist und inwiefern die Forschungsergebnisse der vorliegenden Arbeit auch in höheren Klassenstufen zu rekonstruieren sind.

Auch sollte die zweite Dimension zur Charakterisierung der subtraktiven Vorgehensweisen in Kombination mit der ersten Dimension in nachfolgenden Studien mehr Berücksichtigung finden, um so den Gebrauch von additiv und subtraktiv ergänzenden Vorgehensweisen hinsichtlich der zweiten Dimension weiter auszuschärfen.

Es sei auch darauf verwiesen, dass grundsätzlich Längsschnittstudien benötigt werden, um noch mehr über die Entwicklung der Grundvorstellungen und der darauf aufbauenden Vorgehensweisen im Allgemeinen sowie über die Entwicklung des Grundvorstellungswechsels von der durch die Problemstellung angesprochene Grundvorstellung im Speziellen zu erfahren. Dadurch könnten unter anderem die in der vorliegenden Arbeit idealisiert beschriebenen Entwicklungsverläufe (Forschungsfrage 6) weiter ausdifferenziert werden.

Berücksichtigung der Ergebnisse für die Entwicklungsforschung

Bezogen auf die thematische Ausrichtung der vorliegenden Arbeit geht es auf der Ebene der Entwicklungsforschung unter anderem darum, geeignete Lernumgebungen bezüglich der Einführung und der Vernetzung der beiden Grundvorstellungen und damit verbunden der Vorgehensweisen zu entwickeln und insbesondere in längsschnittlich angelegten Studien zu beforschen. In diesem Zusammenhang gilt es passende Subtraktionsprobleme und Kontexte systematisch zu erproben. So wären weitere Erkenntnisse bezüglich des Gebrauchs der Grundvorstellungen und darauf aufbauender Vorgehensweisen in Abhängigkeit von den verschiedenen Subtraktionsproblemen (vgl. Kapitel 2.2.1) wünschenswert. So gilt es sich durch weitere Forschungen beispielsweise folgenden Fragen zu nähern:

- Welche Problemstelllungen eignen sich für die systematische Einführung der Vorgehensweisen des Abziehens und additiven Ergänzens?
- Welche Problemstellungen eignen sich für die Vernetzung der beiden Vorgehensweisen?
- Wie können dabei Beziehungen zwischen den Vorgehensweisen im Sinne eines verständigen Lernens bewusst gemacht werden?

In den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit lassen sich bezogen auf diese Fragen erste Anknüpfungspunkte finden.

Zunächst einmal konnte gezeigt werden, dass, bezogen auf den operationalen Gebrauch der Grundvorstellungen, bei jedem Problemtyp im Verlauf des ersten Schuljahres beide Grundvorstellungen in Form der vier Vorgehensweisen (Abziehen, Start-Finden, additives Ergänzen, subtraktives Ergänzen) mindestens einmal genutzt wurden. Somit kann festgehalten werden, dass sich grundsätzlich keine Problemstellung einer Problemumdeutung zur Lösung dieser verschließt.

Des Weiteren konnte gezeigt werden, dass bei der Problemstellung ‚Vereinigen: Unterschied gesucht' ab dem ersten Interviewzeitpunkt explizite Grundvorstellungswechsel vollzogen wurden. Daher kann geschlussfolgert werden, dass sich diese statische Problemstellung im besonderen Maße für die Thematisierung von Zusammenhängen zwischen den Vorgehensweisen und damit verbunden den Grundvorstellungen eignet. Grundsätzlich scheinen sich dabei statische Problemstellungen gerade aufgrund ihres statischen Charakters und der damit einhergehenden Offenheit zur Problemlösung für die Thematisierung von Zusammenhängen zwischen den Vorgehensweisen zur Lösung dieser besonders zu eignen. In diesem Zusammenhang bietet es sich dabei sicherlich auch an die keiner der beiden Grundvorstellungen eindeutig zuordenbaren statische Problemstellung ‚Vereinigen' weiter zu beforschen.

Auch die zum Teil von den Kindern vorgenommene Unterscheidung von Problemdeutung und Problemlösung im Lösungsprozess von Subtraktionsproblemen könnte ein Anknüpfungspunkt für die Thematisierung von Zusammenhängen zwischen den Grundvorstellungen und darauf aufbauenden Vorgehensweisen sein (vgl. Kapitel 6.2.1).

Schlussbemerkung

In der vorliegenden Arbeit wurde deutlich, welchen Mehrwert die Verknüpfung einer stoffdidaktischen Aufarbeitung auf der einen Seite und der empirischen Untersuchung des Forschungsgegenstandes auf der anderen Seite aufweist. So wurde durch die theoretische Analyse des Untersuchungsgegenstandes eine Brille erzeugt, welche es ermöglicht die Komplexität und Vielfalt der von den Kindern gezeigten (Grund-) Vorstellungen und Vorgehensweisen zu erfassen und zu kategorisieren. Gleichzeitig wurde durch das empirische Material diese Brille wiederum weiter geschärft.

Unter anderem konnte durch die Analysen aufgezeigt werden, welche enorme Bedeutung der Vernetzung von (Grund-) Vorstellungen und Vorgehensweisen zur Lösung von Subtraktionsproblemen zugeschrieben werden muss – denn, um es mit WITTMANN & MÜLLER zu sagen[123]:

„Lernen ist das Knüpfen eines Netzes.“

[123] Ausgeführt am 19.01.2012 im Rahmen des Vortrags „Multum non multa – Das Zahlenbuch 2012“ anlässlich des 762. mathematikdidaktischen Kolloquiums des IEEM an der TU Dortmund.

Literaturverzeichnis

AEBLI, H. (1963). *Psychologische Didaktik*. Stuttgart: Ernst Klett.

AEBLI, H. (1980). *Denken – das Ordnen des Tuns*. Stuttgart: Klett-Cotta.

ASHCRAFT, M. H. (1992). Cognitive arithmetic. A review of data and theory. *Cognition, 44*, 75 – 106.

ATTESLANDER, P. (2006). *Methoden der empirischen Sozialforschung*. 11. neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin: Schmidt.

BALINS, M.; DÜRR, R.; FRANZEN-STEPHAN, N.; GERSTNER, P.; PFEIFER P.; PLÖTZER, U.; RÜTZ, B.; STOTHMANN, A.; TORKE, M. & VERBOOM, L. (2009). *Fredo & Co. Mathematik 1*. 1. Auflage. München: Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH.

BAROODY, A. J. (1983). The development of procedural knowledge: an alternative explanation for chronometric trends of mental arithmetic. *Developmental Review, 3*, 225 – 230.

BAROODY, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking*. New York, London: Teachers College Press.

BAROODY, A. J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 17*, 137 – 175.

BAROODY, A. J. & GINSBURG, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75 – 112). Hillsdale: Erlbaum,.

BAROODY, A. J.; TORBEYNS, J. & VERSCHAFFEL, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles: Introduction. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 2 – 9.

BAUERSFELD, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann u.a., *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1 – 56). Köln: Aulis,.

BECK, CH. & MAIER, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 2*, 147 – 179.

BECK, CH. & MAIER, H. (1994). Mathematikdidaktik als Textwissenschaft. Zum Status von Texten als Grundlage empirischer mathematikdidaktischer Forschung. *Journal für Mathematikdidaktik, 1/2*, 35 – 78.

BEISHUIZEN, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24(4)*, 294 – 323.

BEISHUIZEN, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer & E. C. D. M. Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures*, (127 – 162). Utrecht: Beta,.

BEISHUIZEN, M.; VAN PUTTEN, C. M. & VAN MULKEN, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction, 7*, 87 – 106.

BENDER, P. (1991). Ausbilden von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Bei-spielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel, A. Kirsch, & W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48 – 60). Hannover: Schroedel.

BENZ, CH. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

BLÖTE, A. W., KLEIN, A. S. & BEISHUIZEN, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10*, 221 – 247.

BLÖTE, A. W.; VAN DER BURG, E. & KLEIN, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93*, 627 – 638.

BLUM, W. & VOM HOFE, R. (2003). Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe? *mathematik lehren, 118*, 14 – 18.

BLUM, W.; VOM HOFE, R.; JORDAN, A.; KLEINE, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland* (S. 145 – 158) Wiesbaden: VS-Verlag.

BLUM, W.; VOM HOFE, R.; JORDAN, A.; KLEINE, M. & PEKRUN, R. (2005). Grundvorstellungen als empirische Kategorie für quantitative Studien. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 103 – 106). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

BORROMEO FERRI, R. (2007). Von individuellen Modellierungsverläufen zur empirischen Unterscheidung von Phasen im Modellierungsprozess. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 308 – 311). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

BORROMEO FERRI, R.; LEISS, D. & BLUM, W. (2006). Der Modellierungskreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 53 – 55). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

BORTZ, J. & DÖRING, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. 4., überarbeitete Auflage. Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

BÖNIG, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Verständnis multiplikativer Operationen bei Grundschülern*. Münster: Waxmann.

BREIDENBACH, W. (1969). *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen, Band 1 – Rechnen*. Hannover: Schroedel.

BRIARS, D. J. & LARKIN, J. H. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245 – 296.

BRISSIAUD, R. (1994). Teachings and development: Solving „missing addend" problems using subtraction. *European Journal of Psychology of Education, 9*, 343 – 365.

BRUNER, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin-Verlag. Originalausgabe 1966.

BRYANT, P; CHRISTIE, C. & RENDU, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*, 194 – 212.

CAMPBELL, J. I. D. (2005). *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press.

CAMPBELL, J. I. (2008). Subtraction by Addition. *Memory & Cognition, 36(6)*, 1094 – 1102.

CAMPBELL, J. I. & XUE, Q. (2001). Cognitive arithmetic across cultures. *Journal of Experimental Psychology. General, 130*, 290 – 315.

CARPENTER, T. P. & MOSER, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.): Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 9 – 24). New Jersey: Erlbaum.

CARPENTER, T. P. & MOSER, J. M. (1984). The Acquisation of Addition and Subtraction Concepts in Grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 3*, 179 – 202.

CARPENTER, T. P. & MOSER J. M. (1983). The acquisation of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisation of Mathematics: Concepts and Processes* (pp. 7 – 44). New York: Academic Press.

DANCKWERTS, R. & VOGEL, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum.

DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1981). Children's solution process in elementary arithmetic problems: Analysis and improvement. *Journal of educational Psychology, 73*, 765 – 779.

DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18(5)*, 363 – 381.

DE SMEDT, B.; TORBEYNS, J.; STASSENS, N.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction, 20*, 205 – 215.

DIEKMANN, A. (2005). *Empirische Sozialforschung. Grundlagen, Methoden, Anwendungen*. 14. Auflage. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

DÖRFLER, W. (1988). Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktionen. In W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Arbeiten aus dem Projekt „Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht"* (S. 55 – 126). Wien, Stuttgart: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Verlag B.G. Teubner.

DUVAL, R.. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), 1* (pp. 55 – 69). Hiroshima, Japan: Hiroshima University.

DUVAL, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,. 61(1-2)*, 103 – 131.

EDELMANN, W. (2000). *Lernpsychologie*. Weinheim: Beltz PVU.

FLICK, U. (1995). Stationen des qualitativen Forschungsprozesses. In U. Flick, E. von Kardoff, H. Keupp, L. von Rosenstiel & S. Wolff (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Sozialforschung. Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen* (S. 147 – 173). 2. Auflage. Weinheim: Psychologie Verlags Union.

FLICK, U. (2002). *Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung*. 6. Auflage. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publsihing Company.

FROMME, M.; WARTHA, S. & BENZ, Ch. (2011). Grundvorstellungen zur Subtraktion. *Grundschulmagazin, 4*, 35 – 40.

FUSON, K. C. (1982). An Analysis of the Counting-On Solution Procedure in Addition. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive Perspektive* (pp. 67 – 81). Hildsdale: Erlbaum.

FUSON, K. C. (1986). Teaching children to subtract by counting on. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 172 – 189.

FUSON, K. C. (1992a). Reseach on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 53 – 187). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

FUSON, K. C. (1992b). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of reseacrh on mathematics teaching and learning* (pp. 243 – 275). New York: Macmillan.

FUSON, K. C.; WEARNE, D.; HIEBERT, J. C.; MURRAY, H. G., HUMAN, P. G.; OLIVIER, A. I. ET AL. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition ans subtraction. *Journal for Reseach in Matematics Eduation, 28(2)*, 130 – 162.

FUSON, K. C. & WILLIS, G. B. (1986). First and second graders' performance on compare and equalize problems. In *Proceedings of the Tenth International Conference on the Psychology of Mathematics* (pp. 19 – 24). London: University of London, Institute of Education.

FUSON, K. C. & WILLIS, G. B. (1988). Subtracting by counting up: More evidence. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, 402 – 420.

GAIDOSCHIK, M. (2010). *Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres*. Dissertation. Wien.

GEARY, D. C.; FRENSCH, P. A. & WILEY, J. G. (1993). Simple and complex mental subtraction. Strategy choice and speed-of-processing differences in younger and older adults. *Psychology and Aging, 8*, 424 – 256.

GERSTER, H.-D. (1994). Arithmetik im Anfangsunterricht. In A. Abele & H. Kalmbach (Hrsg.), *Handbuch zur Grundschulmathematik, 1. und 2. Schuljahr* (S. 35 – 102). Stuttgart: Klett.

GERSTER, H.-D.; SCHULTZ, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Freiburg im Breisgau: Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.

GILLMORE, C. K. & PAPADATOU-PASTOU, M. (2009). Patterns of individual differneces in conceptual understanding and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology, 11*, 25 – 40.

GINSBURG, H. P. (1982). The Development of Addition in Contexts of Culture, Social Class, and Race. In: T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.): *Adition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 191 – 210). Hillsdale: Erlbaum.

GINSBURG, H. P. & OPPER, S. (*2004). Piagets Theorie der geistigen Entwicklung*. Stuttgart: Klett-Cotta.

GLASER, B. G. & STRAUSS, A. L. (1998). *Grounded theory. Strategien qualitativer Forschung*.1. Auflage. Bern: Huber.

GRAVEMEIJER, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal

mathematic. *Mathematical Thinking & Learning, Vol. 1(2)*, 155 – 177.
GRAY, E. M. (1991). An analysis of divergent approachrs to simple arithmetic: preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 551 – 574.
GRAY, E. M. & TALL, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A „proceptual“ view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 116 – 140.
GREER, B. (2012). Inversion in mathmatical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 429 – 438.
GRIESEL, H. (1970). Die sogenannte Moderne Mathematik an Grund- und Hauptschule als Weiterentwicklung der traditionellen Rechendidaktik (und nicht als Irrweg). In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1971* (S. 132 – 138). Hannover: Schroedel.
GRIESEL, H. (1974). Überlegungen zur Didaktik der Mathematik. *ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 6*, 115 – 119.
GROEN, G. J. & PARKMANN, J. M. (1972). A chronomentric analysis of simple addition. *Psychology Review*, *79*, 329 – 343.
GROEN. G. J. & POLL. M. (1973.: Subtraction and the solution of open sentence problems. *Journal of Experimental Child Psychology, 16*, 292 – 302.
GRUBE, D. (2006). *Die Entwicklung des Rechnens im Grundschulalter. Basaler Fertigkeiten, Wissensabruf und Arbeitsgedächtniseinflüsse*. Münster, u.a.: Waxmann:.
HASEMANN, K. (2007). *Anfangsunterricht Mathematik*. München: Elsevier.
HÄSEL-WEIDE, U. & NÜHRENBÖRGER, M. (2012). Fördern im Mathematikunterricht. In: H. Barnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.*), Individuell fördern – Kompetenzen stärken in der Eingangsstufe (Kl. 1 und 2). Beiträge zur Reform der Grundschule. Band 134*. Frankfurt am Main: Grundschulverband.
HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1999). Struktur und Genese mathematischen Wissens als Leitlinie für den Unterricht. In Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.), *Didaktikheft Nr. 31* (S. 5 – 27). Graz..
HEIDEGGER, M. (1962). *Die Frage nach dem Ding*. Tübingen: Grin.
HEINZE, A.; MARSCHICK, F. & LIPOWSKY, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education, 41*, 591 – 604.
HEINZEL, F. (1997). Qualitative Interviews mit Kindern. In B. Friebertshäuser & A. Prenger (Hrsg.), *Handbuch qualitativer Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft* (S. 396 – 413). Weinheim, München: Juventa.
HEIRDSFIELD, A. (1999). Mental addition and subtraction strategies: two case studies. In J. Truran & K. Truran (Eds.), *Making the Difference. Proceedings of the 22nd Annual Conference of the Mathematics Eductaion Research Group of Australaisia* (pp. 253 – 260). Adelaide: Inc. MERGA (22).
HUINKER, D. M. (1993). *Interviews: a window to students' conceptual knowledge oft the operations*. In N. L. Webb & A. F. Coxford (Eds.), *Assesment in the Mathematics Classroom* (pp. 80 – 86). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
HUHMANN, T. (2013). *Einfluss von Computeranimationen auf die Raumvorstellungsentwicklung*. Wiesbaden: Springer.
HUNTING, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practise. *The Journal of Mathematics Behaviour, 16(2)*, 145 – 165.
JENSEN, G. R. (2003). *Arithmetic for teachers. With applications and topics from geometry*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society (AMS).

JOHNSON-LAIRD, P. N. (1983). *Mental models*. Harvard: Harvard University Press.

JORDAN, A. (2006). *Mathematische Bildung von Schülern am Ende der Sekundarstufe I – Analysen und empirische Untersuchungen*. Hildesheim: Franzbecker.

JUNGWIRTH, H. (2003). Interpretative Forschung in der Mathematikidaktik – ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 35(5)*, 189 – 200.

KAUFMANN, S. & WESSOLOWSKI, S. (2006). *Rechenstörungen*. Seelze: Kallmeyer.

KELLE, U. (1994). *Empirisch begründete Theoriebildung. Zur Logik und Methodologie interpretativer Sozialforschung*. Weinheim: Deutscher Studienverlag.

KLEIN, A. (1998): *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base: The emptly number line in a realistic versus Gradual program design*. Utrecht: CD Beta Press.

KLEINE, M. (2007). Analysen von Grundvorstellungen – Möglichkeiten und Grenzen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 183 – 186). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

KLEIN, A.; BEISHUIZEN. M & TREFFERS, A. (1998). The empty number line in dutch second grades under two conditions: A ‚realistic' versus ‚gradual' program design. *Journal for Research in Mathematics Education, 4*, 443 – 464.

KLEINE, M. & FISCHER, E. (2005). Welche Aufgaben passen zu dem Term? Möglichkeiten für den Einsatz von Rechengeschichten am Beispiel der Subtraktion und Division von Brüchen. *mathematica didacta, 28(2)*, 88 – 103.

KRAIG, K. (1967). *The nature of explenation*. Cambridge: Cambridge University Press.

KRAUTHAUSEN, G. & SCHERER, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag.

KUHNKE, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel. Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

LADEL, S. (2009). *Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz*. Hamburg: Kovac.

LAKOFF, G. & NUNEZ, R. E. (2000). *Where mathematics comes from. The embodied mind brings mathematics into being*. New York, New York: Basic Books.

LAMNEK, S. (2005). *Qualitative Sozialforschung. Lehrbuch*. 4., vollständig überarbeitete Auflage. Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

LFEVRE, J.-A.; DESTEFANO, D.; PENNER-WILGER, M & DALEY, K. E. (2006). Selection of prodcedures in mental subtraction. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 60*, 209 – 220.

LEISS, D. & BLUM, W. (2007). Modellierungskompetenz – Vermitteln, Messen & Erklären. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 312 – 315). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

LEMAIRE, P. & LECACHEUR, M. (2010). Strategy switch cost in arithmetic problem solving. *Memory & Cognition, 38*, 322 – 332.

LORENZ, J. H. (2007). Die Repräsentationen von Zahlen und Rechenoperationen im kindlichen Kopf. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 13 – 22). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

LORENZ, J. H. (2011). Die Macht der Materialien (?). Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentationen. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Medien und Materialien - Tagungsband* *des AK Grundschule in der GDM 2011* (S. 39 – 54). Bamberg: University of Bamberg Press.

LUWEL, K.; ONGHNA, P.; TORBEYNS, J.; SCHILLEMANS, V. & VERSCHAFFEL, L. (2009). Stregnths and weakness of the choice/no-choise method in research on strategy use. *European Psychologist, 14(4)*,. 341 – 362.

MALLE, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren, 123*, 4 – 8.

MARTSCHINKE, S. (2001). *Aufbau mentaler Modelle durch bildliche Darstellungen. Eine experimentelle Studie über die Bedeutung der Merkmalsdimension Elaboriertheit und Strukturiertheit im Sachunterricht der Grundschule.* Münster: Waxmann Verlag.

MARX, A. (2011). Angehende Lehrpersonen in mathematikdidaktischen Diagnosesituationen – Vorgehensweisen und Ziele. In K. Eilerts, A.-H. Hilligus, G. Kaiser & P. Bender (Hrsg.), *Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung. Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens* (S. 323 – 338). Münster: Lit Verlag.

MARX, A. & WESSEL, J. (2010). Die Entwicklung des Operationsverständnisses bei der Subtraktion. *Grundschule Mathematik, 25*, 40 – 43.

MAYRING, PH. (1995). Qualitative Inhaltsanalyse. In U. Flick, E. von Kardoff, H. Keupp, L. von Rosenstiel & S. Wolff (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Sozialforschung. Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen* (S. 209 – 213). 2. Auflage. Weinheim: Psychologie Verlags Union.

MAYRING, PH. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* 10. Auflage. Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

MOSER, H. (2001). Einführung in die Praxisforschung. In T. Hug. (Hrsg.), *Einführung in die Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsforschung* (S. 314 – 325). Baltmannsweiler: Schneider Verlag.

MOSER, K. S. (2003). Mentale Modelle und ihre Bedeutung: kognitionspsychologische Grundlagen des (Miss)Verstehens. In U. Ganz-Blättler, P. Michel (Hrsg.), *Sinnbildlich schief: Missgriffe bei Symbolgenese und Symbolgebrauch* (S. 191 – 205). Bern: Peter Lang.

MOSER OPITZ, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.

NESHER, P. & TEUBAL, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 41 – 51.

OEHL, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Hannover: Schroedel.

OEHL, W. (1970). *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*. Hannover: Schroedel.

PADBERG, F. (1996). *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum.

PADBERG, F. (2005). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. 3. Erweiterte, völlig überarbeitete Auflage. München: Elsevier.

PELTENBURG, M.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. & ROBITZSCH, A. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving problems up to 100 – A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Education Studies in Mathematics, 79*, 351 – 369.

PETERS, G.; DE SMEDT, B.; TORBEYNS, J.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL, L. (2010a). Adults' use of subtraction by addition in the number domain till 20. *Acta Psychologica, 133*, 163 – 169.

PETERS, G; DE SMEDT, B.; TORBEYNS, J.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL, L. (2010b). Adults' use of subtraction by addition. *Acta Psychologica, 135*, 323 – 329.

PETERS, G; DE SMEDT, B.; TORBEYNS, J.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL, L. (2012). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics, 79*. 335 – 349.

POLLACK, H. O. (1979). The interaction betwenn mathematics and other school subjects. In UNESCO (Eds.), *New trends in mathematics teaching IV* (pp. 232 – 248). Paris: Unesco.

PREDIGER, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learing and Instruction, Vol. 18(1)*, 3 – 17.

PREDIGER, S. (2010). „Aber wie sag ich es mathematisch?" – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In D. Höttecke (Hrsg.), *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik in Dresden 2009* (S. 6 – 20). Berlin: LIT-Verlag.

PUTNAM, R. T.; DEBETTENCOURT, L. U, & LEINHARDT, G. (1990). Understanding of derived-fact strategies in addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 7*, 245 – 285.

RADATZ, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Journal für Mathematikdidaktik, 4(3)*, 205 – 217.

RADATZ, H. (1989). Schülervorstellungen von Zahlen und elementaren Rechenoperationen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1989* (S. 306 – 309). Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker.

RADATZ, H.; SCHIPPER, W.; EBELING, A. & DRÖGE, R. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

RESNICK, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109 – 151). New York: Academic Press.

RILEY, M. S. & GREENO, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction, 5(1)*, 49 – 101.

RILEY, M. S.; GREENO, J. G. & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. Ginsbrug, Herbert (Eds.), *The development of mathmatical thinking* (pp. 153 – 196). New York: Academix Press.

RINKENS, H.-D.; HÖNISCH, K. & TRÄGER, G. (Hrsg.) (2009). *Welt der Zahl 1. Mathematische Unterrichtswerk für die Grundschule*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

ROBINSON, K. M. (2001). The validity of verbal reports in children's subtractions. *Journal of Educational Psychology, 73*, 211 – 222.

ROGERS, C. R. (1945). The non-directive method as a technique for social research. *American Journal of Sociology, 50(4)*, 279 – 283.

ROYAR, T. (2013). *Handlung – Vorstellung – Formalisierung. Entwicklung und Evaluation einer Aufgabenreihe zur Überprüfung des Operationsverständnisses für Regel- und Förderklassen*. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

SCHÄFER, J. (2005*). Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lern-*

stand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen. Eine empirische Studie. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

SCHMIDT, S. & WEISER, W. (1993). Semantische Strukturen von einfachen Textaufgaben zu den Grundrechenarten. In H. R. Becher & J. Bennack (Hrsg.), *Taschenbuch Grundschule* (S. 281 – 295). Baltmannsweiler: Schneider-Verlag Hohengehren.

SCHIPPER, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

SCHNEIDER, M. (2012). Commentary 2: knowledge integration in mathematics: the case of inversion. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 447 – 453.

SCHNOTZ, W. (1994). *Aufbau von Wissensstrukturen. Untersuchungen zur Kohärenzbildung beim Wissenserwerb mit Texten*. Weinheim: Beltz, Psychologie-Verlags-Union.

SCHUPP, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe zwischen Theorie und neuen Impulsen. *Mathematikunterricht, 34*, 5 – 16.

SCHÜTTE, S. (Hrsg.) (2004). *Die Matheprofis 1*. München, Düsseldorf, Stuttgart: Oldenbourg Schulbuchverlag.

SCHWÄTZER, U. (2014). *Zur Komplementbildung bei der halbschriftlichen Subtraktion. Analyse der Ergebnisse einer Unterrichtsreihe im dritten Schuljahr*. Dissertation zur Erlangung des Grades Doktor der Pädagogik (Dr. paed.) der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Dortmund.

SEIPEL, CH. & RIEKER, P. (2003). *Integrative Sozialforschung. Konzepte und Methoden der qualitativen und quantitativen empirischen Forschung*. Weinheim, München: Juventa Verlag.

SELTER, CH. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods, and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 145 – 173.

SELTER, CH.; PREDIGER, S.; NÜHRENBÖRGER, M. & HUSSMANN, S. (2012). Taking away and determining the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 389 – 408.

SELTER, CH. & SPIEGEL, H. (1997). Durchführung von Erkundungsprojekten. In Ch. Selter & H. Spiegel, *Wie Kinder rechnen* (S. 100 – 112). Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag.

SIEGLER, R. S. & JENKINS, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

SIEGLER, R. S. & LEMAIRE, P. (1997). Older and younger adults' stratgey choices in multiplication: testing predictions of ASCM using the choie/no-choice method. *Journal of Esperimental Psychology: General, 126*, 72 – 92.

SIEGLER, R. S. & STERN, E. (1998). *Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis*. *Journal of Experimental Psychology: General, 127*, 377 – 397.

STEFFE, L.; VON GLASERFELD, E. RICHARDS, J & COBB, P. (1983). *Children's counting types. Phylosophy, theory and application*. New York: Praeger Publishers.

STEINBRING, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1(2)*, 157 – 189.

STEINKE, I. (2008). Gütekriterien qualitativer Forschung. In U. Flick, E. von Kardoff & I. Steinke (Hrsg.), *Qualitative Forschung. Ein Handbuch*. 6. Durchgesehene und aktualisierte Auflage. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuchverlag.

STÖLTING, P. (2008). *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I . Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*. Dissertation. Universität Regensburg.

SYLER, D. J.; KIRK, E. P. & ASHCRAFT, M. H. (2003). Elementary subtraction. *Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory, and cognition, 29*, 1339 – 1352.

THOM, S. (2010). *Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

THOMPSON, C. S. & HENDRICKSON, D. S. (1986). Verbal addition and subtraction problems: Some difficulties and some solutions. *The Arithmetic Teacher, 33(7)*, 21 – 25.

THORNTON, C. (1990). Solution strategies: Subtraction number facts. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 241 – 263.

THRELLFAL, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29 – 47.

TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL (2009a). Acquisation and use of shortcut strategies by traditionally schooled schildren. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 1 – 17.

TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL (2009b). Solving subtractions adaptivly by means of indirect adition: influence of task, subject and instructional factors. In *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*, 1 – 30.

TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B.; PETERS, G.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL, L. (2010). Indirect Adition: Theoretical, Methodological and Educational Considerations. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik. Gemeinsame Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 08.03. bis 12.03.2010 in München* (S. 31 – 38).

TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B.; STASSENS, N.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL, L. (2009c). Solving subtraction problems by means of indirect addition. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 79 – 91.

TORBEYNS, J.; GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL , L (2009d). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction, 19*, 1 – 12.

TREFFERS, A. (2001). *Numbers and number relationships*. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 101 – 120). Utrecht: Freudenthal Institute.

USISKIN, Z. (2008). 'The arithmetic curriculum and the real world'. In D. De Bock, B. Dahl Søndergaar, B. Gómez Alfonso & C. C. Litwin Cheng (Eds.), *Proceedings of ICME-11-Topic Study Group 10: Research and Development in the Teaching and Learning of Number Systems and Arithmetic. 11th International Congess on athematical Education. July 6-13, 2008* (pp. 1 – 16). Monterrey, Mexico,.

USISKIN, Z. & BELL, M. (1983). *Applying arithmetic: A handbook of applications of arithmetic*. Chicago: University of Chicago.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (Ed.) (2001). *Children learn mathematics*. Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25(2)*, 2 – 23.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. & TREFFERS, A. (2009). Math-didactical reflections on young children's understanding and application of subtracted-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 102 – 112.

VAN GALEN, F.; FREJIS, E.; FIGUEIREDO, N.; GRAVEMEIJER, K.; VAN HARPEN, E. & KEIJZER, R. (2008). *Fractions, percenteges, decimals and proportions. A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense Publishers.

VAN LIESHOUT, E. C. D. M. (1997). What can research on word and context problems tell us about effective strategies to solve subtraction problems? In M. Beishuizen, K. Gravemeijer & E. C. D. M. Van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 79 – 111). Utrecht: CD-Beta Press.

VERBOOM, L. (2010a). Bei der Erarbeitung der Subtraktion Sorgfalt walten lassen. *Grundschule Mathematik, 25*, 4 – 5.

VERBOOM, L. (2010b). „Ich habe drei Plättchen mehr als du". *Grundschule Mathematik, 25*, 6 – 7.

VERSCHAFFEL, L.; GREER, B. & DE CORTE, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester, *Second handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 557 – 628). New York: Macmillan.

VERSCHAFFEL, L. (Ed.) (2012). *Special Issue: The inverse principle: Psychological, mathematical, and educational considerations*. Educational Studies in Mathematics.

VERSCHAFFEL, L.; BRYANT, P. & TORBEYNS, J. (2012). Introduction. *Educational Studies in Mathematics. 79*, 327 – 334.

VOIGT, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163 – 201). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

VOM HOFE, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum.

VOM HOFE, R. (1996). Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. *mathematik lehren, 78*, 4 – 8.

VOM HOFE, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren, 118*, 4 – 8.

WARTHA, S. (2005). Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsumbrüche. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 593 – 596). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

WARTHA, S. (2007a). Kompetenzen im Bruchrechnen – die Rolle von Grundvorstellungen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 187 – 190). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

WARTHA, S. (2007b). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

WARTHA, S. (2010). Aufbau von Grundvorstellungen: Ein Förderkonzept. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 911 – 914). Münster: WTM-Verlag.

WARTHA, S. (2011). Handeln und Verstehen. Förderbaustein: Grundvorstellungen aufbauen. *mathematik lehren, 166*, 8 – 14.

WARTHA, S. & SCHULZ, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. Publikation des Programms SINUS an Grundschulen. Programmträger: Leibnitz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) an der Universität Kiel.

WITTMANN, E. CH. (1982). *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern. Eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente*. Braunschweig: Vieweg.

WITTMANN, W. CH. (1995). Mathematics education as a ‘design science‘. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 29(4)*, 355 – 374.

WITTMAN, W. CH. (1997). Zur schriftlichen Subtraktion. *Sache-Wort-Zahl, 10*, 44 – 46.

WITTMANN, W. CH. (2002). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6., neu bearbeitete Auflage. Braunschweig: Vieweg.

WITTMANN, E. CH. & MÜLLER, G. N. (2004). *Das Zahlenbuch 1*. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

WITTMANN, E. CH. (2010). Begründung des Ergänzungsverfahrens der schriftlichen Subtraktion aus der Funktionsweise von Zählern. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbeke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 34 – 41). Seelze: Kallmeyer.

WITTMAN, E. CH. & MÜLER, G. N. (2012a). *Das Zahlenbuch 1*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

WITTMAN, E. CH. & MÜLER, G. N. (2012b). *Das Zahlenbuch 1. Begleitband*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

WITTMANN, E. CH. & MÜLLER, G: N. (2012c). *Das Zahlenbuch 2*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

WOLLRING, B. (1999). Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In Ch. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann* (S. 270 – 276). Leipzig: Klett.

WOODS, S. S., RESNICK, L. B. & GROEN, G. J. (1975). An experimental test of five process models for subtraction. *Journal of Educational Psychology, 7 (1)*, 17 – 21.

YACKEL, E., & COBB, P. (1996*).* Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458 – 477.

Anhang

Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
A	Amian
Bspw.	Beispielsweise
Bzw.	Beziehungsweise
Dd	Determining the difference
D.h.	Das heißt
DS	Direct subtraction
Et al.	Et alii
FF	Forschungsfrage
Ggf.	Gegebenenfalls
GVV	Grundvorstellungen und Grundverständnisse
I	Interviewer
IEEM	Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematik-unterrichts
I.S.	Im Sinne
IA	Indirect addition
IS	Indirect subtraction
Jo	Jonathan
L	Laura
Nik	Nikolas
Nil	Nils
Ö	Önal
T	Toni
Tab.	Tabelle
U.a.	Unter anderem
Vgl.	Vergleiche
Vs.	Versus
Z.B.	Zum Beispiel

Transkriptionsregeln

. Punkt	Senken der Stimme am Ende einer Äußerung
, Komma	Kurzes Absetzen der Stimme innerhalb einer Äußerung
? Fragezeichen	Heben der Stimme am Ende einer Äußerung
(.)	Pause von unter einer Sekunde
(3)	3 Sekunden Pause
kursiv	Handlungen