)

# Beiträge zum Mathematikunterricht 2015

**VORTRÄGE AUF DER 49. TAGUNG FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK VOM 09.02.2015 BIS 13.02.2015 IN BASEL**

Für die GDM herausgegeben von:


**Franco Caluori**
**Helmut Linneweber-Lammerskitten**
**Christine Streit**


**BAND 2**


**WTM**
**Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien**
**Münster**

**Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek**
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über
***http://dnb.ddb.de***
abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/


ISBN 978-3-942197-92-2

Franco CALUORI, Helmut LINNEWBER-LAMMERSKITTEN,
Christine STREIT, Basel

## Vorwort zum Tagungsband „Beiträge zum Mathematikunterricht 2015“

Die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik fand im Jahr 2015 zum dritten Mal in der Schweiz statt, 1993 trafen sich die Mathematikdidaktiker/innen in Freiburg / Fribourg und 1999 in Bern. Seither hat sich die Zahl der Mitglieder der GDM vervielfacht und mit der Gründung der GDM Schweiz am 14.06.2014 existiert zudem inzwischen ein eigener Landesverband mit bereits über 120 Mitgliedern. Entsprechend gut besucht war die 49. Jahrestagung der GDM im Februar 2015: Über 700 Personen folgten der Einladung nach Basel. Mit rund 300 Vorträgen, 16 moderierten Sektionen, 15 Arbeitskreistreffen und 21 Posterpräsentationen eröffnete sich ein breites Spektrum an Themen und unterschiedlichen Zugangsweisen zur Erforschung von Fragen rund um das Lernen und Lehren von Mathematik.

Höhepunkte des wissenschaftlichen Programms der Tagung waren die fünf Hauptvorträge. Im Eröffnungsvortrag stellte Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker (Duisburg-Essen) die Frage nach der Rolle der Mathematik in der Mathematikdidaktik. Das Thema des zweiten Hauptvortrags von Prof. Dr. Anna Sfard (Haifa) lautete *Metaphors in mathematical thinking and in research on mathematical thinking: a prop or a trap?* Die prämierte Nachwuchswissenschaftlerin Prof. Dr. Kathleen Philipp (Zürich) stellte das *Experimentieren* als mathematische Tätigkeit vor. Prof. Dr. Fritz Staub (Zürich) referierte zum Thema *Fachspezifisches Unterrichtscoaching in der Aus- und Weiterbildung* und der Vortrag von Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (Zürich) über *Skalierbare Themen im Mathematikunterricht* stellte den Abschluss der Tagung dar.

Ein Tag der Nachwuchsförderung (*Predoc-Tag*) wurde in diesem Jahr zum zweiten Mal angeboten. Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler konnten in einem 15-minütigen Vortrag ihr Dissertationsprojekt vorstellen. An die Präsentation schloss sich jeweils eine 20-minütige Diskussion an, die von zwei erfahrenen Chairs moderiert wurde. Herzlichen Dank diesen Kolleginnen und Kollegen für ihre Unterstützung. Die Nachwuchsvertretung der GDM hat erneut mit großem Engagement ein vielfältiges und interessantes Programm für den wissenschaftlichen Nachwuchs organisiert. Hierfür danken wir den Vertreterinnen und Vertretern der GDM-Nachwuchsgruppe. Auch auf der 49. Jahrestagung der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik in Basel gab es einen Posterwett-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

bewerb. Der Dank geht an den Waxmann-Verlag, der den Posterpreis gestiftet hat.

Der traditionelle Tag für Lehrerinnen und Lehrer, der die Schnittstelle zur Praxis markiert, fand in diesem Jahr ausnahmsweise am Mittwoch statt. Über 150 Kollegen und Kolleginnen konnten wir beim Impulsvortrag Prof. Markus Cslovjecsek (PH FHNW) zum Thema *Mathe macht Musik – Einblick in ein interdisziplinäres EU-Entwicklungsprojekt* begrüßen. 24 Workshops waren ebenso wie die Ausstellung des Thuner Künstlers Eugen Jost *Alles ist Zahl – und die Mathematik ist noch viel mehr* gut besucht.

Das umfangreiche Rahmenprogramm bot viele Möglichkeiten, die „kleine Weltstadt Basel" mit ihren historischen und kulturellen Highlights näher kennenzulernen und die Kontakte im informellen Miteinander zu vertiefen.

Die 49. Tagung der GDM wurde von den drei Mathematikdidaktikprofessuren der Pädagogischen Hochschule FHNW ausgerichtet und fand in den Räumen der Universität Basel statt. Zur Vorbereitung der Tagung wurde ein wissenschaftliches Organisationskomitee gebildet, welchem außer den Leitenden der Professuren Dr. Torsten Linnemann und Dr. Christof Weber (beide PH FHNW) angehörten.

Wir bedanken uns bei allen, die zum Gelingen dieser Tagung beigetragen haben: beim Schweizerischen Nationalfonds und der Aebli-Näf-Stiftung für die finanzielle Unterstützung, bei der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, die uns die Ausrichtung der Tagung übertragen hat, dem Landesverband der GDM Schweiz für ihre Unterstützung bzgl. des Tags für Lehrerinnen und Lehrer, den Organisatoren der letztjährigen Tagung in Koblenz für viele wertvolle Hinweise, der Universität Basel für die Bereitstellung der Räume sowie dem (ehemaligen) Direktor der Pädagogischen Hochschule der Pädagogischen Hochschule, Prof. Dr. Hermann Forneck, für die Unterstützung auch gegen viele Widerstände. Besonderer Dank gilt der Firma Heimvorteil aus Freiburg für die Organisation der Tagung. Bei allen Teilnehmenden möchten wir uns ganz herzlich für ihr Kommen, ihr Mitwirken und den wissenschaftlichen Austausch bedanken.

Mit den Beiträgen in diesem Tagungsband hoffen wir, Ihnen interessante Einblicke in aktuelle Forschungsaktivitäten in der Mathematikdidaktik zu bieten.

Im Namen des Organisationsteams der Fachgruppe Mathematik der Pädagogischen Hochschule Nordwestschweiz

**Franco Caluori, Helmut Linneweber-Lammerskitten, Christine Streit**
*Basel im August 2015*

# Inhaltsverzeichnis

## Band 2 — Seite 588 bis Seite 1174

## 6 Beiträge zu den Posterpräsentationen.............................................. 1129

# Zweiter Teil der Beiträge
# zu den
# Einzel- und Sektionsvorträgen

Torsten LINNEMANN, Basel; Hans-Stefan SILLER, Koblenz; Regina BRUDER, Darmstadt; Tina HASCHER, Bern; Eva SATTLBERGER, Wien; Jan STEINFELD, Wien

## Kompetenzstufenmodellierung am Ende der Sekundarstufe II

Im Rahmen eines vom Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des Österreichischen Schulwesens (bifie) in Auftrag gegebenen Projekts wurde ein Kompetenzstufenmodell (vgl. Tabelle 1) entwickelt, das eine Einordnung und Vergleichbarkeit von Prüfungsaufgaben am Ende der Sekundarstufe II im Rahmen der kompetenzorientierten standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Österreich (sR(D)P) ermöglichen soll. Darin werden die drei mathematischen Handlungsbereiche Operieren, Modellieren und Argumentieren (O-M-A) auf jeweils vier Niveaustufen begründet unterschieden (vgl. Siller et al., 2014). Der Unterschied zwischen diesem Kompetenzstufenmodell und anderen Modellen liegt in der normativen Setzung der Stufen. Die Stufen jedes Handlungsbereichs werden nicht nur empirisch modelliert (Leuders, 2014), sondern tätigkeitstheoretisch inhaltsspezifisch (Lompscher, 1985) begründet. Zur Beschreibung von Lernprozessen bietet die Tätigkeitstheorie schlüssige Konzepte und Erklärungsmuster. In Anlehnung u.a. an die Arbeiten von Galperin und deren Weiterentwicklung von Lompscher lassen sich drei Typen von Orientierungsgrundlagen von Lerntätigkeiten unterscheiden, die in einem hierarchischen Verhältnis zueinander stehen: Probierorientierung, Musterorientierung und Feldorientierung. Es lassen sich in den individuellen Aufgabenbearbeitungen gewisse Effekte der vermutlich in der Bearbeitungssituation aktivierten und gezeigten Orientierungslevel erkennen, ohne dass anhand einer konkreten Aufgabenbearbeitung eindeutig auf ein bestimmtes grundsätzlich verfügbares Orientierungslevel in einem Inhaltsbereich rückgeschlossen werden kann.

Die vorgenommene Stufung in vier Niveaus orientiert sich an Meyer (2012), der eine Stufung von „Ausführen einer Handlung durch unreflektiertes Nachvollziehen“ (1) bis „Selbstständige Prozesssteuerung“ (4) vorschlägt.

Stufe 1 und Stufe 2 bedienen eine „Musterorientierung“ und unterscheiden sich vor allem durch die Mehrschrittigkeit der jeweiligen Anforderung (Komplexität). Stufe 3 erfordert in der Regel bereits erste Entwicklungen in Richtung einer „Feldorientierung“. Das Orientierungslevel „Feldorientierung“ lässt sich beispielsweise an der Fähigkeit erkennen, begründet eigene Beispiele zu generieren.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 1. Einschränkungen der Modellierung, Nutzen des Modells

Das hier vorgestellte Kompetenzstufenmodell wurde für die Zertifikatsvergabe am Ende der Sekundarstufe II entwickelt und bildet nicht die Kompetenzentwicklung über Jahrgangsstufen hinweg ab. Mit Hilfe des Modells wird auch der Übergang von einer Stufe auf die nächste noch nicht erklärbar. Schwierigkeitsgenerierende Faktoren wie die Verwendung komplexer Sprache oder kognitiver Ansprüche beim Verstehen der Aufgabe werden in den jeweiligen Stufen nicht explizit aufgenommen.

Durch die theoretisch abgesicherte Modellierung gelingt es jedoch, Aufgabenschwierigkeiten abzuschätzen und diese bei der Aufgabenkonstruktion und Evaluation zu fokussieren. Aufgabenschwierigkeiten, die außerhalb der Mathematik liegen, können so identifiziert werden. Zudem ist es möglich, durch die Auswertung der Prüfungsergebnisse mit Hilfe des Modells Entwicklungsbedarf im Unterricht zu identifizieren.

## 2. Das Kompetenzstufenmodell O-M-A

In Tabelle 1 werden die noch sehr grobmaschigen Operationalisierungen der drei für die Mathematik hoch relevanten Handlungsbereiche Operieren, Modellieren und Argumentieren vorgestellt.

| Stufe | Operieren | Modellieren | Argumentieren |
|---|---|---|---|
| **1** | Identifizieren der Anwendbarkeit eines gegebenen bzw. vertrauten Verfahrens<br>Abarbeiten / Ausführen einer gegebenen bzw. vertrauten Vorschrift | Durchführung eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation<br>Verwendung vertrauter und direkt erkennbarer Standardmodelle zur Beschreibung einer vorgegebenen Situation mit entsprechender Entscheidung | Einfache fachsprachliche Begründungen ausführen<br>das Zutreffen eines Zusammenhangs oder Verfahrens bzw. die Passung eines Begriffes auf eine gegebene (innermathematische) Situation prüfen |
| **2** | Abarbeiten / Ausführen mehrschrittiger Verfahren / Vorschriften, ggf. mit Rechnereinsatz und Nutzung von Kontrollmöglichkeiten | (deskriptive) Beschreibung der vorgegebenen Situation durch mathematische Standardmodelle bzw. mathematische Zusammenhänge; Erkennen und Setzen von Rahmenbedingungen zum Einsatz von mathematischen Standardmodellen | Verstehen, Nachvollziehen, Erläutern mathematischer Begriffe, Sätze, Verfahren, Darstellungen, Argumentationsketten und Kontexte |
| **3** | Erkennen, ob ein bestimmtes Verfahren / eine bestimmte Vorschrift auf eine gegebene Situation passt, das Verfahren / die Vorschrift passend | Anwenden von Standard-Modellen auf neuartige Situationen, Finden einer Passung zwischen geeignetem mathematischen Modell und | Mathematische Argumentationen prüfen bzw. vervollständigen, mehrschrittige mathematische Standard-Argumentationen durchfüh- |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | machen und ausführen | realer Situation | ren und beschreiben |
| **4** | Makros (aggregierte mathematische Vorschriften) entwickeln/bilden und bereits verfügbare Makros neu zusammenfügen | Komplexe Modellierung einer vorgegebenen Situation; Reflexion der Lösungsvarianten bzw. der Modellwahl und Beurteilung der Exaktheit bzw. Angemessenheit zugrunde gelegter Lösungsverfahren | Eigenständige Argumentationsketten aufbauen, fachlich und fach-sprachlich korrekte Erklärung von mathematischen Sachverhalten, Resultaten und Entscheidungen |

**Tabelle 1 Beschreibung der jeweils 4 Stufen der drei Kompetenzbereiche Operieren, Modellieren und Argumentieren.**

## 3. Empirische Validierung

Eine erste empirische Überprüfung des normativen Kompetenzstufenmodells O-M-A konnte mit Hilfe der Aufgaben im Haupttermin der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung 2014 (vgl. bifie, 2014) durchgeführt werden. 803 Schülerinnen und Schüler in 42 (Oberstufenreal-)Gymnasien haben daran (auf freiwilliger Basis) teilgenommen. Die Klausur bestand aus 24 Teil-1-Aufgaben und 5 Teil-2-Aufgaben, die vom Projektteam geratet wurden.

Im Teil-1 werden sog. Grundkompetenzen (vgl. AECC, 2009) geprüft, die im Wesentlichen hinreichend und notwendig für eine positive Note sind. Es wird erwartet, dass diese Aufgaben jeweils genau einen Kompetenzbereich repräsentieren und Stufe 1 in der Regel nicht überschreiten. Die Typ-2-Aufgaben betreffen auch erweiterte Kompetenzen. Hier sind unter Testbedingungen die Stufen 1, 2 und 3 möglich. Auf Stufe 3 wurde jedoch keine Klausuraufgabe vom Projektteam geratet.

Abb. 1 und Abb. 2 zeigen die Ergebnisse einer empirischen Auswertung auf Basis der Lösungshäufigkeiten der in der Klausur gestellten Aufgaben. Abbildung 1 zeigt die Lösungshäufigkeiten der Typ-1-Aufgaben nach den Dimensionen Operieren (O), Modellieren (M) und Argumentieren (A). Abbildung 2 zeigt die Lösungshäufigkeit der Typ-2-Aufgaben, aufgeschlüsselt nach Kompetenzstufe 1 und 2.

**Abbildung 1**

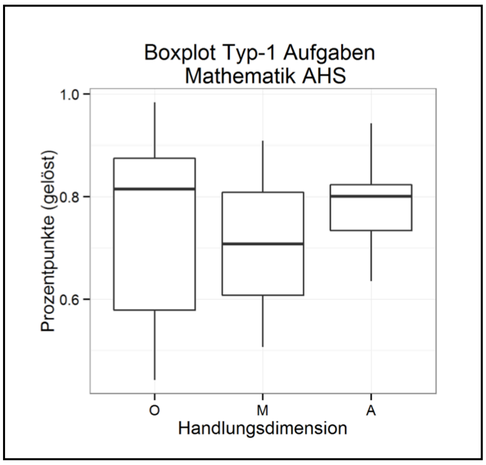
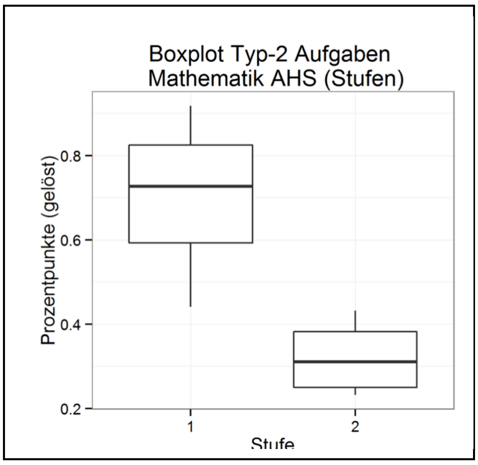



**Abbildung 2**



In Abb. 1 ist die große Streuung der Aufgaben, die dem Operieren zugeordnet wurden, zu erkennen. Dies wird vermutlich auch durch Effekte bei kognitiven Ansprüchen und ungewohnten Inhaltsanforderungen bedingt. Aufgrund der niedrigen Aufgabenzahlen im Handlungsbereich Modellieren und Argumentieren konnte keine getrennte Dimensionsanalyse durchgeführt werden. Werden diese beiden Dimensionen zusammengefasst, lässt sich aber aus den Daten die Hypothese aufstellen, dass diese ein anderes Anforderungsprofil als der Handlungsbereich Operieren haben. Abb. 2 zeigt einen Boxplot zu den Teil-2-Aufgaben. Sehr deutlich ist zu erkennen, dass die Lösungshäufigkeit bei den Stufe-1-Aufgaben deutlich höher als bei den Stufe-2-Aufgaben ist. Diese ersten Ergebnisse unterstützen die Erwartung, dass sich das O-M-A-Kompetenzstufenmodell empirisch validieren lässt.

## Literatur


AECC (Hrsg.) (2009). Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“ – Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. Klagenfurt: Institut für Didaktik der Mathematik. Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung der Alpen-Adria-Universität.

BIFIE (Hrsg.) (2014). Haupttermin 2013/14 – Mathematik (AHS). Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/2633 [23.02.2015].

Leuders, T. (2014). Modellierungen mathematischer Kompetenzen – Kriterien für eine Validitätsprüfung aus fachdidaktischer Sicht. Journal für Mathematik-Didaktik, 35(1), 7–48

Lompscher, J. (1985). Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit. Berlin: Volk u. Wissen.

Meyer, H. (2007). Leitfaden Unterrichtsvorbereitung. Berlin: Cornelsen Scriptor

Siller, H.-St.; Bruder, R.; Hascher, T.; Linnemann, T.; Steinfeld, J.; Sattlberger, E.; Schodl, M. (2014). Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II – eine Konkretisierung. Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 1135-1139.

Torsten LINNEMANN, Basel, Christian FAHSE, Landau

# „Wie begründet man gut?" – Kompetenztraining und Schülervorstellungen

„Ohne die Frage nach dem WARUM kann ein Unterricht kein authentischer Mathematikunterricht sein, denn diese Frage ist für das „Mathematiktreiben an sich“ zentral. Das Umgehen mit dem WARUM gilt bei vielen Lernenden und Lehrkräften als schwierig, doch ist es lernbar…“ (Meyer & Prediger 2009).

Bruder et al. (2014) schlagen vor, die Entwicklung des Argumentierens und anderer mathematischer Handlungskompetenzen mit Kompetenztrainings zu fördern. Dazu wurde das Projekt LEMAMOP initiiert. Ein Kompetenztraining umfasst dabei ca. vier Stunden Unterricht. Im Bereich Argumentieren werden Alltagsargumente dem mathematischen Argumentieren gegenübergestellt. Im Folgenden wird ein Training vorgeschlagen, das neben der argumentativen insbesondere auch die kommunikative Kompetenz stärken möchte: Wann gilt eine Begründung als gut? (Hier ist eine Bemerkung zum Sprachgebrauch angebracht: Die Beziehungen zwischen den Begriffen Beweisen, Begründen, Argumentieren und Erklären (z. B. Kiel 1999, S. 71ff) werden in der Literatur unterschiedlich interpretiert. Es ist für das Verständnis des Folgenden nicht notwendig, diese Differenzen zu thematisieren. Gegenüber den Schülerinnen und Schülern wurde einheitlich das Wort "Begründen" verwendet.)

Entwickelt wurde das Training für eine 10. Fachmittelschulklasse in der Schweiz. Ein Einsatz in einem Leistungskurs, 11. Klasse, in Deutschland zeigt die Ergiebigkeit auch auf dieser Stufe. Sich mit Aspekten guten Begründens auseinanderzusetzen, traf ein Bedürfnis der Schülerinnen und Schüler. Gesucht wird nach Kriterien für eine besonders adressatengerechte und inhaltlich treffende Begründung, warum ein vermuteter Sachverhalt zutrifft.

## Kompetenztraining

Die erste Stunde thematisiert die Fragestellung, wie Begründungen in anderen Schulfächern aussehen. Die Antworten werden in Einzelarbeit erstellt und im Plenum besprochen und gruppiert. Es ergibt sich eine Liste von Aspekten von guten Begründungen in anderen Fächern. Daran anschließend wird eine Aufgabe gestellt, die an das Zahlenbuch 6, Schweizer Ausgabe (Affolter et al., 2000, S. 94), angelehnt ist:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Aufgabe 1: a) Wählen Sie ein Quadrat mit vier Zahlen in der Hundertertafel. Bilden Sie die Summe der Diagonalen (beispielsweise16+27 und 17+26). Führen Sie das für mehrere Beispiele durch. Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Vermutung so, dass jemand aus dem Kurs ihre Begründung gut verstehen kann. b) Wie sieht es mit den Produkten aus, beispielsweise 16 • 27 und 17 • 26? Begründen Sie auch hier ihre Beobachtungen.

Die Antworten werden von der Lehrperson gesichtet, einige typische oder besondere Schülerantworten zu einer Autographensammlung zusammengefasst. Diese wird in der dritten Stunde mit folgendem Auftrag an die Schülerinnen und Schüler verteilt:

Versuchen Sie, die Begründungen zu verstehen. Nennen Sie bis zu zwei Begründungen, die Ihnen gut gefallen haben. Weshalb haben Ihnen diese Begründungen gefallen? Formulieren Sie allgemein (also unabhängig von den konkreten Aufgaben) Ihre Ansicht: «Was zeichnet eine gute Begründung aus?»

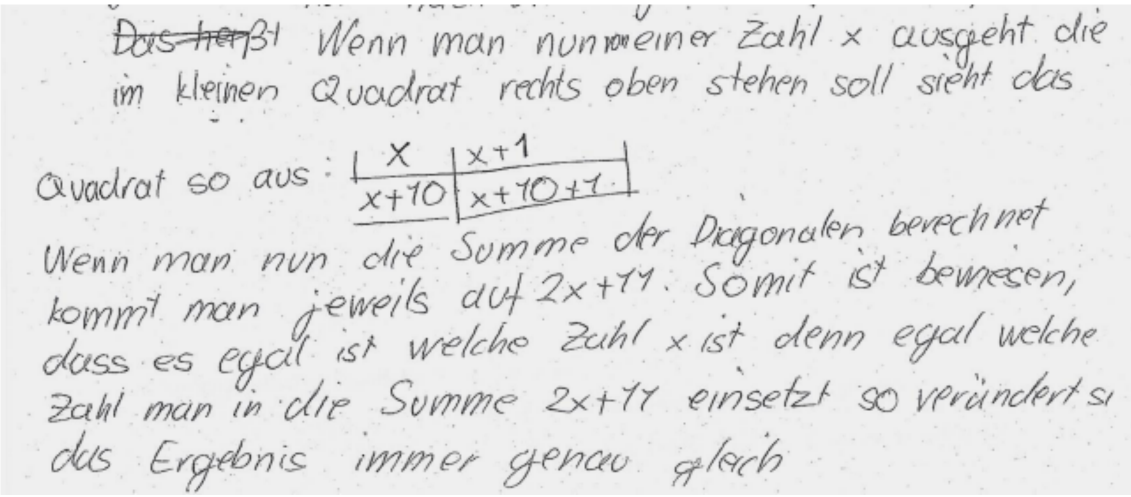
In der dritten Stunde werden die durch die Lehrperson ausgewerteten Antworten vorgestellt. Im Kurs wird unter der behutsamen Moderation der Lehrkraft ein Konsens gefunden, was eine gute Begründung auszeichnet. In der vierten Stunde wird dann wieder eine Begründungsaufgabe an der Hundertertafel gestellt, an der die Schülerinnen und Schüler mit den vorher ausgehandelten Gütekriterien umgehen lernen.

## Begründungen von Schülerinnen und Schülern

Im Folgenden sollen einige ausgewählte Aspekte aus den beiden Erprobungen angesprochen werden. Die Struktur des Trainings zielt auf Prozesskompetenzen, inhaltlich ist zusätzlich mit den speziell gewählten Aufgaben eine Thematisierung von *Arithmetik und Algebra* intendiert. Ein Schüler (FMS, Aufg. 1a) gibt zunächst ein konkretes arithmetisches Beispiel an (16•27=10•20+**10•7**+6•20+6•7 und 17•26=10•20+10•6+7•20+6•7), erkennt dann offensichtlich die Notwendigkeit einer allgemeinen Begründung, die er wie folgt realisiert: „Der einzige Unterschied ist, **man rechnet einmal die kleinere Zahl der ersten Stelle mit der grösseren der zweiten Stelle** und einmal die grössere Zahl der ersten Stelle mit der kleineren Zahl der zweiten Stelle und umgekehrt.“ (Hervorhebung und Rechtschreibung abweichend vom Original). Der fett gedruckte Satzteil legt durch Pfeile und Bezugszeichen, die sich auf die verschiedenen Zahlen des Beispiels bezieht, folgende Interpretation nahe: „Die kleineren Zehner (10 im ersten Faktor 16) mit der größeren Einerstelle (7 im zweiten Faktor 27)“. Diese Passagen erinnern daran, dass auch die Menschheit jahrhundertelang algebraische Beziehungen in Worten ausgedrückt hat, bevor sie eine Formelsprache entwickelte. Im Kontext des Argumentationstrainings wurden die

Kraft einer algebraischen Formulierung und die Kraft einer korrekten Fachsprache durch die Rückmeldung der anderen Kursmitglieder ohne jegliche Direktive der Lehrkraft deutlich.

Andererseits erhielt aber auch der rein algebraisch orientierte Zweizeiler „a + a+11 = a+1 + a+10 // 2a+11 = 2a+11“ (Lk 11, Aufg. 1a) nur zwei von 15 möglichen Zustimmungen des Leistungskurses. Die meiste Zustimmung (10 von 15 Stimmen) erhielt der Text eines Schülers, der von einem arithmetischen Beispiel ausgehend die Struktur der Hundertertafel darstellte und dann wie in Abb. 1 fortfährt.



~~Das heißt~~ Wenn man nun einer Zahl x ausgeht die im kleinen Quadrat rechts oben stehen soll sieht das Quadrat so aus:

| | |
|---|---|
| x | x+1 |
| x+10 | x+10+1 |

Wenn man nun die Summe der Diagonalen berechnet kommt man jeweils auf 2x+11. Somit ist bewiesen, dass es egal ist welche Zahl x ist denn egal welche Zahl man in die Summe 2x+11 einsetzt so verändert si das Ergebnis immer genau gleich

**Abb. 1:** Text eines Leistungskursschülers zu Aufgabe 1a.

Das durchgestrichene „Das heißt“ bezieht sich auf das darüberstehende Zahlenbeispiel. Diese erkannte Notwendigkeit einer allgemeinen Begründung legt eine Verwendung der Algebra nahe. Diese tritt hier aber nicht in Reinform auf, sondern statt Gleichungen werden Terme in einen Text eingebunden - der Text nimmt die Lesenden quasi an die Hand.

Die Akzeptanz eines Textes hängt auch von der *visuellen Gestaltung* im weitesten Sinn ab, wie Farbgestaltung und Bezugszeichen (ohne die der zuerst besprochene Text kaum interpretierbar gewesen wäre) oder die Verwendung von Tabellen oder Pfeilen, insbesondere wenn es darum ging, Formeln mit dem Text inhaltlich zu verbinden.

Der Leistungskurs ordnete nicht alle Texte sofort richtig ein. Kriterien für eine *„richtige“ Einordnung* sind dabei, dass die abgegebenen Begründungen von den Lesenden in eigenen Worten schlüssig wiedergegeben werden können und auch nach der Diskussion im Plenum die Wertschätzung für den Text beibehalten wird. Z. B. wählte ein zunächst beliebter Text einen Umweg über insgesamt drei quadratischer Tabellen wie in Abb. 1 und ein anderer Text verwendete besonders ausgeprägt Fachsprache, ohne aber argumentativ schlüssig zu sein.

## Kriterien der Schülerinnen und Schüler

Die Rückmeldungen der Schüler/innen zu der Autographensammlung wurden im Leistungskurs in 21 Kriterien für eine gute Begründung geclustert. Diese Liste wiederum wurde mit der Bitte ausgeteilt, anzukreuzen, welche Kriterien man persönlich für besonders wichtig hält.

- Gute Einbindung von Text, Formeln, Skizzen, Beispielen (8)
- Mathematischer Beweis, Formeln (7)
- Text auf das Wesentliche beschränken (7)
- Alles begründen (7)
- Verständliche, richtige Fachsprache (6)
- Beispiele und Gegenbeispiele verwenden (6)

**Abb. 2:** Kriterien für eine gute Begründung (Lk 11). In Klammern: Anzahl der Nennungen (von 15 Kursmitgliedern) aus 21 gesammelten Kriterien.

Die am häufigsten genannten Kriterien finden sich in Abb. 2. und können vielleicht wie folgt zusammengefasst werden: Gute Begründungen zeichnen sich durch ein adressatengerecht ausgewogenes Maß zwischen Prägnanz und Ausführlichkeit aus („knapp, aber präzise auf den Punkt gebracht“), durch einen gutes Ineinandergreifen von Text, Formeln und Veranschaulichung. Je nach Adressat kann die Kürze eines algebraischen Zweizeilers (s. obiges Beispiel) als besonders gelungen oder als "nicht erhellend" empfunden werden, in jedem Fall ist aber die Orientierung am Adressaten ein Kriterium. Damit werden "gute" Begründungen zu "Erklärungen" im Sinne von  Kiel 1999. Diese Begründungskultur stellt sich aber wegen der oben angedeuteten anfänglichen Fehleinschätzungen nicht von selbst ein, sondern hierbei ist die behutsame Moderation der Lehrkraft notwendig. Abgesehen von dieser Einschränkung verlief das Training in zwei auch im Niveau sehr unterschiedlichen Kursen völlig reibungslos, d. h. die Schüler/innen entwickelten selbstständig sinnvolle Kriterien.

## Literatur


Bruder, R., Krüger, U.-H. & Bergmann, L. (2014). LEMAMOP - ein Kompetenzentwicklungsmodell für Argumentieren, Modellieren und Problemlösen wird umgesetzt. In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 261–264). Münster: WTM.

Fahse, C. & Linnemann, T. (eingereicht): Genügt der Beweis, oder soll ich das auch begründen? - Gute Erklärungen und Begründungen aus Sicht der Schülerinnen und Schüler. Erscheint voraussichtlich 2015 in: *Praxis der Mathematik in der Schule.*

Kiel, E. (1999): *Erklären als didaktisches Handeln.* Würzburg: Ergon.

Meyer, M. & Prediger, S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule 51*(30), S. 1-7.

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Solothurn

# Mathematische Videoclips zur Förderung der Sprachkompetenz

Wie kann man Sprachkompetenz als integrierten Bestandteil mathematischer Kompetenz (Linneweber-Lammerskitten, 2013) fördern? Im Projekt VITALmathLIC[1] wurden kurze Videoclips erstellt, die auf die Förderung der Kompetenzbereiche „Darstellen & Kommunizieren“ und „Argumentieren und Begründen“ ausgerichtet sind. Der folgende Beitrag verdeutlicht das Konzept durch eine Interpretation eines Videoclips aus dem Projekt[2].

Auf der *Makroebene* zeigt der Videoclip „Geobrett Rechtecke“ wie die meisten anderen Clips aus dem Projekt VITALmaths einen interessanten Sachverhalt, um Motivation zu einem eigenständigen Experimentieren und Explorieren zu erzeugen, und stellt die dafür nötigen Grundkenntnisse bereit. Im vorliegenden Fall wird dazu das Geobrett und das, was sich mit Hilfe von Gummiringen mit ihm machen lässt, vorgestellt. Als interessanter Sachverhalt wird die Hypothese formuliert, dass sich der Flächeninhalt einer bestimmten Art von Rechtecken durch blosses Zählen von Nägeln mit einer einfachen Formel bestimmen lässt. Der Clip endet schliesslich mit der Aufforderung an die Lernenden, die Hypothese zu testen, indem sie an einigen selbst gewählten Beispielen überprüfen, ob die Formel das richtige Ergebnis liefert. Ein zweiter Impuls geht über die Aufforderung zum Ausprobieren hinaus und fragt nach einem möglichen Beweis für die aufgestellte Hypothese. Soweit der äussere Ablauf des Clips. *Mathematisch betrachtet* handelt es sich bei der Hypothese um einen Spezialfall des Satzes von Pick, der besagt dass sich der Flächeninhalt eines geschlossenen und überschneidungsfreien Gitterpolygons durch die Anzahl i der Gitterpunkte im Innern des Polygons und die Anzahl r der Gitterpunkte auf dem Polygonzug durch die Formel $A(P) = i + r/2 - 1$ berechnen lässt. In unserem Fall ist der Geltungsbereich auf rechteckige Polygone ohne Gitterpunkte im Innern beschränkt. *Mathematikdidaktisch betrachtet* geht es weniger um eine Einführung in den Satz von Pick, d.h. um einen Kompetenzaufbau im Bereich von „Erkennen, Wissen und Beschreiben“, als vielmehr darum, an einem einfachen Beispiel das gemeinsame Aufstellen und Testen einer Hypothese als Prozess mitzuerleben, es zu reproduzieren und weiter zu denken:

---

[1] Das VITALmathsLIC projekt wird mit Mitteln des Schweizer Nationalfonds und der National Research Foundation of South Africa unterstützt.

[2] Videoclips des Projekts sind auf YouTube unter „linnemath“ (in Deutsch) resp. „VITALmaths“ (in Englisch und in isiXhosa) öffentlich zugänglich.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

sei es in Richtung auf einen Beweis wie im Clip angeregt, oder in Richtung auf eine verallgemeinerte Hypothese für beliebige Rechtecke. Der Kompetenzaufbau liegt daher eher bei sozialen und sprachbezogenen mathematischen Kompetenzen wie „Darstellen und Kommunizieren“ sowie „Argumentieren und Begründen“.

Steigen wir von der Makroebene auf die *Mikroebene* so zeigen sich einige Unterschiede zu den meisten der älteren Videoclips des VITALmaths-Projekts. Die mathematische Situation ist in diesem Clip in eine Dialogsituation - oder vielleicht besser gesagt in eine „kommunikative Situation“ - eingebettet. Die Protagonisten der kommunikativen Situation sind unsichtbar, ihre Dialoge erscheinen wie zu Stummfilmzeiten in Schriftform auf einmontierten Texttafeln und erinnern an verschriftlichte Dramen. Statt der Personen sind die Visualisierungen ihrer mathematischen Gedankengänge sichtbar: die Zuschauer sehen das, was die Protagonisten sich wechselseitig mit Hilfe von Realgegenständen, Skizzen und Notizen zeigen. Die Protagonisten sind als „Avatare“ konzipiert, mit denen sich die Lernenden identifizieren können und von denen sie Verhaltensweisen, wie sie idealtypisch in der „Mathematik als Prozess“ vorkommen, übernehmen können, wie dies (in allgemeiner Form) in Banduras Theorie des „Lernens am Modell“ konzipiert ist. Dabei ist es wichtig, dass diese Verhaltensweisen nicht bloß auf die kognitive Dimension reduziert als mehr oder minder stimmige Überlegungen im Clip dargestellt werden, sondern dass sie als wörtliche Rede in Dialogform explizit verbalisiert werden. Auf diese Weise werden typische Sprachpattern zur Verfügung gestellt, die von den Lernenden im Anschluss an den Videoclip bewusst oder unbewusst genutzt werden können, um ihre eigenen Überlegungen zu verbalisieren. Dazu gehören auch strategische Elemente und sprachliche Muster, um illokutionäre und perlokutionäre Akte im Sinn der Sprechakttheorie (Searle, 1976) auszudrücken. Infolgedessen werde ich bei der weiteren Analyse auf der Mikroebene neben den kognitiven und kommunikativen Akten auch die im Videoclip benutzen Sprachpattern hervorheben, mit denen diese Akte zum Ausdruck gebracht werden.

Eine Art Regieanweisung führt in die Handlung des Videoclips ein: Zwei Schülerinnen, Thami und Florence, arbeiten in der Schule mit einem Geobrett. Was ein Geobrett ist, wird nicht definiert, sondern ein Exemplar vorgezeigt („Ein Geobrett ist ein Nagelbrett wie dieses ...“) und es wird an Beispielen erläutert, was man damit machen kann. Durch das blosse Zeigen eines „Mustergeobretts“ ist damit einerseits die Grundlage für das Verstehen des folgenden gesichert, andererseits aber die Möglichkeit offengelassen zu einem späteren Zeitpunkt auch Varianten zu den orthogonalen und äquidistanten Nägelfolgen zuzulassen, bzw. umgekehrt die implizit zugrunde gelegten Voraussetzungen explizit zu machen.

Thami behauptet, dass sie einen Weg gefunden hat, den Flächeninhalt bestimmter Rechtecke durch Abzählen der Nägel zu bestimmen. Damit setzt der Dialog im Videoclip ein: Florence ist daran interessiert, zu verstehen, wie dies geht, und macht einen ersten strategischen Schritt, um dieses Verständnis zu garantieren, indem sie die Einheit für die Berechnung des Flächeninhalts vorschlägt: „*Ich schlage vor, wir nehmen als Einheit den Abstand zwischen zwei benachbarten Nägeln in horizontaler oder vertikaler Richtung*.“ Thami ist mit der Festlegung einverstanden und grenzt mit dem metaphorischen Attribut „hohl“ den Bereich der Rechtecke ein, deren Flächeninhalt sie bestimmen will: „*OK. Dann kann man die Fläche von „hohlen“ Rechtecken leicht bestimmen.“* Da Florence nicht weiß, was mit „hohlen“ Rechtecken gemeint sein soll, fragt sie nach: „*Was meinst du mit ‚hohlen Rechtecken'?“* und da sie dies lieber anhand eines Beispiels als anhand einer Definition oder Erklärung verstehen möchte, fügt sie hinzu: „*Kannst du mir ein Beispiel geben?“*. Thami geht auf den Wunsch ein: *Klar – mit ‚hohlen Rechtecken' meine ich Rechtecke wie diese hier ...“* Florence versucht selbst herauszufinden, ob sie verstanden hat, welche Rechtecke Thami meint, indem sie ein Gegenbeispiel konstruiert: „*: ... im Unterschied zu diesen?“* Das Gegenbeispiel hilft Thami, explizit anzugeben, welche Rechtecke sie meint: „*Genau! Mit „hohlen Rechtecken“ meine ich Rechtecke, die keine Nägel im Inneren haben. Sie haben nur Nägel am Rand.“* Nachdem der Wortgebrauch für sie geklärt ist, übernimmt Florence ein weiteres Mal die Initiative und greift den Gedanken von Thami mit einer Frage auf: *„Ok – und wie kannst du dann die Fläche durch Zählen der Nägel bestimmen?“* Worauf Thami in Worten beschreibt, wie sie vorgeht: „*Ich zähle einfach die Nägel am Rand, dividiere durch 2 und ziehe davon 1 ab.“* Auch hier möchte Florence lieber ein Beispiel: „*Kannst du mir das an einem Beispiel zeigen?“* Thami bejaht und da sie erkennt, dass sie dies mit einem Blatt Papier besser zeigen kann als mit dem Geobrett, wechselt das Medium: *„Ja, ich zeige dir am besten auf einem Blatt Papier wie ich es mache.“* Es ist wiederum Florence, die das Gespräch weitertreibt, indem sie zur Prüfung des Verfahrens aufruft, *„Prüfen wir nach, ob diese Methode zum richtigen Ergebnis führt!“* zeigt sie, dass mit dem Verstehen eines Verfahrens nicht auch schon seine Gültigkeit garantiert ist, und mit dem Impuls *„Lass uns mal versuchen, deine Methode als Formel zu schreiben.“* und der Angabe der Formel A = B/2 – 1 bringt sie den Dialog auf eine abstraktere Ebene. Thami gefällt diese Idee und macht einen ersten Schritt die abstrakte Formel zu deuten: *Cool! Ich nehme an, dass B in der Formel für die Anzahl der Nägel am Rand steht?* Worauf Florence eine positive

Rückmeldung gibt und die Deutung abschließt: *“Genau! Und A steht für die Fläche.”*

Damit endet der Dialog – es findet ein Ebenenwechsel statt – die Schülerinnen und Schüler werden durch zwei Impulse direkt angesprochen: “*Probiere die Formel von Thami und Florence für einige selbstgewählte „hohle Rechtecke“ aus.“* und *„Kannst du beweisen, dass die Formel von Thami und Florence für alle „hohlen Rechtecke“ funktioniert?*

Die Videoclips des Projekts sind – wie man am Beispiel des oben analysierten Films leicht erkennen kann – durch die Theorie des Lernens am Modell (Bandura, 1976) und durch eine Adaption des Scaffolding aus der Didaktik des Fremdsprachenunterrichts (Thürmann, 2013) beeinflusst. Die Protagonisten des Videoclips bieten ein Identifikationsangebot an die Lernenden, sie sind Modelle im Sinne Banduras: ihr Verhalten, das hohe sprachlich-linguistische und kommunikativ-soziale Kompetenzen erkennen lässt, resultiert in wechselseitigem Respekt und Wertschätzung, und lädt zur Nachahmung ein. Die dazu notwendigen sprachlichen Mittel (typische mathematische Wortbildungen, Wendungen, Sätze, Texte) und textsortenspezifischen Strukturen und Strategien kommen in den Dialogen der Clips vor und stehen als Scaffolds für das gemeinsame Arbeiten in Gruppen zur Verfügung.

## Literatur


Bandura, A. (1976). Die Analyse von Modellierungsprozessen. In Bandura, Albert (Hrsg.), Lernen am Modell. Ansätze zu einer sozial-kognitiven Lerntheorie. Stuttgard: Ernst Klett Verlag. 9-67.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2012). Sprachkompetenz im Mathematikunterricht. In Ludwig, Matthias and Kleine, Michael (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 561–564). Münster: WTM-Verlag

Linneweber-Lammerskitten, H. (2013). Sprachkompetenz als integrierter Bestandteil der *mathematical literacy*? In Becker-Mrotzek, M., Schramm, K., Thürmann, E., and Vollmer, H.J. (Eds.), *Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen*. Münster: Waxmann, 151-166.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2014). Darstellen und Kommunizieren, Argumentieren und Begründen, Interpretieren und Reflektieren von Resultaten. In Linneweber-Lammerskitten, H. (Ed.) (2014). *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II.* (pp. 179-200). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Pick, G. (1899). Geometrisches zur Zahlenlehre. Sitzungsberichte des Vereins “Lotos” (Prag) 19, 311–319.

Searle, John R. (1976): *Sprechakte*. Frankfurt: Suhrkamp Verlag

Thürmann, E. (2013). Scaffolding. in: Der fremdsprachliche Unterricht Englisch. Heft 126. 2013. S. 2-8

Elisabeth LUCYGA, Hannover

# Prozessanalyse mittels strukturell verfeinerter Prozess-kodierung – Feinstrukturanalyse der Absichtsregulation

„Verhalten wird von Absichten, Wünschen, Motiven, Zielen, Vornahmen gelenkt[…]. Somit ist das Wissen um die eigenen Ziele und Motive ein wichtiges Ingredienz der Verhaltenssteuerung" (Dörner 1988, S. 267).

Nach Dörner existiert für o.g. Wissen eine Gedächtnisinstanz, das Absichtsgedächtnis. Um das Problemlöseverhalten von Probanden genauer analysieren zu können und die Verhaltenssteuerung während eines Problemlöseprozesses nachzuvollziehen, kann eine Feinstrukturanalyse der Absichtsregulation vorgenommen werden. Die *Absicht* selbst besteht aus folgenden vier Komponenten des Absichtsgedächtnisses nach Dörner (ebd., S. 268), die jeweils durch Lösungsgraphausschnitte beschrieben werden.

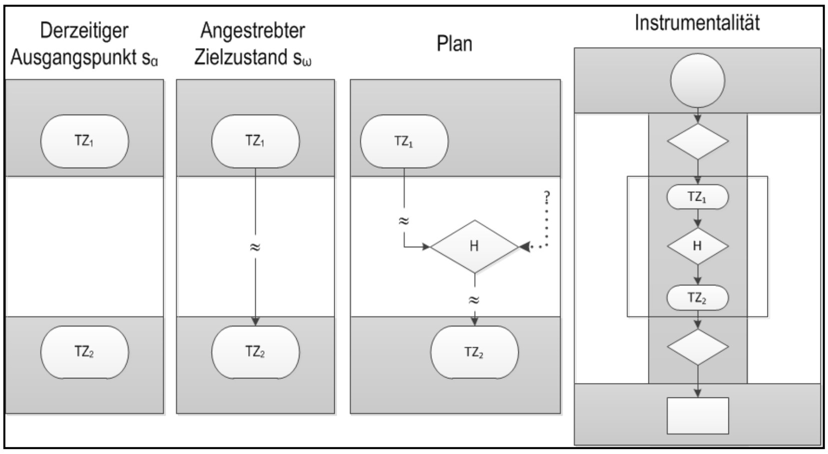



**Abb. 1:** Der Absichtabegriff nach Dörner (1988) konkretisiert mit Lösungsgraphen

Der *Ausgangspunkt* $s_\alpha$ ist beim Generieren der Absicht ein Lösungsgraphausschnitt, der aus zwei Mengen von Teilzielen besteht (mind. eine nicht leer). In Abb. 1 sind diese grau markiert.

Der *angestrebte Zielzustand* $s_\omega$ wird durch die angestrebte Veränderung des Lösungsgraphausschnitts beschrieben. Das Ziel in Abb. 1 besteht darin, $TZ_1$ und $TZ_2$ miteinander zu verknüpfen. Um dies von realisierten Verknüpfungen abzugrenzen, wird ein, durch ein Doppeltilde unterbrochener Verknüpfungspfeil verwendet.

Der *Plan* (einer Absicht) enthält Operatoren und Zustände auf dem Weg zum (Teil-) Ziel und beantwortet zumindest bruchstückhaft die Frage „Was muß ich tun, um dem Ziel näher zu kommen?"(ebd., S. 268). In Abb 1. besteht der Plan darin, aus $TZ_1$ und eventuell einem weiteren Teilziel mit Hilfe des Operators H auf $TZ_2$ zu schließen.

die *Instrumentalität* beschreibt, wie der Lösungsgraphausschnitt in einen Lösungsgraphen der gesamten Aufgabe eingebettet werden soll.

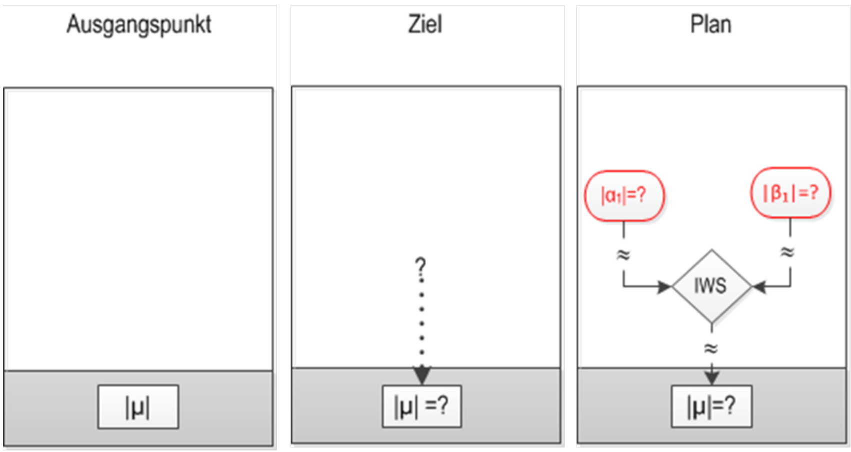
In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

**Feinstrukturanalyse der Absicht am Beispiel des Probanden D11**

Zu Beginn des mathematischen Problemlöseprozesses der TIMSS-Aufgabe K10, bei der nach der Größe des Winkels ∠AMB (hier μ) gefragt wird, wobei ABC ein Thalesdreieck darstellt und M der zugehörige Inkreismittelpunkt ist, identifiziert der Proband D11 den Winkel bei C als rechten Winkel und begründet dies mit dem Satz des Thales. Anschließend identifiziert D11 den Zielwinkel und ergänzt diesen in der gegebenen Skizze.

Nachfolgend beschreibt der Proband in Prozesszeile 13 seinen Plan der Lösung. Bei der Absichtskodierung ist der Ausgangspunkt $s_\alpha$ ein Lösungsgraphausschnitt, der lediglich den Zielwinkel enthält. Der angestrebte Zielzustand $s_\omega$ stellt die Bestimmung der Größe des Zielwinkels dar. D11 formuliert sogleich einen Plan zur Bestimmung diese Winkels. Der Zielwinkel soll unter Verwendung des Innenwinkelsummensatzes berechnet werden. Um diese anwenden zu können, ist die Kenntnis der Winkelgrößen der Winkel $\alpha_1$ und $\beta_1$ erforderlich. Die Instrumentalität ist dabei offensichtlich: der Proband möchte die gegebene Problemaufgabe lösen. Dazu soll der betrachtete Lösungsgraphausschnitt wie in Abb. 2 dargestellt in den Lösungsgraphen eingebettet werden – allerdings gibt es keinen Weg vom Gesuchten zum Gegebenem, der über die Teilziele „$|\alpha_1|$=?“ und „$|\beta_1|$=?“ führt, die Absicht ist also nicht realisierbar. Deshalb sind die Teilziele und ihre Einbindung in den Weg rot.

| | | |
|---|---|---|
| 13 | 03:35 | Ich überleg grad ob ich mit Hilfe des Innenwinkelsummensatzes theoretisch darauf kommen kann *zeigt auf den Winkel AMB*, dass die Sache ist. Ich brauch dafür die beiden Winkel *zeigt auf A und B* |



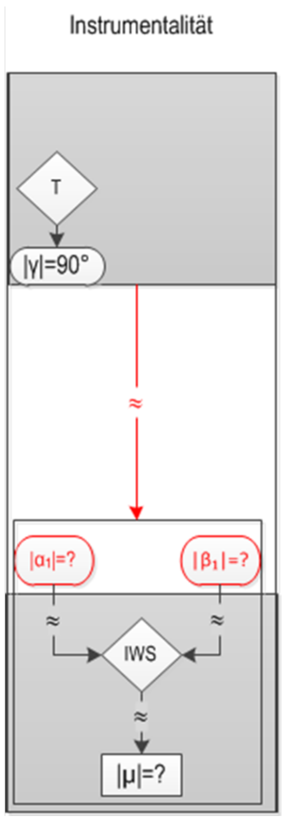
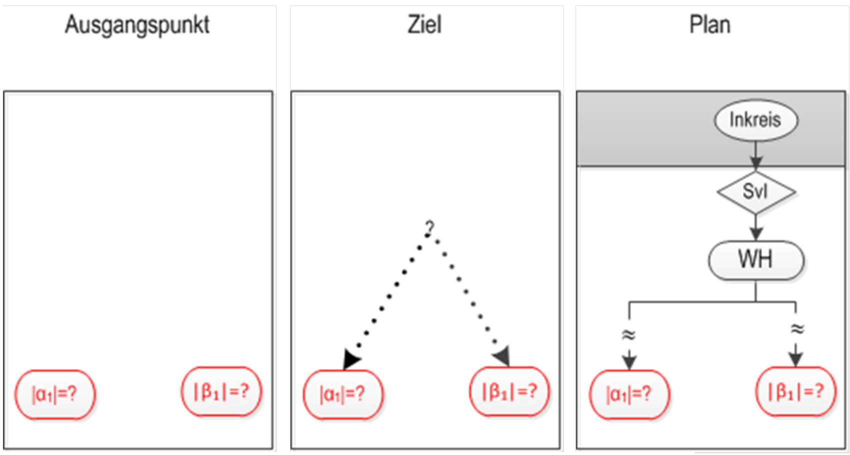




**Abb. 2: Kodierung der Absicht von D11 zu PZ 13**

Nachfolgend betrachtet der Proband den Inkreis und identifiziert die Gerade AM als Winkelhalbierende. Bei der Kodierung der Absicht gibt die Prozesszeile 16 Aufschluss darüber, dass der Proband die vorher formulierte Absicht weiterhin verfolgt und kein Absichtswechsel stattfindet. Der Proband möchte die Winkelhalbierendeneigenschaft nutzen um die Winkelgrößen von $\alpha_1$ und $\beta_1$ zu bestimmen. Demnach stellen die Teilziele „$|\alpha_1|=?$“ und „$|\beta_1|=?$“ den Ausgangspunkt der aktuellen Absicht dar. Das Ziel dieser Absicht besteht nun darin, diese Teilziele zu erreichen. Der Plan dafür sieht vor, dies mit der eben identifizierten Winkelhalbierendeneigenschaft zu realisieren, was aber so nicht möglich ist (Abb. 3).

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 03:48 | Und da der Kreis mal |
| 15 | 03:54 | Der Kreis berührt hier alle drei Seiten *zeigt auf die drei Berührpunkte des Inkreises mit den Dreieckseiten.* Deshalb ist das hier eine Winkelhalbierende *zeichnet die Linie AM nach* |
| 16a | 04:05 | So jetzt muss ich nur noch gucken wie ich das dafür nutzen kann. |



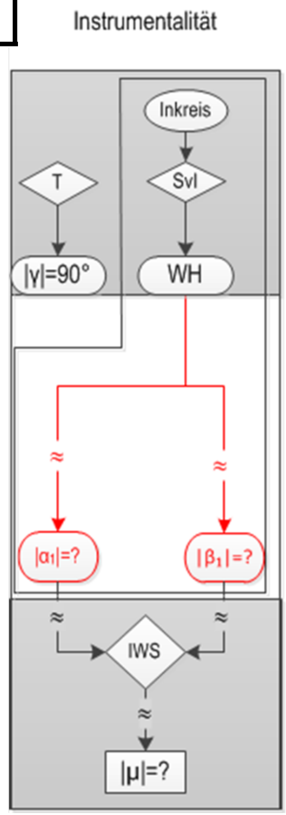




**Abb. 3: Kodierung der Absicht von D11 zu PZ 14 bis 16a**

Die α-β-Barriere (Gawlick in diesem Band) ist damit an dieser Stelle erreicht. Die Winkelgrößen $\alpha_1$ und $\beta_1$ lassen sich nicht angeben, da C beliebig ist. Demnach hat der Proband eine nicht realisierbare Absicht formuliert und es besteht zum erfolgreichen Lösen der Aufgabe die Notwendigkeit der Absichtsregulation.

D11 versucht allerdings weiterhin die Größen der Winkel $\alpha_1$ und $\beta_1$ zu bestimmen, indem er ein Heuristisches Programm ablaufen lässt (Gawlick in diesem Band). Letztendlich löst der Proband die Aufgabe, indem er die Gleichung $2|\alpha_1|+2|\beta_1|=90°$ nach $|\alpha_1|$ umstellt und dies in die Gleichung $|\mu|=180°-\alpha_1-\beta_1$ einsetzt. Demnach wurde die bestehende Absicht reguliert.

## Ergebnisse

Aus theoretischer Sicht hat der Proband seine *Absicht modifiziert*, d.h. Teile der bestehenden Absicht beibehalten, andere Teile dieser verworfen und durch neue Planelemente ergänzt.

Die Modifikation der Absicht liefert die Erklärung für die erfolgreiche Überwindung der α-β-Barriere. Zunächst hatte der Proband die Absicht $\alpha_1$ und $\beta_1$ exakt zu berechnen und erreichte damit die α-β-Barriere. Anschließend versuchte D11 „seitwärtsarbeitend" (vgl. Gawlick in diesem Band) die Barriere zu überwinden. Dies führte zur Absichtsmodifikation und damit zur Barriereüberwindung. Angestoßen durch das Arbeiten mit Gleichungen betrachtete der Proband die Winkel $\alpha_1$ und $\beta_1$ nicht mehr als zu berechnende Größen, sondern als Variablen und modifiziert seine Absicht folgendermaßen: Die exakte Bestimmung der Winkelgrößen der Winkel $\alpha_1$ und $\beta_1$ wird ersetzt durch eine von $\alpha_1$ und $\beta_1$ abhängige Gleichung. Das Absichtselement „verwenden der Innenwinkelsumme im Dreieck ABM" blieb dabei erhalten. Durch diese Absichtsmodifikation gelang es dem Probanden die α-β-Barriere zu überwinden und den Lösungsgraph sinnvoll umzustrukturieren, so dass die Überbrückung von Gegebenem zu Gesuchtem erfolgen konnte und das Problem mit dem Realisieren der modifizierten Absicht gelöst war. Der Proband hat damit sein Schema erfolgreich akkommodiert (vgl. Abb. 4).

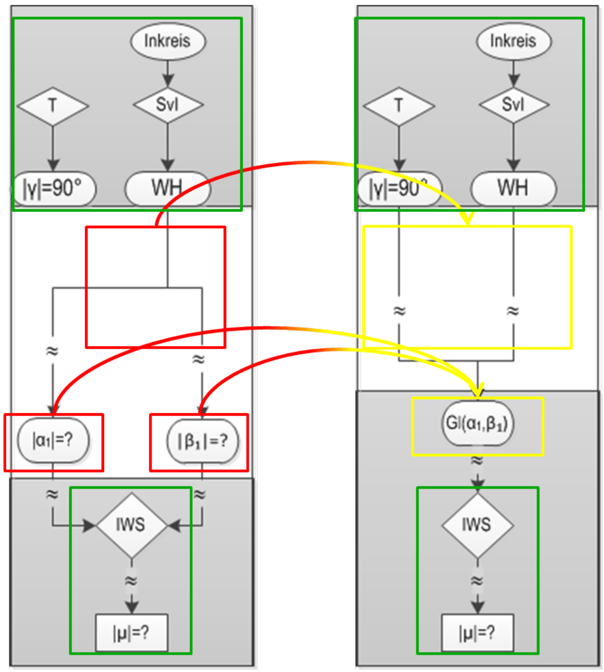



**Abb. 4: Absichtsmodifikation des Probanden D11**

## Literatur


Dörner, D. (1988). Wissen und Verhaltensregulation: Versuch einer Integration. In H. Mandl & H. Spada (Hrsg.), *Wissenspsychologie* (S. 238–250). München: Urban & Schwarzenberg.

Steffen LÜNNE, Rolf BIEHLER, Paderborn Sven SCHÜLER,
Bettina RÖSKEN-WINTER , Berlin

# Mathematikbezogene Beliefs fachfremd unterrichtender Lehrerinnen und Lehrer zu Beginn einer Qualifizierungsmaßnahme

Fachfremd unterrichtende Lehrpersonen rücken verstärkt in den Blick mathematikdidaktischer Forschung: fachfremd erteilter Unterricht ist weniger kognitiv aktivierend (Baumert et al., 2010) und wirkt sich negativ auf Schülerleistungen aus (Richter, Kuhl, Haag & Pant, 2013). Neben Professionswissen haben Überzeugungen einen entscheidenden Einfluss auf die Planung und Gestaltung von Unterricht (vgl. Törner, Rolka, Roesken & Sriraman, 2010). Im Rahmen der Begleitforschung zu einer vom DZLM (www.dzlm.de) getragenen Qualifizierung für fachfremd unterrichtende Lehrpersonen (Lünne & Biehler, 2015) untersuchten wir zu Beginn der Maßnahme die Einstellungen und Überzeugungen Fachfremder zum Lehren und Lernen von Mathematik. Der Fokus dieses Beitrages liegt auf der Beschreibung der Erhebungsinstrumente und erster Ergebnisse.

## Theoretische Einbindung und Fragestellung

Überzeugungen (beliefs) sind ein zentrales Element der professionellen Kompetenz im Lehrberuf (Blömeke, Kaiser & Lehmann 2008). Unter Überzeugungen werden dabei „understandings, premises or propositions about the world that are felt to be true" (Richardson, 1996) verstanden. Mathematikbezogene Überzeugungen beziehen sich dabei auf das Wesen der Mathematik (statisch vs. dynamisch) sowie das Lehren und Lernen von Mathematik (transmissions- vs. konstruktionsorientiert) (Blömeke et al., 2008). Die Forschungslage weist darauf hin, dass Schülerleistungen bei Lehrpersonen mit statischen und transmissionsorientierten Überzeugungen durchschnittlich geringer sind als diejenigen bei Lehrpersonen mit dynamischen, konstruktionsorientierten Überzeugungen (Seidel, Schwindt, Rimmele & Prenzel, 2008). Vor diesem Hintergrund untersucht unsere Studie die Überzeugungen und die Unterrichtspraxis fachfremd unterrichtender Lehrpersonen zu Beginn einer Qualifizierungsmaßnahme (Lünne & Biehler, 2015). Der Fokus liegt auf folgenden Fragen: [F1] *Welche Einstellungen haben die Teilnehmenden zur Mathematik sowie zum Lehren und Lernen von Mathematik?* [F2] *Welche unterrichtsbezogenen Überzeugungen äußern die Teilnehmenden?* [F3] *Welche Unterschiede existieren in der Unterrichtspraxis der Teilnehmenden im Vergleich zu in der Mathematik ausgebildeten Lehrpersonen?*

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Methodologie

Die Teilnehmergruppe (N=22) deckt alle Schulformen der Sekundarstufe I ab und besitzt in weiten Teilen wenig Unterrichtserfahrung in Mathematik. Folgende Daten wurden erhoben: *Teil 1*: Offene Befragung zur Sicht auf Mathematik und zu Zielen des Mathematikunterrichts: (a) *Was ist Ihnen im Mathematikunterricht besonders wichtig?* (b) *Was ist für Sie Mathematik?* (c) *Was sehen Sie für sich oder allgemein als größte Herausforderung im Mathematikunterricht? Teil 2:* Skalen des Fragebogens zu den epistemologischen Überzeugungen zur Mathematik aus MT21 (Blömeke et al., 2008) zur dynamischen und statischen Perspektive sowie zur Konstruktions- und Transmissionsorientierung. *Teil 3:* Skalen der SinusQuest-Studie, mit der die Ziele des hessischen Landesprojekts SINUS-Transfer (2005–2007) überprüft wurden. Erfasst wurden Unterrichts- und Kooperationspraxis sowie Unterrichtsqualität, Selbstwirksamkeitserwartung und Selbstregulation (Biehler, Fischer, Maitzen, Maxara & Nieder, 2009). Die Teilnehmenden der SinusQuest-Studie werden als pragmatisch gewählte Vergleichsgruppe herangezogen. Zu Teil 2 und Teil 3 wurde jeweils eine sechsstufige Likert-Skala (*1 = stimme nicht zu* bis *6 = stimme voll zu*) verwendet.

Die offenen Antworten aus Teil 1 wurden mittels Techniken der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet. Zunächst wurden „deduktiv“ die Beliefs-Kategorien von MT21 herangezogen (Blömeke et al., 2008). Deren Vorhandensein wurde binär kodiert (innerhalb einer Antwort angesprochen oder nicht). In einem zweiten Schritt wurden „induktiv“ neue Kategorien gebildet oder bestehende ausgeschärft. In Teil 2 und Teil 3 wurden die Mittelwerte zu jeder der Skalen gebildet. Während Teil 2 die Verteilungen zwischen der dynamischen und statischen Perspektive sowie der Transmissions- und Konstruktionsorientierung miteinander vergleicht, fokussiert Teil 3 Unterschiede zwischen Fachfremden und den Teilnehmenden der SinusQuest-Studie auf den entsprechenden Skalen (Biehler et al., 2009).

## Ergebnisse

*Teil 1*: Während die Mehrzahl der Teilnehmenden Formalismus- und Anwendungsaspekte in Bezug auf ihren Stellenwert im MU und in Bezug auf die Mathematik und affektiv-motivationale Ziele benennen, werden fachliche Unterrichtsziele kaum angesprochen (vgl. Tab.1). Den Fachfremden ist insbesondere wichtig, allen Lernenden ihrer Klasse gerecht zu werden.

*Teil 2*: Die Zustimmungen zur dynamischen Sicht auf Mathematik und zur Konstruktionsorientierung sind höher als die Zustimmungen zur statischen Sicht und zur Transmissionsorientierung (vgl. Tab.1). Die Ergebnisse decken sich in diesem Punkt nicht mit denen aus Teil 1.

**Tabelle 1: Ergebnisse zu Überzeugungen zur Mathematik (Teil 1: Nur Kategorien, die von mehr als 30% der Teilnehmenden genannt wurden.)**

| *Teil 1: Ergebnisse (N=22)* | *Formalismus* | *Anwendung* | *Affektiv-motivationale Ziele* | *Bezüge zur Heterogenität der SuS* |
|---|---|---|---|---|
| *(a) Was ist Ihnen im Mathematikunterricht besonders wichtig?* | 10 | 11 | 16 | 7 |
| *(b) Was ist für Sie Mathematik?* | 11 | 11 | 2 | 0 |
| *(c) Was sehen Sie für sich oder allgemein als größte Herausforderung im MU?* | 1 | 1 | 8 | 13 |
| *Teil 2: Ergebnisse (N=22)* | *Statische Sicht* | *Dynamische Sicht* | *Konstruktionsorientierung* | *Transmissionsorientierung* |
| Arithmetisches Mittel | 3,09 | 5,31 | 5,12 | 2,40 |

*Teil 3*: Unterschiede zwischen den Teilnehmenden von Ffunt@OWL und SinusQuest zeigen sich vor allem in Bezug auf die kognitive Aktivierung der Lernenden im Mathematikunterricht. Die Fachfremden stimmen der allgemeinen Zielsetzung, Unterricht kognitiv aktivierend zu gestalten, zwar in ähnlichem Maße zu wie ausgebildete Mathematiklehrpersonen. Fokussiert man jedoch die mathematikspezifischen Items zur kognitiven Aktivierung, dann liegen ihre Werte bei aktivierenden Unterrichtsmethoden und bei der Auswahl von Aufgaben mit verschiedenen Bearbeitungsmöglichkeiten deutlich niedriger (vgl. Tab. 3). Es ergibt sich eine Diskrepanz zwischen allgemein formulierter Zielsetzung und der Umsetzung im Mathematikunterricht. Die Fachfremden verbinden kognitiv aktivierenden Unterricht nicht in dem Maße mit Aufgabenauswahl und Unterrichtsmethodik wie ausgebildete Mathematiklehrpersonen.

**Tabelle 2: Ergebnisse zur Unterrichtspraxis**

| *Teil 3: Ergebnisse* | | *Ffunt@OWL* | *SinusQuest* |
|---|---|---|---|
| Kognitive Aktivierung (allgemein) | Arith. Mittel | 4,386 (N=19) | 4,265 (N=1903) |
| *Arith. Mittel der Einzelitems zur Umsetzung kognitiver Aktivierung im Unterricht* | | *Ffunt@OWL* | *SinusQuest* |
| *In meinem Unterricht kommen aktivierende Unterrichtsmethoden zum Einsatz.* | | 2,65 *(N=20)* | 3,505 *(N=1917)* |
| *Ich wähle in meinem Unterricht Aufgabenstellungen aus, die unterschiedliche Bearbeitungswege ermöglichen.* | | 3,05 *(N=20)* | 3,843 *(N=1938)* |
| *In meinem Unterricht setze ich Aufgaben ein, die auf unterschiedlichem Niveau bearbeitet werden können.* | | 2,35 *(N=20)* | 3,619 *(N=1930)* |

## Diskussion und Ausblick

Vor dem Hintergrund, Charakteristika fachfremd unterrichtender Lehrpersonen exemplarisch zu erkunden, zeigen unsere Ergebnisse eine Diskrepanz zwischen dem Erkennen von förderlichen Zielsetzungen für den Mathematikunterricht und ihrer mathematikunterrichtsspezifischen Umsetzung. Insbesondere wissen die fachfremd Unterrichtenden nicht in dem Maße um die konkrete Umsetzung kognitiver Aktivierung im Mathematikunterricht wie ausgebildete Mathematiklehrpersonen. Diese Erkenntnisse bilden eine Basis für die weitere Entwicklung der Qualifizierungsmaßnahme, um Fachfremde bei dem Transfer von Wissen in die Unterrichtspraxis nachhaltig zu unterstützen.

## Literatur


Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47* (1), 133–180.

Biehler, R., Fischer, P., Maitzen, Ch., Maxara, C., & Nieder, T., (2009): *Evaluation von SINUS-Hessen 2005 - 2007. Abschlussbericht des SINUS-Quest-Projekts*. Universität Kassel: Kasseler Online Bibliothek Repository & Archiv, 2009. – URL: http://urn:nbn:de:hebis:34-2009102930799 (Aufruf 28.12.2014).

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2008). *Professionelle Kompetenzen angehender Lehrerinnen und Lehrer, Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und –referendare. Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*, Münster, New York, München, Berlin (Waxmann).

Lünne, S., & Biehler, R. (2015). Ffunt@OWL: Qualifizierung fachfremd Mathematik unterrichtender Lehrerinnen und Lehrer im Regierungsbezirk Detmold (NRW). In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag.

Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. *Handbook of Research on Teacher Education,* 102–119.

Richter, D., Kuhl, P., Haag, N., & Pant, H. A. (2013). Aspekte der Aus- und Fortbildung von Mathematik- und Naturwissenschaftslehrkräften im Ländervergleich. In H. A. Pant, P. Stanat, U. Schroeders, A. Roppelt, T. Siegle & C. Pöhlmann (Hrsg.), *IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I* (S. 367–390). Münster: Waxmann.

Seidel, T., Schwindt, K., Rimmele, R., & Prenzel, M. (2008). Konstruktivistische Überzeugungen von Lehrpersonen: Was bedeuten sie für den Unterricht? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Sonderheft 9,* 259–276.

Törner, G., Rolka, K., Roesken, B., & Sriraman, B. (2010). Understanding a teacher's actions in the classroom by applying Schoenfeld's theory Teaching-In-Context: Reflecting on goals and beliefs. In B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 401-420). New York: Springer.

Steffen LÜNNE, Rolf BIEHLER, Paderborn

# Ffunt@OWL: Qualifizierung fachfremd Mathematik unterrichtender Lehrerinnen und Lehrer im Regierungsbezirk Detmold (NRW)

In Nordrhein-Westfalen liegt der Anteil der fachfremd Mathematik unterrichtenden Lehrerinnen und Lehrer in der Sekundarstufe I bei etwa 13,1% (Richter, Kuhl, Haag & Pant, 2013). In den kommenden Jahren wird ein so großer Teil der Mathematiklehrpersonen in den Ruhestand gehen, dass der Bedarf der Schulen nicht vom Nachwuchs gedeckt werden kann (Klemm, 2015), das verschärft die Problemlage. Vor diesem Hintergrund bieten die Bezirksregierungen Zertifikatskurse an, die fachfremd Mathematik unterrichtende Lehrpersonen qualifizieren. Im Beitrag wird ein solcher Zertifikatskurs vorgestellt, den das DZLM (www.dzlm.de) am Standort Paderborn neu entwickelt und gemeinsam mit der Bezirksregierung Detmold im Schuljahr 2014/15 durchführt. Im Fokus stehen dabei fachmathematische und fachdidaktische Kompetenzen, die gelebte Praxis an den Schulen und die Förderung wünschenswerter affektiv-motivationaler Charakteristika.

## Ausgangslage

Zertifikatskurse sind ein Qualifizierungsangebot der Bezirksregierungen in Nordrhein-Westfalen. Die teilnehmenden Lehrpersonen erhalten am Ende der Qualifizierung die offizielle Unterrichtserlaubnis. Zertifikatskurse haben ca. 20 Teilnehmende und finden über ein Schuljahr einmal in der Woche von 09:00 Uhr bis 16:00 Uhr statt. Die Inhalte für das Fach Mathematik in der Sekundarstufe I entstammen den Fachinhalten der Klassenstufe 5 bis 10. Die Teilnehmenden werden dienstverpflichtet und erhalten eine Stundenentlastung. Bedingung für den Erwerb der Unterrichtserlaubnis ist üblicherweise die Teilnehme an mindestens 80% der Fortbildungstage. Die Leitung der Zertifikatskurse obliegt Lehrkräften, die als Moderatoren und Moderatorinnen von der Bezirksregierung bestellt werden.

Ffunt@OWL (fachfremd unterrichten in Ostwestfalen-Lippe) basiert auf einer Kooperationsvereinbarung zwischen der Bezirksregierung Detmold und dem DZLM am Standort Paderborn. An die Teilnehmenden werden zusätzliche Bedingungen gestellt: Mathematikkenntnisse auf Abiturniveau, Unterricht in Mathematik im laufenden Schuljahr und aktive Mitarbeit in der laufenden Fortbildung, die in einem Portfolio dokumentiert wird.

Die Inhalte der Qualifizierung gliedern sich nach Vorgabe der Bezirksregierung in die vier Module Arithmetik, Algebra, Geometrie und Stochastik. Die didaktische Leitung obliegt dem DZLM am Standort Paderborn, die

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

einzelnen Fortbildungen werden in Zusammenarbeit mit vier Moderatoren und Moderatorinnen aus der Schulpraxis vorbereitet und durchgeführt. Ziele sind die Aufarbeitung der fachlichen Inhalte der Sekundarstufe I, fachdidaktische Grundlagen, Austausch von Unterrichtsideen, Einblicke in die Mathematik als Wissenschaft und eine Umorientierung hinsichtlich der Überzeugungen zu Mathematik und Mathematikunterricht. Dabei stehen Themen mit hoher subjektiver Relevanz für die Teilnehmenden, die Darstellung von Zielen des Mathematikunterrichts, die ihnen nicht bewusst sind (Lünne, Biehler, Rösken-Winter, Schüler, 2015), Reflexion über das eigene Fachwissen und das Vernetzen innerhalb des eigenen Fachkollegiums im Sinne der DZLM-Gestaltungsprinzipien im Zentrum der Qualifizierung (Bosse, 2014).

Die inhaltliche Ausgestaltung der Qualifizierung wird im Folgenden am Modul Algebra und am Fortbildungstag zum Thema Lineare Funktionen exemplarisch vorgestellt.

## Aufbau eines Moduls am Beispiel des Moduls Algebra

Das Modul Algebra umfasst zwölf Fortbildungstage und wurde von November 2014 bis Anfang Februar 2015 durchgeführt. Die Themen der einzelnen Fortbildungstage strukturieren sich gemäß den inhaltsbezogenen Kompetenzen der nordrhein-westfälischen Kernlehrpläne für die Sekundarstufe I. Themenschwerpunkte sind Zuordnungen (proportionale, antiproportional), lineare Funktionen und quadratische Funktionen sowie Terme und Gleichungen. Zur Vorbereitung und Aufarbeitung wurde dabei den Teilnehmenden Schulbuchmaterial und Schülermaterial aus dem Unterricht der Moderatoren und Moderatorinnen zur Verfügung gestellt. Ziel der inhaltlichen Aufarbeitung ist ein besserer Überblick über die genannten Themen, mögliche Lernschwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler und die Reflexion über das eigene Wissen zu diesen Themenbereichen. Dies soll eine bessere Unterrichtsvorbereitung ermöglichen. Eingebunden war zudem ein Fortbildungstag zum Thema Modellieren mit Linearen Funktionen. Diese und alle anderen prozessbezogenen Kompetenzen wurden zu jedem inhaltlichen Thema aufgegriffen. Eine Erprobung der Inhalte im eigenen Unterricht oder bei Hospitation im Fachkollegium konnte aber nicht immer sichergestellt werden. Alternativ wurden Schülerprodukte aus den Lerngruppen der Moderatoren und Moderatorinnen analysiert.

## Aufbau eines Fortbildungstages am Beispiel Lineare Funktionen

Jeder Fortbildungstag gliedert sich in zwei wesentliche Abschnitte mit unterschiedlichen Funktionen: Lernen und Bewerten von Schulmathematik, Lehren von Schulmathematik.

Am Vormittag eines Tages steht das eigene *Lernen und Bewerten von Schulmathematik* im Vordergrund. Dazu erhalten die Teilnehmenden einen kurzen Input in Form eines Vortrags, der die Inhaltsbereiche in knapper Form anhand von Schulbuchmaterial vorstellt und Beziehungen zwischen den einzelnen Teilaspekten und wesentliche Gesichtspunkte darstellt. An den Vortrag schließt sich eine Arbeitsphase an, in der die Teilnehmer Schulbuchaufgaben lösen und diese und andere Schulbuchinhalte bewerten. Input und Übung mit Reflexion wechseln sich dabei ab. Die *schulmathematischen Inhalte* dieser ersten Phase werden dann im Folgenden aufgegriffen und *von einem höheren Standpunkt betrachtet*. Eine Aufgabe, ein Themenaspekt, die/der zuvor behandelt wurde, wird aus Sicht der Fachmathematik oder der Fachdidaktik genauer analysiert.

Für den Themenbereich der Linearen Funktionen haben wir uns entschieden, im Inputvortrag die charakterisierenden Eigenschaften Linearer Funktionen in Abgrenzung zu andere Funktionsklassen vorzustellen und in Funktionsterm, Wertetabelle, Funktionsgraph und Sachzusammenhängen zu verdeutlichen. Als eine Übungsaufgabe sollten die Teilnehmenden die folgende Aufgabe bearbeiten und analysieren, auf welchen Wegen die Schülerinnen in Schüler zu einer Lösung kommen könnten.

**Welche Wertetabellen passen zu einer Linearen Funktion?**

| x | y |
|---|---|
| -2 | 4 |
| -1 | 2 |
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 2 |

| x | y |
|---|---|
| -2 | -2 |
| -1 | -1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |

| x | y |
|---|---|
| -2 | 2 |
| -1 | 2 |
| 0 | 2 |
| 1 | 2 |
| 2 | 2 |

| x | y |
|---|---|
| -2 | -4 |
| -1 | -2 |
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |

| x | y |
|---|---|
| 2 | -4 |
| 1 | -2 |
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |

**Abbildung 1: Beispielaufgabe zum Fortbildungstag Lineare Funktionen.**

Am Nachmittag steht mit der schulpraktischen Umsetzung das *Lehren von Schulmathematik* im Fokus. Dazu stellen die Moderatoren und Moderatorinnen Lernumgebungen vor, die die Teilnehmenden ausprobieren und mit Hilfe ihrer erworbenen Kenntnisse aus dem Vormittag sowie ihren eigenen Erfahrungen bewerten sollen. Zudem wird hier Schülermaterial erstellt und nach Erprobung über den Einsatz reflektiert. Außerdem werden kurze Videoabschnitte aus Mathematikunterricht besprochen.

Bei den Linearen Funktionen haben wir uns entschieden, dass die Teilnehmenden mit Hilfe von Geogebra eine Lernumgebung entwickeln, in der die Schülerinnen und Schüler den Einfluss von Steigung und y-Achsenabschnitt auf die Lage des Graphen erfahren können. Die Teilnehmenden sollten dabei in Kleingruppen gemeinsam Arbeitsaufträge und Ziele für ihre Schülerinnen und Schüler formulieren sowie die Lernumgebung einer anderen Gruppe ausprobieren und bewerten. Das Erstellen einer Lernumgebung wurde dabei mit Material und durch die Moderatoren und Moderatorinnen unterstützt.

## Fazit und Ausblick

Die Qualifizierung soll im nächsten Jahr wiederholt werden. Das Fortbildungsmaterial und damit die Qualifizierung insgesamt werden deshalb beständig überarbeitet und erweitert. Dazu geben die Teilnehmenden Feedbackbögen nach jedem Tag ab. Es zeigt sich dabei einerseits, dass die Teilnehmenden gern mit den Materialien arbeiten und sie zur Reflexion nutzen, andererseits dass es innerhalb der Teilnehmenden verschiedene Untergruppen gibt, diejenigen, die das notwendige Fachwissen sicher beherrschen und verstärkt unterrichtspraktisch arbeiten wollen, andere, die viel Zeit für die eigene Aufarbeitung des Fachwissens benötigen, weil sie ihr eigenes Wissen bisher falsch eingeschätzt haben. Wir wollen das Fortbildungsmaterial und die Gestaltung der Maßnahme so erweitern, dass wir allen Teilnehmenden gerecht werden. Eine genaueres Feedback zur weiteren Ausgestaltung des Moduls Algebra erhoffen wir uns über eine Interviewstudie mit allen Teilnehmenden am Ende des Schuljahres.

## Literatur

Bosse, M. (2014). Wie können fachfremd unterrichtende Mathematiklehrkräfte durch Lehrerfortbildungen effektiv unterstützt werden? In J. Roth & J. Ames (Hrsg:) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (Bd. 2, S. 221–224). Münster: WTM-Verlag.

Klemm, K. (2015): Lehrerinnen und Lehrer der MINT-Fächer: Zur Bedarfs- und Angebotsentwicklung in den allgemein bildenden Schulen der Sekundarstufen I und II am Beispiel Nordrhein-Westfalens. Gutachten im Auftrag der Deutsche Telekom Stiftung. www.telekom-stiftung.de/Klemm-studie.

Lünne, S.; Biehler, R.; Rösken-Winter, B.; Schüler, S. (2015): Mathematikbezogene Beliefs fachfremd unterrichtender Lehrerinnen und Lehrer zu Beginn einer Qualifizierungsmaßnahme. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Richter, D.; Kuhl, P.; Haag, N.; Pant, H. (2013): *Kapitel 12. Aspekte der Aus- und Weiterbildung von Mathematik- und Naturwissenschaftslehrkräften im Ländervergleich*. In: Pant, H.; Stanat, P.; Schroeders, U.; Roppelt, A.; Siegle, T.; Pöhlmann, C. (Hrsg.) (2013): IQB-Ländervergleich 2012. *Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I.* (pp. 367-390). Münster: WTM-Verlag.

Tobias MAI, Rolf BIEHLER, Paderborn

# eVEMINT – Eine multimediale Unterstützung zum Einstieg in selbstreguliertes Lernen mit digitalen Vorkursmaterialien

Digitale Lernumgebungen werden immer fortschrittlicher und dabei vielfältig eingesetzt – insbesondere für Lernsituationen außerhalb von Präsenzlernphasen. Aber je mehr Lernphasen außerhalb von Präsenzveranstaltungen stattfinden, umso größer wird auch die Anforderung an den Lernenden, eigenständig zu arbeiten. Selbstreguliertes Lernen kann dabei auf verschiedenen Ebenen stattfinden und gefördert werden. Im Folgenden soll es am Beispiel VEMINT um die Frage gehen, wie der selbstregulierte Umgang mit komplexen Lernmaterialien, welche eine Vielzahl an unterstützenden Angeboten enthalten, besser gelingen kann. Bevor die Erweiterung von VEMINT namens eVEMINT und dessen zu Grunde liegende Designprinzipien sowie die Umsetzung vorgestellt werden, wird hier kurz auf das VEMINT-Projekt mit dessen Lernmaterialien und Konzepten eingegangen.

Das **V**irtuelle **E**ingangstutorium **M**athematik **I**nformatik **N**aturwissenschaften **T**echnik (www.vemint.de) ist ein gemeinsames Projekt der Partner Technischen Universität Darmstadt, Universität Kassel, Leuphana Universität Lüneburg und Universität Paderborn mit dem Ziel, Studienanfängern den Übergang in die Hochschulmathematik zu erleichtern. Dazu wurden umfassende Lernmaterialien (60 thematisch abgeschlossene Module organisiert in 7 Kapiteln) zusammen mit didaktischen Lehrkonzepten konzipiert, welche seit 2003 kontinuierlich weiterentwickelt und gepflegt werden. Zu fast allen Lernmodulen werden zusätzlich diagnostische Vor- und Nachtests angeboten.

| *Kompetenz* | *Enthaltene Fähigkeiten und Fertigkeiten* |
|---|---|
| rechnerisch-technische Kompetenz | rechnen, Graphen zeichnen, ... |
| Verständnis | erkennen und beschreiben von Verbindungen zwischen Konzepten, ... |
| Anwendung und Modellierung | Aufgaben mit Lebenswelt-Bezug lösen, … |
| Fehlerdiagnose | erkennen von Fehlern in mathematischen Argumentationen, ... |

**Tabelle 1**

Alle Lernmodule sind homogen in die primären Bereiche Übersicht, Hinführung, Erklärung, Anwendungen, Fehler(-diagnose) und Aufgaben sowie die zusätzlichen Bereiche Info, Visualisierungen und Ergänzungen unter-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

teilt. Eng damit verbunden ist das für VEMINT definierte Kompetenzmodell. Innerhalb eines Themas werden vier Kompetenzen (vgl. Fischer, 2014) wie in Tabelle 1 gezeigt unterschieden.

Aufbauend auf dieser Struktur wurden im VEMINT-Projekt Zugänge zu den Modulen für unterschiedliche Lernszenarien entwickelt. Abhängig vom Lernszenario sind unterschiedliche Bereiche eines Moduls für den Lernenden von Relevanz. Der Basiszugang zu einem Modul bedeutet die Bearbeitung aller primären Bereiche eines Moduls – wahlweise mit oder ohne Hinführung an das Thema. Selektive Zugänge hingegen erlauben die gezielte Nutzung, etwa als Nachschlagewerk, Arbeitsbuch zum Üben oder zur Vertiefung des Wissens (vgl. Biehler et al., 2012).

Die Erfahrungen beim Einsatz von VEMINT in Vorkursen belegen, dass vor allem in unseren eKursen (Kurse mit erhöhtem Anteil von e-Learning und mit weniger Präsenzterminen verglichen mit anderen Kursvarianten) hohe Erwartungen an das selbstregulierte Lernen der Teilnehmer gestellt werden. Deshalb ist Unterstützung sowohl bei der Organisation des Lernens über den gesamten Kurszeitraum, z.B. durch Wochenpläne und Modulauswahlempfehlungen, als auch bei der Auswahl passender Lernzugänge zu einem Modul notwendig.

In dieser Hinsicht birgt sich in VEMINT noch Optimierungspotential hinsichtlich der angelegten Möglichkeiten selbstreguliert zu lernen. eVEMINT hat das Ziel, die bereits im Lernmaterial angelegten Möglichkeiten zur Selbstregulation für den Lernenden hervorzuheben und deutlicher zu kommunizieren. Auf diese Weise sollen selbstregulierte Lernprozesse angeregt werden. Gleichzeitig sollen die Lernenden durch die zusätzlichen Unterstützungsmaßnahmen nicht unnötig zusätzlich beansprucht werden.

eVEMINT ist ein multimediales Element in einem VEMINT-Modul, welches für den Lernenden als kleines Fenster sichtbar wird. Das Besondere daran ist, dass eVEMINT und das Lernmaterial sich wechselseitig beeinflussen können und miteinander interagieren. Beides reagiert gleichzeitig auch auf Handlungen bzw. Eingaben des Lernenden. eVEMINT erklärt und zeigt das Lernmaterial direkt. Es muss nicht auf alternative Repräsentationen, z.B. Bilder, zurückgegriffen werden. Unter http://tinyurl.com/eVEMINT kann man sich einen Eindruck von eVEMINT verschaffen.

Für die praktische Realisierung von eVEMINT wurde im Vorfeld eine Reihe von Gestaltungsprinzipien erarbeitet (vgl. Mai, 2014). Hier wird nun eine kleine Auswahl davon vorgestellt, die zeigen soll, wie Aussagen aus verschiedenen Fachgebieten sich zu einem Gesamtkonzept ergänzen.

Selbstreguliertes Lernen kann durch günstige Rahmenbedingungen gefördert werden. Eine Lernumgebung sollte nicht nur Raum für eigene Entscheidungen geben, sondern solche Entscheidungsmöglichkeiten auch aufzeigen. So wird die Anwendung selektiver, individueller Lernstrategien gefördert und Lernende können sich dieser bewusst werden. Allgemeiner: Material zum selbstregulierten Lernen sollte auch die Möglichkeit zur Selbstinstruktion im Umgang damit einräumen. Deshalb ist eVEMINT direkt in den Modulen eingebettet und verfügbar. Erklärt wird nicht nur der Aufbau und Umgang mit dem Lernmaterial, sondern auch der Umgang mit eVEMINT selbst wird kurz erläutert.

Ganz andere Sichtweisen auf Lernprozesse bieten die Cognitive Load Theory (Sweller et al., 2011) und die Cognitive Theory of Multimedia Learning (Mayer, 2014). Durch Annahmen über kognitive Prozesse wie das Vorhandensein eines in seiner Kapazität begrenzten Arbeitsgedächtnisses, in dem Informationen aktiv verarbeitet werden und die dualen Eingangs-Kanäle (visuell und auditiv), kommen die Theorien zu Modellannahmen, welche mittels empirischer Forschung erstaunlich gut belegt sind (vgl. Hofmann, 2011). Beispielsweise ist es nach dem *Kohärenzprinzip* hinderlich, zusätzliche Informationen zum eigentlichen Lerngegenstand hinzuzufügen. Das kann für die Lösung einer Aufgabe unnötige Kontextinformationen betreffen, bezieht sich aber auch auf unnötige Hintergrundgeräusche, die eingespielt werden wie z.B. musikalische Unterlegungen. Andererseits ist es nach dem Multimedia-Prinzip durchaus förderlich, Informationen sowohl visuell als auch auditiv aufzubereiten. Deshalb nutzt eVEMINT ein Video mit Tonaufnahme, um Informationen an den Lernenden zu vermitteln, da dieser sich so parallel zur Erläuterung auf das Material konzentrieren und sich daher mit der Anleitung und ihrem Gegenstand gleichzeitig befassen kann.

Ist für einen Sachverhalt ausreichend Expertise vorhanden, kann der *Expertise-Umkehr-Effekt* eintreten. Informationen, die für Anfänger nützlich und hilfreich waren, können Fortgeschrittene vom Wesentlichen ablenken und stören. Eine Anleitung, welche zu Beginn genau das richtige Maß an Informationen enthielt, behindert fortgeschrittene Lernende tendenziell. Eine Idee für den Umgang mit diesem Problem kann in dem Feld des Usability Engineering der Informatik gefunden werden.

Digitale Lernumgebungen für Mathematik sind, abstrakt betrachtet, eine Software mit Anwendungsoberfläche. Das Ziel im Usability Engineering ist es, Benutzerfreundlichkeit und gute Bedienbarkeit sicherzustellen. Das ist auch für Lernumgebungen wünschenswert. Nielsen formulierte schon 1993 Heuristiken, um Software mit Blick auf die Benutzerfreundlichkeit zu verbessern. Eine Heuristik von Nielsen ist, dass ein Programm Abkürzungen für Experten enthalten sollte. Wenn also der Expertise-Umkehr-Effekt zu befürchten ist, kann diesem durch Abkürzungen in der Programmbedienung begegnet werden. Textverarbeitungsprogramme bieten schnelles Speichern mit der Tastenkombination Strg + s an; eVEMINT ermöglicht durch ein strukturiertes Inhaltsverzeichnis die Navigation an die für den Lernenden interessanten Stellen. Eine andere Heuristik behandelt die Konsistenz der Software zum Verhalten des restlichen Systems. eVEMINT berücksichtigt dies durch gestalterische und farbliche Anpassung an das VEMINT-Material; es berücksichtigt aber auch übergeordnete Bedienkonzepte. So kann eVEMINT geschlossen werden, indem der Lernende auf das X-Symbol oben in der Ecke klickt, wie es von den meisten Betriebssystemen her allgemein bekannt ist.

Das im Rahmen einer Staatsexamensarbeit entstandene eVEMINT wurde in den Vorkursen zum Wintersemester 2014/15 pilotiert. Eine ausführlichere Evaluation ist für die kommenden Vorkurse im Wintersemester 2015/16 geplant. Durch die Herausarbeitung allgemeiner Designprinzipien können darauf aufbauend in Zukunft auch weitere didaktische Innovationen konzipiert und umgesetzt werden, welche sich anderen Aspekten der Lernmaterialien widmen.

## Literatur


Biehler, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., & Wassong, T. (2012). Mathematische Vorkurse neu gedacht: Das Projekt VEMA. In M. Zimmermann, C. Bescherer, & C. Spannagel (Eds.), *Mathematik lehren in der Hochschule - Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen* (S. 21-33). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Dilger, B. (Hrsg.). (2005). *Konzepte, Positionen und Projekte im Bildungsgang Einzelhandel.* Paderborn: Eusl-Verl.-Ges.

Fischer, P. (2014). *Mathematische Vorkurse im Blended Learning Format - Konstruktion, Implementation und wissenschaftliche Evaluation*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Mai, T. (2014). *Entwicklung, didaktische Begründung und technische Realisierung einer multimedialen Anleitung für das selbstständige Lernen mit dem VEMINT-Material* . Staatsexamensarbeit. Universität Paderborn: Institut für Mathematik.

Mayer, R. E. (2001). *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2nd ed.). Cambridge ; New York: Cambridge University Press.

Nielsen, J. (1993). *Usability engineering.* San Francisco, Calif.: Morgan Kaufmann Publishers.

Sweller, J., Ayres, P. & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory.* New York, NY: Springer New York.

Michael MARXER, Freiburg

# Funktionale Zusammenhänge auf den Punkt gebracht. Oder: Warum sich Funktionen nicht gerne „verschieben“ lassen

Beim Thema „Funktionen“ fokussiert der Mathematikunterricht häufig auf die Betrachtung von Graphen und deren Charakteristika unter Verwendung algebraischer Werkzeuge. Schülerformulierungen wie „Ich verschiebe die Funktion“ lassen erkennen, dass ein problematisches Verständnis von Funktionen im Sinne graphischer Objekte vorliegt. Der Beitrag stellt Überlegungen an, wie die Formalisierung der Abhängigkeit von Größen stärker ins Blickfeld gerückt werden kann und illustriert dies an Aufgabenformaten

## 1. Vorstellungsumbrüche bei der Beschreibung von Funktionen: Von der eindimensionalen zur zweidimensionalen Darstellung

Die Betrachtung funktionaler Zusammenhänge stellt für Lernende einen häufig nicht bewusst erlebten Vorstellungsumbruch dar. In der Arithmetik liegt der Schwerpunkt auf den Operationen, dagegen geht es beim Thema Funktionen um die Betrachtung von *Beziehungen* zwischen Größen. Entsprechend unterscheiden sich die Formalisierungen: Arithmetische Operationen können beispielsweise auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden. Funktionale Beziehungen dagegen erfordern eine Tabelle, ein Pfeildiagramm oder eben die Darstellung mit zwei Zahlenstrahlen, also beispielsweise in einem Koordinatensystem.

Am Anfang der systematischen Behandlung von Funktionen im Unterricht ist es hilfreich, dieser graphischen Formalisierung von Beziehungen größere Aufmerksamkeit zu schenken. Entscheidend ist das Verständnis, dass ein Punkt im Koordinatensystem für einen Zusammenhang zwischen zwei Größen steht. Die weitergehende Erkenntnis besteht darin, dass sich bei Betrachtung einer größeren Zahl von Beziehungen resp. Punkten (manchmal) eine charakteristische Anordnung ergibt, deren geometrische Form sich über Begriffe (Gerade, Parabel, Hyperbel) beschreiben lässt. Dabei muss erstens deutlich werden, dass es sich zunächst um diskrete Werte handelt (und Zwischenpunkte nur vermutet werden können), zweitens, dass eine begrifflich beschreibbare Anordnung der Punkte nicht zwangsläufig gegeben ist.

In der Schule wird dieser Beschäftigung mit diskreten Wertepaaren häufig nicht lange Aufmerksamkeit geschenkt. Dies bewirkt, dass Funktionen – zumindest von den Schülern – begrifflich häufig mit der Form ihres Graphen gleichgesetzt werden: „Die Funktion ist eine Hyperbel“, „Die Funkti-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

onsgleichung beschreibt eine um 3 nach links verschobene Parabel“ sind typische Aussagen. Graphen werden dabei als geometrische Objekte interpretiert, die nach erlernten Regeln gestreckt, gestaucht, verschoben und „auf den Kopf gestellt“ werden können. Der um 90° gedrehte Graph einer quadratischen Funktion stellt dann konsequenterweise für Schüler kein Problem dar.

Wenn die Sichtweise verloren geht, dass ein Funktionsgraph aus einer Punktmenge besteht, erschwert dies das Erkennen der jeweils beschriebenen funktionalen Beziehung: Der Graph-als-Bild-Fehler sei hier als ein weitverbreitetes und vielfach untersuchtes Fehlermuster genannt.

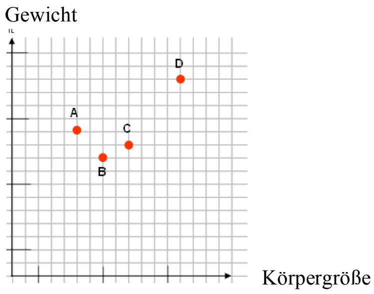
## 2. Diskrete Zuordnungen

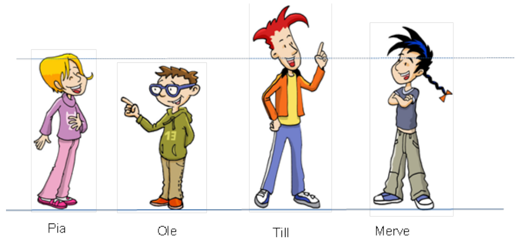
„Schüler ... müssen sich ... mit Phänomenen beschäftigen können, denen ein funktionaler Zusammenhang innewohnt. Erst dann beginnt die mathematische Beschreibung und Analyse“ (Büchter 2008). Beim Thema Funktionen arbeiten die meisten Schulbücher nur während einer kurzen Einführungsphase mit Aufgabenformaten, bei denen Graphen in nichtskalierten zweidimensionalen Achsenkreuzen interpretiert oder gezeichnet werden müssen. Danach wird sehr schnell zu Aufgabenstellungen übergegangen, die sich schwerpunktmäßig dem Wechsel zwischen den Darstellungsformen Graph und Funktionsgleichung widmen. Überwiegend beschränken sich die Beispiele auf Zusammenhänge, die sich als „ordentliche“, d.h. proportionale, lineare, quadratische etc. Funktion beschreiben lassen („Die Bevölkerung Chinas wächst exponentiell“, „Der Zusammenhang ist antiproportional“). Die Graphen lassen sich meist als durchgezogene Linie mit einer charakteristischen Form zeichnen und erlauben in der Idealisierung dieser Beziehung das Aufstellen einer Funktionsgleichung.

Wünschenswert vor allem in der Einführungsphase – aber auch immer wieder „zwischendurch“ – sind Aufgabenformate, die die Beziehungen zwischen zwei Größen buchstäblich „auf den Punkt“ bringen. Die nachstehende Aufgabe wurde angeregt durch die zahlreichen Beispiele von Malcolm Swan (1985). Typisch für solche Aufgabenformate ist, dass als Lösung eine Punktmenge entsteht, deren einzelne Punkte sich gerade *nicht* zu einer charakteristischen Anordnung formieren.

(a) Ordne die Namen den Buchstaben zu.

(b) Zeichne drei Personen E, F und G ein so dass gilt: F ist größer als E, G ist schwerer als F, E ist größer als G




Mathewerkstatt 5, Cornelsen-Verlag

Hier wird erkannt und geübt, wie eine Zuordnung durch einen Punkt dargestellt werden kann. Das Denken „in zwei Richtungen" und das Gespür für die Verwendung von Skalierungen wird angeregt – und zwar gerade *weil* hier noch keine Werte an den Achsen notiert sind, sondern qualitativ in Kategorien wie größer als/ kleiner als gedacht wird.

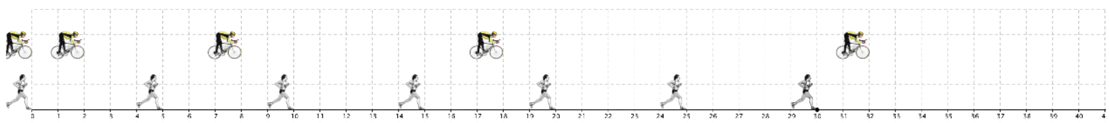
Die Gesamtzahl der Punkte kann nicht als geometrisches Objekt („Parabel", „Gerade") verstanden werden. Vielmehr führt die Aufgabenstellung auf den Kern dessen, was am Thema Funktionen für die Lernenden neu ist: Die graphische Formalisierung einer Beziehung durch einen Punkt.

## 3. Von der diskreten zur kontinuierlichen Sichtweise

Sobald der einzelne Punkt als Möglichkeit zur Darstellung eines Zusammenhangs verstanden wurde können Punktmengen „als Ganzes" betrachtet werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Untersuchung, ob Zwischenwerte möglich oder sogar zwingend erforderlich sind: entlang einer Geraden, auf einer typischen Kurve etc. Das Repertoire an Funktionen, die hierbei namentlich erfasst und dann auch algebraisch formalisiert werden können, erweitert sich von Klassenstufe zu Klassenstufe.

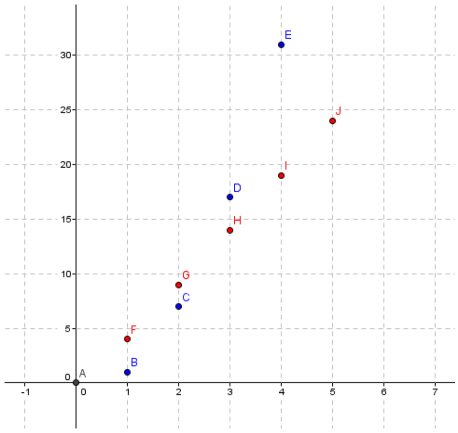
Hierzu ein Aufgabenbeispiel für die Klassenstufe 9:

Vergleich eines Radfahrers und eines Sprinters in der Phase nach dem Start



Mathewerkstatt 9, Cornelsen-Verlag (in Vorbereitung)

Eine Kamera hat jede Sekunde ein Bild geschossen. Man sieht, wer nach 1 Sekunde, nach 2 Sekunden, usw. an welcher Stelle war. Untersuche für beide die Abhängigkeit der zurückgelegten Strecke y von der Zeit x



Lernende machen hier die entscheidende Erfahrung: Der Vorgang ist stetig, die Darstellung ist (noch) diskret. Naheliegend ist, plausible Zwischenwerte (Zwischenpunkte) zu finden. Offensichtlich müssen diese jedoch beim Radfahrer nach einer anderen Regel angenommen werden als beim Sprinter. Eine geradlinige Verbindung der Punkte würde beim Radfahrer die Realität offensichtlich nicht widerspiegeln. Unumstritten ist aber, dass Zwischenpunkte nicht nur zulässig, sondern sogar zwingend erforderlich sind. Hier werden über Alltagserfahrung der Sinn und die Grenzen einer Modellbildung erfahren und der Einsatz dazu passender mathematischer Hilfsmittel erlernt.

Funktionen dienen vor allem dem Aufdecken von Zusammenhängen (Vollrath 2007). Ist die Regelmäßigkeit erst entdeckt, dann erschließt sich, dass zwar zunächst nur ausgewählte Wertepaare verwendet werden, aber dann ein in einer Gleichung beschreibbarer funktionaler Zusammenhang auch für die Zwischenwerte angenommen werden kann.

Variationen der Parameter einer Funktionsgleichung führen schließlich zur weiteren Vertiefung. Die Formulierung „Stauchung der Parabel" weicht der funktionalen Sicht „Jeder Funktionswert fällt bei entsprechendem Argument kleiner aus".

## Literatur


Vollrath, Hans-Joachim : *Funktionale Zusammenhänge.* In: Linneweber-Lammerskitten, Helmut (Hrsg.) 2014: Fachdidaktik Mathematik. Kallmeyer-Verlag

Leuders, T.; Leuders, J., Jaschke, T. (i. Vorb.): *Bewegungen im Sport*. In: Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg): *Mathewerkstatt 9*. Berlin: Cornelsen

Büchter, Andreas (2008): *Funktionale Zusammenhänge erkunden*. In: Mathematik lehren 148, 2008, S. 4 - 10

Wörn, Claudia (2008): *Funktionen handelnd erleben*. In: Wagner, A. (Hrsg.): Offene Lernangebote und Lernarrangements in der Hauptschule.

Vollrath, Hans-Joachim & Weigand, Hans-Georg (2007): *Algebra in der Sekundarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag

Swan, Malcolm (1985): *The language of functions and graphs. An examination module for secondary schools.* Manchester, Nottingham: Joint Matriculation Board & Shell Centre for Mathematical Education

Robert Ivo MEI, Aachen

# Rechenkniffe und Monsterterme in der Mathematik für Ingenieure

Vergleicht man universitäre Mathematik-Aufgaben aus Anfangsvorlesungen in reinen Mathematikstudiengängen mit solchen in Ingenieurstudiengängen, so fällt auf, dass bei letzteren oft längere Terme verwendet werden und häufiger spezielle Kniffe zur Lösung nötig sind. Dieser Beitrag beschäftigt sich mit Gründen für dieses Phänomen, didaktischen Problemen, die sich daraus ergeben können, und möglichen Konsequenzen zum Umgang damit in der Lehre.

## 1. Beispiele für Rechenkniffe und Monsterterme

Was hier unter „Rechenkniffen“ und „Monstertermen“ verstanden wird, ist am besten an Beispielen zu veranschaulichen. Zunächst für Rechenkniffe:

*Erweiterungstrick:*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-n}-n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-n\right)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}$$

*Päckchen-Packen:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(x)}{2x^2\sin(x)\cos(x)+x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^3(x)}{x^3}}{2\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\cos(x)+1} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

Der Kniff tritt jeweils gleich bei der ersten Umformung auf und ist für die

$\operatorname{Im}\left(iz\left(\overline{z}-2\right)\right) \le \operatorname{Im}\left(3i\left(z^2+1\right)\right)-3\left(\operatorname{Im}\left(iz\right)\right)^2$ **und** $\left(\operatorname{Re}\left(\overline{z}\left(z-2i\right)\right)-2\operatorname{Re}\left(z\right)\right)\cdot\operatorname{Re}\left(\frac{1}{iz}\right)\ge 0,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Lösung praktisch unverzichtbar. Der zweite Grenzwert lässt sich zwar beispielsweise auch mit der Regel von L'Hospital finden, dies nimmt jedoch deutlich mehr Zeit in Anspruch und ist fehleranfälliger. In Unterscheidung zu „normalen“ mathematischen Werkzeugen wie dem Gleichnamigmachen von Brüchen lässt sich charakterisieren: Rechenkniffe sind mathematische Werkzeuge, die bei wenigen speziellen Aufgabentypen vorkommen, dort aber für die Lösung praktisch unverzichtbar sind. Ein Beispiel für einen Monsterterm liegt etwa vor, wenn die durch gegebene Menge komplexer Zahlen bestimmt und skizziert werden soll. Charakterisieren kann man Monsterterme dadurch, dass sie länger sind, als es zum Nachweis der geprüften Fähigkeit nötig wäre.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 2. Gründe für diese Ausprägung der Ingenieurmathematik

Woher stammt diese Schwierigkeit, die sich u. a. in Kniffen und großen Termen äußert? Historisch ist sicherlich die Akademisierung des Ingenieurwesens zum Ende des 19. Jahrhunderts zu nennen (vgl. Kessel et al. 2008, S. 1). Zudem sind Gründlichkeit und Beachtung von Extremfällen ohne Zweifel sinnvolle Fähigkeiten für Ingenieure. Insbesondere große Terme können Übersicht, Kalkülsicherheit etc. prüfen; zudem ergeben sie sich ganz natürlich in Anwendungskontexten.

## 3. Mögliche didaktische Probleme

Bei verstärkter Behandlung von Kniffen und großen Termen können sich aber didaktische Probleme ergeben, was nun anhand einiger Studentenlösungen zu einer Klausuraufgabe aus der Ingenieurmathematik demonstriert wird. Die Aufgabe erforderte keine Kniffe, in altem Übungsmaterial waren diese jedoch noch häufig. Dadurch traten Effekte der Behandlung von Rechenkniffen recht deutlich hervor. Die Klausuraufgabe lautete wie folgt:

Für $\beta \in \mathbb{R}$ sei

$$f_\beta(x) = \begin{cases} x\left(\cos(2x) - 1\right) & , \ 0 < x \\ \beta \cdot \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} & , \ x < 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $f_\beta$ in $x_0 = 0$ mit dem Wert 0 stetig ergänzbar ist.

(ii) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die in (i) stetig ergänzte Funktion $\tilde{f}_\beta$ in $x_0 = 0$ differenzierbar?

Die einfachste Lösung benutzt links- und rechtsseitige Grenzwertbildung, Einsetzen und die Regel von L'Hospital. Wie haben es Studenten gelöst? Neben vielen richtigen, einfach gehaltenen Lösungen gab es verbreitete Schwierigkeiten. Dazu vier Beispiele:

1) $$\lim_{x\downarrow 0} f_\beta(x) = \lim_{x\downarrow 0}\left(x\cos(2x) - x\right) = \lim_{x\downarrow 0}\left(x\cos(2x) - x\right) = \lim_{x\downarrow 0}\left(\left(\cos^2(x) - \sin^2(x) - 1\right)x\right)$$
$$= \lim_{x\downarrow 0}\left(1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) - 1\right)x = \lim_{x\downarrow 0} -2\cdot\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot x^3 = -2\cdot 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

2) $$\lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\dfrac{x\frac{\sin x}{x}}{x\frac{\tan x}{x}} - x\cdot\dfrac{\sin x}{x}}{x\cdot x}\left(= \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{\text{"}0\text{"}}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\sqrt{1-\sin^2 x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\sqrt{1 - x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot x\cdot\frac{\sin x}{x}} - x\cdot\frac{\sin x}{x}}{x\cdot x} = 0$$

3) $$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\uparrow 0}\beta\cdot\Bigg(\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{\to 1}\Bigg) = \frac{0\cdot\beta}{1} = 0$$

4) $$\lim_{x\uparrow 0}\left|\frac{\widetilde{f_\beta}(x)-\widetilde{f_\beta}(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\uparrow 0}\left|\beta\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^3}\right| \qquad \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"} \quad \text{L'Hospital}$$
$$= \lim_{x\uparrow 0}\ |\beta|\cdot\left|\frac{\cos x - x\cdot\sin x-\cos x}{3x^2}\right| = \lim_{x\uparrow 0}\ |\beta|\cdot\left|\frac{-\sin x}{3x}\right| \qquad \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"} \quad \text{L'H}$$
$$= \lim_{x\uparrow 0}\ |\beta|\cdot\left|\frac{-\cos x}{3}\right| = |\beta|\cdot\tfrac{1}{3}\overset{!}{=}0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta=0$$

In den Beispielen 1)–3) fällt ein Hang zur Anwendung von Rechenkniffen auf (Päckchen-Packen, Additionstheoreme, in nicht abgebildeten Beispielen auch der Mittelwertsatz). In 1) und 2) wurde dadurch die Aufgabe unnötig erschwert. Durch lange Rechnungen wurde in beiden Fällen Prüfungszeit verloren. Auffällig ist aber auch, dass hier die grundlegenden Fähigkeiten in Kalkül und Schulstoff vorhanden sind, und dass durchaus etwas gelernt wurde. So wurde in 1) fehlerfrei umgeformt und der Grenzwert bestimmt, auch scheint das Grenzwertkonzept verstanden zu sein. Bei 3) tritt dagegen ein echter Fehler auf, die Anwendung des Päckchen-Packens wird übergeneralisiert. Bei den Beträgen im letzten Beispiel 4) liegt vermutlich eine Verwechslung mit der notwendigen Betragssetzung bei der (ε,δ)-Definition von Funktionsgrenzwerten vor. Insgesamt scheint es in den Beispielen trotz teils weitentwickelter Fähigkeiten an einem Gespür dafür zu mangeln, wann sich welche Lösungsverfahren (besser) eignen.

## 4. Vermutungen zu den Ursachen der gezeigten Schwierigkeiten

Die gezeigten und ähnliche Schwierigkeiten traten zu oft auf, um nur als Einzelfälle gelten zu können. Woher kam in diesen Fällen die Fixierung auf Rechenkniffe? Bei einigen mag dies an verschleppten Mängeln aus der Schulzeit gelegen haben (vgl. auch Kersten 2014). Ich vermute aber aufgrund der meist sicheren Kalkülbeherrschung, dass eine problematische Lernhaltung zur universitären Mathematik eine Rolle gespielt hat (vgl. Rooch et al. 2013, S. 399). Diese Haltung ist charakterisiert durch

- verschobene Prioritäten, bei denen auf Rechenkniffe mehr Wert gelegt wird als auf eigenständiges Lösen von (zunächst einfachen) Aufgaben; möglicherweise auch verbunden mit dem Gefühl, dass Aufgaben im Allgemeinen nicht ohne Kniffe zu bewältigen sind,
- die Erwartung, durch (Auswendig-)Lernen von Musterlösungen zu Übungsaufgaben ausreichend vorbereitet zu sein,
- ein Bild von Mathematik als mit Kniffen zu bezwingendem Gegner – man denke auch an den Begriff des „Kampfrechnens“.

Welchen Einfluss hat die Gestaltung der Mathematiklehre auf diese Einstellung? Hier kommen die Rechenkniffe und Monsterterme wieder ins Spiel: Bei einer Überbetonung von Aufgaben, die nur mit Kniffen lösbar sind, ist die beschriebene Lernhaltung nicht verwunderlich. Monsterterme in Übungsaufgaben wirken zusätzlich als Katalysator; sie können es durch ihre Länge schwerer machen, sich auf das grundlegende Verständnis von Konzepten zu konzentrieren.

## 5. Folgerungen für die Lehre

Da die Beispiele von durchaus motivierten und lernfähigen Studenten zu stammen scheinen, ist zu überlegen, wie man diese bei einem effektiveren Lernen unterstützen kann, ohne insgesamt die Anforderungen zu senken. Grundüberlegung ist es nach dem vorigen Abschnitt, Rechenkniffe und Monsterterme nicht zu häufig in Aufgaben einzuflechten. Das betrifft weniger Vorlesungen selbst (in denen üblicherweise Konzepte grundlegend und mit einfachen Beispielen gelehrt werden), sondern Übungs- und Klausuraufgaben. Studenten sollten nicht das Gefühl bekommen, dass man diese kaum ohne Tricks lösen kann. Dieselbe Überlegung spricht für das Einbauen von einigen Aufgaben in Übungen und Prüfungen, die grundlegenderes Konzeptverständnis behandeln. Mit solchen Aufgaben ist es auch besser möglich, Studenten in Kleingruppenübungen auf nicht-frontale Weise einzubeziehen; denn bei hauptsächlich trickreichen Aufgaben müssen allzu oft doch die Tutoren Musterlösungen frontal an der Tafel entwickeln. Um wiederum bei den (insgesamt nicht verzichtbaren) schwierigen Aufgaben mögliche Anfangshürden zu verringern, werden derzeit unter Mitwirkung des Autors E-Learning-Aufgaben mit antwortabhängiger Verzweigung entwickelt (vgl. Mei 2013). Ziel ist es dabei, den Sprung vom Nachvollziehen von Musterlösungen hin zum eigenständigeren, korrekten Bearbeiten komplexer schriftlicher Aufgaben überwindbarer zu gestalten.

## Literatur

Kersten, I. (2014): *Kalkülfertigkeiten an der Universität: Mängel erkennen und Konzepte für die Förderung entwickeln*. In J. Roth et al. (Hrsg.), Übergänge konstruktiv gestalten (S. 33-49). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kessel, M., Kessel, T. (2008): *Zur Bedeutung der Mathematik im Studium des Bauingenieurwesens*. http://www.ibholz.tu-bs.de/dat/Veranstaltungen/Bedeutung_der_Mathematik.pdf (Letzter Aufruf: 07.04.2015)

Mei, R. (2013): *Elektronische Hausaufgaben in den Mathematik-Vorlesungen für Bauingenieure: Motivation, Entwicklung, Ersteinsatz und Evaluation*. Staatsexamensarbeit an der RWTH Aachen im Dezember 2013.

Rooch, A., Härterich, J., Kiss, C. (2013): *Brauchen Ingenieure Mathematik? Wie Praxisbezug Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert*. In I. Bausch et al. (Hrsg.), Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven (S. 398-409). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Alexander MEYER, Dortmund

# Individuelle Aneignungswege zum Distributivgesetz

Die Einführung des Umformens algebraischer Terme kann über die Einbeziehung verschiedener Anschauungsmittel so erfolgen, dass Schülerinnen und Schülern ein sinnstiftender Zugang zum Umformen ermöglicht wird (Kieran, 2011). Um algebraische Terme und deren Umformung anknüpfungsfähig für spätere Inhalte zu machen, müssen die Umformungsregeln, die zuvor anschaulich eingeführt wurden, eingeübt werden. Hierfür sind produktive Übungsformate nötig. Diese wurden jedoch bisher nicht systematisch generiert und in ihrer Wirkung beforscht.

Einzelne Maßnahmen für das produktive Üben des Umformens sind auf ihre Wirkung beforscht:

- das Wahrnehmen von Termmerkmalen durch das systematische Betrachtungen von Unterschieden und Gemeinsamkeiten zwischen Termen (Mason, 2004);
- das Sehen von Strukturen durch das systematische Herstellen von Beziehungen zwischen den Elementen/Teiltermen eines Terms (Rüede, 2012);
- das Anknüpfen an Kontexte und bekannte Anschauungsmittel, da diese das Sehen von Strukturen anbahnen (Zwetzschler, 2015; Drouhard & Teppo, 2004);
- das gemeinsame Aushandeln von Termmerkmalen und Strukturen im (Unterrichts-)Diskurs (Caspi & Sfard, 2012).

Die Maßnahmen für das produktive Üben wurden bisher nicht in einer Übungseinheit miteinander vernetzt. Eine solche Vernetzung der Maßnahmen in einer Übungseinheit hat jedoch das Potential, durch die verschiedenen integrierten Maßnahmen Lernende dazu zu befähigen, eine Umformungsregel auf bisher unbekannte und strukturell andersartige Terme anzuwenden. Hier wird eine Übungseinheit aus drei Übungsaufgaben vorgestellt, die eine solche Vernetzung leisten soll.

## 1. Gewinnung produktiver Übungsaufgaben

Das Modell der didaktischen Rekonstruktion dient dazu, Übungsaufgaben zum Umformen algebraischer Terme zu rekonstruieren. Dabei wurde sich auf produktive Übungsformate zum Distributivgesetz beschränkt. Die *Klärung der Lernendenperspektiven* zeigt auf, dass Lernende Ressourcen für das Umformen algebraischer Terme insofern haben, als dass sie Kontext – und Sachbezüge heranziehen und auf diese Weise Zugang zur Struktur von

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Termen gewinnen können (Drouhard & Teppo 2004). Bestimmte Elemente in den Übungsaufgaben können Lernenden dazu verhelfen, Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Termen zu sehen. Beispielsweise kann eine Tabelle ein Anlass sein, gemeinsame Merkmale in Umformungen zu finden und die Umformungen entsprechend in der Tabelle zu ordnen (Meyer, 2014). Im Fokus der Studie steht die genauere Aufdeckung der Lernendenperspektiven, um so Übungsaufgaben (weiter) zu entwickeln.

In der *fachlichen Klärung* zeigt sich, dass im Wesentlichen die vier bereits genannten Elemente den Fachgegenstand konstituieren. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass in den Übungsformaten der Aspekt der Verallgemeinerung, der durch algebraische Terme möglich wird, noch nicht im Fokus steht.

Der *rekonstruierte Lerngegenstand* zeigt sich in der Übungsaufgabe 2 (Abb. 1) der Übungseinheit prototypisch. Durch das operative Prinzip (Wittmann, 1985) werden Lernende Term für Term an neue strukturelle Aspekte von Termen herangeführt: Indem in jedem folgenden Term bestimmte Elemente der Terme variiert sind und eine prototypische Formulierung des Distributivgesetzes als Strukturierungshilfe gegeben ist, können Lernende Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen dem vorliegenden Term, vorigen Termen und der prototypischen Formulierung wahrnehmen.

| | |
|---|---|
| b) | $ab + ac = a(b + c)$ |
| | $5ab + 2a =$ |
| Weiterer Term: | |

**Abbildung 1:** Beispielterm aus Aufgabe 2 der Übungseinheit

## 2. Empirische Studie zur Erprobung der produktiven Übungsaufgaben

Die drei didaktisch rekonstruierten produktiven Übungsaufgaben wurden in zwei Iterationen im Unterricht erprobt. In der finalen Iteration haben sechs Interviewer/Förderlehrer die Aufgaben in Schülergruppen zu je zwei Schülerinnen bzw. Schülern eingesetzt. Diese Fördersitzungen wurden videografiert und das entstehende Material transkribiert. Die Fördersitzungen dauerten jeweils 90 Min.

Um sicherzustellen, dass die teilnehmenden Lernenden die nötigen Lernvoraussetzungen in elementarer Algebra, etwa tragfähige Variablenvorstellungen, mitbringen, wurde ihr Vorwissen zuvor diagnostisch erhoben. Die Lernenden kommen aus der 8 Klasse und haben im Unterricht zuvor die Umformungsregeln zur Algebra kennen gelernt.

Die Transskripte und das Material der Sitzungen wurden qualitativ sequenzanalytisch analysiert. Dabei diente das Modell der Grundstruktur als „sensitizing concept", wobei Grundstrukturen die von individuellen Lernenden wahrgenommenen Beziehungen zwischen Termelementen sind (Meyer, 2014). Das Umformen eines algebraischen Terms wird gemäß des Modells der Grundstrukturen durch das Aufeinander-Beziehen von Vorstellungen zu Umformungsregeln und Grundstrukturen modelliert. Eine wahrgenommene Beziehung (die Grundstruktur) kann zur Identifikation einer Umformungsmöglichkeit führen. Gleichzeitig kann die Kenntnis der Umformungsregel zur Wahrnehmung einer Beziehung in einem Term führen, d.h. zur Wahrnehmung einer Grundstruktur. Beide Prozesse sind somit in der Tätigkeit des Umformens dialektisch aufeinander bezogen.

## 3. Einblick in einen Aneignungsweg zum Distributivgesetz

Im folgenden wird illustriert, welche Ressourcen sich Lernende in der gezeigten Aufgabe aneignen, um das Distributivgesetz auf einen bisher unvertrauten Term anzuwenden. Ali und Marc formen den Term 5ab+2a zu 7a+b um. Sie begründen ihre Umformung mit „Weil sie denselben Kern haben plus rechnen". Hier nehmen Ali und Marc im Ursprungsterm ein gemeinsames Merkmal in den Teiltermen 5ab und 2a wahr. Diese wahrgenommene Beziehung leitet sie an, beide Teilterme zu addieren.

Im Verlauf der Aufgabenbearbeitung zeigt sich, dass Ali und Marc verschiedene Grundstrukturen im Term sehen können, indem sie die verschieden möglichen Beziehungen der Teilterme untereinander wahrnehmen. Zugleich sind sie sich der verschiedenen Umformungsmöglichkeiten bewusst, die aufgrund dieser Beziehungen in Reichweite liegen. Sie können so anhand der Beziehungen Umformungsmöglichkeiten unterscheiden.

63 Marc: […] Weil die Terme, zum Beispiel zwei unterschiedliche Terme, können nicht addiert werden aber ähm multipliziert [werden] können sie.

Hier wird deutlich, dass anhand des vorliegenden Terms und den Beziehungen, die darin gesehen wurden, die Vorstellung einer allgemeinen Umformungsregel entsteht. Die Anwendung des Distributivgesetzes wird hier nun als „Multiplikation" angesehen und allgemein formuliert.

Gemäß der ersten qualitativen Analysen scheint die Übungsaufgabe den Lernenden dazu zu verhelfen, ihre Aktivitäten des Wahrnehmens von Grundstrukturen und der Anwendung von Umformungsregeln stärker aufeinander zu beziehen. Ali und Marc werden im Verlauf der Übungsaufgabe in die Lage versetzt, eine wahrgenommene Beziehung zu präzisieren und so verschiedene Umformungsmöglichkeiten zu unterscheiden.

## 4. Zusammenfassung und Diskussion

Die ersten Analysen der Umformungsaktivitäten der Lernenden in den produktiven Übungsaufgaben zeigen, dass die Übungsaufgaben Lernenden dazu verhelfen, ihre Umformungen an den Merkmalen eines Terms auszurichten und so das Distributivgesetz mathematisch tragfähig auf einen bisher unbekannten Term anzuwenden. Dabei zeigt sich, dass Lernende im Verlauf der Übungsaufgaben die Anwendung von Umformungsregeln flexibilisieren, etwa indem eine wahrgenommene Grundstruktur nun nicht mehr nur mit einer Umformung assoziiert wird, sondern das Nachdenken über verschiedene Umformungsmöglichkeiten einleitet. Ein weiterer Aneignungsweg in einer anderen Schülergruppe kennzeichnet sich dadurch, dass Lernende zum Distributivgesetz passende Grundstrukturen immer stärker mit dem Distributivgesetz verzahnen, d.h. verstärkt Grundstrukturen als Begründungen für Umformungen nutzen, was dazu beiträgt, dass diese zunehmend tragfähig werden.

## Literatur


Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 45–65.

Drouhard, J.-P., & Teppo, A. R. (2004). Symbols and Language. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra.* (pp. 227–264). Norwood, MA.

Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching. In *Towards Equity in Mathematics Education* (pp. 579–593). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Mason, J. (2004). *Doing≠ construing and doing+ discussing≠ learning: The importance of the structure of attention.* Paper presented as a regular lecture at the 10th International Congress of Mathematics Education.

Meyer, A. (2014). Students' manipulation of algebraic expressions as ‚recognizing basic structures' and ‚giving relevance'. In Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 4, pp. 209-216), PME: Vancouver.

Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33*, 113-141.

Wittmann, E. C. (1985). Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik Lehren*, *11*, 7–11.

Zwetzschler, L. (2015). *Gleichwertigkeit von Termen*. Wiesbaden: Springer.

Silke MICHAELSEN & Frauke LINK, Konstanz

# Mathematische Exkursion – ein Beispiel für forschendes Lernen in der Ingenieurmathematik

Forschendes Lernen in der Ingenieurmathematik anzusiedeln erweist sich aus verschiedenen Gründen als schwierig: Die Motivation zur Beschäftigung mit der Sache an sich muss für den Prozess forschenden Lernens vorhanden sein (vgl. BAK 1970). Mathematik ist allerdings für Studierende der Ingenieurwissenschaften Mittel zum Zweck des anzustrebenden Berufsziels und das Interesse bezieht sich daher in der Regel eher auf die Bearbeitung von Anwendungsproblemen als auf die Auseinandersetzung mit der fachinhaltlichen Struktur, die auch Begriffsgenese, Herleitungen und Beweise einschließt. Als Lösung wird vielfach vorgeschlagen, insbesondere für diese Gruppe praktische Anwendungsprobleme zu entwickeln bzw. zu präsentieren (vgl. BAK 1970, Rooch et al. 2013). Im Kontext forschenden Lernens konkurriert dies jedoch mit der Erwartung, dass die Studierenden dezidiert allein die Entscheidung für ein interessantes Thema treffen in Kombination mit der Erwartung, dass sie nicht allein auf der Anwendungsebene bleiben, sondern auch mathematisch interessante Phänomene entdecken.

Konkret stand also die Erwartung im Raum, dass Studierende der Ingenieurwissenschaften sich im Rahmen forschenden Lernens in Mathematik mit Mathematik und ihren Strukturen auseinandersetzen sollten.

## 1. Mathematische Exkursion

Die Exkursion führte ins Mathematikum nach Gießen. Das Mathematikum bietet als „Science Center“ (Mathematikum Gießen 2007) die Möglichkeit „selbstständig Erfahrungen mit mathematischen Phänomenen“ zu machen. „Der Verbalisierungs- und Formalisierungsprozess sind dann weitere Stufen zu einem tiefen Verständnis des Phänomens, die aber in der Ausstellung nicht geleistet werden können“ (Mathematikum Gießen 2007).

Mit der Möglichkeit zur selbstständigen Auseinandersetzung mit den Exponaten war die Hoffnung verbunden, dass sich die Studierenden eigenmotiviert einem Exponat annehmen werden und sich ausgehend von diesem inhaltlich vertiefen, d.h. sich die mathematischen Hintergründe selbst zu erschließen. Dieser „Verbalisierungs- und Formalisierungsprozess“ war also in einer im Wintersemester 2014/2015 durchgeführten Wahlpflichtveranstaltung „Exkursion“ der „Forschungsauftrag“.

Die teilnehmenden Studierenden erhielten die Aufgabe, unter den mehr als 150 Exponaten des Mathematikums eines (oder auch mehrere zu einem

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Thema) auszuwählen, den mathematischen Hintergrund zu recherchieren, hierüber einen Vortrag auszuarbeiten und diesen im Rahmen einer Fachtagung vor Studierenden des 1. und 2. Semesters zu präsentieren.

## 2. Auswahl und Tiefe der bearbeiteten Themen

An der Veranstaltung nahmen fünf Studentinnen, die zum Zeitpunkt der Exkursion im 3. Semester an der Fakultät Bauingenieurwesen studierten, teil. Die von ihnen ausgewählten Exponate haben die mathematischen Hintergründe „Goldener Schnitt", „Kettenlinie", „Leonardo-Brücke", „Bernoullli-Effekt" sowie „Zykloide (insbesondere Brachistochrone)". Anhand der Bearbeitung der Kettenlinie soll im Folgenden aufgezeigt werden, welche mathematischen Aspekte sich die Studentin in dieser Veranstaltung selbst erarbeiten konnte.

Die Studentin fragte sich, warum ein an zwei festen Punkten aufgehängtes, frei durchhängendes, nur durch das Eigengewicht belastetes Seil besser durch die Funktionskurve einer hyperbolischen Funktion als durch eine Parabel beschrieben wird. Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, beschäftigte sie sich intensiv mit der Herleitung der Kettenlinie, die sich in zwei Schritte gliedert: das Aufstellen der Differentialgleichung eines Seils (einer Kette) unter Eigengewicht und die Lösung dieser Differentialgleichung. Die Studentin arbeitete sich zunächst selbstständig in die Seilstatik ein und beschäftigte sich dann mit der Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen. Beide Gebiete waren ihr bis zu diesem Zeitpunkt nicht vertraut. Bei ihren Studien konnte sie auf ihr in den ersten beiden Studiensemestern erworbenes Grundlagenwissen (insbesondere in der Statik und der Differential- und Integralrechnung) und die dort vermittelten Methoden und Verfahren zurückgreifen.

Des Weiteren befasste sie sich mit der Situation eines Seils unter Streckenlast, das in guter Näherung durch eine Parabel beschrieben wird, sowie mit verschiedenen Eigenschaften der Kettenlinie.

Als angehende Ingenieurin zeigte die Studentin großes Interesse an den Anwendungen der Kettenlinie, insbesondere im Bauwesen. Wird eine Kettenlinie an der x-Achse gespiegelt, so entsteht eine Kurve, die in der Baustatik Stützlinie heißt. Sie hat die Form eines ausschließlich auf Druck belasteten Bogens, der sich durch eine besonders hohe Belastbarkeit und große Stützweiten auszeichnet. Das Exponat zur Kettenlinie im Mathematikum Gießen ermöglicht die Konstruktion eines solchen Bogens.

Für die Anwendung der Kettenlinie bzw. der Stützlinie gibt es zahlreiche Beispiele (verschiedene Bauwerke, Hängemodelle zur Planung von Tragwerken, u. s. w.), welche die Studentin neben der Herleitung und verschiedenen Eigenschaften der Kettenlinie im Rahmen ihres Vortrags auf der studentischen Fachtagung vorstellte.

## 3. Rückblick

Forschendes Lernen im Rahmen dieser Exkursion ist gelungen. Die Studierenden haben ihr Thema selbst gewählt, sind motiviert und eigenständig in die Vertiefungsphase gegangen und haben sich über ihr Fachwissen hinaus neues Wissen angeeignet (vgl. Abschnitt 2). In der abschließenden Fachkonferenz haben sie in ihren Vorträgen gezeigt, dass sie durch diese eigenständige Arbeit Selbstbewusstsein im Fach erworben haben. Der Erwerb von Schlüsselkompetenzen war in dieser Veranstaltung vergleichsweise gut sichtbar. Ohne darauf im Detail eingehen zu wollen traf dies auf alle Studierenden zu, völlig unabhängig von ihrem fachlichen Vorwissen oder ihrer fachlichen Kompetenz, die sie im Rahmen der Ausarbeitung zeigten.

Leider wurde während der Veranstaltung auch deutlich, dass der Betreuungsaufwand hoch ist. Der individuelle Feedback-Prozess bei der Arbeit ist dringend notwendig, um Fragen zu beantworten. Es bleibt also nur, mit kleineren Gruppen (<15 Personen) in diesen Arbeitsprozess einzusteigen, um optimale Betreuung zu gewährleisten.

Abgesehen von der Betreuungslast durch die Individualisierung der Studierenden ist ein Ergebnis der Beobachtungen der mathematischen Lernwege der Studierenden während und nach der Exkursion, dass der Wissenszuwachs in Mathematik in der Breite relativ gering, aber in der Tiefe individuell hoch zu sein schien.

Insgesamt schließen wir, dass die Veranstaltung sich – nach einem Grundlagenstudium von zwei Semestern – gut dazu eignete, die Studierenden dazu zu bewegen das vorher erworbene Fachwissen zu rekapitulieren, sich selbstständig in die Mathematik zu begeben, eigene Fragestellungen zu entwickeln und zu bearbeiten und ihnen damit zu einem Selbstbewusstsein im Fach zu verhelfen.

## 4. Ausblick

Für das Fach Mathematik liegen bisher nur wenige Praxisbeispiele aus der Hochschule vor, die in die Kategorie des forschenden Lernens passen. Die vorgestellte Exkursion ist ein solches Beispiel.

Darüber hinaus erweitert die Exkursion in ein mathematisches Science Center das Feld typischer Ansätze forschenden Lernens. Die Kompetenzentwicklung der Studierenden generiert sich weder aus einer Anwendung/ Praxis heraus, noch durch theoretische Modelle oder empirische Forschung (Schneider & Wildt 2013), wobei sich letztere im Fach Mathematik mit

Anwendungen deckt. Die selbstständige und „forschende“ Arbeit am Exponat entspricht vielleicht eher exemplarischem Lernen, wobei das Exemplarische nicht nur selbst gewählt wurde, sondern auch haptisch erfahrbar war.

Um forschendes Lernen in der Mathematik weiter zu entwickeln, halten wir den Ansatz des Exemplarischen in der Form, wie es geschildert wurde, für vielversprechend.

Science Center als Orte, an denen Kernideen der Wissenschaft für jedermann zugänglich aufbereitet sind, könnten auch für andere Fächer im Kontext forschenden Lernens von Interesse sein.

## Literatur


Bundesassistentenkonferenz (BAK), Forschendes Lernen – Wissenschaftliches Prüfen, Schriften der BAK (5) Bonn, 1970.

Dankert, J. & Dankert, H. (2013): Technische Mechanik – Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Graefe, R. (1986): Zur Formgebung von Bögen und Gewölben, in: architectura - Zeitschrift für Geschichte der Baukunst, S. 50-67

Mathematikum Gießen (2007): Mathematik zum Anfassen – 50 mathematische Experimente, Gießen: Sommerlad&Seim.

Rooch, A., Härterich, J., & Kiss, C. (2013): Brauchen Ingenieure Mathematik? Wie Praxisbezug Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert. In I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber, T. Wassong (Hrsg.): Mathematische Vor- und Brückenkurse – Konzepte, Probleme und Perspektiven. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 398-409.

Schneider, R. & Wildt, J. (2013): Forschendes Lernen und Kompetenzentwicklung. In: L. Huber, J. Hellmer & F. Schneider: Forschendes Lernen im Studium – Aktuelle Konzepte und Erfahrungen; Bielefeld: UVW, S. 53-78.

Schupp, H. & Dabrock, H. (1995): Höhere Kurven – Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte. Mannheim: BI.

Walter, W. (2000): Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Corinna MOSANDL, Dortmund

# Stellenwerte verstehen- Empirische Einblicke in die Förderung des dekadischen Verständnisses bei Grundschulkindern

Ein Verständnis der Stellenwerte gilt als Grundlage für vielfältige mathematische Aktivitäten und Kenntnisse. Es dient nicht nur dem allgemeinen Zahlverständnis (vgl. Krauthausen & Scherer 2011), sondern auch dem Operationsverständnis (vgl. Carpenter et al. 1997) und kann damit aus Voraussetzung für ein flexibles und verständiges Rechnen gesehen werden (vgl. van de Walle 1994, Moser Opitz 2007). Daneben spielt eine sichere Kenntnis über die Eigenschaften unseres gebräuchlichen Zehner-Stellenwertsystems eine wichtige Rolle beim Umgang mit dekadischen Maßeinheiten (vgl. Häsel-Weide & Nührenbörger 2012) sowie beim Schätzen und Überschlagen von Mengen (vgl. Scherer 2009). Eine besondere Bedeutung bekommt ein sicheres Basiswissen im Bereich der Stellenwerte der natürlichen Zahlen, wenn im Unterricht der Sekundarstufe 1 die Erweiterung des Zahlbereichs zu den Dezimalzahlen thematisiert wird (vgl. Heckmann 2007).

## 1. Lerngegenstand Stellenwertverständnis

Um ein tragfähiges, also erweiterbares Stellenwertverständnis über die verschiedenen Zahlbereiche hinweg aufzubauen, müssen verschiedene Eigenschaften in den Blick genommen werden (vgl. Ross 1989). Eine Ziffer in einer Zahl trägt stets zwei Informationen: ihren Stellenwert- um welche Mächtigkeit handelt es sich?- sowie ihren Zahlenwert: wie viele Einheiten dieser Mächtigkeit sind an dieser Stelle zu finden? So bedeutet beispielsweise die Ziffer 2 in der Zahl 237, dass es sich gemäß der Konventionen unseres Stellenwertsystems an dieser Stelle um Hunderter handeln muss (Stellenwert) und zwar genau um *2* Hunderter (Zahlenwert). Die gültigen Notationskonventionen legen ebenfalls fest: sind an einer Stelle mehr als neun Einheiten zu finden, z.B. 12 Hunderter, so wird in die jeweils nächst größere Stelle gebündelt: in diesem Fall wird in einen Tausender gebündelt und zwei Hunderter bleiben an der Stelle übrig. Über diese systemischen Eigenschaften hinaus muss ebenfalls klar sein, dass das Anwachsen der Stellenwerte im dekadischen System jeweils um dem Faktor 10 geschieht und dass die Mächtigkeiten der einzelnen Stellen additiv miteinander verbunden werden können, um die Gesamtanzahl einer Menge zu ermitteln. Die aufgelisteten Eigenschaften gehören zum traditionellen Lernstoff für den Mathematikunterricht, die insbesondere im Rahmen der Zahlraumerweiterung thematisiert werden. Sie sollten bis zum Ende der Grundschul-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zeit, wenn der Zahlenraum bis zu einer Million erarbeitet wurde, von allen Schülerinnen und Schülern durchdrungen worden sein. Tatsächlich aber zeigen verschiedene Studien, dass dies für einen nicht geringen Teil von Lernenden der Sekundarstufe nicht zutrifft (vgl. z.B. Humbach 2008, Moser Opitz 2007). Moser Opitz (2007) weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass durch die Ergebnisse ihrer Studie der Schluss getroffen werden kann, dass sowohl das Bündeln und Entbündeln, als auch allgemeiner Zahlaufbau und Größenbeziehungen nicht verstanden worden sind. Laut weiterer Untersuchungen (vgl. Ross 1989, Hanich et al. 2001) zu Schwierigkeiten im Stellenwertverständnis, zeigen und präzisieren sich Unsicherheiten von Schülerinnen und Schüler insbesondere dann, wenn Aufgaben zu Zahlzerlegungen gestellt werden, die abweichend von genannten Standardzerlegung sind. So konnten die befragten Schülerinnen und Schüler zwar oft angeben, dass 2 Hunderter, 3 Zehner und 7 Einer die Zahl 237 ergeben, bei der Darbietung der Zahl als beispielsweise 1 Hunderter, 13 Zehnern und 7 Einern zeigen sich jedoch zahlreiche und unterschiedliche Fehllösungen, die hier beispielsweise auf ein fehlendes Verständnis des Zahlenwerts hindeuten mögen.

Aus dieser sich zeigenden Schwierigkeit können jedoch mithilfe der Veranschaulichung durch die Stellenwerttafel als zusätzlichen Deutungskontext produktive Lerngelegenheiten geschaffen werden, wie es beispielsweise auch in dem Entwicklungsprojekt „Mathe sicher können“ (vgl. Selter et al. 2014) realisiert worden ist.

## 2. Forschungsanliegen und Untersuchungsdesign

Die aus dem Projekt „Mathe sicher können“ erworbenen Erkenntnisse über bereits erworbene Fähigkeiten von Lernenden am Ende der Grundschulzeit bzw. zu Beginn der Sekundarstufe 1 sowie zu Aufgabendesign und Fördermöglichkeiten im Bereich des dezimalen Stellenwertverständnisses sollten im vorgestellten Dissertationsprojekt noch weiter ausgeschärft werden. Darüber hinaus sollten weiterführenden Erkenntnisse darüber erlangt werden, wie hilfreich für die Förderung bzw. den Aufbau eines tragfähigen Verständnisses insbesondere der fachliche Austausch zwischen den Lernenden einer Kleingruppe sein kann. Dazu wurden in den Fördersituationen gezielt produktive Irritationen (vgl. Schwarzkopf & Nührenbörger 2010) genutzt, um die Schülerinnen und Schüler mit ihren individuellen, teilweise nicht tragfähigen Ansichten und Zugangsweisen zu konfrontieren, die im gemeinsamen von einer Moderatorin angeleiteten Gespräch reflektiert und geklärt werden sollen. Auf der inhaltlichen Ebene wurden für die Gestaltung der insgesamt vierstündigen Förderung mathematisch reichhaltige Aufgabenformate gewählt, die den Fokus auf die fachlichen Hintergründe, insbesondere auf die oben dargestellten Eigenschaften des dezimalen Stellenwertsystems, legen. Zur Auswertung der gesammelten Daten wird die Methode der epistemologischen Analyse (vgl. Steinbring 2000) genutzt, um sowohl die individuellen Deutungen der Lernenden, als auch die mathematische Verständigung untereinander zu erfassen.

## 3. Erste Ergebnisse und Ausblick

Die bisherigen Auswertungen zeigen, dass Lernende, die innerhalb von Fördersituationen mit Aufgabe zu nicht standardisierten Zahlzerlegungen konfrontiert werden, unterschiedliche Vorgehensweisen beim Lösen wählen. In einer Arbeitsphase, bei der die Schülerinnen und Schüler zunächst jeweils eigene Lösungen produzieren sollten, können anhand der Schülerdokumente unterschiedliche individuelle Sichtweisen und Erklärungsansätze für die gefundenen Lösungen sichtbar gemacht werden. Aufgegriffen und konkretisiert werden diese in einer anschließenden gemeinsamen Diskussionsrunde, bei der auch Rückfragen zur Vorgehensweise möglich und gewünscht sind. In diesen Phasen können aber auch noch unzureichende Erklärungsansätze und somit Lücken im Verständnis sichtbar gemacht werden, wenn beispielsweise die Rolle der Null an einer nicht besetzen Stelle innerhalb einer Zahl nicht erklärt werden kann.

Die Lösungsansätze der Lernenden innerhalb der Fördersituationen legen nahe, dass diese sich anscheinend in einem Spannungsfeld zwischen empirischer Situiertheit und relationaler Allgemeinheit befinden (vgl. Steinbring 2000). Dies bedeutet, dass für einzelne Aufgaben durchaus mathematisch richtige Lösungen gefunden werden können, es den Schülerinnen und Schülern aber nicht immer gelingt, allgemeingültige Regeln dahinter zu erkennen und fachgerecht anzuwenden. So bleibt das gelernte Wissen über Stellenwerte fragil und es ist somit ungewiss, ob dies für ein erfolgreiches Weiterlernen in der Sekundarstufe ausreichend ist.

Damit bleibt die Frage bestehen, wie die mathematischen Strukturen innerhalb von Unterrichts- und Fördersequenzen vermehrt in den Blick genommen werden können. Die ersten Ergebnisse des Forschungsprojekts zeigen dabei einige förderliche Faktoren auf, so scheinen sich beispielsweise dann Erkenntnisse über Zusammenhänge entwickeln zu können, wenn gleiche Aufgaben mit unterschiedlichen Anschauungsmitteln (z.B. Systemwürfelmaterial und Stellenwerttafel) gelöst werden sollen und damit auch an bereits erworbene Erkenntnisse angeknüpft werden kann. Darüber hinaus kommt aber auch dem gemeinsamen Austausch von Vorgehensweisen und Lösungsansätzen eine besondere Bedeutung zu, da es durch das Nachvollziehen anderer Sichtweisen zu einer Weiterentwicklung des eigenen Verständnisses kommen kann.

## Literatur


Carpenter, T.P. et al (1997). A longitudinal study of intervention and understandig in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics education* 29, 3-20.

Hanich, L.B., Jordan, N.C., Kaplan, D., Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in chldren with learning disabilities. *Journal of Educational Psychology 93,* 615-626.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2012). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern – Kompetenzen stärken.* (Vol. 134, Heft 4). Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Heckmann, K. (2007). Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern—Theoretische Analyse und empirische Befunde. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *28*(1), 74-75.

Hiebert, J.; Wearne D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction 14*, 251-283.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen.* Berlin: Dr. Köster.

Krauthausen, G.; Scherer, P. (2011). *Einführung in die Mathematikdidaktik.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Moser-Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/ Dyskalkulie.* Theoretische Klärung und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern/ Stuttgart/ Wien: Haupt.

Scherer, P. (2009). Diagnose ausgewählter Aspekte des Dezimalsystems bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009.* Münster: WTM, S. 835-838.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2010). Diskurse über mathematische Zusammenhänge. In C. Böttinger et al. (Hrsg.): *Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion.* Seelze: Kallmeyer, 169-215.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, St. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können.* (Natürliche Zahlen). Berlin: Cornelsen.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion—Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(1), 28-49.

Ross, S. H. (1989): Parts, wholes and place value: A development view. In: *Arithmetic teacher 2*, 47-51.

Van de Walle, J. A. (1994). *Elementary school mathematics. Teaching developmentally.* (2. ed.) White Plains, N.Y: Longman.

Renate MOTZER, Augsburg

# Der Rechenstrich als Darstellungshilfe zur Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

In der Grundschule ist der Rechenstrich eine bewährte Darstellungsart für halbschriftliche Strategien beim Addieren und Subtrahieren. Der Vorzug des Rechenstrichs liegt zum einen darin, dass die Kinder die zu bewältigende Rechnung in beliebig viele Teilschritte zerlegen können und so eine gewisse Differenzierung möglich ist. Zum anderen gewöhnen sie sich an, dass ähnlich wie beim Zahlenstrahl größere Zahlen weiter rechts stehen. Wird zu einer Zahl eine andere natürliche Zahl addiert, so führt der zugehörigen Pfeil nach rechts, die Zahl wird also größer. Wird eine Zahl subtrahiert, so führt der Pfeil nach links, die Zahl wird kleiner. Bei dieser Darstellung wird eine Subtraktionsaufgabe mit der Grundvorstellung des Wegnehmens verknüpft. Es kann aber auch die Grundvorstellung des Ergänzens aktiviert werden bzw. die Frage nach dem Unterschied kann durch die Version „wie weit ist es von … bis …“ beantwortet werden.

Man sieht also, es sind viele Strategien möglich. Allerdings wird gewöhnlich der 1. Summand bzw. der Minuend nicht zerlegt. Manche Strategien sind somit am Rechenstrich nicht möglich, vor allem nicht die Strategie „stellenweise extra“. Es sind auch nicht alle Hilfsaufgaben möglich. 19 + 26 kann nicht in 20 + 25 oder 20+26 -1 umgewandelt werden, ebenso wenig 71 – 34 = 70 – 34 +1 (falls ein Kind besser vom ganzen Zehner abziehen kann). Da „stellenweise extra“ zu rechnen bei Minusaufgaben sehr fehleranfällig wird, wird diese Strategie Kindern üblicherweise auch nicht empfohlen. Am Rechenstrich können sie je nach Vorliebe Minusaufgaben durch Abziehen oder durch Auffüllen lösen. Hilfsaufgaben, die nur Subtrahenden verändern, sind ebenso möglich (54 – 19 = 54 – 20 +1).

Rechnen am Rechenstrich unterstützt vor allem dynamisches Denken, es kommt etwas dazu, bzw. es wird etwas weggenommen. Aber auch die statische Frage nach dem Abstand zweier Zahlen wird gut veranschaulicht.

Der Rechenstrich kann leistungsschwächeren Kindern helfen, ihre Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion zu festigen. Durch die Orientierung von links nach rechts (größere Zahlen stehen weiter rechts) kann die Relation „größer“ bzw. „kleiner“ gefestigt werden. Rechenschwachen Kindern sind oft nur die Zahlen in der Zahlenreihe präsent und es fehlen ihnen viele weitere Zahlzusammenhänge. Mit dem Rechenstrich können sie zumindest an die Zahlen in der Zahlenreihe anknüpfen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

In weiterführenden Schulen wird der Rechenstrich derzeit leider nicht mehr verwendet. Bei der Subtraktion wird außerdem häufig nur noch an die Grundvorstellung des Wegnehmens angeknüpft, nicht mehr ans Ergänzen. Wird eine negative Zahl abgezogen, so kann dies mit dem Wegnehmen von Schulden in Verbindung gebracht werden, was sich auf dem Kontostand positiv auswirkt.

Etwas unpassend wird das Bild, wenn von einem bestehenden Vermögen Schulden wegzunehmen sind. Man könnte sich ggf. vorstellen, dass der Geldbesitzer mehrere Konten hat. Auch wenn er insgesamt im Plus ist, könnte es also ein Schuldenkonto geben, von dem Schulden weggenommen werden, so dass seine neue Gesamtbilanz noch positiver ausfällt als sie vorher war.

Die Aufgabe 200 – (-50) könnte aber auch so gedeutet werden, dass nach dem Abstand von -50 und 200 gefragt ist und sich deshalb 250 ergibt.

Deutet man das Minuszeichen als Abstand, so ergibt sich freilich die Frage nach dem Vorzeichen des Ergebnisses. Müsste so nicht auch –50 – 200 zu dem Ergebnis 250 führen? Die Kinder müssen also bei der Abstandsdeutung zusätzlich nach der Richtung schauen. Bei a – b lautet die Frage: wie weit ist es von b nach a? Ist a kleiner als b, muss man in die andere Richtung gehen und das Ergebnis erhält zusätzlich ein Minuszeichen.

Wie viele Erinnerungen Kinder in 5. Klassen an Gymnasien an die Verwendung des Rechenstrichs in der Grundschule haben und ob sie den Rechenstrich gewinnbringend bei der Arbeit mit negativen Zahlen einsetzen können, waren die Fragen, die einer Untersuchung in drei 5. Klassen zugrunde lagen.

Die Auswertung zeigt, dass der Rechenstrich zwar vielen Kindern noch halbwegs geläufig war, interessanterweise jedoch hauptsächlich zum Bestimmen des Abstands zwischen zwei Zahlen. In einer der drei Klassen wurde überhaupt nur diese Deutung von den Kindern vorgeschlagen. Vielen Kindern war aber nicht klar, dass beim Rechenstrich die größeren Zahlen immer weiter rechts stehen müssen. Daher war er ihnen zunächst nicht unbedingt eine Hilfe, wenn negative Zahlen ins Spiel kamen. Es ist bei ihnen nicht von vornherein in der Darstellung der Aufgabe ersichtlich, ob das Ergebnis durch die Rechnung größer oder kleiner wird als der 1. Summand bzw. der Minuend. Auch der Übergang über die Null ist nicht in allen Lösungen deutlich sichtbar geworden.

Hier nun einige Beispiele von typischen Fehlern und erstaunlichen Lösungen:

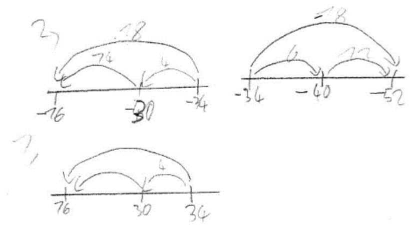


**Abb. 1**

An Abb. 1 kann man zwei Schwierigkeiten sehen: analog zur Aufgabe 1) 34 – 18 = …. soll als Aufgabe 2) gerechnet werden: -34 – 18 = …Manche Kinder setzen einfach vor die Zahlen unterhalb des Rechenstrichs ein Minuszeichen. Dieses Kind ist sich aber nicht sicher, ob diese Lösung zutreffend ist. Es bietet daher eine zweite Bearbeitung an, die zur Lösung -52 führt. Allerdings stehen auch hier die kleineren Zahlen (also die mit den höheren Beträgen) in beiden Lösungen weiter rechts. Daher scheint die zweite Lösung dem Kind weniger analog und es ist sich nicht sicher, welches nun die richtige Bearbeitung ist.

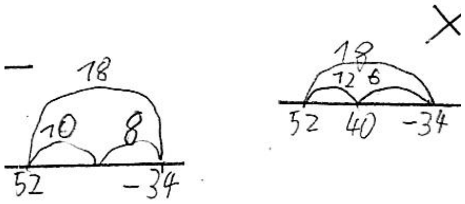



**Abb. 2**

Abb. 2 zeigt, dass etliche Kinder bei den negativen Zahlen die Vorzeichen öfters weglassen. Dieses Kind scheint zwar richtig zu rechnen und gibt sogar zwei Lösungswege an, aber das Zwischenergebnis und das Endergebnis tragen das falsche Vorzeichen.

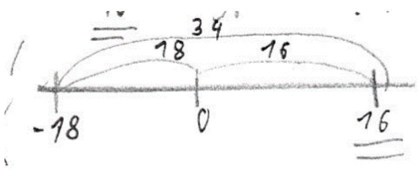



**Abb. 3**

Elegant ist diese Lösung (Abb. 3) zur Aufgabe 34 + (- 18), die zur Tauschaufgabe -18 + 34 übergeht.

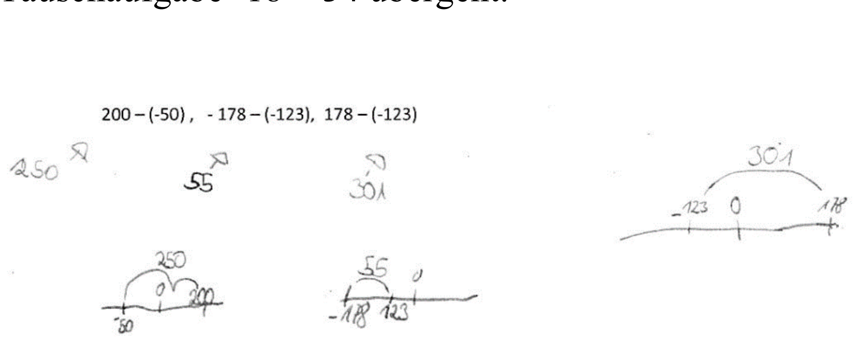



**Abb. 4**

Erstaunlich ist, dass etliche Kinder bei diesen Aufgaben (Abb.4), bei denen sie eigentlich die Regel „Die Subtraktion einer negativen Zahl ist gleichbedeutend mit der Addition der Gegenzahl“ einüben sollen, auf die Deutung „Bestimme den Abstand zwischen den beiden Zahlen“ kommen. Es zeigt, dass es doch bei vielen Kindern beliebt ist, Subtraktionsaufgaben als Ergänzungsaufgaben zu lösen, auch wenn dies im Unterricht gar nicht forciert wird.

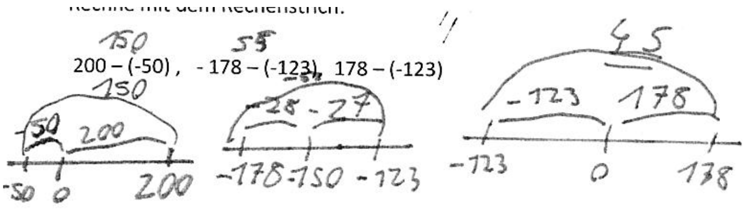



**Abb. 5**

Nicht allen Kindern ist von Anfang an klar, dass die Längen der Bögen immer addiert werden sollten, wenn es um die Länge des Gesamtbogens geht (vgl. Abb. 5). Bei diesem Kind kann aber zumindest beobachtet werden, dass ihm ähnlich wie den Kindern, die ergänzend rechnen, wichtig ist, die gegebenen Zahlen unten am Rechenstrich einzutragen.

In einer anderen Klasse wurde die gesamte Unterrichtseinheit zur Addition und Subtraktion einschließlich einer Probearbeit beobachtet. Hier zeigte sich: Die Kinder, die den Rechenstrich bei einer bestimmten Aufgabe verwenden, gehören im Schnitt zu den leistungsschwächeren Kindern, aber sie sind bei der zugehörigen Aufgabe fast so erfolgreich wie ihre Mitschüler. Es sind vor allem Mädchen, die den Rechenstrich verwenden (darunter auch sehr gute Schülerinnen).

Auf einem Arbeitsblatt konnte beobachtet werden: Der häufigste ler war -12 - (+13) = -12 - 13 = +1 (5 Kinder)/ -1 (6 Kinder von 26). Dabei beachteten die meisten die Rechenregel -(+ ) = - und kamen zu dem richtigen Zwischenschritt. Das Ergebnis der Rechnung war aber falsch. Erstaunlich ist dabei, dass von den 11 Kindern, die diese Aufgabe falsch bearbeiteten, 10 Kinder die Aufgabe -34 – 18 = - 52 richtig lösten, bei der explizit ein Rechenstrich gefordert wurde.

Es würde sich also doch lohnen, den Rechenstrich den Kindern noch mehr nahezulegen, ihn vielleicht auch öfters einzufordern, zumindest bei den Kindern, die ohne Rechenstrich immer wieder Fehler machen. Dabei muss jedoch mit einigen Kindern das Rechnen am Rechenstrich explizit geübt werden, da nicht immer genügend Vorerfahrungen vorhanden sind.

Eva MÜLLER-HILL, Köln

# Mathematisches Erklären und substantielle Argumentation im Sinne von Toulmin

## 1. Problemstellung

Betrachtet man Erklären (nachfolgend stets i.S.v. Erklären-warum) zunächst nicht als besonderen Typus von Sprachhandeln, sondern argumentationstheoretisch als einen besonderen Typus von Begründungen für einen Sachverhalt, so geht es beim Erklären darum, das Explanandum mit Bezug auf geeignete situationale Randbedingungen aus einem im Rahmen einer geeigneten Theorie gültigen allgemeinen Gesetz zu deduzieren. Eine Erklärung entspräche in diesem Sinne dem analytisch-deduktiven Argumentationsideal. Problematisch daran insbesondere auf das mathematische Erklären und auf den Mathematikunterricht ist das folgende Dilemma: Erklären als deduktiv gültige Argumentation mit gesetzesartigen Prämissen scheint einerseits *zu wenig restriktiv*, da so etwa in Bezug auf mathematische Beweise nicht angemessen zwischen einem formal korrekten und einem erklärenden Beweis unterschieden werden kann: Jeder formal korrekte Beweis wäre dann bereits eine Erklärung. Andererseits erscheint diese Konzeption des Erklärens *zu stark restriktiv* insbesondere in Bezug auf alltäglichen Erklärpraxen im Mathematikunterricht, da sie rein normativ ist und wenig Anschlussmöglichkeiten z.B. für sprachhandlungsbezogene Aspekte liefert. Dies erfordert eine Differenzierung und Spezifikation von Charakteristika des Erklärens über das analytisch-deduktive Argumentationsideal hinaus. Erklären kann dazu durch eine spezifische Sachverhalts- und Adressatenbezogenheit als besondere Form des Begründens charakterisiert werden (vgl. Müller-Hill 2012).

**Sachverhaltsbezogenheit von Erklären**

Allgemeinheit, Gültigkeit für sinnvollen Phänomen*bereich* oder/und Situations- bzw. Objekt*typus*

Angabe von *entscheidenden* Gründen, Bezug zu wesentlichen, ggf. kausal wirksamen Eigenschaften beteiligter Objekte

Stärke von Erklärungen bemisst sich u.a. an *Vereinheitlichungspotential* in Bezug auf unterschiedliche Phänomene

**Adressatenbezogenheit von Erklären**

Erklären dient *Verständnisförderung* bei Adressaten

Bezug zu subjektiven *Hintergrundtheorien* der Adressaten

*Rückführung auf Bekanntes* bei gleichzeitiger *Informativität* für Adressaten

Der hier vorgestellte Ansatz besteht darin, mathematische Erklärungen unter Rückgriff auf diese charakteristischen Aspekte als spezifische substantielle

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Argumentationen im Sinne von Toulmin (1958) zu analysieren. Wesentlich für Toulmins Auffassung ist die Zuweisung unterschiedlicher funktionaler Rollen innerhalb einer Argumentation entlang herausfordernder Fragen. Die im Folgenden für das Erklären vorgeschlagenen spezifischen Fragen dienen als eine erste pragmatische Konkretisierung der genannten Charakteristika.

## 2. Toulmins funktionale Kernelemente substantieller Argumente

Stephen Toulmin grenzt sich mit seiner argumentationstheoretischen Position vom klassischen, analytisch-deduktiven Argumentationsideal ab, welches die deduktive Gültigkeit einer Argumentation in den Vordergrund stellt und wonach gültige Argumentationen analytisch sind, also die in Frage stehende Schlussfolgerung stets schon logisch „in den Prämissen enthalten" ist. Dem gegenüber stellt er substantielle Argumente, bei denen die Informationen, die die Schlussfolgerung enthält, nicht bereits vollständig (im Sinne logischer Folgerung) in den Prämissen enthalten sein müssen. Toulmin differenziert unterschiedliche funktionale Kernelemente eines substantiellen Argumentes in logischer und epistemologischer Hinsicht u.a. als Antworten auf verschiedene herausfordernde Fragen eines (hypothetischen) *challenger*:

| | |
|---|---|
| *C(laim):* behaupteter Sachverhalt. | |
| *D(ata):* Tatsachenaussagen, Basis für C | „Wovon kannst Du ausgehen?" |
| *W(arrant):* allgemeine, ggf. hypothetische Aussage, um Schritt von D nach C zu autorisieren. | „Wie bist du dahin (zu genau diesen Daten) gekommen?" |
| *Modaler Q(ualifier):* qualifiziert Stärke des *warrant*. | „In welchem Maße garantiert W (auf Basis von D) den *claim*?" (wahrscheinlich, notwendig, …) |
| *R(ebuttal):* Zeigt Ausnahmen für die Gültigkeit des *warrant* an. | „Unter welchen Umständen ist der Schritt von D nach C nicht autorisiert?" |
| *B(acking):* Stützung der Gültigkeit des w*arrant* innerhalb des Geltungsbereichs. | „Warum glaubst du ist der Schritt von D nach C im Allgemeinen (ggf. genauer qualifiziert durch Q) autorisiert?" |

## 3. Erklären im Toulmin-Modell – ein Vorschlag

Fach- oder zweckspezifische Spezifikationen dieser funktionalen Rollen sind von Toulmin durchaus intendiert (vgl. 1958, S. 96). Erklären scheint dabei nicht allein über den *warrant* spezifizierbar, sondern erst im expliziten Zusammenspiel von *warrant*, *backing* und *rebuttal*. Im Rahmen dieses Beitrages schlage ich nur zu einigen der oben genannten Charakteristika geeignete (noch nicht mathematikspezifische) Spezifikationen der Rollen „*backing*" und „*rebuttal*" vor, ohne sie hier detailliert motivieren zu können:

| | |
|---|---|
| **Aspekt** | Angeben entscheidender Gründe, Bezug zu Hintergrundwissen |
| **Fragen** | Warum ist der Schritt von D nach C *entscheidend*, warum funktioniert er *so und nicht anders*? Was passiert mit C, wenn D *verändert* wird? |
| **Rolle** | *backing* aus bekanntem Faktenwissen |
| **Aspekt** | **Erklären als bereichsinvariante allgemeine Begründung** |
| **Fragen** | Wo endet ggf. der Gültigkeitsbereich des *warrant*? Kann man *Ausnahmen systematisieren* (und damit kontrollieren)? |
| **Rolle** | *rebuttal* – spezifiziert bereichseingrenzende Ausnahmen |

„Entscheidend“ wird hier angelehnt an die Bedeutung von „ursächlich“ aufgefasst – der „und nicht anders“-Teil des *backings* bzw. die Auswirkungen von Veränderungen von D auf C testen gerade auf kausalartige Zusammenhänge. Erklären wird dadurch nicht nur als wissensorganisierend, sondern im Sinne einer substantiellen Argumentation auch als wissensgenerierend für die Adressaten verstanden – selbst bei bekanntem und etabliertem *warrant* (der aber auch unbekannt und hypothetisch sein darf) mit maximalem Gültigkeitsbereich (was bei erklärenden Beweisen als Grenzfall auftritt, aber nicht unbedingt bei jeder mathematischen Erklärung im Unterrichtsdiskurs). *Anmerkung*: Die Explikation von *backing* und *rebuttal* (und ggf. der zugehörigen *qualifier*) ist nicht unbedingt Teil der üblichen diskursiven Praxis, sowohl in Alltagsargumentationen als auch im Mathematikunterricht (vgl. (Toulmin 1958, S. 98), zu letzterem z.B. (Dooley 2013)). Dies könnte eine Erklärung dafür sein, warum in empirischen Daten zum Argumentieren Sequenzen zu „Erklären-warum“ häufig schwer identifizierbar sind.

## 4. Beispielanalyse einer moderierten dialogischen Erklärung

Die nachfolgende Unterrichtssequenz ist (Morselli 2013) entnommen (Beteiligte: Elio, Beobachterin, Lehrerin). Der Siebtklässler Elio antwortet auf die Frage der Lehrerin: „Was könnt ihr über die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen sagen?“ Die Sequenz hat im Rahmen dieses Beitrages rein illustrierende Funktion, da sich hier erklärensspezifische funktionale Rollen innerhalb der Argumentation vergleichsweise deutlich ausweisen lassen. Bemerkenswert ist, dass die Lehrerin mit Bezug auf das *backing* in (5) den *qualifier* „always“ verwendet, Elio aber in (6) ein *rebuttal* einbringt, welches die Bereichsinvarianz der Erklärung für ganz $\mathbb{N}$ in Frage stellt. Der für Elio wohl auf Zahlen mit überschaubarer Zifferndarstellung eingeschränkte Gültigkeitsbereich des *warrant* scheint für ihn aber kein sinnvoller Gültigkeitsbereich im Sinne der Ausgangsfrage zu sein. Elio liefert im Anschluss einen algebraischen Beweis, der aber nicht das hier generisch bereits enthaltene allgemeine Argument aufgreift. (Eine detailliertere Darstellung und Begründung des folgenden Analysevorschlages unterbleibt aus Platzgründen.)

**(1 – claim)** *Elio*: the sum [of three consecutive numbers] is a multiple of three.

**(2 – data)** *Elio*:

$1+2+3=6$
$+1$
$7+8+9=24$
$51+52+53=156$

**(3 – warrant)** *Elio*: if the third number gives a unit to the first number, we have three equal numbers.

**(4 – backing: „nicht anders“)** *Observer*: and in this way you understand why this is a property that not always holds. […] This explains why we need three consecutive numbers to have it. *Elio*: if we tried, here, instead of 53, with 54, I would get 53. I take away 1 from 54 and I get 53, not 52.

**(5 – backing: „in der Regel so“)** *Teacher*: and you don't have anymore three equal numbers. […] using three consecutive numbers […] I always get three times the intermediate number, exactly because there is that „moving“ [of 1 from biggest to smallest number].

**(6 – rebuttal)** *Elio*: but maybe they did not work on great numbers and I could not do an example on all numbers. (Ergänzungen und Auslassungen in „[]“: EMH)

## 5. Ausblick und offene Fragen

Der hier umrissene Ansatz kann als Ausgangspunkt zur weiteren Analyse fachspezifischer Erklärungstypen oder -strategien dienen, z.B. von mathematischen Analogieerklärungen. Er bietet Anknüpfungspunkte für Überlegungen zur Förderung (mathematischen) Erklärens im Unterricht, etwa im Sinne des expliziten Einforderns erklärensspezifischer *backings* und *rebuttals* durch geeignete, herausfordernde Fragen oder explizite Reflektionen zum Gebrauch geeigneter *qualifier*, weist aber auch besondere, vor allem sprachliche Herausforderungen aus: Das Identifizieren funktionaler Rollen in einer Argumentation etwa setzt ein reflektiertes, präzises Sprachverständnis, klare Diskursregeln und ggf. ein geeignetes Metavokabular bei den Beteiligten voraus, da einfache sprachliche Indikatoren in konkreten Äußerungssequenzen allein („weil“, „sofern“ o.ä., grammatischer Satztyp) keine absolute oder zuverlässige Kategorisierung deren argumentativer Funktion im Diskurs erlauben (Toulmin 1958, S. 92; Nielsen 2011).

## Literatur


Dooley, T. (2013), Young pupils' generalisation strategies for the handshake problem, CERME 8 Conference Proceedings.

Morselli, F. (2013), Approaching algebraic proof algebraic proof at lower secondary school level, CERME 8 Conference Proceedings.

Müller-Hill, E. (2012), Ein handlungsbasiertes Konzept mathematischer Erklärung, Beiträge zum Mathematikunterricht, 617-620.

Nielsen, J.A. (2011), Dialectical Features of Students' Argumentation: A Critical Review of Argumentation Studies in Science Education, Res Sci Educ, 43 (1), 371-393.

Toulmin, S. (2003 (1958)), The Uses of Argument, Updated Version, Cambridge University Press.

Fabian MUNDT, Mutfried HARTMANN, Karlsruhe

# Klasse trotz Masse am Studienanfang – das Blended Learning Konzept e:t:p:M@Math

Im Wintersemester 2014/2015 verzeichnete das Statistische Bundesamt 2,7 Millionen Studierende – ein Novum in der Geschichte der Bundesrepublik Deutschland (vgl. SB 2015). Bedenkt man, dass es noch vor zehn Jahren weit weniger als zwei Millionen Studierende gab (vgl. Bildungsbericht 2014), wird das Ausmaß dieser Bildungsexpansion deutlich. Die Universität hat sich zur Massenuniversität mit einer sehr heterogenen Studierendenschaft und mit einer entsprechend ungünstigen Betreuungsrelation gewandelt (vgl. Himpsl 2014). Insbesondere für teilnehmerstarke Einführungsveranstaltungen ergeben sich daraus problematische Voraussetzungen. Die Qualität des Studiums leidet massiv; der Reformbedarf ist unumstritten (vgl. Asdonk u.a. 2013).

Da sich an dieser Ausgangslage in absehbarer Zeit wenig ändern wird (vgl. Dräger, Friedrich & Müller-Eiselt 2014: 6), sind innovative Lehr-Lern-Konzepte gefragt. Vielversprechend sind vor allem solche Ansätze, die herkömmliche Präsenzveranstaltungen mit den Möglichkeiten digitaler (Internet-)Technologien verschränken (vgl. HRK 2014). Ein Konzept, das besonderen Wert auf die Integration präsenzbasierter und digitaler Angebote legt, ist e:t:p:M.

## 1. Das Blended Learning Konzept e:t:p:M

e:t:p:M[1] wurde im Rahmen der Einführungsveranstaltung in die Erziehungswissenschaft im Wintersemester 2012/2013 an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe von Timo Hoyer und Fabian Mundt entwickelt. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei Hoyer & Mundt (2014). Das Akronym ergibt sich aus den einzelnen Bestandteilen:

*e wie eLearning:*

Der Kern des eLearning Angebots bilden elf im Studio aufgezeichnete und nach einem gestalterischen Rahmen postproduzierte *online-Lektionen.* Die in der Regel 20 bis 30 Minuten langen Videos weisen neben dem Sprecher bzw. der Sprecherin Infotafeln, illustrierende Bilder, Animationen und Zitate auf. Darüber hinaus ist jede online-Lektion durch sog. „Fähnchen“ (thematische Überschriften) strukturiert. Die Studierenden greifen über ei-

[1] Website des Projekts: http://www.ph-karlsruhe.de/institute/ph/ew/etpm/ [17.02.2015]

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ne speziell für das e:t:p:M Format entwickelte *responsive Web-App*[2] auf die online-Lektionen zu. Diese ermöglicht es zu jedem Fähnchen individuelle Annotationen zu verfassen und diese je nach Bedarf als PDF herunterzuladen. Ferner stellt die Web-App alle ergänzenden Materialien (Texte, Aufgaben usf.) bereit und beinhaltet neben allgemeinen Veranstaltungsinformationen einen umfassenden FAQ-Bereich und die Möglichkeiten mit den Lehrenden in Kontakt zu treten. Die Web-App besitzt darüber hinaus ein differenziertes Analysemodul, das es den Lehrenden ermöglicht das Interaktionsverhalten der Lernenden nachzuvollziehen.[3]

*t wie text- und theoriefundiert:*

Zu jeder online-Lektion wird den Studierenden ein vertiefender Text (Sekundär- und Primärliteratur) zur Verfügung gestellt. Neben Bearbeitungshinweisen enthält dieser inhaltliche Fragestellungen, die in den Präsenzveranstaltungen behandelt werden. Alle Texte sind einheitlich typografiert und für den Seminareinsatz aufbereitet.

*p wie präsenz- und praxisbasiert:*

Das eLearning Angebot von e:t:p:M zielt sowohl auf eine Individualisierung der Lernangebote als auch auf deren Integration in die Präsenzphasen. Letztere bestehen aus Informationsveranstaltungen (Dozierende), HGF-Veranstaltungen (Dozierende) und wöchentlich stattfindenden Mentoriaten (studentische Mentorentandems).

*M wie Mentoring:*

Gerade am Anfang des Studiums ist die Betreuung und Unterstützung der StudienanfängerInnen von großer Bedeutung. Über die Aneignung fachlicher Kompetenzen hinaus gilt es sich in der oft fremden akademischen Welt zu orientieren. Im Rahmen von e:t:p:M wird die Gesamtgruppe in mehrere Kleingruppen aufgeteilt, die jeweils von einem Mentorentandem über das Semester hinweg betreut werden. Die studentischen Mentoren durchlaufen eine speziell eingerichtete Ausbildung, für die sie ein Zertifikat erhalten.

Der Hochschullehrpreis 2013 und mehrere umfangreiche Evaluationen bescheinigen dem Konzept eine erfolgreiche Umsetzung in der Praxis.[4]

---

[2] Die Web-App wurde mit den Open Source Frameworks Laravel, jQuery und Semantic UI entwickelt und ist für Mobilgeräte optimiert.

[3] Als Analysesoftware kommt eine angepasste Version der Open Source Anwendung Piwik zum Einsatz. Alle aufgezeichneten Daten sind anonymisiert. Die Trackingfunktion lässt sich aus der Web-App heraus deaktivieren.

[4] http://home.ph-karlsruhe.de/etpM/evaluationsergebnisse/ [17.02.2015]

## 2. e:t:p:M im Rahmen der Einführung in die Mathematik

Ausgehend von den eingangs beschriebenen allgemeinen Herausforderungen der aktuellen Hochschullehre und den positiven Erfahrungen mit e:t:p:M liegt es nahe das Konzept auch in anderen Fachbereichen zu adaptieren.[5] Momentan arbeiten die Autoren daran die Einführung in die Mathematik ab dem Wintersemester 2015/1014 auf das e:t:p:M Konzept umzustellen. Die Umsetzung von e:t:p:M@Math macht im Vergleich zu den historisch-theoretisch gelagerten erziehungswissenschaftlichen Inhalten allerdings einige Anpassungen erforderlich. Insbesondere die Gestaltung der online-Lektionen erfährt eine umfassende Revision.

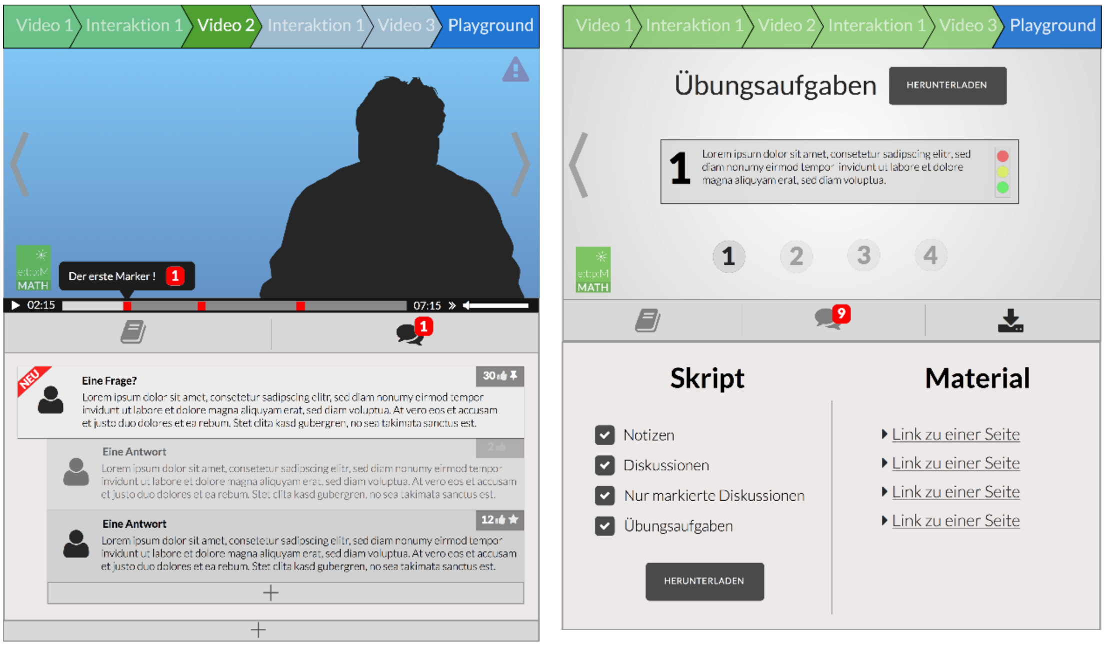



**Abb. 1: Weiterentwicklung der Web-App (Ereignisabfolge, Diskussionsraum und Playground)**

Die momentane Entwicklungsarbeit konzentriert sich auf drei Erweiterungen im Vergleich zu den ‚klassischen' online-Lektionen (siehe Abb. 1).

1. Ereignisabfolge

Eine online-Lektion besteht nicht mehr aus einem Video, sondern umfasst eine Abfolge von (kürzeren) Videos und Interaktionen (interaktive Lernanwendungen). Diese Ereignisabfolge ermöglicht eine differenziertere Strukturierung der abstrakten, mathematischen Lerninhalte. Die Interaktionen ermöglichen darüber hinaus komplexe Zusammenhänge eigenaktiv nachzuvollziehen.

---

[5] Das e:t:p:M-Konzept wird im Rahmen des BMBF geförderten Hochschulentwicklungsprojekts "Beyond School" an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe auch in der Frühen Bildung umgesetzt.

2. Diskussionsraum

Gerade mathematische Problemstellungen begünstigen bestenfalls kontroverse Diskussionen und werfen vielfach Fragen auf. Aus diesem Grund wird die Notizfunktion um einen allgemeinen Diskussionsraum ergänzt. In Analogie zur Diskussion in virtuellen Foren können hier Fragestellungen erörtert und bearbeitet werden. Studierende haben die Möglichkeit einen Beitrag zu „liken", während Dozierende aus ihrer Perspektive relevante Fragen hervorheben oder gelungene Beiträge gesondert kennzeichnen. Um die Übersicht zu wahren werden irrelevante Beiträge mit der Zeit ausgeblendet.

3. Playground

Jede online-Lektion erhält als abschließendes „Ereignis" einen sog. „Playground". Dieser umfasst einerseits Übungsaufgaben und -interaktionen, die hinsichtlich der Verständlichkeit der Aufgabenstellung bewertet werden können. Damit wird eine Feedbackschleife implementiert, die einen fokussierten Übungsbetrieb erlaubt. Zusätzlich kann ein dynamisches Skript generiert werden. Auf Wunsch werden die zuvor vorgenommenen Notizen und Diskussionen an die entsprechende Stelle im Skript eingesetzt, bevor es als PDF heruntergeladen werden kann. Ereignisabfolge, Diskussionsraum und Playground markieren den aktuellen Stand der Weiterentwicklungen des eLearning Angebots von e:t:p:M@Math. Der nächste Schritt ist deren Erprobung und Evaluation, damit das Gesamtkonzept im kommenden Wintersemester umgesetzt werden kann. Mit Blick auf die bisherigen Erfahrungen und die angedachten Erweiterungen sind wir optimistisch StudienanfängerInnen hervorragende Lernräume zu öffnen, die zusätzlich eine intensive Beforschung erlauben.

## Literatur


Asdonk, J., Kuhnen, S. U. & Bornkessel, P. (Hrsg.) (2013). *Von der Schule zur Hochschule.* Münster: Waxmann.

Bildungsbericht (2014). *Bildung in Deutschland 2014.* Bielefeld: wbv.

Dräger, J., Friedrich, J.-D. & Müller-Eiselt, R. (2014). *Digital wird normal.* Gütserloh: CHE.

Egger, R. (2012). *Lebenslanges Lernen in der Universität.* Wiesbaden: Springer VS.

Himpsl, F. (2014): *Betreuer, dringend gefragt.* Die Zeit. 09/2014.

Hoyer, T. & Mundt, F. (2014). e:t:p:M – ein Blended-Learning-Konzept für Großveranstaltungen. In K. Rummler (Hrsg.), *Lernräume gestalten – Bildungskontexte vielfältig denken* (S. 249–259). Münster: Waxmann.

HRK (Hrsg.) (2014): *Potenziale und Probleme von MOOCs – eine Einordnung im Kontext der digitalen Lehre.* Beiträge zur Hochschulpolitik. 2/2014. Bonn: HRK.

Sebastian MUNGENAST, Würzburg

# Zur Bedeutung von Metakognition beim Lehren und Lernen von Mathematik – Entwicklung eines Kategoriensystems

## 1. Mathematik und Metakognition

Im Rahmen des laufenden Promotionsprojektes soll ein Modell entwickelt werden, das Wissen und Fähigkeiten sowie daraus folgende Aktivitäten aus dem Bereich der Metakognition im Hinblick auf Lehren und Lernen von Mathematik beschreibt und klassifiziert.

Auf mathematischer Seite steht dabei das Gebiet der Analysis im Mittelpunkt, da es hier um zentrale mathematische Ideen geht, die insbesondere grundlegend für ein universitäres Mathematikstudium sind, und da es für den Bereich der Sekundarstufe II bisher noch relativ wenige Überlegungen zur Metakognition gibt.

Des Weiteren ist eine vielfach diskutierte Frage in der Mathematik-Didaktik etwa die nach Umfang und Strenge der Behandlung des Grenzwertbegriffs und in Folge dessen auch des Ableitungsbegriffs (vgl. etwa Weigand 1993, Danckwerts u. Vogel 2006). Dies betrifft beispielsweise die Integration verschiedener Sichtweisen des Begriffs (so z.B. als Grenzwert des Differenzenquotienten, geometrisch als Steigung der Tangenten oder als momentane Änderungsrate und physikalisch als Geschwindigkeit) und deren Zusammenhänge, sowie allgemein die Frage, welche Bedeutung für den Lernenden stärker intuitive Zugänge im Vergleich zu formalen Konzepten haben, bzw., wie beide Herangehensweisen sich verbinden lassen. Es ergibt sich insbesondere die Frage, wie Schülerinnen und Schüler sich dieser unterschiedlichen Aspekte bewusst sein können (vgl. etwa Weigand 1993).

Grenzwert- und Ableitungsbegriff werfen also Fragen auf und erfordern Kenntnisse, die sich dem Bereich der Metakognition (vgl. etwa Flavell, Miller u. Miller 2002) zuordnen lassen, da Schülerinnen und Schüler hier gefordert sind, ihr eigenes Wissen zu überdenken und verschiedene Informationen und die damit verbundenen Perspektiven gedanklich miteinander zu verbinden.

Unabhängig von konkreten mathematischen Begriffen sollten Schülerinnen und Schüler im Umgang mit Mathematik darüber hinaus ein Bewusstsein für den eigenen Lernfortschritt und eigene Stärken und Schwächen entwickeln, sowie die Fähigkeit, entsprechend zu handeln und sich fehlende Informationen und Methoden eigenständig zu erarbeiten – Wissen und Fähigkeiten, die sich ebenfalls unter Metakognition einordnen lassen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Unter „Metakognition“ werden im Allgemeinen Wissen über eigene kognitive Vorgänge (*deklarativ*) sowie die Fähigkeit, diese zu überwachen und zu regulieren (*prozedural*), verstanden. Eine mögliche Unterscheidung in der Psychologie ist hierbei die zwischen deklarativem Metawissen und prozeduraler Metakognition (vgl. etwa Veenman 2012).

Unter deklarativem Metawissen sind hierbei vor allem Personenwissen (*person knowledge*), Aufgabenwissen (*task knowledge*) und Strategiewissen (*strategy knowledge*) zu verstehen (vgl. Schneider 2010). Dies bedeutet hier also Wissen über eigene, personenspezifische (kognitive) Merkmale in Bezug auf Mathematik, Wissen über aufgabenspezifische Informationen bei der Analyse mathematischer Sachverhalte und Aufgabenstellungen, sowie Wissen über mögliche Strategien bei der Bearbeitung und Lösung solcher Aufgaben und über deren Auswahl und Beurteilung.

Prozedurale Metakognition meint Prozesse wie Planung und Überwachung kognitiver Vorgänge, sowie deren (anschließende) Reflexion. Bezogen auf die Mathematik sind dies also bspw. planerische Überlegungen zu Beginn einer Aufgabe, der Abgleich des laufenden Denk- und Arbeitsprozesses mit gesetzten Zielen und mathematischem Vorwissen, sowie die anschließende Reflexion der eigenen Vorgehensweise und das Ziehen von Konsequenzen für den zukünftigen Umgang mit (ähnlichen) Problemstellungen.

## 2. Fragebogenstudie und Interviews

Zur Untersuchung von Metakognition bei Schülern der gymnasialen Oberstufe wurde im Lauf des Projekts ein Fragebogen ausgearbeitet, der Fragen zu verschiedenen Bereichen von Metakognition im Hinblick auf Mathematik beinhaltet. Abgefragt werden dabei bspw. die Fähigkeit, das eigene Verhältnis zur Mathematik und zum Mathematikunterricht zu beurteilen, die Einschätzung eigener Vorlieben und Stärken im Bereich der Mathematik, sowie die Beurteilung des Anspruchslevels in Schule und Hochschule. Des Weiteren beinhaltet der Fragebogen Fragen zu Vorgehensweisen beim Lösen von Klausuraufgaben, zum Umgang mit Problemsituationen im Mathematikunterricht und zur Überwachung des eigenen Arbeitens.

Dieser Fragebogen wurde im Dezember 2015 unter Mathematikstudierenden im ersten Semester ausgeteilt (fachmathematische sowie Lehramtsstudiengänge) und von 57 Teilnehmern vollständig bearbeitet. Aufgabe dabei war es, bei sämtlichen Fragen Auskunft über eigene Erfahrungen aus der vorangegangen Schulzeit zu geben.

Die dabei gewonnenen Daten sollen verwendet werden, um bestehende Unterteilungen bzw. Klassifikationen von Metakognition im Bereich der Mathematik nachzuweisen und ggf. neue hinzuzufügen, bzw. vorhandene zu präzisieren.

Diese Auswertung soll theoriegeleitet mit Methoden aus dem Bereich der „Grounded Theory“ nach Glaser und Strauss (vgl. etwa Strauss u. Corbin 1996) und der „Qualitativen Inhaltsanalyse“ nach Mayring (vgl. etwa Mayring 2010) vorgenommen werden, da hier sowohl mit bereits bestehenden Kategorien gearbeitet wird, als auch – ggf. – auf Grund der erhobenen Daten Kategorien neu entwickelt werden sollen.

Andererseits ist es angedacht, diesen Fragebogen als Pilotstudie für qualitative Interviews zu nutzen, die mit ausgewählten Teilnehmern (ebenfalls im 1. Semester) geführt werden sollen, da im direkten Gespräch mit diesen und durch die Aufforderung zu „lautem Denken“ Informationen in einer Ausführlichkeit gesammelt (und durch Rückfrage konkretisiert) werden können, die so mittels Fragebogen kaum realisierbar ist.

Zu diesem Zweck sind im Fragebogen – zusätzlich zu den bereits erwähnten Fragen/Items – fachliche Aufgaben enthalten, die zu bearbeiten und anhand weiterer Fragen zu kommentieren sind. Die Teilnehmer sollen durch diese Aufgaben zum Nachdenken und zum Verbalisieren ihrer Gedanken über Mathematik angeregt werden. Aus den hierbei gewonnenen Antworten sollen Erkenntnisse gezogen werden, die bei der Entwicklung entsprechender Interview-Fragen und -aufgaben hilfreich sein können.

## 3. Ziele

Ziel des Projektes ist also die Präzisierung des Begriffs der Metakognition in der Mathematik und seiner Bedeutung für das Lernen von Mathematik. Hierzu sollen Daten aus Fragebogenstudie und qualitativen Interviews genutzt werden, um ein Kategoriensystem zu entwickeln, bzw. bestehende Kategorien nachzuweisen und zu konkretisieren.

## Literatur


Cohors-Fresenborg, E. (2001). Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition im Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht, 2001,* 145-148. Hildesheim: Franzbecker

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile. In Peter-Koop, A., Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.): *Mathematische Bildung – Mathematische Leistung*, (S.233 – 248). Hildesheim: Franzbecker.

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006), *Analysis verständlich unterrichten*, München

Friedrich, H. (2001). Eine Kategorie zur Beschreibung möglicher Ursachen für Probleme mit dem Grenzwertbegriff. In: *Journal für Mathematik-Didaktik 22,* 207-230

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive Aspects of problem solving. In Resnick, L.B. (Hrsg.). *The nature of intelligence* (S. 231-235). Hillsdale: Erlbaum

Grotzer, T., Mittlefehldt, S. (2012). The Role of Metacognition in Students' Understanding and Transfer of Explanatory Structures in Science. In Zohar, A., Dori, Y.J. (Hrsg.). *Metacognition in Science education: Trends in Current Research*, 79-99, Contemporary Trends and Issues in Science Education 40. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer

Mayring, Ph. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. Weinheim und Basel: Beltz

Schneider, W., Ardelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 42, 149–161

Schoenfeld, A. H. (1991). What's all the fuss about problem solving, In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 23, 4-8

Strauss, A., Corbin, J. (1996). Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Psychologie Verlags Union

Veenman, M.V.J. (2012). Metacognition in Science Education: Definitions, Constituents, and Their Intricate Relation with Cognition. In Zohar, A., Dori, Y.J. (Hrsg.). *Metacognition in Science education: Trends in Current Research*, 21-36, Contemporary Trends and Issues in Science Education 40. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer

Weigand, H.-G. (1993). *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*, Überarbeitete Habilitationsschrift. Mannheim: BI

Kathrin NAGEL, Kristina REISS, München

# Verständnis mathematischer Fachbegriffe in der Studieneingangsphase

Beim Übergang von der Schule an die Universität treten insbesondere in mathematisch-naturwissenschaftlich geprägten Studiengängen Schwierigkeiten auf. Als besonders herausfordernd wird dabei die Mathematik angesehen. Gründe hierfür sind v. a. die Unterschiede zwischen Schul- und Hochschulmathematik. Besonders das mathematische Argumentieren gewinnt in der wissenschaftlichen Mathematik an Bedeutung, während das Anwenden von Kalkülen eher in den Hintergrund tritt (Heinze & Reiss, 2004).

Um die Schwierigkeiten beim mathematischen Argumentieren zu untersuchen, ist es notwendig, die dazu notwendigen Fähigkeiten zu analysieren. Neben Metawissen über Beweisprozesse und Logik sind Problemlösekompetenz und elaboriertes Fachwissen Voraussetzungen für mathematische Argumentation (Brunner, 2014). Mit der Elaboration von Fachwissen geht ferner ein Mindestmaß an Verständnis mathematischer Inhalte und Begriffe einher. Die Untersuchung des mathematischen Begriffsverständnisses von Studienanfängern soll daher im Fokus des vorliegenden Beitrags liegen.

## 1. Begriffsverständnis in der Mathematikdidaktik

Die Psychologen Anderson und Krathwohl (2001) definieren *Verstehen* allgemein als „construct meaning from instructional messages, including oral, written, and graphic communication“ (S. 70). Etwas spezifischer wird mathematisches Begriffsverständnis von Vollrath (1984) wie folgt definiert: „Verständnis kann man … als Ergebnis eines geistigen Prozesses, des Lernens ansehen. Das Lernen eines Begriffs ist dabei eine Zustandsänderung im Denken [...]. [A]m Ende dieses Vorganges [besitzt der Lernende] gewisse nachprüfbare Fähigkeiten …, die er zu Beginn … noch nicht besaß“ (S. 11). Zum Verständnis eines Begriffs gehören nach Vollrath (2001) die Kenntnis der Begriffsbezeichnung (1), das Generieren von Beispielen (2), die Abgrenzung zu anderen Begriffen (3), die Kenntnis charakteristischer Eigenschaften (4) sowie die Einbettung in den Kontext (5).

An diese Theorie anlehnend wurde eine Studie entwickelt, die das Verständnis grundlegender mathematischer Fachbegriffe bezüglich der Aspekte (2), (3) und (4) abprüfen soll. Ziel dabei ist es, zunächst die Ausgangslage der Studierenden zu Beginn ihres Studiums in Bezug auf das mathematische Begriffsverständnis zu beschreiben.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 2. Studie zum Verständnis mathematischer Fachbegriffe

Die Studie beschäftigte sich mit den vier mathematischen Fachbegriffen *Mittelsenkrechte*, *gleichschenkliges Dreieck*, *Vektor und seine Repräsentanten* sowie *lineare Unabhängigkeit*, die bereits aus der Schule bekannt sind. Zu diesen vier Fachbegriffen wurden je fünf Aufgaben gestellt, bei denen jede der Aufgaben vier Teilaufgaben umfasste. Das Itemformat war offen, um die Studierenden bei der Beantwortung der Fragen nicht zu beeinflussen. Die Aufgaben sollten nacheinander bearbeitet werden – entsprechende Hinweise befanden sich auf den Testbögen und wurden zusätzlich von den Testleitern kommuniziert. Für diesen Beitrag sind drei Aufgaben der Studie relevant, da die anderen Aufgaben sich auf mathematische Sätze bezogen, die aus den jeweiligen Begriffen gebildet wurden.

Aufgabe 1 erforderte die Angabe eines Beispiels zu den gegebenen Begriffen, Aufgabe 2 eine Begründung, warum ein gegebenes Beispiel nicht zu diesen Begriff zählt, und Aufgabe 3 die explizite Angabe zweier wichtiger Eigenschaften dieses Begriffs.

Getestet wurden N=438 Studierende (männlich: N=362; weiblich: N=76; $M_{\text{Abiturnote}}$=1,71; $SD_{\text{Abiturnote}}$=0,577) des Maschinenbaus und anderer Ingenieurwissenschaften in einem mathematischen Vorkurs des WS 2014/15. Die Teilnahme am Vorkurs und am Test war freiwillig. Die Bearbeitungszeit betrug 30 Minuten. Aufgrund der kurzen Bearbeitungszeit im Vergleich zur Anzahl der Items, wurde der Test in vier Gruppen aufgeteilt. In jeder Gruppe wurde ein Begriff aus allen Aufgaben entfernt, sodass jeder Teilnehmer nur zu drei Begriffen die fünf Aufgaben bearbeiten musste. Dementsprechend wurden die Teilaufgaben zur Mittelsenkrechte von N=328, zum gleichschenkligen Dreieck von N=320, zum Vektor und seinen Repräsentanten von N=324 und zur linearen Unabhängigkeit von N=340 Teilnehmerinnen und Teilnehmern bearbeitet.

## 3. Deskriptive Ergebnisse

Eine erste Codierung der Ergebnisse erfolgte auf einer dreistufigen Skala: vollständig korrekte Antwort – korrekte und falsche Aspekte – falsche Antwort. Eine Aufgabe wurde dann als gelöst angesehen, wenn die Antwort vollständig korrekt war. Abbildung 1 zeigt die prozentualen Lösungsraten der Teilnehmer für die drei relevanten Aufgaben (Aufgaben 1 bis 3) und für jeden Begriff.

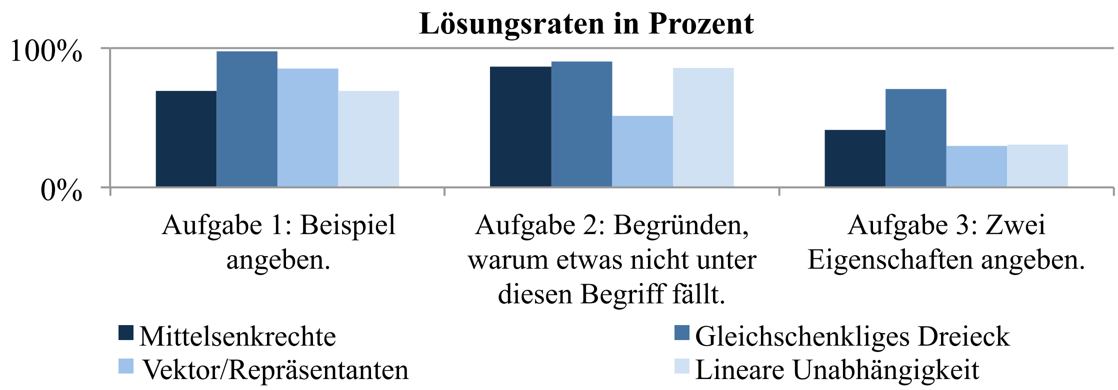



**Abb. 1: Prozentuale Lösungsraten der ersten drei Aufgaben für jeden Begriff**

Die erste Aufgabe wurde von den Studierenden gut gelöst, die Lösungsrate lag bei den Items gleichschenkliges Dreieck und Vektor/Repräsentant bei über 80%. Die Lösungsraten bei den Items zur Mittelsenkrechten sowie zur linearen Unabhängigkeit waren dagegen etwas niedriger (69,1% und 69,2%). Aufgabe 2 wurde fast durchweg sehr gut gelöst, das Item zu Vektor/Repräsentant konnten jedoch nur 51,1% der Teilnehmer korrekt beantworten. Auffällig sind auch die niedrigen Lösungsraten bei Aufgabe 3. Bei dieser Aufgabe wurde lediglich das Item zum gleichschenkligen Dreieck gut gelöst, die prozentuale Lösungsrate lag bei 70,5%. Eine detailliertere Analyse der Antworten zur Aufgabe 3 zeigt Abbildung 2.

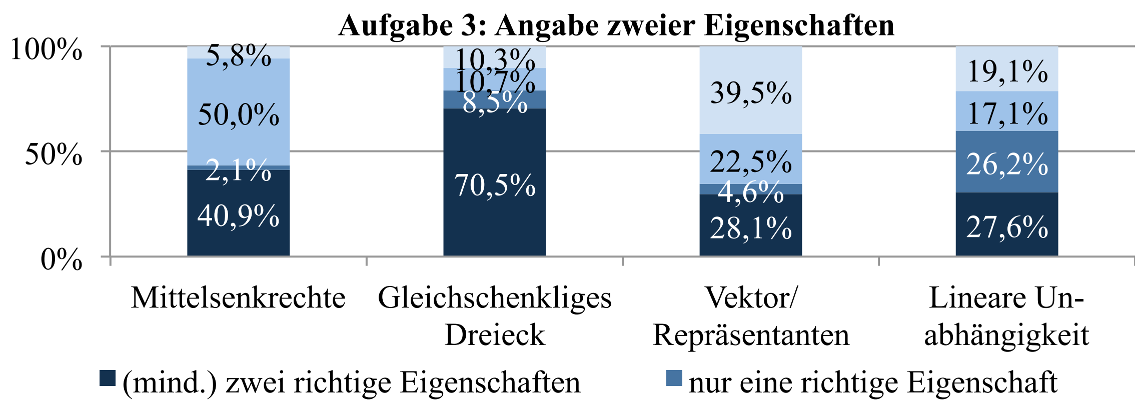



**Abb. 2: Detaillierte Analyse der Antworten für Aufgabe 3**

Aufgabe 3 erforderte die explizite Angabe zweier wichtiger Eigenschaften eines Begriffs. Auffällig ist, dass die Hälfte der Studierenden der Mittelsenkrechten zwar eine richtige, aber auch eine falsche Eigenschaft zuwies. Des Weiteren lösten 70,5% der Teilnehmer das Item zum gleichschenkligen Dreieck korrekt. Die Aufgaben zu Vektor/Repräsentant sowie zur linearen Unabhängigkeit fielen den Studierenden eher schwer. Bei diesen beiden Items konnten nur etwa 28% zwei korrekte Eigenschaften angeben. 39,5% der Teilnehmer wiesen den Vektor/Repräsentanten sogar nur falsche Eigenschaften zu.

## 4. Diskussion

Die Studierenden konnten vielfach korrekte Beispiele zu den Begriffen angeben (Aufgabe 1). Zur linearen Unabhängigkeit konnten allerdings nur 69,2% der Teilnehmer treffende Beispiele nennen. Dies kann mit der hohen Komplexität des mathematischen Fachbegriffs erklärt werden. Nicht plausibel erscheint zunächst die verhältnismäßig niedrige Lösungsrate der Mittelsenkrechten bei Aufgabe 1. Eine genauere Analyse zeigt hier, dass einige Studierende die Höhe eines Dreiecks mit der Mittelsenkrechten verwechselten. Im Gegensatz dazu beantworteten jedoch 86,5% das Item zur Mittelsenkrechten in Aufgabe 2 korrekt. Hier zeigt eine genauere Untersuchung, dass die Wahl des konkreten Beispiels, das die Studierenden von dem Begriff abgrenzen sollten, ungeschickt war. Dieses Item konnten leider auch Studierende korrekt lösen, die die Mittelsenkrechte mit der Höhe verwechselten. Die Items zum Vektor/Repräsentanten in den Aufgaben 2 und 3 wurden von wenigen Studierenden korrekt beantwortet. Dies könnte daran liegen, dass sowohl in Schulbüchern als auch im schulischen Mathematikunterricht die Begriffe Vektor und Repräsentant nach der Einführung oft synonym verwendet werden (Tietze, Klika & Wolpers, 2000). Die Ergebnisse der Studie weisen außerdem darauf hin, dass eine Diskrepanz zwischen explizitem und implizitem Wissen vorliegen könnte. Während das Lösen der Aufgaben 1 und 2 implizit mit den Eigenschaften der Begriffe möglich war, mussten in Aufgabe 3 diese explizit angegeben werden. Die Lösungsraten lagen bei den Fachbegriffen Mittelsenkrechte, Vektor/Repräsentant und lineare Unabhängigkeit unter 50%. Weitere Analysen sollen den Bezug zum Verständnis mathematischer Sätze (Aufgaben 4 und 5) herstellen, um den Einfluss auf mathematisches Argumentieren zu analysieren.

## Literatur


Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing – A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives.* New York: Longman.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin Heidelberg: Springer.

Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level – a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36*(3), 98-104.

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.* Braunschweig: Vieweg.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht.* Stuttgart: Klett.

Vollrath, H.-J. (2001). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Heidelberg Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Dmitri NEDRENCO, Würzburg

# Axiomatisieren lernen mit Papierfalten

In den Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik (DMV, 2008) wird eine der Kompetenzen im Bereich Geometrie als »Die Studierenden beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie« benannt. Es stellt sich die Frage, wie Studierende diese Kompetenz erwerben sollen. Ein modernes Axiomensystem der euklidischen Geometrie besteht zumeist aus einer Vielzahl von nichttrivialen Axiomen und es hat lange gedauert, bis diese Axiome gefunden wurden. Wir können also nicht erwarten, dass Studierende diesen Weg in kurzer Zeit gehen können. Welche Auswege gibt es aus dieser Situation? Man kann mit wenigen einleuchtenden Axiomen beginnen, komplizierte Axiome, wie etwa Axiome der Stetigkeit und Anordnung, außer Acht lassen und daraus eine Geometrie entwickeln (Schnabel, 1981). Eine andere Möglichkeit ist es, Studierende ein Axiomensystem selbst entwickeln zu lassen. Diesen Prozess des Auffindens von Axiomen einer bestehenden Theorie (anders gesagt, Reduktion auf ein Axiomensystem), nennt man auch *Axiomatisieren* dieser Theorie. Das heißt, man kann Studierenden eine geometrische Theorie vorlegen, die ein einfaches Axiomensystem erlaubt, mit der Hoffnung, dass sie daran die wesentlichen Merkmale eines Axiomensystems lernen und damit Sinn und Zweck eines Axiomensystems besser verstehen.

Eine solche Theorie könnte die des Papierfaltens sein, denn Papierfalten kann auf ein einfaches Axiomensystem reduziert werden (Alperin & Lang 2006, Martin 1998). Außerdem ist es wohlbekannt, dass Origami (jap. *oru* für falten, *kami* für Papier) ein hohes Faszinationspotenzial besitzt; deswegen sind wir der Meinung, dass es leicht gelingen könnte, eine Axiomatisierung des Papierfaltens gegenüber den Studierenden zu motivieren.

Daher wird im Sommersemester 2015 an der Universität Würzburg ein einsemestriger Kurs »Axiomatisieren lernen mit Papierfalten« für gymnasiale Lehramtskandidaten angeboten, in dem durch gezielte Aufgabenstellungen und Konstruktionen Studierende die Axiome des Papierfaltens nach und nach entdecken sollen; ferner sollen sie diese Axiome auf Unabhängigkeit und Vollständigkeit prüfen und in diesem Zusammenhang über Axiomensysteme der Geometrie und Axiomatik im Allgemeinen diskutieren.

## Was ist Papierfalten?

Üblicherweise stellt man sich unter Origami Kraniche, Weihnachtstssterne, springende Frösche oder ähnliches vor. Diese Objekte sind meist kunstvoll

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

aus einem oder mehreren Papierstücken gefaltet und sind nur schwer mathematisch erfassbar.

Die wohl einfachste Form des Origami ist das 1-fach-Origami – dazu sagen wir hier »Papierfalten«: Nur solche Faltungen eines Papierstücks (besser der euklidischen Ebene) sind zulässig, bei denen pro Faltung genau ein Falz entsteht. Es hat sich in den letzten 25 Jahren herausgestellt, dass jede dieser 1-fach-Faltungen durch sieben Grundfaltungen beschrieben werden kann, genannt Huzita-Justin-Axiome (Alperin & Lang, 2006). Eine Diskussion dieser Axiome findet man zum Beispiel bei Waschbusch und Gawlick (2009) oder Alperin und Lang (2006). Für den Geometrieunterricht ist Papierfalten unter anderem reizvoll, weil es reichhaltiger als euklidische Konstruktionen ist: Alle Punkte der Ebene, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, sind auch mit Papierfalten konstruierbar; Papierfalten erlaubt aber darüber hinaus Konstruktionen weiterer Punkte – man kann etwa quartische Gleichungen mit rationalen Koeffizienten lösen, insbesondere Winkel dreiteilen und das Delische Problem lösen.

## Forschungsfragen

Viele Experten der Origamiwelt zweifeln nicht daran, dass Papierfalten eine sehr nützliche Beschäftigung im Mathematikunterricht ist, allerdings gibt es nur wenige Belege dafür, dass Papierfalten tatsächlich Schülerkompetenzen (und wenn ja, welche) verbessert. Eine solche Kompetenz wäre werkzeugadäquat das räumliche Vorstellungsvermögen. Jedoch erheben wir dessen Verbesserung nicht zu einem Ziel des Kurses, weil wir nicht erwarten, innnerhalb eines Semesters darin wesentliche Veränderungen zu erzielen. Vielmehr glauben wir, dass nur eine gezielte, konsequente und mehrjährige Beschäftigung mit Papier in der Schule eine solche Verbesserung erbringen kann. Einen Überblick über Origami und das Vorstellungsvermögen gibt Boakes (2011).

Miri Golan (2010) weist darauf hin, dass Lehrkräfte, die Origami im Unterricht einsetzen wollen, selbst gute Faltfertigkeiten haben sollen. Doch kann man von einer Lehrkraft keine autodidaktische Aneignung der Faltkunst verlangen; vielmehr sollte es eine dazu passende Aus- bzw. Fortbildung geben. Deswegen stellt sich die Frage: Kann man, und wenn ja, wie, einen kompakten und unterhaltsamen Hochschulkurs entwickeln, in dem zukünftige Lehrerinnen und Lehrer notwendige mathematische Hintergründe des Papierfaltens erwerben sowie grundlegende Faltungen erlernen? Dies ist eine der Forschungsfragen, denen wir nachgehen wollen.

Der zweite wesentliche Teil der Unternehmung ist, folgende Fragen zu behandeln: Eignet sich Papierfalten zum Axiomatisierenlernen? Welche

Schwierigkeiten haben Studierende beim Axiomatisieren einer mathematischen Theorie? Welches Verständnis des Prozesses des Axiomatisierens erwerben die Studierenden?

Es ist nicht so einfach, diese Fragen zu operationalisieren. Wir befinden uns gerade in der Entwicklung derartiger Forschungsfragen.

**Inhaltliche Ziele**

Im Kurs sollen Studierende hauptsächlich Sinn und Zweck von Axiomensystemen kennenlernen und Fertigkeiten im fortgeschrittenen Umgang mit Papierfalten erwerben. Wir präzisieren diese Ziele wie folgt:

1) Studierende kennen wichtige Eigenschaften eines Axiomensystems, kennen didaktische Schwierigkeiten der Axiomatik in der Schule; sie können wesentliche Unterschiede zwischen Axiomensystemen der euklidischen Geometrie nach Euklid bzw. Hilbert bzw. George E. Martin (Martin, 1975) herausstellen. Ferner kennen Studierende ein Axiomensystem des Papierfaltens und wesentliche Unterschiede zwischen Zirkel&Lineal-Konstruktionen und dem Papierfalten.
2) Studierende können charakteristische Konstruktionen des Papierfaltens wie Winkeldreiteilung, Lösen von kubischen Gleichungen, Konstruktionen von Vielecken sowie Konstuktionen von wichtigen Verhältnissen (1/3, 1/5, etc) durchführen und erklären.

Das erste Ziel strebt Diskussion und Verständnis logischer Eigenschaften von Axiomensystemen an, das zweite möchte Papierfalten von einem gehobenen Standpunkt lehren.

**Methoden**

Die Methodik des Kurses orientiert sich am lokalen Ordnen im Sinne Freudenthals; die Studierenden fangen mit verschiedenen Faltkonstruktionen an und destillieren daraus Grundfaltugen. Da Papierfalten eine vermutlich unbekannte Beschäftigung für die Studierenden ist, scheint eine Mischung aus Vorlesungen und gemeinsamen Konstruktionssequenzen angebracht.

Vor dem Kurs wird ein schriftlicher Pre-Test in Form eines Fragebogens durchgeführt, um das Vorwissen der Teilnehmer im Hinblick auf Origami sowie ihre Bekanntschaft mit Axiomatik zu erfassen.

Aus organisatorischen Gründen gehen wir von 10 bis 15 Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus, die wir nach dem Kurs einzeln interviewen können. Die videoaufgezeichneten Interviews wollen wir leitfadengesteuert, aber möglichst offen, gestalten, um anschließend im Rahmen der Grounded-Theory das erhobene Material auszuwerten.

## Weitere Bemerkungen

Zwar sind Axiome des Papierfaltens aus mathematisch-logischer Perspektive naheliegend und interessant, doch sind wir der Meinung, dass Axiomatisieren des Papierfaltens kein im Schulunterricht angestrebtes Ziel sein sollte; wir fassen es so auf, dass es dem Hochschulunterricht vorbehalten ist. Es gibt jedoch sehr viele interessante Faltkonstruktionen, die im Schulunterricht spannend besprochen werden können (Henn 2009, Hull 2013, Schmitt-Hartmann 2013). Allerdings gibt es aus unserer Sicht keinen gezielten – linearen – Plan für alle Klassen und Schulformen und es wäre eine weitere wichtige Forschungsaufgabe, einen solchen Plan zu konzepieren.

## Literatur


Alperin, R. C., & Lang, R. J. (2006). One-, two, and multi-fold origami axioms. *Origami*, *4*, 371-393.

Beck, C., & Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. Journal für Mathematik-Didaktik, 14(2), 147-179.

Boakes, N. (2011, June). Origami and Spatial Thinking of College-Age Students. In *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (p. 173). CRC Press.

DMV, GDM, MNU (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM und MNU, Juni 2008. *Mitteilungen der DMV*, *16*, 149-159.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben. Der Mathematikunterricht, 9(4), 5-29.

Golan, M., & Jackson, P. (2010). Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. *Online: http://www.emotive.co.il /origami/db/pdf/996_golan_article.pdf, (aufgerufen am 2.3.2015)*.

Henn, H.-W., (2003). Origamics. Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. *Online: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (aufgerufen am 2.3.2015).*

Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. CRC Press.

Martin, G. E. (1975). *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*. Springer Science & Business Media.

Martin, G. E. (1998). *Geometric constructions*. Springer.

Schmitt-Hartmann, R. & Herget, W. (2013). *Moderner Mathematikunterricht. Papierfalten im Mathematikunterricht 5 bis 12.* Klett.

Schnabel, R. (1981). *Euklidische Geometrie* (Habilitationsschrift).

Van der Waerden, B. L. (1967). Klassische und moderne Axiomatik. *Elemente der Mathematik*, *22*, 1-4.

Waschbusch, J., & Gawlick, T. (2009). Grundfaltungen des Origamis. *Mathematikunterricht*, *55*(6), 49.

Christoph NEUGEBAUER, Kathrin WINTER, Münster

# Entwicklung zielgruppenadäquater diagnostischer Testitems für Online-Self-Assessments

## Ausgangssituation

Der Übergang von der Schule in die Hochschule ist gerade in Studiengängen mit hohen Mathematikanteilen mit großen Hürden verbunden (vgl. u. a. Gueuedet, 2008, Dieter, 2012). Um dieser Übergangsproblematik zu begegnen, werden an vielen Hochschulen Tests zu Studienbeginn durchgeführt, um die mathematischen Fähigkeiten der Studienanfänger zunächst zu ermitteln und eventuell aufgedeckte Lücken zu schließen. Das Angebot von Online-Self-Assessments (OSAs) steigt dabei stetig. Viele „Angebote [werden jedoch] ihren eigenen Versprechen nicht gerecht [… und liefern teilweise sogar] widersprüchliche Rückmeldungen" (Gollup, Meyer-Buckel 2014, S. 2). Für Studieninteressierte stellen Testitems zur Mathematik teilweise einen besonders hohen Anteil in vorhandenen OSAs dar. Bei Analysen stellte sich auch im Jahr 2015 bei aktuellen, teilweise ganz neu entwickelten Angeboten heraus, dass die Feedbacks den Versprechen einer Diagnose und Förderung oder Hinweisen, wie gut das eigene Wissen zu den durch den Studiengang gewünschten Vorkenntnissen passt, selten gerecht werden. Die wenigsten Produkte liefern mehr als eine Fehler- oder Lösungsquote zurück, eine individualdiagnostische Rückmeldung erfolgt gar nicht. (vgl. u. a. Winter, 2013, Neugebauer, Winter, 2014)

## Zielgruppenadäquatheit

Gerade OSAs sollten ebenso wie Lehr- und Lernwerke zielgruppenspezifisch ausgerichtet und angepasst sein. Bezogen auf mathematische Tests wäre beispielsweise zu erwarten, dass die Aufgabenstellungen sowohl inhaltlich als auch hinsichtlich einer eventuellen kontextuellen Einbindung adäquat entwickelt und dazu sprachlich – wie auch fachsprachlich – für die jeweilige Zielgruppe verständlich sind. Dass dies jedoch nicht immer der Fall ist, zeigt ein Beispielitem aus einem aktuellen Mathematik-OSA zur Studienorientierung bzw. Überprüfung der eigenen mathematischen Kompetenzen für ein Studium an der Hochschule. Eine weitere Differenzierung des Studiengangs fand nicht statt.

*„Für ein in England gekauftes Gerät finden Sie in der Betriebsanleitung die Druckangabe $2 * 10^3$ psi. Sie brauchen den Druck in bar. Dazu schla-*

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

*gen Sie nach:[…] Geben Sie den Druck in bar an, gerundet auf eine ganze Zahl.“* [1]

Die mit diesem Item zu überprüfenden Kompetenzen sind unklar. Geht es um die Fähigkeit, aus gegebenen Einheitendefinitionen eine Umrechnungsformel zu entwickeln, sollen lediglich die Zahlenwerte korrekt in die Formel eingesetzt werden oder liegt hier der Fokus auf dem korrekten Runden auf eine natürliche Zahl?

Eine weitere Aufgabenstellung im Rahmen eines anderen OSAs für angehende Lehramtsstudierende im Schwerpunkt Haupt-/Realschulen mit Fach Mathematik an einer nordrhein-westfälischen Universität lautet:

*„Welchen Wert muss der Parameter a annehmen, damit $x_1 = 2$ eine Lösung der Gleichung $a * x^2 + x + 1 = 0$ ist?“* [2]

Im Rahmen einer Erhebung unter Studierenden des fünften Semesters zeigte sich, dass der überwiegende Teil der Studierenden Schwierigkeiten beim Verständnis der Aufgabe hatte. So gaben 29 % der Befragten konkret an, die Aufgabenstellung nicht verstanden zu haben, die gesamte Stichprobe lieferte nicht eine einzige vollständig korrekte Lösung zu diesem Item. Aus diesen Ergebnissen lässt sich ableiten, dass Studienanfänger(innen) wahrscheinlich noch weitaus größere Schwierigkeiten mit dieser Aufgabenstellung aufweisen dürften.

Diese zwei Beispiele stehen exemplarisch für weitere Items aus existierenden OSAs, die u. a. weder bezüglich des Studiengangs noch der Aufgabenformulierung zielgruppenadäquat formuliert wurden.

### Entwicklung zielgruppenadäquater diagnostischer Items

Damit OSAs frühzeitig bei der Erkennung und Behebung eventuell auftretender Übergangsschwierigkeiten unterstützend eingesetzt werden können, ist eine ausführliche Analyse der Testergebnisse notwendig, die den Studierenden in der Rückmeldung der Tests angeboten wird. Neben der Ermittlung einer Gesamtlösungsquote und einer Übersicht der falsch und richtig gelösten Aufgaben sollte zusätzlich ein individuelles, diagnostisch fundiertes Feedback erfolgen, das eine detaillierte Auskunft über die vorhandenen oder defizitären Kompetenzen der Testperson liefert.

---

[1] Universität Bremen: eAssessment Freie Übungen und Beispielprüfungen. Quelle: http://uebung.eassessment.uni-bremen.de/TrainingModeFrame.aspx, Stand: 05.02.15

[2] StudiFinder – Welches Studium passt zu mir? Self-Assessment Studiengang Lehramt GHR Mathematik an der WWU Münster. Quelle: https://www.studifinder.de/index.php, Stand: 05.02.15

Im Rahmen der Entwicklung eines OSAs, welches später für einzelne Studiengänge adaptiert werden kann, kommen verschiedene Methoden im Sinne eines Mixed-Method-Designs zum Tragen. Über Inhaltsanalysen sowie rationale und empirische Aufgabenanalysen werden Testinhalte, Items und Distraktoren entwickelt, die in einem zyklischen Verfahren mehrfach verschiedene Analyseverfahren durchlaufen (vgl. hierzu auch Winter 2011). Ziel des teils neu und teils weiter zu entwickelnden OSAs ist es, Probleme bestehender Tests zu vermeiden. Sowohl die Tests als auch die Feedbacks werden hochschul- und studiengangspezifisch entwickelt. Dazu gehören u. a. die Aufschlüsselung der verschiedenen mathematischen Bereiche, die Anpassung des Feedbacks an die individuellen Ergebnisse, die Entwicklung und der Einsatz von Items mit diagnostischem Potential und konkrete inhaltsbezogene Förderhinweise (vgl. u. a. Neugebauer 2013).

Das Vorgehen sei an einem Item exemplarisch veranschaulicht, welches im Rahmen des OSAs aus dem Projekt MaStEr „Mathematik Studieren mit Erfolg“[3] für Studierende des Lehramtes GHR mit Fach Mathematik an der WWU Münster zum Einsatz kommt.

Schreiben Sie als ein Bruch. Kürzen Sie so weit wie möglich, falls dies möglich ist. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

- ☐ 1
- ☐ $\frac{x^2+4}{2x}$
- ☐ $\frac{x+2}{2+x}$
- ☐ $\frac{x^2+2}{2x}$
- ☐ $\frac{x+4}{2}$
- ☐ $\frac{x^2+4}{2+x}$
- ☐ Ich kenne die Antwort nicht.
- ☐ Meine Lösung lautet:

Die einzelnen Distraktoren dieses Items bilden idealtypische korrekte und fehlerhafte Antworten ab und können so im Rahmen der Diagnose und Förderrückmeldungen für Hinweise auf konkrete Kompetenzen und Defizite in klar eingegrenzten mathematischen Bereichen genutzt werden. So verbirgt sich bspw. hinter dem ersten Distraktor „1“ eine Kombination aus zwei typischen Fehlern: dem Kürzen über Kreuz aus Summen und der anschließenden Vernachlässigung des Operatorsymbols „+“. Letzterer Fehler kann durch eine entsprechende Adaption der nachfolgenden Testitems bei den Proband(inn)en validiert werden, ob es sich bspw. um eine Perseveration der Zahl Eins, um eine Perseveration der Multiplikationsregel oder um ein fehlerhaftes Umwandeln des Bruchtyps „a/a“ handelt. Die Wahl des dritten Distraktors lässt auf ein fehlendes Erweitern der Brüche und hierbei auf den typischen Fehler „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ schließen. Dementsprechend erfolgen nach Auswahl dieses Distraktors passende

[3] Mehr Informationen unter: http://mathematikstudierenmiterfolg.weebly.com/

fehleranalytische Rückmeldungen, die zum einen den – auf Basis umfangreicher Untersuchungen – am wahrscheinlichsten Fehler nachvollziehbar umschreiben und zum anderen Förderhinweise zur Fokussierung auf diesen mathematischen Bereich anbieten.

## Zwischenfazit und Ausblick

Die vorab dargestellten Ausschnitte der ersten Pretest-Ergebnisse weisen bereits auf die notwendige Tiefe der Forschung im Bereich der Entwicklung von OSAs hin. Bei der Entwicklung zielgruppenadäquater OSAs sollte Disziplinen übergreifend gearbeitet und geforscht werden und auf eine vorschnelle Veröffentlichung der OSAs verzichtet werden, bei der Kriterien wie „diagnostisch“ und „Passung zu bestimmten Studiengängen“ oder „punktuell auf Defizite hinweisend“ versprochen, dann jedoch durch das Angebot nicht erfüllt werden. Sicherlich ist es lobenswert, möglichst schnell auf die Übergangsproblematiken der Studierenden zu reagieren. Doch sollte nach Erachten der Autoren hierbei ehrlich klargestellt werden, welchen Kriterien die Angebote zum jeweiligen Zeitpunkt tatsächlich genügen.

## Literatur


Dieter, M. (2012): Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren. Dissertation, Universität Duisburg-Essen.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. Educational Studies in Mathematics, 67 (3), 237-254.

Gollup, J., Meyer-Buckel, V. (2014): Wer bin ich – und wenn ja, wie viele? Online-Studienselbsttests als „Orientierungs- und Entscheidungshelfer“. Quelle: http://www.stifterverband.info/presse/pressemitteilungen/2014_09_05_online-selbsttests/index.html, Stand: 02.11.14

Neugebauer, C. (2013): Online -Test zum Self-Assessment im Themenfeld "Studierfähigkeit in Mathematik": Zur Entwicklung von Multiple-Choice-Items. In: Hoppenbrock et al. (Hrsg.): khdm-Report 13-01, Kassel.

Neugebauer, C., Winter, K. (2014): Fehleranalysen bei Studienanfängern als Basis zur individuellen Förderung in Mathematik. In: Beiträge zur Mathematikdidaktik, Münster.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse: Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. WTM-Verlag, Münster.

Robert NEUMANN, Freiburg

# Computeralgebrasysteme und mathematische Grundfähigkeiten.

Computeralgebrasysteme (CAS) im Schulunterricht waren in der Vergangenheit bereits Gegenstand von verschiedenen Forschungsprojekten. Hier seien exemplarisch der Bayerische Modellversuch $M^3$ (Weigand & Bichler 2010) und CAliMERO (Ingelmann 2008) genannt. Bei diesen Untersuchungen handelte es um eine „klassische“ Interventionsstudie ($M^3$) bzw. um ein mehrjähriges Projekt, in dessen Rahmen der Mathematikunterricht mit Technologieeinsatz evaluiert wurde (CAliMERO).

## 1. Forschungsfrage

Da es bisher im deutschsprachigen Raum keine Studien gab, die das Grundwissen und die Grundfertigkeiten von SchülerInnen am Ende der Schulzeit bzw. am Anfang des Studiums untersuchten, sollte dies der Forschungsgegenstand sein. Damit verbunden ist die Erwartung, Ergebnisse zu erhalten, die Aufschluss über einen längerfristigen Einfluss des im Unterricht verwendeten Taschenrechnertyps geben können.

Die Forschungsfrage lautet: „Bestehen Unterschiede bei mathematischen Grundkompetenzen von Studienanfängern, die sich auf die Art des im Unterricht verwendeten Taschenrechnertyps „Grafikfähiger Taschenrechner“ (GTR) oder CAS zurückführen lassen?“

## 2. Untersuchungsdesign

Es wurden Studienanfänger des Fachs Wirtschaftswissenschaften in Hannover und Oldenburg in der ersten Vorlesungsstunde im 1. Semester getestet. Insgesamt konnten so 462 Datensätze generiert werden.

Bei der Untersuchung handelt es sich um ein „nonequivalent Groups Posttest-Only Comparison Group Design“ (McMillan, 2010), da ein Prätest nicht möglich war. Es wurde ein Posttest nach der Intervention (der Unterricht mit dem CAS) durchgeführt. Daher war es nötig, Stichproben auszuwählen, die möglichst wenige Unterschiede aufweisen. Im konkreten Fall bedeutet dies, dass alle Teilnehmer der Studie das allgemeinbildende Gymnasium, bzw. die Gesamtschule in Niedersachsen besucht hatten und in der Schulzeit mit dem jeweiligen Rechnertyp unterrichtet wurden. Die Entscheidung zwischen GTR und CAS erfolgte in Niedersachsen für die gesamte Schule, so dass die SchülerInnen nicht zwischen den Geräten wählen konnten. Alle Testteilnehmer wurden in Mathematik im Abitur geprüft und hatten mit dem Studium spätestens im Folgejahr des Abiturs begonnen. Das

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Fach Wirtschaftswissenschaften wurde ausgewählt, um eine möglichst große Varianz der Ergebnisse zu erreichen. Zur Messung der mathematischen Grundfähigkeiten wurde ein Fragebogen eingesetzt, der die folgenden Themenbereiche umfasste: Algebra- und Rechenaufgaben, Textaufgaben sowie Aufgaben zur Interpretation von Funktionsgraphen. Insbesondere diese letztgenannten Aufgaben dienten dazu, Themen der Sekundarstufe 2 abzufragen.

## 3. Ergebnisse

Um die Forschungsfrage beantworten zu können, wurden die Datensätze mit Hilfe einer Varianzanalyse ausgewertet. Die beiden untersuchten Faktoren waren dabei die Rechnerart, d.h. der in der Schule verwendete Taschenrechner (GTR bzw. CAS), sowie das in der Schule besuchte Kursniveau (Grund- bzw. Leistungskurs). Es standen die folgenden Fragen im Fokus:

1. Welche Faktoren haben einen Einfluss auf die Fähigkeit, Funktionsgraphen richtig interpretieren zu können? (Gemessen durch die Anzahl der richtig bearbeiteten Aufgaben)
2. Welche Faktoren haben einen Einfluss auf die Anzahl der gemachten Rechenfehler?
3. Welche Faktoren haben einen Einfluss auf die Anzahl der bearbeiteten Aufgaben?

Zum 1. Punkt: Bei der Auswertung wurden richtige Antworten mit einem Punkt bewertet, teilweise richtige Aussagen mit 0,5 Punkten. Insgesamt standen für die Auswertung 11 Items zur Verfügung (Cronbachs $\alpha = 0{,}72$).

| | F | Signifikanz | Effektstärke f |
|---|---|---|---|
| Rechnerart | 0,41 | 0,52 | 0,0 |
| Kursniveau | 23,3 | 0,00 | 0,23 |
| Rechnerart*Kursniveau | 6,006 | 0,02 | 0,14 |

Betrachtet man nur den Faktor „Rechnerart“, so zeigt dieser keine statistische Relevanz, der Faktor „Kursniveau“ hingegen ist hochsignifikant. Auch der Einfluss der Wechselwirkung ist signifikant. Durch Hinzunahme der grafischen Darstellung lassen sich diese Ergebnisse besser verstehen.

Es zeigt sich, dass die GTR-Nutzer eher zu homogenen Ergebnissen kommen, die näher am Gesamtmittelwert (gestrichelte Linie) liegen. Die CAS-Nutzer hingegen zeigen eher heterogene Ergebnisse. Dabei erreichten die

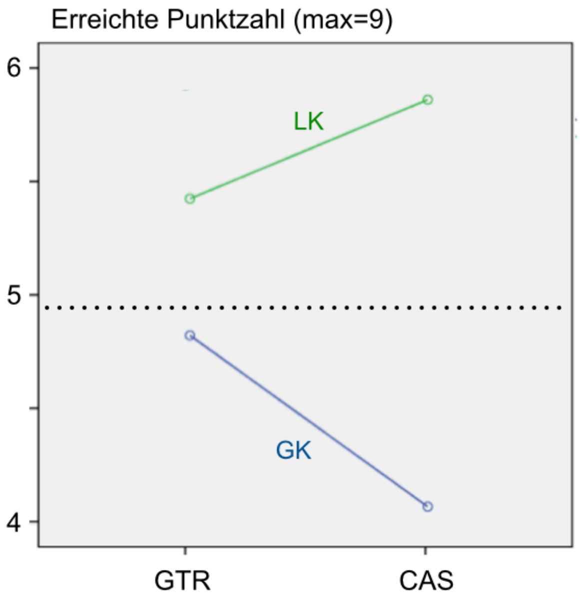



**Abbildung 1: Geschätzte Randmittel, Erreichte Punkte, Interpretation von Funktionsgraphen.**

CAS-Leistungskurs-SchülerInnen die meisten Punkte und die CAS-Grundkurs-SchülerInnen die wenigsten Punkte. Innerhalb des Grundkurses ist der Unterschied zwischen GTR und CAS statistisch signifikant. Es sollte allerdings erwähnt werden, dass es sich um einen eher kleinen Effekt handelt.

Zum 2. Punkt: Um die Anzahl der Rechenfehler zu erfassen, wurden die Kalkül- und Gleichungslöseaufgaben ausgewertet. Jeder Fehler wurde im Anschluss mit 1 Punkt bewertet. Nach der Reduktion der Items mit Hilfe des Schwierigkeitsindex blieben 7 Items zur Auswertung. Eine Reliabilitätsanalyse ergab für Cronbachs $\alpha = 0{,}36$, so dass sich das Testinstrument nicht als geeignet erwies, um die Grundrechenfähigkeiten zu messen.

Zum 3. Punkt: Zur Beantwortung der Frage, welche Faktoren einen Einfluss auf die bearbeitete Aufgabenanzahl haben, wurde bei der Auswertung codiert, ob eine Aufgabe nicht oder nur teilweise bearbeitet wurde. Die Auswertung erfolgte dabei separat für die Bereiche „Grundrechenarten" und „Interpretation von Funktionsgraphen". In Bezug auf die Grundrechenarten ließen sich keine Unterschiede zwischen den verschiedenen Gruppen feststellen. In Bezug Aufgaben zur Interpretation von Funktionsgraphen zeigten sich Unterschiede in Abhängigkeit von Kursniveau und Rechnerart:

| | F | Signifikanz | Effektstärke f |
|---|---|---|---|
| Rechnerart | 0,04 | 0,95 | 0,0 |
| Kursniveau | 10,4 | 0,00 | 0,25 |
| Rechnerart*Kursniveau | 5,855 | 0,02 | 0,01 |

Bei den GTR-Nutzern sind die Unterschiede minimal. Mit einer Effektstärke von 0,01 muss der beobachtete Effekt als klein bewertet werden. Auch in diesem Fall ist eine Betrachtung der graphischen Darstellung hilfreich. Von den CAS-Leistungskurs-SchülerInnen wurden die meisten Aufgaben bearbeitet, von den CAS-Grundkurs-SchülerInnen die wenigsten (Der Gesamtmittelwert ist gestrichelt gezeichnet).

## 5. Diskussion und Ausblick

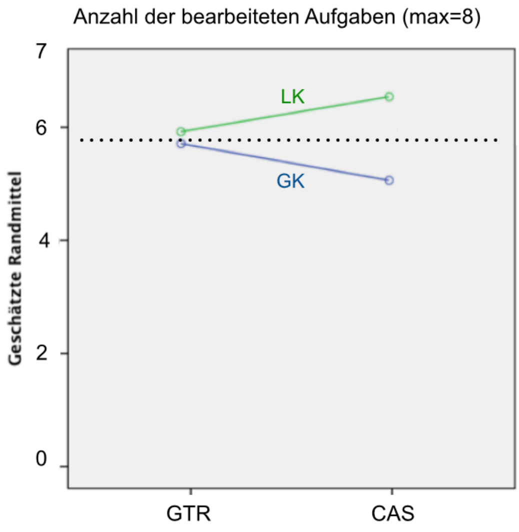



**Abbildung 2: Geschätzte Randmittel, Anzahl der bearbeiteten Aufgaben.**

Für die dargestellten Ergebnisse, die als „Schereneffekt“ bezeichnet werden können, sind verschiedene Ursachenfelder denkbar, die an dieser Stelle nur kurz angerissen werden können: Zum einen das Gerät „an sich“, also mögliche Bedienungshürden, die gerade im Grundkurs ausgeprägter sein könnten: So beschreiben Weigand und Bichler (2010) einen Anteil der Schüler, die auch nach einem längeren Zeitraum noch Schwierigkeiten mit dem Gerät haben. Zum zweiten die Verfügbarkeit von speziellen Lehrmaterial zum Unterricht mit CAS. Ein weiterer Faktor könnte der „Lehrereffekt“ sein, d.h. die Auswirkung einer positiven oder negativen Einstellung zu Computeralgebrasystemen. Die Daten wurden in den Jahren 2010 und 2011 erhoben. Es wäre sicher eine lohnende Frage, ob eine Erhebung zum heutigen Zeitpunkt zu ähnlichen Ergebnissen führen würde, gerade auch vor dem Hintergrund einer weiten Verfügbarkeit von Smartphones und Tablet-Computern. Es wäre auch von Interesse, zu untersuchen, ob der beobachtete „Schereneffekt“ an anderer Stelle auftritt. Die Unterschiede bei der Anzahl der bearbeiteten Aufgaben wurden in der Literatur bisher nicht erwähnt, auch hier wären weitere Untersuchungen, z.B. vor dem Hintergrund von Fragen zur Selbstwirksamkeit, interessant.

## Literatur


Ingelmann, M. & Bruder, R. (2008). CAS-Einsatz in der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2008 (S. 473-476). Münster: WTM-Verlag.

McMillan, J. H. (2010). Research in education: evidence-based inquiry. (S. Schumacher, Hrsg.) (International ed., 7. ed.). Boston, [Mass.]: Pearson.

Weigand, H.G & Bichler, E. (2010). Der Einsatz von Taschencomputern an bayerischen Gymnasien – Analyse eines langjährigen Unterrichtsversuchs. In: Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 923-926). Münster: WTM-Verlag.

Inga NIEDERMEYER[1], Anne-Katrin JORDAN[1], Aiso HEINZE[1], Meike GRÜSSING[2], Torben VON SEELER[1], Karin ROGALSKI[1], [1]Kiel / [2]Vechta

# Erste Ergebnisse der Evaluation des Förderprogramms „Mathe macht stark" für den Anfangsunterricht

Am Ende der vierten Klasse verfügen 20% der Schülerinnen und Schüler in Schleswig-Holstein nur über basale mathematische Kompetenzen (Haag/ Roppelt 2012). Gleichzeitig ist bekannt, dass mathematische Fähigkeiten im Kindergarten oder bei der Einschulung die Mathematikleistung am Ende der Grundschulzeit relativ gut vorhersagen können (Krajewski/ Schneider 2006). Es erscheint deswegen sinnvoll, mit einer Förderung der mathematischen Kompetenzen möglichst früh zu beginnen. Dabei stellt sich die Frage, wie sich ein solches Förderprogramm möglichst wirksam implementieren lässt – auch vor dem Hintergrund, dass bis zu 40% der Grundschullehrkräfte in Schleswig-Holstein Mathematik unterrichten, ohne im Studium Grundlagen zur Mathematik und ihrer Didaktik gelernt zu haben (Stanat et al. 2012).

Aus diesem Grund hat das Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen in Schleswig-Holstein (IQSH) das Förderprogramm „Mathe macht stark – Grundschule" entwickelt, implementiert und im Schuljahr 2013/2014 gemeinsam mit dem IPN Kiel eine Evaluationsstudie gestartet. Das Design der Evaluation und erste Ergebnisse werden in diesem Beitrag berichtet.

## 1. Das Förderprogramm „Mathe macht stark – Grundschule"

Das Förderprogramm „Mathe macht stark – Grundschule" ist eingebettet in die Initiative „Niemanden zurücklassen" des IQSH. Das Ziel des Programms ist eine frühzeitige Identifizierung und gezielte Förderung von Schülerinnen und Schülern, die in wichtigen Bereichen des arithmetischen Anfangsunterrichts Schwierigkeiten haben. Ein Team von Lehrkräften und Fachseminarleitern am IQSH entwickelte Materialien für Schülerinnen und Schüler sowie Lehrpersonen zu 23 relevanten arithmetischen Inhaltsbereichen (z.B. Teil-Ganzes-Beziehung, Kraft der Fünf usw.) (IQSH, 2013). Zu jedem Inhaltsbereich gibt es in einem Schülerheft eine Seite mit 3-4 Aufgaben, die als grobes Gruppenscreening mit der ganzen Klasse umgesetzt werden sollen. Mit Schülerinnen und Schülern, die in diesem Klassentest Schwierigkeiten haben, wird dann mithilfe eines Einzelinterviews, für das sich ebenfalls einige Aufgaben im Schülerheft befinden, eine genauere Diagnose durchgeführt. Auf Grundlage der Ergebnisse aus Klassentest und Interview kann dann eine passende Förderung ausgewählt werden, für die im Lehrerheft Förderideen und didaktische Hinweise enthalten sind. Im

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Lehrerheft finden sich außerdem Durchführungsanweisungen, Lösungen und Beobachtungshinweise zu Klassentests und Interviews der jeweiligen Inhaltsbereiche. Wiederholt angebotene begleitende Fortbildungen vertiefen die einzelnen Inhaltsbereiche und geben den Lehrkräften die Gelegenheit, sich über die Umsetzung der Diagnose und Förderung auszutauschen.

## 2. Design und Stichprobe der Evaluationsstudie

Für die Evaluationsstudie wurde ein unvollständiges 2×2-Design gewählt: Aus den 100 Schulen, die zu Beginn des Schuljahres 2013/2014 am Programm beteiligt waren, wurde eine Auswahl von 30 Schulen getroffen. Von diesen 30 Schulen erhalten 20 Schulen zusätzlich zum Material und den begleitenden Fortbildungen zwei zusätzliche Lehrerwochenstunden, um die Förderung umzusetzen (Gruppe 1). Die restlichen 10 Schulen erhalten nur das Material und die Förderung (Gruppe 2). Weitere 10 Schulen außerhalb des Programms dienen als Kontrollschulen und setzen die schulübliche Förderung um (Gruppe 3).

An diesen 40 Schulen wurden zu Beginn des ersten Schuljahres von allen Schülerinnen und Schülern die mathematischen (Hamburger Rechentest, HaReT) und sprachlichen Fähigkeiten (Münsteraner Screening, MÜSC) erfasst. In der Mitte des ersten Schuljahres wurden die kognitiven Grundfähigkeiten mit dem CFT 1-R erhoben. Für die längsschnittliche Untersuchung der Kompetenzentwicklung werden zum Ende der ersten vier Schuljahre die mathematischen Fähigkeiten mit einem Test aus dem Projekt PERLE (Universität Kassel) erhoben, der eine längsschnittliche Skalierung erlaubt. Darüber hinaus werden selbst entwickelte Tests eingesetzt (fünf im ersten Schuljahr, drei im zweiten Schuljahr), die gezielt Fähigkeiten zu einzelnen Inhaltsbereichen testen. Zur Erhebung von Hintergrundvariablen dienen Eltern- und Lehrerfragebögen.

## 3. Erste Ergebnisse der Evaluation

Die Analyse der Lernvoraussetzungen ergab, dass sich die Schülerinnen und Schüler der drei Untersuchungsgruppen hinsichtlich ihrer sprachlichen und mathematischen Fähigkeiten sowie der kognitiven Grundfähigkeiten nicht oder nur sehr gering unterschieden. Für einen Vergleich der Leistungen der drei Gruppen im Abschlusstest des ersten Schuljahres wurde eine Kovarianzanalyse gerechnet, bei der neben den zuvor genannten Lernvoraussetzungen das Geschlecht kontrolliert wurde. Zusätzlich wurde die Qualifikation der Lehrkräfte in die Analysen einbezogen. Die Ergebnisse werden in Abbildung 1 dargestellt.

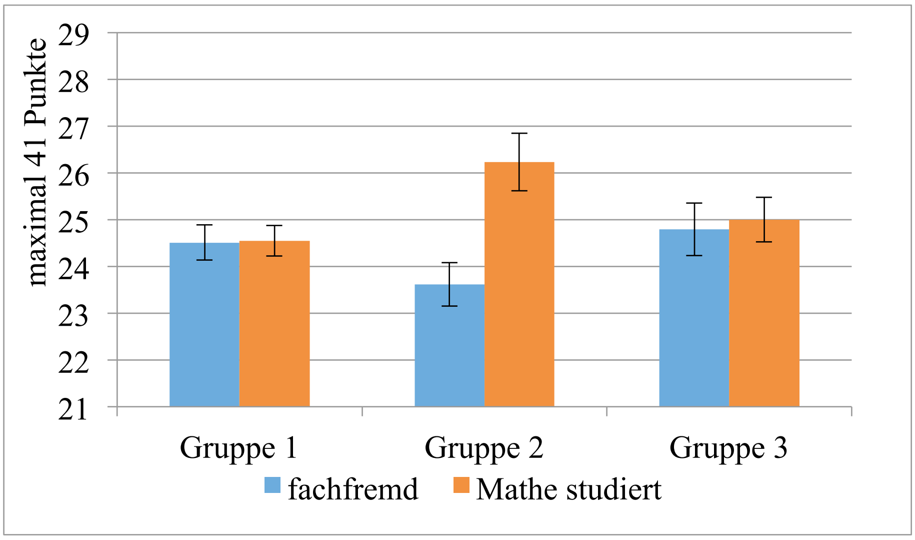



**Abbildung 1: Punkte im Abschlusstest getrennt nach Untersuchungsgruppe und Qualifikation der Lehrkraft (gesamte Stichprobe)**

Es bestehen keine signifikanten Unterschiede bezüglich der Gruppenvariable, der Haupteffekt bezüglich der Lehrerqualifikation ist signifikant, wenn auch sehr gering, $F(1, 1653) = 5.943$, $p < .05$, partielles $\eta^2 = .004$. Der Interaktionseffekt Qualifikation × Gruppe ist ebenfalls signifikant, aber sehr gering, $F(2, 1653) = 4.207$, $p < .05$, partielles $\eta^2 = .005$.

In einem zweiten Schritt wurden dieselben Analysen durchgeführt für eine Substichprobe, die bezüglich des HaReT-Eingangstests zum unteren Quartil gehörten. Auch hier unterschieden sich die drei Untersuchungsgruppen im Eingangstest hinsichtlich ihrer sprachlichen und mathematischen Fähigkeiten sowie der kognitiven Grundfähigkeiten nicht oder nur sehr gering, so dass eine Kontrolle dieser Variablen in der Kovarianzanalyse unproblematisch ist. Bei dieser Substichprobe fallen die Ergebnisse leicht anders aus als bei der Gesamtstichprobe: Signifikant werden die Haupteffekte „Gruppe" ($F(2, 409) = 4.150$, $p < .05$, partielles $\eta^2 = .020$) und „Lehrerqualifikation" ($F(1, 409) = 6.681$, $p < .05$, partielles $\eta^2 = .016$), nicht jedoch der Interaktionseffekt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2 dargestellt.

## 4. Diskussion und Ausblick

Die ersten Ergebnisse der Evaluation sind unerwartet. Es zeigt sich kein Effekt des „Mathe macht stark"-Förderprogramms am Ende des ersten Schuljahres – weder in der gesamten Stichprobe noch in der Substichprobe der leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler, die als Zielgruppe des Programms angesehen werden können.

Eine mögliche Erklärung könnte sein, dass die Lehrkräfte unsicher sind bei der Implementierung eines neuen Programms. Dies könnte besonders für die fachfremd unterrichtenden Lehrkräfte zutreffen und dazu führen, dass das Programm nur oberflächlich umgesetzt wird, während die Lehrkräfte der Kontrollgruppe konsequent die selbst gewählte Förderung umsetzen.

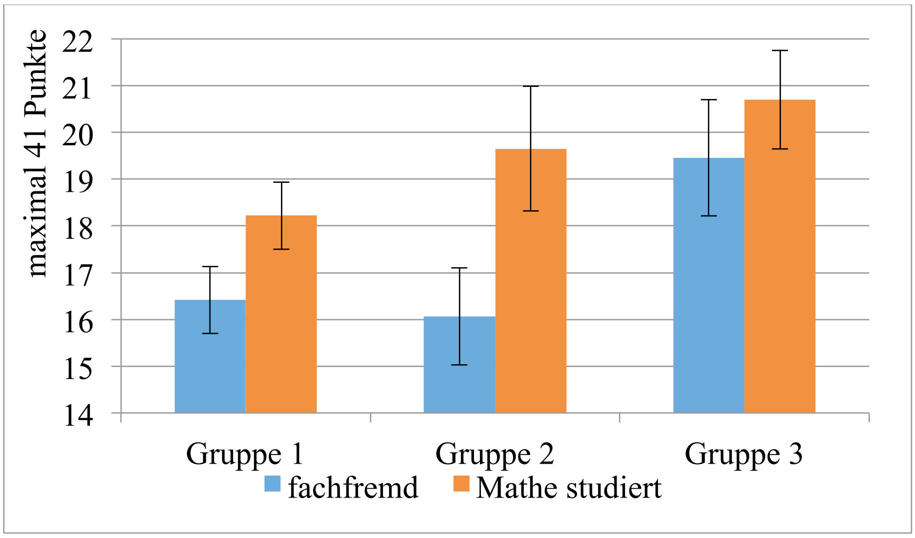



**Abbildung 2: Punkte im Abschlusstest getrennt nach Untersuchungsgruppe und Qualifikation der Lehrkraft (Stichprobe: unteres Quartil)**

Es ist auch möglich, dass sich Effekte der Förderung erst im weiteren Verlauf des Programms zeigen, wenn die mathematischen Inhalte komplexer werden und Aufgaben nicht mehr durch einfache Strategien wie Zählen gelöst werden können. Hier wird der weitere Verlauf der Evaluation zur Klärung beitragen ebenso wie die geplante Einbeziehung weiterer Hintergrundvariablen wie sozioökonomischer Hintergrund. Geplant ist außerdem, Angaben der Lehrkräfte darüber, welche Schülerinnen und Schüler in welchen Inhaltsbereichen gefördert wurden, zu nutzen, um gezielt die Entwicklung dieser Schülerinnen und Schüler zu untersuchen.

## Literatur

Haag, N., & Roppelt, A. (2012). Der Ländervergleich im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme, & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 117–127). Münster: Waxmann.

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein (IQSH) (Hrsg.) (2013). *Mathe macht stark Grundschule*. Berlin: Cornelsen.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfähigkeiten und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Zeitschrift für Psychologie in Erziehung und Unterricht 53*, S. 246-262.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K., & Richter, D. (2012). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011*. Münster: Waxmann.

Renate NITSCH, Darmstadt

# Typische Fehlermuster im Bereich funktionaler Zusammenhänge

Im Projekt CODI (COnceptual DIfficulties in the field of functional relationships) wurden typische Lernschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Bereich funktionaler Zusammenhänge erforscht. Hierzu wurde ein Diagnoseinstrument entwickelt, das typische Fehlermuster bei Darstellungswechseln zu linearen und quadratischen Funktionen erfasst. Dabei wurden, basierend auf den Ergebnissen des Projekts HEUREKO (vgl. Nitsch et al., 2014) der graphisch-algebraische (GA), der situativ-algebraische (SA) und der graphisch-situative (GS) Darstellungswechsel einbezogen.

Fokussiert wurden Lernschwierigkeiten im Bereich des konzeptuellen Wissens, wobei Fehler als sichtbare Produkte von Lernschwierigkeiten aufgefasst wurden. Dabei wurden vorrangig systematische Fehler betrachtet, da bei diesen davon auszugehen ist, dass sie reproduzierbar sind und ihre Fehlerursache meist in stabilen falschen Konzepten bzw. sogenannten *Fehlvorstellungen* liegt (Führer, 1997). Für das Ziel der Diagnose von Lernschwierigkeiten wurden verschiedene charakterisierende Eigenschaften von Fehlvorstellungen aus bestehenden Konzeptualisierungen dieses Begriffs herausgearbeitet: Fehlvorstellungen treten *wiederholt* auf, sind *robust* gegenüber äußeren Einflüssen und über einen längeren Zeitraum *stabil* (z.B. Hammer, 1996; Leinhardt et al., 1990).

## Design der empirischen Studie

Um das Diagnoseinstrument flexibel in der Unterrichtspraxis nutzen zu können und die Lehrkräfte bei der Diagnose von Lernschwierigkeiten zu unterstützen, wurde das Instrument als online-Tool entwickelt mit dem Ziel einer automatischen Auswertung. Dementsprechend kamen vor allem Multiple-Choice-Aufgaben zum Einsatz. Diese haben das Format „1 von 4“, wobei einzelne Distraktoren für typische, systematische Fehler stehen. Es wurden mehrere strukturell gleiche Aufgaben entwickelt, um Fehlermuster aufdecken zu können. Nur dann, wenn sich ein systematischer Fehler über mehrere Aufgaben hinweg in einem konsistenten Fehlermuster zeigt, wird eine dahinterliegende Fehlvorstellung vermutet. Die Diagnoseaufgaben wurden in einer Pilotierung erprobt und mithilfe diagnostischer Interviews validiert. Im Haupttest kamen 28 Aufgaben zum Einsatz. Die Stichprobe bestand aus 25 Klassen aus drei südhessischen Gymnasien, zwei integrierten Gesamtschulen und einer reinen Oberstufenschule mit insgesamt N=569 Schülerinnen und Schülern.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Ergebnisse

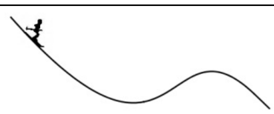
Insgesamt konnten neun Fehlermuster identifiziert werden, die bei mehr als 10% der Schülerinnen und Schüler aufgetreten sind. Auffällig ist in diesem Zusammenhang, dass sich die Lernenden häufig von visuellen Aspekten fehlleiten lassen, wie es beispielsweise beim Graph-als-Bild-Fehler der Fall ist (siehe Abb. 1). Bei diesem Fehler interpretieren die Lernenden den Graphen als reales Situationsabbild und wählen deswegen denjenigen Graphen aus, der der Situation am meisten ähnelt.

| Darstellungswechsel | Fehlermuster | Anzahl |
|---|---|---|
| GA - lineare Funktionen | Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen | 25,7% |
| SA - lineare Funktionen | Verwechslung von Steigung und y-Achsenabschnitt | 12,7% |
| GA - quadratische Funktionen | Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung | 11,6% |
| GA - quadratische Funktionen | Stauch- bzw. Streckfaktor a nicht berücksichtigt | 13,4% |
| SA - quadratische Funktionen | Falsches Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts | 13,4% |
| SA - quadratische Funktionen | Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung | 12,3% |
| GS | Graph-als-Bild-Fehler | 16,0% |
| GS | Slope-height-Fehler | 10,0% |
| GS | Epistemologische Hürde: Steigung an einem Punkt | 36,0% |

**Tab.1: Typische Fehlermuster, die bei über 10% der Schülerinnen und Schüler auftraten**

Mit Abstand am häufigsten trat das Fehlermuster „Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen“ auf, bei welchem die Schülerinnen und Schüler diejenige Gleichung auswählen, in welcher statt dem Parameter m der Steigung der x-Achsenabschnitt enthalten ist. In den diagnostischen Interviews zeigten sich vor allem zwei Begründungen. Zum einen argumentierten die Lernenden häufig, dass der y-Achsenabschnitt in der Gleichung enthalten ist und für die Lage der Geraden eine wichtige Rolle spielt und deswegen auch der x-Achsenabschnitt enthalten sein muss. Zum anderen verknüpften einige Lernende das „x“ in der Gleichung y=mx+b mit der x-Achse. Sie schlussfolgerten, dass vor dem „x“ in der Gleichung der x-Wert des Schnittpunkts der Geraden mit der x-Achse stehen muss.

*In folgendem Bild ist ein Skifahrer zu sehen, der den Hang hinunter fährt. Welcher Graph beschreibt die Situation am besten? Der Funktionswert v(t) gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an.*



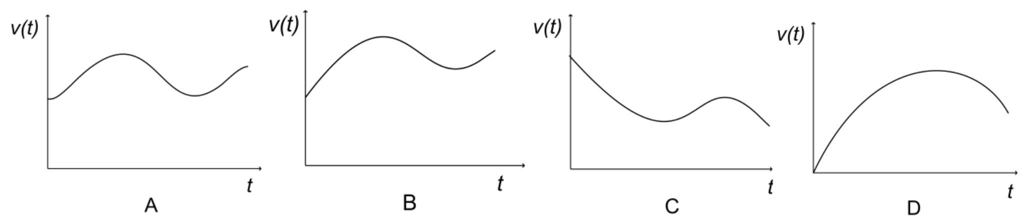



**Abb.1: Graph-als-Bild-Fehler (Distraktor C)**

Insgesamt lassen sich zwei Ursachen für die identifizierten Fehlermuster ausmachen. Zum einen treten bei Darstellungswechseln mit situativer Beschreibung häufig Überlagerungen mit Alltagsvorstellungen auf. Die Lernenden greifen auf ihre intuitiven Vorstellungen aus ihrer Alltagswelt zurück und sofern diese den mathematischen Vorstellungen widersprechen, kann es zu Fehlvorstellungen kommen. Zum anderen lassen sich im innermathematischen Bereich, d.h. bei Darstellungswechseln ohne situative Beschreibung, häufig nicht ausreichend verallgemeinerte Prototypen beobachten. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die Lernenden bei der Gleichung einer quadratischen Funktion den Streck- bzw. Stauchfaktor a nicht berücksichtigen.

Neben der Analyse von typischen Fehlermustern wurde eine Varianzanalyse durchgeführt, um Gruppenunterschiede zu untersuchen. Es fällt auf, dass die 10. Klassen signifikant schlechter abschneiden als die 9. bzw. 11. Klassen. Allerdings liegt die Vermutung nahe, dass hierbei eine hintergründige Schultypabhängigkeit abgebildet wird, da die 10. Klassen alle aus einer integrierten Gesamtschule stammten, während die 9. bzw. 11. Klassen hauptsächlich aus Gymnasien bzw. einer reinen Oberstufenschule stammten. In Bezug auf das Auftreten von Fehlermustern konnten bei drei Fehlermustern signifikante Unterschiede festgestellt werden: „Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen“, „Verwechslung von Steigung und y-Achsenabschnitt“ und „Graph-als-Bild-Fehler“. Diese traten bei den 10. Klassen der integrierten Gesamtschule signifikant häufiger auf als bei den 9. bzw. 11. Klassen. Besonders stark ist dieser Effekt beim Fehlermuster „Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen“. Betrachtet man das Auftreten dieses Fehlers auf Klassenebene, so zeigt sich ein besonders häufiges Auftreten des Fehlermusters in den beiden B-Kursen der integrierten Gesamtschule. Insgesamt fällt auf, dass das Auftreten dieses Fehlermusters stark schwankt und in einer der neunten Klassen gar nicht auftritt. Es liegt nahe, dass das Auftreten des Fehlermusters von der unterrichtlichen Behandlung abhängt.

## Ausblick

Um herauszufinden, wie stabil die beobachteten Fehlermuster über einen längeren Zeitraum sind, wird derzeit ein Posttest durchgeführt. Erste Ergebnisse aus zwei Gymnasien mit insgesamt N=100 Schülerinnen und Schülern aus der E-Phase zeigen, dass sich die Lernenden in den meisten Bereichen stark verbessert haben. Dabei gilt es zu beachten, dass in allen Klassen die Themen linearer und quadratischer Funktionen kurz vor dem Posttest-Zeitpunkt noch einmal wiederholt wurden. Im Bereich des graphisch-situativen Darstellungswechsels hingegen ist keine Verbesserung feststellbar. Bezüglich des Auftretens konkreter Fehlermuster lassen sich vier Fehlermuster identifizieren, die bei einem Teil der Lernenden im Vor- *und* Nachtest auftraten: „Verwechslung von Steigung und y-Achsenabschnitt“ (8%), „Falsches Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts“ (14%), „Vorzeichenfehler bei Verschiebung in x-Richtung“ (7%) und „Graph-als-Bild-Fehler“ (56%). Es fällt auf, dass es sich um diejenigen Fehlermuster handelt, die bei einem Darstellungswechsel mit situativer Beschreibung auftreten und bei denen eine auf Intuition basierende Fehlvorstellung vermutet wird. Diese scheinen besonders stabil zu sein. Besonders auffällig ist der Graph-als-Bild-Fehler, der bei 56% der Schülerinnen und Schüler wieder auftritt. Gleichzeitig lässt sich erkennen, dass das Fehlermuster „Fokus auf Schnittpunkte mit den Achsen“, das insgesamt im Pretest am häufigsten aufgetreten ist, nicht mehr zu beobachten ist. Scheinbar handelt es sich hierbei um ein Fehlermuster, dem keine robuste Fehlvorstellung zugrunde liegt. Betrachtet man den Anteil der Lernenden, die ein Fehlermuster im Pretest zeigen und den Fehler *mindestens einmal* im Posttest machen, so zeigen sich deutlich größere Häufigkeiten zwischen 17 und 100%. Der Graph-als-Bild-Fehler tritt bei allen Lernenden noch mindestens einmal im Posttest auf. Es liegt die Vermutung nahe, dass die Lernenden zwar eine mathematisch korrekte Vorstellung entwickelt haben, ihre vorherige Vorstellung jedoch nicht aufgegeben haben, sondern beide Vorstellungen bestehen bleiben und situationsspezifisch aktiviert werden. Diese Vermutung wird durch die Tatsache gestützt, dass die Lernenden (mit Ausnahme eines Fehlermusters) in den anderen, zugehörigen Aufgaben des Posttests meist die richtige Antwort wählen. In einem nächsten Schritt sollen nun unter Berücksichtigung des Conceptual Change Ansatzes Interventionsmaßnahmen entwickelt und erprobt werden, die eine individuelle Förderung und Überwindung der diagnostizierten Fehlvorstellungen zum Ziel haben. Das entwickelte Diagnoseinstrument inkl. einer vorläufigen Feedbackversion lässt sich unter www.codi-test.de abrufen.

## Literatur


Führer, L. (1997): Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Hammer, D. (1996): Misconceptions or P-Prims: How May Alternative Perspectives of Cognitive Structure Influence Instructional Perceptions and Intentions? In: *The Journal of the Learning Sciences* 5 (2), 7–127.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M.K.. Functions, Graphs, and Graphing (1990): Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research,* 60(1), 1-64.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, T., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2014): Students’ Competencies in working with Functions in Secondary Mathematics Education – Empirical Examination of a Competence Structure Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Marianne NOLTE, Hamburg

# Besondere Kinder mit besonderer mathematischer Begabung

Im Rahmen der Maßnahme PriMa[1] fördern wir an der Universität Hamburg seit mehr als 15 Jahren mathematisch besonders begabte Schülerinnen und Schüler. Unter diesen finden sich regelmäßig Kinder mit besonderen Auffälligkeiten in ihrer Entwicklung und / oder mit Lernbarrieren, wie z.B. umschriebene Entwicklungsstörungen, AD(H)S, Autismus-Spektrum-Störungen usw. Wir haben in einem Fragebogen, der von den Eltern zur allgemeinen Entwicklung der Kinder ausgefüllt wurde, Passagen herausgenommen, die sich auf solche Besonderheiten oder Barrieren bezogen. Von 115 Eltern berichteten 17, das entspricht 14,8%, von Besonderheiten im Verlauf der Entwicklung. Dieses Ergebnis einer retrospektiven Erhebung, die zudem auf freiwilligen Antworten der Eltern basiert, kann nur mit Vorsicht gedeutet werden. Allerdings verweist es auf die Notwendigkeit, sich genauer mit Barrieren im Lernprozess auch im Kontext besonderer Begabung zu befassen.

Die Forschung zu besonderer Begabung geht zum gegenwärtigen Zeitpunkt überwiegend davon aus, dass sich Begabungen ausgehend von einem angeborenen Potenzial in Wechselwirkung mit den Aktivitäten von Schülerinnen und Schülern und den Angeboten aus der Umgebung entfaltet (siehe z.B. Gagné, 2004; Käpnick, 2008; Nolte, 2009). Der Prozess der Entwicklung von Begabungen und den entsprechenden beeinflussenden Faktoren wird unterschiedlich weit ausdifferenziert beschrieben. So greift Gagné in seinem Modell 2010 die Wahrnehmung eines Kindes ebenso auf wie Behinderungen und Resilienzfaktoren, um nur einige Einflussfaktoren auf Seiten des Kindes zu nennen.

Die Forschungslage zu ungünstigen Entwicklungen bei besonderen Begabungen kann insgesamt als nicht sehr ergiebig bezeichnet werden, allerdings stellt die Auseinandersetzung mit dem Phänomen des Underachievements eine Ausnahme dar. Von Underachievern oder Minderleistern spricht man, wenn eine Diskrepanz zwischen der gezeigten Leistung und dem gemessenen IQ beobachtet wird. Dieses Phänomen kann auf allen Leistungsniveaus beobachtet werden, es wird jedoch überwiegend im Kontext von Hochbegabung diskutiert. Sparfeldt, Schilling, & Rost, (2006) ermittelten es in ihren Studien als ein relativ stabiles Phänomen. Holling, Preckel, &

[1] PriMa ist ein Abkürzung für „Kinder der **Pri**marstufe auf verschiedenen Wegen zu**Ma**thematik“. Es ist eine Maßnahme der Hamburger Behörde für Schule und Berufsbildung (BSB), die seit 1999 in Kooperation mit der Universität Hamburg und der William-Stern-Gesellschaft (WSG) durchgeführt wird.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Vock, (2004, S. 147) unterscheiden ein generelles Underachievement von einem partiellen, bei dem sich die Unterschiede zwischen dem Potenzial und den Leistungen auf bestimmte Leistungsbereiche beziehen. Underachievement geht häufig mit psychischen Problemen einher. So werden bei betroffenen Schülerinnen und Schülern eine geringere Motivation und affektive Schwierigkeiten beobachtet (Hanses & Rost, 1998).

Als weitere Lernbarrieren können umschriebene oder tiefgreifende Entwicklungsstörungen, Behinderungen (z.B. Fels, 1999), dissoziierte Intelligenzprofile, Hochbegabung und gleichzeitige Lernbehinderung (Nielsen, 2002) bezeichnet werden. Eine Diskrepanz im Erleben des eigenen Potenzials und der Einschränkungen im Leistungsbereich kann bei allen Beteiligten psychischen Stress auslösen, der bei nicht genauer Erfassung der Ursachen Gefahr läuft als eigentliche Ursache betrachtet zu werden. Interventionen allein auf die emotionale Ebene zu beziehen, tragen jedoch nicht dazu bei die Barrieren zu überwinden. Deshalb kann sich eine gut gemeinte Intervention zur Überwindung von psychischen Problemen kontraproduktiv auf die Entwicklung auswirken, wenn diese als Folge von anderen Problemen entstehen. Um angemessen mit betroffenen Schülerinnen und Schülern umzugehen, bedarf es einer Analyse der spezifischen Auswirkungen von Barrieren in der konkreten Arbeitssituation.

Als Beispiel für eine weitere Barriere soll hier auf ein dissoziiertes Intelligenzprofil verwiesen werden. Dissoziierte Intelligenz beschreibt das Phänomen, dass Kinder in ihrem Intelligenzprofil sehr starke Unterschiede aufweisen. So zeigt Niko Probleme in der visuell-räumlichen Orientierung bei gleichzeitig hohen sprachlichen Kompetenzen. Er hat Schwierigkeiten im Mathematikunterricht und kann sich z.B. nicht auf Landkarten orientieren. Die entsprechenden Untertests stellen einen Prozentrang von 75 fest. In anderen Bereichen hat er einen Prozentrang von 95. In solchen Fällen ist es nicht sinnvoll, einen Gesamt-IQ zu deuten (Daseking, Petermann, & Petermann, 2009, S. 28). Auch wenn Niko Verhaltensauffälligkeiten entwickelt hat, ist er kein Underachiever. Sein Potenzial ist in den verschiedenen Anforderungsbereichen sehr unterschiedlich. Sein hohes Potenzial im sprachlichen Bereich verleitet dazu, ihm Schwächen im Mathematikunterricht als fehlende Motivation auszulegen.

Als ersten Schritt zur Auseinandersetzung mit der Problematik von Barrieren bei mathematisch besonders begabten Kindern haben wir deshalb im Rahmen von Fallstudien Kinder in unserem Projekt genauer beobachtet sowie Tests, Zeugnisse und Elterngespräche miteinbezogen (Nolte, 2013). Hier soll kurz Lars vorgestellt werden, bei dem ein Gesamt-IQ von 151 im CFT 20R gemessen wurde. In einem Schulleistungstest erreichte er einen

Prozentrang von 97 aber in einem Stolperwörtertest einen Prozentrang von 58. Seine Erläuterungen zu den bearbeiteten Aufgabenblättern in der Förderung zeigen Rechtschreibleistungen, die nicht nur nicht klassenstufengemäß sind, sondern auch deutlich unter denen sind, die man von einem Kind mit einem so hohen IQ erwarten sollte. Im Gespräch geben seine Eltern an, dass bei ihm die Wahrnehmung und Verarbeitung auditiver Informationen beeinträchtigt ist. Deshalb erstaunt es, dass sein Zeugnis sehr gute Noten im Schrift-Sprach-Bereich enthält.

Dass diskrepante Leistungen bei Kindern unserer Gruppen nicht im Zeugnis erkennbar sind, ist ein Phänomen, das wir mehrfach beobachten konnten. Vermutlich ist das darauf zurück zu führen, dass wir von mathematisch besonders begabt getesteten Kindern hohe Leistungen erwarten. Wir beobachten Kinder genauer, wenn hier Diskrepanzen vorliegen, damit diese Kinder von unserem Angebot profitieren können. Ein Kind mit einer Leseschwäche soll davon nicht gehindert werden, seine mathematischen Kompetenzen zu entfalten. Ein Kind wie Lars braucht Lehrkräfte, die auf eine Absicherung der Kommunikation achten. Langfristig sollte er Unterstützung erhalten, um seine auditive Wahrnehmung weiter zu entwickeln. Er sollte ebenfalls bezüglich der Entwicklung seiner schriftsprachlichen Kompetenzen gefördert werden. Unsere Fallstudien lassen uns vermuten, dass besonders begabte Kinder ihre Schwächen so kompensieren können, dass sie im Regelunterricht nicht deutlich werden, sondern erst bei den erhöhten Anforderungen in unseren Fördergruppen.

“To reach their full potential, twice-exceptional students need a balanced educational program that nurtures their gifts and talents while providing intervention for their disabilities.” (Schultz, 2012, S. 120)

## Literatur


Daseking, M., Petermann, F., & Petermann, U. (2009). HAWIK-IV: Grundlagen und Auswertungsstrategien In F. Petermann & M. Daseking (Eds.), *Fallbuch Hawik-IV*. Göttingen: Hogrefe.

Fels, C. (1999). *Identifizierung und Förderung Hochbegabter in den Schulen der Bundesrepublik Deutschland*. Bern, Stuttgart, Wien: Haupt.

Gagné, F. (2004). Transforming gifts into talents: the DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies, 15 No 2*, 119-148.

Gagné, F. (2010). Begabungen in Talente umsetzen. Kurze Übersicht über das differenzierte Modell von Begabung und Talent (DMGT2.0) *SwissGifted, 3*(1).

Hanses, P., & Rost, D. H. (1998). Das „Drama“ der hochbegabten Underachiever – „Gewöhnliche“ oder „außergewöhnliche“ Underachiever? . *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 12*, 53-71.

Holling, H., Preckel, F., & Vock, M. (2004). *Intelligenzdiagnostik*. Göttingen: Hogrefe.

Käpnick, F. (2008). Förderung und Diagnose mathematisch begabter Kinder. In C. Fischer, F. J. Mönks & U. Westphal (Eds.), *Individuelle Förderung: Begabungen entwickeln- Persönlichkeit entfalten. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte* (pp. 3-23). Münster: LIT Verlag.

Nielsen, M. E. (2002). Gifted Students With Learning Disabilities: Recommendations for Identification and Programming *Exceptionality: A Special Education Journal4, 10:2*(2), 93-111. doi: 10.1207/S15327035EX1002_4

Nolte, M. (2009). Hochbegabte Kinder im Mathematikunterricht. In A. Heinze, M. Grüßing & (Hrsg.) (Eds.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (pp. 103-114). Münster: Waxmann Verlag.

Nolte, M. (2013). *TWICE EXCEPTIONAL CHILDREN - MATHEMATICALLY GIFTED CHILDREN IN PRIMARY SCHOOLS WITH SPECIAL NEEDS.* Paper presented at the CERME 8 - Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Ankara: Middle East Technical University.

Schultz, S. M. (2012). Twice-Exceptional Students Enrolled in Advanced Placement Classes. *Gifted Child Quarterly, 56*(3), 119–133. doi: 10.1177/0016986212444605

Sparfeldt, J. R., Schilling, S. R., & Rost, D. H. (2006). Hochbegabte Underachiever als Jugendliche und junge Erwachsene. Des Dramas zweiter Akt? *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 20*(3). doi: 10.1024/1010-0652.20.3.213

Reinhard OLDENBURG, Augsburg, Diana HENZ, Mainz

# Neues zum Umkehrfehler in der elementaren Algebra

Der Umkehrfehler in der elementaren Algebra wird seit über 30 Jahren studiert. Studien zeigen, dass ein konstant hoher Anteil an Lernenden in allen Altersstufen diesem Fehler beim Aufstellen von Gleichungen begeht. Zur Erklärung wurden einige Theorien entwickeln. Wir vermuten aufgrund von Testauswertung vor allem eine Verwechslung von Attributen und Operationen als Ursache.

## 1. Der Umkehrfehler

Bei der Formalisierung von Beziehungen zwischen Quantitäten durch algebraische Gleichungen kommt es zu charakteristischen Fehlern: Operationen und Umkehroperationen werden vertauscht notiert. Beispiele:

Der Rhein ist $r$ Kilometer lang, die Elbe $e$ Kilometer. Der Rhein ist 200km länger als die Elbe.

In einem Zoo gibt es $t$ Tiger und $p$ Pumas. Es gibt doppelt so viele Tiger wie Pumas.

Die fehlerhaften Antworten $r+200=e$ bzw $2t=p$ werden als additiver und multiplikativer Umkehrfehler bezeichnet. Dabei kann die Situation textuell, bildlich oder handelnd gegeben sein. Dieser Fehlertyp ist in der Literatur gut untersucht, Malle (1993) gibt einen umfassenden Überblick. Wichtige Resultate der Diskussion (soweit bereits in Malle zitiert verweisen wir auf die dortige Darstellung, nicht auf die Originalarbeiten):

- Der Fehler ist stabil und resistent gegen Instruktion (Malle S. 93).
- Die Benennung der Variablen (z.B. $x,y$ statt $e,r$) hat nach einigen Studien keinen relevanten Einfluss (Malle. S. 94), nach (Sims-Knight & Kaput 1983) allerdings schon.
- Das schriftliche Formulieren einer graphisch gegeben Aussage (Balkendiagramme für beide Größen) in eigenen Worten und nachfolgender Algebraisierung reduziert den Fehler gegenüber einer direkten Übersetzung Graphik→Gleichung (MacGregor 1990).

Eine naheliegende Erklärung (so naheliegend, dass sie erfahrungsgemäß von Studenten schnell und von erfahrenen LehrerInnen nach wenigen Sekunden als Vermutung geäußert wird) ist, dass  stattfindet, was Herscovics (1989) eine syntaktische Übersetzung nennt. Beispiel: „Doppelt so viele" → 2*, Tiger → $t$, wie → =, Pumas → $p$. So entsteht die falsche Gleichung $2*t=p$. Es wurde aber festgestellt, dass der Fehler auch auftritt bei bildlicher Darstellung der Situation (Malle S. 95). MacGregor (1990) hat festgestellt, dass es keinen signifikanten Vorteil gibt, wenn der in ihrer Untersuchung

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

aufgestellte Satz (s.o.) sich syntaktisch in eine korrekte Formel übersetzen lässt. Christianson et al. (2012) finden ebenfalls keinen starken Einfluss der Wortstellung. Weiter stellen sie fest, dass Information, die bei der Konstruktion eines Situationsmodells hilft, nämlich die Angabe, welche Zahl der größer ist, nicht hilfreich ist. Dagegen konstatieren sie einen sehr starken Übungseffekt.

Ein anderer wichtiger Erklärungsversuch ist der von Davis (vgl. Malle. S. 96), nach dem der Fehler auf einer Verwechslung von Einheiten- und Zahlschema beruht: Eine Größe $x$ die als $x=ze$ als Produkt von Maßzahl $z$ und Einheit $e$ dargestellt wird, ist invariant, wenn sich $z,e$ kontravariant resp. kovariant transformieren. Diese Erklärung erstreckt sich allerdings nicht auf den additiven Umkehrfehler.

Pawley (2004) zeigt, dass Instruktion mit ausgearbeiteten Lösungsbeispielen den Umkehrfehler reduzieren kann und schließt auf eine hohe cognitive load als Ursache.

Malle berichtet auch, dass auch Schüler, die Umkehrfehler machen, korrekte Zahlenbeispiele angeben können. Der Fehler passiert also offensichtlich auf der symbolisch-semantischen Ebene. MacGregor&Stacey (1993) weisen alle Erklärungsversuche zurück und behaupten, der Fehler läge darin, dass andere kognitive Strukturen als Repräsentationen von Gleichheit verantwortlich seien. Sie diskutieren mögliche Darstellungen von Vergleichen. Dies ist interessant, scheint aber auch zu vage.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die aktuelle Verbreitung des Umkehrfehlers erheben und einige der international gemachten Befunde vor dem Hintergrund des hiesigen Unterrichts zu prüfen.

## 2. Die Studie

Es wurden 118 bayerischen Real- und Gymnasialschülern der achten bis zehnten Jahrgangsstufe Fragebogentests in mehreren Varianten vorgelegt. Jeder Test enthielt 8 Items, von denen je die Hälfte additive und multiplikative Beziehungen betrafen. Die Auswahl der Klassen erfolgte nach Verfügbarkeit, die Aussagekraft der Ergebnisse ist also nicht repräsentativ, sondern soll der Exploration dienen.

Um die Rolle der syntaktischen Übersetzung zu prüfen, wurden zwei resp. drei Items so geschrieben, dass eine syntaktische Übersetzung den Umkehrfehler begünstigt, erschwert oder neutral dazu ist.

Die Studie prüft, ob zwei Arten von Vorüberlegungen hilfreich sind: 1) Vorab eine Ungleichung aufschreiben (also etwa $r>e$). 2) Vorab Zahlbeispiele angeben (also etwa $r=1200$, $e=1000$). Dazu wurden die Fragebögen in zwei Varianten verwendet. In jeder Fassung wurden 4 Items ohne Vorüberlegung und 4 Items mit einer solchen Vorabfrage gestaltet, und die Rolle der 4 Items wurde zwischen den Varianten getauscht.

## 3. Ergebnisse

Die Rate der Umkehrfehler lag je nach Item bei 21% bis 28% - also auf dem zu erwartenden Niveau. Bei früheren Untersuchungen (Oldenburg 2009) zeigten Oberstufenschüler ebenfalls etwa 20% Umkehrfehler. Ein Übungseffekt wie in Christianson et al. (2012) konnte nicht annähernd gesehen werden, auch wenn die Zahl der Items das erwarten ließe.

Die Quote der Umkehrfehler war in allen drei Gruppen der unterschiedlichen Anwendbarkeit der syntaktischen Übersetzung fast exakt gleich. Die international festgestellte Unabhängigkeit von der Wortstellung kann also bestätigt werden.

Das Aufstellen einer Ungleichung vorab führt insgesamt nur zu leicht mehr richtigen Lösungen, aber dies ist nicht signifikant ($p=0.078$ nach Wilcox-Test) – dies ist verträglich mit dem o.g. Resultat von Christianson et al. (2012). Die Gruppe der Schüler aber, die die Ungleichung korrekt hinschreibt, löst signifikant besser ($p=0.022$). Allerdings werden eher andere Fehler behoben, die Zahl der Umkehrfehler ist nahezu unberührt. Es gibt sogar eine Aufgabe, bei der es eine signifikante Erhöhung des Umkehrfehlers durch Aufschreiben der Ungleichung gibt.

Die Angabe von Zahlenbeispielen wurde nur von einer zweiten Probandengruppe durchgeführt ($n=42$). Die Quote der Umkehrfehler war auffallend gering (11%) und das Aufschreiben von Zahlenbeispielen wirkte positiv, wenn auch nicht signifikant.

Einer weiteren Gruppe (Gymnasium, $n=29$) wurden die Items in multiple choice-Format vorgelegt, darunter mehrere richtige, etwa $t=2p$, $t/2=p$ und $3t=6p$. Die Nichtstandardformen wurden dabei über alle Items durchweg schlechter erkannt – im Widerspruch zu Fischer et al. (2011).

## 4. Interpretation und Konsequenzen

Die Studie bestätigt, dass der Umkehrfehler ein ungelöstes Problem des Algebraunterrichts ist, wie auch Christianson et al. (2012) konstatieren. Im Laufe der Arbeit an den Tests hat sich bei uns folgende Hypothese ergeben:

Attributs-Operations-Verwechslungshypothese: Der Umkehrfehler beruht (teilweise) auf einer Verwechslung von Operationen und Attributen.

Symbole der Algebra bedeuten teilweise Operationen (etwa der Strich in $\bar{z}$), teilweise Attribute (so ist etwa $\vec{x}$ nicht der aus $x$ gebildete Vektor, sondern der Pfeil ist das Attribut „dies ist ein Vektor"). Ein Term wie $x + 5$ kann auf (mehr als, aber die anderen sind hier nicht relevant) zwei Arten gedeutet werden: 1) Die Zahl, die 5 mehr ist als $x$2) $x$ist fünf mehr als eine Vergleichsgröße. Diese zweite Attributinterpretation der Operation mag exotisch wirken, sie wir aber durch Aufgaben der Art „Schreibe als Term: $x$ um 5 vermehrt" tendenziell begünstigt. Es scheint plausibel, dass viele Schüler $r$+200=$e$ schreiben, weil sie sagen wollen, dass der Rhein 200km Extralänge im Vergleich zur Elbe hat. Eine Schülerin schrieb sogar: $r$+200=$e$-200. Trotz aller Zurückhaltung die man bei der Interpretation von Einzelfällen üben sollte, kann man festhalten, dass diese Variante des Umkehrfehlers sich mit keiner der in der Literatur angegebenen Erklärungen verstehen lässt. Die Attributinterpretation präzisiert in gewissem Sinne die Aussage von MacGregror &Stacey (1993), wonach das Gleichheitszeichen nicht unbedingt als numerische Gleichheit verstanden wird, sondern als Zeichen für einen Vergleich anderer Art.

## Literatur


Christianson, K. Et al. (2012): Practice Makes (Nearly) Perfect: Solving 'Students-and-Professors'-Type Algebra Word Porblems. *Appl. Cognit. Psychol.* 26: 810-822.

Fisher, K. J et al. (2011): Following the standard form: Efects of equation format on algebraic modeling. *Mem. Cogn.* 39: 502-515.

Herscovics, N. (1989): Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 60-86).

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.

MacGregor, M. (1990): Writing in Natural Language helps students construct algebraic equations. Math. Ed. Research Journal. Vol 2., No. 2.

MacGreogor, M., Stacey, K. (1993): Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. Journal for Research in Math. Ed. Vol 24, No. 3, 217-232.

Oldenburg, R. (2009): .Structure of algebraic competecies. CERME Proceedings 2009.

Pawley, D. M. (2004): A Cognitive Load Approach to Instruction in Formation of Algebraic Equations- PhD Thesis. Sydney.

Sims-Knight, J., & Kaput, J. J. (1983). Exploring difficulties in transformations between natural language and image-based representations and abstract symbol systems of mathematics. In D. Rogers & J. Sloboda (Eds.), The acquisition of symbolic skills (pp. 561-569). New York: Plenum.

Julia OLLESCH, Heidelberg, Markus VOGEL, Heidelberg,
Tobias DÖRFLER, Heidelberg

# Unterrichtsvignetten zu computergestützten Lernumgebungen im Fach Mathematik

Mit Hilfe des Computers lassen sich mathematische Darstellungen erzeugen, die mit traditionellen Medien nicht hergestellt werden können. Wenn sich die Forderung nach einem computergestützten Mathematikunterricht in den verschiedenen Curricula wiederfindet, lässt sich darin die implizite Annahme eines unterrichtlichen Mehrwerts nachzeichnen. Ein solcher Mehrwert ist jedoch nicht genuin gegeben, sondern (unter anderen Faktoren) wesentlich von der Kompetenz der Lehrkraft abhängig, den Computer im Mathematikunterricht gewinnbringend einzusetzen. Über den Einsatz von computerbasierten Unterrichtsvignetten soll erforscht werden, welche Facetten von Lehrerkompetenz sich hierzu als maßgeblich erweisen.

## Computerbasierte multiple Repräsentationen in der Mathematik

Der Computer soll im Mathematikunterricht als Unterstützung zum Lernen für die Schüler(innen) an geeigneter Stelle eingesetzt werden (z. B. KMK, 2003). Der Computer bietet die Möglichkeit der dynamischen Darstellung, darüber hinaus können auch multiple Repräsentationen parallel angezeigt und miteinander verknüpft werden, was zu einem höheren Informationsgehalt führen kann (Kaput, 1989). Verknüpfungsbedingte Synergien in der äußeren Darstellung können die Informationsverarbeitung anreichern (Schnotz & Bannert, 1999) und so den Verstehensprozess von Schüler(innen) unterstützen. Dies kann den Schüler(innen) helfen, mit Hilfe der verschiedenen Darstellungen am Computer ein tieferes Verständnis für den repräsentierten Sachverhalt zu entwickeln (vgl. Ainsworth, 1999). Speziell im Bereich der Mathematik spielen multiple Repräsentationen eine große Rolle, da mathematische Objekte als gedankliche Konstrukte an sich unsichtbar sind und erst durch verschiedene Repräsentationen jeweils perspektivisch sichtbar gemacht werden können. Daher ist es für das Verständnis eines mathematischen Inhalts notwendig, diverse Repräsentationen zu kennen, sie miteinander in Verbindung zu bringen sowie zwischen ihnen wechseln zu können (Duval, 2006).

Beim Einsatz des Computers muss der Lehrkraft allerdings bewusst sein, dass auch bei computerbasierten individualisierten Lernangeboten die Lernarbeit bei den Schüler(inne)n verbleibt (Spanhel, 1999). Computerbasierte Darstellungen können eine höhere Verarbeitungsleistung von Schüler(innen) abverlangen und nicht alle Schüler(innen) können gleich gut da-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

mit umgehen: Der Nutzen des Computers ist nicht für alle Schüler(innen) gleich (Mandl, Gruber & Renkl, 2002). Entsprechend sollte die Lehrkraft bei der Erstellung von Lernumgebungen darauf achten, dass die relevanten Informationen zum Sachverhalt möglichst einfach zugänglich sind, so dass bei den Schüler(inne)n keine kognitive Überlastung anfällt (Chandler & Sweller, 1991). Es geht um die Frage nach „[…] einer gleichermaßen sach- und adressatengerechten mathematischen Repräsentation […]“ (Vogel, 2006, S. 43).

## Computerbasierte Repräsentationen im Mathematikunterricht

Lehrkräfte müssen den Computer in geeigneter Weise im Unterricht einsetzen können. Hierzu ist die Kenntnis der Schnittstelle zwischen Computer im Alltag der Schüler(innen) und Computer im Mathematikunterricht von großer Bedeutung. Lehrkräfte können so an „das mediale Vorwissen der Schüler anknüpfen und es für eine fruchtbare Gestaltung der schulischen Lern- und Bildungsprozesse nutzen“ (Spanhel, 1999, S. 58).

Neben dem mathematischen und technischen Fachwissen benötigen Lehrkräfte fachdidaktische Kompetenzen bezüglich des Computereinsatzes. So sollte eine Lehrkraft beispielsweise im Stande sein, die Grenzen der jeweiligen Lernumgebung zu erkennen (Mandl, Gruber & Renkl, 2002). Ebenso sollten mögliche Potentiale multimedial verknüpfter Repräsentationen (Ainsworth, 1999; Kaput, 1989) erkannt und aktiv in Vorbereitung und unterrichtlicher Umsetzung genutzt werden. Hinsichtlich der Adressaten, d. h. den Schüler(inne)n benötigen Lehrkräfte Wissen über bekannte Verstehenshürden und die Fähigkeit, kognitive Überforderung (Chandler & Sweller, 1991) zu erkennen. Dies lässt sich auf der Ebene des Unterrichtshandelns für Maßnahmen der multimediabasierten individuellen Förderung (Seufert & Brünken, 2006) nutzen.

## Computerbildschirmvignetten

Die dargestellten Kompetenzfacetten des Umgangs mit Computern im Mathematikunterricht sollen mit Hilfe eines Vignettentests erfasst werden. Bei sogenannten Vignetten handelt es sich um „kurze Szenen aus dem Alltag des Unterrichts bzw. der Lehrpersonen, die kritische Probleme aufzeigen, zu deren erfolgreicher Bewältigung bestimmte Kompetenzen notwendig sind“ (Rehm & Bölsterli, 2014, S. 215). Dieses Testformat bietet die Möglichkeit, Unterrichtssituationen authentisch abzubilden und Kompetenzen der Lehrkräfte objektiv zu erheben (Blomberg, Stürmer & Seidel, 2011). Im hier vorgestellten Projekt werden die Vignetten als „Bildschirmvignetten“ verfilmt, die im Unterschied zu sonstigen Videovignetten den Fokus ganz auf die Geschehnisse am Bildschirm richten, um die repräsentationale

Gestaltung und die unterrichtliche Auseinandersetzung in den Mittelpunkt zu rücken: Nach einer kurzen Sequenz in der Klasse wird ausschließlich der Bildschirm fokussiert, während Gespräche der beteiligten Schüler(innen) die Unterrichtssituation am Bildschirm unterlegen.

## Vignettentest: Selektionsverfahren und Testentwicklung

Als Grundlage der Testentwicklung wurde ein mathematikdidaktisch sowie kognitionspsychologisch basiertes Kompetenzmodell zum computergestützten Mathematikunterricht theoriegeleitet aufgestellt. Zur Bestimmung der tatsächlich erfassbaren Kompetenzen wurde ein Vignettentest in einem mehrstufigen Verfahren entwickelt:Es wu rde ein Pool von 35 Vignetten à 7-14 Items für ein geschlossenes Antwortformat (6-stufige Likert-Skala) theoriegeleitet und auf Basis von authentischen Computerlernumgebungen (von Lehrkräften für Lehrkräfte) entwickelt. Inhaltlich wurden die beiden Teilbereiche „Funktionen" und „Geometrie" fokussiert, die anhand der Software *GeoGebra* untersucht werden. Der Vignetten-Pool dient zur Selektion für den endgültigen Test. Die Auswahl und Adaption der Vignetten und Items wurde basierend auf einer mehrstufigen Expertenbefragung durchgeführt.

In einer ersten qualitative Runde mit N=9 Experten konnten Eindeutigkeit der Fragestellung sowie fachdidaktische Relevanz der Unterrichtssituation sichergestellt werden. Ebenso wurden die Vignetten mit Hilfe der Auswahlgespräche weiterhin verbessert und neue Items generiert. In einer zweiten, quantitativen Runde wurden die Vignetten und Items anhand von vier Kriterien für die Pilotierung reduziert. Hierzu wurden die N=104 Experten in vier Professionsgruppen ausgewählt: Professoren und Mitarbeiter der Universitäten und Pädagogischen Hochschulen, Lehrkräfte an Lehramtsseminaren und Lehrkräfte an Schulen. Das Auswahlverfahren erfolgte multikriterial bezüglich der Konkordanz der genannten Expertengruppen: Inhaltsspezifische Fokussierung (1), Rating-Modalwerte zu Items (2), Eindeutigkeit der Fragestellung (3), fachdidaktische Relevanz (4) sowie Anmerkungen der Experten (5). Anhand dieser Kriterien und deren Rankings werden 10 Vignetten à 6 Items für die Pilotierung ausgewählt.

## Pilotierung und Hauptstudie

Die Pilotierung des Vignetten-Testinstruments erfolgt im Frühjahr 2015 an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe mit ca. 140 Studierenden. Bei der Testvalidierung werden zusätzlich Kovariaten (Intelligenz, Berufswahlmotive, Persönlichkeitseigenschaften) miterhoben. Mit den Daten der Pilotierung wird der finale Test für die Hauptstudie und die Generierung der Expertennorm vorbereitet. Das finale Testinstrument besteht aus 10 Unterrichtssituationen à 4 Items im geschlossenen Antwortformat, in denen Beurteilungen zur Unterrichtssituation auf einer 6-stufigen Likert-Skala in einem Online-Tool eingeschätzt werden.

Das Projekt ist Teil des FuN-Kollegs „Effektive Kompetenzdiagnose in der Lehrerbildung“ (EKoL) und wird durch das Land Baden-Württemberg finanziert.

## Literatur

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education, 33*(2-3), 131–152.

Blomberg, G., Stürmer, K., & Seidel, T. (2011). How pre-service teachers observe teaching on video: Effects of viewers’ teaching subjects and the subject of the video. *Teaching and Teacher Education, 27*(7), 1131–1140.

Chandler, P., & Sweller, J. (1991). Cognitive Load Theory and the Format of Instruction. *Cognition and Instruction, 8*(4), 293–332.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research agenda for mathematics education. Vol. 4: Research issues in the learning and teaching of algebra* (S. 167–194). Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Kultusministerkonferenz (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf. Zugegriffen: 18. Oktober 2013.

Mandl, H., Gruber, H., & Renkl, A. (2002). Situiertes Lernen in multimedialen Lernumgebungen. In L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Beltz PVU: Information und Lernen mit Multimedia und Internet. Lehrbuch für Studium und Praxis* (3., vollst. überarb. Aufl, S. 139–150). Weinheim: Beltz PVU.

Rehm, M., & Bölsterli, K. (2014). Entwicklung von Unterrichtsvignetten. In D. Krüger, I. Parchmann, & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 213–225). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Schnotz, W., & Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. *Experimental Psychology (formerly "Zeitschrift für Experimentelle Psychologie"), 46*(3), 217–236.

Spanhel, D. (1999). Multimedia im Schulalltag - Was müssen Lehrerinnen und Lehrer wissen, um Multimedia einsetzen zu können? In D. M. Meister & U. Sander (Hrsg.), *Praxishilfen Schule Pädagogik: Multimedia. Chancen für die Schule* (S. 54–76). Neuwied u.a.: Luchterhand.

Vogel, M. (2006). *Texte zur mathematischen Forschung und Lehre. Bd. 49: Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Lena PANKOW, Hamburg, Gabriele KAISER, Hamburg, Andreas BUSSE, Hamburg, Jessica HOTH, Vechta, Martina DÖHRMANN, Vechta, Johannes KÖNIG, Köln, Sigrid BLÖMEKE, Oslo

# Wahrnehmung von Schülerfehlern unter Zeitdruck als Aspekt von professioneller Kompetenz berufstätiger Mathematiklehrkräfte

Schülerfehler sind typische im Unterricht auftretende Situationen, auf die LehrerInnen schnell und adäquat reagieren müssen. Bedeutsam für die konstruktive Verwendung der Fehler ist deren schnelles Erkennen. Die Expertiseforschung (Chi 2011) legt nahe, dass Expertenlehrkräfte Fehler schneller erkennen. Welche Wissensfacette dabei eine Rolle spielt, ist bisher noch nicht eindeutig geklärt. Die COACTIV-Studie legt nahe, dass mathematisches Wissen eine große Rolle bei der Fehlerkennung spielt (vgl. Krauss & Brunner 2011). Im Folgenden sollen die Fragen, wie sich schnelle Fehlererkennung messen lässt bzw. was unter diesem Konstrukt schnelle Fehlererkennung zu verstehen ist, beleuchtet werden, und zwar im Rahmen der Lehrerprofessionsstudie TEDS-FU (**T**eacher **E**ducation and **D**evelopment **S**tudy - **F**ollow **U**p).

## Stichprobe und Konstrukt

Die Studie TEDS-FU (für Details Blömeke et al. 2014, Kaiser et al. 2015), eine längsschnittliche Teilstichprobe der internationalen Lehrerbildungsstudie TEDS-M (vgl. Blömeke, Kaiser & Lehmann 2010), wurde von 2010 bis 2012 mit dem Ziel durchgeführt, die Entwicklung der professionellen Kompetenz von Mathematiklehrkräften der Primar- und Sekundarstufe I in der Berufseingangsphase zu untersuchen. Dabei wurden einerseits in einer Fortführung von TEDS-M die wissensbasierten Kompetenzfacetten mathematisches Wissen, mathematikdidaktisches Wissen und pädagogisches Wissen in Form digitalisierter Papier-und-Bleistift-Tests erhoben. Als Erweiterung des theoretischen Konstrukts wurden videobasiert situationsbezogene Kompetenzfacetten erhoben, d.h. das Erkennen bedeutsamer Ereignisse des Unterrichtsgeschehens, die Interpretation dieser Ereignisse und die Entwicklung entsprechender Handlungsoptionen. Damit wird an eine erweiterte Auffassung von Kompetenz angeknüpft, die den Übergang von Kompetenz zur Performanz mittels verschiedener Kompetenzfacetten beschreibt (vgl. Blömeke, Gustaffson & Shavelson 2015). Als Zusatzkomponente wurde neben einer onlinebasierten Erhebung der Beliefs, demographischen Daten und der Unterrichtserfahrungen eine Facette der schnellen Fehlererkennung entwickelt, d.h. das Erkennen typischer, in der Schulpraxis häufig vorkommender Fehler unter Zeitdruck. Dadurch wird eine Situation geschaffen, die der Unterrichtssituation nahe kommt.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

An der Sekundarstufenstudie von TEDS-FU nahmen insgesamt 171 Lehrerinnen und Lehrer aus der ursprünglichen deutschen Stichprobe von TEDS-M (vgl. Blömeke, Kaiser & Lehmann 2010) teil. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf die Testkomponente der schnellen Fehlererkennung. Das zugrunde liegende Konstrukt des Tests kann wie folgt beschrieben werden: Das schnelle Erkennen von Schülerfehlern kann als ein Teilaspekt von Diagnosekompetenz beschrieben werden (vgl. Schrader 1989). Um dieses Konstrukt unter unterrichtsnahen Bedingungen zu erheben, ist die Zeit zur Fehlererkennung deutlich begrenzt, wodurch ein gewisser Zeitdruck – wie im Unterricht – aufgebaut wird. Inhaltlich werden die LehrerInnen zu einem breiten Themenspektrum aus der Sekundarstufenmathematik befragt, und zwar zu bekannten Schülerfehlern. Es wird angenommen, dass Expertenlehrkräfte diese typischerweise immer wieder vorkommenden Fehler entsprechend antizipieren und daher schnell erkennen. Damit soll auch mathematikdidaktisches Wissen über typische Schülerfehler erhoben werden. Das gewählte Design unterscheidet sich damit von dem in der COACTIV-Studie verwendeten Test zur Fehlererkennung, da dort mathematisch anspruchsvollere Aufgaben ohne Zeitdruck bearbeitet wurden und die gemessene Zeit als Indikator für Expertise aufgefasst wurde (vgl. Krauss & Brunner, 2011).

## Zusammenhang von Expertise und Schnelligkeit

Nach Chi et al. (1981) besitzen Expertenlehrkräfte besonders gut strukturiertes Wissen. Sie können auf diese Weise schnell und akkurat Situationen, hier Schülerfehler, wahrnehmen (vgl. auch Sabers et al. 1991). Grundlegend für den vorliegenden Test ist die Fähigkeit, Wichtiges, nämlich die Fokussierung auf die typischen Fehler, von Unwichtigem zu trennen, wozu insbesondere Expertenlehrkräften in der Lage sind (vgl. Borko & Livingston 1989). Des Weiteren sind Expertenlehrkräfte charakterisiert durch die Möglichkeit zur selektiven Wahrnehmung, das „professional eye“ (Gobet 2005), so dass sie in der Lage sind, akkurat zu agieren und typische Fehler zu antizipieren. Gemäß Chi et al. (1988) besitzen Expertenlehrkräfte neben den genannten Aspekten insbesondere die Fähigkeit, in komplexen Situationen zu fokussieren und genau zu antizipieren, während NovizInnen im Umkehrschluss hierzu nicht in der Lage sind.

## Der TEDS-FU-Test zur Wahrnehmung von Schülerfehlern

Um die Wahrnehmung von Schülerfehlern zu testen, standen in der Testkomponente von TEDS-FU zur schnellen Schülererkennung, im Rahmen der Sekundarstufenstudie, insgesamt 16 Items für die Befragung zur Verfügung. Zu Beginn wurde den ProbandInnen anhand eines Beispiels verdeutlicht, welche Anforderungen der Test an sie stellt und wie sie während des Tests vorgehen sollen. Jedes Item des Tests ist in zwei Phasen unterteilt: Mit dem Aufrufen der

Seite wird das mathematische Gebiet, aus dem der Fehler stammt, wie bspw. *Addition von Brüchen,* angezeigt. In der Zeit bis zum nächsten Klick sollte die Lehrkraft auf ihr Wissen über typische Schülerfehler bezüglich des Themas zurückgreifen und sich so auf die Situation der Begegnung mit drei Schülerantworten vorbereiten. Die Länge dieser Phase (Antizipationszeit) wurde gemessen. Jede Lehrkraft bestimmte die Dauer (maximal fünf Minuten) selbst. Während der sich direkt anschließenden Phase, in der der typische Schülerfehler erkannt werden sollten, wurden zu dem fokussierten Thema drei Schülerbearbeitungen gezeigt, von denen genau eine falsch war. Für das Erkennen, welche Schülerantwort falsch war, hatten die Lehrkräfte vier Sekunden Zeit. Wenn diese Zeit überschritten wurde, bestand keine Möglichkeit mehr, eine Antwort über die Tastatur einzugeben. Eine nichtgegebene Antwort wurde ebenso als *falsch* kodiert wie die Nennung einer falschen Option.

## Auswertung

Die Antizipationszeit wurde für jede Versuchspersonen und für jedes Item ausgewertet. Gruppiert wurde jedes Item nach richtig oder falsch gegebener Antwort. Auf diese Weise entstanden 32 Gruppen, zwei pro Item, d.h. 16 Gruppen der korrekt Antwortenden (als potenzielle Expertenlehrkräfte angesehen) und 16 Gruppen der falsch Antwortenden (potenzielle NovizInnen). Basierend auf dem Mittelwert der Antizipationszeit wurde der Quotient je Item "Antizipationsmittelwert der korrekt Antwortenden/ Antizipationsmittelwert der falsch Antwortenden" analysiert. Mögliche Unterschiede zwischen den Gruppen wurden auf statistische Signifikanz mit Hilfe eines t-Tests bzw. eines U-Tests (vgl. Bortz & Schuster 2010) überprüft.

## Ergebnisse und Ausblick

Die Personengruppe, die ein wenig komplexes Thema richtig beantwortet, verwendete bei diesen Items deutlich weniger Antizipationszeit im Gegensatz zu den falsch Antwortenden. Ein gegenteiliges Ergebnis bezüglich der Antizipationszeit zeigt sich bei komplexen Themen wie bspw. dem Einsetzen negativer Zahlen in eine komplexe Formel. Die korrekt Antwortenden benötigen für ein solches Item eine signifikant längere Zeit als diejenigen, die die Items falsch beantworten. Eine mögliche Erklärung kann in dem von Chi et al. (1988) und Bromme (1992) beschriebenen Phänomen liegen, dass Expertenlehrkräfte die Komplexität des Items *erkennen* und daher länger antizipieren. Bei dem Vergleich der zeitlimitierten Komponente mit den ebenso durchgeführten Tests zum mathematischen Wissen konnte ein starker Zusammenhang zum mathematischen Wissen erkannt werden. Dieser Zusammenhang soll in drei Validierungsstudien überprüft werden. So sollen neben OberstufenschülerInnen, Studierende der grundständigen Mathematik sowie LehrerInnen mit anderen Unterrichtsfächern befragt werden.

## Literatur


Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. Zeitschrift für Psychologie, 223 (1), 3-13.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010). TEDS-M 2008 - Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., König, J., Busse, A., Suhl, U., Benthien, J., Döhrmann, M. & Kaiser, G. (2014). Von der Lehrerausbildung in den Beruf – Fachbezogenes Wissen als Voraussetzung für Wahrnehmung, Interpretation und Handeln im Unterricht. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 17, 509-542.

Borko, H. & Livingston, C. (1989). Cognition and improvisation: Differences in mathematics instructed by expert and novice teachers. American Educational Research Journal, 26, 413-498.

Bortz, J. & Schuster, C. (2010). Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler. Berlin: Springer.

Bromme, R. (1992). Der Lehrer als Experte: zur Psychologie des professionellen Wissens. Bern: Huber.

Chi, M. T. H. (2011). Theoretical perspectives, methodological approaches, and trends in the study of expertise. In Y. Li & G. Kaiser (Ed.), Expertise in mathematics instruction: An international perspective (pp. 17-39). New York: Springer.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. Cognitive Science, 5, 121-152.

Chi, M. T. H., Glaser, R. & Farr, M. J. (Hrsg.) (1988). The Nature of Expertise. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gobet, F. (2005). Chunking models of expertise: Implications for education. Applied Cognitive Psychology, 19(2), 183-204.

Kaiser, G., Busse, A., Hoth, J., König, J., & Blömeke, S. (2015). About the Complexities of Video-Based Assessments: Theoretical and Methodological Approaches to Overcoming Shortcomings of Research on Teachers' Competence. International Journal of Science and Mathematics Education, 1-19.

Krauss, S. & Brunner, M. (2011). Schnelles Beurteilen von Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrer/innen. Journal für Mathematikdidaktik, 32(2), 233-251.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann.

Sabers, D. S., Cushing, K. S. & Berliner, D. C. (1991). Differences among teachers in a task characterized by simultaneity, multidimensionality, and immediacy. American Educational Research Journal, 28, 63-88.

Schrader, F.-W. (1989). Diagnostische Kompetenzen von Lehrern und ihre Bedeutung für die Gestaltung und Effektivität des Unterrichts. Frankfurt am Main: Lang.

Pelagia PAPADOPOULOU, Stefan JEUK, Christine BESCHERER, Ludwigsburg

# Mathematische S(pr)achaufgaben – Eine Analyse möglicher sprachlicher Hürden bei der Erarbeitung von Textaufgaben

Im Rahmen des vom Mercator Institut geförderten Projekts wird untersucht, wie sich ein sprachsensibler Mathematikförderunterricht methodisch gestalten lässt, der sowohl sprachlich als auch fachlich fördert. Die Untersuchung soll Erkenntnisse über den Einsatz der Fördermaterialien und -konzepte in realem Förderunterricht liefern, um daraus Konsequenzen für den Regelunterricht abzuleiten. In diesem Beitrag werden erste Überlegungen einer Aufgabenanalyse vorgestellt.

## 1. Stand der Forschung

Die „Sprachfähigkeit [ist] ein zentraler Schlüssel für den Zugang zu Bildung und somit auch zu mathematischer Bildung […]" (Heinze, Herwartz-Emden, Braun, Reiss 2011, 21). Die Mathematikleistung von Schülerinnen und Schülern hängt stark von ihrer Sprachkompetenz ab. In einer Studie konnte gezeigt werden, dass sich die Sprachkompetenz stärker auf die Mathematikleistung auswirkt als andere Benachteiligungsfaktoren, wie der sozio-ökonomische Status oder die reine Lesekompetenz (Prediger 2013). In den letzten Jahren wurde immer wieder festgestellt, dass Kinder und Jugendliche mit Migrationshintergrund[1] signifikant geringere Leistungen in Mathematik erzielen, als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler ohne Migrationshintergrund. (Heinze u.a. 2011).Während die Bedeutung der Sprache beim Mathematiklernen seit der Entstehung der Mathematikdidaktik diskutiert wird, ist das Bewusstsein für die Sprache als Lernhindernis im deutschsprachigen Raum erst in den letzten Jahren entstanden (Prediger 2013).

## 2. Sprachliche Besonderheiten in Mathematikaufgaben

Mathematische Texte enthalten viele sprachliche Besonderheiten. Bislang wurde nur ansatzweise erforscht, wo die sprachlichen Schwierigkeiten für Kinder und Jugendliche mit Migrationshintergrund liegen (vgl. Duarte, Gogolin, Kaiser 2011). In der Praxis erprobte Förderkonzepte (Prediger, Özdil 2011; 9) und die Ursachen für Schwierigkeiten bei Lernenden mit Migrationshintergrund (Duarte u.a. 2011; 45) bleiben bislang wenig er-

[1]Die Bezeichnung „Kinder und Jugendliche mit Migrationshintergrund" ist in den letzten Jahren in die Kritik geraten, weil sie teilweise als diskriminierend empfunden wird. Zur Diskussion vgl. Jeuk 2013.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

forscht. Aus einer qualitativen Untersuchung gingen zwei sprachliche Besonderheiten für das Textverstehen und mathematisch richtige Lösen von Aufgaben hervor. Es stellte sich heraus, dass „das Wissen der Komposita" und die „Bedeutung der Präpositionen" für die Probanden die Deutsch und Russisch sprachen, eine besondere sprachliche Herausforderung darstellten (Duarte u.a. 2011, 49).

Fach- und alltagssprachliche Begriffe die nicht im alltäglichen Sprachgebrauch der Schülerinnen und Schüler vorkommen, müssen zweifellos erst erlernt werden. Hinzu kommt jedoch, dass viele Begriffe in der Fachsprache Mathematik eine andere Bedeutung haben (z.B. Menge, Scheitel, Gruppe) als im alltagssprachlichen Gebrauch. Diese zu unterscheiden und gegebenenfalls aus dem Kontext abzuleiten fällt gerade Schülerinnen und Schülern, deren Muttersprache nicht Deutsch ist, oft schwer (Maier, Schweiger 1999; Heinze u.a. 2011).

## 3. Aufbau der Studie

Im Rahmen des vom Mercator Institut geförderten Projekts: „Förderung der Bildungssprache Deutsch im Deutschunterricht und im Fachunterricht an der Sekundarstufe I auf der Grundlage förderdiagnostischer Verfahren (FörBiS)" wird in dem Teilprojekt Mathematik untersucht, wie sich ein sprachsensibler Mathematikförderunterricht methodisch gestalten lässt, der Lernende mit Migrationshintergrund sowohl sprachlich als auch fachlich fördert. Als eine Grundlage für die Messung des Erfolgs der sprachsensiblen Mathematikförderung werden standardisierte Tests zur Erhebung der Mathematikleistung (z.B. DEMAT) und zur Erhebung der Sprachkompetenz (u.a. FISA Testinstrumente[*]), in einem Pre/Post/Follow up-Testdesign in den Klassen eingesetzt, aus denen die geförderten Schülerinnen und Schüler stammen.

Die Untersuchung soll auch Erkenntnisse darüber liefern, wie die Förderlehrkräfte, also die Studierenden die den Förderunterricht leiten, mit den Fördermaterialien und -konzepten zurechtkommen, um daraus Konsequenzen für eine sprachsensible Mathematikförderung im Regelunterricht abzuleiten. Die Sichtweise der Förderlehrkräfte in Bezug auf das Erkennen sprachsensibler Situationen und den Umgang mit sprachbezogenen, mathematikhalten Informationen und eventuelle Entwicklungsverläufe im Rahmen der gemachten Erfahrungen und Reflexionen, soll mit Hilfe von Mindmaps, Fördertagebücher und Podcasts dokumentiert und durch (halb-) standardisierte Interviews ergänzt werden.

[*] Informationen zu FISA Testinstrumente unter: http://www.ph-ludwigsburg.de/fisa

Im Rahmen dieses Beitrags werden Textaufgaben als Aufgaben, die in reiner Textform vorliegen, definiert. Es soll zunächst keine weitere Differenzierung nach Aufgabentypen erfolgen. Fokussiert auf die sprachlichen Merkmale von Aufgabentexten wird von S(pr)achaufgaben gesprochen.

## 4. Erste Annäherung der Analyse möglicher sprachlicher Hürden von S(pr)achaufgaben

Im Fokus des ersten Analysevorgehens steht eine sprachliche Analyse von Textaufgaben. Diese zielt auf eine bewusste Betrachtung von sprachlichen Merkmalen in Aufgabentexten. Basierend auf diesen werden Fördermaterialien und -konzepte entwickelt, die den Schülerinnen und Schülern beim Lesen und Verstehen des Aufgabentextes aus sprachlicher Sicht und beim Lösen der Aufgabe aus mathematischer Sicht, unterstützen.

Die mathematischen S(pr)achaufgaben werden auf morphologische und auf syntaktische Merkmale analysiert. Dabei wird nach der sprachlichen Analyse dokumentiert, welche dieser Merkmale das mathematische Lösen der entsprechenden Aufgaben beeinflussen könnten.

Die sprachliche Analyse soll die Aufmerksamkeit der Förderlehrkräfte auf die „Sprache“ lenken um bereits im Vorfeld „mögliche Schwierigkeiten“ abzuleiten, die das Situations- und Aufgabenverständnis erschweren könnten. Im Verlauf der Förderung wird dokumentiert, welche sprachlichen Merkmale eine besondere Herausforderung für das Textverstehen von Schülerinnen und Schülern mit Deutsch als Zweitsprache im Unterrichtsverlauf darstellen.

Einen weiteren Analyseschwerpunkt bildet die sprachlogische Komplexität (nach Maier, Kleinknecht, Metz 2010). Hierbei wird der Zusammenhang von der sprachlichen Darstellung der Aufgabenstellung und der mathematischen Modellierung untersucht. Die Autoren unterscheiden zwischen einfacher, mittlerer und hoher sprachlogischer Komplexität von Aufgaben (ebd.). Zur Identifikation von möglichen Verstehenshürden und zur Auswahl geeigneter Fördermaterialien soll im Vorfeld dokumentiert werden, welche Informationen schrittweise bei der Erstellung einer mathematischen Lösung herangezogen werden müssen und damit verbunden, welche Anforderungen dies an die Leserinnen und Leser stellt.

## 5. Ausblick und Diskussion

Abgeleitet aus den ersten Überlegungen eines Analysevorgehens von S(pr)achaufgaben wird zunächst untersucht, ob dieses Vorgehen den Förderlehrkräften hilft, sprachliche Merkmale herauszuarbeiten und im Förderunterricht auf diese zu reagieren. In wieweit die im Vorfeld analysierten sprachlichen Besonderheiten „tatsächlich“ als solche aus den Schülerlösungen hervorgehen und welche Aussagen diesbezüglich getroffen werden könnten, wird noch erprobt. Die Heterogenität der Schülerschaft bezüglich ihrer mathematischen und sprachlichen Kompetenzen, wird sich höchstwahrscheinlich in den einzelnen Schülerlösungen widerspiegeln, so dass von differenten Förderschwerpunkten in den einzelnen Fördergruppen ausgegangen werden kann. Vorerst sollen jedoch Möglichkeiten erprobt werden, die (Förder)Lehrkräfte bei der Analyse von sprachlichen Besonderheiten in S(pr)achaufgaben unterstützen.

## Literatur


Duarte, J.; Gogolin, I.; Kaiser, G. (2011): Sprachlich bedingte Schwierigkeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben. In: Susanne Prediger und Erkan Özdil (Hrsg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland, Bd. 32. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann, S. 35–53.

Heinze, A.; Herwartz-Emden, L.; Braun, C.; Reiss, K. (2011): Die Rolle von Kenntnissen der Unterrichtssprache beim Mathematiklernen. Ergebnisse einer qualitativen Längsschnittstudie in der Grundschule. In: Susanne Prediger und Erkan Özdil (Hrsg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland, Bd. 32. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann, S. 11–33.

Jeuk, Stefan (2013): Deutsch als Zweitsprache in der Schule. Grundlagen - Diagnose - Förderung. 2., aktualisierte Aufl. Stuttgart: Kohlhammer (Lehren und Lernen).

Junk-Deppenmeier, A.; Jeuk, S. (Hrsg.) (2015): Praxismaterial Förderdiagnostik. Werkzeuge für den Sprachunterricht in der Sekundarstufe I. Stuttgart: Fillibach bei Klett.

Maier, U.; Kleinknecht, M.; Metz, K. (2010): Ein fächerübergreifendes Kategoriensystem zur Analyse und Konstruktion von Aufgaben. In: Hanna Kiper (Hrsg.): Lernaufgaben und Lernmaterialien im kompetenzorientierten Unterricht. Stuttgart: Kohlhammer (Schulpädagogik), S. 38–43.

Maier H.; Schweiger F. (1999): Mathematik und Sprache. In: Reichel, H.-C.: Mathematik für Schule und Praxis. Online: http://www.math.uni-muenster.de/reine/u/mollerh/data/MaierSchweig11.pdf, zuletzt geprüft am 27.02.2015.

Prediger, S. (2013): Sprachmittel für mathematische Verstehensprozesse – Einblicke in Probleme, Vorgehensweisen und Ergebnisse von Entwicklungsforschungsstudien. In: Andreas Pallack (Hrsg.): Impulse für eine zeitgemäße Mathematiklehrer-Ausbildung. MNU-Dokumentation der 16. Fachleitertagung Mathematik. Neuss: Seeberger, 26-36.

Prediger, S.; Özdil, E. (Hrsg.) (2011): Mathematiklernen unter Bedingungen der mehrsprachigkeit // Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland, Bd. 32. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Selina PFENNIGER, Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN,
Brugg

## Wie entscheide ich mich?

Themen der Spieltheorie gehören nicht zum Inhaltskatalog der Lehrpläne für den Mathematikunterricht in der Schweiz. Das ist insofern zu begrüßen, als eine unreflektierte Übernahme eines „homo oeconomicus" Modells wohl mehr Schaden als Nutzen bringen würde. Andererseits wird damit der Themenbereich rationaler Entscheidungen, zu dem auch der Mathematikunterricht etwas beitragen könnte, ausgeklammert. Gerade dieser Themenbereich wäre jedoch wichtig, da das PISA-Konzept der „mathematical literacy" (OECD, 2003, S. 24) und das Kompetenzkonzept der Klieme-Expertise (Klieme, 2003, S. 21), an denen sich die Bildungsstandards der Schweiz und anderer Länder orientieren (vgl. Linneweber-Lammerskitten, 2014, S. 9ff.), nicht auf bloßes Wissen abzielt, sondern auf die Fähigkeit und Bereitschaft, dieses Wissen in *Handlungen* umzusetzen. So heißt es in der Einleitung zu den mathematischen Bildungsstandards der Schweiz: „Mathematische Grundkompetenzen sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, die Welt (in der weitesten Bedeutung des Wortes) zu verstehen, sie konstruktiv, engagiert und reflektiert mitzugestalten und sich selbst in ihr zu entfalten und weiterzuentwickeln" (EDK, 2011, S. 5). Handlungskompetenz setzt aber die Fähigkeit und Bereitschaft voraus, sich rational zu entscheiden. Es erscheint somit sinnvoll, dass sich die Mathematikdidaktik dieses Themas annimmt. Dies um so mehr, als rationale Entscheidungen begründbar und für andere nachvollziehbar sein müssen und somit Gelegenheit bieten, die Kompetenzaspekte „Argumentieren und Begründen", sowie „Darstellen und Kommunizieren", die in den Bildungsstandards explizit genannt werden, samt ihren sprachlichen Voraussetzungen im Mathematikunterricht zu fördern. Die Spieltheorie bezieht sich auf Entscheidungssituationen, welche von zwei (oder mehr) Handelnden beeinflusst werden können. Die im Titel formulierte Fragestellung kann also erweitert werden zu: „Wie entscheide ich mich in Abhängigkeit von der Entscheidung der anderen?" Dabei kann man das Fragewort ‚Wie' auf zweierlei beziehen: (i) auf das *Resultat der Entscheidung* (ii) auf den *Weg der Entscheidungsfindung*, d.h. den *Entscheidungsprozess*. Für den Mathematikunterricht steht die zweite Interpretation im Vordergrund: Es geht darum, allein und mit anderen wichtige Elemente von Entscheidungssituationen zu erkennen, Handlungsstrategien und ihre Alternativen zu klären, Präferenzordnungen zu erstellen, sich in die Situation der Mitspielenden hineinzudenken, Konsequenzen von Strategiekombinationen zu erkennen und sich

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Modifikationen der Entscheidungssituation vorzustellen. Man könnte dies als „propädeutischen Zugang zur Spieltheorie“ bezeichnen.

**Hypothesen:**

Für eine Voruntersuchung in einer siebten Sekundarschulklasse wurde eine Lernumgebung mit spieltheoretischen Inhalten konzipiert und eingesetzt, die zum einen sprachbezogene mathematische Grundkompetenzen fördern, zum anderen einen propädeutischen Zugang zur Spieltheorie ermöglichen sollte. Dazu wurden die folgenden beiden Hypothesen formuliert:

- Mit ausgewählten Inhalten der Spieltheorie lassen sich mathematische Grundkompetenzen aus den Kompetenzbereichen *Darstellen und Kommunizieren* sowie *Argumentieren und Begründen* fördern.
- In *propädeutischer Form* kann die Spieltheorie als Teil der Mathematik gewinnbringend auf der Sekundarstufe I in den Unterricht eingebracht werden.

Um die erste Annahme stützen zu können ist zu erläutern, welche Inhalte der Spieltheorie Eingang in den Schulunterricht finden sollen und wie sie sich mit den Grundkompetenzen verbinden lassen. Die zweite These impliziert, dass die Spieltheorie in ihrer Komplexität nicht direkt für den Unterricht geeignet ist, sondern eine Annäherung in propädeutischer Form nötig ist. Zu zeigen bleibt, dass auf diese Weise Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die angestrebten Ziele Fortschritte machen können.

## Spieltheorie als Inhalt für die Sekundarstufe I

Die Spieltheorie ist ein Bereich der Mathematik, der vor allem als Modell sozialer, wirtschaftlicher und biologischer Situationen Bedeutung erlangt hat. Sie greift auf eigene Darstellungsformen und Begriffe zurück, modelliert soziale Interaktionen als Spiel und erlaubt es, auf mathematischer Basis zu überlegen, welches die beste Antwort eines Spielers auf die Optionen mindestens eines weiteren Spielers ist. Der Inhalt wurde für den Unterricht auf wenige Elemente heruntergebrochen. Es wurden nur Zweipersonenspiele mit zwei möglichen Strategien, reiner Strategiewahl und gemeinsamer Präferenzordnung betrachtet. Als Darstellungsmittel wurden nur Resultatmatrizen (mit Beschreibungen der Resultate ohne Pay-off) und Bi-Matrizen (Pay-off-Matrizen mit zwei Einträgen pro Zelle) gewählt.

## Die Aufgabenstellungen und ihre Ziele

Nach einem Einstieg mit dem Spiel ‚Schere, Stein, Papier‘ erfolgte die inhaltliche Erarbeitung der Begriffe „Spieler“, „Strategie“ und „Auszahlungswert“, sowie die Analyse der Muster in der Matrixdarstellung des

Spiels. Dies weckte das implizite Verständnis für wichtige Merkmale von Spielen im Sinne der klassischen Spieltheorie: (i) dass es sich um Entscheidungssituationen handelt, an denen mehrere *Personen* beteiligt sind, (ii) dass die Spieler *Präferenzen* bezüglich der Spielausgänge haben (iii) dass der Ausgang des Spiels (in der Regel) *von den Entscheidungen aller Spieler beeinflusst* wird, (iv) dass die einzelnen Spieler bestimmte *Informationen* über die anderen Spieler und deren Präferenzen besitzen. Auf die kompetitive Situation des Einstiegbeispiels folgte ein Beispiel eines Spiels mit einer Win-Win-Situation. Auf Grund der zugehörigen Bi-Matrix sollten die Schülerinnen und Schüler erkennen und begründen, dass es sich bei diesem Spieltyp für jeden der beiden Spieler lohnt, zu kooperieren, unabhängig von der Strategiewahl des anderen. Zwei weitere Spielbeispiele betrafen Dilemmasituationen: das eine ist als „Chickenspiel“ bekannt, das andere entsprach dem Gefangenendilemma in der Einkleidung eines Tauschhandels. Die Aufgabenstellungen zum Chickenspiel sollten dazu anregen, Aussagen und mögliche Entscheidungen zu reflektieren, die Matrix zum Tauschhandelsspiel dazu, Diskussionen über faires und unfaires Verhalten, und über Modifikationen der Matrix zu führen. Alle Aufgaben sollten kooperativ in Partner-/Gruppenarbeit gelöst, und die so entstanden Diskussionen in einem Klassengespräch aufgegriffen werden.

## Ergebnisse

Die Auswertung der schriftlichen Dokumente ergab folgendes Bild:

- Es gelang mit dem Spiel ‚Schere, Stein, Papier‘ ein erstes Verständnis für spieltheoretische Grundbegriffe zu vermitteln und die Darstellungskompetenz (Gebrauch von Matrizen) zu erweitern. Die gewählten Strategien wurden ins Bewusstsein geholt und dokumentiert. Dass kein Spieler allein ein Ergebnis herbeiführen kann, wurde berücksichtigt und beide Spieler in die strategischen Überlegungen einbezogen.
- Beim kooperativen Spielbeispiel wurde die mögliche Win-Win-Situation erkannt und die Rationalität der Wahl mit den für beide Parteien maximalen Auszahlungswerten begründet.
- Dilemmasituationen sind komplex und anspruchsvoll - entsprechend different war die Qualität der Argumentationen. Es wurden beim Tauschhandelsspiel Überlegungen entweder nur in Bezug auf das eigene, oder aber auch auf das allgemeine Wohl angestellt; im Chickenspiel wurde entweder nur die Alternative Zusammenstoß/kein Zusammenstoß, oder gleichzeitig auch die Frage des Held-sein-Wollens in die Überlegungen einbezogen. Bei beiden Spielbeispielen ergaben sich Gespräche über die Rolle der Prioritäten, und über die Bedeutung von Mat-

rixzellen, bei denen für keinen Spieler ein Anreiz besteht, zu wechseln, solange der andere Spieler bei seiner Wahl bleibt (Nash-Gleichgewicht). Beim Tauschhandel wurde nach generellen Überlegungen zum Verhalten die Präferenzliste so verändert, dass Fairness oberste Priorität hatte oder die Auszahlungsmatrix wurde so modifiziert, dass sich unfaires Verhalten nicht mehr gelohnt hat.

## Diskussion der Hypothesen

Die Matrizen wurden als geeignetes Mittel zur Darstellung und Kommunikation spieltheoretischer Inhalte erkannt und benutzt. Mit ihrer Hilfe konnten Probleme mathematisch angegangen, Lösungsvorschläge begründet und Ergebnisse reflektiert werden. Ebenso wurde das Modell bewusst so verändert, dass die Entscheidung sich in eine gewünschte Richtung bewegte. In Bezug auf den Kompetenzaspekt Argumentieren und Begründen ließen sich zwei Kompetenzstufen ausmachen: auf einer niedrigeren Stufe wurde eine Strategie gewählt und unter Berücksichtigung eines Gesichtspunktes begründet. Auf einer höheren Stufe wurden weitere Aspekte (u.a. die Modifikation der Matrix oder der Prioritätenordnung) mit einbezogen. In propädeutischer Form konnte die Spieltheorie als Teil der Mathematik gewinnbringend auf der Sekundarstufe I in den Unterricht eingebracht werden.

## Literatur


Girnat, B. (2011): „Mathematik auf der Anklagebank – Didaktische Überlegungen zu einem Ausflug in die Spieltheorie". In A. Eichler: *Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht* (Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe), Band 15, S. 63-74.

Klieme, Eckhard u.a. (2003): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf, recherchiert am 18.03.2013.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2014). Mathematikdidaktik, Bildungsstandards und mathematische Kompetenz. In Linneweber-Lammerskitten, H. (Ed.) (2014). Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II. (S. 9-27). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Luce, D. und Raiffa, H. (1957). Games and Decisions – Introduction and Critical Survey . New York: Dover Publications.

OECD (2003): PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills - Publications 2003. http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694881.pdf recherchiert am: 18.04.2013

Picher, F. (2008): Sozialreflexion im Mathematikunterricht: Kooperation oder Verweigerung. *Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik.* München: Profil.

Schweizerische Konferenz der Erziehungsdirektoren (EDK) (2011). Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards. http://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf (29.03.15)

Franz PICHER, Klagenfurt

# Zur Bedeutung des Integral-Begriffs im Rahmen von Schulmathematik

In diesem Beitrag wird diskutiert, wie durch eine reflektierte Betrachtung des Integral-Begriffs am Ende der schulischen Laufbahn einerseits eine rückblickend-abschließende und andererseits eine ausblickende Reflexion in Bezug auf Schulmathematik geleistet werden kann. Als – insbesondere aus bildungstheoretischer Sicht – bedeutsam werden hierbei einerseits ein pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt und andererseits ein erkenntnistheoretischer Aspekt identifiziert. In der Auseinandersetzung mit diesen beiden Aspekten erweist sich sodann der Übergang von der Vorstellung des Integrals als Flächenbilanz zur Betrachtung des Integrals als theoretische Erweiterung des Messens als der Sache dienlich.

## 1. Realitäten

Befragungen von Studienanfänger(inn)en des Lehramts Mathematik zum Integral-Begriff durch den Autor erzeugen bei diesem zuweilen ein gewisses Unbehagen, wenn die Beschreibung einer neuen Rechenoperation, mit der man Flächeninhalte unter Funktionsgraphen berechnen kann, im Zentrum der Antworten steht und ein reflektierterer Blick fehlt: Was tut man mit diesem Begriff? Welcher Zusammenhang besteht zur bisher gelernten Mathematik? Was ist neu? Fragen wie diese (und damit eine horizontale wie vertikale Vernetzung in Bezug auf andere Gebiete der Schulmathematik) bieten sich gerade im Rahmen der Beschäftigung mit dem Integral-Begriff am Ende der schulischen Laufbahn an.

Der ‚übliche' Umgang mit dem Integral-Begriff soll kurz als (zu) unreflektiert, als zu kalküllastig und damit nicht dem Alter der Lernenden entsprechend, charakterisiert werden. Es sei hierzu auf Worte von Hartmut Köhler verwiesen, der zu „mancher zähen Diskussion im Analysisunterricht" die Frage stellte, ob „diese Situation in der Oberstufe nicht daher rühren [könnte], dass man die Schüler jahrelang geistig unterforderte bei gleichzeitiger Überforderung durch eine inhumane Bürokratisierung des Lernprozesses" (Köhler 2006, S. 7 f.).

*These:* Der Inhalt ‚Integral-Begriff' ist (gerade ob seiner *Schwierigkeit* und *Bedeutung*) der Schulstufe angemessen, nicht aber der übliche Umgang mit diesem. Die Beschäftigung mit dem Integral-Begriff stellt einen *unbewusst* vollzogenen Abschluss in der Beschäftigung mit Mathematik in der Schule dar, der (für) die Beteiligten passiert.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 2. Desiderata

Leitend für die folgenden ‚Entwürfe' ist eine Idee von ‚Bildung' als ein ‚Sich-Bilden' des Individuums und daher eine Auseinandersetzung mit Mathematik, die nicht vom Menschen entkoppelt ist, sondern vielmehr gerade das „Verhältnis von Mensch und Wissen" (Fischer & Malle 2004, S. 7) in den Mittelpunkt stellt. Da der Mensch nicht für sich alleine gedacht werden kann, spielt aus dieser Sicht die Berücksichtigung von „Grundrelationen, in denen Menschen leben" (Vollrath & Roth 2012, S. 5), und dabei insbesondere der Mensch in seinen Beziehungen zu (Um-)Welt und Gesellschaft, eine wichtige Rolle.

Im Rahmen der Beschäftigung mit dem Integral-Begriff kann Obiges durch die explizite Behandlung der Frage nach dem Sinn anhand zweier im österreichischen Mathematik-Lehrplan für die Sekundarstufe II genannter Aspekte der Mathematik, die Schülerinnen und Schüler erkennen sollen, bedient werden: Es sind dies einerseits ein *pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt (Aspekt 1)* und andererseits ein *erkenntnistheoretischer Aspekt (Aspekt 2)*. (Die spezifische Ausdifferenzierung der beiden Aspekte im vorliegenden Beitrag unterscheidet sich zum Teil von derjenigen im genannten Lehrplan.)

Dadurch kann sodann sowohl der geforderten Beschäftigung mit den Grundrelationen genüge getan werden (Aspekt 1 stellt die Rolle von Mathematik in Welt und Gesellschaft ins Zentrum, Aspekt 2 den Erkenntnissuchenden Menschen) als auch ein ‚alters-angemessener' Abschluss und Ausblick in Bezug auf Schulmathematik gefunden werden. Dienlich ist dabei eine begriffliche Entwicklung in der Behandlung des Integrals – ausgehend von der (zumeist vorhandenen) (Grund-)Vorstellung des *Integrals als Flächenbilanz* (Aspekt 1), hin zu allgemeineren Überlegungen zum *Integral als theoretische Erweiterung des ‚Messens'* (Aspekt 2).

*These:* Leitend für die schulische Beschäftigung mit dem Integral im Sinne der genannten Desiderata können ein *pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt* (Integral als *Flächenbilanz*) auf der einen Seite und ein *erkenntnistheoretischer Aspekt* (Integral als theoretische Erweiterung des *Messens*) auf der anderen Seite sein.

## 3. Entwürfe: Pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt

In vielen Anwendungen spielt die Visualisierung des verwendeten mathematischen Modells in Form der Darstellung von Funktionsgraphen eine wesentliche Rolle, insbesondere hinsichtlich des Verständnisses der Bedeutung des gewählten Modells im gegebenen Kontext. In der Schulmathematik spielt daher die Beschäftigung mit Funktionsgraphen in Anwendungszusammenhängen zurecht eine wichtige Rolle. Im Rahmen des pragmatisch-anwendungsorientierten Aspekts in der Beschäftigung mit dem Integral-Begriff wird die Auseinandersetzung mit der Analyse von Funktionsgraphen dahingehend weitergeführt, dass nun auch Flächen ‚unter' Funktionsgraphen betrachtet werden, denen in vielen Anwendungskontexten eine Bedeutung zugeschrieben werden kann. Dies bedeutet einen vorstellungsorientierten Zugang zum *Integral als Flächenbilanz*. Als mögliche Kontexte können dabei etwa die folgenden dienen:

- *Beschreibung von Bewegungen:* In einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm beschreibt die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeits-Funktion den zurückgelegten Weg.
- *Darstellung von Steuertarifen:* Die Fläche unter der Funktion des Grenzsteuersatzes in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen beschreibt die insgesamt zu zahlende Steuer.
- *Gini-Index:* Die Fläche zwischen erster Mediane und Lorenzkurve (ordnet jedem Anteil der Bevölkerung, geordnet nach steigendem Einkommen, den Einkommensanteil dieser Bevölkerungsgruppe am Gesamteinkommen zu) ist ein Maß für die wirtschaftliche Ungleichheit in einem Land.
- *Konsumentenrente:* Die Konsumentenrente (Differenz zwischen den kumulierten individuellen Wertschätzungen eines Gutes und dem sich am Markt einstellenden Gleichgewichtsumsatz) ist als Fläche im Preis-Menge-Diagramm veranschaulichbar.

In Bezug auf die genannten Anwendungskontexte bieten sich einerseits rückblickend-abschließende und andererseits ausblickende Reflexionsanlässe in Bezug auf (Schul-)Mathematik, etwa betreffend

- die Zuordnung von Zahlen (Rückblick),
- die Interpretation von Produkten bzw. Flächeninhalten (Rückblick),
- die Verwendung von grafischen Darstellungen (Rückblick),
- die funktionale Beschreibung eines Zusammenhangs (Rückblick),
- die Darstellung von Größen durch Längen (Rückblick),
- die Interpretation von Funktionsgraphen (Rückblick, *NEU: Fläche*),
- *die funktionale Beschreibung der Flächenbilanz (NEU)*,

  *wobei die Flächenbilanz ihrerseits eine Größe repräsentieren kann, die eigentlich relevant ist (kumulierte Größe) (NEU)*.

## 4. Entwürfe: Erkenntnistheoretischer Aspekt

Die in Anwendungskontexten als zentral beschriebene Interpretation des Integrals als Flächenbilanz kann als Grundlage für eine weiterführende, reflektierte Betrachtung des *Integrals als theoretische Erweiterung des Messens* dienen. Als Einstieg bietet sich auch hier zunächst eine rückblickend-abschließende Reflexion in Bezug auf (Schul-)Mathematik an. Fragen, mit denen man sich hierbei beschäftigt, lauten etwa:

- Wo beschäftigten wir uns im Mathematikunterricht mit Flächenberechnungen? In welchen Schulstufen? Bei welchen Inhalten?
- Wofür standen die Flächen jeweils?
- Finden Sie Beispiele, wo die Fläche für etwas anderes stand – also nicht die Maßzahl der Fläche an sich interessierte, sondern etwas anderes!
  [Man denke etwa an: Rechtecksinhalt als Metapher für die Multiplikation, Kreisdiagramm, Histogramm, Wahrscheinlichkeit als Fläche unter der Dichtefunktion, Flächeninhalt eines Parallelogramms als Länge des Kreuzprodukt-Vektors.]

Im Rahmen der schulischen Behandlung des Integral-Begriffs kommen dann neue Aspekte hinzu, die in den Fokus der Betrachtungen gerückt werden können, wie etwa

- die funktionale Beschreibung des Flächeninhalts,
- die Definition des Flächeninhalts unter integrierbaren Funktionen (im Unterschied zur ‚naiven' Sicht der Pre-Existenz des Inhalts),
- die Exaktifizierung der Flächenberechnung mittels Grenzwertüberlegungen (zuvor anschauliche Überlegungen, etwa beim Kreis), und damit
- der Rückblick auf die schrittweise Erweiterung in der Betrachtung (Interpretation) von Funktionsgraphen.

Die Betrachtung des Integrals als theoretische Erweiterung des Messens ermöglicht sodann auch Ausblicke auf höhere Mathematik (Maßtheorie) sowie Einblicke in Geschichte und Philosophie der Mathematik.

## Literatur

Fischer, R. & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik.* München – Wien: Profil.

Köhler, H. (2006). Bildung – nicht Standardisierung. *Mathematica didactica* 29 (2), S. 3–23.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum.

Melanie PLATZ, Landau, Engelbert NIEHAUS

# To “E” or not to “E”? - That is the Question. Chancen & Grenzen eines E-Proof-Systems zur Förderung von Beweiskompetenzen

Vorgestellt werden erste Ergebnisse einer Voruntersuchung zur Herangehensweise an mathematische Beweise von Schülerinnen und Schülern (SuS) mit besonderen mathematischen Begabungen, die an der *Schüleruniversität* der *Universität Koblenz-Landau, Campus Landau*, teilnehmen. Die Forschungfrage ist: *Welchen Beitrag leistet ein E-Proof-System für das Verständnis von Beweisstrukturen?* Die Ergebnisse werden verwendet, um Schlussfolgerungen für die weitere Konzeption für die Beweisunterstützung in der *Schüleruniversität* zu ziehen.

## 1. Einleitung

Um zwischen gegebenen Voraussetzungen und der Behauptung eine logisch korrekte Beweissequenz zu erzeugen (Interpolationsbeweise), benötigen SuS i.d.R. weitere fachmathematische Lernvoraussetzungen und eine erweiterte Kenntnis der mathematischen Formelsprache. Einige Lernvoraussetzungen, die weit über das jeweilige Jahrgangsstufenniveau hinausführen, können sehr schnell von den SuS erworben werden, andere Lernvoraussetzungen für das Beweisen bedürfen einem hohen Arbeitsaufwand. Zielsetzung ist es, die von den SuS leicht ausgleichbaren Lernvoraussetzungen von den nur schwer ausgleichbaren zu trennen und die Wirkung von interaktiven Unterstützungen beim eigenständigen Explorieren von Beweiswegen zu untersuchen. Das Untersuchungsdesign bezieht sich dabei auf Experimental- und Kontrollgruppen, denen bestimmte Unterstützungsoptionen in einem webbasierten E-Proof-System angeboten bzw. nicht angeboten werden. Gemessen wird dann die Fähigkeit, einen neuen unbekannten Beweis zu führen. Dabei gehen wir der Frage nach, welchen Beitrag ein E-Proof-System für das Verständnis von Beweisstrukturen leistet. Die Ergebnisse werden verwendet, um Schlussfolgerungen für die weitere Konzeption für die Beweisunterstützung von SuS zu ziehen. Ziel der Verwendung eines E-Proof-Systems in diesem Kontext ist die Schrittweise Heranführung der Lernenden an einen selbst erstellten Beweis mit Stift und Papier (Paper&Pencil) ohne jegliche Hilfestellungen. Dabei ist das E-Proof System als Interpolationshilfe zwischen einem fertigen Beweis in einem Buch und dem selbst erstellten Paper&Pencil-Beweis anzusiedeln. In einem ersten Schritt kann der Beweis schrittweise am PC nachvollzogen werden (vgl. Alcock & Wilkinson, 2011), anschließend sollen Beweisfragmente geordnet werden (Beweispuzzle, vgl. Ensley & Crawley, 2006) und

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

schließlich können falsche Beweisfragmente hinzugefügt werden, die durch die Diagnose von typischen Fehlern bei den Studierenden ermittelt werden (vgl. u.a. Winter, 2011). Auf diesem Weg werden die Freiheitsgrade erhöht, aber auch der Korrekturaufwand. Ziel ist es, durch das E-Proof-System den Korrekturaufwand bei möglichst hohen Freiheitsgraden möglichst gering zu halten.

## 2. Explorative Vorstudie

Eine explorative Vorstudie wurde mit 6 Teinehmer/-innen der *Schüleruniversität* und 14 Lehramtsstudent/-innen des Faches Mathematik der *Universität Koblenz-Landau* durchgeführt. Die *Schüleruni* des *Campus Landau*, ermöglicht es begabten SuS bereits während der Schulzeit ein Frühstudium aufzunehmen. Die SuS nehmen dabei an regulären Lehrveranstaltungen an der Universität teil und können Leistungsnachweise erwerben und Prüfungen ablegen. Im *mathematischen Umweltlabor* arbeiten SuS geimeinsam mit Student/-innen aus den Umweltwissenschaften und Studierenden für das Lehramt Mathematik an projektorientierten Fragestellungen. In diesem Semester besuchten die (Früh-)Studierenden die Veranstaltung *Grundlagen der Funktionentheorie.* Im Rahmen der Vorstudie sollten die Probanden drei Sätze beweisen, welche folgendermaßen eingestuft werden können: Satz 1: Bekannt & Leicht (*mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/Satz-1.png*), Satz 2: Unbekannt & Leicht (*mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/Satz-2.png*), Satz 3: Unbekannt & Schwer (*http://mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/Satz-3.png*). Alle drei Sätze wurden zum Beweisen mit Hilfestellungen (mH) und ohne Hilfestellungen (oH) im E-Poof-System *IMathAS* bereitgestellt, Satz 1 konnte zudem mit Paper&Pencil (PP) bearbeitet werden, da sich ein bekannter und leichter Beweis dafür am besten eignete. (Satz 1 mH: *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/IMathAS-Satz1-mH.html*; Satz 1 oH: *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/IMathAS-Satz1-oH.html*; Satz 1 PP: *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/Satz1-PP.pdf*; Satz 2 mH: *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/IMathAS-Satz2-mH.html*; Satz 2 oH: *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/IMathAS-Satz2-oH.html*; Satz 3 mH: *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/IMathAS-Satz3-mH.html*; Satz 3 oH: *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/IMathAS-Satz3-oH.html*). *IMathAS* ist ein webbasiertes *Internet Mathematics Assessment System* (freie Software), das in einem Webbrowser genutzt werden kann. Eine Punkteübersicht (Gradebook) fasst die automatische Bewertung des Beweises und die manuelle Bewertung von Teilleistungen für einen mathematischen Test zusammen. *IMathAS* erlaubt die akurate Anzeige von mathematischen Ausdrücken und Graphen. Durch eine Randomizer-Funktion können individuelle Tests für

Lerner kreiert werden, wobei die Fragen strukturäquivalent sind. Somit können Ergebnisse nicht abgeschrieben werden, die Lerner müssen die Aufgaben selbst lösen. Der größte Vorteil für Lehrer/-innen bzw. Autoren bietet ein gemeinsames offenes Repository mit Fragen und Aufgaben, zu dem jeder Autor, der auf den gleichen Server zugreift, beitragen und auf das jeder Autor zugreifen kann und die Aufgaben modifizieren und verwenden kann, (vgl. Platz et al., 2014). Die Testgruppe wurde zunächst zufällig in die Gruppen mit Hilfestellungen und ohne Hilfestellungen eingeteilt, d.h. jede Gruppe bestand aus 3 SuS und 7 Student/-innen. Anschließend wurde jeweils ein Proband der Gruppen in die Paper&Pencil-Gruppe für Satz 1 eingeteilt, die Paper&Pencil-Gruppe sollte also aus 4 Probanden bestehen. Jedoch wechselten 3 dieser 4 Probanden während der Studie in die *IMathAS*-Gruppe. Ursache dafür ist vermutlich zum einen die Neugierde, die das E-Proof-System weckt, zum anderen die Tasache, dass eine E-Klausur mit diesem System geschrieben werden soll und die Probanden es deshalb bevorzugten den Umgang mit dem System zu trainieren, als mit Paper&Pencil zu arbeiten. Anschließend wurden die Probanden mit einem auf die Testgruppen zugeschnittenen Fragebogen befragt (siehe *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/E-Proofs-Befragung-PC-mh.pdf* & *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/E-Proofs-Befragung-PC-oh.pdf* & *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/E-Proof/E-Proofs-Befragung-PP.pdf*). Es wurde gefragt, ob der Beweis bekannt war, ob er gelungen ist und ob er schwer gefallen ist. Außerdem wurden Fragen zur Qualität der bereitgestellten Hilfestellungen gestellt und es konnten weitere Hilfestellungen von den Probanden vorgeschlagen werden. Bei der Auswertung der Ergebnisse konnte festgestellt werden, dass die Bearbeitungszeit (ca. 80 Minuten) zu kurz gewählt war: Satz 3 wurde gar nicht und Satz 2 nur von sehr wenigen Probanden bearbeitet. Die SuS schnitten besser ab als die Student/-innen. Eine negative Selbsteinschätzung der SuS und der Student/-innen konnte festgestellt werden. Obwohl die Aufgaben mit Hilfestellungen etwas besser gelöst wurden, als diejenigen ohne Hilfestellungen, wurden die bereitgestellten Hilfestellungen von den Probanden als eher weniger hilfreich eingestuft, wobei an einigen Stellen die Hilfestellungen nicht richtig identifiziert wurden. Anscheinend wurden die Hilfestellungen teilweise auf Grund von technischen Schwierigkeiten und Bedienproblemen mit dem System gar nicht verfolgt.

## 3. Zusammenfassung und Ausblick

In das System *IMathAS* können E-Proofs, sowie Hilfestellungen, um Beweiskompetenzen bei Lernern zu fördern, implementiert werden. Aus der durchgeführten explorativen Vorstudie kann die Struktur für Hauptstudien abgeleitet werden. Im Folgenden sollen empirische Studien mit einer wesentlich größeren Testgruppe durchgeführt werden, um die Reliabilität der Ergebnisse zu erhöhen. Außerdem sollen die Hilfestellungen optimiert werden, dazu könnten aus dem Konzept „Lernen durch Lehren“ Hilfestellungen abgeleitet werden, welche in IMathAS implementiert werden können. Um Bedienprobleme zu verringern, solle das E-Proof-System und besonders die Benutzeroberfläche optimiert werden. An einer solchen Optimierung wird bereits gearbeitet. Darüber hinaus sollte das System stärker genutzt werden, damit die (Früh-)Studierenden besser mit dem System umzugehen lernen. Die Forschungsfrage, welchen Beitrag ein E-Proof-System für das Verständnis von Beweisstrukturen liefert, muss zunächst unbeantwortet bleiben, soll aber durch zukünftige empirische Studien beantwortet werden. Notwendig dafür ist ein Messinstrument, welches technische Probleme der Probanden von inhaltlichen trennt. Allerdings können bereits Schlussfolgerungen für die weitere Konzeption der Beweisunterstützung in der Schüleruni gezogen werden: Da SuS häufig Schwierigkeiten mit der mathematischen Formelsprache haben, kann die Verwendung von I-MathAS die SuS dadurch unterstützen, dass die Beweisfragmente bereits in Formelsprache im System vorgegeben sind. Zudem wird durch die Verwendung von IMathAS die Lernzeit gesteigert und der Lernstand der SuS kann durch die Lehrperson überwacht werden. Darüber hinaus könnte die direkte Rückmeldung des Systems an die Lerner der negativen Selbsteinschätzung der SuS entgegenwirken. Abschließend soll auf die Frage „To E or not to E?“ eingegangen werden: Da das E-Proof System zwischen einem fertigen Beweis in einem Buch und dem Paper&Pencil-Beweis als Interpolationshilfe anzusiedeln ist, bieten E-Proofs eine gute Möglichkeit zur Unterstützung des Erwerbs von Beweiskompetenzen.

## Literatur


Alcock, L. & Wilkinson, N. (2011). E-Proofs : Design of a Resource to Support Proof Comprehension in Mathematics. Educational Designer, Vol.1 (No.4). ISSN 1759-1325.

Ensley, D. E., & Crawley, J. W. (2006). Discrete mathematics: mathematical reasoning and proof with puzzles, patterns, and games. Wiley.

Platz, M., Niehaus, E., Dahn, I. & Dreyer U. (2014). IMathAS & automated Assessment of mathematical Proof. Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, pp. 915-919.

Winter, K. (2011). Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse. Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. WTM-Verlag. Münster.

Melanie PLATZ, Landau, Miriam KRIEGER, Münster, Kathrin WINTER, Münster, Engelbert NIEHAUS, Landau, Ingo DAHN, Koblenz

# Beweisen lernen durch lehren? - Chancen und Grenzen dieses Konzeptes

Die Unterrichtsmethode „*Lernen durch Lehren*" (LdL) beruht auf der Annahme, dass Schülerinnen und Schüler (SuS) und Studierende lernen, indem sie sich fachliche Inhalte gegenseitig vermitteln. Dieses Konzept soll auf das mathematische Beweisen innerhalb eines E-Proof-Systems übertragen werden. Es ergibt sich folgende wissenschaftliche Fragestellung: *Führt die Einnahme der Lehrendenrolle zu einem besseren Verständnis von Beweiskonzepten und der Fähigkeit, logische Schritte strukturiert(er) aufzubauen und zu begründen?*

## 1. Einleitung

Im Rahmen der handlungsorientierten, konstruktivistischen Unterrichtsmethode *LdL* erläutern die Lehrenden den Lernern, wie sie beim Beweisen vorgehen und begründen, warum sie ein bestimmtes Vorgehen gewählt haben. Die Einnahme von Lehrendenrollen im Kontext von mathematischen Beweisen bietet eine diagnostische Funktion, da u. a. die verwendeten Erklärungsmuster erfasst und analysiert werden können. Dabei kann bestimmt werden, welche Erklärungsfragmente für eine Erklärung herangezogen bzw. nicht herangezogen werden und es kann bewertet werden, welche Erklärungsfragmente den Lernerfolg unterstützen.

Die Untersuchungen hierzu sind eingebettet in die Entwicklung eines E-Proof-Systems zur Unterstützung beim Beweisen lernen – einem Kooperationsprojekt von Wissenschaftler(inne)n der Universitäten Koblenz-Landau und Münster.

Ein Ziel dieses E-Proof-Systems ist die schrittweise Heranführung von Studierenden an einen selbst erstellten Beweis mit Stift und Papier (Paper&Pencil) ohne jegliche Hilfestellungen. Dabei ist das E-Proof-System als Interpolationshilfe zwischen einem fertigen Beweis in einem Buch und dem selbst erstellten Paper&Pencil-Beweis anzusiedeln. In einem ersten Schritt kann der Beweis schrittweise am PC nachvollzogen werden (vgl. Alcock & Wilkinson, 2011) und zur Übung anschließend können in einem Beweispuzzle (vgl. Ensley & Crawley, 2006) Beweisfragmente geordnet werden. Innerhalb der gegebenen Puzzleteile sind sowohl korrekte als auch typische fehlerhafte Beweisfragmente mit diagnostischem Potential enthalten (vgl. u. a. Winter, 2011). Auf diesem Weg werden die Freiheitsgrade erhöht, aber auch der Korrekturaufwand. Ein weiteres Ziel des E-Proof-Systems besteht darin, den Korrekturaufwand bei möglichst hohen Freiheitsgraden möglichst gering zu halten.

In einem Fragebogen zum Mathematischen Beweisen lernen wurden persönliche Angaben, das Selbstkonzept und die Selbstwahrnehmung der Proband(inn)en, die

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Motivation und Heurismen beim Beweisen abgefragt (siehe *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Fragebogen.pdf*).

Befragt wurden zum einen 28 Studierende der Universität Münster, die ein Seminar zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie besuchten, in dem auch in jeder Seminarsitzung Beweise thematisiert und durch die Studierenden selbst vermittelt wurden. Zum anderen wurden sechs Teilnehmer/-innen der Schüleruni der Universität Koblenz-Landau befragt, die eine Veranstaltung zu den Grundlagen der Funktionentheorie besuchten.

Die Schüleruni ermöglicht es begabten SuS bereits während der Schulzeit ein Frühstudium aufzunehmen. Die SuS nehmen dabei an regulären Lehrveranstaltungen an der Universität teil, können Prüfungen ablegen und so Leistungsnachweise erwerben.

Durch die Befragung stellte sich heraus, dass vielen Proband(inn)en die Erfahrung mit und die Übung von Beweisen fehlt, weshalb ihnen das Beweisen eher schwer fällt. Außerdem wurde kritisiert, dass Beweise nur selten bis nie in der Schule thematisiert werden. Durch die Verwendung des E-Proof-Systems soll ein selbstgesteuertes Lernen durch direkte Rückmeldungen des Systems an den Lernenden ermöglicht werden. Dadurch können verschiedene Beweise geübt werden, Lernende mehr Erfahrungen mit Beweisen sammeln und dadurch ihre Beweiskompetenzen erwerben. Um das Lernen dabei optimal unterstützen zu können, sollen auf die individuellen Kompetenzen der lernenden Person adaptierte Hilfestellungen zur Verfügung gestellt werden. Solche Hilfestellungen werden im Rahmen von Studien mit (Früh-)Studierenden identifiziert und entwickelt.

## 2. Explorative Vorstudie

Im Rahmen der explorativen Vorstudie an der Schüleruni wurde ein Satz aus der Funktionentheorie ausgewählt

(siehe *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Satz.png*).

Für den relativ kurzen Beweis musste eine Parametertransformation durchgeführt werden. Dieser Satz wurde mitsamt Beweis in das E-Proof-System I-MathAS (vgl. Platz et al., 2014) implementiert

(siehe *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/IMathAS.html*),

sodass er von den teilnehmenden SuS im Vorfeld der Studie bearbeitet und geübt werden konnte. Im Vorfeld der Studie bekamen die SuS den Arbeitsauftrag, sich den oben genannten Beweis in IMathAS anzuschauen und zu versuchen, diesen zu verstehen. Die Testgruppe (n=6) wurde zunächst zufällig in Lehrende (n=3) und Lernende (n=3) eingeteilt, anschließend wurde jedem Lehrenden ein/e Lernende/r zugeteilt. In einem Vortest (siehe *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Vortest.pdf*) wurde abgefragt, ob der Beweis verstanden wurde und ob der Beweis im Vorfeld bearbeitet wurde. Außerdem wurde die Beweisidee abgefragt und der Beweis sollte durchgeführt werden. In der darauf folgenden Praxisphase sollten die Lehrenden den Lernenden den Beweis erklären. Dazu standen ihnen ein PC mit Internetverbindung mit vorgefertigten Hilfestellungen (Beweis in IMathAS & Beweispuzzle in GeoGebra zur besseren Visualisierung, siehe *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL/Hilfestellung.ggb*) zur Verfügung sowie die Möglichkeit, selbst Hilfestellungen zu suchen und zu erstellen.

Dem Lernenden stand nur der Lehrende als Quelle zur Verfügung. Im Nachtest wurde abgefragt, ob der Beweis verstanden wurde und wiederum sollte die Beweisidee erläutert werden und der Beweis sollte durchgeführt werden. Außerdem wurden einige Fragen im Nachtest auf die Gruppe der Lehrenden bzw. Lernenden zugeschnitten, die sich auf die Qualität der Erklärung des Lehrenden bezogen sowie auf die Qualität der Hilfsmittel, die vom Lehrenden verwendet wurden (siehe *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/ LdL/Nachtest-Lehrer.pdf*; *mathematik.uni-landau.de/download/Platz/LdL / Nachtest-Lerner.pdf*). Im Vorfeld wurde der Beweis leider nur wenig geübt, weshalb die erzielten Ergebnisse eher im mittleren Leistungsfeld lagen. Insgesamt konnte eine Leistungssteigerung im Nachtest festgestellt werden, wobei diese bei den Lehrenden höher war. Hauptprobleme beim Durchführen des Beweises lagen in der Formelschreibweise und darin, dass Bezüge und Begründungen häufig weggelassen wurden. Veranschaulichungen und das Herausstellen der Beweisidee wurden bei der Erklärung als sehr hilfreich eingestuft.

Eine Studierendenbefragung an der Universität Münster ergab insbesondere, dass die Studierenden durch das eigene Einarbeiten in einen mathematischen Beweis mit dem Ziel, diesen methodisch so aufzubereiten, dass sie ihn im Rahmen der Lehrveranstaltung vermitteln und auf Nachfragen reagieren konnten, das eigene Beweisverständnis deutlich erleichtert hat. Der Meinung von knapp 85 % der Befragten dürften sich dadurch ihre Beweiskompetenzen verbessert haben, da ihnen das heuristische Vorgehen beim Beweisen an sich deutlicher geworden sei.

## 3. Zusammenfassung und Ausblick

In das System IMathAS können E-Proofs sowie Hilfestellungen implementiert werden, um Beweiskompetenzen zu fördern. Im Folgenden sollen empirische Studien mit wesentlich größeren Testgruppen durchgeführt werden, um die Reliabilität der Ergebnisse zu erhöhen. Dafür muss ein passendes Beobachtungswerkzeug entwickelt werden, welches die Authentizität der Situation nicht verletzt. Außerdem muss besonders darauf geachtet werden, dass kein unkontrollierter Tausch der Lernenden-/Lehrendenrolle während der Praxisphase stattfindet. Das ist für die Reliabilität der Ergebnisse von großer Bedeutung. Für spätere Praxisphasen-Durchgänge können die Lernenden-/ Lehrendenrollen dann ggf. neu eingeteilt werden. Die Rollenzuteilung sollte basierend auf der Leistung in einem Vortest gleichverteilt stattfinden, statt zufällig. Abgeleitet aus den Ergebnissen dieser empirischen Studien sollen Hilfestellungen zur Beweisunterstützung identifiziert und optimiert werden.

Das IMathAS begleitete LdL kann dadurch umgesetzt werden, dass Hilfsmittel, die Personen in der Lehrendenrolle für den Erklärungspfad verwenden, erfasst werden (z. B. durch Monitoring des Mauszeigers und der Klicks auf dem Computerbildschirm) und in eine Vorschlagslogik von weiteren Erkläroptionen einbezogen werden. Zurzeit kann die gesamte Historie noch nicht automatisiert in die Vorschlagslogik integriert werden. Die Nutzung der Erklärpfade müsste von den IMathAS-Autoren manuell als Datensatz in eine Datenbank kopiert werden. Jede Ergänzung dieser Datenbank verändert die semantischen Bezüge zwischen Erklär- und Beweiselementen, die von den (Früh-)Studierenden hergestellt wurden. Eine Optimierung und Automatisierung der diagnostischen Funktionen könnte durch IMathAS-Entwickler in Zukunft ermöglicht werden.

Die Forschungsfrage, inwiefern das Einnehmen der Lehrerrolle im Kontext von Beweisen hilft und auf welchem Abstraktionsniveau die Lerner starten sollen, muss zunächst unbeantwortet bleiben, soll aber durch zukünftige empirische Studien beantwortet werden. Allerdings können die folgenden Schlussfolgerungen für die weitere Konzeption der Beweisunterstützung in der Schüleruni gezogen werden: Das Konzept LdL sollte mit den Teilnehmenden der Schüleruni häufiger durchgeführt werden, um auf die SuS zugeschnittene Hilfestellungen bestimmen zu können und die individuelle lerngruppenbezogene Diagnose und die Integration von Fehlertypen in die Beweisformulierung zu ermöglichen. Außerdem sollte die mathematische Formelschreibweise trainiert werden und die Bedeutung von Bezügen und Begründungen in Beweisen sollte erläutert werden.

## Literatur

Alcock, L. & Wilkinson, N. (2011). E-Proofs : Design of a Resource to Support Proof Comprehension in Mathematics. Educational Designer, Vol.1 (No.4). ISSN 1759-1325.

Ensley, D. E., & Crawley, J. W. (2006). Discrete mathematics: mathematical reasoning and proof with puzzles, patterns, and games. Wiley.

Platz, M., Niehaus, E., Dahn, I. & Dreyer U. (2014). IMathAS & automated Assessment of mathematical Proof. Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, pp. 915-919.

Winter, K. (2011). Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse. Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. WTM-Verlag. Münster.

Cornelia PLUNGER, Edith SCHNEIDER, Klagenfurt

# Untersuchungen zur Wirksamkeit einer zweijährigen Lehrer(innen)fortbildung

Das Lehrer(innen)fortbildungsprogramm „Pädagogik und Fachdidaktik für Lehrer(innen) – Mathematik (PFL-M)“ hat eine mehr als 30-jährige Tradition. Kenntnisse über dessen Akzeptanz und Wirksamkeit sind dabei – nicht zuletzt als Denkanstöße für die Weiterentwicklung des Programms – von besonderem Interesse. Im Beitrag werden Struktur und Aufbau von PFL-M, die eingesetzten Evaluationsinstrumente sowie einige ausgewählte Untersuchungsergebnisse vorgestellt.

## PFL-Mathematik: Struktur und Aufbau

PFL-M ist ein viersemestriger Universitätslehrgang für Mathematiklehrer(innen) aller Schultypen ab der fünften Schulstufe. Dieser Lehrgang wird seit 1982 angeboten, seit 2000 wird das Lehrgangsteam im Wesentlichen vom Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Klagenfurt gestellt, erweitert um eine Lehrperson aus der Praxis. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf den zuletzt angebotenen Lehrgang (2012-14). Der Lehrgang 2012-14 setzt sich aus vier Seminaren und fünf Arbeitsgruppentreffen (32 ECTS) sowie aus drei Praktika und drei Praktikumsarbeiten (8 ECTS) zusammen. In den Seminaren wechseln Inputs mit Phasen selbständigen Arbeitens; die Arbeitsgruppentreffen fokussieren auf Diskussion und kollegiale Beratung (durch Teilnehmer(innen) (TN) und Lehrgangsteam) der Arbeiten in den Praktika. Die Praktikumsarbeiten haben einen engen Bezug zur unterrichtlichen Praxis der TN. Die inhaltlichen Schwerpunkte der einzelnen Lehrgänge sind unterschiedlich. Im Lehrgang 2012-14 liegt der Schwerpunkt auf Themen, die in Österreich derzeit hohe Aktualität haben: Bildungsstandards Mathematik für die 8. Schulstufe („Standards M8“) und Zentralmatura Mathematik.

## Evaluation(sinstrumente) des Lehrgangs

Zur Evaluation des Lehrgangs 2012-14 werden zum einen Instrumente verwendet, die auch in vorhergehenden Lehrgängen Anwendung fanden: Zu jeder einzelnen Veranstaltung (Seminar oder Arbeitsgruppentreffen) werden am Ende mittels einer kommentierten Punktabfrage Feedbacks zu den beiden Dimensionen Emotion („gefallen“) und Kognition („profitiert“) eingeholt. Der gesamte Lehrgang wird am Ende mittels „Profilkurve“ (Bewertung der Lehrgangsinhalte auf einer fünfstufigen Skala hinsichtlich ihrer Wichtigkeit für die unterrichtliche Praxis) und „World-Café“ (Gruppen- und Einzelkommentare zu zentralen Inhalten des Lehrgangs) evaluiert.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Zum anderen werden noch weitere Daten erhoben: Am Beginn und am Ende des Lehrgangs werden den TN ein Fragebogen mit folgenden vier Situationen aus dem Schulalltag zur schriftlichen Bearbeitung vorgelegt:

> **Situation 1:** Auswahl einer Aufgabe für eine Schularbeit/Klassenarbeit aus vier vorgeschlagenen Aufgaben als Ergänzung zu drei vorgegebenen Aufgaben.
>
> **Situation 2:** Antwortschreiben an einen Schüler, der in einem Brief Zweifel hinsichtlich der Relevanz des Mathematikunterrichts geäußert hat.
>
> **Situation 3:** Antwort auf eine skeptische Aussage einer Kollegin zu den Standards.
>
> **Situation 4:** Statement zur Relevanz des PFL-Lehrgangs als Argumentation der Schulleitung gegenüber, warum die Teilnahme am PFL-Lehrgang sinnvoll ist.

Am Ende des Lehrgangs werden die TN gebeten, vier offene Fragen zur Wirksamkeit des Lehrgangs schriftlich zu beantworten (Veränderung des Blickes auf den Mathematikunterricht, positiver Einfluss auf die eigene unterrichtliche Tätigkeit, Sicherheit in der mathematikdidaktischen Begrifflichkeit, Erfüllung der Erwartungen an den Lehrgang).

Darüber hinaus werden auf der letzten Veranstaltung von zwei Teilnehmerinnen Interviews mit einigen TN zur Bedeutung der Lehrgangsinhalte für die schulische Praxis geführt.

## Ausgewählte Untersuchungsergebnisse

Im Folgenden wird auf einige Ergebnisse von Situation 3 und von zwei der offenen Fragen näher eingegangen. (Für eine ausführlichere Beschreibung der Ergebnisse siehe Plunger & Schneider 2015).

*Situation 3 – Bedeutung der Standards für den Mathematikunterricht*

Da die Standards M8 einerseits durch ihre gesetzliche Implementierung von den Lehrkräften in Österreich nicht ausschließlich wohlwollend aufgenommen worden sind, sie andererseits aber ein zentrales Thema des Lehrgangs sind, zielt eine Situation des Fragebogens auf dieses Thema ab:

> **Situation 3:** Ihre Kollegin ist gegen die Standards M8. Sie meint, dass die Schülerinnen und Schüler durch die Standards auch nicht mehr können. Was antworten Sie ihr?

Das Augenmerk liegt dabei auf der Position der TN (für oder gegen Standards) und den damit verbundenen Argumentationen, sowie insbesondere auf etwaigen Änderungen zwischen Beginn und Ende des Lehrgangs.

Die Auswertung aller Statements zu dieser Situation zeigt insgesamt eine positive Entwicklung, die angesichts der intensiven Beschäftigung mit den Standards M8 durchaus zu erwarten ist: Kritische Äußerungen gegenüber den Standards gibt es bereits zu Beginn des Lehrgangs kaum, was überraschend ist. Am Ende des Lehrgangs sind die positiven Argumente jedoch deutlicher und massiver. Die Argumentationslinien der verschiedenen TN zeigen am Beginn des Lehrgangs wenig Übereinstimmung, bei der abschließenden Befragung spielt die Ausgewogenheit über die Handlungsbereiche in der Argumentation eine zentrale Rolle. Die Argumentation besteht anfangs häufig aus Allgemeinplätzen ohne weitere Erläuterung, am Ende des Lehrgangs werden konkretere Belege mit zumindest knappen Begründungen angeführt. Vokabular und Ideen aus dem Standards-Konzept finden in der ersten Befragung kaum Verwendung, zT sind auch unangemessene Vorstellungen erkennbar. In der zweiten Befragung werden Kenntnisse des Standards-Konzept klar evident. Es gibt vereinzelt auch Äußerungen von TN, an denen solche Entwicklungen nicht feststellbar sind.

*Offene Frage: Hat der PFL-Lehrgang Ihren Blick auf MU verändert?*

Diese Frage hat, wie alle offenen Fragen den Zusatz „Wenn ja, in welcher Hinsicht? Wenn nein, bitte kurze Erläuterung Ihrer Einschätzung!"

Die Frage wird von 16 der 22 TN mit *Ja* beantwortet. Zwei Lehrkräfte sprechen von einer *Schärfung des Blickes*, eine Person schreibt *teilweise* und drei TN führen Aspekte für *Ja* und *Nein* an. Die angeführten Begründungen sind häufig knapp, selten ausführlich, lassen aber in allen Fällen recht klar entnehmen, in welchen Bereichen die Veränderung gesehen wird. (Dies gilt für alle offenen Fragen.)

Ca. die Hälfte der TN nennt Aspekte, die in engem Zusammenhang mit dem Standards-Konzept stehen. Eine charakteristische Antwort dazu: „*Ja, weg vom reinen ‚Rechnen' hin zur Öffnung; die Mathematik auch in anderen Handlungs- und Komplexitätsbereichen zu sehen.*" Bildungstheoretische Konzepte als Argumentationen für den Mathematikunterricht oder die Auswahl von mathematischen Inhalten bzw. Aufgaben werden von ca. einem Drittel angeführt. Die bildungstheoretischen Konzepte haben stark polarisiert, es gibt dazu hier wie bei den anderen eingesetzten Evaluationsinstrumenten immer wieder TN, die angeben, keinen Nutzen daraus ziehen zu können (siehe dazu auch nachfolgende Frage). Vereinzelt werden zur Untermauerung der Ja-Antwort noch genannt: Achten auf präzisere Formulierungen, Hinterfragen des didaktischen Aufbaus, größere Sensibilität gegenüber Inhalten, größere Bedeutung verschiedener math. Gebiete (zB Statistik).

*Offene Frage: Glauben Sie, dass der PFL-Lehrgang einen positiven Einfluss auf Ihre unterrichtliche Tätigkeit hat?*

Alle 22 TN beantworten die Frage mit *Ja*, davon eine Person differenziert mit *Ja/Nein*. Ein Beispiel für eine Ja-Antwort: „*Eher weniger auf meine unterrichtl. Tätigkeit was Methode und Ablauf betrifft, sondern eher auf Planung und Auswahl der Beispiele, sowie der Aufgabenformulierung. In diesem Bereich habe ich so richtig Veränderungen vorgenommen.*“ [Hervorhebung im Original] Diese Aspekte sind charakteristisch für die Antworten auf diese Frage. Mehr als die Hälfte der TN sehen den Einfluss in der Planung (von Phasen) ihres Unterrichts, was sich in einer bewussteren Auswahl und Formulierung von Aufgaben oder Festlegung und Formulierung von Zielen auswirkt. Die anderen bei dieser Frage von mehr als der Hälfte der TN angeführten Aspekte betreffen die Konzepte von Standards M8 und Zentralmatura, aber auch Reflexion der unterrichtlichen Tätigkeit bzw. der unterrichtlichen Entscheidungen. Eine ablehnende Haltung gegenüber Bildungstheorien ist auch hier in einer Aussage (Ja/Nein-Aussage) erkennbar; es gibt aber auch TN, die angeben, dass diese Inhalte hilfreich sind.

Die bei den offenen Fragen genannten Aspekte betreffen durchgängig zentrale Inhalte des Lehrgangs bzw. Haltungen, deren Vermittlung ein zentrales Anliegen des Lehrgangs ist. Insgesamt sollte bei diesen Antworten aber bewusst bleiben, dass es sich stets um subjektive Sichtweisen der TN handelt.

## Fazit

Die Untersuchungsergebnisse geben in ihrer Gesamtheit deutliche Hinweise, dass die zentralen inhaltlichen Anliegen des Lehrgangs von einem großen Teil der TN auf- und angenommen werden, sodass sie – zumindest in Kommunikationssituationen – wirksam werden. An einigen Stellen wäre eine größere Tiefe wünschenswert. Die Vermittlung der Bedeutung bildungstheoretischer Konzepte für die unterrichtliche Tätigkeit konnte nicht in zufriedenstellendem Ausmaß erreicht werden. Verbesserungspotential gibt es bei den eingesetzten Evaluationsinstrumenten.

## Literatur

Plunger, C. & Schneider, E. (2015). *Wirksamkeit des Universitätslehrgangs „PFL-Mathematik“. Eine fachbezogene Begleituntersuchung.* Projektbericht, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

Jennifer POSTUPA, Erlangen-Nürnberg

# Mathematikschulbücher – mehr als nur fachliche Inhalte

Grundrechenarten, Prozentrechnung, direkte Proportionalität usw. sind die Inhalte die man in einem Schulbuch für den Mathematikunterricht erwartet. Der Blick in ein beliebiges Schulbuch zeigt jedoch, dass mehr als nur fachliches, innermathematisches Wissen transportiert wird. So wird etwa innerhalb von Sachaufgaben Wissen über unterschiedliche Sachkontexte vermittelt oder es soll durch die Art der Aufgabenstellung eine bestimmte Haltung, bspw. zum Umgang mit Geld, erzeugt werden. Solche Aspekte in Schulbüchern, die nicht in direktem Zusammenhang mit einem bestimmten innermathematischen Inhalt stehen, werden im Folgenden als außermathematisch bezeichnet. Im Fokus des Dissertationsprojekts der Autorin steht die Veränderung solcher außermathematischen Aspekte in den vergangenen 70 Jahren. Mit einem eigens entwickelten Analyseinstrument sollen solche Aspekte messbar gemacht werden, um Aussagen zu deren Häufigkeit sowie zur Stärke der Veränderung treffen zu können. Im Folgenden wird die Funktionsweise des Analyseinstruments knapp angedeutet (für genauere Informationen vgl. Postupa 2014) und mögliche Fragestellungen sowie erste Trends vorgestellt.

## Das Analyseinstrument

Für die in den Schulbüchern enthaltenen Schulbuchelemente (unterschieden werden - in Anlehnung an Valverde 2002 - Abbildungen, Erklärungen und Aufgaben) werden verschiedene Merkmale, wie etwa der Sachkontext, die Gegenwarts- bzw. Zukunftsbedeutung oder die Offenheit der Aufgaben, erfasst. Dadurch erhält man für jedes Schulbuchelement eine Art Strichcode, mit rund 200 Einträgen. Durch Auszählen einzelner Merkmale oder Merkmalskombinationen über alle Elemente eines Schulbuchs oder einer Epoche erhält man Häufigkeitsverteilungen, die einen Vergleich der Lehrwerke untereinander oder der Schulbücher verschiedener Erscheinungszeitpunkte ermöglichen. Zusätzlich werden Aussagen zur Gewichtung von Merkmalen innerhalb eines Buches oder einer Epoche möglich, also bspw. aus welchen Lebensbereichen die eingesetzten Sachkontexte stammen.

## Datenbasis

Bisher liegen rund 13.000 Datensätze mit jeweils ca. 200 Merkmalsausprägungen vor. Diese stammen von zehn ausgewerteten bayerischen Hauptschulbüchern von 1940 bis 2009. Um eine möglichst hohe Vergleichbarkeit zu erzielen, wurden nur Schulbücher für die 7. Jahrgangsstufe berücksichtigt. Die Auswertung der Daten erfolgt für einen ersten Zugang nur in Hin-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

blick auf die unterschiedlichen Epochen. Dabei werden folgende Zeitabschnitte unterschieden: NS-Zeit (1933-1945), Nachkriegszeit (1945-1950), Wirtschaftswunder (1950-1970), neue Mathematik (1970-1980), Wiedervereinigung (1980-2000) und aktuelle Lehrwerke (ab 2000).

### Mögliche Fragestellungen

Am deutlichsten sind außermathematische Inhalte in Mathematikschulbüchern in den ***Sachkontexten* erkennbar**. Im Rahmen von zumeist Textaufgaben wird z.B. Wissen zu Steuern, Geographie oder Technik vermittelt. Es werden Fragen zu gesunder Ernährung, zum verantwortungsbewussten Umgang mit Geld oder zu statistischen Daten der Region oder des Landes gestellt und mit (meist) mathematischen Mitteln von den Lernenden beantwortet. Für konkrete Beispiele solcher Sachkontexte reicht der Blick in ein beliebiges Mathematikschulbuch. Spannend ist allerdings die Frage welche Sachkontexte tatsächlich Eingang in Mathematikschulbücher finden, inwiefern sich diese im Lauf der Jahrzehnte deutscher Schulgeschichte verändern und welche Themen immer wieder bzw. nur in bestimmten Zeiten auftreten, also typisch für eine Epoche sind. Dabei soll nicht beim Auffinden qualitativer Einzelfälle stehengeblieben werden, sondern auf Basis einer numerischen Erfassung Auftretenshäufigkeiten angegeben werden, bspw. zum Anteil politischer Aufgaben in der NS-Zeit.

Höchst unterschiedlich sind auch die ***Intentionen*** hinter den verwendeten Sachkontexten. Neben dem traditionellen Ziel, der Vorbereitung auf das spätere Berufsleben, finden sich auch Aufgaben, die Situationen aus dem Alltag der Lernenden aufgreifen und zur Lebensbewältigung beitragen sollen. Dabei kann die Vermittlung von Faktenwissen im Vordergrund stehen, das heißt die Daten werden in neutraler, sachlicher Weise präsentiert. Durch Vergleiche, den Bezug der Daten auf die eigene Person oder Aufforderungen zur Interpretation der Daten unter einer bestimmten Perspektive werden aber ggf. nicht nur Fakten vermittelt, sondern Wertungen und Meinungen nahegelegt bzw. vorgegeben (vgl. Beispiel 1).

> „Bei Schulden auf dem Girokonto muss man oft 10% Schuldzinsen pro Jahr bezahlen. … Ein Verbraucherkredit kostet nur halb so viel Zinsen, wie viel Euro sind das? Wieso macht es also Sinn, nicht das Girokonto zu überziehen?"

**Beispiel 1: Potenziell meinungsbildende Aufgabe (Barzel 2014, 84)**

Es handelt sich um potenziell meinungsbildende Aufgaben, in denen implizit oder explizit unterschiedliche Erziehungsziele verfolgt werden. Neben dem Umgang mit Geld geht es dabei bspw. um Umwelt- oder Gesundheitserziehung (vgl. Wiater 2013). Der Anteil solcher Aufgaben, ließe sich mit Hilfe des Analyseinstruments bestimmen.

Eng damit verbunden ist die Frage nach den Funktionen des Sachrechnens (vgl. Winter 1985), das heißt zu welchem Zweck die Sachkontexte eingesetzt werden und wie viel an Wissen über die Welt daraus entnommen werden soll. Dabei handelt es sich um eine eindeutig fachdidaktische Fragestellung, die über die reinen innermathematischen Inhalte, wie etwa Prozentrechnung, hinausgeht. Für weitere Beispiele zu außermathematischen Aspekten unter einem *fachdidaktischen* Blickwinkel denke man etwa an die Bildungsstandards. Diese sind zwar fachspezifisch formuliert, aber dennoch nur vor dem Hintergrund eines bestimmten Menschenbildes und bestimmter Anforderungen von außerhalb der Mathematik, z.B. zum lebenslangen Lernen, politisch gewollt und umsetzbar. So stellt sich in diesem Zusammenhang und in Hinblick auf die Entwicklung von Schulbüchern die Frage, ob aktuelle Forderungen, bspw. nach mehr offenen Aufgaben, beachtet werden und ob, im Vergleich zu vorhergehenden Lehrwerksausgaben, tatsächlich ein Anstieg bzw. eine Weiterentwicklung solcher Aufgaben erkennbar wird.

## Erste Trends

Einen zunächst sehr groben Überblick über die vorkommenden Sachkontexte gewinnt man, indem diese nur nach Lebensbereichen sortiert werden. Aufgaben die dem privaten Umfeld der Lernenden entstammen, wie bspw. zu Ernährungs- und Haushaltsfragen oder verschiedenen Freizeitaktivitäten, werden unterschieden von Aufgaben aus dem gewerblichen Wirtschaftsleben. Hierzu zählen etwa Aufgaben zu Produktionskosten oder Gewinnen und Verlusten. Der dritte Lebensbereich beinhaltet gesellschaftliche Aufgaben zu statistischen Angaben, wie etwa Bevölkerungszahlen, Steuereinnahmen oder durchschnittliche Lebenserhaltungskosten. Die Auswertung der vorliegenden Daten deutet hier einen Anstieg von Themen aus dem privaten Umfeld der Lernenden von ca. einem Drittel in der NS-Zeit hin zu über 60% in aktuellen Schulbüchern an.

Beispielhaft für die Entwicklung der *Intentionen* kann der Anteil potenziell meinungsbildender Aufgaben (von allen Aufgaben die Sachinformationen enthalten) analysiert werden.

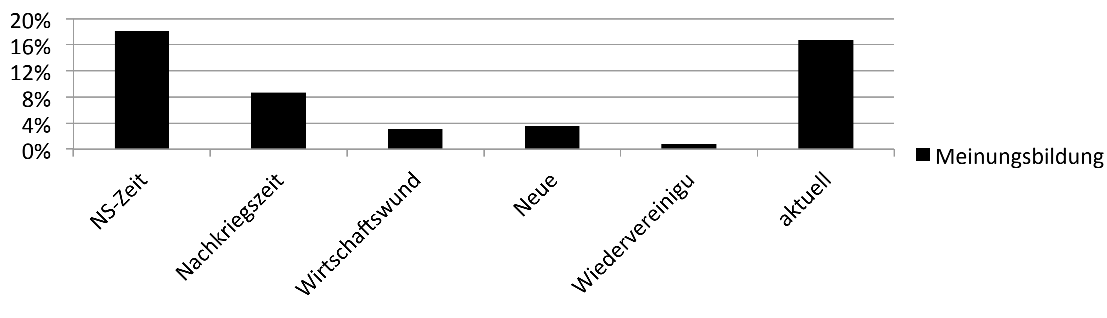



**Abbildung 1: Anteil potenziell meinungsbildender Aufgaben**

Die Vermutung, dass dieser in der NS-Zeit relativ hoch ist, liegt nahe. Überraschen mag dagegen der hohe Anteil meinungsbildender Aufgaben in aktuellen Schulbüchern. Hier könnten sich die Überprüfung an weiteren Schulbüchern, sowie die Analyse der angesprochenen Themen anschließen.

Für die Entwicklung einer *fachdidaktischen Fragestellung* soll exemplarisch aufgezeigt werden, welche Vermutungen die bisherigen Auswertungen in Bezug auf Aufgaben zum Beschreiben/Begründen (im Vergleich mit Aufgaben, bei denen eine kalkülhafte Bearbeitung ausreicht) nahelegen.

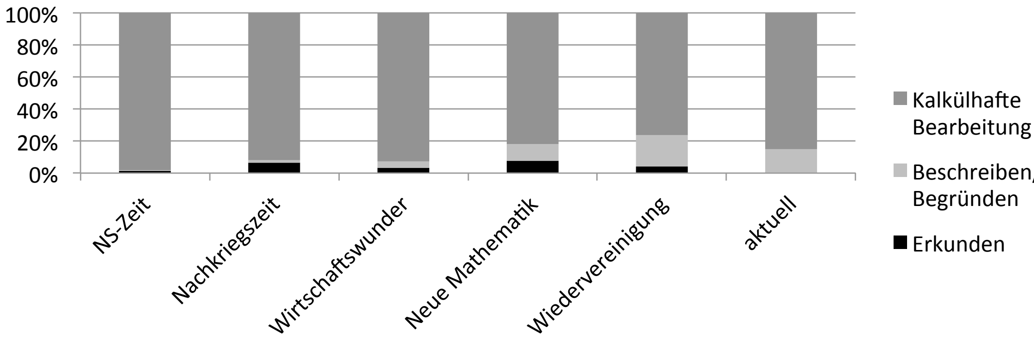



**Abbildung 2: Anforderungen in Aufgaben**

Auffällig sind hier der insgesamt hohe Anteil von Kalkülaufgaben sowie die numerisch belegbare Zunahme an Aufgaben zum Beschreiben/Begründen seit den 70er Jahren.

## Fazit

Außermathematische Aspekte, die in den eingesetzten Sachkontexten, der zugrundeliegenden (erzieherischen) Intention sowie fachdidaktischen Fragestellungen deutlich werden, unterliegen Veränderungen. Diese lassen sich mit dem dargestellten Analyseinstrument quantitativ erfassen und durch Angabe von absoluten und relativen Häufigkeiten beschreiben. Darüber hinaus können Entwicklungen solcher Aspekte numerisch nachverfolgt und subjektive Hypothesen überprüft werden.

## Literatur


Barzel, B. u.a. (2014). *Mathewerkstatt 7*. Berlin: Cornelsen.

Valverde, G. u.a. (2002). *According to the book*. London: Kluwer.

Postupa, J. (2014). Analyse von (historischen) Rechenbüchern unter außermathematischen Aspekten. In Roth, J. & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* – Band 2. Münster: WTM Verlag, 927-930.

Winter, H. (1985). *Sachrechen in der Grundschule*. Frankfurt: Cornelsen.

Wiater, W. (2013). *Erziehen und Bilden*. Donauwörth: Auer.

Susanne PREDIGER, Dortmund

# Sprachförderung im Mathematikunterricht - Ein Überblick zu vernetzten Entwicklungsforschungsstudien

Sprache muss auch im Mathematikunterricht gefördert werden, aber welche Sprachmittel genau? Und wie? Der Kurzbeitrag gibt einen Überblick über Entwicklungsforschungsstudien aus dem Dortmunder MuM-Projekt, in denen für unterschiedliche mathematische Themen spezifiziert wird, welche Sprachmittel tatsächlich benötigt werden und mit welchen sprach- und fachdidaktischen Designprinzipien diese erarbeitet werden können.

## 1. Ausgangspunkt: Hürden für sprachlich schwache Lernende in Prüfungs- und Lernprozessen verstehen und überwinden

Fragt man Lehrkräfte, bei welchen Tätigkeiten im Unterricht sprachlich schwache Schülerinnen und Schüler besondere Schwierigkeiten haben, so werden meist Lesen und Formulieren genannt. Auch empirische Studien fokussieren oft auf das Lesen in Prüfungssituationen und betonen etwa, dass die Leistungsunterschiede zwischen sprachlich Schwachen und Starken bei Textaufgaben besonders groß seien. Ein Test zu Prozentrechnung in Klasse 7 (Pöhler, Prediger, Weinert 2015) zeigt dagegen, dass bei gleichbleibenden mathematischen Anforderungen die Textaufgaben zu bekannten Aufgabentypen zwar von allen Lernenden schlechter gelöst werden als in entkleideten oder graphisch gestützten Aufgabenformaten. Doch sind die Leistungsunterschiede zwischen den Sprachgruppen für Textaufgaben nicht größer als für die anderen Aufgabenformate. Auch in den Zentralen Prüfungen der Klasse 10 erweisen sich (speziell für sprachlich Schwache) konzeptuelle und prozessuale Hürden als größere Herausforderung als reine Lesehürden (Prediger et al. i.V).

Diese Befunde verweisen darauf, dass Sprache neben einer kommmunikativen Funktion (Sprache als Mittel zum Austausch, z.B. Lesen, Schreiben, mündlich Formulieren) auch eine kognitive Funktion hat, also ein kognitives Werkzeug in Lern- und Denkprozessen bildet. Gerade in konzeptuell oder prozessual anspruchsvollen Prozessen können sich Einschränkungen in der Sprachkompetenz daher besonders bemerkbar machen (ebda.).

Um mögliche Wirkungsweisen der kognitiven Funktion von Sprache in den Lern- und Denkprozessen genauer zu untersuchen, sind daher Lernprozessstudien erforderlich. Dazu müssen die Lernprozesse, z.B. zum Aufbau von konzeptuellem Verständnis, zunächst durch ein geeignetes Design von Lern-Lernarrangements angeregt werden. Durch qualitative Analyse von Designexperimenten können die Hürden in Lernprozessen identifiziert und

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

darauf aufbauend fach- und sprachintegrierte Förderansätze zu ihrer Überwindung ausgearbeitet werden (Prediger 2013a, b).

## 2. Überblick zu vernetzten Teilprojekten

Ein solches sprach- und prozessbezogenes Forschungs- und Entwicklungsprogramm wird im Dortmunder MuM-Projekt (Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit) in mehreren Teilprojekten für unterschiedliche Teilbereiche verfolgt, die sich jeweils methodologisch in der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung verorten (Prediger 2013a). Dabei werden jeweils verschiedene Aspekte der kommunikativen und kognitiven Funktion von Sprache verknüpft, z.B.:

- Brüche verstehen - Vorstellungsentwicklung durch Darstellungsvernetzung, Scaffolding und forcierter Verbalisierung (Teilprojekt MuM-Brüche, Prediger 2013, Prediger & Wessel 2013, Wessel 2015)
- Terme interpretieren und aufstellen - Vorstellungsentwicklung und Lesestrategien durch konzeptuelles und strategisches Scaffolding (Teilprojekt MuM-Terme, Prediger & Krägeloh 2015, Krägeloh & Prediger 2015)
- Prozente verstehen und nutzen – durch konzeptuelles und lexikalisches Scaffolding (Teilprojekt MuM-Prozente, Prediger & Pöhler 2015)
- Fehler bei Prozenten schriftlich erklären – in durch vorstellungsbezogene Schreibarrangements mit Sprachgerüsten (Zwetzschler in diesen BzMU15)
- Funktionale Zusammenhänge verstehen und mathematisieren (MuM-Funktionen, Zindel in diesen BzMU15)

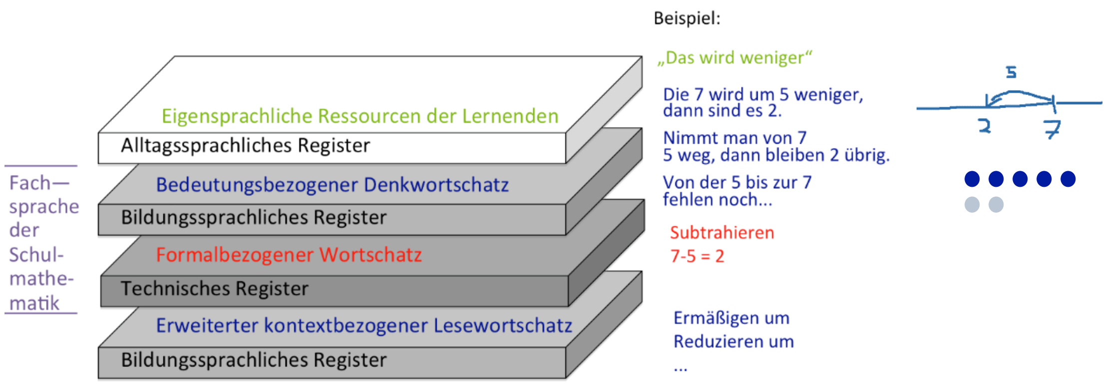
In zwei Mixed-Methods-Interventionsstudien werden darüber hinaus effektbezogene Wirksamkeit und prozessbezogene Wirkungen ausgewählter sprach- und fachintegrierter Designprinzipien genauer untersucht:

- einsprachige versus zweisprachige Förderung (BMBF-Projekt MuM-Multi, 2014-2017)
- ganzheitliche versus fokussierte Förderung (DFG-Projekt MESUT, 2014-2017; zum Unterschied vgl. Meyer & Prediger 2012)

Im nächsten Jahr werden daher auch empirisch belastbare Aussagen zur Lernwirksamkeit bestimmter Designprinzipien auf das fachliche und sprachliche Lernen zu erwarten sein. Sie bauen auf dem zuvor herausgearbeiteten Prinzip zur Strukturierung der sprachlichen Lerngegenstände auf:

## 3. Exemplarisches Ergebnis der Entwicklungsforschung: Strukturierungsprinzip für gestufte Sprachschatzarbeit

Bevor mit den Designprinzipien das WIE der fach- und sprachintegrierten Förderung entwickelt und beforscht werden kann, muss das WAS der Förderung geklärt werden. Beim Spezifizieren und Strukturieren sprachlicher Lerninhalte für die Unterstützung von Vorstellungsentwicklungsprozessen hat es sich bewährt, nicht nur die formalbezogenen Sprachmittel im technischen Register in den Blick zu nehmen, sondern auch die bedeutungsbezogenen Sprachmittel, die zur mentalen Konstruktion und Verbalisierung von Bedeutungen gebraucht werden (vgl. Abbildung sowie Prediger 2015). Die relevante Fachsprache der Schulmathematik umfasst demnach neben formalbezogenen Sprachmitteln (wie z.B. Subtrahieren oder 7-5 = 2) auch viele Sprachmittel des bildungssprachlichen Registers. Für das Beispiel Subtrahieren gehören dazu neben graphischen Darstellungen in Punktebildern und Zahlenstrahlen auch Satzbausteine wie „ich nehme ... weg von ...". Diese werden ausgehend von den eigensprachlichen Ressourcen der Lernenden aus dem alltagssprachlichen Register aufgebaut. Zum Beispiel enthält die Formulierung eines Kindes „Es wird weniger" zwar schon eine wichtige Idee der Veränderung; sie muss aber ausgebaut werden zu „Die 7 wird um 5 weniger, dann sind es 2", um nicht nur die Richtung der Veränderung, sondern auch ihre genaueren Quantitäten ausdrücken zu können.




Für gezielte, themenspezifische Sprachschatzarbeit im Unterricht wird zu jedem mathematischen Thema ein bedeutungsbezogener Denkwortschatz spezifiziert, um die sprachlichen Voraussetzungen zur Vorstellungsentwicklung zu identifizieren und gezielt anbieten zu können. Dazu werden in den genannten Teilprojekten die Vorstellungsentwicklungsprozesse von sprachlich schwachen und starken Lernenden vergleichend analysiert.

Durch korpuslinguistische Analysen wird zudem der notwendige erweiterte kontextbezogene Lesewortschatz bestimmt, zu dem weitere Synonyme für die gleichen Konzepte erfasst werden wie „reduzieren um". Diese werden in einer gestuften Sprachschatzarbeit sukzessive erarbeitet (Prediger 2015).

## 4. Ausblick

Da die Frage der notwendigen Sprachschatzarbeit bislang vorrangig für den Aufbau inhaltlicher Vorstellungen im verstehensorientierten Unterricht bearbeitet wurde, besteht weiterer Spezifizierungsbedarf für andere Wissens- und Könnensfacetten der Mathematik. Auch für diese ist die Methodologie der Entwicklungsforschung (mit ihrer iterativen Vernetzung von Entwicklung erster Förderangebote und Beforschung ihrer Wirkungen und Gelingensbedingungen) sehr geeignet und verspricht weitere interessante Forschungs- und Entwicklungsergebnisse.

## Literatur

(viele auf der Homepage der Autorin verfügbar, ggf. nach einer Sperrfrist)


Webseite des MuM-Projekts: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger → Projekte → MuM

Krägeloh, N. & Prediger, S. (2015, im Druck). Der Textaufgabenknacker – Ein Beispiel zur Spezifizierung und Förderung fachspezifischer Lese- und Verstehensstrategien. Erscheint in MNU 68(3).

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht - Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. Praxis der Mathematik i.d.S., 54(45), 2-9.

Pöhler, B., Prediger, S. & Weinert, H. (2015, im Druck). Cracking percent problems in different formats. Erscheint in Proceedings of CERME 8, Prag.

Prediger, S. (2013a). Sprachmittel für mathematische Verstehensprozesse – Einblicke in Probleme, Vorgehensweisen und Ergebnisse von Entwicklungsforschungsstudien. In A. Pallack (Hrsg.), Impulse für eine zeitgemäße Mathematiklehrer-Ausbildung. MNU-Dokumentation der 16. Fachleitertagung (S. 26-36). Neuss: Seeberger.

Prediger, S. (2013b). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen. In M. Becker-Mrotzek et al. (Hrsg.). Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen (S. 167-183). Münster et al.: Waxmann.

Prediger, S. (2015, im Druck). „Kapital multiplizirt durch Faktor halt, kann ich nicht besser erklären“- Sprachschatzarbeit für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht. Erscheint in I. Petersen, T. Tajmel, B. Lütke (Hrsg.), Fachintegrierte Sprachbildung. Berlin: de Gruyter.

Prediger, S. & Krägeloh, N. (2015, im Druck). “x-arbitrary means any number, but you do not know which one”. The epistemic role of languages while constructing meaning for the variable as generalizers. Erscheint in A. Halal & P. Clarkson (Hrsg.), Teaching & Learning Mathematics in Multilingual Classrooms. Rotterdam: Sense.

Prediger, S. & Wessel, L. (2013). Fostering German language learners’ constructions of meanings for fractions – Design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. Mathematics Education Research Journal, 25(3), 435-456.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Benholz, C. & Gürsoy, E. (i.V., eingereicht 2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen.

Wessel, L. (2015). Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff. Heidelberg: Springer Spektrum.

Martin RATHGEB, Siegen

# Können wir von Kreisen das Rechnen und Beweisen lernen? Experimente zur Entweder-Oder-Unterscheidung

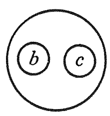
George Spencer-Brown [GSB] führt mit seinen „Laws of Form“ [LoF] (1969) den Leser ausgehend vom empraktischen Wissen übers Unterscheiden/Bezeichnen hin zum logischen Rechnen – und wieder zurück. Dabei wird der Leser mathematisch sozialisiert und der Anfang des Buches durch sein Ende reichhaltiger. Zielpublikum ist nach Auskunft des Autors einerseits der (fachmathematische) Laie und andererseits der (mathematikphilosophische) Profi. Denn der Autor behandelt die Aussagenlogik einerseits als eine *Einführung* in die Mathematik und andererseits als eine *Grundlegung* von Mathematik. Dabei entwickelt er sein Thema auf ungewohnte, doch letztlich faszinierende Weise.

Im Folgenden thematisiere ich GSBs *Illustrationen und Experimente mit Kreisen*: Durch sie *zeigt* er, dass erst die Lesart aus einem *Arrangement* einen *Ausdruck* macht und dass Lesarten auf zum Teil impliziten Konventionen beruhen (vgl. 1.). Durch sie *rechtfertigt* er die Initiale seiner *cross*-Arithmetik (vgl. 2.) und *reflektiert* die Entweder-Oder-Unterscheidung, auf welcher das Beweisen per Fallunterscheidung gründet und damit letztlich GSBs Einführung in bzw. Grundlegung von Mathematik (vgl. 3.).

## 1. Drei Kreise auf einer Kugel: Die (Un-)Bestimmtheit der Lesart

In den Endnoten zu Kapitel 12 von LoF betrachtet GSB Kreise auf einer Kugel und liest dieses Kreise-Kugel-Arrangement als Term einer mathematischen Sprache, die Buchstaben und Kreise umfasst und auf einer Kugel(oberfläche) notiert wird. Er führt seine Notation folgendermaßen ein.

„Let us imagine that, instead of writing on a plane surface, we are writing on the surface of the Earth. Ignoring rabbit holes, etc, we may take it to be a surface of genus 0. Suppose we write



*a.*

To make it readable from another planet, we write it large. Suppose we draw the outer bracket round the Equator, and make the brackets containing *b* and *c* follow the coastlines of Australia and the South Island of New Zealand respectively.“ (LoF:102)

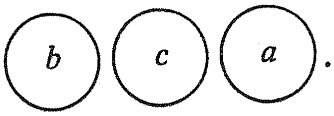
GSB bringt seinen Notationsvorschlag im Plauderton und m.E. recht unterhaltsam vor. Doch worauf will er hinaus? Zunächst sei gesagt: Es wird

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

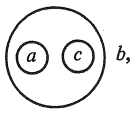
nicht darum gehen, den Term tatsächlich von einem anderen Planeten aus zu lesen, sondern von (vier) verschiedenen Positionen auf der Erde.

„Above is how the expression will appear from somewhere in the Northern Hemisphere, say London. But let us travel.

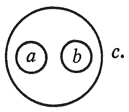
Arriving in Cape Town we see



Sailing on to Melbourne, we see



and proceeding from there to Christchurch, we see



These four expressions are distinct and not equivalent.“ (LoF:102f.)

Der letzte Satz ist nicht selbstverständlich, sondern eigentlich informativ. Denn die Bedeutungen der Zeichen sind im Zitat selbst nicht spezifiziert. Skizzieren wir nochmals die Situation. Wir denken uns auf der Erde sechs Markierungen angebracht: drei Linien und drei Buchstaben. Als kleines Modell mag uns eine Kugel dienen, auf die wir in geeigneter Weise Kreise und Buchstaben notieren. Die Kugeloberfläche dient uns als Notationsfläche, in/auf der wir uns bewegen können. GSB betrachtet das Kreise-*Kugel*-Arrangement von vier Punkten auf der Kugel aus und notiert als Kreise-*Ebene*-Arrangement, das jeweilige Inklusionsverhältnis zwischen den Markierungen. Bspw. liest die *a*-Markierung ein Beobachter in London außerhalb des Äquatorkreises, auf der Südhalbkugel dagegen innerhalb. Bspw. liest die *b*-Markierung ein Beobachter in Melbourne außerhalb der australischen Küstenlinie, außerhalb von Australien dagegen innerhalb. Der Beobachter steht jeweils außen und es spiegeln die Kreise in der Ebene wider, welche Linien-Markierungen er überqueren muss, um von seiner Position aus zu einer Buchstaben-Markierung zu gelangen.

Dem *einen* Kreise-Kugel-Arrangement korrespondiert je nach Position des Beobachters/Lesers ein anderes Kreise-Ebene-Arrangement. Jedes der vier *Arrangements* (Terme) kann als ein *Ausdruck* (Termfunktion) gelesen werden, d.h.: als ein Zeichen mit einer wohlbestimmten Bedeutung. Der *Wert* des *einen* (doch *vier*-fältig explizierten) Kreis-Kugel-Arrangements ist demnach ohne weitere Spezifikation der Position des Lesers *nicht* wohlbestimmt. Ich setze die Zitation – ihren letzten Satz aufgreifend – fort.

„These four expressions are distinct and not equivalent. Thus it is evidently not enough merely to write down an expression, even on a surface of genus 0, and expect it to be understood. We must also indicate where the observer is supposed to be standing in relation to the expression. Writing on a plane, the ambiguity is not apparent because we tend to see the expression from outside of the outermost bracket. When it is written on the surface of a sphere, there may be no means of telling which of the brackets is supposed to be outermost. In such a case, to make an expression meaningful, we must add to it an indicator to present a place from which the observer is invited to regard it." (LoF:103)

Im Hinblick auf das ganze Zitat gilt es die Formulierung „readable from another planet" nochmals zu bedenken. GSB nennt damit nicht die Position des Lesers, sondern lediglich einen Grund für die gigantische Schriftgröße. Ihr zufolge erstreckt sich das notierte Arrangement über die gesamte Erdoberfläche und befindet sich jeder irdische Leser *in* dem Arrangement. Mit dieser künstlichen Situation weist GSB darauf hin, dass wir uns auch als Leser üblicher Arrangements zu diesen Arrangements positionieren, *indem* wir sie lesen. Durch unsere Lesart definieren wir dem Arrangement einen Außenraum, *in dem* wir sie lesen (vgl. LoF Kapitel 8 und 12).

GSB gibt also ein mathematisches Modell dafür, dass es auf die Lesart der Zeichen ankommt, dass also Zeichen im Wesentlichen standpunktbezogen fungieren. Dies gilt m.E. nicht nur für die Notationsformen in LoF, sondern für mathematische Notationen insgesamt und im übertragenen Sinne auch für den lebensweltlichen Zeichengebrauch. Denn letzterer ist wohlgemerkt weit weniger durch explizite Konventionen reglementiert als ersterer.

## 2. Kreise in einer Ebene: Rechtfertigung arithmetischer Initiale

In Kapitel 12 von LoF *experimentiert* GSB mit einer *circle*-Notation für zwei Werte: nämlich *ein* oder *kein* Kreis in einer Ebene. Er *diskutiert* vier Ausdrücke, nämlich einen Kreis in einer Ebene, dessen beide Seiten (Außen- und Innenseite) jeweils durch *einen* oder *keinen* Kreis markiert sind. Indem GSB für diese vier Ausdrücke (bestehend aus einem [1x], zwei [2x], drei [1x] Kreisen) jeweils ‚den' Wert ‚bestimmt', *rechtfertigt* er insb. die beiden *Äquivalenzpostulate* der *cross*-Arithmetik, wonach – formuliert für die *circle*-Notation – zwei *außerhalb* einander stehende Kreise vom selben Wert wie *ein* Kreis sind und zwei *innerhalb* einander stehende Kreise vom selben Wert wie *kein* Kreis sind. Die *cross*-Arithmetik (vgl. LoF Kapitel 3 und 4) *ist* demnach, so man möchte, das Rechnen mit Kreisen.

## 3. Ein Kreis in einer Ebene: Die Entweder-Oder-Unterscheidung

In Kapitel 1 von LoF definiert und erläutert GSB den Grundbegriff seiner Einführung in bzw. Grundlegung von Mathematik folgendermaßen.

„*Distinction is perfect continence*. That is to say, a distinction is drawn by arranging a boundary with separate sides so that a point on one side cannot reach the other side without crossing the boundary. For example, in a plane space a circle draws a distinction." (LoF:1)

Durch diese Definition zzgl. ihrer Erläuterung ist GSBs *distinction*-Begriff nicht geklärt – weder im Ganzen noch im Detail. In meiner Dissertation habe ich daher die LoF einer transzendentalen Argumentation unterzogen: Welche *Bedingungen ermöglichen* die Beweise der Theoreme? Weshalb vertraut GSB in seinem mathematikphilosophisch anspruchsvollen Ansatz auf die umstrittene Methode des *Beweisens mittels Fallunterscheidung*? Meine kurze Antwort ist: Der *distinction*-Begriff *ist* das Konzept der Fallunterscheidung, nämlich die *Entweder-Oder-Unterscheidung*, bei welcher der *Zusammenhang des zu Unterscheidenden* (präsentisch) *vollzogen wird*. Kommen wir auf die adäquate Deutung der Illustration durch einen Kreis in der Ebene zurück. Die Kreislinie ist eine Grenze mit zwei Seiten. Die Grenze zusammen mit ihren beiden Seiten *ist* die Ebene, in der sich der Kreis befindet und die durch die Grenze partitioniert wird. Dementsprechend ist für Beweise mittels Fallunterscheidung entscheidend, dass nicht nur die beiden Teile (vgl. die Seiten) einer Einheit (vgl. die Ebene) je einzeln untersucht werden können, sondern dass dabei ihr Zusammenhang (vgl. die Grenze) nicht vergessen wird. Die Grenze fungiert *trennend* und *verbindend* zugleich. Beweise mittels Fallunterscheidung umfassen eine gelingende Analyse sowie eine gelingende Synthese. Damit schließt sich ein thematischer Kreis. Indem nämlich ein Kreis in einer Ebene einerseits als Unterscheidung *in* der Ebene und andererseits als Bezeichnung der Ebene *selbst* gelesen werden kann, illustriert er zudem, dass es die Lesart ist, die aus dem Arrangement einen Ausdruck macht. Entscheidend ist, was wir zu sehen vermögen (insb. sehen *können*) und zu sehen bereit sind (insb. sehen *wollen*). In diesem Sinne können wir durch GSBs Experimente mit Kreisen tatsächlich einiges *über* das Rechnen und das Beweisen (kurz: über Mathematik) lernen – so wir sie geeignet lesen.

## Literatur


Spencer-Brown, G. (1969). *Laws of Form*. London: George Allen and Unwin Ltd.

Rathgeb, M. (2016). *George Spencer Browns Laws of Form zwischen Mathematik und Philosophie.* Erscheint in: Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik. Siegen: universi.

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

# Welche Aufgabenmerkmale erkennen und nutzen Grundschulkinder? Ergebnisse einer Studie zur Erfassung von Flexibilität

In den letzten Jahren rückte das Thema „Flexibles Rechnen“ zunehmend in den Fokus der mathematikdidaktischen Forschung, wobei den verschiedenen Forschungsarbeiten unterschiedliche Konzeptualisierungen zugrunde liegen (ausführlich in Rathgeb-Schnierer & Green 2013; Rathgeb-Schnierer, 2014). Konsens herrscht dahingehend, dass flexibles Rechnen als situatives, aufgabenadäquates Handeln verstanden wird, das einen beweglichen Umgang mit strategischen Werkzeugen beinhaltet. Alle Definitionen beziehen sich implizit oder explizit auf zwei Aspekte, die im Englischen mit den Begriffen „flexibility“ (den Wechsel von Lösungswerkzeugen) und „adaptivity“ (die Passung von Lösungswerkzeugen) gefasst werden. Unterschiede bestehen allerdings im Verständnis von Aufgabenadäquatheit (adaptivity) und damit verbunden in den methodischen Herangehensweisen zur Identifikation dieser (Rechtsteiner-Merz, 2013).

## Die Studie – ein kurzer Überblick

Das der Studie zugrunde liegende **Verständnis** von flexiblem Rechnen betont in Anlehnung an ein Modell zum Prozess des Rechnens (Rathgeb-Schnierer, 2011; Rathgeb-Schnierer & Green, 2013) sowie an aktuelle Forschungsergebnisse (s.o.) die Rolle von Zahl und Aufgabenmerkmalen sowie Beziehungen: Dementsprechend zeigt sich flexibles Rechnen im Sinne aufgabenadäquaten Handelns darin, dass der Lösungsprozess nicht auf Verfahren gestützt ist, sondern auf aufgabenbezogene Eigenschaften und Beziehungen. D.h., Flexibilität lässt sich in der Wechselwirkung genutzter Lösungswerkzeuge (Kombination von verschiedenen strategischen Werkzeugen und Basisfakten) und erkannter Aufgabenmerkmale und Beziehungen identifizieren. Somit verfolgt die Studie das **Ziel,** die mentalen Prozesse (Referenzen, Rathgeb-Schnierer, 2011) zu identifizieren, die die Lösungsprozesse von Grundschulkindern stützen. Konkret wurde folgenden **Fragen** nachgegangen: (1) Wie begründen Grundschulkinder leichte und schwere Additions- und Subtraktionsaufgaben? Nutzen sie hierbei Aufgaben- und Zahlenmerkmale sowie Beziehungen? (2) Zeigen sich Unterschiede beim Begründen in verschiedenen Unterrichtskontexten? (3) Werden erkannte Merkmale und Beziehungen im weiteren Lösungsprozess genutzt?

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Zur Beantwortung dieser Fragen wurden **qualitative Leitfadeninterviews** zum Sortieren und Begründen von zweistelligen Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Zweit- und Viertklässlern aus Baden-Württemberg (BW) und North Carolina (NC) durchgeführt. Insgesamt nahmen 78 Kinder aus zehn verschiedenen Klassen an der Studie teil, 69 Interviews gingen in die Analyse ein (28 Viertklässler: 17 NC, 11 BW; 41 Zweitklässler: 19 NC, 22 BW). Das Interview umfasste zwölf Aufgaben, wobei jede mindestens ein spezielles Merkmal beinhaltete (z. B. Doppel-Halb-Beziehung, Umkehrbeziehung, Zehnernähe, Zehnersumme der Einer sowie Zehnerübergang). Im ersten Teil des Interviews wurden die Aufgaben in Kategorien „leicht“ und „schwer“ sortiert und die Sortierentscheidungen begründet; im zweiten Teil wurden die Aufgaben gelöst.

Die **Datenauswertung** erfolgte in zwei Schritten: Erstens, der Begründungsanalyse mittels eines induktiv entwickelten und deduktiv ausdifferenzierten Kategoriensystems (Rathgeb-Schnierer & Green, 2013/2015). Zweitens, der Identifikation von Indikatoren für die Nutzung von erkannten Merkmalen und Beziehungen im Rahmen einer zusammenfassenden Inhaltsanalyse.

## Begründungen von leichten und schweren Aufgaben (Frage 1)

Insgesamt tauchen 902 Begründungen auf, pro Kind durchschnittlich 13,08 (Min. 8/ Max. 17); mehr als 2/3 der Aufgaben wurden als leicht eingeschätzt. Bei der Begründungsanalyse kristallisierten sich vier disjunkte Hauptkategorien heraus: das Begründen über Merkmale für leichte und schwere Aufgaben sowie das Begründen über Rechenwege für leichte und schwere Aufgaben. 54,54% der Gesamtbegründungen bezogen sich auf Merkmale, 31,48% auf Rechenwege; die nicht zuordenbaren Begründungen (14,07%) wurden von der weiteren Datenanalyse ausgeschlossen.

Klassenstufenspezifische Analysen zeigen, dass sich die Argumente der Viertklässler zu 68,82% auf Merkmale und zu 31,18% auf Rechenwege beziehen. Zweitklässler hingegen argumentieren zu ca. 10% weniger auf der Basis von Merkmalen zugunsten von Rechenwegen. Anlehnend an Forschungsergebnisse von Selter (2000) hätten wir nicht erwartet, dass sich die Viertklässler in ihren Begründungen weniger auf Rechenwege und Prozeduren stützen als die Zweitklässler. Wir vermuten, dass dieses Ergebnis mit den zweistelligen Interviewaufgaben zusammenhängt und die Vertrautheit der Viertklässler mit zweistelligen Aufgaben deren Begründungen beeinflusst.

Von besonderem Interesse waren die merkmalsbasierten Begründungen: Bei leichten Aufgaben nannten die Kinder viele verschiedene Merkmale, z.

B. spezifische Merkmale der Einerstellen (z. B. 5er Zahlen und Zehnersummen 16,23%), besondere Zahlen (Zehnernähe oder doppelte Ziffern 22,50%) Aufgaben- und Zahlbeziehungen (Umkehraufgabe, Doppelt-Halb-Beziehung, Analogien 35,89%) sowie der Hinweis auf Basisfakten (Auswendigwissen 23,36%) und die Größe der Zahlen (1,99%). Wurden schwere Aufgaben merkmalsbasiert begründet, bezogen sich diese Begründungen hingegen hauptsächlich auf die spezifischen Merkmale der Einerstellen (84,39%): der Zehnerübergang scheint also ein typisches Merkmal für eine schwere Aufgabe zu sein. Allerdings wurden Zehnerübergangsaufgaben nicht per se als schwer beurteilt, vielmehr zeigt sich in unseren Daten eine differenziertere Einschätzung der Kinder. Aufgaben mit Zehnerübergang wurden dann als leicht eingeschätzt, wenn den Kindern ein zusätzliches Merkmal auffiel. Dies kam besonders bei den Aufgaben 56+29 und 31-29 vor, bei denen die Zehnernähe des zweiten Summanden oder die Nähe von Minuend und Subtrahend erkannt wurde.

## Klassenspezifische Begründungsmuster (Frage 2)

Abbildung 1 veranschaulicht die Begründungsmuster von Kindern aus drei verschiedenen zweiten Klassen: jede Spalte repräsentiert die Argumente eines Kindes und die Punktgröße steht im Zusammenhang mit der Anzahl der Argumente in der jeweiligen Kategorie. Der Mathematikunterricht in den Klassen A (USA) und C (D) zeigte denselben Grad an inhaltlicher Offenheit und Schülerzentrierung; in Klasse B (D) fand hingegen ein inhaltlich geschlossener, lehrerzentrierter Unterricht statt.

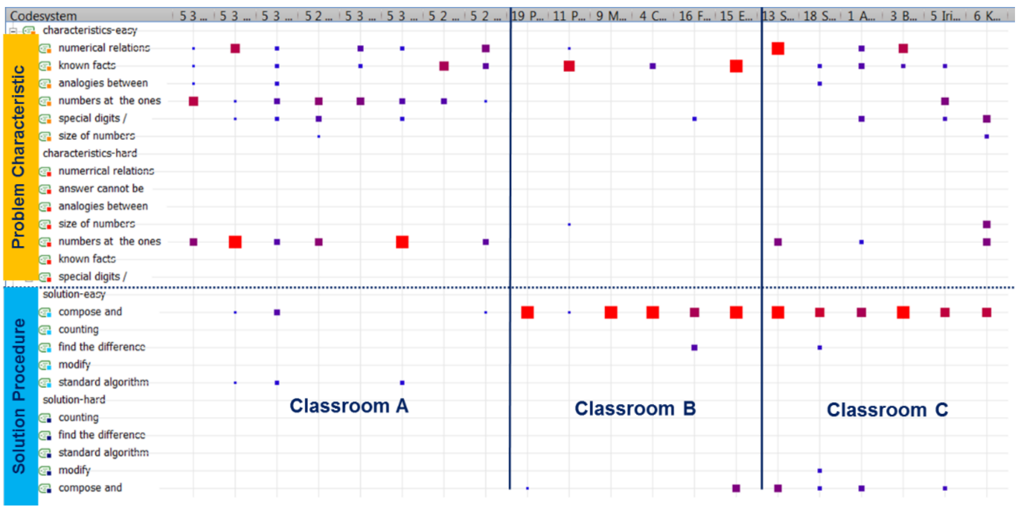



**Abbildung 1: Begründungsmuster in verschiedenen Klassen**

Schülerinnen und Schüler aus der Klasse A beziehen sich in ihrer Begründung für Aufgabenschwierigkeiten nahezu ausschließlich auf Merkmale und Beziehungen, wobei die Vielzahl verschiedener Merkmale offensichtlich ist. Kinder der Klasse B argumentieren hingegen vorwiegend über einen Rechenweg – das Zerlegen und Zusammensetzen. Die wenigen Male, die sie von dieser Begründung abweichen, verweisen die Kinder auf ihr Auswendigwissen. Das Begründungsmuster der Kinder aus Klasse C kann als ausgewogen beschrieben werden, da sie sich gleichermaßen auf beide Begründungsarten beziehen: bei merkmalsbezogenen Begründungen zeigte auch diese Gruppe eine große Vielfalt, bei rechenwegbasierten Begründungen wiederum die Präferenz für den Weg des Zerlegens und Zusammensetzens. Dieses Muster zieht sich durch die gesamten Daten: Immer dann, wenn Kinder sich in ihren Begründungen auf Merkmale beziehen, wird eine große Vielfalt sichtbar. Wenn hingegen Rechenwege zur Begründung herangezogen werden, handelt es sich hierbei meist um einen einzigen Weg, der bei jeder Aufgabe beschrieben wird. Dieses Muster legt folgende Annahme: Kinder, die Merkmale sehen und nutzen, agieren dynamisch sind und im Hinblick auf das Begründen flexibel. Kinder, die sich auf Rechenwege stützen, agieren eher statisch und sind im Hinblick auf das Begründen unflexibel.

## Nutzung von erkannten Merkmalen und Beziehungen (Frage 3)

Um auf Basis der Merkmalsbegründungen Aussagen über die Flexibilität beim Rechnen machen zu können, ist die Frage nach der Nutzung der erkannten und beschriebenen Merkmale und Beziehungen unumgänglich. In einem weiteren Auswertungsschritt wurden deshalb die Merkmalsbegründungen (zunächst bei der Teilstichprobe der deutschen Zweitklässler) im Hinblick auf Indikatoren für die Nutzung untersucht. Hierbei kristallisierten sich drei Verhaltensweisen heraus, die klar auf die Nutzung von erkannten Merkmalen hinwiesen: (1) Kinder nennen Merkmal(e) und unmittelbar danach das Ergebnis *(31-29: Die Zahlen sind nahe zusammen und ich sehe es sind 2).* (2) Kinder nennen Merkmal(e) und einen Rechenweg, der zum Merkmal passt *(95-15: Die zwei Fünfer machen die Aufgabe einfach, weil ich muss dann nur noch 90 minus 10 rechnen).* (3) Kinder nennen Merkmal(e) und unmittelbar danach das Ergebnis sowie einen Rechenweg, der zum Merkmal passt *(31-29: The numbers are closed together, so it is only two since 29 plus 2 equals 31).* Insgesamt zeigte sich an dieser Teilstrichprobe (16 Kinder, 73 Merkmalsbegründungen), dass das weitere Vorgehen der Kinder nahezu ausnahmslos von den erkannten Merkmalen beeinflusst wurde (nur 1 Ausnahme). Ob dieses Ergebnis für alle Daten gilt, wird sich in den weiteren Auswertungen zeigen.

## Literatur

Die Literaturliste kann per Email bei der Autorin angefordert werden:
rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de

Johanna RELLENSMANN, Stanislaw SCHUKAJLOW,
Claudia LEOPOLD, Universität Münster

# Gute Skizze – Bessere Lösung?

## Selbsterstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren

Visualisierungen in Form von selbsterstellten Skizzen werden im Mathematikunterricht häufig eingesetzt und als hilfreiches Instrument zur Unterstützung von Lernprozessen angesehen (Hembree, 1992). Aus theoretischer Sicht erfordert das Erstellen einer Skizze die Selektion und Organisation von relevanten Informationen und kann so zu einer tieferen Informationsverarbeitung und zu einem besseren Problemverständnis führen. Jedoch ist die Skizzenerstellung eine zusätzliche kognitive Belastung und bindet Kapazitäten, die dann nicht mehr für das Lösen der Aufgabe zur Verfügung stehen (Renkl & Nückles, 2006). Empirische Befunde zur Wirksamkeit von selbsterstellten Skizzen beim Problemlösen sind inkonsistent. Ergebnisse aus Interventionsstudien lassen darauf schließen, dass das Wissen über Skizzen und die Fähigkeit zur Erstellung qualitativ guter Skizzen einen Einfluss auf die Leistung der Schüler hat (Csíkos, Szitányi, & Kelemen, 2012; Van Essen & Hamaker, 1990). Zudem scheint die Art der erstellten Skizze ein wichtiger Einflussfaktor zu sein (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998; Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Beim mathematischen Modellieren können Skizzen zur Situation und Skizzen zur Mathematik gezeichnet werden. Eine Situationsskizze stellt die in der Aufgabe beschriebenen Objekte und Relationen realitätsnah dar. Eine mathematische Skizze reduziert die Objekte dagegen auf ihre relevanten mathematischen Eigenschaften und enthält folglich mathematische Objekte wie Linien und Winkel.

## Fragestellung und Wirkungsmodell

In der hier vorgestellten Studie sollen Bedingungen identifiziert werden, unter denen die Instruktion zum Zeichnen einer Skizze einen positiven Effekt auf die Modellierungsleistung von Schülern hat. Hierfür untersuchen wir ein Pfadmodell, dass die vermutete Interaktion zwischen dem Wissen über hilfreiche Skizzen, der Qualität von Situationsskizzen und mathematischen Skizzen sowie der Modellierungsleistung beschreibt (Abb. 1).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

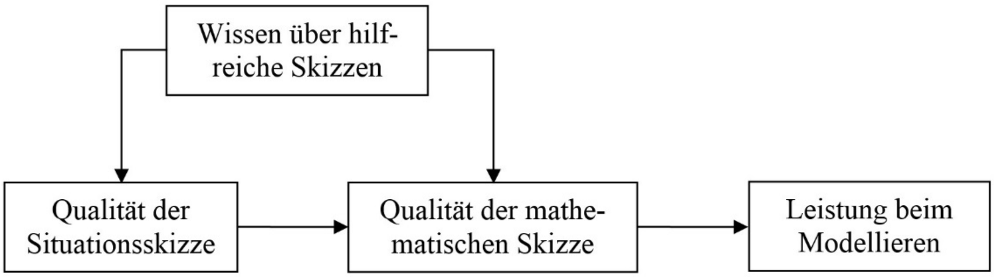



**Abb. 1 Untersuchtes Wirkungsmodell**

## Methode

*Stichprobe und Ablauf.* An der Studie nahmen 61 Schüler (25 Mädchen und 36 Jungen) der 9. und 10. Klasse von zwei deutschen Gesamtschulen teil. Das Durchschnittalter lag bei $M$=15.73 Jahren ($SD$=0.70). Die Schüler bearbeiteten zunächst einen Wissenstest zu guten Skizzen. Anschließend erhielten sie eine schriftliche Erklärung zu den Skizzenarten „Situationsskizze“ und „mathematische Skizze“ sowie acht zu bearbeitende Modellierungsaufgaben. Die Schüler wurden aufgefordert, für jede Aufgabe (a) eine Situationsskizze zu zeichnen, (b) eine mathematische Skizze zu zeichnen und (c) die Aufgabe zu lösen.

*Wissenstest.* Zur Erfassung des Wissens über gute Skizzen wurde ein Test mit fünf szenariobasierten Aufgaben entwickelt. Zu jeder Aufgabe wurden fünf mögliche Skizzen präsentiert, die sich in nach dem Typ der Skizze, ihrer Vollständigkeit und Richtigkeit unterschieden. Die Schüler wurden aufgefordert, die Aufgaben nicht zu lösen, sondern jeweils die Skizze auszuwählen, die sie als am hilfreichsten für die Lösung der Aufgabe einschätzten. Die Auswahl der vollständigen und richtigen mathematischen Skizze wurde entsprechend eines Expertenratings als korrekte Antwort (Code 1) kodiert. Die Auswahl einer anderen Skizze wurde mit Code 0 erfasst. Die Reliabilität der Skala ($\alpha$=.46) ist nicht zufriedenstellend, jedoch in Übereinstimmung mit bisherigen Befunden zum Strategiewissen von Schülern (Souvignier & Mokhlesgerami, 2006).

*Typ und Qualität der Skizzen.* Die erstellten Skizzen wurden einer Skizze zur Situation bzw. einer mathematischen Skizze zugeordnet. Die Qualität der Skizzen wurde mit Hilfe einer dreistufigen Skala erfasst. Code 0 wurde für eine falsche Skizze vergeben, Code 1 für eine richtige, jedoch unvollständige Skizze und Code 2 für eine vollständige und richtige Skizze. Die Reliabilität für die Qualität der Situationsskizzen ($\alpha$=.67) und mathematischen Skizzen ($\alpha$=.52) ist moderat und deutet analog zum Strategiewissen auf Variabilität in den Zeichenfähigkeiten der Schüler hin.

*Modellierungsleistung.* Die Modellierungsleistung wurde mit Hilfe derselben acht Modellierungsaufgaben erfasst. Für eine richtige Lösung der Aufgabe wurde Code 1, für eine falsche Lösung Code 0 vergeben. Die Reliabilität dieser Skala ist gut ($\alpha$=.76).

## Ergebnisse

*Modellpassung.* Das Modell weist eine gute Modellpassung auf und erklärt 66% der Varianz der Modellierungsleistung.

*Direkte Effekte.* Die Vermutung, dass das Wissen über hilfreiche Skizzen einen positiven Effekt auf die Qualität der Skizzen hat, wurde teilweise bestätigt. Der Effekt des Wissens über Skizzen ist für die Qualität der mathematischen Skizzen statistisch signifikant, nicht jedoch für die Qualität der Situationsskizzen. Es zeigt sich weiterhin ein positiver Effekt der Qualität der Situationsskizze auf die Qualität der mathematischen Skizze. Die mathematische Skizze wiederum erweist sich als starker Prädiktor für die Modellierungsleistung.

*Indirekte Effekte.* Das Wissen über hilfreiche Skizzen hat einen positiven Effekt auf die Modellierungsleistung, welcher über die Qualität der mathematischen Skizze vermittelt wird. Außerdem hat die Qualität der Situationsskizze vermittelt über die Qualität der mathematischen Skizze einen positiven indirekten Effekt auf die Modellierungsleistung.

## Zusammenfassung und Diskussion

Die Analyse des vermuteten Wirkungsmodells bestätigt die Annahme, dass das Wissen über hilfreiche Skizzen einen positiven Effekt auf die Modellierungsleistung hat, welcher durch die Qualität der mathematischen Skizzen vermittelt wird. Für den lernwirksamen Einsatz von Skizzen im Mathematikunterricht sollte daher nicht nur die Fähigkeit zur Erstellung qualitativ guter Skizzen, sondern auch das Wissen der Schüler über Eigenschaften guter und insofern lernwirksamer Skizzen gefördert werden.

Insgesamt zeigt sich, dass beide untersuchten Skizzenarten Einfluss auf Modellierungsleistung von Schülern nehmen. Wie in Abb. 2 dargestellt wurde, kann eine Situationsskizze das Erkennen der impliziten mathematischen Struktur der Aufgabe erleichtern und auf diese Weise indirekt die Modellierungsleistung verbessern. Damit stellt eine Situationsskizze vor allem für diejenigen Schüler eine Hilfestellung dar, die im Modellierungsprozess Schwierigkeiten beim Übergang von der Realität in die Mathematik haben. Eine mathematische Skizze ist bedeutsam für die erfolgreiche Aufgabenbearbeitung, da diese Skizzenart die direkte

Anwendung mathematischer Werkzeuge ermöglicht und im Falle einer korrekten Ausführung zu einem richtigen mathematischen Resultat führt. Eine offene Frage bleibt, welche Rolle selbsterstellte Skizzen, insbesondere Situationsskizzen, für das Interpretieren und Validieren des mathematischen Resultats spielen.

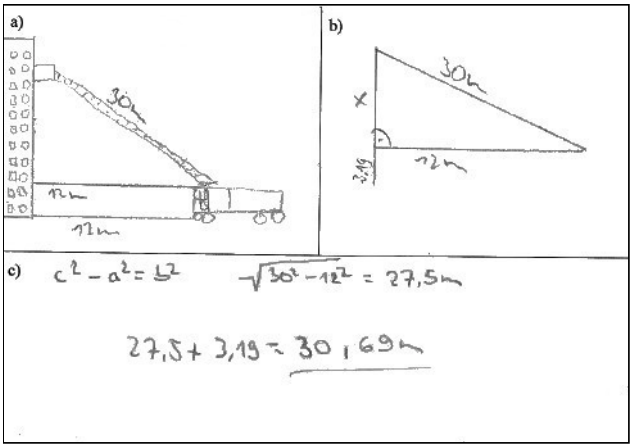



**Abb. 2 Schülerzeichnungen und Lösung zur Aufgabe „Feuerwehr" (Blum, 2011)**

## Literatur


Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling - Proceedings of ICTMA14* (pp. 15-30). New York: Springer.

Csíkos, C., Szitányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 47-65.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The Predominance of the Linear Model in Secondary School Students' Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 65-83.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 242-273.

Renkl, A., & Nückles, M. (2006). Lernstrategien der externen Visualisierung. In H. Mandl & H. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien* (pp. 135-147). Göttingen: Hogrefe.

Souvignier, E., & Mokhlesgerami, J. (2006). Using self-regulation as a framework for implementing strategy instruction to foster reading comprehension. *Learning and Instruction, 16*, 57-71.

Van Essen, G., & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83*(6), 301-312.

Sebastian REZAT, Sara REZAT, Sabrina JANZEN, Paderborn / Gießen

# Sprachsensibler Umgang mit Textmustern im Mathematikunterricht am Beispiel von Konstruktionsbeschreibungen

Arbeiten zu sprachlichen Aspekten des Mathematiklernens fokussieren bislang im Wesentlichen die Wort- und Satzebene. Über sprachliche Aspekte des Mathematiklernens auf der Textebene gibt es bislang wenig gesicherte Erkenntnisse. Im Hinblick auf sprachliche Aspekte des Mathematiklernens auf der Textebene ist zunächst die Frage zu stellen, wodurch mathematische Texte gekennzeichnet sind und inwiefern mathematische Texte überhaupt spezifische Textmuster sind. Erkenntnisse zu diesen Fragen sind Voraussetzung für eine Auseinandersetzung mit mathematischen Textmustern innerhalb der Fachdidaktik und des Fachunterrichts und wesentlich für die Frage, was sprachsensibler Mathematikunterricht in Bezug auf die Textebene bedeutet. Am Beispiel von Konstruktionsbeschreibungen versucht dieser Beitrag erste Antworten auf diese Fragen zu geben.

## Spezifische Merkmale mathematischer Texte

Österholm und Bergqvist (2013) zeigen anhand einer umfassenden Metastudie, dass in der einschlägigen Literatur viele Behauptungen über die besonderen Charakteristika mathematischer Texte zu finden sind, die jedoch nicht durch empirische Untersuchungen gestützt werden, und in diesem Sinne als Annahmen zu betrachten sind. Insgesamt systematisieren sie die Behauptungen über Eigenschaften mathematischer Texte in 8 Kategorien: Vokabular, Kompaktheit, Präzision, Komplexität, Struktur, Beziehungen, Stil, Personen. Entlang dieser Kategorien sollen mathematische Texte durch ein spezifisches Fachvokabular, eine große Informationsdichte mit vielen Nominalisierungen und Nominalphrasen (Kompaktheit), eine hohe sprachliche Präzision, einen hohen Komplexitätsgrad der sprachlichen Konstruktionen, eine klare hierarchische, sequentielle oder logische Struktur, viele logische Beziehungen (die durch entsprechende Präpositionen oder Konjunktionen markiert werden), eine grundsätzliche stilistische Vielfalt und agenslose Satzkonstruktionen gekennzeichnet sein (vgl. Österholm & Bergqvist, 2013). Grundsätzlich scheint in der einschlägigen Literatur nur von ‚dem' mathematischen Text ausgegangen zu werden, da innerhalb der Ausprägungen in den einzelnen Kategorien nicht zwischen unterschiedlichen mathematischen Textsorten bzw. Textmustern unterschieden wird. Darüber hinaus sind die von Österholm & Bergqvist herausgearbeiteten Charakteristika stark sprachsystematisch orientiert. In der Textlinguistik setzt sich jedoch ein integrativer Textbegriff durch, bei dem der Text eine sprachliche und kommunikative Einheit bildet. Um die spezifischen Eigen-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

schaften mathematischer Texte zu analysieren, orientieren wir uns am Textmustermodell von Sandig (1997). Entsprechend müssen die von Österholm & Bergqvist identifizierten sprachsystematischen Eigenschaften von Texten um Eigenschaften, die die Textfunktion betreffen, ergänzt werden. Dazu gehören u.a. der jeweilige gesellschaftliche Zweck, den der Text erfüllt, sowie die konstituierenden Situationseigenschaften und -beteiligten. Die Merkmale von Textmustern werden im Folgenden exemplarisch anhand von Konstruktionsbeschreibungen verdeutlicht.

## Konstruktionsbeschreibungen als genuin mathematisches Textmuster

Konstruktionsbeschreibungen sind aus mathematischer Sicht Existenzbeweise der konstruierten Objekte, indem sie eine endliche Folge zugelassener Konstruktionsschritte benennen, die am Ende das zu konstruierende Objekt ergeben. Dies entspricht dem eigentlichen (gesellschaftlichen) Zweck von Konstruktionsbeschreibungen. Aus mathematikdidaktischer Sicht fassen Weigand et al. (2009) weitere wesentliche Aspekte zusammen. Im folgenden Zitat werden die Kategorien des Textmustermodells, auf die sich die jeweiligen Merkmale beziehen, jeweils in eckigen Klammern angegeben[1].

> Für die Erstellung von Konstruktionsbeschreibungen gibt es keine festen Normen. Sie orientieren sich vielmehr an folgenden Grundsätzen:
>
> – Konstruktionsbeschreibungen sollen eine für Außenstehende nachvollziehbare vollständige Beschreibung der einzelnen Konstruktionsschritte geben. [*gesellschaftlicher Zweck; Kanal: schriftlich*]
> – Die Sprache der Beschreibung ist dem sprachlichen Niveau der Lernenden angepasst und entwickelt sich von zunächst umgangssprachlichen Formulierungen zu einer zunehmend formalisierten Darstellung. [*Formulierungsmuster*]
>
> Die didaktische Bedeutung von Konstruktionsbeschreibungen liegt in folgenden Punkten: Konstruktionsbeschreibungen
>
> – stellen für Lernende eine Dokumentation des eigenen Lösungsweges dar; [*gesellschaftlicher Zweck; Adressat: Lernender*]
> – sind für Lernende und Lehrende eine Kontrolle des Lösungsweges und erlauben ein Nachvollziehen der Konstruktion auf der Zeichenebene; [*gesellschaftlicher Zweck; Adressat: Lernende und Lehrende*]
> – stellen einen Anlass zum Verbalisieren der vollzogenen Handlungen dar; [*gesellschaftlicher Zweck*]
> – dienen zur Kommunikation im Unterricht. [*gesellschaftlicher Zweck; Handlungsbereich: Unterricht*]

Bereits diese Kurzanalyse zeigt, dass die Konstruktionsbeschreibung wesentlich durch ihren fachlichen und didaktischen Zweck und damit durch

[1] Aus Platzgründen kann hier keine nachvollziehbare methodisch fundierte Zuordnung erfolgen. Diese ist für den zentralen Aspekt des Beitrags aber auch nicht wesentlich.

ihre Textfunktion motiviert ist. Bezogen auf das Erlernen von Konstruktionsbeschreibungen im Unterricht ist die Frage zu stellen, welche Lerngelegenheiten in einem sprachsensiblen Mathematikunterricht zu diesem zentralen Kennzeichen des Textmusters angeboten werden könnten. Dies wird im Folgenden anhand eines Fallbeispiels näher betrachtet.

### Sprachsensibler Mathematikunterricht auf Textebene: ein Fallbeispiel

Grundlage der folgenden Ausführungen ist ein Transkript einer Unterrichtsstunde zum Thema ‚Kongruenzsatz SSS' in einer 7. Klasse einer Realschule in Nordrhein-Westfalen.

Die Analyse dieses Transkripts zeigt zunächst, dass der Lehrer bei der Erarbeitung der Konstruktion von Dreiecken anhand dreier gegebener Seiten im Klassenplenum bereits auf unterschiedliche Merkmale des Textmusters ‚Konstruktionsbeschreibung' eingeht. Beispielsweise wird neben einem zunächst für das Textmuster nicht relevanten Zweck die Nachvollziehbarkeit der Konstruktion auf Zeichenebene als Zweck angegeben:

„Und weil ich weiß wie gerne ihr schreibt und wie gerne ihr ordentlich arbeitet kommt zu der Zeichnung noch eine Konstruktionsbeschreibung. [...] damit auch jeder weiß in welcher Reihenfolge wir das Dreieck konstruiert haben"

Im weiteren Verlauf der hier betrachteten Unterrichtsstunde werden auch mehrfach Formulierungsmuster von Konstruktionsbeschreibungen thematisiert. Zum einen wird der Aspekt der Fachsprache zwei Mal angesprochen:

– „Und jetzt kommt's drauf an möglichst fachlich genau mathematisch aufzuschreiben und zu beschreiben, was du getan hast."
– „Okay, wer kann denn mal mathematisch formulieren, was wir getan haben?"

Der von Weigand et al. (2009) angesprochene Entwicklungsaspekt von einer „zunächst umgangssprachlichen Formulierungen zu einer zunehmend formalisierten Darstellung" wird hier ad hoc vollzogen. Offen bleibt dabei, was unter „fachlich genau mathematisch" zu verstehen ist.

Im Zusammenhang mit der konkreten Formulierung von Konstruktionsschritten nimmt der Lehrer eine weitestgehend unmotivierte Umformulierung in den häufig bei Konstruktionsbeschreibungen zu findenden Imperativ vor, z. B.

– „Genau, und bei dieser Konstruktionsbeschreibung würde ich das ja nicht so kompliziert hinschreiben ‚wir haben die Basis gezeichnet', sondern als Aufforderung (*schreibt und diktiert*) Zeichne die Strecke, weil es ja eine Strecke von einem zum anderen Punkt ist, AB mit einer Länge von 3,2 cm"

– S: „Eh, stelle dein Zirkel auf 4,5 cm ein und steche ihn in Punkt A ein und zeichne einen Viertelkreis.“
  L: „Ja, super. Ich kürze das mal ein kleines bisschen ab, aber das ist genau das Richtige (*schreibt und diktiert*) Zeichne einen Kreis um den Punkt A mit dem Radius, jetzt wir auf der einen Seite sagen 4,5 cm oder wir können sagen, der Radius ist genau die Strecke von AD mit 4,5 cm.“

Auch hier bleiben die eigentlichen Gründe für diese üblichen Formulierungsmuster implizit.

Im Sinne eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts ist unseres Erachtens eine explizite Auseinandersetzung mit den funktionalen Aspekten und den jeweiligen Formulierungsmustern sinnvoll. Im oben dargestellten Fallbeispiel bleiben die eigentlichen Gründe für die Nachvollziehbarkeit der Konstruktion unklar. Hier könnten folgende Fragen angesprochen werden: Wozu ist eine Dokumentation der Reihenfolge der Konstruktionsschritte dienlich? Warum ist die Nachvollziehbarkeit der Konstruktion von Bedeutung? Gibt es mathematische Gründe für die Dokumentation der Konstruktion anhand einer Konstruktionsbeschreibung? Diese Fragen müssen nicht zwangsläufig im Unterrichtsgespräch thematisiert werden. Es lassen sich auch methodische Arrangements entwickeln, in denen gerade diese Textfunktionen bedeutsam werden, z.B. indem Lernende die Konstruktionen anhand von Konstruktionsbeschreibungen anderer nachvollziehen sollen bzw. anhand einer Konstruktionsbeschreibung entscheiden sollen, ob das jeweilige mathematische Objekt konstruierbar ist oder nicht. Gerade in Zusammenhang mit der letzteren Fragestellung wäre die Einbindung fehlerhafter Konstruktionsschritte interessant.

Über die Frage, wie Konstruktionsbeschreibungen sprachlich verfasst werden sollten, um diesen Zwecken gerecht zu werden, kann diese Auseinandersetzung mit der Textfunktion direkt auf die Frage der sprachlichen Textgestaltung führen. Auch hier könnten unterschiedliche Formulierungsmuster gegenübergestellt und weiter entwickelt werden, um den Übergang zur stärker formalisierten Darstellung nachvollziehbar zu gestalten.

## Literatur

Österholm, M., & Bergqvist, E. (2013). What is so special about mathematical texts? Analyses of common claims in research literature and of properties of textbooks. *ZDM, 45*(5), 751-763. doi: 10.1007/s11858-013-0522-6

Sandig, B. (1997). Formulieren und Textmuster. Am Beispiel von Wissenschaftstexten. In Eva-Maria Jakobs, Dagmar Knorr (Hrsg.) Schreiben in den Wissenschaften. Frankfurt a. M.: Lang, 25-44.

Weigand, H.-G., et al. (2009). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Christina ROECKERATH, Martin FRANK, Maren HATTEBUHR, Aachen

# Wie funktioniert eigentlich GPS und was hat das mit Mathe zu tun? – Projekttag des EducationLab CAMMP der RWTH Aachen

Im Navi, im Smartphone, beim Geocaching - GPS hat längst Einzug in unser alltägliches Leben gehalten. Aber wie funktioniert eigentlich GPS und was hat das mit Mathematik zu tun? Dieser Fragestellung wird in einem Schülerworkshop nachgegangen, der am EducationLab CAMMP der RWTH Aachen angeboten wird. CAMMP steht für Computational and Mathematical Modelling Program und ist ein Schülerlabor für mathematische Modellierung und Simulation an der RWTH Aachen. Weitere Informationen zu CAMMP finden sich unter www.cammp.rwth-aachen.de.

GPS bedeutet Global Positioning System. Es ist ein Verfahren zur Bestimmung der Standorts eines GPS-Geräts anhand von empfangenen Satellitendaten. Die Satelliten umkreisen die Erde auf Umlaufbahnen und senden dazu fortwährend Sendezeitsignale und Umlaufbahndaten. Der GPS-Workshop wird mit Mathematikkursen der Oberstufe durchgeführt, wobei das Material so konzipiert ist, dass die Schüler/innen weitgehend eigenständig und aktiv das Thema bearbeiten können. Sie verwenden dabei echte Daten, die mit einem GPS-Empfänger vor dem Schülerlabor aufgenommen wurden. Es wird ein als Lückentext vorbereiteter Matlab-Code eingesetzt, in dem die Schüler/innen die entscheidenden Schritte der Modellbildung selbst implementieren. Das Lösen der resultierenden nichtlinearen Gleichungssysteme wird von Matlab übernommen. Anhand von Google maps können die Schüler/innen die erzielten Ergebnisse überprüfen.

Zu Beginn wird die Form der Erde als Kugel angenommen und es werden die Daten von nur drei Satelliten verwendet. Anhand der empfangenen Umlaufbahndaten und der Sendezeit $t_S$ werden dann die Koordinaten $(x_S, y_S, z_S)$ der empfangenen Satelliten bestimmt. Die dazu benötigte Funktion wird im Matlab-Code vorgegeben, sodass die Schüler/innen diese zur Berechnung lediglich verwenden müssen.

Satellitensignale werden mit Lichtgeschwindigkeit übertragen. Anhand der Empfangszeit $t_E$ kann die Entfernung eines Satelliten zum Empfänger, welche auch als Pseudoentfernung bezeichnet wird, durch $d_s = (t_E - t_S) \cdot c$ bestimmt werden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Zur Bestimmung der Empfängerkoordinaten $(x_E, y_E, z_E)$ kann mit dem Satz des Pythagoras oder unter Verwendung von Vektorrechnung das nichtlineare Gleichungssystem

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(1)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(1)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(1)}\right)^2} = d_{S(1)}$$

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(2)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(2)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(2)}\right)^2} = d_{S(2)}$$

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(3)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(3)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(3)}\right)^2} = d_{S(3)}$$

für alle drei Satelliten aufgestellt werden. Zur Lösung verwenden die Schüler/innen die Matlab-Routine *fsolve*, welche die Lösung anhand des Newton-Verfahrens ermittelt. Um die ermittelte Empfängerposition mit Hilfe von Google maps interpretieren zu können, muss sie in geographische Koordinaten umgewandelt werden. Unter Verwendung des Tangens und des Satzes von Pythagoras erhält man

$$\phi = \arctan \frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}}, \qquad \lambda = \arctan2 \frac{y_E}{x_E} \quad \text{und} \quad h = \sqrt{x_E^2 + y_E^2 + z_E^2} - r,$$

wobei $\phi$ den Längen- und $\lambda$ den Breitengrad, sowie h die Höhe beschreiben.


**Abbildung 1:** Nach dem ersten Durchlauf des Modellierungskreislaufs ist die berechnete Empfängerposition mehr als 300 km von der tatsächlichen Empfängerposition entfernt.

Wie in Abbildung 1 dargestellt, ergibt die Berechnung der geographischen Koordinaten anhand der in Aachen aufgenommenen Satellitendaten eine Empfängerposition in der Nähe von Fulda, knapp 350 km entfernt. Es ist demnach notwendig, den Modellierungskreislauf erneut zu durchschreiten. Dazu können verschiedene Verbesserungen bei den Modellannahmen vorgenommen werden.

Anhand der Relativitätstheorie lässt sich erklären, dass die Zeit im Satelliten schneller vergeht als die Zeit auf der Erde. Dieses Phänomen führt zu einem Sendezeitfehler $\Delta t_s$, welcher sich mit einem quadratischen Fehler-modell berechnen lässt. Dieses wurde für die Schüler/innen bereits im Matlab-Code implementiert. Zur Verbesserung des Modells müssen sie die Fehlerkorrektur $t_S - \Delta t_s$ bei der Berechnung der Satellitenkoordinaten und der Pseudoentfernungen berücksichtigen.

Ein weiteres Phänomen, welches im ersten Modell noch nicht berücksichtigt wurde, ist die Tatsache, dass die Uhr im Empfänger nicht absolut genau geht und somit ein Empfängerzeitfehler $\Delta t_E$ vorliegt. Die Fehlerkorrektur $t_E - \Delta t_E$ ergibt die korrigierte Pseudoentfernung $(t_E - \Delta t_E - t_S) \cdot c = d_s - c\,\Delta t_E$. Da mit $\Delta t_E$ eine weitere Unbekannte vorliegt, werden vier Gleichungen bei der Bestimmung der Empfängerkoordinaten benötigt. Dazu müssen die Daten eines weiteren Satelliten hinzugenommen werden, sodass man das nichtlineare Gleichungssystem

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(1)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(1)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(1)}\right)^2} = d_{S(1)} - c\,\Delta t_E$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(4)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(4)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(4)}\right)^2} = d_{S(4)} - c\,\Delta t_E$$

erhält. Zur Lösung des Gleichungssystems setzen die Schüler erneut Matlab ein und erhalten auf diese Weise den Empfängerzeitfehler $\Delta t_E$ und die Empfängerkoordinaten $(x_E, y_E, z_E)$.

Da ein GPS Empfänger zwischen 8 und 12 Satellitensignale gleichzeitig empfängt, besteht weiter die Möglichkeit, die Daten aller Satelliten zu verwenden, wodurch weitere Gleichungen hinzukommen.

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(1)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(1)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(1)}\right)^2} = d_{S(1)}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{\left(x_E - x_{S(n)}\right)^2 + \left(y_E - y_{S(n)}\right)^2 + \left(z_E - z_{S(n)}\right)^2} = d_{S(n)}$$

Wir erhalten ein überbestimmtes Gleichungssystem und somit ein nichtlineares Ausgleichsproblem, welches mit der kleinsten Fehlerquadratmethode von Matlab gelöst werden kann.

Die Form der Erde wurde im ersten Modell als Kugel angenommen. Tatsächlich hat sie allerdings eher die Form eines Ellipsoiden, den man sich bildlich als an den Polen zusammengedrückte Mandarine vorstellen kann.

Der Referenzellipsoid WGS84 eignet sich als besseres Modell für die Form der Erde. Die geographischen Koordinaten müssen demnach auf dem Referenzellipsoiden bestimmt werden. Die entsprechenden Gleichungen werden von den Schüler/innen im Internet recherchiert und anschließende mit Matlab gelöst.

In Abbildung 2 (links) ist dargestellt, wie sich die einzelnen Modellverbesserungen auf die Berechnung der Empfängerposition auswirken. Es wird deutlich, dass jede einzelne Modellverbesserung noch nicht zu einem zufriedenstellenden Ergebnis führt. Werden aber alle Modellverbesserungen gemeinsam vorgenommen, so erhält man einen bis auf wenige Meter korrekt berechneten Empfängerstandpunkt, wie in Abbildung 2 (rechts) dargestellt.


**Abbildung 2:** links: Auswirkungen der verschiedenen Modellverbesserungen: (0) keine Ver-besserung, (1) Satellitenuhr, (2) Empfängeruhr, (3) Form der Erde, (4) alle Satelliten; rechts: Alle Modellverbesserungen zusammen liefern eine gute Näherung für die Empfängerkoordi-naten.

Im Rahmen dieses Workshops durchschreiten Schüler/innen den Modellierungskreislauf mehrfach und können ihr Ergebnis stets direkt überprüfen. Sie erleben so, wie sich das Ergebnis durch schrittweise Verbesserung der Modellannahmen ebenso schrittweise verbessert.

## Literatur


Borre, K., & Strang, G. (2012). *Algorithms for global positioning*. Wellesley-Cambridge Press.

Frank, M. & Roeckerath, C. (2012). Gemeinsam mit Profis reale Probleme lösen. Mathematik Lehren, Heft 174*, S. 59 - 61.*

Alexander ROPPELT, Berlin

# Messung heterogener mathematikbezogener Lerngelegenheiten im Hochschulstudium

Lerngelegenheiten, bzw. das englische Pendant *opportunitiy to learn* (OTL), sind ein zentraler Begriff in vielen Bereichen der Bildungsforschung (im Überblick: Kurz, 2011; Stevens & Grymes, 1993). Sie lassen sich definieren als „contexts in which children are asked to engage in activities that promote skill development" (Byrnes & Wasik, 2009, S. 173).

Bei der Beschreibung schulischer Lerngelegenheiten werden häufig drei Aspekte unterschieden (z. B. Leighton, Mullens, Turnbull, Weiner & Williams, 1995): Inhalte des Curriculums, Unterrichtsstrategien und Unterrichtsressourcen. Im Anschluss an Carroll (1963) lässt sich als zusätzlich relevanter Aspekt noch die Zeit ergänzen (vgl. das Modell von Kurz, 2011). Vergleicht man diese Aspekte hinsichtlich ihrer Wirkung auf die Leistungsentwicklung, so erweisen sich Inhalt und Zeit als am einflussreichsten (Elliott, 2015; Porter, 2002). Bei der Erfassung von Lerngelegenheiten haben sich – neben indirekten Maßen wie Kursniveau, Schulart u. ä. – Fragebögen als sehr geeignetes Instrument erwiesen, um die Quantität von Lerngelegenheiten zu beschreiben, weniger für deren Qualität (Porter, 2002).

## Zielstellung

Lerngelegenheiten wurden bislang vor allem im Bereich der Schule thematisiert. Mit der vorliegenden Studie soll die Perspektive auf die mathematikbezogenen Lerngelegenheiten im Hochschulstudium erweitert werden. Hierfür wurden Instrumente entwickelt, mit denen mathematikbezogene Lerngelegenheiten über das ganze Spektrum an Studiengängen hinweg in effizienter Weise erfasst und gemessen werden können. Für die Validität dieser Instrumente werden empirische Belege vorgestellt. Die Lerngelegenheiten werden dabei wegen ihrer großen Heterogenität nicht in allen Aspekten erfasst. Vielmehr zielen die hier vorgestellten Instrumente lediglich darauf ab, interindividuelle Unterschiede in der Quantität der Lerngelegenheiten abzubilden.

## Methode

Die vorliegende Studie ist an eine große Längsschnittstudie angeschlossen, die den Übergang vom Ende der gymnasialen Oberstufe ins Berufsleben untersucht (TOSCA-Studie; Köller, Watermann, Trautwein & Lüdtke, 2004). Die Basiserhebung (T1) umfasste eine breit angelegte Testung einer

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

repräsentativen Stichprobe von 4730 Abiturientinnen und Abiturienten aus Baden-Württemberg. Für die vorliegende Studie unterzog sich eine Teilstichprobe von 382 Studierenden aller Fachrichtungen fünf Jahre nach dem Abitur (T2) wiederum einem Mathematiktest (s. a. Roppelt, 2009). Die mathematikbezogenen Lerngelegenheiten im Studium wurden mit zwei Instrumenten zu T2 erfasst: (1) Selbstberichteter Mathematikanteil im Studiengang auf einer Skala von 0 (keine Mathematik im Studium) bis 4 (überwiegender Teil des Studiums besteht aus Mathematik), wobei typische Studienfächer als Anker für die Kategorien vorgegeben waren. (2) Differenzierte Skalen nach im Studium behandelten mathematischen Stoffgebieten. Dabei wurde ein Zugang über mathematische Inhaltsbereiche gewählt. Denn deren Breite spiegelt neben der Inhaltsfacette auch die Zeit und – zu einem gewissen Grad – auch die Tiefe der Auseinandersetzung mit Mathematik im Studium wieder. Für ein Gesamtmaß an Lerngelegenheiten im Studium wurden hoch korrelierte Stoffgebiete summativ zu einer Skala zusammengefasst. Diese umfasste 20 Items zu den Bereichen Analysis, Algebra (auch lineare), Zahlentheorie sowie Geometrie und wies eine sehr hohe interne Konsistenz auf ($\alpha = .95$). Abbildung 1 zeigt Beispielitems aus dem Bereich Analysis. Mathematikkompetenz wurde mit dem *Advanced Mathematics Test* aus der TIMS-Studie gemessen, einem internationalen Test, der sich am Curriculum voruniversitärer Kurse am Ende der Sekundarstufe II orientiert (vgl. Baumert, Bos & Lehmann, 2000). Darüber hinaus kam ein Fragebogen mit zahlreichen weiteren Fragen (u. a. zum math. Selbstkonzept) zum Einsatz.

**Wie oft wurden die folgenden Gebiete der Mathematik im Laufe Ihres bisherigen Studiums benötigt, behandelt oder angewandt?**

| | Nie | Selten | Häufig |
|---|---|---|---|
| 8. Funktionen („$f(x)=x^2$, $g(x)=\exp(x)$, $h(x)=-\frac{1}{3}x+1$“) ...................... | a | a | a |
| 9. Differentialrechnung mit einer Veränderlichen („$f'(x)$“) ...................... | a | a | a |
| 10. Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen („$\partial f/\partial y\,(x,y,z)$“) ...................... | a | a | a |
| ⋮ ⋮ | | ⋮ | |
| 14. Funktionentheorie (Analysis komplexer Funktionen, Residuensatz, Holomorphie) ...................... | a | a | a |

**Abbildung 1 Beispielitems zu den Lerngelegenheiten im Studium im Bereich Analysis**

## Ergebnisse

Der selbstberichtete Mathematikanteil im Studium (Skala von 0 bis 4)

- deckt sich bzgl. seiner Verteilung mit den Erwartungen, die sich aus den jeweiligen Studienfächern ergeben (konvergente Validität);
- differenziert unterschiedliche Entwicklungen mathematischer Kompetenz (prognostische Validität)
- korreliert auch innerhalb jedes Studienfaches noch positiv mit mathematischer Kompetenz (inkrementelle Validität).

Die Skala der Lerngelegenheiten nach Stoffgebieten ist hoch korreliert mit dem selbstberichteten Mathematikanteil im Studium und es gelten i. W. die eben genannten Validitätsindizien. In der Vorhersage mathematischer Kompetenz leistet die Skala darüber hinaus jedoch einen substanziellen eigenen Beitrag zur Varianzaufklärung. Weiterhin erwiesen sich in einer Kommonalitätsanalyse (Nimon, Lewis, Kane & Haynes, 2008) beide Maße bzgl. der Vorhersage von mathematischer Kompetenz als klar distinkt vom mathematischen Selbstkonzept.

## Zusammenfassung und Diskussion

Die vorliegende Studie zeigt, dass ein einzelnes 5-stufiges Item für eine grobe Abschätzung der globalen mathematikbezogenen Lerngelegenheiten im Hochschulstudium genügt. Die Skala auf Basis der mathematischen Inhaltsgebiete im Studium bietet ein noch genaueres Maß. Obwohl die vorgestellten Instrumente primär auf den Fall vielfältiger Studiengänge abzielen, könnte insbesondere die inhaltsbezogene Skala auch in Studien nützlich sein, in denen die untersuchte Population vergleichsweise homogen bezüglich ihrer Lerngelegenheiten ist, wie z. B. bei verschiedenen ingenieurwissenschaftlichen oder Lehramtsstudiengängen. Sollten Aspekte der Qualität der Lerngelegenheiten für die untersuchte Fragestellung von Bedeutung sein, müssten diese jedoch auf anderen Wegen erfasst werden. Weiterhin werden Lerngelegenheiten im Bereich der Stochastik zwar erfasst, wegen ihrer Sonderrolle im Hochschulstudium wurden sie jedoch nicht in die Skala einbezogen. Ihre Rolle ist noch gesondert zu untersuchen. Offen bleibt der messtheoretische Status von Lerngelegenheiten. Zwar liefert diese Studie einige Belege für die Validität der Skala, die hier pragmatisch und im Einklang mit dem Vorgehen in der Literatur summativ gebildet wurde, ein theoriegeleitetes Messmodell fehlt jedoch. Tatsächlich ist in fundamentaler Weise unklar, wie ein solches aussehen sollte. Denn in die klassische Unterscheidung von reflexiven und formativen latenten Variablen nach Bollen und Lennox (1991) lassen sich die Lerngelegenheiten nicht einordnen, da sie Eigenschaften beider Variablentypen besitzen. Offen bleibt deshalb auch, mit welchen Kriterien man die Güte von Lerngelegenheitenskalen empirisch überprüfen sollte (etwa bzgl. Dimensionalität) und wie Messfehler für solche Skalen zu bestimmen sind.

## Literatur


Baumert, J., Bos, W. & Lehmann, R. (Hrsg.). (2000). TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. 2. Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe. Opladen: Leske u. Budrich.

Bollen, K. & Lennox, R. (1991). Conventional wisdom on measurement: A structural equation perspective. Psychological Bulletin, 110 (2), 305–314.

Byrnes, J.P. & Wasik, B.A. (2009). Factors predictive of mathematics achievement in kindergarten, first and third grades: An opportunity-propensity analysis. Contemporary Educational Psychology, 34 (2), 167–183. doi:10.1016/j.cedpsych.2009.01.002

Carroll, J.B. (1963). A model of school learning. Teachers College Record, 64 (8), 723–733.

Elliott, S.N. (2015). Measuring Opportunity to Learn and Achievement Growth: Key Research Issues With Implications for the Effective Education of All Students. Remedial & Special Education, 36 (1), 58–64. doi:10.1177/0741932514551282

Köller, O., Watermann, R., Trautwein, U. & Lüdtke, O. (2004). Wege zur Hochschulreife in Baden-Württemberg. TOSCA - Eine Untersuchung an allgemein bildenden und beruflichen Gymnasien. Opladen: Leske u. Budrich.

Kurz, A. (2011). Access to What Should Be Taught and Will Be Tested: Students' Opportunity to Learn the Intended Curriculum. In S.N. Elliott, R.J. Kettler, P.A. Beddow & A. Kurz (Hrsg.), Handbook of Accessible Achievement Tests for All Students (S. 99–129).

Leighton, M.S., Mullens, J.E., Turnbull, B., Weiner, L.K. & Williams, A.S. (1995). Measuring Instruction, Curriculum Content, and Instructional Resources: The Status of Recent Work. ( No. ED418115). Washington, DC.: Policy Studies Associates, Inc. Zugriff am 30.1.2015. Verfügbar unter: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED418115.pdf

Nimon, K., Lewis, M., Kane, R. & Haynes, R.M. (2008). An R package to compute commonality coefficients in the multiple regression case: An introduction to the package and a practical example. Behavior Research Methods, 40 (2), 457–466.

Porter, A.C. (2002). Measuring the Content of Instruction: Uses in Research and Practice. Educational Researcher, 31 (7), 3–14.

Roppelt, A. (2009). Mathematische Grundkompetenzen von Studierenden. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium - Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht (S. 235–244). Münster: Waxmann.

Stevens, F.I. & Grymes, J. (1993). Opportunity To Learn: Issues of Equity for Poor and Minority Students. ( No. NCES-93-232). Washington, DC, US: National Center for Education Statistics. Zugriff am 11.6.2015. Verfügbar unter: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED356306.pdf

Jürgen ROTH, Landau

# Lehr-Lern-Labor Mathematik – Lernumgebungen (weiter-) entwickeln, Schülerverständnis diagnostizieren

Lehramtsausbildung lebt von der Verzahnung theoretischer Ausbildungsanteile mit der Unterrichtspraxis. Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr", einem Lehr-Lern-Labor, das dem forschenden Lernen von Studierenden dient, kann dies gelingen. Hier arbeiten Schulklassen an von Studierenden theoriegeleitet entwickelten Lernumgebungen, die diagnostische Analysen ermöglichen. Über Video-Vignetten kann die diagnostische Auseinandersetzung mit Schülerarbeitsphasen auch in Großveranstaltungen stattfinden.

## 1. Mathematik-Labor „Mathe ist mehr"

Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr" (*www.mathe-labor.de*) am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau ist ein Schülerlabor Mathematik (vgl. Baum et al. 2013). Hier arbeiten Schulklassen jeweils drei Doppelstunden anhand von enaktiv nutzbaren Materialien und Computersimulationen in Gruppen zu je vier Schüler/innen an einem Lehrplanthema. Die Vor- und Nachbereitung findet im schulischen Mathematikunterricht statt. Das Mathematik-Labor dient der Unterrichtsentwicklung, der Lehrer-aus- und -fortbildung sowie der mathematikdidaktischen Forschung (vgl. Roth, 2013). In diesem Beitrag steht der Aspekt des Lehr-Lern-Labors im Fokus, also die Einbindung des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr" in die Lehramtsausbildung im Rahmen der Lehramtsstudiengänge Mathematik.

## 2. Idealisiertes Modell zyklischen Forschenden Lernens von Lehramtsstudierenden in Lehr-Lern-Laboren

Eine konsequente und intensive Einbindung der Arbeit an und mit einem Schülerlabor Mathematik bietet eine nahezu ideale Voraussetzung um eine intensive Verzahnung der theoretischen Ausbildung der Lehramtsstudierenden mit der Unterrichtspraxis aber auch der Forschungspraxis in der Mathematikdidaktik zu ermöglichen. Dies gilt insbesondere dann, wenn es gelingt, die Lehr-Lern-Labor-Arbeit als zyklisches forschendes Lernen zu organisieren. Ein entsprechendes idealisiertes Modell des zyklischen Forschenden Lernens (Nordmeier et al. 2014) wurde im Rahmen des von der Deutschen Telekom Stiftung finanzierten Entwicklungsverbundes „Schülerlabore als Lehr-Lern-Labore" konzipiert (vgl. Abb. 1). In diesen Prozess kann man prinzipiell an beliebiger Stelle einsteigen. Um aber beginnen zu können, sind an jeder Stelle Voraussetzungen nötig, die vorher bereit- bzw. sichergestellt werden müssen. Steigt man etwa mit der Planung von Lernumgebungen des Schülerlabors und der zugehörigen Konstruktion von

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Lernmaterialien ein, dann ist dazu fachliches und fachdidaktisches Wissen unabdingbar. Darüber hinaus sind aber auch Reflexionsergebnisse aus der theoriegeleiteten Evaluation von vorausgegangenen Schülerlabordurchläufen sowie deren Interpretation hinsichtlich der Implikationen für die Gestaltung der Lernarrangements wesentliche Voraussetzungen dafür eine qualitativ hochwertige Laborlernumgebung zu entwickeln.

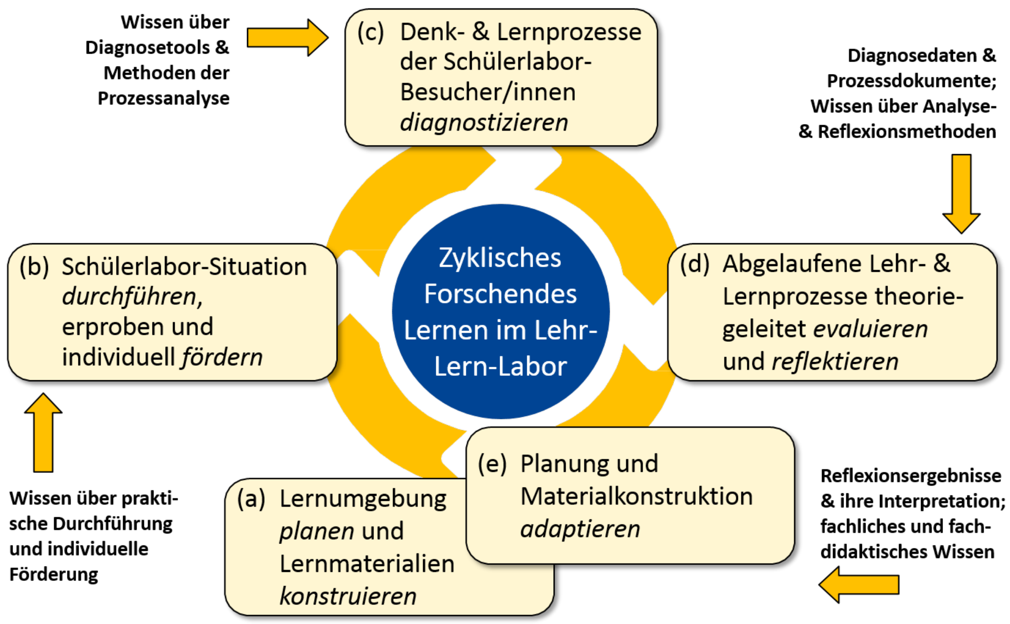



**Abb. 1: Zyklisches Forschendes Lernen im Lehr-Lern-Labor (idealisiert) nach Nordmeier et al. (2014)**

Der zyklische Prozess setzt sich mit der Durchführung und Erprobung der entwickelten Laborstation mit Schüler/inne/n und deren individuellen Förderung fort. Auch hierzu ist wieder spezifisches fachdidaktisches Wissen erforderlich. Parallel ist die Diagnose der Denk- und Lernprozesse der Schüler/innen während des Bearbeitens der Laborstationen notwendig, wozu Studierende über Wissen zu Diagnosetools und Methoden der Prozessanalyse verfügen müssen. Im Anschluss an den Labordurchlauf steht die theoriegeleitete Evaluation und Reflexion der Lehr-Lern-Prozesse die dabei stattgefunden haben. Hierzu sind Diagnosedaten (etwa Videoaufzeichnungen) und Dokumente aus dem Lernprozess (Erarbeitungsprotokolle der Schüler/innen) notwendig, die im Prozess aufgezeichnet werden müssen, und insbesondere Wissen und Fähigkeiten zur Analyse und empirischen Auswertung derartiger Daten. Auf der Grundlage dieser Evaluationsergebnisse und der Erfahrungen aus dem Labordurchlauf können dann die Planung und die Materialkonstruktion für die Station adaptiert und verbessert werden. Damit schließt sich der Kreis des forschenden Lernens Studierender in und mit einem Schülerlabor als Lehr-Lern-Labor.

## 3. Reale Integration eines Lehr-Lern-Labors in das Lehramtsstudium Mathematik am Beispiel des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“

Das im letzten Abschnitt idealisiert dargestellte zyklische Forschende Lernen lässt sich schon aus Zeitgründen im Rahmen eines Lehramtsstudiums nicht in Reinform realisieren. Um eine durchgehende Einbindung in die Mathematikdidaktische Ausbildung zu realisieren ist es notwendig auch in Großveranstaltungen Facetten des zyklischen Forschenden Lernens in Lehr-Lern-Laboren zu integrieren. Um Möglichkeiten und Grenzen aufzuzeigen, wird im Folgenden zunächst die bisherige Einbindung der Lehr-Lern-Laborarbeit in das Lehramtsstudium Mathematik am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau dargestellt. Daran anschließend wird die konzipierte Erweiterung hinein in die Fachdidaktischen Großveranstaltungen und die geplante methodische Umsetzung beschrieben (vgl. Abb.2).

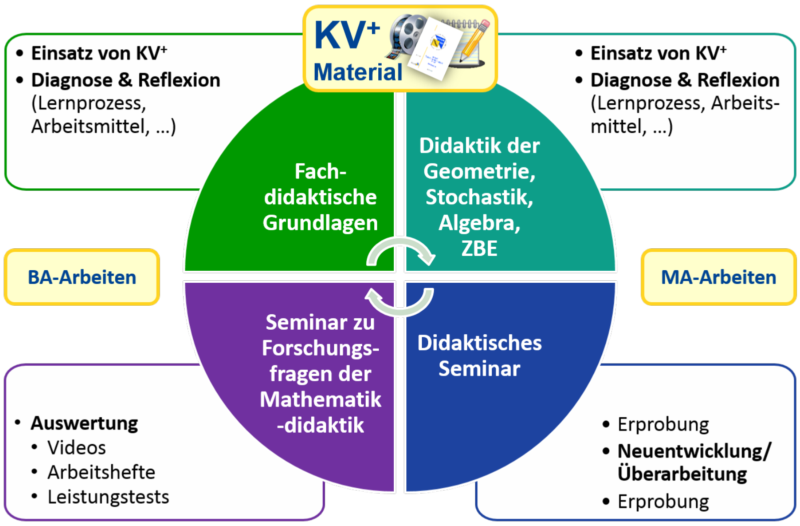



**Abb. 2: Reale Integration des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ in das Lehramtsstudium Mathematik am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau**

Bisher wird die Lehr-Lern-Labor-Arbeit im Masterstudium in zwei Lehrveranstaltungen aufbauend auf die theoretischen Kenntnisse aus mathematikdidaktischen (vier Großveranstaltungen mit je 2 SWS) sowie fachwissenschaftlichen und bildungswissenschaftlichen Veranstaltungen im Bachelorstudium eingebunden. Im „Didaktischen Seminar“ wird ein kleiner Zyklus forschenden Lernens realisiert: Die Studierenden

(1) erleben selbst aus der Perspektive von Schüler/inne/n einen Stationsdurchlauf durch das Mathematik-Labor,

(2) betreuen und reflektieren einen entsprechenden Stationsdurchlauf einer Schulklasse,

(3) konzipieren und entwickeln theoriegeleitet eine Laborstation des Mathematik-Labors mit allen Materialien (weiter),

(4) betreuen und reflektieren einen Stationsdurchlauf der von ihnen konzipierten Station.

Im „Seminar zu speziellen Forschungsfragen der Mathematikdidaktik“ erhalten die Studierenden eine Einführung in empirische Forschungsmethoden und werten auf dieser Basis Schülerdaten (Videos von Schülergruppen bei ihrer Stationsarbeit, Erarbeitungsprotokolle der Schüler/innen, Ergebnisse von Leistungstests, …) empirisch aus. Darüber hinaus bringen sich die Studierenden in beiden in den Seminaren umgesetzten Bereichen intensiv im Rahmen ihrer Bachelor- und Masterarbeiten ein. Die Prozessdiagnose beim Stationsdurchlauf der Schüler/innen ist bisher nur sehr rudimentär gegeben, aber für die theoriegeleitete Entwicklung von Laborstationen und für die spätere Berufspraxis der Studierenden von essentieller Bedeutung. Aus diesem Grund werden ab dem Sommersemester 2015 **k**ategorisierte **V**ideovignetten (**KV**$^{+}$) von Gruppenarbeitsphasen im Mathematik-Labor, angereichert um Zusatzmaterialien (Schülerdokumente, Arbeitsanleitungen, Materialien der bearbeiteten Station, …), im Rahmen der mathematikdidaktischen Großveranstaltungen im BA-Studium passgenau zu den dort erarbeiteten theoretischen Inhalten eingesetzt. Mit ihrer Hilfe soll die Fähigkeit der Studierenden zur theoriebasierten Prozessdiagnose und zur diagnosegeleiteten Mikroadaptation des Unterrichtshandelns ausgebildet und gefördert sowie die Arbeit im Schülerlabor vorbereitet werden.Für eine Darstellung der Konzeption der Einbindung von Videovignetten in Großveranstaltung, die Entwicklung des entsprechenden Online-Tools und die Vorgehensweise bei der empirischen Untersuchung zur Wirksamkeit sei auf den Beitrag Bartel & Roth (2015, in diesem Band) verwiesen.

## Literatur


Bartel, M.-E. & Roth, J. (2015). Diagnostische Kompetenz durch Videovignetten fördern. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Baum, S., Roth, J. & Oechsler, R. (2013). Schülerlabore Mathematik − Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen. *MU, 59* (5), 4-11

Nordmeier, V., Käpnick, F., Komorek, M., Leuchter, M., Neumann, K., Priemer, B., Risch, B., Roth, J., Schulte, C., Schwanewedel, J., Upmeier zu Belzen, A. & Weusmann, B. (2014). *Schülerlabore als Lehr-Lern-Labore: Forschungsorientierte Verknüpfung von Theorie und Praxis in der MINT-Lehrerbildung*. Unveröffentlichter Projektantrag.

Roth, J. (2013). Vernetzen als durchgängiges Prinzip – Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“. In A. Steinweg (Hrsg.), *Mathematik vernetzt.* (S. 65-80). Bamberg: UBP

Benjamin ROTT, Essen; Timo LEUDERS, Freiburg

# Neue Ansätze zur Erfassung epistemologischer Überzeugungen von Studierenden

Im Projektverbund LeScEd (Learning the Science of Education) im Rahmen der BMBF-Förderinitiative KoKoHs (Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor) werden Instrumente zur Erfassung von Forschungskompetenzen von Lehramtsstudierenden entwickelt. Das hier berichtete Teilprojekt fokussiert auf den Bereich mathematikbezogener Fähigkeiten und Überzeugungen von Studierenden des Lehramtes Mathematik. Ziel des Projektes ist die Entwicklung valider Erhebungsinstrumente in Verbindung mit der Weiterentwicklung der Theorie und Erfassung mathematikbezogener Überzeugungen.

## Theoretischer Hintergrund:

In der Psychologie werden epistemologische Überzeugungen als Einstellung / Beliefs zur Natur menschlichen Wissens, seiner Konstruktion und Rechtfertigung untersucht. Die Entwicklung entsprechender Überzeugungen auf einem sophistizierten Niveau wird als Bildungsziel angesehen, dass gerade für unsere heutige Informationsgesellschaft von großer Bedeutung ist. Man geht seit den 1990er Jahren davon aus, dass epistemologische Überzeugungen ein multidimensionales Konstrukt darstellen und dass ihre Entwicklung in mehr oder weniger unabhängigen Dimensionen von wenig reflektiert / naiv bis hin zu reflektiert / sophistiziert erfolgt. Hofer & Pintrich (1997) unterscheiden zwei Bereiche (*areas*) mit jeweils zwei Dimensionen: (*Nature of Knowledge* mit den Dimensionen *Certainty* bzw. *Simplicity of Knowledge* sowie *Nature or Process of Knowing* mit den Dimensionen *Source* bzw. *Justification of Knowledge*). Im Folgenden konzentrieren wir uns auf den Bereich „Sicherheit von Wissen".

Die empirische Erfassung epistemologischer Überzeugungen erfolgt sowohl in der Psychologie als auch in der Mathematikdidaktik oft mithilfe geschlossener Fragebögen durch Zustimmung bzw. Ablehnung vorgegebener Aussagen (vgl. Hofer & Pintrich 1997; Stahl 2011). Der Grad an Sophistiziertheit – wie angemessen die Überzeugungen vertreten werden – wird dabei in Regel an ihrer Position festgemacht: Wer Wissen für sicher hält, vertritt eher eine unreflektierte Position; wer Wissen hingegen (prinzipiell) für unsicher hält, dem wird zugeschrieben, dass er eher verstanden hat, wie menschliches Wissen generiert und gerechtfertigt wird: "At lower levels, absolute truth exists with certainty. At higher levels, knowledge is tentative and evolving." (Hofer & Pintrich 1997, S. 119)

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Im Prinzip gilt diese Gleichsetzung von Orientierung und Sophistiziertheit auch für die Mathematikdidaktik:

> "The majority of research that has examined students' beliefs about mathematics suggests that students at all levels hold nonavailing beliefs. In general, when asked about the certainty of mathematical knowledge, students believe that knowledge is unchanging." (Muis 2004, S. 330)

Es gibt aber zunehmend Stimmen, die eine solche Gleichsetzung von Belief-Orientierung und Sophistiziertheit der jeweiligen Beliefs für problematisch halten (vgl. Stahl 2011). Hier setzt unser Projekt an.

## Studie 1 – qualitative Untersuchung mithilfe von Interviews

Studie 1 (Rott, Leuders & Stahl 2014) wurde mit dem Ziel durchgeführt, empirische Belege für folgende Behauptung zu finden: Bei der Untersuchung epistemologischer Überzeugungen muss die jeweilige Orientierung von ihrer Sophistiziertheit unterschieden werden (vgl. Stahl 2011).

Es wurden 17 halbstandardisierte Interviews mit Lehramtsstudierenden, Mathematiklehrern, Mathematikern und Professoren durchgeführt. Als Diskussionsanlass wurden zu jedem Thema, das in den Interviews angesprochen wurde, Zitate von Vertretern gegensätzlicher Positionen präsentiert, zu denen sich die Interviewten zunächst positionieren sollten. Beispielsweise wurden zum Thema „Sicherheit mathematischen Wissens" ein Zitat von A. Beutelspacher („mathematisches Wissen ist sicher") und eines von A. H. Schoenfeld („mathematisches Wissen ist unsicher") dargeboten.

Die Auswertung dieser Interviews ergab, dass der Grad an Sophistiziertheit, mit denen die interviewten Personen argumentieren konnten, tatsächlich unabhängig von ihrer Orientierung ist. Beispielsweise gab es Personen, die die Position, mathematisches Wissen sei sicher, sophistiziert (d. h. mit sehr guten Argumenten) vertreten haben. Ebenso gab es Personen, die sehr unreflektiert der Position, mathematisches Wissen sei unsicher, zustimmen. Insgesamt konnten Vertreter aller vier möglichen Positionen (*sicher* vs. *unsicher* kombiniert mit *unreflektiert* vs. *sophistiziert*) identifiziert werden.

## Studie 2 – quantitative Untersuchung mithilfe von Fragebögen

Die Erkenntnisse aus Studie 1 wurden genutzt, um einen Fragebogen mit offenen Antwortmöglichkeiten zu konstruieren. Dieser Fragebogen wurde in Studie 2 (Rott et al. 2015) bei über 200 Studierenden eines mathematischen Lehramts an der PH Freiburg im Wintersemester 2013/14 eingesetzt. Erhoben wurden in einem Quasi-Längsschnitt die epistemologischen Überzeugungen von Studierenden zu Beginn und zum Ende ihres ersten Semesters sowie zu Beginn und zum Ende des vierten Semesters. Zusätzlich wurde u. a. die Fähigkeit zum mathematisch-kritischen Denken erfasst.

Die Kodierung dieser Fragebögen zeigt, dass sich auch in den schriftlichen Äußerungen der Studierenden alle vier Kombinationsmöglichkeiten (*sicher* vs. *unsicher* kombiniert mit *unreflektiert* vs. *sophistiziert*) epistemologischer Überzeugungen zur Sicherheit von Wissen identifizieren lassen und dass Orientierung und Sophistiziertheit der Überzeugungen unabhängig voneinander sind. Der Prozentsatz an Studierenden, die ihre Überzeugungen reflektiert vertreten können, nimmt über die Semester langsam zu (von knapp 10 % zu Beginn des ersten Semesters bis knapp 30 % zum Ende des vierten Semesters).

Die Auswertung des Tests zum mathematisch-kritischen Denken ergibt, dass die Viersemester (erwartungskonform) besser abschneiden als die Erstsemester. Interessant ist, dass diese Testergebnisse semesterübergreifend nicht mit der Orientierung der Überzeugungen, wohl aber mit ihrer Sophistiziertheit korreliert ist. Wir interpretieren diese Tatsache so, dass sich die Fähigkeit zum mathematisch-kritischen Denken während des Studiums gemeinsam mit der Reflektiertheit von epistemologischen Überzeugungen zur Mathematik entwickelt. Wir implizieren hier keine Kausalität, sehen aber einen inhaltlichen Zusammenhang. Zugleich ist diese Korrelation ein weiterer Beleg für unsere Behauptung, dass Belief-Orientierung und der Grad ihrer Sophistiziertheit voneinander unterschieden werden sollten.

## Diskussion und Ausblick

Die triangulative Zusammenschau der beiden Studien (Studie 1 qualitativ, Studie 2 quantitativ) liefert konvergente, empirisch fundierte Argumente für die von Stahl geforderte Unterscheidung zwischen eher übergreifenden Überzeugungen und eher flexibleren Urteilen. Die immer noch anzutreffende einfache Gleichsetzung von der Überzeugung der Sicherheit von Wissen mit einer sophistizierten Position ist offensichtlich nicht haltbar. Es bleibt aufzuklären, inwieweit auch andere Bereiche (z. B. der epistemologische Status von Wissen) ähnlich auszudifferenzieren sind.

Die empirisch untermauerte Unterscheidung zwischen den wissenschaftstheoretischen Überzeugungen (Orientierungen *sicher* vs. *unsicher*) und dem wissenschaftstheoretischen Wissen (welche sich in der Sophistiziertheit der Begründungen niederschlägt) lässt sich auch als Hinweis auf eine stärkere theoretische Trennung von Überzeugungs- und Wissensfacetten deuten. Sicherlich wäre eine weitere Ausdifferenzierung der Argumentationsformen (und nicht nur der Gradierung der Sophistiziertheit) wünschenswert – dies allerdings nicht im Sinne einer Entwicklung ökonomischer Instrumente zur Erfassung der Erreichung von Studienzielen.

Zur Deutung der Ergebnisse aus kompetenztheoretischer Sicht ist noch zu erwähnen: Ein Schluss von den korrelativen Aussagen der Studie 2 auf grundsätzliche psychische Strukturen kann im vorliegenden quer- und längsschnittlichen nicht-experimentellen Design allerdings nicht gezogen werden. Die gleichzeitige Entwicklung des wissenschaftstheoretischen Wissens mit dem kritischen Denken können Ergebnis der Lerngeschichte sein, etwaige Abhängigkeiten oder Unabhängigkeiten können vor diesem Hintergrund nicht als theoretischer Zusammenhang psychischer Konstrukte interpretiert werden (vgl. Renkl 2012). Für eine weitere Analyse wäre es notwendig, eine differentielle Wirkung verschiedener Interventionen (z.B. Problemlöseseminare mit mehr oder weniger starken Anteilen wissenschaftstheoretischer Reflexion) mit den entwickelten Instrumenten zu evaluieren.

Zum Zwecke einer weiteren (auch diskriminanten) Validierung wurde im Wintersemester 2014/15 eine um eine zusätzliche Belief-Dimension erweiterte Version des Fragebogens bei einer Kohorte von fast 500 Studierenden an der PH Freiburg und der Universität Duisburg-Essen eingesetzt. Diese Daten werden momentan (II/2015) ausgewertet.

## Literatur


Hofer, B. K. & Pintrich, P. R. (1997). The Development of epistemological Theories: Beliefs About Knowledge and Knowing and Their Relation to Learning. In: *Review of Educational Research 1997*, Vol. 67, 1, 88 – 140.

Muis, K. R. (2004). Personal Epistemology and Mathematics: A Critical Review and Synthesis of Research. *Review of Educational Research 2004*, 74, 3, 317 – 377.

Renkl, A. (2012). Modellierung von Kompetenzen oder von interindividuellen Kompetenzunterschieden: Ein unterschätzter Unterschied? *Psychologische Rundschau*, 63, 50–53.

Rott, B.; Leuders, T. & Stahl, E. (2014). “Is Mathematical Knowledge Certain? – Are You Sure?” An Interview Study to Investigate Epistemic Beliefs. *mathematica didactica*, 37 (2014), 118 – 132.

Rott, B.; Leuders, T. & Stahl, E. (2015). Assessment of Mathematical Competencies and Epistemic Cognition of Pre-Service Teachers. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 39 – 46.

Stahl, E. (2011). The Generative Nature of Epistemological Judgments: focusing on Interactions Instead of Elements to Understand the Relationship Between Epistemological Beliefs and Cognitive Flexibility (Chapter 3). In: J. Elen; E. Stahl; R. Bromme & G. Clarebout (Hrsg.). *Links Between Beliefs and Cognitive Flexibility – Lessons Learned*. Dordrecht: Springer.

Benjamin ROTT, Essen

# ProKlaR (Problemlösen im Klassenraum) – Wie gestalten Lehrkräfte Unterricht zum Problemlösen? Erste Ergebnisse

## Hintergrund

Die Problemorientierung und -zentrierung stellen wichtige Forderungen an modernen mathematischen Unterricht dar (Baumert, Klieme & Bos 2001). Es ist allerdings davon auszugehen, dass Lehrkräfte i. d. R. wenig Erfahrung besitzen, auf diese Weise zu unterrichten (ebd.). Und es gibt nur wenige Studien, die der Frage nachgehen, wie (insbesondere im Problemlösen unerfahrene) Lehrkräfte entsprechenden Unterricht gestalten. Hierzu gibt es nur vereinzelte und unsystematische Erkenntnisse aus Studien mit anderen Forschungsschwerpunkten (bspw. aus der TIMSS Video Studie, der Schweizerisch-Deutschen Videostudie und einzelnen „Lesson Studies").

Die Forschungsfrage der vorliegenden, explorativen Studie lautet daher: *Wie gestalten Lehrerkräfte Unterricht mit dem Inhalt „Problemlösen"?*

Ein Ziel des Projektes stellt das Herausarbeiten von typischem Lehrerverhalten in Stunden zum Problemlösen dar. Diese Verhaltensweisen sollen daraufhin untersucht werden, ob sie potentiell förderlich oder hinderlich sind für die Ausbildung von Problemlösekompetenzen bei Lernenden. In späteren Studien und für Lehrerfortbildungen könnten entsprechen Handlungsmuster dann zuverlässiger und schneller identifiziert werden.

## Methodische Entscheidungen

In Anlehnung an Hillje (2012), die Lehrkräfte bei der Arbeit mit kognitiv aktivierenden Aufgaben untersucht hat, wird die Frage wie folgt bearbeitet:

(1) Vorgabe bzw. Absprache einer Aufgabe mit der Lehrperson passend für die jeweilige Jahrgangsstufe (ca. eine Woche vor der Stunde).

(2) Erbitten einer schriftlichen Planung zur Stunde: knappe Angaben zur Lerngruppe, Lernziele, tabellarischer Verlaufsplan (Abgabe vor der Stunde).

(3) Aufzeichnung der Stunde; Fokus liegt auf der Lehrkraft, nicht auf den Schülern.

(4) Interview mit der Lehrkraft zur Stunde (Abweichungen, Erreichung der Lernziele) und allgemein (Erfahrungen zum Thema, Beliefs) (direkt im Anschluss an die Stunde).

Bei der Auswertung der Daten werden Schwerpunkte je nach Verlauf der Stunde gesetzt: Lehreraktivitäten werden nach den Prinzipien einer QIA kodiert und systematisiert, zusätzlich werden metakognitive Aktivierung und Diskursverhalten nach Kaune und Cohors-Fresenborg (2010) erfasst. Des Weiteren kann der Fokus auf Phasen im Problemlöseprozess, heuristische Aktivitäten und/oder Lehrer- und Schüler-Beliefs gelegt werden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Erste Ergebnisse

Zum derzeitigen Stand (Februar 2015) wurden für die hier beschriebene Studie vier Lehrkräfte gewonnen, deren Stunden aufgezeichnet wurden; hiervon werden im Folgenden drei dargestellt:

- Lehrerin A. Eine junge Lehrerin, die ihr Referendariat vor ca. 1,5 Jahren beendet hat und nun an einem Hannoveraner Gymnasium arbeitet. Gefilmt wurde eine Stunde zur „Sieben Tore"-Aufgabe in Jahrgang 6.
- Lehrerin C. Eine Lehrerin mit mehrjähriger Berufserfahrung, an einem Gymnasium in Meerbusch (NRW). In der Stunde wird ein selbstgewähltes Problem zur Berechnung von Nullstellen quadratischer Funktionen in Jg. 9 bearbeitet.

Lehrerin A hat aus drei für die Studie vorgegebenen Aufgabenstellungen die „Sieben Tore"-Aufgabe für ihre 6. Klasse ausgewählt. Lehrerin C hat ein eigenes Problem, „Wie weit fliegt der Speer?", für ihre 9. Klasse formuliert, um durch das Filmen „keine Stunde zu verlieren".

**Sieben Tore**

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig.

Wie viele Äpfel hatte er am Anfang? [Quelle: Bruder et al. 2005]

**Wie weit fliegt der Speer?**

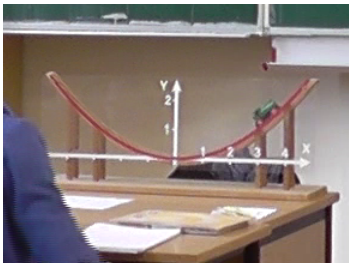
Die Flugkurve eines Speeres kann mit Hilfe der quadratischen Funktion $h(x) = -0{,}02\ x^2 + 0{,}8\ x + 1{,}8$ beschrieben werden. Hierbei gibt $h(x)$ die Höhe und die horizontale Entfernung des Speeres zum Abwurfpunkt jeweils in Metern an.

Wie weit ist der Speer geflogen? [Quelle: eigene Formulierung]

In beiden Fällen deutet das Schülerverhalten darauf hin, dass es sich tatsächlich um „Probleme" für die jeweiligen Klassen gehandelt hat: Es waren keine Routineprozeduren zur Lösung bekannt, die Lernenden haben unterschiedliche Herangehensweisen ausprobiert und verglichen. Tatsächlich verliefen beide Stunden organisatorisch sehr ähnlich: Lehrerin A und C haben jeweils die Aufgabe vorlesen lassen und im Anschluss keine Schülerfragen beantwortet. Die Lerngruppen sollten in Ich-Du-Wir-Phasen die Aufgaben zunächst einzeln bearbeiten und sich anschließend mit ihrem Sitznachbarn austauschen. Verschiedene Lösungswege wurden mittels Folien auf einem OHP (A) bzw. im Rahmen eines Galeriegangs (C) vorgestellt, bevor allgemein über die Lösung der Aufgabe diskutiert wurde. In beiden Fällen war die Schüleraktivität während der Stunde relativ hoch, die Beobachtungen und die Aussagen aus den abschließenden Interviews deuten aber darauf hin, dass die Lernenden bislang wenig Erfahrungen im eigenständigen Problemlösen sammeln konnten.

- Lehrer B. Ein Lehrer, mit mehr als 10 Jahren Berufserfahrung, der an derselben Schule unterrichtet wie Lehrerin A. In der Stunde wird ein selbstgewähltes Problem zur Einführung in die Differentialrechnung (Übergang von der Sekanten- zur Tangentensteigung) in Jahrgang 10 gezeigt.

Lehrer B hat (wie Lehrerin C) ein eigenes Problem gewählt; da er die Klasse erst kürzlich, mitten im Schuljahr, übernommen hatte, wollte er keine Stunde entbehren. Anders als Lehrerin A und C hat er kein Aufgabenblatt verteilt, sondern als Stundenaufhänger einen Versuch vorgeführt:



B (00:20): „Zu Beginn ein Experiment. Für dieses Experiment habe ich eine Eisenbahn mitgebracht. […] Bei diesem Modell handelt es sich um eine neue, zu testende Brücke. Diese Brücke hat eine etwas seltsame Form […] und die soll zwei Flussufer miteinander verbinden. Mit diesem Modell hier wird sie jetzt getestet. […]"

*Die elektrische Eisenbahn fährt von der Mitte der „Brücke" los und bleibt an einer bestimmten Stelle stecken – auch nach mehreren Versuchen immer ungefähr an derselben Stelle.*

„Was sagt Ihr dazu?"

Der Stundenverlauf ist gekennzeichnet dadurch, dass Lehrer B die Klasse noch nicht gut kannte und das Vorwissen der Lernenden nicht abschätzen konnte. Hinzu kam, dass direkt vor der gefilmten Stunde ein Referendar eine schematische Einführung in die Bestimmung von Tangenten an Funktionsgraphen unterrichtet hatte. Die SchülerInnen hatten diesen Zugang noch nicht verinnerlicht, waren in ihrer Diskussion des Einstiegsversuchs aber auf die aus der Vorstunde bekannten Verfahren fixiert. Lehrer B hat daraufhin seinen Stundenplan spontan geändert und mit der Klasse über Sekanten- und Tangentensteigungen diskutiert. Dies hat mehr als 45 min der Doppelstunde gedauert; die geplante Gruppenarbeit zur eigenständigen Bearbeitung der Einstiegsfrage hat deswegen nicht mehr stattgefunden.

Lehrer B reduziert seinen Redeanteil, indem er die Diskussion von Lernenden moderieren lässt. Er schaltet sich nur ab und zu in das Gespräch ein, indem er den Diskussionsstand zusammenfasst und eine möglicherweise ausufernde Diskussion wieder in produktive Bahnen lenkt. Seine Aussagen zeugen von sehr hohem Bewusstsein für Metakognition und Diskursivität (Kaune & Cohors-Fresenborg 2010). Dennoch kommt aus Seite der Lernenden kein wirklich problemlösendes Verhalten in Gang, dafür ist die Steuerung durch Lehrer B zu kleinschrittig.

## Diskussion

Bei (bislang) einer beobachteten Stunde pro Lehrkraft ist es natürlich schwierig, von „typischem Verhalten" (in bestimmten Situationen) – oder gar von

„Lehrertypen" – zu sprechen. Dennoch deuten die Ergebnisse auf bestimmte Muster hin: Lehrerin A und B zeigen Verhalten, dass an japanischen problemorientierten Unterricht erinnert (vgl. die TIMSS Video Studie): Die SchülerInnen erarbeiten unterschiedliche Lösungen und Lösungswege, die danach – von der Lehrerin ausgewählt – präsentiert und diskutiert werden. Im Unterschied zum japanischen Unterricht wird zumindest bei Lehrerin A allerdings kein Inhalt erarbeitet, der für folgende Stunden relevant ist. Das Verhalten von Lehrer B hingegen lässt – trotz sehr guter Klassenführung – kein echtes Problemlösen bei den SchülerInnen zu. Klieme et al. schreiben in ihrem Bericht zur TIMSS Video Studie zu solchem Verhalten:

„Die Lehrform des ‚fragend-entwickelnden' Unterrichtsgesprächs ist vielmehr – in ihrer Idealform – ein Versuch, beides auszubalancieren, das heißt eine gewisse Offenheit gegenüber Ideen der Schüler bei gleichzeitig zielorientierter Führung durch den Lehrer zu erreichen. Sie ist damit eine besonders anspruchsvolle Unterrichtsform, die häufig misslingt. Die Problematik dieses Unterrichts liegt unseres Erachtens darin, dass die Schüler **nicht auf der Ebene des eigentlichen komplexen Problemlöseprozesses kognitiv aktiviert werden, sondern auf der Ebene von Teilprozessen, im Sinne von Reproduktion, Assoziation und einfachen Operationen**. […]

Die Analyse […] verdeutlicht, dass das „Kleinarbeiten" komplexer Aufgaben im deutschen Unterricht besonders stark verbreitet ist; sie zeigt aber auch, dass andere Typen des problemorientierten Unterrichts, insbesondere andere Arten der Gestaltung von Einführungsphasen, möglich sind." (Klieme et al. 2001, S. 46; Hervorhebung BR)

## Literatur


Baumert, Jürgen; Klieme, Eckhard & Bos, Wilfried (2001). TIMSS-Ergebnisse zu Unterricht, Lehrerhandeln und mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung. In: BMBF (Hrsg). *TIMSS – Impulse für Unterricht und Schule* (S. 11 – 41). Bonn. URL (29.01.2015): http://bildungsklick.de/datei-archiv/50619/timss.pdf

Bruder, Regina; Büchter, Andreas & Leuders, Timo (2005). Die „gute" Mathematikaufgabe ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. In: Günter Graumann (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*.

Hillje, Manuela (2012): *Fachdidaktisches Wissen von Lehrerinnen und Lehrern und die didaktische Strukturierung von Mathematikunterricht – Fallanalysen zur kognitiven Aktivierung in Unterrichtsplanungen und realisiertem Unterricht*. Universität Oldenburg. URL (15.01.2014): http://oops.uni-oldenburg.de/1603/1/hilfac12.pdf

Kaune, Christa & Cohors-Fresenborg, Elmar (Hrsg.) (2010). *Mathematik Gut Unterrichten – Analyse von Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Klieme, Eckhard; Schümer, Gundel; Knoll, Steffen (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabenkultur" und Unterrichtsgestaltung. In: BMBF (Hrsg). *TIMSS – Impulse für Unterricht und Schule* (S. 43 – 57). Bonn. URL (29.01.2015): http://bildungsklick.de/datei-archiv/50619/timss.pdf

Thomas ROYAR, Christine STREIT, Liestal

# Determinanten von Operationsverständnis – Das spezifische fachdidaktische Wissen von Lehrpersonen

## 1. Rahmung

Obwohl mehrfach auf den Zusammenhang zwischen Operationsverständnis und Rechenleistung hingewiesen wird (Radatz, 1989; Moser Opitz, 2005; Schäfer, 2005; Royar, 2013) und eine hohe Bedeutsamkeit von Operationsverständnis in Bezug auf Rechenschwierigkeiten angenommen wird (Geary, Hoard & Hamson, 1999; Jacobs & Petermann, 2003), wird das Operationsverständnis in Testverfahren bislang gar nicht oder nur am Rande erfasst. Beispielsweise untersucht Freesemann (2014) Operationsverständnis lediglich als Teilbereich innerhalb eines allgemeinen Mathematikleistungstests mit wenigen Items, die lediglich eine paarweise Zuordnung von Darstellungen aus unterschiedlichen Bereichen - etwa einer verbal beschriebenen Handlung und einer symbolischen Darstellung - erfordern.

Möglicherweise liegt eine Ursache der unspezifischen Erfassung von Operationsverständnis in der Schwierigkeit der theoretischen Präzisierung dieses Konstruktes. Korff (2008, S.13) etwa definiert Operationsverständnis als „Integration von Handlungserfahrungen und Vorstellungsbildern in operative Handlungen auf der Symbolebene". Hier stellt sich die Frage, was genau unter Erfahrungen, Vorstellungen und Handlungen in Bezug auf das Operationsverständnis zu verstehen ist und in welcher Form sich diese manifestieren. Der Einbezug von drei bis fünf unterschiedlichen Repräsentationsmodi für Handlungen, Ikonisierungen und Symbolisierungen erhöht zudem die möglichen Störgrößen in der Erfassung.

So fehlt bislang ein Instrument, welches Antwort auf die Frage geben kann, wann ein Kind tatsächlich Operationsverständnis erlangt hat und wann Defizite bestehen, die zur Intervention Anlass geben. Zumindest für den Bereich des Multiplikationsverständnisses ist es kürzlich gelungen, dieses als Fähigkeit zu operationalisieren, unterschiedlich repräsentierten außermathematischen Kontexten einen passenden Term der Form a • b zuzuordnen (Royar, Ziska & Streit, 2014).

Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, das Multiplikationsverständnis der Kinder in Zusammenhang mit dem spezifischen Lehrerwissen zu betrachten. Als Hypothese (in Anlehnung an Krauss et al., 2011) formulieren wir, dass spezifisches Lehrerwissen über den Mediator Operationsverständnis die Rechenleistungen von Grundschülern positiv beeinflusst.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 2. Spezifisches Lehrerwissen zum Operationsverständnis

Ausgehend von der Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissens nach Krauss et al. 2008 werden für die vorgestellte Untersuchung folgende Elemente zum mathematikdidaktischen Wissen einer Lehrperson subsummiert:

– *Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte*

  Dieses Wissen wird durch Aufgaben operationalisiert, die auf eine Beschreibung konkreter (Unterrichts)Massnahmen zur Förderung des Operationsverständnisses der Grundrechenarten abzielen. Insbesondere fällt darunter die Anregung von Bedeutungszuweisungen zwischen Termen und kontextualisierten Inhalten.

– *Wissen über Schülerkognitionen*

  Zur Operationalisierung von Wissen über Schülerkognitionen werden Aufgaben gewählt, die eine Beurteilung von Schülerlösungen zu Intermodalitätsaufgaben verlangen.

– *Wissen über Aufgaben*

  Das Wissen über Aufgaben wird durch Aufgaben operationalisiert, die eine Klassifikation und Weiterentwicklung von Schulbuchaufgaben im Hinblick auf einen notwendigen Repräsentationswechsel erfordern.

## 3. Entwicklung eines Fragebogens zur Erfassung des Lehrerwissens

Um passende Aufgabenstellungen zu jedem dieser drei Elemente zu entwickeln, wurden Experten (Mathematikdidaktiker mit unterschiedlichen Arbeitsschwerpunkten, Mathematikdozierende und Mathematiklehrkräfte unterschiedlicher Schulstufen) herangezogen. Konsens bestand darin, dass ein zentraler Punkt zur Förderung des Operationsverständnisses die Anregung von Bedeutungszuweisungen zwischen Termen und kontextualisierten Inhalten (intermodalen Transfer) ist. Außerdem sollten Lehrpersonen in der Lage sein, die Bedeutungszuweisungen kriterienbezogen werten zu können (Wissen über Schülerkognitionen) sowie Aufgaben für Schüler auszuwählen oder zu konstruieren, die diese Bedeutungszuweisungen einfordern (Wissen über Aufgaben). Hiervon ausgehend wurde ein erster Fragebogen mit 60 Items konstruiert, der von etwa 100 Studierenden mit absolvierten Studieninhalten zum mathematischen Anfangsunterricht bearbeitet wurde. Als Bezugsnorm für die offenen Items wurde eine Expertennorm herangezogen (Seidel et al., 2010). Bei Auswertung der Daten zeigte sich Überarbeitungsbedarf des Fragebogens. Daraufhin wurden mit 10 Testpersonen kognitive Interviews (Willis 2005) geführt, in denen diese ihre Antworten auf die Fragen erläuterten und begründeten. Hiervon ausgehend wurden die Fragestellungen modifiziert, insbesondere in Bezug auf die Einschätzungen der Schülerantworten. So zeigte sich, dass Termini wie „problematisch" oder „gelungen" nicht nur auf den eigentlich gemeinten Kontext bezogen, sondern subjektiv interpretierend erweitert wurden. Entsprechend wurde im Folgenden nicht nach kategorischen Wertungen („welcher Darstellungswechsel ist gelungen?"), sondern nach Handlungsoptionen („bei welcher Schülerantwort würden Sie nachhaken?") gefragt. Eine ähnliches Vorgehen wurde bei der Auswahl „geeigneter" Aufgaben zum Training des Darstellungswechsels gewählt: Statt diese nur als „geeignet" oder „nicht geeignet" zu kategorisieren, musste bei der überarbeiteten Version eine begründete Auswahl aus einem Pool erfolgen - mitsamt einer Spezifizierung der Aufgabenstellung für die Schüler. Durch diese Modifizierungen gewannen die Items deutlich an Trennschärfe, während gleichzeitig die Gesamtreliabilität gesteigert werden konnte.

> *Beispielaufgabe:* Wählen Sie aus den Vorlagen **vier** aus *(es wurden 8 Vorlagen auf Kärtchen präsentiert, darunter z. B. Punktefelder, Zahlenmauern, Texte, „bunte Hunde" und Bilder)*! Aus diesen konstruieren Sie bitte Aufgaben, mit denen Kinder den Wechsel der Darstellungsformen üben sollen.

Im zweiten Durchgang wurde die Zahl der Items zudem auf 45 reduziert, die Zahl der Teilnehmenden lag bei 89.

## 4. Auswertung und erste Ergebnisse

Die Auswertungskriterien wurden ebenfalls durch Expertenratings festgelegt. Alle Items wurden mindestens dreistufig zwischen 0 und 2 Punkten, einige Items vier- oder fünfstufig gewertet. Maximal konnten 95 Punkte erreicht werden, wobei die tatsächlich erreichte maximale Punkteanzahl 75 betrug, das Minimum lag bei 34 Punkten. Fünf Items wiesen einen Schwierigkeitsgrad unter 15% aus und wurden in die weiteren Analysen nicht mehr mit einbezogen. Inhaltlich konnten aus den offenen Aufgabenstellungen drei grundsätzliche Arten von Reaktionen auf Schülerdarstellungen zu Multiplikationstermen bzw. Anregungen zur Sinnstiftung identifiziert werden:

– Undifferenzierte Akzeptanz beliebiger Darstellungen und unspezifische Aufgabenstellungen, z. B. die Auswahl von „bunten Hunden".
– Stark selektive Akzeptanz einzelner Darstellungen und eng direktive Aufgabenstellungen, z. B. fragend-entwickelnde Settings mit

„zu erwartenden bzw. zu findenden“ Signalwörtern seitens der Kinder.

– Differenzierte Akzeptanz einzelner Darstellungen und differenzierte Aufgabenstellungen, z.B. öffnende Fragen zu Begründungen oder Alternativen.

Über die 40 Items hinweg lag Cronbachs Alpha bei .67, durch Eliminieren weniger trennscharfer Items ist ein Wert von .76 realisierbar. Hier erfolgt zurzeit eine differenziertere inhaltliche Analyse mit der Zielsetzung, den Fragebogen in Bezug auf Validität und Reliabilität dahingehend zu optimieren, dass er in einer Feldstudie zur Messung des spezifischen fachdidaktischen Wissens von Lehrpersonen in Bezug auf das Multiplikationsverständnis eingesetzt werden kann.

## 5. Ausblick

Die Untersuchungen zum spezifischen fachdidaktischen Wissen von Lehrpersonen in Bezug auf das Operationsverständnis stehen in einem größeren Zusammenhang, in dem dieses Wissen, das Vorwissen der Kinder und das Operationsverständnis der Kinder als interdependente Determinanten der Rechenleistung untersucht werden. Die Autoren erhoffen sich so mittelfristig Erkenntnisse zu handlungswirksamen Aus- und Weiterbildungsinhalten für Primarstufenlehrpersonen.

## Literatur (Auswahl)

Freesemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen*. Berlin: Springer.

Korff, N. (2008). *Entwicklung, Diagnose und Frühförderung mathematischer Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich.* http://www.mathedidaktik.uni-bremen.de/pdf/handbuch-elementarmathematik-diagnose.pdf

Krauss S., et al. (2011). Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter et al. (Hrsg.): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, (S. 135-161). Münster: Waxmann.

Royar, Th. (2013). *Handlung – Vorstellung – Formalisierung. Entwicklung und Evaluation einer Aufgabenreihe zur Überprüfung des Operationsverständnisses für Regel- und Förderklassen.* Hamburg: Kovac.

Royar, Th., Ziska, S., Streit, Ch. (2014). Entwicklung eines Instruments zur Erfassung des Operationsverständnisses der Multiplikation. In Roth, J., Ames, J. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht,* (S. 1019-1022). Münster: WTM.

Hana RUCHNIEWICZ, Essen

# Diagnose und Förderung in Selbstlernphasen im Themenbereich Funktionales Denken

Das in diesem Beitrag vorgestellte Dissertationsvorhaben entsteht im Rahmen des EU-Projekts FaSMEd (Improving Progress for Lower Achievers through Formative Assessment in Science and Mathematics Education). Einen Kern von FaSMEd bildet die Erstellung und Evaluation von Materialien zur Diagnose und Förderung im Unterricht im Sinne einer fachdidaktischen Entwicklungsforschung. Ziel der eigenen Studie ist die Entwicklung einer Lernumgebung zur Selbstdiagnose im Bereich Funktionales Denken für die Jahrgangsstufen 7/8 und deren empirische Untersuchung.

## 1. Theoretischer Hintergrund

Unter Diagnose im Unterricht wird das zielgerichtete Erheben von Informationen für ein angemessenes pädagogisches und didaktisches Handeln verstanden. Dabei ist das Erfassen von Schülerleistungen ebenso relevant wie das Verstehen dahinterstehender Konzepte (Hußmann et al. 2007).

Je nach Ziel der Informationserhebung unterscheidet man summative und formative Diagnose. Während Erstere die Leistungsüberprüfung fokussiert und eher am Ende einer Lerneinheit zu verorten ist, dient die formative Diagnose der Anpassung des Unterrichts an die Bedürfnisse der Lerngruppe. Sie erfolgt durch die kontinuierliche Auswertung der ablaufenden Lernprozesse (Bernholt et al. 2013). Dabei ist neben der Prozessorientierung besonders die aktive Teilhabe der Lernenden zentral. Selbstevaluation stellt somit eine bedeutsame Strategie formativer Diagnose dar. Sie zielt darauf, Lernende für die eigenen Stärken und Schwächen zu sensibilisieren. Ferner sollen sie Verantwortung für den eigenen Lernprozess übernehmen und diesen durch metakognitive Strategien zu steuern lernen (Heritage 2007).

Bei der Entwicklung einer selbstdiagnostischen Lernumgebung im Bereich Funktionales Denken sind drei Grundvorstellungen von Funktionen zentral: Zuordnung, Kovariation und Objekt. Statisch lokal betrachtet wird eine Funktion als Zuordnungsvorschrift einzelner Werte aufgefasst. Eine dynamischere Sichtweise bringt der Aspekt der Kovariation mit sich, denn hier steht die Veränderung zweier Größen miteinander im Vordergrund. Letztlich wird eine Funktion global als eigenständiges Objekt betrachtet. Diese drei Konzepte müssen Lernende aufbauen, um den mathematischen Funktionsbegriff erfassen und anwenden zu können (vom Hofe 2003).

Im Alltag begegnen Lernende variablen Darstellungsarten funktionaler Zusammenhänge. Um angemessen mit ihnen umzugehen, müssen sie die Fä-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

higkeit erwerben, flexibel zwischen den Darstellungen zu wechseln (Duval 2002). Dies erfordert das Beherrschen vielfältiger mathematischer Tätigkeiten, z.B. das Ablesen von Werten oder das Interpretieren von Graphen. Bei deren Ausübung können sich Verständnisschwierigkeiten in Form von Schülerfehlern äußern. In der Literatur wird eine Vielzahl an Fehlern im Bereich Funktionales Denken beschrieben (u.a. Clement 1985). Sie bieten Hinweise über mögliche (Fehl-)Vorstellungen der Lernenden und dienen als Grundlage für die Konzeption von Diagnose- und Fördermaßnahmen.

## 2. Methodologie und Forschungsfragen

Konzeption und Evaluation der Lernumgebung sind im zyklischen Prozess der fachdidaktischen Entwicklungsforschung verbunden. Durch wiederholtes Erproben in der Schulpraxis, Analysieren der Lernprozesse und Überarbeiten des Materials sollen das Design und die damit verbundene Theorie weiterentwickelt werden. Konkret ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Welche *inhaltlichen und methodischen Merkmale* sollten Lernumgebungen zur Diagnose und Förderung in Selbstlernphasen im Themenbereich Funktionales Denken aufweisen?
- Welche *Lernwege* sind *rekonstruierbar*, wenn Schülerinnen und Schüler mit der Lernumgebung zur Diagnose und Förderung in Selbstlernphasen im Themenbereich Funktionales Denken arbeiten?

## 3. Design der Lernumgebung

Im 1. Zyklus der Studie wurde die Lernumgebung auf Basis der Übekartei aus KOSIMA (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen) konzipiert (Barzel et al. 2012). Die Lernziele wurden durch die Formulierung von acht diagnostizierbaren Kompetenzen festgelegt. Die ersten Sechs beziehen sich auf einen bestimmten Darstellungswechsel zwischen situativer, numerischer und graphischer Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs. Hinzu kommen je eine Kompetenz zu variablen Darstellungswechseln und zum Kovariationsaspekt, um das Themengebiet ganzheitlich zu erfassen.

Die Lernumgebung ist durch fünf Kartentypen strukturiert: Die Lernenden beginnen mit der Bearbeitung einer Diagnoseaufgabe auf der *Überprüfen*-Karte. Dann vergleichen sie ihr Vorgehen mithilfe der *Check*-Karte mit einer Musterlösung. Auf dieser *Check*-Karte werden Aussagen zu erwarteten Fehlern präsentiert. Die Schülerinnen und Schüler schätzen selbst ein, ob diese auf ihre Lösung zutreffen. Wurde die Diagnoseaufgabe richtig gelöst, können zwei weitere *Üben*- und schließlich eine *Erweitern*-Aufgabe bearbeitet werden. Stellen die Lernenden einen Fehler fest, können sie entweder eine Hilfe in Form einer *Gut-zu-Wissen*-Karte in Anspruch nehmen oder direkt eine speziell auf diesen Fehler zugeschnittene *Üben*-Karte wählen. Schließlich werden sie von der Übung wieder zur 1. Karte geleitet, um den Lernfortschritt durch erneutes Lösen der Diagnoseaufgabe zu überprüfen.

## 4. Ein Fallbeispiel

Die Lernumgebung wurde in einer ersten Pilotierung durch videographierte Einzelinterviews mit drei Lernenden der 8. Klasse eines Gymnasiums erprobt. In einem Fallbeispiel soll im Folgenden der Lernweg eines Schülers für die Kompetenz *Kann ich zu einer gegebenen Situation einen Graphen erstellen?* nachvollzogen werden. Die Diagnoseaufgabe lautet:

> *Niklas fährt von zu Hause mit seinem Fahrrad los. Es geht zuerst ohne Steigung die Straße entlang, bevor er einen Hügel hinauf fährt. Oben auf dem Hügel bleibt er ein paar Minuten stehen, um die Aussicht zu genießen. Dann fährt er wieder herunter und bleibt unten am Hügel stehen. Zeichne einen Graphen aus dem man ablesen kann, wie sich die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit verändert.*

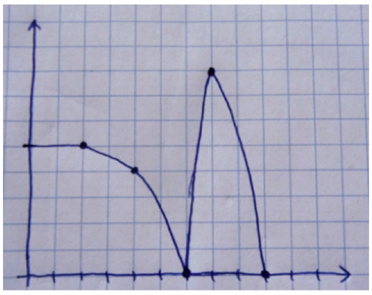


**Abb. 1: Roberts erste Lösung**

Robert ist vorerst durch die Abwesenheit von konkreten Werten irritiert, unterteilt dann aber die Zeit-Achse in Abschnitte der Länge 1 Minute und legt die Mitte der y-Achse als „normale Geschwindigkeit" fest. Dann zeichnet er einzelne Punkte in das Koordinatensystem und verbindet sie schließlich zum Graphen in Abb. 1.

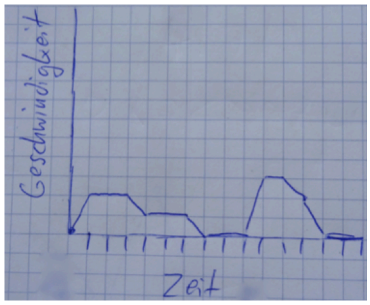



**Abb. 2: Roberts zweite Lösung**

Auf der *Check*-Karte stellt Robert fest, dass sein Graph nicht im Nullpunkt beginnt. Er entscheidet sich nun gegen eine Hilfe und bearbeitet die zum Fehler passende *Üben*-Karte. Darauf sind 9 Situationen beschrieben, für die er begründen soll, ob ein zugehöriger Graph im Nullpunkt beginnt. Robert löst 6 Teilaufgaben richtig, argumentiert aber auch bei korrekten Lösungen fehlerhaft. Seine Erklärungen beziehen sich lediglich auf sein Alltagswissen und er beachtet oftmals nur die Veränderung einer Größe. Graphen scheint er nicht als Darstellung des Zusammenhangs zweier Größen wahrzunehmen. Dies könnte durch eine unzureichende Ausbildung der drei Grundvorstellungen zu erklären sein.

Letztlich bearbeitet Robert erneut die Diagnoseaufgabe. Er zeichnet nun direkt einzelne Abschnitte des Graphen und beschreibt, wie viel Zeit jeweils vergeht und wie sich die Geschwindigkeit verändert. Dabei korrigiert er seinen Fehler, sodass sein neuer Graph (Abb. 2) im Nullpunkt beginnt.

## 5. Fazit und Ausblick

Robert kann seinen anfänglichen Fehler zwar beheben, es bleibt aber offen, ob die Korrektur auf die Intervention in der Lernumgebung zurückzuführen ist. Sie könnte z.B. durch die differenten Methoden beim Zeichnen des Graphs zustande kommen. Ferner zeigt Robert während der Übung Verständnisschwierigkeiten, die vermutlich auf eine unzureichende Ausbildung der drei Grundvorstellungen von Funktionen zurückzuführen sind. Weitere Analysen sollen daher deren Ausprägung bei den Lernenden fokussieren.

Darüber hinaus ist festzuhalten, dass die Lernumgebung individuelle Lernwege zulässt. Robert hat zunächst einen Fehler gemacht, ihn erkannt, eine Entscheidung über sein weiteres Handeln getroffen, dann eine Intervention durchlaufen und schließlich seinen Lernfortschritt geprüft. Allerdings ist fraglich, inwiefern dieser Weg bewusst durchlaufen wird. Daher werden die nächsten Analysen ein Augenmerk darauf setzen, inwiefern die Lernenden ihre eigenen Denkprozesse reflektieren und welche Schritte sie bei der Überwindung von Fehlern durchlaufen.

Mit diesen Schwerpunkten werden weitere Schülerinterviews im 1. Zyklus durchgeführt und analysiert, um die Lernumgebung zu verbessern und erneut zu testen. Darüber hinaus wird sie technisch in der server-basierten Software JACK umgesetzt. Dies ermöglicht nicht nur die Vorgabe der Hyperlinkstruktur und das Generieren von Feedback, sondern eröffnet die Chance im weiteren Projektverlauf quantitative Daten zu integrieren.

## Literatur


Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012). Mathewerkstatt - Mittlerer Schulabschluss - Allgemeine Ausgabe/5. Schuljahr - Übekartei. Berlin: Cornelsen.

Bernholdt, S., Rönnebeck, S., Ropohl, M., Köller, O. & Parchmann, I. (2013). Report on current state of the art in formative and summative assessment in IBE in STM – Part 1. ASSIST-ME Report Series No.1.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. *Proceedings of the 9th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 369-375.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* 1(2), 1-16.

Heritage, M. (2007). Formative Assessment: What do teachers need to know and do? *Phi Delta Kappa,* 89(2), 140-145.

Hußmann, S., Leuders, T. & Presiger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen - Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule,* 49(15), 1-8.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren,* 118, 4-8.

Christian RÜTTEN, Essen

# Negative Zahlen im Kontext des Thermometers

## 1. Thermometrie als Instruktionskontext für negative Zahlen

Im Hinblick auf die in der Sekundarstufe vorzunehmenden Zahlbereichserweiterungen lässt sich eine Tendenz erkennen, negative Zahlen vor oder parallel zur Bruchrechnung im Unterricht zu thematisieren (vgl. vom Hofe 2007). Den ersten Schritt der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ stellt dabei die Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden dar. Diese Erweiterung erfolgt heute oft bereits in Jahrgangstufe 5 bzw. 6 getrennt von der weiteren unterrichtlichen Thematisierung negativer Zahlen. Für diese Erweiterung wird häufig aufgrund der vermeintlichen Vertrautheit negativer Zahlen aus dem Bereich der Temperaturmessung das Thermometer als Instruktionskontext genutzt. Im Sinne von *task contexts* sollen solche Kontexte den Auf- und Ausbau von Vorstellungen zu mathematischen Gegenständen fördern und somit als deren Verstehensgrundlage dienen (van den Heuvel-Panhuizen 2005). Sie stellen entsprechend der konzeptuellen Metapherntheorie (Lakoff & Johnson 1980) Quellbereiche metaphorischer Konzeptualisierung dar. Konzeptuelle Metaphern können jedoch aufgrund des Fokussierungseffekts einen mathematischen Gegenstand nur partiell erschließen. Dabei werden zwar einige Aspekte des zu konzeptualisierenden Gegenstandes beleuchten (*highlighting*), andere aber auch verborgen (*hiding*) (vgl. Lakoff & Johnson 1980, S. 10-13). Der Rückgriff auf einen Kontext führt in der Instruktion daher nicht notwendig zu normentsprechenden Vorstellungen. Oft stellen Kontexte eine neue und eigenständige Anforderung dar (vgl. z. B. Steinbring 1994, S. 190). Für eine Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengerade über den Kontext des Thermometers erscheint somit neben der Vertrautheit der Lernenden mit diesem Messinstrument für den Lehrenden ein Wissen um mögliche Fehlvorstellungen, die aus diesem Kontext in den mathematischen Zielbereich der negativen Zahlen übertragen werden können, von zentraler Bedeutung. Dabei können nach Piaget (1981, S. 20 f.) die in der Wissenschaftsgeschichte eingenommenen Positionen oft ersten Aufschluss über die möglichen Sichtweisen der Lernenden geben.

## 2. Negative Zahlen als Maßzahlen auf der Thermometerskala

Obwohl negative Zahlen im europäischen Raum heute bei meteorologischen Temperaturangaben eine Selbstverständlichkeit darstellen, kann kaum genau bestimmt werden, wann die gegenwärtig gebräuchliche Thermometerskala nach Celsius um negative Werte erweitert wurde.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Fludd (1638) stellt ein Luftthermometer mit einer 13-teiligen Skala vor, wobei sechs Einheiten über und sechs unter der zentralen Linie bei 1 liegen (Abb. 1). Diese Skalierung spiegelt die Auffassung wieder, Kälte (lat. *hyems*) und Wärme (lat. *æstas*) seien zwei gegeneinander wirkende Naturkräfte, die in einem Bereich, der sog. *sphœra æqualitatis* ausgeglichen, 'temperiert' seien. Entsprechend werden auch die ersten, in der Mitte des 17. Jh. in Italien aufkommenden Flüssigkeitsthermometer mit einer ähnlichen, wenn auch feineren Skalierung versehen (vgl. Grigull 1986). Rømer (1644-1710) versucht, für sein Thermometer mit dem Gefrierpunkt von Salzlake einen absoluten Nullpunkt zu bestimmen. Einen ähnlichen Versuch unternimmt 1708 auch Fahrenheit. Beckman (1997) nimmt an, dass sowohl Rømer als auch Fahrenheit mit der Definition eines absoluten Nullpunkts versuchen, negative Zahlen als Maßzahlen bei der Temperaturmessung zu vermeiden. Allerdings ist eher anzunehmen, dass beide mit ihren Skalen der veränderten Sichtweise Ausdruck verleihen wollen, wonach die Temperatur als *ungeteilte* Größe bestimmt durch die Menge an Wärmesubstanz (*phlogiston* bzw. *caloricum*) und nicht als in Wärme- und Kältekraft *geteilte* Größe gesehen wird. Celsius (1701-1744) vermeidet die Notwendigkeit einer geteilten Skala mit negativen Werten bei der meteorologischen Temperaturmessung, indem er auf seiner Skala die Siedetemperatur von Wasser als Nullpunkt und dessen Gefrierpunkt als 100° festlegt (vgl. Beckman 1997). Vermutlich ist der Celsius-Schüler Strömer (1707-1770) der erste, der – das invertierte Celsius-Thermometer (sog. *Celsius novum*) gebrauchend – ab 1750 bei seinen Temperaturaufzeichnungen Werte mit negativem Vorzeichen für Temperaturen unter dem Gefrierpunkt verwendet. Diese Notationsform scheint sich ab Mitte des 18. Jh. in Europa für Thermometer mit einem Wertebereich über und unter null zu verbreiten. Anders als wohl von Rømer, Fahrenheit und auch Celsius intendiert, tragen jedoch entsprechende Skalen im gewissen Sinne den Gedanken der opponierenden

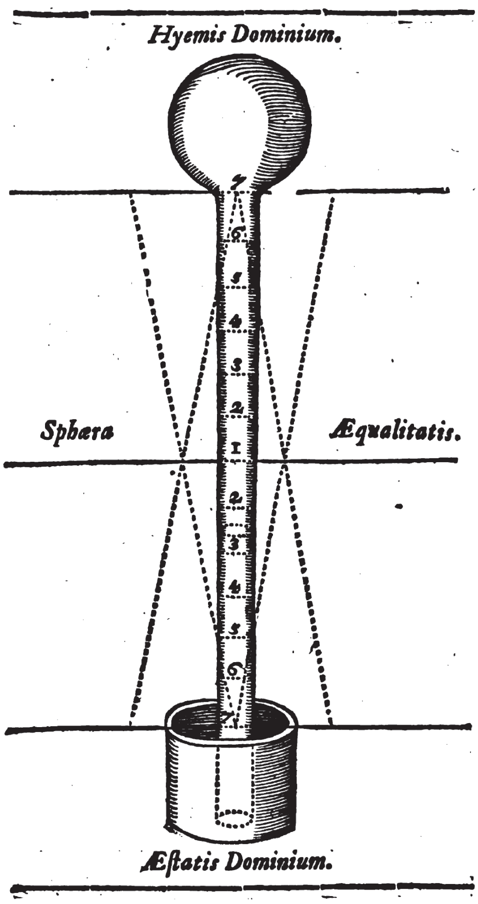



**Abbildung 1: Thermoskop bei Fludd (1638, Sec. I, Lib. I, Cap. II-III)**

(Sub-)Größen weiter, da die Null die Skala in einen Bereich warmer Temperaturen über null und kalter Temperaturen unter null teilt.

## 3. Vorstellungen zu negativen Zahlen im Kontext des Thermometers

Vorunterrichtliche Vorstellungen zu negativen Zahlen im Kontext des Thermometers waren neben entsprechenden Vorstellungen in weiteren Kontexten Gegenstand einer explorativen Untersuchung bei Grundschulkindern der Klassen 3 und 4. Dazu wurden die Lernenden in einer schriftlichen Befragung aufgefordert, ein Thermometer an einem kalten Wintertag zu zeichnen. Mit ausgewählten Lernenden wurden im Anschluss problemzentrierte Interviews zur näheren Erkundung der Schülerbearbeitungen aus der schriftlichen Befragung geführt.

Die Ergebnisse der schriftlichen Befragung zeigen, dass ungefähr zwei Drittel der 291 befragten Lernenden mit dem Thermometer negative Zahlzeichen verbinden. Dabei lassen die Thermometerzeichnungen zum Teil aber auch Fehlvorstellungen bezüglich Wärme und Thermometrie vermuten. So zeichnen einige Lernende Thermometer, die ausschließlich der Messung kalter Temperaturen dienen. Solche Kryometer können Skalen mit ausschließlich negativen Werten besitzen (Abb. 2). Im Gegensatz dazu zeichnet Yasmina (Klasse 4) ein Thermometer mit ausschließlich positiven Werten, erklärt im Interview aber, dass bei ihrem Thermometer die Messflüssigkeit bei zunehmender Kälte steigen würde. Für die Zeichner von Kryometern scheinen Wärme und Kälte zwei voneinander getrennte Kräfte oder Substanzen zu sein. Erickson (1979) stellt fest, dass viele Lernende im Alter von 6 bis 13 eine entsprechende Vorstellung besitzen, welche an die bis Ende des 17. Jh. in der Thermometrie vertretene Position erinnert. Wie sich eine solche Fehlvorstellung bezüglich der Thermometrie auf das Verständnis von negativen Zahlen auswirken kann, zeigt Fabian (Klasse 3). Auch er versteht Kälte und Wärme als zwei unterschiedliche Größen: *„Weil […] Wärme übersteigt halt die Kälte.“* Die Skala des von ihm gezeichneten Thermometers zeigt keine negativen Zahlen, wohl aber wie bei Fludd Werte über und unter null. Fabian bezieht sich bei Aufgaben an der Zahlengeraden explizit auf das Thermometer: *„Da hab ich’s so ähnlich wie beim Thermometer gemacht: nach der Null mit zehn weiterge-*

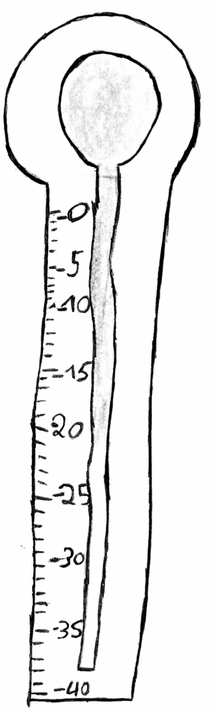


**Abbildung 2: Robins Kryometer (Nachzeichnung)**

*macht…“*. Das Thermometer bietet ihm folglich Orientierung im negativen Bereich der Zahlengeraden. Fabian scheint allerdings Fehlvorstellungen aus dem Bereich der Thermometrie in den Bereich der negativen Zahlen zu übertragen, was in diesem zu der von Malle (1989) beschriebenen Vorstellung einer spiegelbildlichen Anordnung der ganzen Zahlen führt. So nimmt Fabian bezüglich der Ordnungsrelation zwischen zwei negativen Zahlen an, dass die betraglich größere Zahl auch die numerisch größere Zahl sei. Dies entspricht der Vorstellung, dass der betraglich größere Wert die größere Kälte angibt.

Es zeigt sich somit, dass über den Kontext des Thermometers Fehlvorstellungen bezüglich Thermometrie auf die Vorstellung zu den negativen Zahlen übertragen werden können. Soll die Thermometrie als Kontext zur Thematisierung negativer Zahlen dienen, sind auch die Schülervorstellungen zu diesem Kontext zu berücksichtigen. Außerdem ist vor dem Hintergrund des oben beschriebenen Fokussierungseffekts zu erwägen, weitere Kontexte bei der Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden zu nutzen, um differenzierte Perspektiven auf den erweiterten Zahlbereich zu eröffnen.

## Literatur


Beckman, O. (1997). Anders Celsius and the fixed points of the Celsius scale. European Journal of Physics, 18(3), 169-175.

Erickson, G. L. (1979). Children’s conceptions of heat and temperature. Science education, 63(2), 221-230.

Fludd, R. (1638). Philosophia moysaica. Goudae: Petrus Rammazenius.

Grigull, U. (1986). Fahrenheit und die Thermometrie. Zum 300. Geburtstag von D. G. Fahrenheit. Naturwissenschaftliche Rundschau, 39(5), 201-208.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). Metaphors we live by. Chicago: University of Chicago Press.

Malle, G. (1989). Die Entstehung negativer Zahlen als eigene Denkgegenstände. mathematik lehren, H. 35, 14-17.

Piaget, J. (1981). Einführung in die genetische Erkenntnistheorie (2. Aufl.). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Steinbring, H. (1994). Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung - am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht. Journal für Mathematik-Didaktik, 15(3/4), 277-309.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. For the learning of mathematics, 25(2), 2-23.

Vom Hofe, R. (2007). Varianten im Unterrichtsgang. Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen. mathematik lehren, H. 142, 12-13.

Christian RÜTTEN, Stephanie WESKAMP, Essen

# Türme bauen – Eine kombinatorische Lernumgebung für Grundschulkinder und Lehramtsstudierende

## 1. Einleitende Bemerkungen

Ein und dieselbe mathematische Problemstellung kann Lernende verschiedenen Alters sowie unterschiedlicher Lernvoraussetzungen zu ähnlichen Entdeckungen herausfordern. Dazu muss diese im Sinne substanzieller Lernumgebungen reichhaltig in Bezug auf fachlichen Inhalt und mögliche mathematische Aktivitäten sein (vgl. z. B. Wittmann 1998; Krauthausen & Scherer 2014). Eine entsprechende kombinatorische Problemstellung aus dem Bereich des Auf- und Abzählens (vgl. Danckwerts u. a. 1985) liegt der Lernumgebung ‚Türme bauen' zugrunde. Während Probleme des *Aufzählens* auf die Auflistung der zu der Figurenmenge gehörenden Objekte zielen, versuchen Probleme des *Abzählens* die Frage nach der Mächtigkeit der entsprechenden Figurenmenge zu beantworten. Bei der Bearbeitung solcher Probleme sind Strukturierungs- und Zählstrategien von zentraler Bedeutung, wobei diese in der Regel in Wechselwirkung stehen (vgl. Höveler i. Dr.; auch Lockwood 2013). Einerseits beruhen Zählstrategien darauf, dass eine vorhandene Struktur des zu zählenden Bereichs genutzt oder eine geeignete Strukturierung vorgenommen wird (vgl. Müller & Wittmann 1984, S. 219), andererseits bieten sie häufig Hinweise auf effektivere Strukturierungen, die als Grundlage für Begründungen und Beweise der entsprechenden Zählstrategie dienen können. Aufgabenstellungen, die sowohl Aspekte des Auf- als auch des Abzählens umfassen, können unter anderem aufgrund dieses Zusammenspiels von Strukturierungs- und Zählstrategien eine gewisse inhaltliche Reichhaltigkeit besitzen.

## 2. Lernumgebung ‚Türme bauen'

Die kombinatorische Lernumgebung ‚Türme bauen' bietet sowohl Grundschulkindern als auch Lehramtsstudierenden vielfältige Zugangsweisen und Bearbeitungsmöglichkeiten. In dieser Lernumgebung sollen die jeweiligen Lernenden durch das Zusammenstecken von gelben und blauen 2x2-Legosteinen Türme bauen, wobei niemals blaue Legosteine aufeinandergesetzt werden dürfen (vgl. Rényi 1982, S. 128-130; Cofman 1992; Böttinger 2006). Dabei soll die Anzahl der Türme bestimmter Höhe gesucht und eine entsprechende Zählstrategie generiert werden. Als solche lässt sich eine der Fibonacci-Folge analoge Strategie ausmachen: Die Gesamtheit aller Türme aus $(n + 1)$ Steinen entsteht aus der Summe aller Türme aus $n$ Steinen, auf

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

die jeweils ein gelber Stein gesetzt wird, und aller Türme aus ($n$ – 1) Steinen, auf die zunächst ein gelber und dann ein blauer Stein gesteckt wird.

Diese Lernumgebung wird an der Universität Duisburg-Essen in zwei unabhängigen Kontexten eingesetzt, einerseits im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' andererseits in der Lehrveranstaltung ‚Elementare Kombinatorik'. Im Rahmen der ‚Mathe-Spürnasen' experimentieren Grundschulkinder der Jahrgangsstufe 4 an einem Vormittag an der Universität in Kleingruppen zu einem substanziellen mathematischen Thema. Jedes Thema umfasst eine Einführungseinheit und drei Vertiefungseinheiten mit verschiedenen Kontexten. Die kombinatorische Aufgabe ‚Türme bauen' stellt eine Vertiefung zum Thema ‚Fibonacci-Folge' dar, die in der Einführung im Zusammenhang mit der Kaninchenaufgabe entdeckt wurde. In der Vertiefung wird zunächst jedoch kein Bezug genommen, vielmehr soll der Zusammenhang in der Reflexion entdeckt werden.

Im Rahmen der Fachveranstaltung ‚Elementare Kombinatorik' für Lehramtsstudierende des ersten Semesters im Bachelorstudiengang für das Lehramt an Grundschulen soll die Auseinandersetzung mit den fachlich relevanten Inhalten für den Kombinatorikunterricht der Grundschule erfolgen. In den Übungen arbeiten die Studierenden im Sinne entdeckenden Lernens an kombinatorischen Lernumgebungen. Dabei wählen sie frei Sozialform und Hilfsmittel (z. B. Vorlesungsskript, Taschenrechner etc.). Die Bearbeitung dokumentieren die Studierenden schriftlich für ihr Veranstaltungsportfolio.

## 3. Strukturierungs- und Zählstrategien

Bei der Bearbeitung der Aufgabenstellung ‚Türme bauen' können unterschiedliche Strukturierungsstrategien zur Anwendung kommen. Verschiedene Autoren beschreiben auf empirischer Grundlage Strukturierungsstrategien für andere kombinatorische Aufgaben, welche zur Beschreibung des Strukturierungsspektrums beim ‚Türme bauen' adaptiert werden können. So werden unter anderem gestaltorientiert von Grundschulkindern und Studierenden Gegenpaare, Umwendungen oder Treppenmuster genutzt, um einen bzw. weitere Türme zu finden (vgl. z. B. English 1991; Stein 1995, 1999; Hoffmann 2003; Höveler i. Dr.). Dabei fokussieren diese Strukturierungen unter horizontaler Perspektive

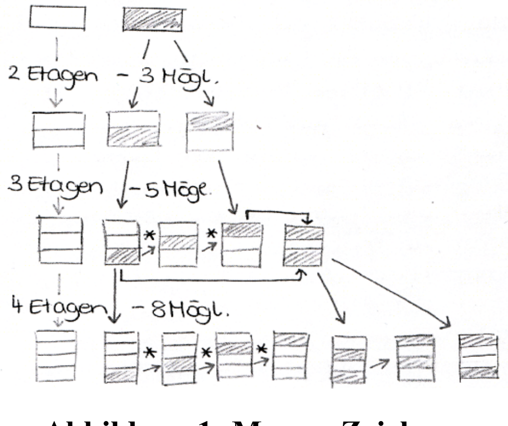


**Abbildung 1: Merves Zeichnung**

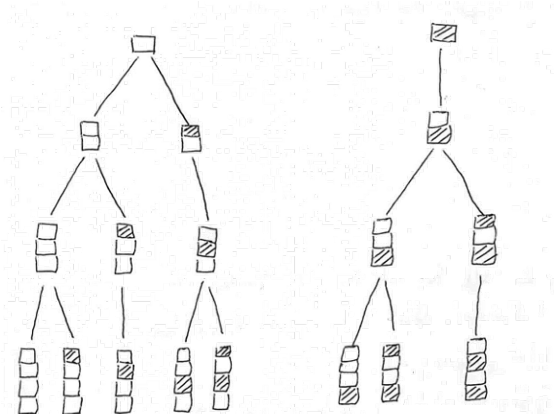


**Abbildung 2: Tims Zeichnung**

auf das Finden weiterer Türme derselben Höhe. Darüber hinaus finden sich zumindest in den Bearbeitungen der Studierenden auch Strategien unter sowohl horizontaler als auch vertikaler wie unter rein vertikaler Perspektive. Beispielsweise fertigt die Studentin Merve eine instruktive Zeichnung an, in der deutlich wird, dass sich sowohl unter horizontaler Perspektive weitere Türme gleicher Höhe durch Ausnutzen des Treppenmusters als auch unter vertikaler Perspektive Türme der Höhe ($n$ +1) aus Türmen mit $n$ Steinen aufgrund ähnlicher Bauprinzipien finden lassen (Abb. 1). Andere Studierende erstellen zur Dokumentation ihrer Bearbeitung unter rein vertikaler Perspektive Baumdiagramme, bei denen immer ein gelber und wenn möglich ein blauer Stein auf die Türme aus $n$ Steinen gesetzt wird, um Türme der Höhe ($n$ + 1) zu erzeugen (Abb. 2). Bei der Lernumgebung ‚Türme bauen' lassen sich somit Strukturierungen in Bezug auf *Spektrum* und *Perspektive* vornehmen.

Mittels dieser Strukturierungen entdecken die meisten Lernenden – Grundschulkinder wie Studierende – arithmetische Muster, denen sie die Qualität einer Zählstrategie beimessen. Dabei muss die vermutete Zählstrategie nicht immer korrekt sein. So erkennt der Viertklässler Florian bei den Türmen mit bis zu vier Steinen für die Anzahl der Türme $T_n$ das Muster $T_n = T_{n-1} + n - 1$ ($n <$ 5), welches von ihm wie folgt beschrieben wird: *„Weil das bei der zweiten Etage einer mehr ist als bei der ersten. Bei der dritten sind zwei mehr und bei der vierten sind drei mehr und bei der fünften sind dann vier mehr.*" Aufgrund dieses Musters schließt Florian, dass die Anzahl der Türme aus fünf Steinen 12 sei. Nina dagegen vermutet, dass es 18 Türme mit fünf Etagen gibt. *„Ich habe einfach so gerechnet, wie Mira das gerechnet hat letztes Mal und das zusammengezogen.*" Darin zeigt sich am konkreten Beispiel die Vermutung, dass die Summe $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$ die Anzahl der Türme der Höhe ($n$ + 1) liefern könnte. Sarah entdeckt in den Anzahlen der Türme das Muster der Fibonacci-Folge und nutzt es, um die Anzahl der Türme der Höhe 5 zu bestimmen: *„Weil zwei plus drei sind fünf und drei plus fünf sind acht. [...] Dann sind fünf plus acht, sind dann wieder dreizehn."* Diese Hypothesen zu Zählstrategien werden bei den ‚Mathe-Spürnasen' genutzt, um das Beweis- und Begründungsbedürfnis der Lernenden zu wecken, indem sie aufgefordert werden, durch eine erneute Strukturierung die vermutete Zählstrategie zu begründen. Die Studierenden werden durch die Aufgabenstellung direkt zur Begründung gefundener Zählstrategien aufgefordert. Dabei stellt die ggf. für die Begründung notwendige

Restrukturierung sowohl für die Grundschulkinder als auch für die Studierenden eine Herausforderung dar.

## 4. Fazit und Perspektiven

Es zeigt sich, dass ein und dieselbe Problemstellung unterschiedlichen Lerngruppen vielfältige Bearbeitungsmöglichkeiten bieten kann. Aufgrund des Zusammenspiels von Auf- und Abzählproblemen bietet die Lernumgebung ‚Türme bauen' eine reichhaltige Auseinandersetzung mit dem entsprechenden kombinatorischen Inhalt. Darüber hinaus eröffnet sie vielfältige Strukturierungsmöglichkeiten, die zur Hypothesenbildung bezüglich Zählstrategien anregen. Ein fruchtbarer Einsatz dieser Lernumgebung ist auch in anderen Klassenstufen denkbar und eine Erprobung im zweiten Schuljahr im Rahmen von Bachelorarbeiten geplant.

## Literatur


Böttinger, C. (2006). Aufgaben für begabte Schüler. Modelle für die Fibonacci-Zahlen. *Grundschulunterricht*, *53*(2), 44-46.

Cofman, J. (1992). Verallgemeinerung der Fibonacci-Folge, *Praxis der Mathematik*, *34*(4), 157-160.

Danckwerts, R., Vogel, D. & Bovermann, K. (1985). *Elementare Methoden der Kombinatorik. Abzählen - Aufzählen - Optimieren*. Wiesbaden: Teubner

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(5), 451-474.

Höveler, K. (im Druck). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern*. Wiesbaden: Springer.

Hoffmann, A. (2003). *Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit*. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Krauthausen, G & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 251–265.

Rényi, A. (1982). *Tagebuch über die Informationstheorie*. Basel: Birkhäuser.

Stein, M. (1995). Elementare Bausteine von Problemlöseprozessen: Gestaltorientierte Verhaltensweisen. *mathematica didactica*, *18*(2), 59-84.

Stein, M. (1999). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *20*(1), 3-27.

Müller, G. & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele* (3. neubearb. Aufl). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *16*(3), 329-342.

Johanna RUGE, Josephine WEGENER, Anne FRÜHBIS-KRÜGER, Reinhard HOCHMUTH

# Einstieg in die Ingenieurmathematik aus der Berufspraxis - Unterstützung in Mathematik und fachadäquaten Lernstrategien

Das Projekt „Einstieg in die Ingenieurmathematik aus der Berufspraxis“ wurde im Wintersemester 2014/2015 an der Leibniz Universität Hannover pilotiert und richtet sich an Studierende, die nach längerer Zeit der Berufspraxis ihr Studium ohne bzw. mit länger zurückliegender Allgemeiner Hochschulreife aufnehmen. Für diese Gruppe von Studierenden stellt die Veranstaltung Mathematik für Ingenieure I in der Regel ein großes Hindernis für den erfolgreichen Einstieg ins Studium dar.

## Ausgangssituation

Aufgrund der fehlenden Allgemeinen Hochschulreife oder der weit zurückliegenden Schulzeit fehlen den Studierenden nicht nur fachliche Kenntnisse in der Mathematik, sondern ebenso fachadäquate Arbeitsweisen und Lernstrategien. Ziel des Projekts ist eine zielgruppenadäquate Unterstützung bei der Studieneingangshürde Mathematik durch die kombinierte Vermittlung mathematischen Grundlagenwissens und fachadäquaten Lernstrategien. Vorherige Versuche je nur eines von beiden – ohne eine Kopplung – zu vermitteln waren gescheitert. Die Studierenden sollen im Laufe des Semesters mehr Selbständigkeit im Erkennen und Aufarbeiten von Wissenslücken gewinnen, um dann in der Folgeveranstaltung Mathematik für Ingenieure II erfolgreich am regulären Übungsbetrieb teilnehmen zu können.

Die Pilotgruppe bildeten Studierende aus dem Studiengang Technical Education Metalltechnik an der Leibniz Universität Hannover. Es handelt sich um eine Gruppe von insgesamt 20 Studierenden, die größtenteils den oben beschriebenen Hintergrund aufweisen. Aufgrund der differierenden Ausbildungswege der Studienanfängerinnen und Studienanfänger zeichnet sich diese Gruppe durch sehr heterogene Vorkenntnisse aus. Die Bestehensquote der Veranstaltung Mathematik für Ingenieure I dieser Gruppe hat bislang nie 20% erreicht. Zudem ist diese Gruppe durch hohe Studienabbruchquoten gekennzeichnet.

Um eine zielgruppenadäquate Förderung gewährleisten zu können, wurden anhand eines Fokusgruppeninterviews (Morgan, 1997) Erfahrungen von Studierenden des Studienganges Technical Education Metalltechnik aus vorherigen Jahrgängen mit dem Mathematikvorkurs und der Veranstaltung Mathematik für Ingenieure I erhoben. Der grundsätzliche Wunsch nach

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Aufgaben zum Aufbauen von Grundverständnis wurde ebenso geäußert wie die Bitte um Unterstützung bei der allmählichen Gewöhnung an die Begriffsweisen der Mathematik. Vor allem wurde beklagt, dass Aufgabenformulierungen häufig unklar blieben. Des Weiteren wünschten sich die Studierenden eine fortlaufend konstante Ansprechperson.

**Vorstellung der Projektbausteine**

Das gesamte Projekt umfasst drei Bausteine: (1) einen eintägigen Lernstrategieworkshop, (2) eine spezielle Übungsgruppe im Rahmen des Mathematikvorkurses und (3) eine spezielle Übungsgruppe im Rahmen der Veranstaltung Mathematik für Ingenieure I. Diese drei Bausteine wurden miteinander verknüpft und können daher als eine Gesamtmaßnahme betrachtet werden.

1. Lernstrategieworkshop

Vor Beginn des Mathematikvorkurses wurde ein eintägiger Workshop speziell für die Pilotgruppe angeboten. Im ersten Teil des Workshops wurden zunächst universitäre Lernstrategien (Streblow & Schiefele, 2006) thematisiert. Hierbei boten Checklisten, welche bereits in der Förderung von selbstreguliertem Lernen in der Berufsbildung erfolgreich genutzt wurden (Elke, 2006), eine Orientierung. Die Studierenden erarbeiteten in Kleingruppen an ihre Studiensituation angepasste Checklisten zu Aspekten kognitiver und metakognitiver Lernstrategien, sowie Strategien des Ressourcenmanagements. Im zweiten Teil des Workshops wurde anhand von Beispielaufgaben aus dem VEMINT-Material (http://www.vemint.de/) in die Bearbeitung von mathematischen Kalkül- und Begründungsaufgaben, sowie in den Umgang mit Musterlösungen eingeführt. Auch dies geschah in Kleingruppenarbeit, um eine frühzeitige Vernetzung der Studierenden untereinander zu fördern und aktiv in das themenzentrierte Arbeiten in Lerngruppen einzuführen.

2. Mathematikvorkurs

Der reguläre, zweiwöchige Mathematikvorkurs für Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Fakultät Maschinenbau gliederte sich in eine täglich dreistündige Vorlesung und eine dazugehörige zweistündige Übung. Im Rahmen dieses Vorkurses wurde die Pilotgruppe in einer eigenen Übungsgruppe im Co-Teaching Verfahren (Bauwens & Hourcade, 1997) von einer wissenschaftlichen Mitarbeiterin und einem erfahrendem studentischen Mitarbeiter gemeinsam geleitet. Zudem wurden flankierende Vorkurs-Übungsaufgaben entwickelt. Bei der Aufgabenkonstruktion wurde vor allem auf die Eignung der Aufgaben zur Bildung von mathematischem

Grundverständnis, sowie auf die frühzeitige Erfassung und Korrektur von Fehlvorstellungen geachtet. An geeigneten Stellen wurden die Aufgaben anhand graphischer Visualisierungen anschaulicher gestaltet. Außerdem wurden die Aufgabenstellungen zu Beginn feingliedriger formuliert, um während des Vorkurses an eine selbstständige Zerlegung von Aufgabenformulierungen und an die universitätsspezifische mathematische Sprache heranzuführen.

3. Mathematik für Ingenieure I

Auch im Rahmen der Veranstaltung Mathematik für Ingenieure I wurde die Pilotgruppe im Co-Teaching-Verfahren von der ihnen bereits aus dem Vorkurs bekannten wissenschaftlichen Mitarbeiterin und dem studentischen Mitarbeiter betreut. Da der Lernstrategieworkshop und der Mathematikvorkurs vor Vorlesungsbeginn stattfanden, konnten nicht alle Studierende der Pilotgruppe teilnehmen. Diesen Studierenden wurde ein späterer Einstieg in diese spezielle Übungsgruppe ermöglicht.

In den Übungen wurden die regulären Übungsblätter bearbeitet, die thematisch mit der Linearen Algebra begannen und in der zweiten Hälfte des Semesters Analysis beinhalteten. Im Vergleich zum regulären Übungsbetrieb wurde mehr Wert auf das selbstständige Bearbeiten von Übungsblättern gelegt anstatt auf das Vorrechnen an der Tafel. Aufgrund des guten Betreuungsverhältnisses konnte auf individuelle Probleme sowohl im Fachwissen als auch im Anwenden von Lernstrategien eingegangen werden.

Die Leistungsüberprüfung erfolgte durch ein Kurzklausurverfahren. In den vorherigen Jahren haben fast alle Studierenden des Studienganges Technical Education ohne bzw. mit weit zurückliegendem Abitur den ersten Versuch, über das Kurzklausurverfahren zu bestehen, bereits frühzeitig während des Semesters aufgegeben.

## Erste Ergebnisse

9 der 20 Studierenden, die in der Pilotgruppe angefangen haben, haben bestanden (45% Bestehensquote). Alle diese 9 Studierenden haben am Vorkursprogramm teilgenommen.

Um einen besseren Einblick in die Problematiken der Studierenden der Pilotgruppe im Verlauf des ersten Semesters zu erhalten, wurden die Bearbeitungen der Kurzklausuren anhand der folgenden Kriterien ausgewertet: (a) Dokumentation des Lösungsweges, (b) gegebenenfalls verwendete Visualisierungen und (c) mathematische Defizite im Bereich des Grundlagenwissens (schulmathematisches Wissen der Sek I und Sek II). Es wurden drei

Gruppen von Studierenden identifiziert: (i) Studierende, die in den Kurzklausuren kontinuierlich gute Leistungen zeigten, (ii) Studierende, deren Leistung sich im Laufe des Semesters verbesserte und (iii) Studierende, die eine kontinuierlich schwache Leistung aufwiesen. Studierende der Gruppe (i) und (ii) waren in der Lage ausreichende ingenieursmathematische Fertigkeiten zum Bestehen der Lehrveranstaltung aufzubauen.

Hierbei ergaben sich folgende Auffälligkeiten und Problembereiche:

– Studierende aller drei Gruppen wiesen Defizite in der mathematischen Notation auf. Diese waren jedoch entwicklungstypisch, auch reguläre Studierende, welche vergleichbare Leistungen erzielten, mussten die korrekte mathematische Notation erst erlernen.
– Studierende, deren Leistungen sich im Laufe des Semesters verbesserten, zeigten eine zunehmend klarere Dokumentation der Lösungswege und nutzten Visualisierungen und Randnotizen zur eigenen Strukturierung.
– Studierende, die eine kontinuierlich schwache Leistung aufwiesen, schienen sich auch weiterhin sehr stark auf das Auswendiglernen zu konzentrieren. Es wurde in den Kurzklausuren vor allem Rechenwege von Kurzklausuren aus den vorherigen Jahren repliziert, auch wenn diese nicht zur Aufgabenstellung passten.

Um den Erfolg dieser Maßnahme abschließend bewerten zu können ist bislang offen, wie die Studierenden in der Folgeveranstaltung Mathematik für Ingenieure II im regulären Übungsbetrieb abschneiden werden.

Vom bisherigen Stand ist abschließend zu bemerken, dass die Verzahnung von unterstützenden Maßnahmen in mathematischem Fachwissen mit der Förderung fachadäquater Lernstrategien im Vergleich zu den Leistungen in den letzten Jahren zu einem Erfolg geführt hat.

Da die Pilotphase erfolgreich durchgeführt wurde, wird eine Ausweitung dieses Angebotes auf alle Studierenden aus der Berufspraxis angestrebt.

## Literatur


Bauwens, J., & Hourcade, J. J. (1997). Cooperative teaching: Pictures of possibilities. *Intervention in School and Clinic, 33*(2), 81-85.

Elke, A. (2006). *Unterrichten zur Förderung von selbstreguliertem Lernen in der Berufsbildung: Lehrervoraussetzung, Lehrerentwicklung und Perspektiven: eine Interventionsstudie* (Doctoral dissertation, University of Basel).

Streblow, L., & Schiefele, U. (2006). Lernstrategien im Studium. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 352 - 364). Göttingen: Hogrefe.

Morgan, David L. (1997). *Focus Groups As Qualitative Research*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Alexander SALLE, Bielefeld

# Über die Bedeutung von Gesten beim Lauten Denken

Die Methode des Lauten Denkens stellt eine vielgenutzte Möglichkeit dar, um Einsichten in den Lernprozess eines Lernenden zu gewinnen. Hierbei werden Lernende aufgefordert, ihre Gedankengänge während der Bearbeitung von Lernmaterialien oder Aufgaben laut zu äußern (Ericsson & Simon, 1993). Diese Selbstberichte werden audio- bzw. videographiert und anschließend unter verschiedenen Gesichtspunkten ausgewertet.

Lautes Denken wird auch bei der Analyse und Rekonstruktion von Selbsterklärungsprozessen eingesetzt (z.B. Chi 1989, Renkl 1997). Selbsterklärungsprozesse (*self-explaining*) sind kognitive Aktivitäten, in denen Lernende Erklärungen für sich selbst erzeugen (Chi 2000, S. 165). Diese kognitiven Prozesse äußern sich in Selbsterklärungen (*self-explanations*), die definiert sind als „unit[s] of utterances produced by self-explaining“ (ebd.). Selbsterklärungen haben sich in vielen Studien als wichtiger Prädiktor für den Lernerfolg erwiesen (für eine Übersicht Chiu & Chi 2014). Beispiele für Selbsterklärungsprozesse sind das Verknüpfen von Vorwissen mit neuen Informationen, das Integrieren verschiedener Darstellungen oder das Richtigstellen fehlerhaften Vorwissens (Roy & Chi 2005).

In einer Vielzahl von Studien werden Selbsterklärungen durch Lautes Denken erhoben (z.B. Chi 1989, Renkl 1997, Ainsworth and Burcham (2007), u.v.m.). Die anschließende Analyse der Lernprozesse erfolgt jedoch nahezu ausschließlich auf der Basis von Transkripten, die auf Grundlage der zur Verfügung stehenden verbalen Daten erstellt werden. Notizen, Gesten oder anderen Handlungen der Lernenden werden nicht berücksichtigt.

Im Kontrast hierzu zeigen viele Forschungsergebnisse auf, welche Bedeutung Gesten und andere nonverbale Äußerungen für das Denken und Kommunizieren in mathematischen Kontexten haben können (u.a. Goldin-Meadow & Singer 2003, Radford 2009). In solchen Analysen wird deutlich, dass sich kognitive Prozesse nicht nur in einer, sondern in verschiedenen, sich teilweise ergänzenden Ausdrucksformen äußern (Nemirovsky & Ferrara, 2009).

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, welche Rolle Gesten für die Rekonstruktion von Lernprozessen spielen, die mittels Lautem Denken dokumentiert werden. Im Folgenden soll aufgezeigt werden, auf welche Weise diese Rekonstruktion durch die Berücksichtigung von Gesten beeinflusst werden. Dazu wird eine ausgewählte Szene zuerst ohne und anschließend mit Berücksichtigung von Gesten analysiert.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 1. Kontext der analysierten Szene

In der folgenden Szene bearbeitet ein Studierender des Mathematiklehramtes ein Lösungsbeispiel, in dem komplexe Zahlen, die in kartesischer Darstellung gegeben sind, in die trigonometrische Form umgewandelt werden (Ausschnitt in Abb. 1). Der Arbeitsphase ging die Aufforderung voraus: „Versuchen Sie, die dargestellten Aufgabenlösungen nachzuvollziehen und denken Sie dabei laut“. Die Studierenden wurden während der Arbeitsphase mit einer Webcam videographiert.

Aus Brians Äußerungen, die der folgenden Szene unmittelbar vorausgingen, wird deutlich, dass er sich nach der Klärung der Aufgabenstellung des Lösungsbeispiels auf die Bestimmung des Betrages der in kartesischen Koordinaten gegebenen komplexen Zahl konzentriert. An dieser Stelle setzt die Szene ein.

## 2.1. Rekonstruktion auf der Basis von Audiodaten

Auf der Grundlage der aufgezeichneten Audiodaten wurde das folgende Transkript erstellt:

```
01   Brian: Bei dem Beispiel,
02     Wurzel Acht ...
03     ist  die Länge des Vektors.
04     Genau,
05     also man kriegt die Länge raus.
```

**1. Umwandlung in Polarkoordinaten:** Für die Länge von $s$ gilt

$$|s| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \quad (\approx 2{,}83).$$

Der Winkel zwischen der $\mathbb{R}$-Achse und dem Vektor $s$ ist

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \tan^{-1}(1) = 45°.$$

Damit beträgt der Winkel von $s$ genau $\alpha = 45°$, der Betrag von $s$ ist $|s| = \sqrt{8}$. Genauso berechnet man für $t$ den Winkel $\beta \approx 80{,}5°$ und den Betrag $|t| = \sqrt{9{,}25}$. Somit lässt sich $s$ in Polarkoordinaten darstellen:

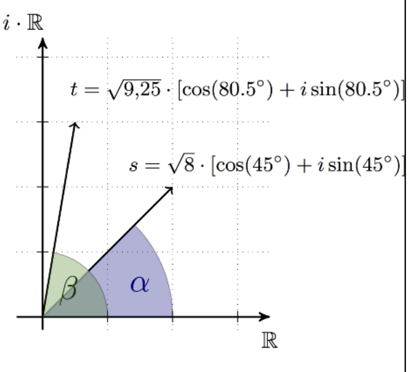



**Abb. 1: Ausschnitt des Lösungsbeispiels.**

Brians Fokus liegt in dieser Szene auf dem Wert „Wurzel 8“, den er als „Länge des Vektors“ identifiziert (Zeile 02 und 03). Anschließend bestätigt er mit dem Wort „Genau“ einen Sachverhalt, den er im Folgenden ausführt: „man kriegt die Länge raus“ (04). Auf der Grundlage dieser Daten lässt sich kein Selbsterklärungsprozess rekonstruieren. Die von Brian verwendeten Worte finden sich in den ersten drei Zeilen des dargestellten Lösungsbeispielausschnitts (Abb. 1) wieder. Es lassen sich im Transkript keine Hinweise finden, dass Brian über ein Vorlesen bzw. Paraphrasieren hinaus Verknüpfungen von Informationen vornimmt, die nicht explizit im Lösungsbeispiel vorgegeben sind.

## 2.2. Rekonstruktion auf der Basis von Audio- und Videodaten

Auf der Grundlage der Audio- und Videodaten wurde das folgende Transkript erstellt. In Klammern und kursiver Schrift sind Bewegungen von Brians Händen notiert. Mit #1, #2 und #3 sind Stellen im Lösungsbeispiel markiert, auf die Brian während seiner Äußerungen Bezug nimmt (Abb. 2).

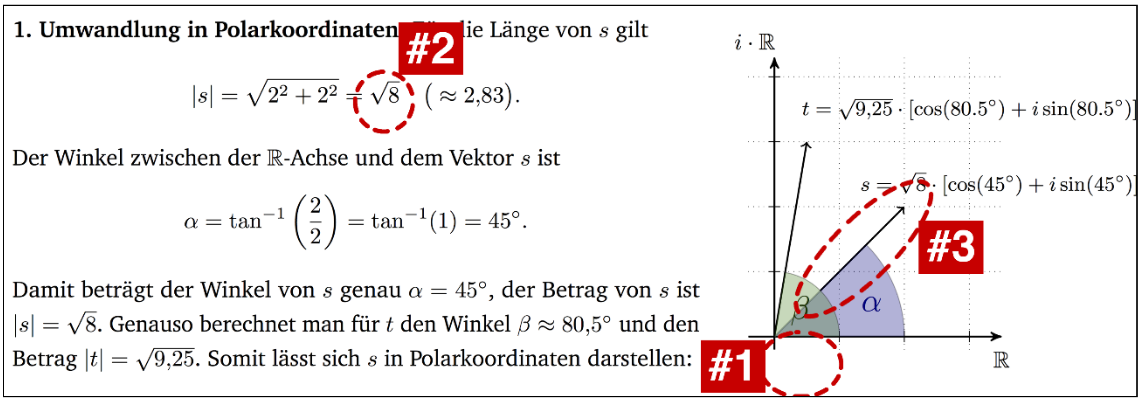
01 **Brian:** Bei dem Beispiel, (*zeigt mit rechtem Mittelfinger auf #1, zeigt mit Stift in anderer Hand auf #2*)

02 Wurzel Acht ...(*fährt mit rechtem Zeigefinger #3 entlang*)

03 ist die Länge des Vektors.

04 Genau (*hebt den Stift*)

05 also man kriegt die Länge raus.


**1. Umwandlung in Polarkoordinaten** Für die Länge von $s$ gilt

$$|s| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \; (\approx 2{,}83).$$

Der Winkel zwischen der $\mathbb{R}$-Achse und dem Vektor $s$ ist

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \tan^{-1}(1) = 45°.$$

Damit beträgt der Winkel von $s$ genau $\alpha = 45°$, der Betrag von $s$ ist $|s| = \sqrt{8}$. Genauso berechnet man für $t$ den Winkel $\beta \approx 80{,}5°$ und den Betrag $|t| = \sqrt{9{,}25}$. Somit lässt sich $s$ in Polarkoordinaten darstellen:



**Abb. 2: Ausschnitt des Lösungsbeispiels. Durch gestrichelte Kreise bzw. Ellipsen sind Stellen angegeben, auf die Brian mithilfe von Zeigegesten im Transkript Bezug nimmt.**

Brians Handbewegungen offenbaren, worauf er sich „bei dem Beispiel" offensichtlich bezieht (01): Mit jeweils einer seiner Hände zeigt er auf eine Stelle knapp unterhalb des abgebildeten Koordinatensystems (#1) und auf den Term √8 (#2). In seiner Äußerung nimmt er dann auf „Wurzel Acht" Bezug (02), fährt kurz danach mit seinem Zeigefinger die geometrische Repräsentation des Vektors *s* ab (#3) und ergänzt, Wurzel Acht sei „die Länge des Vektors" (03). Anschließend hebt er den Stift und führt aus: „Genau, also man kriegt die Länge" (04 und 05). Durch die Berücksichtigung der Gesten wird deutlich, dass Brian nicht nur auf die symbolische Repräsentation von √8 im Text Bezug nimmt, sondern auch die geometrische Repräsentation im Koordinatensystem in seine Betrachtungen miteinbezieht und dort √8 als Länge des Vektorpfeils identifiziert. Anhand der gemeinsamen Interpretation von gesprochenen Äußerungen und Zeigegesten lässt sich eine Integration der verschiedenen Darstellungen rekonstruieren, die einen Selbsterklärungsprozess darstellt.

## 3. Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag wurde exemplarisch aufgezeigt, welche Bedeutung die Berücksichtigung von Gesten bei der Analyse von Dokumenten haben kann, die durch Lautes Denken gewonnen wurden. Erst das Einbeziehen der gestischen Äußerungen ermöglichte in der dargestellten Szene die Rekonstruktion einer tieferen Ebene des Lernprozesses. Durch den exemplarischen Charakter dieses Beitrags bleibt vorerst offen, inwieweit solche Situationen einen Einfluss auf systematische quantitative Auswertungen von Selbsterklärungen haben. Diese Frage soll in weiterführenden Studien beantwortet werden.

## Literatur


Ainsworth, S., & Burcham, S. (2007). The impact of text coherence on learning by self-explanation. *Learning and Instruction, 17*, 286–303.

Chi, M. T. H. (2000). Self-explaining expository texts: The dual processes of generating inferences and repairing mental models. In Glaser, R. (Hrsg.), *Advances in instructional psychology* (S. 161–238). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-Explanations: How Students Study and Use Examples in Learning to Solve Problems. *Cognitive Science, 13*, 145–182.

Chiu, J. L., & Chi, M. T. H. (2014). Supporting Self-Explanation in the Classroom. In V. A. Benassi, C. E. Overson, & C. M. Hakala (Hrsg.), *Applying Science of Learning in Education – Infusing Psychological Science into the Curriculum* (S. 91–103). Society for the Teaching of Psychology. Heruntergeladen am 26.02.2015, URL: http://teachpsych.org/Resources/Documents/ebooks/asle2014.pdf

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). Protocol Analysis. Cambridge: MIT Press.

Goldin-Meadow, S., & Singer, M. (2003). From Children's Hands to Adults' Ears: Gesture's Role in the Learning Process. *Developmental Psychology, 39*(3), 509–520.

Nemirovsky, R., & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 159–174.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 111–126.

Renkl, A. (1997). Learning from Worked-Out Examples: A Study on Individual Differences. *Cognitive Science, 21*(1), 1–29.

Roy, M., & Chi, M. T. H. (2005). The Self-Explanation Principle in Multimedia-Learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 272–286). Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Florian SCHACHT

# „Ich drücke menu-4-1-4“. Schülerdokumentationen bei der Arbeit mit digitalen Werkzeugen

Bei der Bearbeitung von Aufgaben im Mathematikunterricht mit digitalen Werkzeugen zählt neben der adäquaten Lösung insbesondere eine angemessene schriftliche Dokumentation sowohl der Lösung selbst als auch des Bearbeitungsweges zu einer der zentralen Herausforderungen für viele Schülerinnen und Schüler. So zeigen etwa Ball & Stacy (2005), inwiefern Schülerinnen und Schüler bei der Nutzung digitaler Werkzeuge in ihren schriftlichen Dokumentationen eine Sprache verwenden, die explizite Bezüge zur Nutzung des digitalen Werkzeugs aufweist. Auch Weigand (2013) verweist auf ganz ähnliche Phänomene und diskutiert in diesem Zusammenhang insbesondere die Verstehbarkeit von Ausdrücken wie „tanline((x-2)2+3, x, 1)“ oder „main menu“, die die Syntax des digitalen Werkzeugs übernehmen. Diese Ergebnisse machen deutlich, dass die Nutzung digitaler Werkzeuge das sprachliche Handeln im Mathematikunterricht deutlich beeinflusst. Ball (2005) schlägt ein Kategoriensystem vor, das i.W. zwischen standardisierter mathematischer Fachsprache (*standard mathematical notation*) und nicht-standardisierter mathematischer Fachsprache (*non-standard mathematical notation*) unterscheidet. Diese Kategorisierung ist vor dem Hintergrund der Nutzung von CAS-Syntax zwar notwendig, allerdings zeigt der Variantenreichtum von genutzter Sprache in schriftlichen Dokumentationen (vgl. Schacht 2014), dass ein weiterer Forschungsbedarf hinsichtlich der qualitativen Beschreibung der genutzten Sprache – insbesondere bei schriftlichen Dokumentationen – besteht.

Daraus ergeben sich Herausforderungen auf zwei verschiedenen Ebenen. Auf der empirischen Ebene stellt sich die Aufgabe der genauen Beschreibung sprachlichen Handelns bei der Nutzung digitaler Werkzeuge. Auf der normativen Ebene werfen sowohl Weigand (2013) als auch Ball & Stacey (2005) die (normative) Frage nach der Angemessenheit schriftlicher Dokumentationen auf. Im vorliegenden Beitrag werden Ergebnisse einer Studie vorgestellt, in der die normativen Fragen nach der Angemessenheit des sprachlichen Handelns auf der Grundlage einer empirischen Erhebung diskutiert und beurteilt werden.

## Sprache und digitale Werkzeuge: Zum Verhältnis von Normativität und empirischer Realität

Eine der Grundannahmen des hier beschriebenen Projektes besteht darin, dass die normative Frage, inwiefern eine schriftliche Dokumentation als

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

*angemessen* oder *adäquat* beurteilt werden kann, eng verknüpft ist mit der empirischen Realität, also mit der tatsächlich im Unterricht genutzten Sprache. Eine der zentralen Annahmen des vorliegenden Projektes fußt dabei auf der Einsicht Kants, dass begriffliches Wissen nicht eine Art mentaler Repräsentation darstellt, die mit (realen) Objekten korrespondiert: „Der Begriff von Zwölf ist keineswegs dadurch schon gedacht, daß ich mir bloß jene Vereinigung von Sieben und Fünf denke." (Kant 1787, S. 38) Vielmehr strukturiert das Subjekt mit Begriffen Welt und Begriffe stellen in diesem Verständnis *Regeln* dar, deren begrifflicher Autorität das Subjekt folgt, wenn es einen Begriff verwendet: „Die vordringlichste Frage für Kant lautet, wie der *Regelcharakter* von Begriffen zu verstehen sei, wie deren *Autorität, Verbindlichkeit* oder *Geltung* zu verstehen sei." (Brandom 2001, S. 214) In diesem Verständnis ist begriffliches Handeln immer schon normatives Handeln und wenn immer das Subjekt Begriffe verwendet, bringt es – explizit oder implizit – sprachliche Normen zum Ausdruck. Diese Idee wird für das vorliegende Projekt genutzt, indem zunächst eine empirische Untersuchung mit dem Ziel durchgeführt wurde, sprachliche Kategorien im Rahmen eines explorativen Untersuchungsdesigns zu rekonstruieren. Auf dieser empirischen Grundlage werden dann prototypische Situationen im Unterricht identifiziert, die sich hinsichtlich der normativen Anforderungen an sprachliches Handeln unterscheiden – beispielhaft etwa Explorationssituationen zu Beginn einer Lernumgebung und Klausursituationen (vgl. etwa Schacht (subm.) zur Arbeit mit funktionalen Zusammenhängen). Es ist eines der Ziele des Projektes, auf der Grundlage einer solchen Gegenüberstellung von individuellen und situativen Normen im Mathematikunterricht Kriterien für die Angemessenheit von Dokumentationen und sprachlichem Handeln zu entwickeln und zu beurteilen.

## Werkzeugsprachliche Kategorien

Im Rahmen einer induktiven Kategorienbildung mittels eines offenen Kodierungsverfahrens wurde ein empirisch gestütztes Kategoriensystem für die Dokumentation von Schülerlösungen zum Gegenstandsbereich funktionaler Zusammenhänge erarbeitet. Eine genauere Darstellung der einzelnen Testaufgaben findet sich in Schacht (subm.). Dabei konnten u.a. die folgenden sprachlichen Kategorien konnten dabei rekonstruiert werden (vgl. auch Schacht 2014):

- *Werkzeugbefehle*: Die direkte Verwendung der Syntax des digitalen Werkzeugs erfolgt häufig bei der Dokumentation von Werkzeugbefehlen, sowohl bei der Verwendung vollständiger Ausdrücke (etwa *solve(f(x) = f'(x), x)*) als auch bei dem Verweis auf den genutzten Befehl (→ *solve*).

- *Menüführung*: Verweise auf die Menüführung werden häufig in solchen Dokumentationen genutzt, bei denen die Schüler einzelne Bearbeitungsschritte genau dokumentieren (etwa *menu* → *lists & spreadsheet hinzufügen*).
- *Tasten*: Häufig nutzen Schüler die Angabe von Tasten, um Teile ihres Bearbeitungsweges zu dokumentieren. Eine genauere qualitative Analyse ergibt, dass sich hier unterschiedliche Dokumentationsvarianten unterscheiden lassen (vgl. Tab. 1).

**Tab. 1: Unterschiedliche Varianten bei der Dokumentation von Tasten**

| | Dokumentationsvarianten von Tasten | Beispiel |
|---|---|---|
| 1 | Zahlen | *Drücke **4-1-3*** |
| 2 | Bezeichner / Wort | Als nächstes drückt man "**menu**" (...) und drückt "**enter**" |
| 3 | Bild der Taste | *Drücke* $\boxed{\textbf{\textit{menu}}}$ |
| 4 | Mathematische Symbole | *dann **eckige Klammern*** |
| 5 | Nicht-mathematische Symbole | *Klammern mit einer **Lücke*** |

Bei der Auswertung der Daten wurden die Dokumentationen einerseits kodiert hinsichtlich der oben beschriebenen sprachlichen Kategorien. Gleichzeitig wurde jeweils erfasst, ob die Schüler (a) einen mathematischen Inhalt, (b) den Bearbeitungsprozess oder (c) Aspekte zur Auswahl des Werkzeugs dokumentieren.

## Werkzeugbezüge und mathematische Bezüge in Dokumentationen

Die folgenden zwei Schülerbeispiele (Jgst. 10, Gymnasium, Nutzung des TI Nspire CX CAS) entstammen einer Aufgabe, in der die Graphen der beiden Funktionen f und g mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = 4x+2$ abgebildet sind. In der Abbildung ist ein Schnittpunkt erkennbar. Die Schüler sollen nun begründen, wie sich zeigen lässt, dass zwei Schnittpunkte existieren.

**Tab. 2: Transkript der beiden Schülerdokumentationen von S1 und S2**

| | |
|---|---|
| S1 | Funktionen in Graphs eingeben, notfalls Fenstereinstellungen ändern |
| S2 | Den Maaßstab der Darstellung vergrößern |

Beide Schüler beschreiben in Tab. 2 ein gleiches Phänomen. Der Schüler S1 nutzt hier mit *Graphs* und *Fenstereinstellungen* eine Sprache, die explizit auf das Werkzeug verweist, genauer auf die Menüführung. Demgegenüber nutzt S2 mit *Maaßstab* und *Darstellung* eine Sprache, die auf die mathematischen Objekte selbst, den Maßstab und die Darstellung der Funktionsgraphen Bezug nimmt.

## Ausblick: Unterrichtliche Situationen sprachlichen Handelns

Die oben beschriebenen Schülerdokumente markieren zwei sprachliche Varianten, die zwar inhaltlich auf eine ganz ähnliche Aufgabenbearbeitung hindeuten, die sich aber sprachlich dahingehend unterscheiden, dass einmal das Werkzeug und einmal die Mathematik die sprachlichen referentiellen Bezugsrahmen darstellen.

Vor dem Hintergrund dieser Analyse lassen sich nun unterrichtliche Szenarien identifizieren, die jeweils spezifische normative Anforderungen an sprachliches Handeln stellen und vor deren Hintergrund die Nutzung einer solchen werkzeugbezogenen Sprache hinsichtlich ihrer Angemessenheit beurteilt werden kann. So sind etwa in Explorationssituationen solche Mitschriften häufig hilfreich, bei denen komplexere Vorgänge, die mit dem digitalen Werkzeug ausgeführt werden, genau protokolliert werden. Hier können sehr genaue Beschreibungen der Bedienung durchaus angemessen sein. In anderen Situationen – etwa in Prüfungen – sollten Schüler mathematische Bearbeitungswege auch ohne sprachliche Bezüge etwa zu gewissen Tasten oder zur Menüführung dokumentieren können. In einem nächsten Entwicklungsschritt werden auf dieser Grundlage Kriterien für die Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache im Mathematikunterricht entwickelt.

## Literatur


Ball, L. (2003). Communication Of Mathematical Thinking In Examinations: Features Of CAS And Non-CAS Student Written Records For A Common Year 12 Examination Question. *The international journal of computer algebra in mathematics education*, 10(3), 183-194.

Ball, L. & Stacey, K. (2005). Good CAS written records. Insight from teachers. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (S. 113-120). Melbourne: PME.

Brandom, R. (2001). Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Kant, I. (1787): Kritik der reinen Vernunft. Berlin.

Schacht, F.: Student Documentations in Mathematics Classroom Using CAS: Theoretical Considerations and Empirical Findings. *Manuscript submitted for publication*.

Schacht, F. (2014): Dokumentation ≠ Dokumentation. Funktions- und Zielgruppenabhängige Varianten bei Schülerdokumentationen. *PM Praxis der Mathematik*, 60(56), 34-37.

Weigand, H.-G. (2013). Tests and Examinations in a CAS-Environment - The Meaning of mental, digital and paper Representations. In: B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2764-2773). Ankara: Middle East Technical University.

Marc SCHÄFER, Grahamstown, South Africa

# Researching reasoning and autonomous learning in Mathematics when interacting with video clips

## Introduction and background

This paper reports on ongoing empirical research in the VITALmathsLIC project – a collaboration between the FHNW in Switzerland and Rhodes University in South Africa (see www.ru.ac.za/vitalmaths). The VITALmathsLIC project produces, disseminates and researches silent and multilingual mathematics video clips that aim to expose mathematical ideas and concepts by using everyday material animations, as opposed to computer generated animations, in such a way that it makes these ideas accessible, inspiring, visual and motivating. The use of the growing databank of freely downloadable video clips is underpinned by different imperatives in the two countries. The South African imperative recognises the need for disseminating mathematical ideas to learners and teachers who do not have access to mathematical materials due to the geographical remoteness of their schools, poverty and general state neglect in providing appropriate learning materials and supporting both teachers and learners.

The continued production and use of the video clips are informed by a research agenda that critically reflects on the pedagogical implications of the individual video clips. Although the project does not necessarily prescribe a particular pedagogical approach, but promotes the autonomous use of the videos, it is interested in how the video clips are used in and out of the classroom. The VITALmathsLIC project has proved to be fertile ground for a host of Masters students in both Switzerland and South Africa to craft their individual research studies within the framework of this project. The first phase of the research agenda was driven by research questions that focused on the didactical implications of using the clips as teaching tools. The second phase, the focus of this paper, foregrounds research on the learning process when using the VITALmathsLIC video clips. The two aspects of learning that are at the heart of the two studies under consideration are autonomous learning and creative reasoning respectively. The rationale for this focus is that the VITALmathsLIC project explicitly promotes the use of video clips for the autonomous learning of the users. This includes the notion of creative reasoning.

This paper/presentation reports on the **research designs** and development of **research instruments** of two Masters studies that asked the following specific research questions:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Study 1
Do learners show creative mathematical reasoning abilities in interactions with peers (process)? Do learners show creative mathematical reasoning abilities as they justify their claim (product) (Kellen, 2014)?
Study 2
How do selected Grade 10 learners experience the autonomous use of selected VITALmaths video clips which incorporate manipulatives, in their learning of mathematics (Haywood, 2013)?

## Theoretical considerations

The theoretical underpinnings for the two studies lie in the domain of mathematical reasoning and autonomous learning respectively. Von Glasersfeld (1995) sees reasoning as a fundamental process through which learners learn. One's ability to reason mathematically is largely determined by the use of skills such as imagination, concentration and generalization argues Campos (2010). Reasoning occurs in a social milieu and Krummheuer (2007) advocates that one cannot evaluate, and by implication research reasoning without taking the social context in which learners are learning into account. Lithner (2008) distinguishes between tow types of reasoning in mathematics learning, namely imitative learning and creative mathematical reasoning. It is the latter which is central to this paper. In the VITALmathsLIC project we advocate that the capacity to learn autonomously is integral to building capacity for creative reasoning provided that the appropriate milieu to interact with interesting and provoking stimulus materials exists. The notion that autonomy is a vital goal of education resonates strongly with this project. Learning autonomously is more nuanced that simply working independently – it is about the capacity and desire to think for oneself. Sfard's (2007) observation that autonomous learners explore the discourse of others to make the discourse-for-others into a discourse-for-oneself resonates strongly with our work.

## Research design

The overwhelming challenge in both studies was to craft an authentic research environment and design that facilitated a genuine process of creative reasoning for Study 1 and autonomy for Study 2 in order to generate meaningful data to analyse and deliberate about. In brief, Study 1 was designed within the ambit of a youth development programme that supports marginalized and disadvantaged youths in the township of Grahamstown in South Africa. Selected groups of Grade 9 learners were asked to interact with selected VITALmathsLIC clips with minimal interference and prompts from the researcher. Their interactions were videotaped and the participants were all interviewed. In Study 2, selected Grade 10 learners from a disadvantaged school in the Northern Cape of South Africa were issued with mobile phones on which selected video clips were downloaded. They were each asked to interact with these clips in their free time and return after two weeks to present and talk about their experiences. These presentations and interviews were video- and audio recorded respectively.

## Research instruments and analysis

Reasoning is a complex construct and process to observe. What constitutes evidence for reasoning? One of the challenges for Study 1 was thus to develop and/or draw on an analytical instrument that contained a comprehensive set of observable criteria for creative reasoning. Study 1 drew from the work of Lithner (2008) who *inter alia* identified argumentation as a key component of reasoning. Two key aspects to argumentation are firstly the capacity to articulate a series of propositions that support a final conclusion and can be measured for its validity. This is the **product** aspect of argumentation. Secondly argumentation also involves the social interactions between people when different views are deliberated upon. This is the **process** aspect of argumentation. For the purpose of Study 1 the union or combination of product and process was thus taken as an indicator of creative reasoning. To analyse process, the study drew from Lithner (2008) and Krummheuer (2007). A rubric of criteria was adopted and adapted that described various types of participation and interactions. These included definitions of roles that participants could adopt such as author, relayer, ghostee and spokesman. A further rubric articulated criteria of reasoning such as comprehension of task, solution strategies, justification of solution strategies, justifications of solutions, making claims and articulation of how solutions created new tasks. To analyse product, the study drew on Lithner (2008) and Pierce (1992) in developing a further rubric of observable criteria that articulated product in terms of imagination/creativity, concentration, constructiveness and plausibility. Each item was further divided into observable units such as flexibility, fluency, novelty, sequentiality, continuity, mathematical anchordness, generalisability and conceptuality. One of the challenges for Study 2 was to develop an analytical framework that could bring forth and describe autonomous learning. On the return of the participants after interacting with the video clips that they were provided with on their mobile phones, they were each asked to do a presentation where they, *inter alia* described what they learnt about Pythagoras' theorem and fractions (the mathematical domains of the video clips), where, when and how they interacted with the clips and if they interacted with other people. They also complemented their presentations with models they made using the type of materials that were evident in the video clips. After the presentations the participants were interviewed to source additional evidence of how they interacted autonomously with the video clips. The participants were also required to complete a pre- and post test to obtain a sense of learning in terms of the mathematical content that was acquired. A control group that did not participate in interrogating the videos was used to validate this aspect of the research. Current analysis of the data is both quantitative and qualitative. The former is used to analyse the pre- and post tests. Qualitative analysis strategies are used to analyse the recordings of the presentations and the interviews. Specifically, evidence is sought from the participants to see whether they adopted a discourse for themselves, as opposed to simlpy reproducing the discourse of the video clips.

## Conclusion

Both studies are in the process of gathering and analyzing data, but early indicators are that creative reasoning and autonomy are indeed key components of learning.

## References

Campos, D. (2010). Peirce's philosophy of mathematics education: fostering reasoning ability for mathematical inquiry. Studies in Philosophy and Education, 29, 421 – 439.

Haywood, T. (2013). An exploration of learners'autonomous learning of mathematics by using selected Visual Technology for Autonomous Learning of Mathematics (VITALmaths) video clips: A case study. Masters Research Proposal, Rhodes University, Education Department, Grahamstown.

Kellen, M. (2014). Observing and evaluating creative mathematical reasoning through selected VITALmaths video clips and collaborative argumentation. Masters Research Proposal, Rhodes University, Education Department, Grahamstown.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary classroom of teo episodes and related theoretical abductions. Journal of Mathematical Behaviour, 26, 60 – 82.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. Educational Studies in Mathematics, 67, 255 – 276.

Pierce, C. (1992). Reasoning and logic of things. In Ketner, K. (Ed.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commocognitive standpoint. Retrieved 28 July 2014 from http://lchc.ucsd.edu/mca/Mail/xmcamail.2009_04.dir/pdfLBjRfSfwm2.pdf.

von Glasersfeld, E. (1990). Radical constructivism: a way of knowing and learning. Studies in mathematical education series: 6. Bristol, PA: Falmer Press.

Thorsten SCHEINER, Universität Hamburg

# Eine multiperspektivische Analyse des Lehrerprofessionswissens: Ein konzeptioneller Rahmen

Dieser Beitrag soll erste Ansätze eines konzeptionellen Rahmens zu einer multiperspektivischen Analyse des Lehrerprofessionswissens bieten, um die Diskussion mit Kolleg(inn)en der Lehrerbildungsforschung zu fördern. Zum einen ist mit diesem Beitrag das Anliegen verbunden, verschiedene gegenwärtige Strömungen in der Forschungspraxis zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften kritisch zu hinterfragen. Zum anderen sollen neue Perspektiven eröffnet werden, um die derzeitigen Ansätze zur Konzeptualisierung des Lehrerprofessionswissens zu erweitern.

Die verschiedenen Konzeptualisierungen von Lehrerprofessionswissen spannen ein breites Spektrum von eher allgemeinen bis hin zu eher fachspezifischen Ansätzen auf. Besondere Beachtung ist in der nationalen wie internationalen Forschungsliteratur vor allem disziplin- und domänenspezifisch konzeptualisierten Theorierahmen gewidmet worden. Diese haben wesentlich dazu beigetragen, Shulmans (1986, 1987) ursprüngliche Dimensionen des Lehrerwissens auszudifferenzieren und sie für das Lehren von Mathematik zu spezifizieren. Diese verschiedenen Ansätze sind für unterschiedliche Anliegen entwickelt worden: Während etwa die Konzeptualisierungen im Rahmen des *Learning Mathematics for Teaching* (LMT) Projektes (z.B. Ball et al., 2008) das Ergebnis einer sogenannten ‚job analysis' ist, sind sie im Rahmen der international-vergleichenden *Teacher Education Development Study in Mathematics* (TEDS-M) (z.B. Blömeke et al., 2010, 2014; Tatto et al., 2008) Werkzeuge für die Messung des Professionswissens angehender Mathematiklehrkräfte im large-scale design. Zudem leisten diese Konzeptualisierungen zum Lehrerprofessionswissen auf verschiedenen Ebenen ihren Beitrag, u.a. auf einer theoretisch-konzeptionellen, methodologischen oder empirischen Ebene. In diesem Beitrag wird der Fokus auf die theoretisch-konzeptionelle Ebene gelegt, verbunden mit dem Ziel einer Theoriebildung zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften.

## Jenseits einer stofflich geprägten Forschungsperspektive: Ein epistemologischer, kognitiver und didaktischer Fokus auf Lehrerwissen

Eine im Bereich des Lehrerprofessionswissens dominierende Forschungspraxis ist die Einnahme einer *stofflich geprägten* Perspektive, die sich auf Shulmans Vorarbeiten zurückführen lässt. Ausgangspunkt der Betrachtung ist Shulmans Beschreibung von ‚pedagogical content knowledge' (PCK; im

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

deutschsprachigen Raum oftmals übersetzt mit fachdidaktischem Wissen), dem eine Schlüsselrolle zugeschrieben wird. Bei Shulman (1987, S. 15) findet man

„[…] the key to distinguishing the knowledge base of teaching lies at the intersection of content and pedagogy, in the capacity of a teacher to transform the content knowledge he or she possesses into forms that are pedagogically powerful and yet adaptive to the variations in ability and background presented by the students."

Mit der starken stofflichen Prägung von ‚subject matter knowledge *for* teaching', das Shulman als PCK definiert hat, wird das Fachliche ein ‚Objekt des Lehrens'. In der internationalen Literatur zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften wird Mathematik als ein Objekt des Lehrens diskutiert, das sich in der oft verwendeten Metapher ‚unpacking mathematics content in ways accessible to students' wiederfindet. Entsprechend dieser Metapher besteht die zentrale Aufgabe der Lehrkraft in der Darbietung mathematischen Wissens in einer Art und Form, die für den Lernenden zugänglich ist. Kirsch (1977) argumentiert für das ‚Vereinfachen (ohne zu verfälschen) als ein Prozess des Zugänglichmachens mathematischer Inhalte' – ein Ansatz der wesentlich für die Entwicklung der Stoffdidaktik im deutschsprachigen Raum war.

Mathematik als ein Objekt des Lehrens bezieht sich stattdessen auf die Annahme, dass Mathematik transferiert werden kann – von der Lehrkraft in die Köpfe der Lernenden. Diese Ansicht wiederspricht der grundlegenden Prämisse konstruktivistischer Lerntheorien, dass Wissen an Lernende nicht einfach übertragen werden kann, sondern vom Lernenden selbst konstruiert werden muss. Aus meiner Sicht entsprechen Shulmans Vorarbeiten und die darauf aufbauenden Konzeptualisierungen zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften nicht den aktuellen Ansätzen, welche Mathematik eher als ein Objekt des Lernens (als ein Objekt des Lehrens) verstehen.

Von besonderer Bedeutung scheint mir in diesem Kontext ein Modell zur Kognition und zum Lernen von Mathematik, das als Grundstein dienen kann, die verschiedenen Wissensdimensionen zusammenzubringen (Wissen über das Fach, Wissen über Schülervorstellungen und Wissen über instruktionelle Strategien). Gemäß den bisherigen Überlegungen zur Konzeptualisierung des Mathematiklehrerwissens könnte die aktuelle, stark stofflich geprägte Perspektive um einen epistemologischen, einen kognitiven und einen didaktischen Aspekt erweitert werden (siehe Abb. 1): Die epistemologische Perspektive bezieht sich auf das Wissen über die erkenntnistheoretischen Grundlagen von Mathematik und auf das Erlernen gewisser mathematischer Konzepte (einschließlich der Kenntnis epistemologischer

Hürden). Die kognitive Perspektive bezieht sich auf die Kenntnis der Schülerkognitionen, insbesondere gängiger Schülervorstellungen, kognitiver Herausforderungen, die Lernende beim Begriffslernen haben, sowie auf die Interpretation mathematischer Denkprozesse. Es beinhaltet also Wissen darüber, wie Lernende denken, lernen und mathematisches Wissen erwerben. Die didaktische Dimension bezieht sich auf Shulmans (1986, 1987) Repertoire an Repräsentationen und instruktionellen Strategien, insbesondere die Kenntnis von unterschiedlichen Zugängen zur Thematik sowie Wissen über die Gestaltung von Lehr-Lern-Sequenzen.

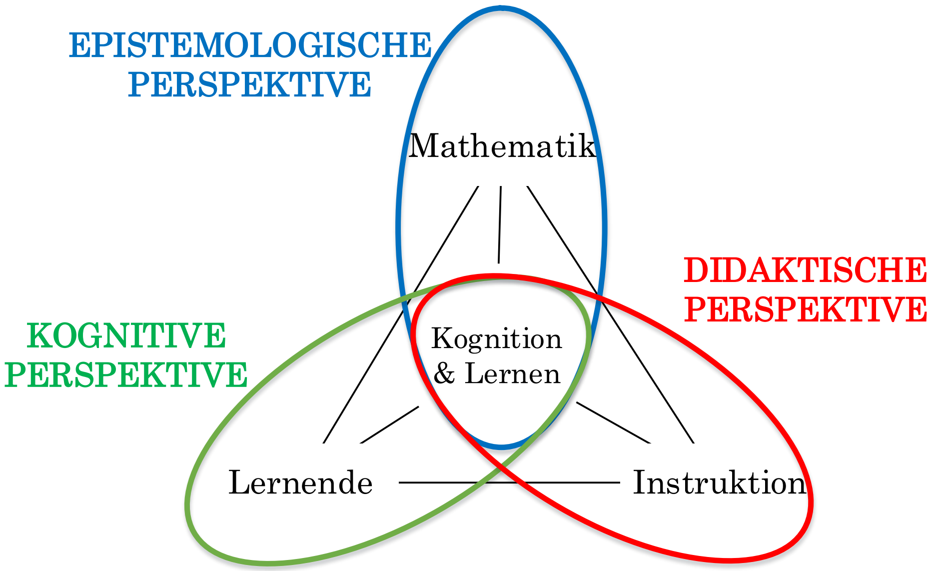



**Abb. 1: Eine epistemologische, kognitive und didaktische Perspektive zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften**

### Jenseits einer inhaltsbezogenen Forschungsperspektive: Erste Ansätze einer strukturellen Beschreibung des Professionswissens von Lehrkräften

Die Literatur zum Lehrerprofessionswissen beschränkt sich weitestgehend auf die Frage, was das Wissen von Lehrkräften beinhaltet, und nimmt demzufolge eine stark *inhaltsbezogene* Forschungsperspektive ein. Wenig Berücksichtigung erfahren Ansätze zur strukturellen Beschreibung des Wissens von Mathematiklehrkräften. Eine strukturelle Beschreibung beinhaltet u. a. (1) wie Wissen strukturiert und organisiert ist (*Form*), (2) was die zugrundeliegenden Wissensbasen sind (*Ressourcen*) und (3) ob sich Wissen in Schemata oder Mikrostrukturen konstituiert (*Natur*).

Das Professionswissen von Lehrkräften wird hier als ein komplexes System von ‚Wissensatomen' gesehen, beschrieben als ein „Repertoire von ‚Wissensatomen', die entlang der Wissensfacetten (a) Wissen zu Schülervorstellungen (WSV), (b) Wissen zum Lernen von Mathematik (WLM), (c) Wissen zum Lehren von Mathematik (WTM), (d) mathematischem Wissen per se (MCK per se) und (e) mathematischem Wissen zum Lehren (MCK for teaching) transformiert werden."

Der Begriff ‚Wissensatom' meint, dass Wissen eine Mikrostruktur besitzt, sowie dass es kontext-sensitiv, konzeptspezifisch und von feinkörniger Natur zu betrachten ist (*Natur*), während der Begriff der ‚Transformation' impliziert, dass die zugrundeliegenden Wissensdimensionen derart mit einander verwoben werden, dass eine neue Form von Wissen entsteht, die ertragreicher ist als die Summe ihrer Teile (*Form*). Im Gegensatz zu Shulman und seinen Nachfolgern, die fachliches und pädagogisches Wissen als konstituierende Wissensdimensionen ansehen, wird hier WSV, WLM, WTM, MCK per se und MCK for teaching als zugrundeliegenden Wissensbasen des Professionswissen von Mathematiklehrkräften angesehen (*Ressourcen*).

Diese Überlegungen sind angelehnt an Arbeiten, die im Rahmen des ‚knowledge in pieces' framework von diSessa (vgl., 1993) und seinen Kolleg(inn)en entstanden sind.

## Literatur


Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Blömeke, S., Hsieh, F.-J., Kaiser, G., & Schmidt, W. H. (Eds.). (2014). *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn. TEDS-M results*. Heidelberg: Springer.

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (Eds.). (2010). *TEDS-M 2008: Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

diSessa, A. A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction*, *10*(2-3), 105-225.

Kirsch, A. (1977). Aspects of simplification in mathematics teaching. In H. Athen & H. Kunle (Hrsg.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (pp. 98-119). Karlsruhe: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Alexandra SCHERRMANN, Ludwigsburg

# Auswerten von Daten mit Lösungsbeispielen

Daten werden heutzutage in großem Stil erhoben. Dies ruft vielerlei kritische Konnotationen hervor: Die Grenze zwischen einer sinnvollen Nutzung personengebundener Daten durch Wirtschaft und Institutionen und einer unerwünschten intimen Ausleuchtung von Individuen verläuft fließend. Das Schlagwort „big data" wird medial meist als ein (zunächst) „sinnfreies Datensammeln" mit dieser kritischen Konnotation gebraucht. Daneben gibt es aber auch eine optimistische Sichtweise: Zahlreiche Datenquellen stehen heutzutage öffentlich zur Verfügung. Dabei handelt es sich um Daten, welche von Regierungs- oder Nichtregierungsorganisationen zu einem bestimmten Zweck erhoben wurden und die im Sinne eines demokratischen Grundgedankens allen Bürgerinnen und Bürgern zur Verfügung gestellt werden (z.B. www.govdata.de; www.destatis.de). Diese Datenquellen, auch „open data" genannt, dürften bislang vorrangig von Journalisten und Wissenschaftlern genutzt werden. Doch auch für den Mathematikunterricht kann diese Quelle im Sinne einer demokratischen Bildung herangezogen werden. Sicherlich ist diese Möglichkeit – einschließlich seiner fachdidaktischen Fundierung – noch ausbaufähig. „Open data" stellt damit eine „Herausforderung für statistische Bildung" (Jochim Engel, Vortrag 29.10.14, PH Ludwigsburg) dar.

Für Schülerinnen und Schüler setzt die Nutzung solch öffentlich zugänglicher Datenquellen ein gewisses Fundament an statistischer Bildung voraus: Es erscheint sinnig, dass Schülerinnen und Schüler bereits eine Vorstellung von der Operationalisierung und dem Erhebungsprozess von Daten haben. In diesem Sinne wurde für die Sekundarstufe I (Klasse 8, Realschule Baden-Württemberg) eine elfstündige Unterrichtseinheit konzipiert, in der die Schülerinnen und Schüler in Anlehnung an Wild & Pfannkuch (Wild & Pfannkuch, 1999) selbst einen Untersuchungskreislauf mit den Elementen *problem, plan, data, analysis, conclusions* durchlaufen. Die Unterrichtseinheit wurde in insgesamt sieben Schulklassen (n=194) durchgeführt und war eingebettet in eine umfassendere Untersuchung zum Lernen mit Lösungsbeispielen (Scherrmann, 2012; Scherrmann, 2015 in Vorbereitung).

## Beschreibung der Unterrichtseinheit zum Thema Puls

Zunächst wurde die Problemstellung „Wie verhält sich unser Puls bei verschiedenen Aktivitäten?" aufgeworfen (vgl. Scherrmann, Spannagel, & Bescherer, 2012). Die Schülerinnen und Schüler erhielten Zeit in Kleingruppen, verschiedene Ideen zur systematischen Untersuchung dieser Fragestellung zu

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

entwickeln. Dabei kamen Vorschläge wie den Puls beim Treppensteigen, beim Luftanhalten oder beim Ausführen von Liegestützen zu ermitteln. Im Plenum wurden anschließend die Ideen gesammelt und insbesondere die Frage nach einer Vergleichbarkeit der Erhebungen zwischen den Individuen diskutiert. Hierbei ging es um konkrete Probleme der Operationalisierung: Den Schülerinnen und Schülern war anfänglich nicht klar, dass eine Vereinbarung der Art „jeder macht so viele Liegestützen wie er kann“ nicht unbedingt empfehlenswert ist. Außerdem muss der Puls nicht *beim* Ausführen von Liegestützen gemessen werden, sondern unmittelbar *danach*. Die Schülerinnen und Schüler mussten sich jeweils auf zehn Aktivitäten in einer festgelegten Reihenfolge sowie ihre genaue Ausführung einigen. Nicht zuletzt wurden in dieser Phase auch Hypothesen darüber festgehalten, wie sich der Puls wohl bei verschiedenen Aktivitäten verhalten wird.

Ein visualisierter Untersuchungskreislauf diente während der gesamten Untersuchung als *Advance Organizer* und als Zielorientierung. Denn nicht zuletzt fordern Wild & Pfannkuch (Wild & Pfannkuch, 1999) neben der praktischen Erfahrungen statistischer Erhebungen auch deren theoretische Durchdringung.

Nach der Datenerhebung durch Pulsuhren erfolgte die Auswertung auf deskriptiver Ebene (siehe unten) in Anlehnung an die baden-württembergischen Bildungsstandards für Realschulen (Bildungsplan 2004) Die Vermittlung der Themengebiete erfolgte über die Lernmethode „Lernen durch Lösungsbeispiele“.

## Die Konzeption der Lösungsbeispiele

Lösungsbeispiele haben die Funktion in einen neuen Lerninhalt bzw. in ein neues Lösungsprinzip einzuführen und dabei einen bestimmten Lösungsweg bzw. eine bestimmte Lösungsstrategie zu exemplifizieren. Als Lernmethode ist damit eine zeitlich ausgedehnte und kognitiv vertiefte Auseinandersetzung mit den Lösungsbeispielen gemeint. Diese bildet den Schwerpunkt des Lernprozesses, Übungsaufgaben nachgelagert. In vergangenen Studien zeigte sich vielfach die Lernwirksamkeit dieser Lernmethode (vgl. zusammenfassend Atkinson, Derry, Renkl, & Wortham, 2000). Allerdings ist sie kein Selbstläufer: Es empfiehlt sich gewisse Intra- und Interbeispielmerkmale bei der Konzeption zu beachten (vgl. Atkinson et al., 2000). Außerdem werden prozess- und produktorientierte Lösungsbeispiele unterschieden (van Gog, Paas, & van Merriënboer, J.J.G, 2006). Erstere erläutern und begründen den Lösungsprozess. Dabei kann sich das Augenmerk auf die verwendete Lösungsformel oder auf die Gesamtsituation richten. In letzterem Sinne wurden für diese Unterrichtseinheit zum Auswerten von Daten vier thematisch unterschiedliche Lösungsbeispiele konzipiert. Das erste thematisierte den arithmetischen Mittelwert sowie die Spannweite. Inhaltlich handelte es sich dabei um eine Wiederholung aus Klasse 6. Das zweite Lösungsbeispiel hatte den Zentralwert und das dritte die Quartile zum Thema. Das vierte Lösungsbeispiel führte das vergleichende Deuten zweier Boxplots aus.

Die vier thematischen Lösungsbeispiele wurden jeweils in zwei Kontexte (Niederschlagsmenge, Anzahl versendeter SMS) eingebettet. Außerdem wurde bewusst der Kontext Puls in den Lösungsbeispielen nicht thematisiert. Beides geschah, um die kontextuelle Übertragbarkeit der mathematischen Inhalte anzuregen und den Blick weg von Oberflächenmerkmalen hin zu strukturellen Merkmalen zu lenken (Quilici & Mayer, 1996).

Die Prozessorientierung der Lösungsbeispiele zeigt sich durch Ausführung der zur Lösung führenden Gedankengänge. Alle Lösungsbeispiele stellten nicht die Verwendung der Formeln, sondern inhaltliche Überlegungen in den Vordergrund. Beispielsweise wurde der Bestimmung des arithmetischen Mittelwerts die Fragestellung „Wie hoch wäre die Niederschlagsmenge, wenn jeden Monat gleich viel Niederschlag gefallen wäre?" vorausgeschickt und anhand dieser inhaltlich argumentiert. Das Lösungsbeispiel zum Thema Zentralwert wird mit der Fragestellung „Wie viel Niederschlag ist gewöhnlich in diesem Zeitraum gefallen?" eröffnet. Zunächst wird wieder das arithmetische Mittel berechnet. Eine fiktive Schülerin gelangt dann allerdings zur Erkenntnis, dass der arithmetische Mittelwert für diese Datenreihe bzw. für diese Fragestellung ein wenig geeigneter Kennwert ist: Ein einzelner Ausreißer verfälscht das arithmetische Mittel. Damit wird die Betrachtung der Datenreihe in einer Rangliste motiviert. Am Ende wird nochmals zusammenfassend reflektiert, dass die Kennwerte arithmetisches Mittel und Zentralwert in Abhängigkeit der Datenreihe eine mehr oder weniger gute Aussage darüber machen wie viel Niederschlag „gewöhnlich" gefallen ist.

Für die Bestimmung des Zentralwertes bzw. des oberen und unteren Quartils werden in der Literatur verschiedene Möglichkeiten ausgeführt, die teilweise auch vom Skalenniveau der verwendeten Daten abhängig gemacht werden (Kütting, 1994). In den Lösungsbeispielen wird exemplifiziert, wie die Mitte der Datenreihe und damit der Zentralwert entweder direkt ablesbar ist (bei einer ungeraden Anzahl an Datenwerten) oder aber bei einer geraden Anzahl an Datenwerten als arithmetisches Mittel der beiden in der Mitte liegenden Werte der Rangliste definiert werden kann. Das untere bzw. obere Quartil wird im dritten Lösungsbeispiel dann als Mitte der unteren bzw. oberen Hälfte einer Rangliste definiert. Dabei wird eine Fallunterscheidung notwendig in Abhängigkeit davon, ob der Zentralwert ein Wert der Datenreihe oder ein (fiktiver) errechneter Wert ist. In den Lösungsbeispielen wird die Position der Quartile immer innerhalb der mit einer überschaubaren Anzahl an Datenwerten gebildeten Rangliste visualisiert, um möglichst verständnisorientiert und anschaulich zu bleiben. Aus demselben Grund wird auf die Verwendung einer Berechnungsformel zur Bestimmung der Position des unteren bzw. oberen Quartils bewusst verzichtet.

Nicht zuletzt wird auch beim vierten Lösungsbeispiel, dem vergleichenden Deuten zweier Boxplots, die Prozessorientierung realisiert, in dem die Gedanken eines fiktiven Schülers/einer fiktiven Schülerin expliziert werden anhand von Aussagen wie beispielsweise „Das erkenne ich an…“ oder „Das sehe ich, weil…“. Damit werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie man beim Vergleichen von Boxplots vorgehen kann und worauf man als Betrachter seinen Blick lenken sollte.

Das Lernen mit Lösungsbeispielen erfolgte verteilt in vier Unterrichtsstunden im Laufe der elfstündigen Unterrichtseinheit. Jeweils im Anschluss an ein Thema wurde dieses übertragen auf die eigen erhobenen Pulswerte und diese daraufhin ausgewertet. Am Ende der Unterrichtseinheit fand im Plenum anhand der Boxplots, die jeweils zu einer Aktivität erstellt wurden, eine Überprüfung und Diskussion der zu Beginn der Unterrichtseinheit formulierten Hypothesen statt. Hierbei ergaben sich interessante Unterrichtsgespräche (Scherrmann et al., 2012). Damit wurde der Datenkreislauf exemplarisch einmal durchlaufen und ein (kleiner) Grundstein zur späteren Erschließung von „open data“ Quellen gelegt.

## Literatur

Atkinson, R. K., Derry, S., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. Review of Educational Research, 70, S.181–214.

Kütting, H. (1994). Beschreibende Statistik im Schulunterricht. Mannheim: BI-Wiss.-Verlag.

Quilici, J., & Mayer, R. (1996). Role of examples in how students learn to categorize statistics word problems. Journal of Educational Psychology, 88, S.144–161.

Scherrmann, A. (2012). Lernen mit Lösungsbeispielen beim Auswerten von Daten. Beiträge zum Mathematikunterricht, S.733–736.

Scherrmann, A., Spannagel, C., & Bescherer, C. (2012). "Da pocht mein Herz!" - Pulsdaten erheben und auswerten. Mathematik lehren, (175), S.19–24.

van Gog, T., Paas, F., & van Merriënboer, J.J.G. (2006). Effects of process-oriented worked examples on troubleshooting transfer performance. Learning and Instruction, 16, S.154–164.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review, 67(3), S.223–248.

Katrin SCHIFFER, Köln

# Schulbuchanalyse zum Umgang mit Variablen bei der Einführung von Termen und Gleichungen in der 7. Klasse

In diesem Beitrag wird eine Schulbuchanalyse, als Teil meines Promotionsprojektes, zum Thema Umgang mit Variablen bei der Einführung von Termen und Gleichungen vorgestellt. Die Grundlage der Analyse bildet das Schulbuch Schnittpunkt 7 für Realschulen von 2006 in der Auflage für Nordrhein-Westfalen. Dabei wird auch der begleitende Serviceband, welcher über die Schwerpunkte und Intentionen der Schulbuchautoren Auskunft gibt, in die Analyse mit einbezogen. Die zugrundeliegenden Fragestellungen lauten: Wie wird der Begriffe Variable eingeführt und wofür stehen die verwendeten Buchstaben auf den Schulbuchseiten? Was sind die zugrundeliegenden Objekte für die Lernenden? Und welche impliziten oder expliziten Begründungen gibt es auf den Seiten? Die Antworten auf diese Fragen lassen Rückschlüsse auf die Auffassung von Algebra zu, welcher die Lernenden auf Grundlage dieses Schulbuches erwerben. Um die Einführung und die Behandlung von Variablen richtig deuten zu können, ist es wesentlich den Stand der Lernenden zu berücksichtigen, welchen sie auf Grundlage der Schulbücher der Klassen fünf und sechs erworben haben.

## 1. Schnittpunkt der Klasse 5 und 6

In den Schulbüchern Schnittpunkt der Klassen 5 und 6 tauchen Buchstaben nicht als Variablen im Sinne einer unbekannten Zahl oder Größe auf. Buchstaben sind stattdessen in der Verwendung als Namen für geometrische Objekte wie a für eine Strecke oder auch B für einen Punkt zu finden. Ebenfalls werden Buchstaben als Abkürzung für Maßeinheiten wie kg, l, oder cm verwendet. Anstelle von Buchstaben als Variable werden in Aufgaben leere Kästchen eingesetzt. Jedoch ist der Gebrauch des leeren Kästchens nicht eindeutig bestimmt, da diese nicht nur unbekannte Größen oder Zahlen symbolisieren, sondern auch als Platzhalter für Relationszeichen stehen. Die Rechengesetze werden verbal angegeben und dann zusätzlich mit der Angabe eine Zahlbeispiels bekräftigt. Die Schulbuchreihe zeichnet sich durch die Besonderheit aus, dass erst bei der Einführung von Termen in der 7. Klasse der Begriff der Variable eingeführt wird. Im Serviceband wird dazu angemerkt: „Auch auf die Verwendung von Formeln [...] wurde bisher aus didaktischen Gründen verzichtet. Erst nach einer systematischen Einführung in die Bedeutung der Variablenschreibweise können die Lernenden das Formelaufstellen als eine sinnvolle und grundlegende mathematische Tätigkeit erfassen.” (Serviceband 2006, K 42).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 2. Schulbuchanalyse Schnittpunkt Klasse 7

Im Serviceband wird zu Beginn des Kapitels betont, dass die Intention bei der folgenden Unterrichtseinheit nicht auf dem Erlernen von Umrechnungskalkülen liegt, sondern das Verständnis für die Bedeutung von Variablen im Vordergrund steht (Vgl. Serviceband, K 42). Die Schüler sollen wissen, dass Variablen für Zahlen und Größen stehen. In diesem Sinne wird die Variable im Schülerbuch definiert: „Ein Zeichen, das man anstelle von Zahlen oder Größen verwendet, nennt man Variable.“ (Schnittpunkt 7, S. 100). Terme werden dann als Rechenausdrücke eingeführt, welche aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen. Auf der gleichen Seite befinden sich die ersten Aufgaben für die Lernenden, in welchen sie aufgefordert sind verschiedene Sätze oder auch Terme zu erklären. Dabei stehen hier die verwendeten Buchstaben nicht notwendigerweise für Variablen im obigen Sinne. In dem Satz: „Wer A sagt muss auch B sagen.“ zum Beispiel stehen A und B weder für unbekannte Zahlen noch Größen. In den Aufgaben tauchen Buchstaben außerdem als Teil eines Namens, als Größen, und als Abkürzungen für Maßeinheiten auf. Die verschiedenen Verwendungen der Buchstaben wird nicht thematisiert. Im Serviceband zeigt sich, dass diese Differenzierung nicht nur nicht explizit gemacht wird, sondern für die Autoren des Servicebandes auch nicht als problematisch angesehen wird. Sie schreiben: „Erklärung für die Zusammenfassung $2y + 3y = 5y$ wie 2 Birnen + 3 Birnen = 5 Birnen sind unter mathematischen Gesichtspunkten nicht lupenrein. Sie erzeugen hier jedoch keinen Fehler und haben eine gewisse praktische Berechtigung.“ (Serviceband, K 49). Wenn y als Birne interpretiert wird, dann stellt y keine Variable nach der Definition des Schulbuches da, denn Birne ist eine Einheit. Die fehlende Unterscheidung zwischen den verschiedenen Verwendungen der Buchstaben kann hinderlich bei dem Erwerben des Verständnisses der Variable sein.

Die Einführung der Rechengesetze für Terme und somit für Variablen erfolgt nicht formal. In der Übertragung der Rechengesetze von den rationalen Zahlen auf die Terme findet sich eine implizite Rechtfertigung der Gültigkeit. Für die Lernenden werden die Rechengesetze anschaulich im Größenbereich der Längen begründet (Vgl. Schnittpunkt 7, S. 107). Die geometrische Veranschaulichung dient für die Autoren des Schulbuches zum Aufbau einer fundierten Vorstellungsgrundlage für den Lernenden. Im Serviceband wird zum Ausbau passender Grundvorstellungen ausgeführt: „So wird die Addition mit der Vorstellung von einem Aneinanderfügen von Strecken verbunden. Im Ergebnis ergibt sich erneut eine Strecke. Die Multiplikation wird mit der Berechnung von Flächeninhalten verknüpft. Das Ergebnis, ein Produkt aus zwei Variablen, steht für Flächen.” (Serviceband, K 50). Auf diese Weise soll die arithmetische Grundvorstellung des Anfügens und Abtrennens auf die Algebra erweitert werden. Analog zu der Addition erfolgt im Schulbuch die Einführung der Multiplikation. Auch hier wird auf eine formale Einführung verzichtet und Rechengesetze werden in den Größenbereichen der Längen, Flächen und Volumina begründet. Die bei den Lernenden ausgebildeten geometrischen Grundvorstellungen liefern die Begründungen und Rechtfertigungen für das „verständnisvolle Rechnen". So wird im Serviceband für das Zusammenfassen von Termen ausgeführt: „Die Interpretation von $2x + 3x$ als Aneinanderfügen von Strecken bzw. von $2xy + 3xy$ als Aneinanderfügen von Flächen macht deutlich, dass $3x$ und $4xy$ nicht addiert werden können." (Serviceband, K 51). Die dimensionale Beschränktheit der bereichsspezifischen Erklärung der Rechengesetze wird im Schulbuch nicht explizit angesprochen.

Das erworbene Verständnis von Variablen und Termen bildet die Grundlage für das Kapitel über Gleichungen. Eine Gleichung wird eingeführt als zwei Terme, welche mit einem Gleichheitszeichen verbunden sind. Eine Gleichung zu lösen bedeutet die Zahl zu finden, die beide Terme zu demselben Wert führt (Schnittpunkt 7, S. 122). Nach einer kurzen Sequenz zum Lösen von Gleichungen durch Probieren werden die elementaren Zeilenumformungen eingeführt. Die Einstiegsaufgabe zeigt Waagen im Gleichgewicht, die jeweils Kugel und Würfel enthalten. Die Lernenden sollen das Gewicht eines Würfels mit Hilfe des Gewichtes einer Kugel beschreiben. Im Serviceband wird explizit betont, dass die Waagen hier nicht zur Veranschaulichung der Gleichungen dienen, sondern vielmehr die Gleichungen die vorliegende Sachsituation beschreiben sollen. Die Waage stellt dabei ein neues Modell dar, dessen Vorstellung dem Lernenden helfen soll schwierigere Aufgaben zu lösen. Die Grenzen dieses Modells werden zwar im Serviceband thematisiert, jedoch nicht als Anregung für den Unterricht formuliert. Im Schulbuch selbst wird die Beschränktheit des Modells auf natürliche Zahlen nicht aufgegriffen. Nach diesem Einstieg erfolgt die Einführung der Umformungsregeln. Für jede Grundrechenart wird durch Vorrechnung eines einfachen Beispiels die Umformungsregel gesichert. Eine formale Begründung erfolgt nicht, vielmehr werden die Regeln für die Lernenden durch die Veranschaulichung der einzelnen Schritte im Waagenmodell begründet. Auf die aus dem vorherigen Kapitel aufgebauten Grundvorstellungen des Anfügens und Abtrennens wird bei der Behandlung der Gleichungen kein Bezug genommen.

## 3. Auffassung von Algebra

Schnittpunkt 7 führt Variablen als unbekannte Größe oder Zahl ein und unterstützt durch seine Veranschaulichungen den Aufbau von geometrischen

Grundvorstellungen, wie das Anfügen und Abtrennen von Strecken oder Flächen bei der Addition von Termen. Die Betonung dieser geometrischen Grundvorstellungen sowie das Begründen der Rechengesetze innerhalb eines realen Gegenstandsbereichs, wie dem Größenbereich der Längen, führt dazu, dass für die Lernenden die zugrundeliegenden geometrischen Objekte die Objekte der Algebra sind. Sie lernen gemäß dieser Analyse eine Theorie über die Veranschaulichungsmittel. Auch bei der Gleichungslehre wird die Vorstellung von Gleichungen mit dem Veranschaulichungsmodell der Waage verknüpft. Hier stellen ebenfalls die vorliegenden Gewichte die Objekte da. Daher ist es gerechtfertigt zu sagen, dass die Objekte für die Lernenden auf den Schulbuchseiten empirisch gegenständlich sind. Die Konzeption des Schulbuches zeigt, dass die Geometrie bzw. die geometrischen Zusammenhänge als Grundlage der Rechtfertigung für die einzelnen Umformungsschritte dienen. Gesetze wie das Distributivgesetz werden mit Hilfe geometrischer Situationen begründet. Eine formale Begründung für die Rechenkalküle erfolgt nicht, sondern diese werden in einem realen Größenbereich begründet. Die Algebra wird also auf Grundlage dieses Schulbuchs nicht als abstrakte Theorie vermittelt, sondern die Lernenden erlangen eine empirisch gegenständliche Theorie über Variablen, Termen und Gleichungen (vgl. zu empirischen Theorien Burscheid/Struve, 2010). Die empirische Auffassung von Algebra ist historisch gerechtfertigt und begründet. So ist zum Beispiel das Ziel von Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra" die Phänomene der Realität zu beschreiben. Euler definiert die Algebra „als die Wissenschaft, die zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet" (Euler 1770, Part 2 § 1). Eulers Darstellung der Algebra in seinem Lehrbuch erfüllt die Merkmale einer empirisch gegenständlichen Theorie (vgl. Reimann/Witzke, 2013).

## Literatur


Burscheid, H.J., Struve, H. (2010): Mathematikdidaktik in Rekonstruktion – Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung, Franzbecker Verlag.

Euler, L. (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra, 1959. Aufl., Reclam Verlag.

Reimann, K., Witzke, I. (2013): Eulers Zahlauffassung in der „Vollständigen Anleitung zur Algebra. In M Meyer, M. Müller-Hill & I. Witzke (Hrsg.): Wissenschaftlichkeit und Theorienentwicklung in der Mathematikdidaktik – Festschrift zum sechzigsten Geburtstag von Horst Struve. Franzbecker Verlag, S. 125-144.

Böttner, J., Maroska, R., Olpp, A., Pongs, R., Stöckle, C., Wellstein, H. & Wontroba, H. (2006): Schnittpunkt 7. Mathematik für Realschulen,. Nordrhein-Westfalen: Schülerbuch, Bd. 7, Klett Ernst.

Dermann, G., Eberle, R., Frey, B.-J., Frey, H., Palte, M., Straubmüller, G. & Wellpott, K. (2006): Schnittpunkt 7. Mathematik für Realschulen,. Nordrhein-Westfalen: Serviceband, Bd. 7, Klett Ernst.

Kathrin SCHLARMANN, Oldenburg

# Charakterisierung von Denkweisen in der Linearen Algebra

In diesem Beitrag wird ein Einblick in empirisch fundierte Denkweisen von Mathematikstudierenden gegeben, die sich beim Bearbeiten von Aufgaben aus dem Themengebiet der Linearen Algebra zeigten. Die Aufgabenbearbeitungen durch die Studierenden erfolgten im Rahmen qualitativer Einzelinterviews.

## Motivation und Einbettung in bisherige Forschung

Es besteht Handlungsbedarf mathematische Anfängervorlesungen effektiver zu gestalten, denn hohe Studienabbruchzahlen zu Beginn des Mathematikstudiums (Heublein et al. 2012) und niedrige Erfolgsquoten (Reichersdorfer et al. 2014) sind belegt. An den mathematischen Anfängervorlesungen nehmen neben Mathematikstudierenden im Fach-Bachelor Studiengang auch Studierende aus Zwei-Fächer-Bachelor Studiengängen, nämlich des Lehramts an Gymnasien und des Lehramts an berufsbildenden Schulen teil. Für angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer sind Beweglichkeit bezüglich mathematischer Inhalte und geistige Fähigkeiten, zum Beispiel strukturieren, logisches Denken, analytisches Denken, unverzichtbar. Viele Lehramtsstudierende (und Fach-Bachelor-Studierende ebenfalls) bleiben allerdings auf der Ebene der bloßen Ausführung von Rechenprozeduren stehen. Sie verstehen die wichtigen konzeptuellen Ideen, die den Prozeduren zu Grunde liegen, nicht. Bedenklich ist, wie zukünftige Lehrerinnen und Lehrer, die sich selbst beim Lernen von Mathematik stark auf das Beherrschen von Kalkülen konzentrieren, Mathematik in der Schule unterrichten werden. Vor dem Hintergrund, dass dem schulischen Mathematikunterricht eine essentielle Rolle für die Darstellung der Mathematik in der Gesellschaft zukommt, scheint eine Weiterentwicklung mathematischer Vorlesungen dringlich.

Tatsächlich haben diverse Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler bereits Initiative ergriffen und Schwierigkeiten von Studierenden mit der akademischen Mathematik analysiert (vgl. u.a. Fischer 2006, Maracci 2008, Britton & Henderson 2009, Stewart & Thomas 2010) und alternative Lehrkonzepte erstellt und ausprobiert (vgl. u.a. Stewart & Thomas 2010, Bausch et al. 2014). Aus den Ergebnissen empirischer Studien zum Lehren und Lernen der Linearen Algebra werden folgende Schlüsse gezogen: „There is still much work to be done in attempting to understand the precise nature of students‘ conceptual difficulties in a linear algebra course.” (Britton & Henderson 2009, S. 972). Studierende zeigten Potential zur

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

sinnhaften Verarbeitung von mathematischen Begriffen (Fischer 2006), aber dennoch liegen Schwierigkeiten beim Verstehen auf elementarem Niveau vor (Stewart & Thomas 2010, Maracci 2008). Stewart & Thomas (2010) machen insbesondere darauf aufmerksam, dass Schwierigkeiten beim Vernetzen von Begriffen auftreten. Diese Tatsachen wecken das Interesse, genauer zu betrachten, welche Charakteristika Denkweisen von Studierenden bei der Bearbeitung von (für die Studierenden) herausfordernden Aufgaben mit Fokus auf begriffliche Vernetzungen aufweisen.

## Untersuchungsdesign und Auswertungsmethodik

Im Rahmen einer qualitativen Fallstudie wurden klinische halbstandardisierte Einzelinterviews mit 15 Lehramtsstudierenden der Linearen Algebra durchgeführt. Die Probandinnen und Probanden bearbeiteten drei unterschiedliche Aufgaben zum Thema Basen von Vektorräumen. Die Bearbeitung der Aufgaben regte zum konzeptuellen Denken an und erforderten keine Standardlösungswege. Verschiedene Zugänge waren möglich. Die Interviews dauerten zwischen 40 und 90 Minuten und wurden videographiert. Die Flexibilität in Bezug auf das Verhalten des Interviewers ermöglichte das Aufdecken neuer Phänomene und generierte reichhaltiges Datenmaterial. Die Auswertung mittels sequentieller Feinanalyse, Fallvergleich und Gruppierung führte zu differenzierten Beschreibungen und Strukturierungen von Denkweisen. Auf Details zur Auswertung wird in diesem Beitrag nicht näher eingegangen.

## Charakterisierung ausgewählter Denkweisen

Bei der Bearbeitung der Aufgaben zeigten die Probandinnen und Probanden unterschiedliche Denkweisen. Drei ausgewählte und empirisch belegte Denkweisen sollen im Rahmen dieses Beitrags skizziert werden. Über einzelne Schwierigkeiten hinaus, wird das Denken und das Verstehen seitens der Probandinnen und Probanden im Rahmen eines Gedankengangs möglichst ganzheitlich betrachtet.

*Denkweise A:* Charakteristisch für diese Denkweise ist das Herausfiltern eines Begriffs oder eines genannten Aspekts in der Aufgabenstellung, der als Indikator fungiert und eine Rechenprozedur aktiviert. Probandinnen und Probanden, die diese Denkweise zeigen, können die jeweilige Prozedur, die zwar nicht zielführend ist, durchaus sehr souverän ausführen, stoßen aber bei der Begründung, inwiefern das gewählte Vorgehen zur Lösung beiträgt, an ihre Grenzen. Typisch ist, dass dem vermeintlichen Indikator eine dominierende Bedeutung zugeteilt wird und weitere, mit der Rechenprozedur in Konflikt stehende Informationen in der Aufgabenstellung nicht erkannt werden oder bewusst wenig Beachtung erhalten. Eine Reflexion über bisherige Lösungsansätze, aus der nützliche Informationen für die Lösung abgeleitet werden könnten, ereignet sich nicht. Insgesamt treten im Rahmen der Denkweise A grundsätzlich Schwierigkeiten mit dem Aufbau von mathematischen Begriffen auf. Begriffliche Vernetzungen werden kaum aktiviert. In einer Nicht-Standardsituation scheinen keine alternativen inhaltlichen Zugänge möglich zu sein.

*Denkweise B:* Das Charakteristische für diese Denkweise sind grundsätzlich geeignete Denkhandlungen, wie das Beobachten und Vorausdenken von Wirkungen, das Erkennen von und Reagieren auf Unstimmigkeiten oder das Beobachten der Wirkung von vorgenommenen Veränderungen. Allerdings sind mathematische Begriffe nicht adäquat gebildet. Es wird von der Probandin oder dem Probanden erkannt, dass Unstimmigkeiten im individuell aktivierten Begriffsnetz existieren. Weiterhin besteht ein Bedürfnis nach Stimmigkeit. Das Identifizieren der Ursache einer Unstimmigkeit bereitet jedoch größte Mühe oder gelingt nicht. Probandinnen und Probanden, welche die Denkweise B zeigen, kämpfen damit aus mehreren Eigenschaften eines Begriffs oder Folgerungen aus dem Begriff den eigentlichen Kern des Begriffs selbst auszumachen. Dies führt dazu, dass das Umstrukturieren von mathematischen Begriffen in ein stimmiges Begriffsnetz eine Hürde darstellt.

*Denkweise C:* Charakteristisch für diese Denkweise ist ein begriffliches Denken, wobei mehrere Teilbegriffe, die einen komplexeren Begriff (zum Beispiel Basis) definieren, isoliert voneinander gedacht werden. Die Teilbegriffe sind adäquat gebildet, sie liegen jedoch als in sich geschlossene Funktionseinheiten oder einzelne Module vor. Führt ein Lösungsansatz aus Sicht der Probandin oder des Probanden nicht zum Ziel, so sind alternative Zugänge (zum Beispiel über weitere Teilbegriffe wie lineare Unabhängigkeit oder Erzeugendensystem beim Basisbegriff) vorhanden. Die einzelnen Lösungsansätze stehen bei dieser modularen Denkweise für sich. Zuvor aktivierte Lösungsansätze werden ausgeblendet. Bezüglich der Begriffsbildung lässt sich sagen, dass Vernetzungen höherer Ordnung, nämlich unter den Modulen, Hürden darstellen, während Teilaspekte innerhalb eines Moduls gut vernetzt sind.

## Fazit

Insgesamt lässt sich sagen, dass die Denkweisen der Probandinnen und Probanden sehr vielfältig und unterschiedlich sind und das Erschließen und Vernetzen von Begriffen bei der Bearbeitung von Aufgaben keineswegs ein leichtes Unterfangen darstellt. Es wurde ein Einblick in Denkweisen gegeben, die sich bei Studierenden bei der Bearbeitung von Aufgaben zeigten. Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass Schwierigkeiten von Probandinnen und Probanden mit einer Eingeschränktheit ihrer Denkweisen einhergehen. Da in der zugrundeliegenden Untersuchung individuelle Gedankengänge im Vordergrund stehen, lassen sich individuelle Fördermaßnahmen ableiten (siehe dazu Schlarmann 2014).

## Literatur


Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S. & Wassong, T. (Hrsg.) (2014). Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven. Wiesbaden: Springer.

Britton, S. & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40 (7), 963-974.

Fischer, A. (2006). Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und –ergebnisse von Studierenden. Dissertation, Universität Dortmund. Heruntergeladen von https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/22202 am 02.03.2015.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2012). Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Statistische Berechnung auf Basis des Absolventenjahrgangs 2010. Heruntergeladen von http://www.dzhw.eu/pdf/pub_fh/fh-201203.pdf am 02.03.2015.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40, 265-276.

Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2014). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In I. Bausch et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 37-53). Wiesbaden: Springer.

Schlarmann, K.(2014). Workshop zur Förderung der Begriffsbildung in der Linearen Algebra. In R. Biehler et al. (Hrsg.), *Mathematik im Übergang von Schule zur Hochschule und im ersten Studienjahr*. Wiesbaden: Springer.

Stewart, S. & Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41 (2), 173-188.

Simeon SCHLICHT, Köln

# „Empirische Theorien" – Beschreibung des Verhaltens von Kindern in mathematikhaltigen Spielsituationen

Ein Ziel mathematikdidaktischer Forschung ist es beobachtetes Verhalten von Kindern u.a. in *mathematikhaltigen Spielsituationen* (vgl. Schwank 2010) zu beschreiben. In dem Beitrag soll die Frage diskutiert werden, ob das strukturalistische Begriffsnetz der *Empirischen Theorien* (vgl. Stegmüller 1987 bzw. Burscheid & Struve 2010) einen möglichen Zugang bietet. Hierzu wird eine kurze Szene aus der in der in Schlicht (2014) vorgestellten Studie vorgestellt und mit Hilfe der strukturalistischen Termini analysiert.

## Spielsituation an der Rechenwendeltreppe

Olivia und SL spielen an der Rechenwendeltreppe (RWT). Dieses Arbeitsmittel zur Erkundung des Zahlenraums von 0 bis 9 wurde von Frau Schwank entwickelt. An der RWT stehen 10 Plätze mit 0 bis 9 Kugeln zur Verfügung (vgl. Abb. 1).

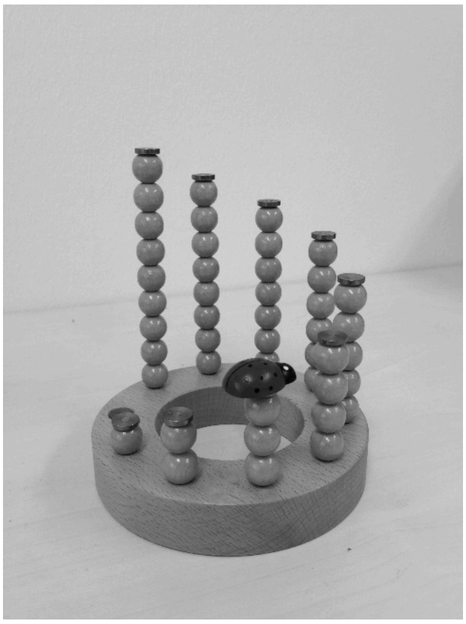
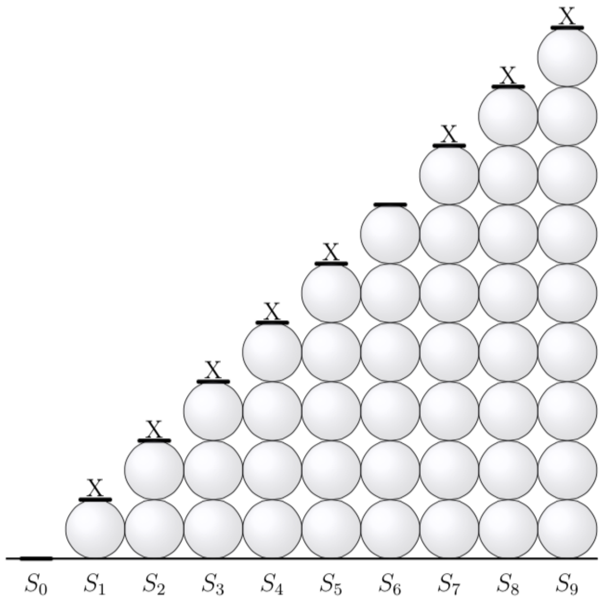


**Abb. 1 Rechenwendeltreppe**

Olivia und SL haben die RWT zusammen erkundet und festgestellt, dass man Akteure, wie den Marienkäfer, auf diese setzen kann. Zu Beginn des geglätteten Transkripts wurden von Olivia bereits mehrere Marienkäfer auf die RWT gesetzt und mitunter die Anzahl der Kugeln benannt, die sich unter dem jeweiligen Marienkäfer befinden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Im Transkript wird zur Erleichterung der Lesbarkeit eine stilisierte Darstellung der RWT mit angegeben. Mit Marienkäfern belegte Stangen der RWT sind mit einem **X** bezeichnet.

| | | |
|---|---|---|
| SL | haben wir jetzt noch Plätze frei’ | |
| Olivia | ja eins (*deutet auf $S_6$*) |  |
| SL | sonst keine mehr’ | |
| Olivia | Nein (*schüttelt den Kopf*) | |

Wie kommt Olivia zu ihrem Urteil? Was ist für sie ein möglicher Platz? Wie kann man sich ihr Urteil, welches sie auch in den nachfolgenden Situationen nicht ändert, erklären?

## Empirische Theorie

Gopnik & Meltzoff (1997) haben herausgearbeitet, dass sich das Wissen von Kindern in Theorien organisiert. Hierbei ist Wissen nicht als von den Kindern formuliertes Gedankengut gemeint, sondern vielmehr das Wissen, welches ein Beobachter in einer gewissen Situation dem Kind unterstellen kann. Kinder verhalten sich als ob sie über eine erfahrungswissenschaftliche Theorie[1] verfügen würden.

[1] Erfahrungswissenschaftliche Theorien in diesem Sinne sind solche Theorien, die Phänomene der Realität beschreiben und erklären und Voraussagen über zukünftiges Verhalten treffen. Beispiele für solche Theorien sind physikalische Theorien, wie die Newtonsche Mechanik, Theorien der Verhaltenspsychologie und Theorien der Ökonomie.

Ein Vorteil dieser Sichtweise ist, dass unter anderem sämtliche Forschungsergebnisse zur Theorieentwicklung – Aufbau von Theorien (theoretische Begriffe), Theoriendynamik – genutzt werden können, um die Theorien zu analysieren. Eine Ausführliche Diskussion der Thematik findet sich u.a. in Burscheid & Struve (2010).

**Fertigkeiten und Fähigkeiten der Kinder**

Zur Rekonstruktion der Theorie über Mengen und Zahlen gehört die Berücksichtigung der Fähigkeiten und Fertigkeiten der Kinder, welche sie in den vorliegenden Situationen aufzeigen und welche als bekannt angenommen werden können. Bezüglich des Operierens mit Mengen und Zahlen sind dies: Das Subitisieren, also das spontane Erfassen von kleinen Anzahlen von eins bis drei (vier) (Feigenson et al. 2004), das spontane Vergleichen von Mengen – im Sinne von Kollektionen von Objekten (Wynn 1992) und das Beherrschen der Zahlwortreihe (z.B. Fuson 1988).

Mengen sind für Kinder demnach Ansammlungen von konkreten Objekten, während Zahlen – sofern sie nicht nur als ein reines Reimschema auftreten – die Mächtigkeiten der Mengen von konkreten Objekten sind.

Gibt es Mengen von realen Objekten, welche die Mächtigkeit 0 besitzen? Die leere Menge ist keine Menge in dem Sinne der Kollektion von realen Objekten, denn: Sind keine Objekte vorhanden, so auch keine Menge. Die 0 ist bezüglich einer Theorie über Anzahlen von Objekten keine Zahl, sondern ein Kunstprodukt, genau wie die leere Menge. Sie ist nur indirekt über Abwesenheit von konkreten Objekten erschließbar. Lässt sich sinnvoll über „Nichts" reden? – Carnap (1931) stellt heraus, dass Sätze über das „Nichts" sinnlose Sätze sind und zu keinerlei Erkenntnis führen. „Nichts" gehört insbesondere nicht zu den beobachtbaren Dingen.

Somit lässt sich die 0 als ein *theoretischer Begriff* bezüglich der Theorie über Mengen und Zahlen identifizieren. Sie hat einen anderen Status, als die anderen Zahlen.

**Analyse des Transkripts**

Mit Hilfe dieser Sichtweise lässt sich Olivias Verhalten beschreiben und erklären. Olivias Regel für die Platzierung von Marienkäfer auf der RWT kann man im vollständigen Transkript der Situation derart rekonstruieren, dass Marienkäfer nur auf Kugeln gestellt werden können. Es gibt keine beobachtbare leere Menge von realen Objekten, also auch keine Menge von 0 Kugeln. Deshalb ist $S_0$ kein Platz für einen Marienkäfer auf der RWT.

## Ausblick

Die 0 ist ohne Frage nützlich im dezimalen –allgemeiner: in beliebigen – Stellenwertsystemen. In schriftlichen Rechenverfahren ist sie unabdingbar zur Vereinfachung der Algorithmen. Im Umgang mit Anzahlen von konkreten Objekten ist sie jedoch nicht notwendig. Die Verwendung hat hier keinen Mehrwert, vielmehr stößt man auf Verständnisschwierigkeiten zwischen Kindern und Erzieherinnen und Lehrerinnen. Mögliche weitere Forschungsfragen sind demnach: Wie bekommt man einen (aus Kindersicht) sinnvollen Mehrwert im Einsatz der 0 etabliert? Wie vermittelt man *theoretische Begriffe*?

Die Rekonstruktion der 0 als theoretischen Begriff bezüglich der Theorie Mengen und Zahlen ist ein Beispiel für den Ansatz der empirischen Theorien, an dem man feststellen kann, dass das Verhalten von Kindern mit Hilfe des Begriffsnetz gut beschrieben und erklärt werden kann. Transkripte werden auf einer anderen Ebene diskutierbar.

## Literatur


Burscheid, H. J. & Struve H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen,* Hildesheim: Franzbecker.

Carnap, R. (1931). Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache. *Erkenntnis, 2,* S. 219 – 241.

Feigenson, L. et al (2004). Core System of Number. *Trends in cognitive sciences, 8(7),* S. 307 – 314.

Fuson, K. (1988). Children‘s Counting and Concepts of Number. New York: Springer.

Gopnik, A. & Meltzoff, A. (1997). *Words, thoughts and theories*, Cambridge MA: MIT Press.

Schlicht, S. (2014). Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs auf der Grundlage einer Videographie mit Drei- bis Vierjährigen. In: Roth, J. & Ames, J. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1071-1074). Münster: WTM-Verlag.

Schwank, I. (2010). *Erlebniswelt Zahlen – Spielereien an der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder.* Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V..

Stegmüller, W. (1987). *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie.* Stuttgart: Alfred Kröner Verlag.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, S. 749 – 750.

Barbara SCHMIDT-THIEME, Hildesheim

# Wie viel Sprache steckt im Fach Mathematik?

## 1. Sprache als Teil des Mathematikunterrichts und als Teil des Professionswissens von Mathematiklehrkräften

Sprache in ihrem doppelten Vorkommen als Medium und als Stoff im Mathematikunterricht findet man in vielen und durchaus auch frühen mathematikdidaktischen Texten. In den letzten Jahren widmeten sich jedoch rasch zunehmend Forschungsarbeiten verschieden Aspekten von Sprache, nicht zuletzt angeregt durch Migration und Inklusion als Herausforderung für Schulen und damit auch den Mathematikunterricht (Fürstenau/Gomolla 2009; Gogolin 2012; Prediger/Özdil 2011; Becker-Mrozek et al. 2013; Jörissen/Schmidt-Thieme 2015 als Auswahl). Immer deutlicher wird in dieser Vielfalt auch die Breite der Aspekte: Natürlich geht es (1) um die Fachsprache der Mathematik, ihre Ausprägungen auf der Wortschatzebene (Fachtermini), aber auch in der graphematischem (mathematische Symbole), syntaktischen (Passiv, Hypotaxe) oder textlichen Ebene (typische Texttypen wie Definitionen oder die Abfolge Satz/Beweis). Bei Fragen des (2) Fachspracherwerbs zeigt sich der enge Zusammenhang zu Begriffsbildungsprozessen. Weitere (3) Funktionen der Sprache werden deutlich in Untersuchungen zu spezifischen Interaktionen oder Kommunikationsmustern im Mathematikunterricht. Besondere Aufmerksamkeit erhielt die Fachsprache Mathematik in letzter Zeit als (4) eine unter vielen anderen im Mathematikunterricht verwendeten Varietäten (Registern), vor allem ihre Verhältnis zu anderen Sprachen – z.B. der Erstsprache – oder Varietäten – z. B. der Bildungssprache/alltägliche Wissenschaftssprache.

Sprachliches Wissen sowie Wissen um die in den eben erwähnten Forschungen erarbeiteten Merkmale und Funktionen von Sprache sind also daher eigentlich Teil des Professionswissens von Mathematiklehrkräften. In Anlehnung an die bisher belkannten Anforderungen lassen sich folgende sprachliche Anforderungen formulieren: Mathematiklehrer/innen …

- beherrschen die Sprache der Schule und die mathematische Fachsprache sowie verfügen über Grundkenntnisse der Eigenschaften der im MU verwendeten sprachlichen Register.
- nutzen die Grundkenntnisse über die verwendeten sprachlichen Register, um zu erkennen, welche Schülerinnen Schwierigkeiten mit den verwendeten Registern haben und leisten auf Grundlage ihrer Kenntnisse adäquate Hilfestellung.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- machen Schülerinnen sprachliche Strukturen der Sprache der Schule und der Fachsprache verständlich.
- kennen die Schwierigkeiten des Begriffsbildungsprozesses; sie führen Fachbegriffe daher im Kontext ein und grenzen diese klar von bekannten Wortfeldern ab.
- können im Unterricht verwendete Aufgabenformate bzw. Unterrichtsstoffe in Bezug auf sprachliche Herausforderungen für Schülerinnen bewerten.
- machen Sprache zum Lerngegenstand des MU.

## 2. Projekt „Umbrüche gestalten“

Die Notwendigkeit sprachlicher Expertise bei Lehrkräften überhaupt wird auch von der Politik gefordert, wenn diese eine „Verbesserung der Chancen von Kindern und Jugendlichen mit Migrationshintergrund“, den „Ausbau der Sprachförderung im Bereich Deutsch als Zweitsprache“ oder „Stärkung der Potentiale von Mehrsprachigkeit“ fordert (aus dem Koalitionsvertrag der rot-grünen Landesregierung in Niedersachsen, Februar 2013). Das Projekt „Umbrüche gestalten. Sprachenförderung und –bildung als integraler Bestandteil innovativer Lehrerbildung in Niedersachsen“ (gefördert von der Stiftung Mercator) hat daher die Integration von Sprachförderung in die Inhalte aller lehramtsausbildenden Studiengänge zum Ziel. Dies soll ein interdisziplinärer Verbund aller lehrerbildendenden Hochschulen in Niedersachsen leisten, Forscher aus den Erziehungswissenschaften wie dem Bereich Deutsch (Sprache Literatur, DAZ). Im Einzelnen soll der Erwerb folgender Kompetenzen im Studium ermöglicht werden:

1. Studierende können sprachenpolitische Rahmenbedingungen beschreiben, ihr eigenes Lehrerhandeln als sprachenpolitisches erkennen und entsprechend Spielräume gestalten.
2. Studierende sind mit aktuellen Studien zur Bildungssituation und Lebenssituation von Schülerinnen und Schülern vertraut und in der Lage, die Zusammenhänge zwischen Migrationsprozessen, Mehrsprachigkeit und Bildungschancen zu reflektieren.
3. Studierende verfügen über Wissen zu Modellierung, Erwerb und Vermittlung bildungssprachlicher Handlungsfähigkeiten als Konkretisierungen sprachlicher Basisqualifikationen.
4. Studierende erkennen mehrsprachige Repertoires als Potenziale für die Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen. Studierende können Mehrsprachigkeit als Ressource und Bildungsziel beschreiben, didaktische Modellierungen zu Mehrsprachigkeit konzipieren und

hinterfragen. Sie wissen, wie sie mehrsprachige Erwerbssituationen analysieren und reflektierend in ihr didaktisches Handeln einbeziehen können.

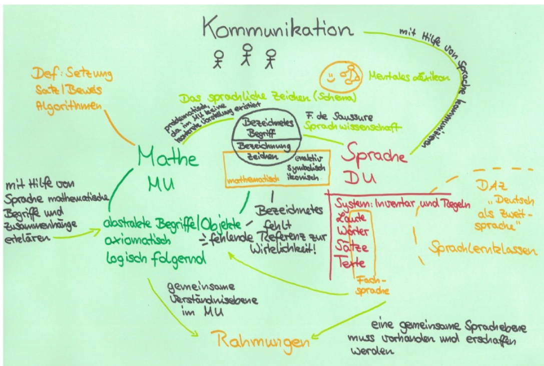
Um eine passgenaue und fächerbasierte Integration der Themen zu gewährleisten erfolgt die Implementation der Inhalte nicht nur durch Schaffung neuer Lehrangebote, sondern vor allen in  der Einbindung in vorhandene Lehrangebote. Dies sichert eine intensive Verbindung von Fach- und Sprachenbildungsexpertise, setzt sie allerdings auch bei den Lehrenden an den Hochschulen voraus.

## 3. Sprachbildung im Mathematikstudium

Erste Implementationen erfolgten im WS 2014/15 an der Universität Hildesheim in verschiedenen Veranstaltungen im Fach Mathematik (GHR):

1. Vorlesung „Einführung in die Fachdidaktik Mathematik“ (3. Semester Bachelor, Pflicht); sprachliche Themen werden z. T. explizit (Fachsprache, Darstellungen), vor allem aber implizit behandelt (z.B. bei Begriffsbildung, Argumentieren, Modellieren, …). Ziel ist die Erweckung einer Sprachbewusstheit.
2. Seminar „Wie viel Sprache steckt im Fach Mathematik?“ (ab 3. Semester Bachelor, Wahlpflicht); Sprache bildet hier den expliziten Schwerpunkt des Seminars. Ziel ist der Erwerb erweiterter sprachlichen, sprachwissenschaftlicher und sprachdidaktischer Kompetenzen, immer in direkter Verbindung zu mathematikdidaktischen Fragestellungen.
3. Projektband Forschendes Lernen „Erklären im Mathematikunterricht“ (Master, Wahlpflicht); eine Aspekt von Sprache als Thema eigener kleiner, studentischer Forschungsarbeiten.
4. Masterarbeiten, z.B. F. Barthel „Sprachliche Anforderungen an das Professionswissen von Mathematiklehrkräften“

Das Bachelorseminar „Wie viel Sprache steckt im Fach Mathematik?“ gliederte sich in vier Themenblöcke: (I) Mathematik repräsentieren (Repräsentationsformen, Fachsprache Mathematik), (II) Mathematik kommunizieren (Erklären, Argumentieren und Beweisen, Rahmungen, (III) DAZ und MU didaktisch (Sprachwissenschaft und Sprachdidaktik, Mentales Lexikon, Unterricht in Sprachlernklassen, in welcher Sprache sollen Kinder Mathematik machen?) und (IV) DAZ im MU. In diesem The-



menblock wurden Unterrichtsmaterialien für DAZ analysiert und eigenes sprachsensibles Material erarbeitet. Alle in diesem Seminar erstellten Materialien (s. z.B. die Graphik links, studentische ergänzte Abschrift eines Tafelbildes) wurden digitalisiert; aus diesen sollen im Sommer „Unterrichtsmaterialien für Hochschulehre entwickelt werden.

## 4. Ausblick

Seminar wie Vorlesung werden im Sommersemester in leicht überarbeiteter Form wiederholt und evaluiert. Im Vordergrund der Evaluationen steht natürlich die Frage, inwieweit die oben genannten Ziele der einzelnen Veranstaltungen erreicht werden konnten. Wichtig ist jedoch auch ihre Passung in einem weiter zu entwickelnden integrativen Curriculum „Sprachkompetenz“, denn die sprachlichen Anforderungen an das Professionswissen bedürfen einer Förderung mindestens während der gesamten Studienzeit. Daher stehen sowohl horizontale Erweiterungen (Integration in fachmathematische Vorlesungen) wie vertikale Erweiterungen (Lehrerfortbildung) an. Zur Unterstützung der Lehrenden an Hochschulen werden in dem Projekt Materialien für die Lehre selbst entwickelt, neben ausgewählten und kommentierten Lektüresammlungen etwa Computeranimationen (z.B. zu der Graphik oben) oder Videovignetten mit beispielhaften Situationen. Zudem werden die Formen der Implementation und der Materialien auf Transfermöglichkeiten auf andere Fächer überprüft.

## Literatur

Becker-Mrotzek, M. et al. (Hrsg., 2013). *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen.* Münster: Waxmann.

Fürstenau, S. & M. Gomolla, (Hrsg.) (2009). *Migration und schulischer Wandel: Unterricht*. Wiesbaden: VS Verlag.

Gogolin, I. (2012): Sprachliche Bildung im Mathematikunterricht. In W. Blum et al. (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (S. 157-165). Wiesbaden, Springer Spektrum.

Jörissen, S. & Schmidt-Thieme, B. (2015). In R. Bruder et al. (Hrsg.), *Handbuch Mathematik*. Heidelberg: Springer, im Druck.

Prediger, S. & Özdil, E. (Hrsg., 2011). *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland*. Münster: Waxmann.

Oliver SCHMITT, Darmstadt

# Reflexionswissen aus tätigkeitstheoretischer Perspektive am Beispiel des mathematischen Argumentierens

In den Bildungsstandards wird unter anderem das Bewerten von Argumentationen als Anforderung an Schülerinnen und Schüler (SuS) formuliert (vgl. KMK, 2012, S. 15). Um dieser Anforderung begegnen zu können ist Metawissen über die Charakterisierung fachspezifischer Argumente, sowie zu deren Struktur und Funktion erforderlich. Insbesondere können sonst die Unterschiede, die sich in vielfältigen argumentationsbezogenen Operatoren wie Diskutieren, Begründen oder Beweisen zeigen, von den SuS kaum nachvollzogen werden. Dieser Beitrag befasst sich mit dem Verhältnis von Metawissen zu Reflexionsprozessen, der Frage wie dieses im Unterricht thematisiert werden kann und was es in Bezug auf die Analyse, Bewertung und Charakterisierung von mathematischen Argumenten inhaltlich umfassen kann. Im Fokus des Beitrags liegt dabei die Förderung der genannten Reflexionsprozesse. Die Verbesserungen der eigenen Argumentionen der SuS sind im Rahmen des Beitrags nachgeordnet.

## Verhältnis von Metawissen zu Reflexionsprozessen

Metawissen über die Struktur und Funktion eines Arguments steht in einer dialektischen Beziehung zu Reflexionsprozessen wie dem Analysieren und Bewerten, da es einerseits bei der Analyse selbst gewonnen wird, andererseits aber auch für diese schon vorausgesetzt wird, da ohne Wissen über dessen Struktur die Analyse eines Argumentes kaum möglich ist.

Diese dialektische Sichtweise lässt sich mit Begriffen der Tätigkeitstheorie lerntheoretisch beschreiben. Eine Lernhandlung wird dort strukturell in einen Orientierungsteil und einen Ausführungsteil gegliedert. In Bezug auf eine Anforderung wird im Orientierungsteil eine Orientierungsgrundlage erarbeitet, auf deren Basis im Ausführungsteil eine Handlung vorgenommen wird. Zur Erarbeitung der Orientierungsgrundlage sind einerseits bereits Kenntnisse notwendig, andererseits werden Kenntnisse in Lernhandlungen aber auch angeeignet. Es können dabei die vier Orientierungstypen Probier-, Muster-, Feld- und Problemorientierung unterschieden werden (vgl. Schmitt, 2013). In Bezug auf die Anforderung, ein Argument zu analysieren und zu bewerten, wäre die zugehörige Handlung bei einer Probierorientierung auf Oberflächenmerkmale wie den Einsatz mathematischer Symbole bezogen, bei einer Musterorientierung würde eine bekannte Analyse und Bewertung eines Arguments als Beispiel dienen und der Versuch unternommen diese zu übertragen. Bei einer Feldorientierung würden all-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

gemeine Kriterien der Struktur und Funktion eines Arguments herangezogen. Bei einer Problemorientierung würde darüber hinaus bei entsprechend kritischen Argumenten die Abhängigkeit der Bedeutung der Bewertungskriterien vom jeweiligen historischen und lebensweltlichen Kontext vor dem Hintergrund individueller Einschätzungen in den Blick genommen.

Die Lehrstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten nach Dawydow (1977) kann dabei helfen eine möglichst weittragende Orientierung schon früh im Lernprozess anzuregen. Bereits bei der Lernzielbildung soll ein möglichst breiter Horizont eröffnet werden. Als erstes Zwischenergebnis im Lernprozess steht dann das sogenannte Ausgangsabstraktum, das zentrale Merkmale des Lerngegenstands abbildet, in Beziehung setzt, verankert und eine Rahmung für den weiteren Unterrichtsverlauf bietet. Dabei dient das Ausgangsabstraktum als Hilfsmittel „der Analyse des Konkreten unter dem Aspekt des Abstrakten" (s. Lompscher, 1996, S. 6).

Im Zentrum des Vortrages stand die Vorstellung eines solchen Ausgangsabstraktums in Form eines Informationsblattes für die SuS (abrufbar unter: http://www.oschmitt.net/uni/informationsblatt_argumentieren.pdf), das eine Darstellung von Strukturmerkmalen, Funktionen und Charakteristika mathematischer Argumente beinhaltet. Zusätzlich sind darauf Fragen zu einzelnen Strukturmerkmalen sowie Beispiele formaler und anschaulicher mathematischer Argumente und eines Alltagsarguments angegeben, um den SuS auch Zugänge über eine Musterorientierung zu ermöglichen. In den beiden nächsten Abschnitten wird das auf dem Informationsblatt dargestellte Metawissen zum Argumentieren und der mögliche Einsatz des Blattes in einer Unterrichtseinheit zu den komplexen Zahlen vorgestellt.

## Metawissen zum Argumentieren

Die Bewertung von Argumenten erfordert eine Bewusstmachung von deren Funktion. Die Erwartungen an Argumente, die in erster Linie erklärende Funktion haben, etwa in einem Überblicksvortrag, sind andere als jene an Argumente, die besonders Verifizierung und Systematisierung, etwa in einem Journalartikel, anstreben. Auf dem Informationsblatt sind die verschiedenen Funktionen abgebildet, die de Villiers (1990) in Bezug auf mathematische Argumente beschreibt. Den auf dem Blatt angegebenen Beispielargumenten werden zudem die jeweils vorwiegenden Funktionen zugeordnet.

Als Metawissen über die Struktur von (mathematischen) Argumenten bietet sich für eine solche Übersicht das Schema von Toulmin (1984) an, da dessen breiter Argumentbegriff geeignet ist, um damit nicht nur formale deduktive Schlüsse abzubilden, sondern auch anschauliche Schlüsse bis hin zu Alltagsargumenten. Damit ist eine Differenzierung unterschiedlicher Schlüsse in der Mathematik im Sinne des demonstrativen und plausiblen Schließens Polyas (1969) aber auch eine Übertragung auf Argumente außerhalb der Mathematik möglich. Dadurch können einseitige Vorstellungen über mathematische Argumente vermieden werden. Das Schema eignet sich auch um epistemologische Besonderheiten mathematischer Argumente sichtbar zu machen. Jahnke unterscheidet offene Aussagen im Alltag mit unklarem Gültigkeitsbereich und möglichen Ausnahmen von geschlossenen Aussagen in der Mathematik, für die der Gültigkeitsbereich genau spezifiziert ist. Dieser Unterschied ist im Toulmin-Schema direkt sichtbar (vgl. Jahnke, 2008). Darüber hinaus ist auch die Einbettung von Argumenten in zugrundeliegende Theoriegebäude im Toulmin-Schema sichtbar. Dies erleichtert die Darstellung des hypothetischen Arbeitens in der Mathematik, das zur Charakterisierung mathematischen Argumentierens beiträgt. Erst die argumentative Erkundung der Konsequenzen einer Hypothese führt zu einer akzeptierten Formulierung einer mathematischen Theorie.

## Umsetzung anhand des Beispiels komplexer Zahlen

Als fachinhaltlicher Rahmen für das Informationsblatt wurde das Thema der komplexen Zahlen gewählt. Die rein formale Erweiterung der reellen Zahlen durch das Symbol $i$ mit $i^2 = -1$ ist nur dann zweckmäßig, wenn sie eine brauchbare Erweiterung des Zahlensystems darstellt (vgl. Courant & Robbins, 2012, S. 72), was sich erst durch Hypothesen und Argumente erweisen kann. Mit diesem Gedanken können die Lernenden die Rechengesetze der komplexen Zahlen erkunden und in diesem überschaubaren Rahmen Wissen über die Struktur und Funktion mathematischer Argumente bis hin zu charakterisierenden epistemologischen Fragen des hypothetischen Arbeitens und der Existenz mathematischer Objekte kennenlernen.

Zur anfänglichen Lernzielbildung eignet sich das bekannte Cantorzitat: „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit." Gemeinsam mit den SuS können verschiedene Zugänge diskutiert werden, um das Spannungsfeld zwischen der Einbettung in ein bereits vorhandenes Theoriegebäude und der Freiheit der Formulierung aller denkbaren Hypothesen zu eröffnen (vgl. Décaillot, 2011, S. 92). Um thematisch den Bezug zu den komplexen Zahlen herzustellen wird dies mit einer Wiederholung bisheriger Zahlbereichserweiterungen verbunden, bei denen einerseits die Freiheit, neue Denkobjekte zu konstruieren genutzt wurde und andererseits eine Einbettung in vorhandene Theorien durch das Permanenzprinzip gegeben war. Auf dieser Grundlage kann nun ein Ausgangsabstraktum erarbeitet werden, das die im Abschnitt Metawissen zum Argumentieren angeführten Wissenselemente beinhaltet. Dabei können zunächst einmal von den reellen Zahlen bekannte Rechenregeln gesammelt und Hypothesen über die Definitionen der Operationen mit komplexen Zahlen gebildet werden, um diese Rechenregeln, entsprechend dem Permanenzprinzip, möglichst gut erhalten zu können. Die Beispiele für eine formal-deduktive und eine anschauliche Argumentation auf dem Informationsblatt beziehen sich inhaltlich auf das Kommutativgesetz der Addition von komplexen Zahlen. Diese Beispiele können an dieser Stelle besprochen werden, um das Informationsblatt bei der ersten argumentativen Erprobung der Hypothesen einzuführen.

Im weiteren Unterrichtsverlauf können weitere Eigenschaften der komplexen Zahlen erkundet werden, von anderen Rechenregeln bis hin zu der Frage nach einer sinnvollen Ordnung. Die SuS können Vorträge oder kurze Artikel zu einzelnen Fragestellungen ausarbeiten und anschließend jeweils die dort verwendeten Argumente auf der Basis des Informationsblattes analysieren und bewerten. Die epistemologische Fragestellung der Existenz mathematischer Objekte könnte mit der Frage, ob und inwiefern eine sinnvolle Definition von $h = 1/0$ möglich ist, aufgegriffen werden. Vergleiche mit außermathematischen Argumenten, insbesondere auch fächerverbindend mit dem Ethikunterricht, in dem das Toulmin-Schema zum Teil Unterrichtsinhalt ist (vgl. SenBJW, 2012, S. 21), können Charakteristika mathematischen Argumentierens noch deutlicher werden lassen.

## Literatur


Courant, R. & Robbins, H. (2010). *Was ist Mathematik?*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Dawydow, W. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht*. Berlin: Volk und Wissen.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.

Décaillot, A.-M. (2011). *Cantor und die Franzosen*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Jahnke, H.-N.(2008). Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 363–371.

KMK [Kultusministerkonferenz] (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. (http://www.kmk.org/)

Lompscher, J. (1996). Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten - Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung. *LLF-Berichte*, 16, 98–118.

Polya, G. (1969). *Mathematik und plausibles Schließen*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Schmitt, O. (2013). Tätigkeitstheoretischer Zugang zu Grundwissen und Grundkönnen. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 894–897). Münster: WTM.

SenBJW [Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft] (2012). *Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I*, Integrierte Sekundarschule und Gymnasium, Ethik.

Toulmin, S., Rieke, R. & Janik, A. (1984). *An Introduction to reasoning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Angela SCHMITZ, Freiburg/Kassel, Andreas EICHLER, Kassel

# Überzeugungen von Lehrkräften zum Visualisierungs-Einsatz im Algebra-Unterricht der Sekundarstufe

Dieser Beitrag präsentiert Ergebnisse einer qualitativen Studie zur Frage, welche Ziele Lehrkräfte mit dem Einsatz von Visualisierung im Algebra-Unterricht verbinden, basierend auf Daten zu Termumformungen und Gleichungslösen. Die Ziele werden anhand des Konstrukts Beliefs entwickelt.

## Ausgangslage und theoretischer Hintergrund

Visualisierung spielt in der Mathematik eine wichtige Rolle, sowohl als Tätigkeit und als auch als deren Ergebnis. Sie kann mental oder extern sein, und sie kann als auf Ziele gerichtet verstanden werden (Arcavi, 2003, S. 217), u.a. auf das Entwickeln von Ideen und auf das Verbessern von Verständnis. In der Literatur ist die Bedeutung von Visualisierung für das Lehren und Lernen von Mathematik anerkannt (z.B. Presmeg, 2006).

Es gibt Anzeichen, dass Visualisierer unter den Lehrenden unterrepräsentiert sind (Presmeg, 1986). Speziell im Bereich der Algebra zeigen Stylianou & Silver (2004) andererseits, dass Lehrkräfte visuelle Repräsentationen für eine wichtige Strategie halten. Sie nutzen sie jedoch unterschiedlich. Weiterhin zeigen Lehrkräfte, die visuelle Beweise schätzen, im Detail sehr verschiedene Sichtweisen (Biza et. al., 2009).

Da weitgehend unbekannt ist, wie Lehrkräfte im Detail über den Einsatz von Visualisierung denken, soll dieser Frage mit Hilfe des Konstrukt der Beliefs (Philipp, 2007, S. 259) nachgegangen werden.

## Forschungsfragen

In diesem Beitrag werden folgende Fragen untersucht: (1) Welche Ziele verbinden Lehrkräfte mit dem Einsatz von Visualisierung in den Gebieten Termumformungen und Gleichungslösen? (2) Wie ist die Beziehung zwischen diesen empirisch entwickelten Zielen und den in der Literatur genannten Funktionen von Visualisierung?

## Methode

Fünf Lehrkräfte verschiedener Schulformen wurden in intensiven halbstrukturierten Interviews zu ihrem Einsatz von Visualisierungen im Algebra-Unterricht der Sekundarstufe befragt. Die Erhebung ist Teil einer größeren Studie, in der die Überzeugungen von Lehrkräften zu Visualisierung in den Gebieten Bruchrechnung, Algebra, Funktionen und Analysis untersucht wurden. Die Fragen in den Interviews richteten sich u.a. auf das Vor-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

gehen im Unterricht, auf Unterrichtsziele und auf übergreifende Bereiche wie das Bild von Mathematik. Die transkribierten Interviews wurden gemäß der Grounded Theory (Glaser & Strauss, 1967) ausgewertet.

**Ergebnisse**

Alle Lehrkräfte äußern sich im Bereich Gleichungslösen zur Gleichungswaage und zu Funktionsgraphen. Weiterhin erwähnen sie u.a. Skizzen zu Anwendungsaufgaben.

Im Bereich Termumformungen ist die Vielfalt der eingesetzten Visualisierungen, über deren Einsatz die Lehrkräfte sprechen, größer: Beim Ausmultiplizieren von Klammern werden einerseits Rechtecke, andererseits Bögen und Pfeile verwendet. Das Addieren von Termen wird mit Obst, Geld bzw. Bausteinen visualisiert. Einzelne Lehrkräfte berichten aus ihrem Unterricht über den Einsatz von Farben, Mustern, Rechenbäumen und Skizzen.

Zur ersten Forschungsfrage, warum die Lehrkräfte die genannten Visualisierungen einsetzen, wurden in den Transkripten offene Codes zu den Gründen entwickelt. Das Vorgehen soll zum Thema Distributivgesetz anhand einer Äußerung von Herrn A verdeutlicht werden:

> *„Das Ausmultiplizieren von Klammern, das visualisiere ich noch. [...] Und zwar mache ich das immer mit Flächeninhalten von Rechtecken. Und zwar ein Rechteck, was hier so unterteilt ist [... (Anm.: Es folgen eine Zeichnung und eine Beschreibung, wie Herr A zeichnet.)] Und dann können die sehen ‚Aha, das Distributivgesetz.'"*

Dieses Zitat führte zur Kodierung „Herleiten". Weitere Textstellen unterstützen diese Hypothese, z.B. beim Multiplizieren von zwei Klammern:

> *„Dasselbe nachher, wenn man Klammern ausmultipliziert, das könnte man natürlich jetzt auch herleiten. [...] Also. Ich mache das mit einer Zeichnung."*

Andere Gründe waren u.a. „Eine Regel begründen", „Inhalten einen Sinn geben", „Inhalte vereinfachen", „Eine Situation durch eine Skizze erfassen". Gemeinsam ist ihnen, dass die Lehrkräfte Visualisierungen einsetzen, damit ihre Schülerinnen und Schüler *„Zusammenhänge verstehen"*.

Einer weiteren Gruppe von Codes wie „Vorgehen vormachen", „Erinnern unterstützen" und „Anker zum Weiterdenken" ist gemeinsam, dass die Lehrkräfte Visualisierungen einsetzen, damit ihre Schülerinnen und Schüler sich *„an ein Vorgehen oder an Zusammenhänge erinnern"*.

Sowohl *„Zusammenhänge verstehen"* als auch *„an ein Vorgehen oder an Zusammenhänge erinnern"* können als kognitive Ziele verstanden werden.

In der Folge wurde untersucht, mit welcher Intensität die Lehrkräfte diese Ziele vertreten. Dazu wurden die empirisch entwickelten Gründe mit „häufig“, „gelegentlich“, „gar nicht“ gewichtet, basierend auf der Anzahl der Themen, bei denen eine Visualisierung eingesetzt wird, und auf der Intensität, mit der die Visualisierung beschrieben wird. Im Gebiet Termumformungen lassen sich die fünf Lehrkräfte so in drei Gruppen einteilen:

I. Visualisierungen dienen dazu, „Zusammenhänge zu verstehen“.

II. Visualisierungen dienen – wenn überhaupt – dazu, „an ein Vorgehen oder an Zusammenhänge zu erinnern“.

III. Visualisierungen dienen beiden Zielen.

Zur Klärung der zweiten Forschungsfrage wurden die die empirisch ermittelten Gründe für den Visualisierungseinsatz mit in der Literatur (u.a. Arcavi, 2003; Duval, 2014) betonten Funktionen von Visualisierung (im Folgenden kursiv) verglichen:

Zum *Verstehen und Erklären* setzen drei der fünf Lehrkräfte Visualisierungen ein. Das *Beweisen* anhand von Visualisierungen lässt sich kaum vom Begründen und Herleiten trennen und wird nicht explizit von den Lehrkräften erwähnt. Vier Lehrkräfte setzen Visualisierungen ein, um *Rechnungen zu ermöglichen,* z.B. mit Pfeilen beim Distributivgesetz. Visualisierung zum *Entdecken von neuem* bzw. *Lösen von Problemen* kommt bei den untersuchten Lehrkräften nur vor, wenn man das Erstellen von Skizzen zu Anwendungsaufgaben darunter fasst.

Weiterhin nennen die Lehrkräfte das „Erinnern“. Diese Funktion wird in der mathematikdidaktischen Literatur allerdings kaum genannt.

## Diskussion

Mit *„Zusammenhänge verstehen“* und *„an ein Vorgehen oder an Zusammenhänge zu erinnern“* wurden Ziele entwickelt, anhand derer man den Visualisierungseinsatz von Lehrkräften aus kognitiver Sicht charakterisieren könnte. Diese Aggregation lenkt den Blick allerdings weg von den detaillierteren Zielen der Lehrkräfte, die beispielsweise für den Vergleich mit der Literatur berücksichtigt wurden.

Der Vergleich empirischer Ziele und theoretischer Funktionen zeigt, dass Visualisierung als Strategie beim Problemlösen und zum Entdecken kaum vorkommt. „Erinnern“ scheint aus empirischer Sicht bedeutsamer als in der Literatur.

Methodisch ist anzumerken, dass die Gewichtung der Codes, mit der die Lehrkräfte in einer der drei Gruppen eingeordnet wurden, zurzeit auf dem

Gebiet Termumformungen basiert. Erste Ergebnisse, wie die Analyse von Zeichnungen zur Gleichungswaage, deuten jedoch darauf hin, dass die Gewichtung bei Ausweitung auf den Bereich Gleichungslösen stabil bleibt.

## Ausblick

Erste Ergebnisse der übergeordneten Studie zeigen, dass die Überzeugungen in der Bruchrechnung mit denen in der Algebra konsistent sind (Schmitz & Eichler, 2015). Ein Vergleich mit den Bereichen Funktionen und Analysis liegt ebenfalls im Umfang der übergeordneten Studie.

Des Weiteren nennen die Lehrkräfte affektiv/motivationale Gründe für den Visualisierungseinsatz. Die Untersuchung dieser Gründe gehört auch zur Gesamtstudie.

## Literatur


Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52* (3), 215–241.

Biza, I., Nardi, E., & Theodossios, Z. (2009): Teacher beliefs and the didactic contract on visualization. *For the Learning of Mathematics, 29* (3), 31–36.

Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, 46 (1), 159–170. doi:10.1007/s11858-013-0565-8

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 257–315). Charlotte (NC): Information Age Publishing.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6* (3), 42–46.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from Psychology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (S. 205–235). Rotterdam: Sense Publishers.

Schmitz, A. & Eichler, A. (2015). Teachers‘ Beliefs about the Role of Visualization in Classroom. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of CERME9*. Prague. (eingereicht)

Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (4), 353–387.

Susanne SCHNELL, Dortmund

# Mathematische Stärken sehen und fördern – Wie Lehrkräfte mathematische Potenziale diagnostizieren

Die zunehmende Heterogenität an Schulen verlangt eine angemessene Förderung sowohl bei Leistungsschwächen als auch bei Stärken beispielsweise von Lernenden im oberen Drittel des Leistungsspektrums. Dazu bedarf es des diagnostischen Blicks von Lehrenden zur Identifikation von Ressourcen und situationsbezogenen Potenzialen. In einer qualitativen Studie im Rahmen des Projekts ‚do math!' wird rekonstruiert, wie Lehrpersonen in Gruppendiskussionen mathematische Potenziale in Video-Vignetten wahrnehmen und auf welche Aspekte sie dabei fokussieren.

## Kompetenzorientierte Diagnose

Der Umgang mit Heterogenität und die bestmögliche Förderung jedes Einzelnen sind zentrale Herausforderungen professionellen Lehrerhandelns. Um diesen Ansprüchen gerecht zu werden, bedarf es gut ausgebildeter Diagnosekompetenzen der Lehrkräfte als Voraussetzung für die Identifikation von Ressourcen und vorhandenen Vorstellungen als Anknüpfungspunkte für zukünftige Lehr-Lernprozesse. Diese kompetenzorientierte Diagnose (vgl. Büchter 2006) zeichnet sich dadurch aus, schriftliche und mündliche Eigenprodukte von Lernenden aus deren Perspektive heraus zu erfassen und auf Grundlage fachdidaktischen Hintergrundwissens (im Sinne der diagnostischen Tiefenschärfe) zu interpretieren (Prediger 2010). An die Diagnose schließt die Anpassung des Lehrerhandelns zur Optimierung der Lernprozesse an (Schrader 2013).

## Identifikation situationsbezogener mathematischer Potenziale

Obwohl im Allgemeinen jede Art der kompetenzorientierten Diagnostik zum Ziel hat, an Ressourcen der Lernenden anzuknüpfen, soll im Folgenden der Fokus auf leistungsstärkere Lernende und die Förderung zur Vertiefung, Vernetzung und Anreicherung mathematischer Kompetenzen gelegt werden. Um die Kompetenzorientierung in der Diagnose insbesondere in Hinblick auf Interaktions*prozesse* im Unterricht ernst zu nehmen, muss der Begriff der ‚Ressourcen' genauer definiert werden. Dazu dient das Konzept der *mathematischen Potenziale.* Darunter wird keine Disposition des Lernenden verstanden, sondern der Begriff wird im Folgenden auf die *Situation bezogen*: Potenzial zeigt sich in Handlungen der Lernenden und bietet Anknüpfungspunkte für lernförderliche Interventionen, die beispielsweise zu einer tieferen Durchdringung eines mathematischen Konzepts beiträgt. Dabei können u.a. Anleihen an die mathematikspezifische

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Begabungsforschung vorgenommen werden, wobei die von Käpnick (1998, 264 ff.) identifizierten Merkmale mathematischer Begabung als situationsbezogene Handlungen umgedeutet werden, z.B. als Strukturieren mathematischer Sachverhalte oder selbstständiges Wechseln von Repräsentationsebenen. Von zentraler Bedeutung sind aufgrund des Fokus auf den Prozess außerdem prozessbezogene Kompetenzen wie Argumentieren/Kommunizieren, Modellieren und Problemlösen. Diese Tätigkeiten in der Situation wahrzunehmen und zu fördern bzw. positiv zu verstärken bedarf des besonderen Blicks durch die Lehrkräfte.

Als Beschreibungssprache für die Diagnose dieser Potenziale durch die Lehrkräfte dient der Begriff der Professional Vision (van Es & Sherin 2008), der sich im *wahrnehmen* (‚noticing') und *interpretieren* signifikanter Interaktionen im Klassenzimmer ausdrückt (van Es & Sherin 2008). Die Untersuchung der Professional Vision von Lehrenden bei der Konfrontation mit ganzheitlichen Unterrichtssequenzen zeigt, dass besonders die Wahrnehmung der Denkwege von Lernenden eine besondere Herausforderung darstellt, die vor allem wenig erfahrenen Lehrkräften selten gelingt und daher geschult werden muss (van Es & Sherin 2008). Die Kategorie ‚student (mathematical) thinking' wird jedoch nicht weiter ausdifferenziert. In Hinblick auf die kompetenzorientierte Diagnose zur Förderung leistungsstärkerer Lernender soll daher der folgenden Frage nachgegangen werden: *Was nehmen erfahrene Lehrkräfte in Gruppenarbeitsprozessen wahr unter dem Fokus auf mathematische Potenziale?*

## Forschungskontext und Projekt ‚do math!'

Untersucht wird diese Fragestellung im Rahmen des Projekts *do math!* (Dortmunder Schulprojekte zum Heben mathematischer Potenziale und Interessen), das sich neben der Förderung leistungsstärkerer Lernender auch die diesbezügliche fachdidaktische Sensibilisierung von Lehrkräften an Gymnasien und Gesamtschulen zum Ziel gesetzt hat. An dem Projekt nehmen im ersten Jahr fünf gezielt ausgewählte Lehrkräfte von Dortmunder Gymnasien in Kooperation mit Forschenden des IEEM teil, danach wird ausgeweitet auf 30. In regelmäßigen Treffen werden Unterrichtsprojekte durch die Lehrpersonen geplant und in den eigenen Klassen (Jahrgang 6-9) durchgeführt. Aus den Videoaufnahmen dieses Unterrichts erstellen die Forschenden Videovignetten, die in der Lehrpersonengruppe gemeinsam und unter dem Schwerpunkt einer kompetenzorientierten Diagnose analysiert werden (vgl. van Es & Sherin 2008). Diese Analysesitzungen werden transkribiert und systematisch durch die qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2007) ausgewertet. Dabei wurde das Datenmaterial mittels induktiv und deduktiv (sensibilisiert z.B. über Ergebnisse der Begabungsforschung,

s. oben) gebildeter Kategorien analysiert. Die entwickelten Kategorien sind als Ausdifferenzierung des Fokus der Lehrenden auf ‚student' und ‚student' thinking' nach van Es & Sherin (2008) zu verstehen.

## Erste Ergebnisse – Kompetenzorientiertes Noticing

In diesem Abschnitt werden einige Aussagen aus den Gruppenanalysen von zwei Videovignetten vorgestellt, in denen jeweils Gruppen aus drei bzw. vier Lernenden miteinander arbeiten. Daran soll die Frage beantwortet werden, worauf die Lehrkräfte jeweils fokussieren unter der Brille auf Kompetenzen und Potenziale. Im Folgenden werden jeweils exemplarisch die Aussagen zu Beginn der Analyse herausgegriffen und <u>Kategorien</u> zugeordnet. (+) oder (-) gibt jeweils die Positiv- oder Negativformulierung an.

**Vignette 1 – offene Aufgabe, Prozentrechnung, Kl. 8** (Lehrer: Alex (Namen anonymisiert))

| | | |
|---|---|---|
| (1) Richard | Die reden ja, also noch intensiver aneinander vorbei, als meine beiden gerade, ne? (…) | <u>ARGUMENTIEREN</u><br>Aufeinander (keinen) Bezug nehmen (-) |
| (2) Alex | Die haben beide für sich genommen erstmal recht.<br>Nur worüber sie nicht sprechen ist, was ist der Grundwert. | <u>RECHENKOMPETENZ</u><br>Korrektheit der Aussagen (+)<br><u>ARGUMENTIEREN</u><br>(fehlende) Transparenz über Annahmen (-) |

**Vignette 2 – Modellierungsaufgabe, Terme & Variable, Kl. 7** (Lehrerin: Lisa)

| | | |
|---|---|---|
| (3) Richard | (...) die Protokollantin [ist] sehr geschickt ist, um nochmal den Rechenweg zu reflektieren und sie fragt ja immer nach: Was soll ich jetzt aufschreiben? Und dann müssen die Anderen halt nochmal nachdenken (…) | <u>(ARBEITS-)VERHALTEN</u><br>Reflektieren der Prozesse durch Nachfragen & Protokollieren (+) |
| (4) Alex | Das Verhalten ist schon sehr devot, ne? Hier bei den Damen hier, ist schon- (…) ist ja schon so'n Gender-Ding, nich? | <u>(ARBEITS-)VERHALTEN,</u><br>Genderspezifische Arbeitsteilung / „devotes" Verhalten (-) |
| (5) Lisa | Man muss dazu sagen, das sind zwei, die sind unheimlich leistungsstark, die beiden Jungs, aber die sind auch Zappelphillips (…) | <u>HINTERGRUNDWISSEN,</u><br>Hohe Leistungsstärke (+)<br>„Zappelphilipps" (-) |

Hintergrund der Erfassung der Negativformulierungen steht die Annahme, dass Nennung solcher Defizite als Spiegel für die Erwartungshaltung an nicht realisierte Situationspotenziale dienen kann.Diese kurzen Ausschnitte geben Einblick in die Vielfalt der von den Lehrkräften fokussierten Aspekte. Weiterhin lassen sich exemplarisch einige Beobachtungen zeigen, die sich aus der Analyse der beiden Analysesequenzen ergeben: Die Lehrkräfte fokussieren sehr häufig auf das Arbeits- und Diskussionsverhalten der Lernenden

- bemerken häufig Defizite, Schwierigkeiten und Hürden in den Bearbeitungsprozessen und treffen Negativformulierungen
- bemerken häufig prozessbezogene Kompetenzen (argumentieren/kommunizieren und modellieren).

## Zusammenfassung und Ausblick

Die überwiegende Fokussierung auf Aspekte des Arbeitsverhaltens sowie auf prozessbezogene Kompetenzen lässt sich möglicherweise darauf zurückführen, dass die Durchdringung der mathematischen Denkwege und Argumente der Lernenden auch diesen Lehrkräften nicht leicht fällt (ähnlich Sherin & van Es 2009). In einem Video überwiegt auffällig eine defizitorientierte Analyse der Sequenz trotz des zu Analysebeginn explizit geforderten Fokus auf Kompetenzen und Potenziale. Diese Beobachtungen legen nahe, dass selbst Lehrkräften, die sich aktiv und neben ihren regulären schulischen Verpflichtungen im Projekt engagieren, eine kompetenzorientierte Wahrnehmung von Gruppenarbeitsprozessen schwer fällt. Umso bedeutsamer scheint eine fachdidaktische Sensibilisierung der Lehrkräfte in Hinblick auf die Wahrnehmung situationsbezogene Potenziale, so dass sie Handlungen zur individuellen Förderung leistungsstärkerer Lernender an diese Voraussetzungen adaptieren können. Schritte zur stärkeren Sensibilisierung sollen in den folgenden Projektabschnitten stärker verfolgt werden.

## Literatur


Büchter, A. (2006). Kompetenzorientierte Diagnose im Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (155-158). Hildesheim/Berlin, Franzbecker.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder.* Frankfurt a.M., Peter Lang.

Mayring, P. (2007). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Weinheim (u.a.), Beltz.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics for teaching and for understanding. The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73-93.

Schrader, F.-W. (2013). Diagnostische Kompetenz von Lehrpersonen. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *31*(2), 154-165.

van Es, E.A. & Sherin, M.G. (2008). Mathematics teachers' 'learning to notice' in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*, 244-276.

Weber, C., Rüede, C. & Streit, C. (2014). Zur kategorialen Wahrnehmung von Fachdidaktikern und Lehramtsstudierenden bei der diagnostischen Beurteilung von Schülerdokumenten. In J. Roth & J. Ames*, Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (1283-1286), Münster, WTM-Verlag.

Jörn SCHNIEDER, Lübeck & Frauke LINK, Konstanz

# Forschendes Lernen in der Hochschulmathematik – Ansätze zur Weiterbildung von Dozierenden

Unser Beitrag versteht sich als kurzer Anriss einer grundlegenden theoretischen Auseinandersetzung zum Begriffsverständnis des hochschuldidaktischen Begriffs „forschendes Lernen" im Kontext der Hochschulmathematik mit dem Anspruch, über die Hochschularten und Spielrichtungen von Mathematik in verschiedenen Studiengängen hinweg ein konsistentes Bild zu schaffen.

Der Diskurs ist entstanden ausgehend von hochschuldidaktischen Fortbildungsansätzen (auch) für Dozierende in der tertiären Bildung, d.h. Professorinnen und Professoren, aber auch wissenschaftliches Personal und Lehrbeauftragte zahlreicher Hochschulen in Deutschland. Diese Ansätze werden kurz skizziert.

## 1. Zum Begriff „forschendes Lernen"

Wir beziehen uns auf die Diskussionsentwicklung forschenden Lernens im Rahmen hochschuldidaktischer Plenen seit der Veröffentlichung der Schrift der Bundesassistentenkonferenz (BAK 1970). Die Diskussion über den Begriff des forschenden Lernens hat national eine stark geisteswissenschaftliche Prägung erhalten, was sich an der mangelnden Übertragbarkeit veröffentlichter Beispiele aus anderen Fächern auf die Mathematik deutlich zeigt (vgl. Huber). Meyer (1970) hat schon die besonderen Charakteristika des Faches Mathematik in diesem Kontext hervorgehoben, allerdings bleibt es bei einer genauen Beobachtung der Fachstruktur ohne daraus ein Kriterienkatalog für forschendes Lernen in Mathematik abzuleiten, was wir hier übernehmen. Dabei sollen die grundlegend akzeptierten Punkte forschenden Lernens (Erkunden eines subjektiv neuen Feldes, freie Wahl der Forschungsmethode, Risiko, Ansprüche an Wissenschaft, vgl. BAK 1970, Huber 2013, Schneider & Wildt 2013) vorausgesetzt sein, allerdings in Abgrenzung zu Huber (2013) ohne den Anspruch an für Dritte interessanten Erkenntnissen.

Wenn man sich forschendes Lernen vom Fach Mathematik aus vorstellt, dann erscheinen drei wesentliche Aspekte zentral:

I. Was erforsche ich? – Mathematische Forschungs- und Darstellungsformen anwenden.

II. Wie forsche ich? – Forschungsprozess planen und kontrollieren.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

III. Was geht in mir vor? – Die eigene Motivation und Emotionen (Stimmungslage) beeinflussen.

Während die ersten beiden Aspekte sich fachbezogen darstellen und wissenschaftlich gut gestützt sind (BAK 1970) ist der letzte Punkt personenbezogen und schließt wesentliche persönlichkeitsbildende Überlegungen ein.

Der Umgang mit eigenen Emotionen im Prozess forschenden Lernens ist aus unserer Sicht dennoch zentral.

## 2. Mathematisch forschendes Lernen in unterschiedlichen Bereichen

Die von uns formulierten Aspekte forschenden Lernens haben in unterschiedlichen Hochschul- und Fachkulturen unterschiedliche Bedeutungen, die im Folgenden kurz beschrieben werden.

Studierende, die Mathematik „um ihrer selbst willen" studieren, werden im Rahmen forschenden Lernens aufgefordert, mathematische Strukturen und Modelle selbst zu entwickeln (I). Dazu müssen sie Hypothesen aufstellen und beweisen (II). Sie werden eigene Grenzen erkunden und damit umgehen lernen müssen (III).

Studierende, die Mathematik als Fach im Rahmen ihres Ingenieurstudiums belegen, wird diese Tiefe der Auseinandersetzung nicht abverlangt. Hier kann aber verlangt werden, dass (angewandte) mathematische Strukturen nachvollzogen werden (I), dass Studierende Unverstandenes erkennen und selbstgesteuert recherchieren und erarbeiten (II). Sie erreichen durch forschendes Lernen eine Sicherheit im Umgang mit Mathematik (III).

Die dritte zu betrachtende Zielgruppe sind Lehramtsstudierende mit Fach Mathematik. Auch hier wird die Tiefe der Auseinandersetzung mit Mathematik in der Regel nicht verlangt. Auch hier wird forschendes Lernen in abgeschwächter Form möglich, z.B. durch aufstellen und beweisen mathematischer Hypothesen in Strukturen der Schulmathematik oder durch selbstgesteuerte Recherche schwierigerer Probleme (II). Es werden als mathematische Strukturen „hinter" der Schulmathematik ergründet (I) und damit eine Entwicklung der Souveränität in Mathematik erreicht bzw. die Möglichkeit der Betrachtung der Mathematik vom „höheren Standpunkt" aus (III).

Allen drei Formen forschenden Lernens in der Hochschulmathematik gemein ist die zwingende Folgerung eines praktischen Szenarios, dass dieses möglich macht.

Diesbezüglich gibt es bisher noch keine Leitlinien für Lehrende. Im Folgenden werden zwei unterschiedliche hochschuldidaktische Fortbildungsansätze vorgestellt.

## 3. Ansätze zur hochschuldidaktischen Weiterbildung von Lehrenden

Sowohl an der HTWG Konstanz als auch an der Universität Lübeck wurden hochschuldidaktische Ansätze zur Weiterbildung des Lehrpersonals entwickelt.

Der Konstanzer Ansatz zur Weiterbildung orientiert sich an konkreten methodischen Handlungsleitfäden, wie sie mathematikspezifisch für die Sekundarstufen vorliegen (vgl. Barzel et al. 2007). Die für die Hochschullehre entwickelte Methodensammlung für forschendes Lernen greift verschiedene Phasen im Prozess auf, um diese pointiert in der Lehre einzusetzen, ohne den gesamten Kreislauf forschenden Lernens in Angriff nehmen zu müssen. Im didaktischen Handlungsleitfaden finden sich nicht nur theoretische Überlegungen sondern auch Vorschläge für eine Zeitgestaltung, einen Ablauf, mögliche E-Learning-Szenarien und Hinweise zur Prüfungsgestaltung. In Konstanz selbst wird auch die Authentizität genutzt: Möglichst jede Methode bekommt ein „Gesicht“, d.h. es gibt eine Lehrperson an der Hochschule, die damit arbeitet. In ortsnahen Workshops ist diese Person ansprechbar und kann auch über zusätzlichen Zeitaufwand, Hürden in der Umsetzung oder didaktische Tricks berichten.

Der Lübecker Ansatz (auch in Friedewold et al. 2014) orientiert sich an dem Versuch der direkten Beeinflussung der Einstellung der Lehrenden. Die Dozierenden sollen ihre Rolle im Lehr-Lern-Prozess insgesamt, insbesondere aber im Prozess forschenden Lernens reflektieren. In verschiedenen Bausteinen wird durch konkrete Arbeits- und Diskussionsaufträge gezielt darauf hingewirkt, emotionale und soziale Aspekte bei der Arbeit an mathematischen Problemen zu diskutieren. Konkreter geht es um die Wahrnehmung der eigenen Selbstregulation im Bearbeitungsprozess auf der einen und um die Beziehungsgestaltung zwischen Forschungsbegleiter und Studierendem auf der anderen (vgl. Aspekt III).

Die Ansätze haben sich aus den unterschiedlichen Strukturen der Hochschulen entwickelt. Die Lehr-Lern-Kultur der Universität unterscheidet sich von derjenigen einer Hochschule für angewandte Wissenschaften. Hier scheinen Unterschiede im Deputat ebenso eine Rolle zu spielen wie die Affinität zu theoretischen Auseinandersetzungen. Grundsätzlich aber versuchen beide Ansätze die Haltung von Lehrenden zu beeinflussen. Sie sollen das eigene Risiko, forschendes Lernen zu erproben, auf sich nehmen.

Jeder Ansatz berücksichtigt auf seine Weise eine professionelle Beziehungsgestaltung und Gesprächsführung in der Lehre und zielt darauf ab, mathematikspezifische, in alle Lehrformate integrierbare Werkzeuge von Studienbeginn an zu entwickeln. Ziel ist es, die Lehrenden auf ihrem Weg zu einem mündigen Umgang mit Lehr- und Prüfungskonzepten zu begleiten.

## 4. Fazit und Ausblick

Unser Ziel ist es, Veranstaltungen zu entwickeln, die „Forschungsbegleiter“ ausbilden bzw. Lehrende in forschendem Lernen weiterbilden. Dies kann auch über das Fach Mathematik hinaus geschehen, soll aber – eben auch – für das Fach Mathematik tragbar sein.

Die von uns präsentierten Ergebnisse (1-3) sind nicht unabhängig voneinander und auch nicht unabhängig von der theoretischen Auseinandersetzung zu forschendem Lernen. Während sich die von uns eingelöste Forderung nach einer eigenen Definition forschenden Lernens für die Mathematik aus dem wissenschaftlichen Desiderat ergibt, lassen wir hier offen, was sie mit den Ansätzen in der Fortbildung verbindet und möchten auf einen anderen Beitrag von uns verweisen (Link & Schnieder in Druck).

## Literatur


BAK (1970). Forschendes Lernen – Wissenschaftliches Prüfen. Bonn: Schriften der Bundesassistentenkonferenz, 2. Aufl.

Barzel, B. , Büchter, A. & Leuders, T. (2007). Mathematik Methodik – Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Friedewold, D. / Nicolaisen, T. /Schnieder, J. (2014): Tutorienleitung und Universitäres Fach-Coaching in der Mathematik. In: Paravicini, W., Schnieder, J. (Hrsg.): Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2013. Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 08. & 09. November 2013 an der Universität zu Lübeck. Münster: WTM.

Huber, L. (2013). Warum Forschendes Lernen nötig und möglich ist. In: Huber, L. / Hellmer, J. / Schneider, F. Forschendes Lernen im Studium – Aktuelle Konzepte und Erfahrungen. Bielefeld: UVW, S. 9-35.

Link, F. / Schnieder, J. (in Druck): Mathematisch forschend lernen in der tertiären Bildung. In Paravicini, W., Schnieder, J. (Hrsg.): Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2014. Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 10. & 11. November 2014 an der Universität Münster. Münster: WTM.

Meyer, E. (1970): Forschendes Lernen in der Mathematik. In: BAK. Forschendes Lernen – Wissenschaftliches Prüfen. Bonn: Schriften der Bundesassistentenkonferenz, 2. Auflage.

Schneider, R. / Wildt, J. (2013). Forschendes Lernen und Kompetenzentwicklung. In: Huber, L. / Hellmer, J. / Schneider, F. Forschendes Lernen im Studium – Aktuelle Konzepte und Erfahrungen. Bielefeld: UVW, S. 53-68

Sebastian SCHORCHT, Gießen

# Erscheinungsbilder der Mathematikgeschichte in deutschen Schulbüchern – Typisierung eines Phänomens

Welchen mathematikhistorischen Beispielen begegnen Lehrerinnen und Lehrer der Primar- und Sekundarstufe in deutschen Mathematikschulbüchern? Bisher wurde diese Frage in der deutschsprachigen Forschung nicht bearbeitet. Bislang fehlt damit eine systematische Strukturierung der in Schulbüchern existierenden mathematikhistorischen Beispiele. Hingegen kann eine solche Typisierung mögliche Entwicklungsrichtungen im Sinne bildungstheoretischer Überlegungen aufzeigen.

Mithilfe der Typenbildung nach Kelle und Kluge (vgl. Kelle & Kluge, 2010) und der formalen Begriffsanalyse nach Ganter und Wille (vgl. Ganter & Wille, 1996) konnten verschiedene Typen bestimmt werden. Insgesamt wurden dafür 151 Beispiele auf ihren Bezug zur Gegenwart, ihre Darstellung eines Entwicklungsprozesses, die auftauchenden historischen Personen in den Beispielen sowie die Art der Handlungsaufforderungen und Informationen untersucht. Der vorliegende Text greift die Untersuchung des *Gegenwartsbezugs* und die Darstellung von *Veränderungen* auf und erläutert diese an einem Beispiel zur Standardisierung von Maßeinheiten.

Der *Gegenwartsbezug* ist als elementarer Impuls zur Beschäftigung mit Geschichte zu verstehen. Er verbindet gegenwärtige Phänomene mit ihrer Vergangenheit. Michael Sauer schreibt dazu: „Bezugspunkt für unsere Beschäftigung mit Vergangenheit ist stets die Gegenwart. Aus ihr kommt zuallererst unser Interesse an der Vergangenheit, stammen die Fragen, die wir an sie anlegen, auf sie beziehen wir die Lehren, die wir uns vielleicht aus der Vergangenheit erhoffen." (Sauer, 2009, S. 91) Historisches Interesse ergibt sich demnach, wenn von der Vergangenheit beeinflusste gegenwärtige Phänomene erklärt werden sollen. Stets sind es die in der Gegenwart vorgefundenen Phänomene, die Fragen an die Vergangenheit provozieren. So beschreibt es auch Jörn Rüsen: „Nur von ihr [der Gegenwart] her öffnet sich der Blick auf die Vergangenheit, in dem diese als Geschichte erscheint und deutend realisiert werden kann." (Rüsen, 2001, S. 83) Auch Mathematikhistorische Fragestellungen ergeben sich demzufolge aus einer Betrachtung gegenwärtiger, mathematischer Phänomene.

Neben dem *Gegenwartsbezug* wurde auch die *Veränderung* der Mathematik in den untersuchten Beispielen festgehalten. So beschreibt Mathematikgeschichte unter anderem die Entwicklung der Mathematik. Sie kann zeigen, dass Mathematik einem Entwicklungsprozess ausgesetzt ist und sich verändert. Normativ betrachtet, soll die Darstellung von *Veränderungen* im

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

mathematikhistorischen Prozess das Bild von Mathematik als Produkt ergänzen. Uffe Thomas Jankvist bestimmt in seinem Ansatz die Darstellung der Entwicklung als einen zentralen Punkt: „focus is on the developmental and evolutionary aspects of mathematics as a discipline.“ (Jankvist, 2009, S. 22) Auch Hans Niels Jahnke verweist auf den historischen Entwicklungsprozess der Mathematik, wenn er und Britta Habdank-Eichelsbacher unter anderem festhalten, dass Mathematikgeschichte dazu beiträgt „Einsichten in die Entwicklung mathematischer Begriffe“ (Jahnke & Habdank-Eichelsbacher, 1999, S. 96) zu zeigen.

Auf der nächsten Seite ist eine „Schulbuchaufgabe“ mit mathematikhistorischem Hintergrund aus „mathe live 5“ abgebildet. Darin wird auf unterschiedliche Maßeinheiten in der Gegenwart eingegangen, was einem *Gegenwartsbezug* entspricht. Dieser *Gegenwartsbezug* gibt Anlass zum Rückblick in die Genese der Maßeinheiten. Ausgangspunkt sind die Maße „Fuß“, „Zoll“ und „Knoten“. Diese Maße finden sich bei Gleisen, Flughöhen oder bei Geschwindigkeitsmessungen. Der dadurch initiierte Blick in die Vergangenheit führt im Text zurück bis zum ersten Versuch Maße zu standardisieren. Die durch König Edgar geforderte Verbreitung einer Anleitung zur Herstellung eines „standardisierten“ Fußes, ermöglichte demnach jeder Person die selbstständige Rekonstruktion des Maßes. Eine Reise zur nächstgelegenen Stadt, die das standardisierte Maß auf dem Marktplatz darbot, musste nicht mehr unternommen werden. Zur Rekonstruktion reichte die Mittelwertbildung aus.

Im ersten Satz wird die *Veränderung* der Mathematik aufgegriffen: „Das Metermaß ist zwar schon 200 Jahre alt, aber dennoch sind in vielen Bereichen die alten Maße recht beharrlich.“ (Kliemann u.a., 2006, S. 56) Der Meter wird zeitlich nach den „alten Maßen“ angesiedelt. Zudem wird auf eine Entwicklung hingewiesen, in dessen Zuge der Meter die „alten Maße“ ablösen soll, denn diese sind laut Text „recht beharrlich“ (Kliemann u.a., 2006, S. 56). Der Grund für diese Entwicklung wird im nächsten Absatz beschrieben. Darin heißt es: „Diese Maße waren allerdings selten einheitlich, so schwankte die Länge des Fußes deutlich zwischen 25 cm und 35 cm.“ (Kliemann u.a., 2006, S. 56) Der Versuch einheitliche Bedeutungen herzustellen führte zur Entwicklung der Standardisierung von Maßeinheiten.

Zur Lösung des Problems wird die Idee des Mittelwerts in den Abbildungen dargestellt. Oben rechts stellen sich 16 Personen so hintereinander, dass jeweils ein Fuß zur Bestimmung einer Rute genutzt wird. Die Abbildung ist eine Darstellung aus der Schrift „Geometrei“ von Jacob Köbel (vgl. Köbel, 1536). Das bei Köbel verwendete Bild stammt aus dem Kapi-

### Das Längenmaß in der Geschichte

Das Metermaß ist zwar schon 200 Jahre alt, aber dennoch sind in vielen Bereichen die alten Maße recht beharrlich.
Moderne ICE-Züge fahren auf einer Spurweite von 4 **Fuß** und 8,5 **Zoll** (1435 mm), Piloten fliegen ihre Jets in 10 000 **Fuß** Höhe,

16 Fuß = 1 Rute

Schiffe fahren in **Knoten** – Seemeilen (1852 m) pro Stunde, Felgendurchmesser beim Fahrrad und beim Auto werden in Zoll angegeben.

Diese Maße waren allerdings selten einheitlich, so schwankte die Länge des Fußes deutlich zwischen 25 cm und 35 cm.
Das heute noch gebräuchliche Fuß wurde vor 1000 Jahren von König Edgar festgelegt: „36 der Länge nach aneinander gelegte Gerstenkörner aus der Mitte der Ähre." Ein Fuß – englisch: 1 Foot – beträgt heute 30,48 cm.

„4 Fuß = 1 m"

**Beispiel aus mathe live 5 (Kliemann u.a., 2006, S. 56)**

tel „Wie einn gerechte Meßrut damit mann Felder/ Acker/ Weingarten /Wissen /Obs garten messen will/ gemacht sol werdenn/ folget hernach." (vgl. Köbel, 1536, S. Dij) In der Überschrift schreibt Köbel von einer „gerechten Meßrut". Leitend ist für den Weg der Standardisierung die Frage nach dem „gerechten" Messen. Die Idee einer „gerechten" Aufteilung/ Verteilung oder des „gerechten" Ausmessens ist sicherlich ein Leitgedanke in der Entwicklung der Mathematik. Köbels „gerechte Meßrut" ergeben 16 aneinandergereihte Fußlängen. Er teilt zudem diese Meßrute in 16 gleich große Teile, was letztendlich ein Schuh ergibt und die Idee der Mittelwertbildung beinhaltet (vgl. Köbel, 1536, S. Dijf.).

Im Beispiel werden eigene Fragen an die Mathematikgeschichte durch den *Gegenwartsbezug* nicht berücksichtigt. Die Schülerinnen und Schüler sind nicht zum Handeln angeregt. Mit einer einfachen zusätzlichen Frage können die Lernenden aktiv eingebunden werden. So ist beispielsweise ein Rechercheauftrag denkbar: „Sucht weitere Beispiele für heute benutzte alte Maße?" Vielleicht werden dabei die Zollangaben des Bildschirms, das Dutzend in Rezeptbüchern oder das Pfund in der Metzgerei entdeckt.

Die *Veränderung* der Mathematik tritt im Beispiel oberflächlich hervor. Sie kann an der Veränderung der Standardisierung deutlicher werden. So ist die Idee der Mittelwertbildung gegenwärtig nicht mehr gängige Praxis bei der Bestimmung des Meters. Als Zwischenschritt wurde in Frankreich im 18. Jahrhundert eine feste Länge bestimmt. Der daraus resultierende Platinstab diente für die eigene Bestimmung des Meters als Vorlage. Die Überlieferung des Maßes wurde durch die notwendige Reise erschwert, allerdings erhöhte sich damit die Genauigkeit. Die aktuelle Definition orientiert sich stattdessen an der Lichtgeschwindigkeit (vgl. BIPM, 2006, S. 22). Die Genauigkeit hat dabei zugenommen. Erleichtert wurde auch die Kommunikation. Andererseits ist diese Anleitung zur Bestimmung des genauen Maßes nicht von jedem rekonstruierbar. Die Komplexität der Wiederherstellung hat auf diese Weise zugenommen. Wenn diese Vor- und Nachteile der veränderten Standardisierungsmethode im Beispiel thematisiert werden, können der Entwicklungsprozess und die damit verbundenen Ziele der Mathematik deutlicher hervortreten.

Zusammenfassend bietet der *Gegenwartsbezug* eine Verbindung zur Lebenswelt der Lernenden wodurch ein Gang in die Vergangenheit ermöglicht wird. Den Entwicklungsprozess der Mathematik zeigt die Darstellung von *Veränderungen*. Für Lernende wird somit deutlich, dass Mathematik Produkt eines Prozesses ist, der noch gegenwärtig besteht. Mathematikhistorische Schulbuchbeispiele können anhand ihres *Gegenwartsbezugs* und der Darstellung von *Veränderungen* der Mathematik untersucht werden. Daraus resultiert eine Strukturierung der Beispiele, die die Typenbildung unterstützt.

## Literatur


Bureau international des poids et mesures [BIPM]. (2006). *Le Système international d'unités (SI)*. Paris: STEDI Media.

Ganter, B. & Wille, R. (1996). *Formale Begriffsanalyse: Mathematische Grundlagen*. Berlin-Heidelberg: Springer.

Jahnke, H. N. & Habdank-Eichelsbacher, B. (1999). Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. In C. Selter & G. Walther [Hrsg.], *Mathematikdidaktik als design science: Festschrift für Erich Christian Wittmann* (S. 95-104). Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Jankvist, U. T. (2009). *Using History as a 'Goal' in Mathematics Education: PhD Dissertation Roskilde University*. Roskilde: IMFUFA tekst.

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus: Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung*. Wiesbaden: Springer.

Kliemann, S., Puscher, R., Segelken, S., Schmidt, W. & Vernay, R. (2006*). mathe live 5: Mathematik für Sekundarstufe I*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Köbel, J. (1536). *Geometrei vonn künstlichem Messen unnd absehen allerhand höhe, fleche, ebene, weite unnd breyte.* Elektonische Ressource: http://reader.digitale-sammlungen.de/resolve/display/bsb10806709.html

Rüsen, J. (2001). *Zerbrechende Zeit: Über den Sinn der Geschichte*. Köln: Böhlau.

Sauer, M. (2009). *Geschichte unterrichten: Eine Einführung in die Didaktik und Methodik*. Seelze-Velbert: Erhard Friedrich Verlag.

Sven SCHÜLER, Rebekka STAHNKE, Jochen WEIßENRIEDER,
Bettina RÖSKEN-WINTER & Sigrid BLÖMEKE, Berlin

# Wirkung von Lehrerfortbildungen – Konzeption und Entwicklung eines Tests zur Messung von Lehrerkompetenzen in Stochastik

Die zunehmende Standardisierung von Lehr- und Lernerwartungen setzt neue Bedingungen für die Erhebung von professioneller Kompetenz im Bereich der Lehreraus- und -fortbildung in der Mathematik. Diese Entwicklung spiegelt sich in Large-Scale-Assessments wie COACTIV (Kunter et al., 2011) und TEDS-M (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010) wider, welche die Wirkung von Ausbildung und Lehrpraxis auf das Professionswissen von Mathematiklehrpersonen untersuchen. Die verwendeten Testinstrumente in diesen Studien sind konzeptionell eher breit angelegt und umfassen vorrangig zentrale Subdomänen der Mathematik in der Sekundarstufe I (u.a. Algebra, Stochastik, Arithmetik, Geometrie). Dem gegenüber fokussieren wir in diesem Beitrag die Entwicklung und Pilotierung eines domänenspezifischen Kompetenztests, welcher die Wirkung von Lehrerfortbildungen für den Bereich der Stochastik auf das Professionswissen von Lehrpersonen in der Primarstufe erfasst. Bisherige Forschungsarbeiten erheben die Kompetenzentwicklung von Lehrpersonen durch Fortbildungen in der Regel über retrospektive Selbstauskünfte (Lam & Bengo, 2003). In diesem Beitrag liegt der Schwerpunkt auf der validen Messung der Wirkung von Fortbildungen über reliable Testinstrumente, die fortbildungsübergreifend eingesetzt werden können.

## Theoretische Einbindung

Lehrerprofessionswissen steht in einem direkten Zusammenhang zur Konzeptualisierung von Kompetenz als *"...the latent cognitive and affective-motivational underpinning of domain-specific performance in varying situations"* (Blömeke, Gustafsson & Shavelson, 2015, S.3). Dieses Verständnis von Kompetenz greift zwei Sichtweisen auf: Betrachtet als eine Disposition beschreibt Kompetenz das Professionswissen und stabile affektiv-motivationale Merkmale von Individuen. Aus einer situativen Perspektive wird Kompetenz als von der direkten Situation beeinflusstes, variables Verhalten von Individuen berücksichtigt. Vor dem Hintergrund dieses Verständnisses orientieren sich die auf der Basis von Shulmans (1986) klassischer Unterscheidung von Fachwissen, fachdidaktischem Wissens sowie pädagogischem Wissen entstandenen vielfältigen Modelle des Lehrerprofessionswissens oftmals an einer eher dispositionalen oder eher situativen Perspektive auf Kompetenz (Depaepe, Verschaffel & Kelchtermans, 2013;

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Ball, Thames & Phelps, 2008). Im Hinblick auf unsere Studie ist insbesondere die Zusammenführung beider Perspektiven relevant, womit eine dynamische Sichtweise auf Kompetenzen ermöglicht wird, welche besonders die situationsspezifischen Prozesse in den Blick nimmt, die den Übergang von Wissen zu einer Handlung moderieren (Blömeke et al., 2015).

## Forschungsprojekt und Fragegestellung

Das Projekt „DZLM-Wirkungsmessung in der Stochastik" erfasst die Entwicklung fachlicher und fachdidaktischer Kompetenzen von Lehrpersonen im Inhaltsfeld der Stochastik im Primarbereich vor und nach der Teilnahme an einer themenspezifischen Fortbildung. Weder die Fachinhalte der Stochastik noch deren didaktische Umsetzung stellen für Lehrpersonen einen zentralen Baustein in ihrer Ausbildung dar (Biehler & Hartung, 2006). Folglich besteht ein Bedarf an Fortbildungen zu diesen Themenfeldern besonders im Bereich der Primarstufe. Zur Wirkungsmessung sind entsprechende Testinstrumente zu generieren, die den allgemeinen Gütekriterien genügen, aber auch ökonomisch fortbildungsübergreifend eingesetzt werden können und die besonderen Bedingungen der Kompetenzentwicklung in Fortbildungen berücksichtigen. Dieser Beitrag erschließt dieses breite Forschungsanliegen für die Domäne des *Fachwissens in der Stochastik* aus einer konzeptionellen und einer methodischen Perspektive über die folgende Forschungsfrage: *Wird das Fachwissen in der Stochastik über den entwickelten Test reliabel und valide gemessen?*

## Methodologie

Vor dem Hintergrund Kompetenz als Zusammenspiel von Disposition und Performanz zu verstehen, umfasst das Projekt sowohl die kognitive als auch die situative Perspektive auf das Lehrerprofessionswissen. Mittels selbstentwickelter Paper-and-Pencil-Tests zu mathematischen und mathematikdidaktischen Kompetenzen und einem auf aktionsbezogene Kompetenzen fokussierenden Videovignettentest (Blömeke, et al., 2015) soll in einem Pre-Post-Design die Entwicklung des fachlichen und des fachdidaktischen Wissens im Bereich der Stochastik im Primarbereich von Lehrpersonen im Verlauf unterschiedlicher Fortbildungsmaßnahmen erfasst werden. Dieser Beitrag beschreibt im Folgenden als einen ersten Schritt methodische und inhaltliche Aspekte der Entwicklung und Pilotierung des Tests zu fachmathematischen Kompetenzen in der Stochastik.

Basierend auf Kompetenzstandards, Kernlehrplänen und Empfehlungen für die Stochastik in der Lehrerausbildung wurde das Konstrukt *Fachwissen in der Stochastik im Primarbereich* durch die Inhaltsfelder *Zufall und Wahrscheinlichkeit*, *beschreibende Statistik*, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und

*Kombinatorik* konzeptualisiert. Daran anknüpfend wurden diesen Inhaltsfeldern 117 Aufgaben aus vorhandenen Large-Scale-Vergleichsstudien (u.a. VERA3/8, TEDS-M) kompetenzbasiert zugeordnet. Nach einem ersten Rating in einer Gruppe bestehend aus Expertinnen und Experten aus den Bereichen Mathematikdidaktik und empirische Bildungsforschung mit Expertise in der Testkonstruktion und in der Fortbildungspraxis wurde die Passung der Items zum Konstrukt sowie die Einschätzung ihres Einsatzes in einer Testsituation bewertet und in mehreren Entwicklungszyklen ein vorläufiges Instrument erstellt. Die Pilotierung des Instruments erfolgte in drei Fortbildungskursen zur Stochastik im Primarbereich (P1: $N=5$, $\alpha=0.54$; P2: $N=15$, $\alpha=0.61$; P3: $N=10$, $\alpha=0.76$) und in einer Studierendengruppe vor ($N=289$, $\alpha=0.74$) und nach ($N=281$, $\alpha=0.77$) einer fachspezifischen Vorlesung zur Stochastik. Parallel wurden in einem zweiten Expertenrating anhand einer 5-stufigen Likert-Skala (*1=stimme nicht* zu bis *5=stimme voll zu*) die Kategorien *klare Formulierung, Repräsentation des Inhaltsbereichs* und *Vergleich zu allen möglichen Items* die Inhaltsvalidität des Tests geprüft und einzelne Aufgaben mit Ratings unter 3.0 modifiziert, ausgetauscht und ergänzt (Jenßen, Dunekacke & Blömeke, 2015).

## Ergebnisse und Diskussion

Im Rahmen der Pilotierung konnte eine finale Version des Testinstruments bestehend aus 16 Aufgaben (35 Items) für den Einsatz zur Wirkungsmessung in unterschiedlichen Stochastik-Interventionen generiert werden. Die Konstruktion der Testaufgaben erfolgte auf einer allgemeinen Kompetenzbasis und ist daher relativ unabhängig von der jeweiligen Intervention (z.B. Fortbildung, Vorlesung). Die kompetenzbasierten Inhaltsbereiche der Stochastik werden dabei wie folgt abgedeckt: *Zufall und Wahrscheinlichkeit (12 Items)*, *beschreibende Statistik (9 Items)*, *Wahrscheinlichkeitsrechnung (10 Items), Kombinatorik (4 Items).* Nach der Pilotierungsphase wurde das entwickelte Testinstrument in zwei Fortbildungskursen zur Stochastik (F1: $N=30$, $\alpha=0.70$; F2: $N=17$, $\alpha=0.84$) eingesetzt. In Bezug auf unsere Forschungsfrage in diesem Beitrag weist das Testinstrument vor dem Hintergrund des heterogenen Konstrukts Fachwissen zur Stochastik im Primarbereich und kleiner Fallzahlen bei Fortbildungsteilnehmenden eine zufriedenstellende Reliabilität auf. Die Schwierigkeit der Items zu Begin der Fortbildungen liegt zwischen 0.00 (keiner konnte das Item lösen) und 0.95 (fast alle konnten das Item lösen). Die mittlere Itemschwierigkeit ist mit 0.45 ($SD=0.25$) niedrig genug, um Verbesserungen nach Teilnahme an einer Fortbildung aufdecken zu können.

Aus einer inhaltlichen Perspektive zeigen erste Beobachtungen, dass die Ergebnisse der Lehrpersonen und der Studierenden zu den Testaufgaben eine Schwierigkeit im Vergleich dieser beiden Gruppen beinhalten: Die Studierenden lösen genau die Aufgaben relativ häufig korrekt, mit denen die Lehrpersonen in unseren Stichproben Probleme haben und umgekehrt. Erklärungen für dieses diametrale Lösungsverhalten sind beispielsweise in unterschiedlichen mathematischen Grundvorstellungen zur Stochastik zu sehen, die mit Fehlkonzepten aus dem Alltagsverständnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit konkurrieren und zu verschiedenen Phasen im Professionalisierungsprozess unterschiedlich ausgeprägt sind (vgl. Groth, 2007). Diese ersten Einblicke bilden den Ausgangspunkt für vertiefende Forschung im Rahmen dieses Projektes, welche sich in einem nächsten Schritt mit dem Einsatz des entwickelten Instruments in vergleichbaren Fortbildungen und mit der Konzeptualisierung und Messung von PCK in der Stochastik befassen wird.

## Literatur


Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389–407.

Biehler, R. & Hartung, R. (2006). Die Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 51–80). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (2010). TEDS-M-2008 – *Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Gustafsson, J. E. & Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie*, *223*(1), 3–13.

Depaepe, F., Verschaffel, L. & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education, 34,* 12–25.

Groth, R. E. (2007). Towards a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 427–437.

Jenßen, L., Dunekacke, S. & Blömeke, S. (2015). Qualitätssicherung in der Kompetenzforschung: Empfehlungen für den Nachweis von Validität in Testentwicklung und Veröffentlichungspraxis. *Zeitschrift für Pädagogik, 61. Beiheft.*

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV.* Münster: Waxmann.

Lam, T. C. M. & Bengo, P. (2003). A comparison of three retrospective self-reporting methods of measuring change in instructional practice. *American Journal of Evaluation, 24,* 65–80.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Thomas SCHULTIS, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Freiburg

# Förderung prozeduraler und konzeptueller Kompetenzen beim Üben

## Einleitung und Theoretischer Hintergrund

Dem Üben kommt im Mathematikunterricht eine hohe Bedeutung zu, umso höher ist daher auch das Ansehen von Schulbüchern mit einem vielfältigen Übungsangebot (Winter, 1984 S.4f). Das Format von Übungsaufgaben in Schulbüchern hat sich in den letzten Jahren merklich verändert, denn „dem in atomare Anforderungsstufen und kleinsten Stufen aufgelösten Fertigkeitstraining (...) wird immer weniger Platz eingeräumt. (...) Immer mehr Aufgaben führen zu Entdeckungen, verlangen Reflexionen oder verbinden das Üben neuer Begriffe und Verfahren mit älteren Themen.“ (Büchter & Leuders, 2005)

Der hohe Stellenwert des Übens bedeutet für Lehrkräfte, dass sie häufig mit der Auswahl geeigneter Aufgaben konfrontiert sind. Doch welche Aufgaben eignen sich? Welches Ziel wird mit der jeweiligen Aufgabe verfolgt? Hier lassen sich zwei grundlegende Aspekte identifizieren: zum einen geht es um das Einschleifen von Verfahren; das heißt das Automatisieren von Rechenprozeduren mit dem Ziel der kognitiven Entlastung; insbesondere im Hinblick auf komplexer werdende Aufgabentypen. Zum anderen sollen unterschiedliche Anwendungsmöglichkeiten zur gezielten Erweiterung des Transfers zum Einsatz kommen, um so die Integration des Gelernten in bestehende Wissensstrukturen zu ermöglichen (vgl. u.a. Renkl, 2000).

Eine ebenfalls bedeutsame Unterscheidung ist die in prozedurales und konzeptuelles Wissen, welche in der Kognitionspsychologie vorgenommen wird (vgl. u.a. Byrnes & Wasik, 1991). Die Spezifizierung dieser Wissensfacetten im Bereich Mathematik erfolgte u.a. durch Hiebert & Lefevre (1986) und Rittle-Johnson & Siegler (1998). Prozedurale Aufgaben erfordern vor allem das (auch unreflektierte) Durchführen von Rechenverfahren zur Lösung von Aufgaben. Dabei sind insbesondere Routine, Regelanwendungen und Automatisierung von Bedeutung. Es handelt sich eher um ein „Wissen wie“ eine Aufgabe gelöst wird. Konzeptuelle Aufgaben fordern eher implizites oder explizites inhaltliches Verstehen von Verfahren und Prinzipien in einer Wissensdomäne. Zum Lösen der Aufgaben wird ein Verständnis über den Zusammenhang zu anderen Wissensbereichen benötigt. Es handelt sich also um vernetztes „Wissen warum“.

Nach Abgrenzung dieser beiden Wissensfacetten kann nun auf die Unterscheidung der zwei zu untersuchenden Übeformate – im Näheren ‚produktive‘ bzw. ‚traditionelle‘ Aufgaben genannt – eingegangen werden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Nach Winter (1984), Wittmann (1990), Leuders (2005) und Leuders et al. (2009) grenzen sich produktive Aufgaben von traditionellen Aufgaben insofern ab, als sie die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, individuelle Ideen und Lösungswege sowie Überlegungen, die über die Aufgabe hinausgehen, zu entwickeln. Traditionelle Aufgaben hingegen sehen eher ein angeleitetes und geführtes Bearbeiten mit einem eindeutigen Lösungsweg und klarem Abschluss der Aufgabe(nbearbeitung) vor.

## Fragestellungen und Hypothesen

Untersucht wird zunächst, ob beide Aufgabentypen einen Wissenszuwachs bezüglich prozeduralem und konzeptuellem Wissen hervorbringen. Die zweite Fragestellung betrifft den quantitativen Vergleich des Wissenszuwachses beider Übungsformen.

Es wurden folgende Hypothesen aufgestellt: 1. Beide Übungsformen erzeugen sowohl bei prozeduralem als auch konzeptuellem Wissen einen Zuwachs. 2. Die produktive Übungsform erzeugt einen stärkeren Wissenszuwachs bei konzeptuellem Wissen, wohingegen die traditionelle Übungsform vor allem das prozedurale Wissen voran bringt.

## Studie und methodisches Vorgehen

Es wurde eine Experimentalstudie in Form eines Pre-Post-Designs durchgeführt. Die Erhebungen fanden in einer Werkrealschule und zwei Realschulen in 7 Klassen mit insgesamt 158 Schülerinnen und Schülern statt. Davon befanden sich 58 Schülerinnen und Schüler in der sechsten und 100 in der siebten Klassenstufe. Als Unterrichtsthema wurden Grundvorstellungen, Addition und Subtraktion von gemischten Bruchzahlen gewählt. Diese Wahl begründete sich in der Tatsache, dass dieses Thema durch viele Lehrkräfte eher als Randthema behandelt wird und somit die Einfluss nehmende Variable des Vorwissens möglichst gut kontrolliert werden konnte.

Der Ablauf der Untersuchung wird in Abbildung 1 dargestellt. Ein bis zwei Wochen vor der Intervention wird mittels eines Bruchrechenvortests das vorhandene Wissen erhoben. Dieser Test wird von den unterrichtenden Lehrkräften selbst durchgeführt. Darauf folgt die Einheit selbst, die mit einer standardisierten Einführungsstunde beginnt. Diese wird durch den Versuchsleiter gehalten. Direkt im Anschluss an die Einführungsstunde folgt der Pre-Test, der ebenfalls vom Versuchsleiter durchgeführt wird. Die Einteilung in Experimental- und Kontrollgruppe erfolgt randomisiert, wobei mittels der Pre-Test-Leistung auf eine Ausgewogenheit zwischen den Gruppen geachtet wird, um Leistungsunterschiede zu vermeiden. Die Übungsstunden der Experimentalgruppe werden vom Versuchsleiter durchgeführt, da ansonsten die Lehrkräfte mit einem für sie ungewohnten

Aufgabentyp konfrontiert wären. Die Kontrollgruppe wird durch die in der Klasse üblicherweise unterrichtende Lehrkraft angeleitet – hier werden Aufgabentypen eingesetzt, die analog zu denen des in den Klassen verwendeten Schulbuchs konzipiert wurden. Direkt nach der dritten Übungsstunde findet der Post-Test und die Erhebung der Verarbeitungskapazität (IQ) im gesamten Klassenverband statt. Diese Stunde wird wieder ausschließlich durch den Versuchsleiter moderiert.

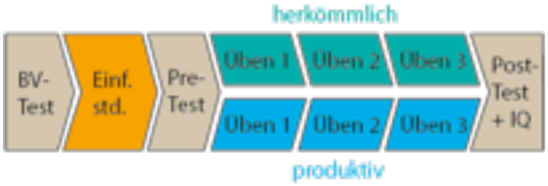



**Abbildung 1**: Design der Untersuchung

## hopp

Die beiden nachfolgenden Schaubilder (Abbildung 2) zeigen die Entwicklung des prozeduralen und konzeptuellen Wissens vor und nach der Intervention. Während sich beide Gruppen beim prozeduralen Wissen in ähnlicher Weise verbessern (Experimentalgruppe von 8,34 auf 9,70, Kontrollgruppe von 8,95 auf 9,96, jeweils $p < 0.001$; bei maximal 14 Punkten pro Skala) unterscheiden sich die Veränderungen signifikant ($p < 0.05$) hinsichtlich des konzeptuellen Wissens: Die Experimentalgruppe verzeichnet einen Anstieg um 1,94 (von 5,67 auf 7,61), die Kontrollgruppe nur um 0,83 (von 6,07 auf 6,90), jeweils $p < 0.01$.

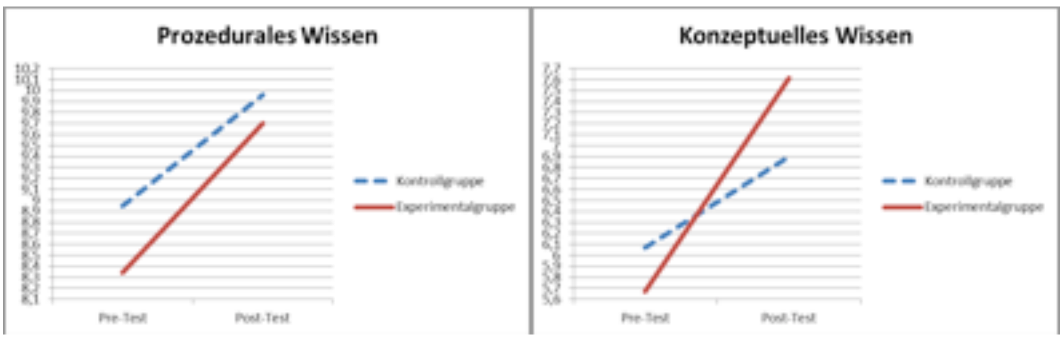



**Abbildung 2**: Entwicklung von prozeduralem und konzeptuellen Wissen durch die Intervention

Aus den Schaubildern lässt sich entnehmen, dass die erste Hypothese bestätigt wurde. Die zweite Hypothese wurde nur partiell bestätigt. Beide Übungsformen fördern ähnlich wirksam das prozedurale Wissen. Das konzeptuelle Wissen hingegen wird besonders stark durch produktives Üben gestärkt. Dies zeigt auch eine MANCOVA, die mit der unabhängigen Variable *Gruppe* und den beiden moderierenden Variablen *Bruchrechenvortest* und *Verarbeitungskapazität* für die abhängige Variable $\Delta$prozedural keinen signifikanten Effekt, dafür aber für Δkonzeptuell einen Effekt mit der Effektstärke Cohens d = .38 ($p = .019^{*}$ sig.) ergibt.

## Ausblick

Da produktive Aufgaben in der Regel ein noch unbekanntes Format darstellen, ist mit einer gewissen Eingewöhnungszeit zu rechnen (basierend auf Erfahrungen aus aktuell laufenden Fortbildungen zu diesem Thema). Es ist daher mit stärkeren Effekten zu rechnen, wenn diese über einen längeren Zeitraum hinweg eingesetzt werden. Allerdings gibt es auch Störgrößen wie z.B. den Versuchsleiter als neue Lehrkraft, der evtl. größere Motivation unter den Schülerinnen und Schülern auslösen könnte. Letztlich haben beide Gruppen von beiden Übungsformen profitiert. Die zwei Aufgabenformate haben somit ihre Berechtigung für den Einsatz im Unterricht.

## Literatur


Büchter, A., & Leuders, T. (2005). Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Scriptor

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. Developmental Psychology, 27(5), pp 777-786

Hiebert J, & Lefevre P (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: Hiebert J (ed) Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics. Erlbaum, Hillsdale, pp 1–27

Leuders, T. (2005). Intelligentes Üben selbst gestalten! Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. In: Pädagogik (4). S. 29-32

Leuders, T., Hefendehl-Hebeker, L. & Weigand, H.-G (2009). Mathe magische Momente. [mit DVD-ROM]. 1. Aufl., Berlin: Cornelsen.

Renkl, A. (2000). Automatisierung allein reicht nicht aus. Üben aus kognitionspsychologischer Perspektive., in: Meier, Rampillon, Sandfuchs, Stäudel (Hrsg.): Üben und Wiederholen. Sinnschaffen – Können entwickeln, Friedrich Jahresheft XVIII 2000, Friedrich Verlag, Seelze, S. 16-19.

Rittle-Johnson, B. & Siegler, R.S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), The development of mathematical skills. Hove, UK: Psychology Press, pp 75-110

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht, in: Mathematik Lehren, Heft 2, Februar 1984, S. 4-16.

Wittmann, E. Ch.(1990). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Erich Ch. Witt- mann & Gerhard N. Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett, S. 152-166.

Andreas SCHULZ, Freiburg

# Wie lösen Viertklässler Rechenaufgaben zur Multiplikation und Division?

Die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen basiert auf der zunehmenden Vernetzung und wechselseitigen Integration prozeduralen und konzeptuellen Wissens. So benötigt das Lernen von informellen Prozeduren, wie bspw. unterschiedlicher halbschriftlicher Rechenwege, zumindest ein Teil-Verständnis. Andererseits ist Verständnis anfangs immer auf das Lösen lokaler Probleme und Prozeduren bezogen (Baroody 2003).

Lorenz (2006, 1998) beschreibt, dass für die langfristige Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen ein tragfähiger Vorstellungsaufbau von Zahlen, arithmetischen Beziehungen und Operationen notwendig ist. Der daraus resultierende Zahlensinn erlaubt u.a. Abschätzungen über die Nähe von Zahlen zueinander, das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen oder das Verstehen von Effekten von Operationen. Durch intensives Üben können die Stärken und Schwächen unterschiedlicher Rechenwege erfahren werden, um diese begründet auswählen und flexibel einsetzen zu können. Automatisierungsprozesse entlasten das Kurzzeitgedächtnis und begünstigen Fehlerfreiheit und Geschwindigkeit. Das Lösen fortschreitend komplexerer Aufgaben verlangt eine zunehmende Automatisierung der einzelnen Teilschritte, aus denen sie aufgebaut sind.

Die individuelle Entwicklung von Rechenstrategien ist nach Crowley, Shrager & Siegler (1997; vgl. Verschaffel et al. 2009) mit dem koordinierten Wechselspiel zwischen metakognitiven und assoziativen Lösungsprozessen verbunden. Assoziative Lösungsprozesse nutzen die Passung einer Aufgabenstellung zu bereits verfügbaren Lösungsschemata bzw. Rechenwegen, die sich bewährt haben. Eine solche Lösung kann schnell und automatisiert erfolgen. Falls für eine Aufgabenstellung noch kein bewährtes Lösungsschema zur Verfügung steht, ist ein metakognitiver Lösungsprozess nötig, der auf einer expliziten Analyse erkannter Aufgabenmerkmale unter Rückgriff auf eigene Problemlösestrategien basiert. Auf diesem Wege vertiefen und vergrößern Kinder ihr anwendbares, explizites Wissen über spezifische Aufgabenmerkmale und ihre eigenen, darauf bezogenen Fähigkeiten. Wenn möglich wird demnach assoziativ auf prototypische, automatisierte und schnell verfügbare Rechenwege zurückgegriffen, wenn nötig wird im metakognitiven, langsameren und analytischen Prozess eine Lösung erarbeitet.

Flexibles Rechnen wird in der Literatur aus zwei unterschiedlichen Perspektiven beleuchtet (Rathgeb-Schnierer 2011, 2010; Threlfall 2009): Das

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Strategieauswahl-Modell nimmt an, dass sich Expertise im flexiblen Rechnen durch ein Abwägen unterschiedlicher möglicher Rechenstrategien gegeneinander auszeichnet und Expertise auf dem Verfügen über ein Strategierepertoire beruht. Das Emergenz-Modell andererseits betont, dass Rechenstrategien nicht im Sinne kompletter Lösungswege gewählt werden, sondern emergieren, indem flexible Rechner situationsbedingt auf spezifische Aufgabenmerkmale reagieren und auf strategische Mikro-Werkzeuge zum Vereinfachen und Verändern von Aufgaben zurückgreifen. Dazu gehören das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen, gleich- und gegensinniges Verändern sowie das Nutzen von Hilfsaufgaben und Analogien. Expertise im flexiblen Rechnen beruht hier auf Zahl- und Operationswissen, dem Erkennen von Zahl- und Aufgabenmerkmalen sowie der Nutzung und Kombination strategischer Werkzeuge. Diese drei Kompetenzaspekte flexibler Rechenkompetenzen ergeben in der Zusammenfassung der dargelegten Theorien einen Hinweis auf drei idealtypische Phasen bzw. auf Bedingungen aus Kompetenzaspekten für die Anwendung von Rechenstrategien: Langfristig werden zunehmend komplexe Zusammenhänge erkannt und genutzt, neu erarbeitete Lösungswege werden als Schemata schrittweise automatisiert (vgl. Baroody 2003; Tab. 1):

| **Bedingungen/ Phase** | *Lorenz (2006, 1998)* | *Crowley, Shrager & Siegler (1997)* | *Threlfall (2009), Rathgeb-Schnierer (2011, 2010)* |
|---|---|---|---|
| (Zahl- &) Operationsverständnis | Vorstellungsaufbau | | |
| Lokale Zusammenhänge: Zahl und Aufgabenbeziehungen (er)kennen und nutzen | Entwicklung von Zahlensinn, intensives Üben als Grundlage für begründetes Entscheiden | Metakognitives System: bewusst, langsam | Emergenz-Modell: Erkennen und Nutzen von Aufgabenmerkmalen und strategischen Mikrowerkzeugen |
| Komplexe Zusammenhänge: Rechenwege (er)kennen und nutzen | Automatisierungsprozesse | Assoziatives System: automatisiert, schnell | Strategieauswahl-Modell: Strategierepertoire aus kompletten Rechenwegen |

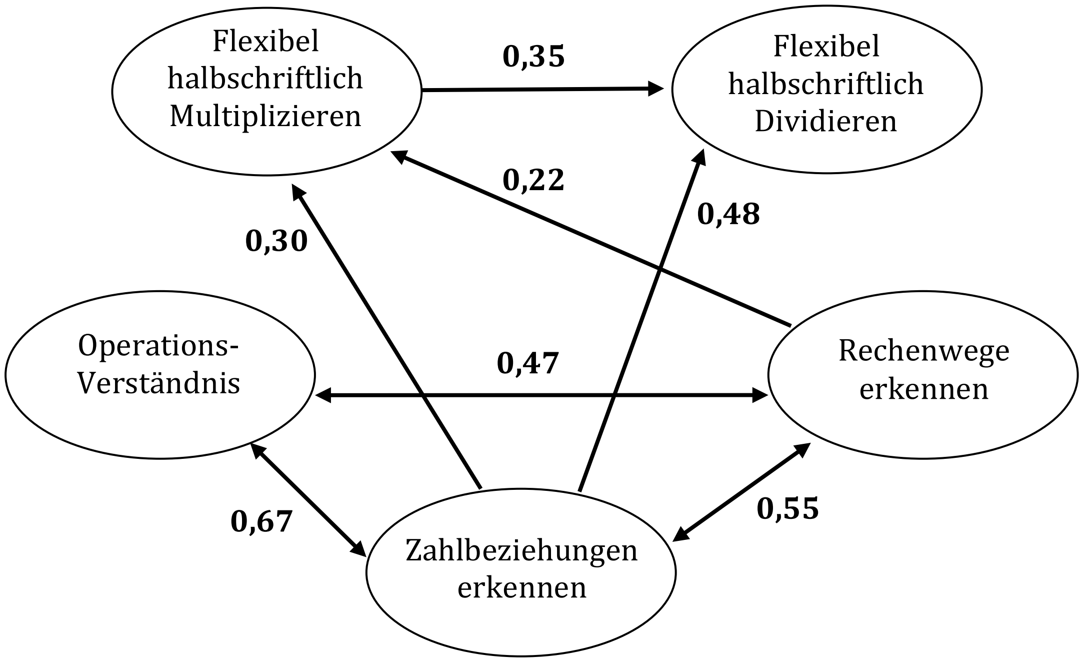
Der Beitrag dieser drei Kompetenzaspekte zum flexiblen Rechnen wurde am Beispiel der halbschriftlichen Multiplikation und Division in 13 vierten Klassen aus Süddeutschland untersucht (n = 221). „Operationsverständnis“

wurde mittels vier Textaufgaben erfasst (Bsp.: Aisa hat 56 €. Sabine hat 14€ weniger als Aisa. Sabine hat doppelt so viel Geld wie Paula. Wie viel € hat Paula?). Das „Erkennen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen“ wurde über 4 Aufgaben operationalisiert (Zahlfolgen erkennen und fortsetzen, Zahlenpaare zu gesuchtem Produkt bzw. Quotient erkennen, Aufgabenmuster erkennen und fortsetzen). In 6 Multiple-Choice-Aufgaben sollten jeweils vier „Rechenwege erkannt und beurteilt“ werden (Bsp.: 18·22 kann man so rechnen: 10·20 + 8·2 / 10·20 + 10·2 + 8·20 + 8·2 / 9·44 / 20·20). In je zwei Aufgaben zur „flexiblen Multiplikation“ (9·21, 14·15) und „flexiblen Division“ (294:6, 360:40) wurde bewertet, ob bis zu drei korrekte und verschiedene Lösungswege angegeben werden konnten (Tab. 2):

| Ohne (mit) Bewertung schriftlichen Rechnens | *Keine Lösung* | *Ein korrekter Rechenweg* | *Zwei korrekte Rechenwege* | *Drei korrekte Rechenwege* |
|---|---|---|---|---|
| 9·21 | 75 (29) | 113 (84) | 28 (87) | 5 (21) |
| 14·15 | 135 (87) | 62 (77) | 22 (41) | 2 (16) |
| 294:6 | 177 (88) | 39 (108) | 5 (21) | 0 (4) |
| 360:40 | 167 (138) | 44 (70) | 10 (12) | 0 (1) |

In der Multiplikation dominierten die schriftlichen Algorithmen (232 von 528 insgesamt erfassten korrekten Lösungen), gefolgt von den halbschriftlichen Rechenwegen stellenweise (187), Malkreuz (17), schrittweise (32), Nachbaraufgabe (Ergebniskorrektur mit Subtraktion: 31) sukzessive Addition (22), gegensinniges Verändern (2) oder Kopfrechnen (5). Auch in der Division dominierte die Anwendung schriftlicher Rechenverfahren (146 von 259 insgesamt erfassten korrekten Lösungen), gefolgt von den halbschriftlichen Rechenwegen schrittweise (39), Zehneranalogie (15), Nachbaraufgabe (20), gleichsinniges Verändern (4), Geteiltkette (4), sukzessiver Addition (2) oder Kopfrechnen (29). Tabelle 2 ist u.a. zu entnehmen, dass ca. 10% (33 bzw. 24 von 221 Kindern) bei den verwendeten Multiplikationsaufgaben in der Lage waren, wenigstens zwei verschiedene halbschriftliche Rechenwege (inklusive Kopfrechnen) anzugeben. Bei den Divisionsaufgaben konnten lediglich ca. 20 % (44 bzw. 54 Kinder) wenigstens einen halbschriftlichen Rechenweg angeben bzw. die Aufgaben im Kopf lösen.

Mittels Strukturgleichungsmodell (Cmin/df: 1,523; p: 0,003; CFI: 0,959; RMSEA: 0,049) wurde der Beitrag von „Operationsverständnis“, des „Erkennens von Zahl- und Aufgabenbeziehungen“ sowie des „Erkennens von Rechenwegen“ zu „flexiblen Rechenkompetenzen“ analysiert. Hierbei wurden keine Algorithmen (als korrekt) berücksichtigt. In Abb. 1 sind nur die signifikanten Pfade (Korrelationskoeffizienten, standardisierte Beta-Gewichte) eingezeichnet:




Das „Erkennen von Zahlbeziehungen“ leistet einen Beitrag sowohl zum flexiblen Multiplizieren (p: 0,004) als auch zum flexiblen Dividieren (p<0,001). Dahingegen ist vom „Erkennen von Rechenwegen“ lediglich ein Beitrag zur flexiblen Multiplikation (p: 0,038) zu erkennen. Die Ausprägung des Operationsverständnisses kann in Klasse 4 statistisch gesehen keine Unterschiede im flexiblen Rechnen erklären. In Passung zum erörterten theoretischen Hintergrund (vgl. Tab. 1) lässt sich der Befund folgendermaßen interpretieren: In der vierten Klasse beruhen Lösungsprozesse zur halbschriftlichen Multiplikation sowohl auf dem Erkennen und Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen im Sinne des Emergenzmodells, als auch auf dem Erkennen und Nutzen eines Strategierepertoires im Sinne des Strategieauswahl-Modells. Bei der Lösung von Divisionsaufgaben kommt dem Nutzen lokaler Zusammenhänge und verbunden damit metakognitiven Lösungsprozessen im Sinne des Emergenzmodells eine noch sehr viel größere Bedeutung zu. Das Nutzen komplexer Zusammenhänge und damit eine breite Anwendung und Auswahl teils bereits automatisierter halbschriftlicher Rechenwege im Sinne der Nutzung eines Strategierepertoires leistet bei der Division noch keinen substanziellen Beitrag zur Lösungsfindung, wie dies bereits bei der flexiblen Multiplikation zu beobachten ist. Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann beim Autor per Email angefordert werden: andreas.schulz@ph-freiburg.de

Stefanie SCHUMACHER, Bielefeld

# *BeSt Teacher*: Ein Testinstrument zur Erfassung des Lehrerprofessionswissens im Bereich der Beschreibenden Statistik

Das Projekt *BeSt Teacher* soll Einblick in das Professionswissen von Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe I im Bereich der Beschreibenden Statistik (*BeSt*) geben. Der dafür entwickelte Online-Fragebogen umfasst Items zu Fachwissen, fachdidaktischem Wissen sowie Kontextvariablen zur Lehrerselbstwirksamkeit und zu Emotionen. Erste Zwischenergebnisse zeigen eine Bandbreite im Fachwissen sowie in der Komplexität der Antworten zu fachdidaktischen Inhalten.

## 1. Theoretische Grundlagen

Das Forschungsprojekt knüpft an die Grundlagen von Shulman und seiner klassischen Triade aus Fachwissen (*content knowledge, CK*), fachdidaktischem Wissen (*pedagogical content knowledge, PCK*) und allgemeinpädagogischem Wissen (*pedagogical knowledge, PK*) an (vgl. Shulman 1987, 8). Diese wurde in nachfolgenden Modellen verfeinert, abgeändert und ergänzt, ihre einzelnen Elemente jedoch selten in Frage gestellt, höchstens deren klare Abgrenzung voneinander. Die nationale COACTIV-Studie sowie das international angelegte TEDS-M-Projekt weisen Fachwissen als notwendige Voraussetzung für fachdidaktisches Wissen aus. *BeSt Teacher* konzentriert sich auf die domänenspezifischen Bereiche von CK und PCK.
Das Konzept der *Statistical Literacy,* das die Notwendigkeit eines (kritischen) Verständnisses der statistischen Daten in unserem Alltag betont (vgl. Wallman 1993, 1), stellt den allgemeinen Zugang zur Thematik für die fachwissenschaftlichen Items (CK) dar. In Bezug auf die *Adults*‘ *Statistical Literacy* liefert Gal (2004, 51ff.) eine hilfreiche Einteilung in ‚knowledge elements‘ (z.B. mathematische Kenntnisse und Kontextwissen) und ‚dispositional elements‘ (wie Einstellungen und eine kritische Haltung).
Für das fachdidaktische Wissen (PCK) wird das in COACTIV verwendete Modell (vgl. Kunter et al. 2011) aufgegriffen, wobei hier insbesondere das Erklärungswissen der Lehrkraft auch unter Rückbezug auf Schülervorstellungen (‚Wissen über das Erklären und Repräsentieren von mathematischen Inhalten‘ sowie ‚Wissen über fachbezogene Schülerkognitionen‘) im Fokus steht. Dieses steht in engem Zusammenhang zu dem Modell der Michigan-Gruppe um Loewenberg Ball (2008, p. 401f.) mit den Elementen ‚Knowledge of Content and Teaching‘ (KCT) und ‚Knowledge of Content and Students‘ (KCS).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Darüber hinaus wecken individuelle Einstellungen der Lehrkraft national wie auch international das Interesse der Forscher. „Emotions matter" (Frenzel et al. 2010, 129) und auch die Selbstwirksamkeit in Form von *personal teaching efficacy* (PTE) hat Einfluss auf das Handeln der Lehrkraft und in Folge dessen auch auf die Lernenden (vgl. Tschannen-Moran et al. 1998, 202). Bisher fehlen fachspezifische Studien zur Lehrerselbstwirksamkeit und zu Lehreremotionen, insbesondere in Bezug auf domänenspezifische Bereiche wie die Beschreibende Statistik. *BeSt Teacher* untersucht neben der PTE auch für den Unterrichtsprozess relevante Emotionen wie Freude, Ärger, Angst und Langeweile (vgl. Frenzel et al. 2010, 143ff.). Die folgende Graphik (Abb. 1) veranschaulicht das Rahmenmodell von *BeSt Teacher* und die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Bereichen:

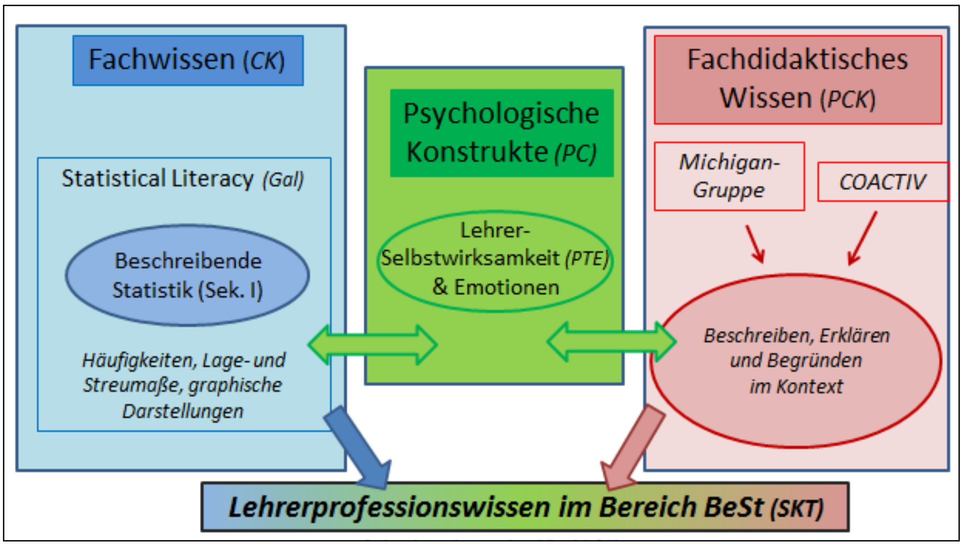



**Abb. 1 Rahmenmodell ‚*BeSt Teacher*'**

Aus der Theorie und der gesichteten Literatur ergeben sich folgende Forschungsinteressen:

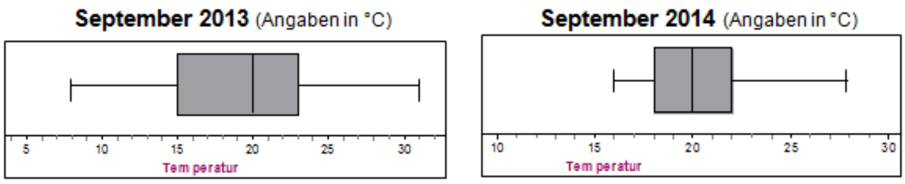
- Entwicklung eines validen Testinstruments zur Erfassung des Professionswissens von Lehrkräften der Sek. I im Bereich der Beschreibenden Statistik
- Dokumentation des Professionswissens von Lehrkräften der Sek. I im Bereich der Beschreibenden Statistik
- Erstellen von Lehrerprofilen unter Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen CK, PCK, PC und den biographischen Daten

## 2. Praktische Umsetzung

Die drei fachlichen Inhaltsbereiche (Häufigkeiten: 8 Items; Lage- und Streumaße: 16 Items; Graphische Darstellungen: 9 Items) wurden in An-

lehnung an die Curricula ausgewählt und auf zwei Niveaus angelegt, wobei das grundlegende Niveau z.B. einfache Berechnungen und Definitionen umfasst und das erhöhte Niveau komplexere Inhalte und mehrstufige Verknüpfungen anspricht.
In dem folgenden CK-Beispiel (Abb. 2) geht es um die Darstellung einer Datenverteilung in einem Boxplot. Die Items 1-3 sind auf grundlegendem Niveau angesiedelt (Kenntnis über Spannweite, Median und Maximum), die Items 4-6 auf erhöhtem Niveau (Interpretation des Medians, Vergleich zweier Verteilungen).

In den folgenden Boxplots sind die Tageshöchsttemperaturen einer Stadt im September 2013 und 2014 dargestellt.




a. **Entscheiden** Sie bitte bei jeder Aussage, ob sie – bezogen auf die obigen Boxplots – **richtig** oder **falsch** ist.
Die Temperaturangaben beziehen sich jeweils auf die Tageshöchsttemperaturen.

| Aussage | richtig | falsch | weiß ich nicht |
|---|---|---|---|
| Die Spannweite der Temperaturen im September 2013 und im September 2014 ist identisch. | | | |
| Der Median liegt in beiden Darstellungen bei 20 °C. | | | |
| Es gab keinen einzigen Tag in beiden Jahren im September, an dem es wärmer als 31 °C war. | | | |
| In beiden Jahren lag die Tageshöchsttemperatur an jeweils mindestens 15 Tagen bei 20 °C oder mehr. | | | |
| Im September 2013 befanden sich mehr Tage in der grauen Box als im September 2014. | | | |
| An mindestens 25 % der Tage im September 2013 war es kälter als am kältesten Tag im September 2014. | | | |

**Abb. 2 Beispiel für ein CK-Item**

Bei den sieben fachdidaktischen Items sollen die Lehrkräfte z.B. Begriffe im Kontext erläutern oder zu Schüleraussagen begründet Stellung nehmen. Das an das obige CK-Item (vgl. Abb.2) anschließende PCK-Item (Abb. 3) geht auf die Eigenschaften des Medians bzw. der Quartile im Boxplot ein, wobei es zu erkennen gilt, dass 50% der Daten zwischen dem unteren und dem oberen Quartil liegen. Diese werden durch den Median, symbolisiert durch den senkrechten Strich, nochmals in zwei Hälften aufgeteilt, so dass sich gleich viele Daten links wie rechts vom Median in der Box befinden. Neben der inhaltlichen Erklärung wird die Art des Umgangs mit der Aussage der Schülerin im Unterricht codiert.

b. Eine Schülerin meldet sich und stellt fest, dass es in der Stadt im September 2013 mehr Tage mit einer Tageshöchsttemperatur zwischen 15° C und 20° C gab als Tage mit Werten zwischen 20° C und 23° C.
**Beschreiben Sie** bitte**, wie Sie** auf diese Feststellung *mit Bezug auf die obige Darstellung* **reagieren**.

**Abb. 3 Beispiel für ein PCK-Item**

Die Lehrerselbstwirksamkeit wird mit acht Items (in Anlehnung an das validierte Testinstrument MTEBI, vgl. Enochs et al. 2000) und die vier Emotionen jeweils mit vier Items und vierstufigen Likertskalen von „stimme nicht zu“ bis „stimme zu“ untersucht.

## 3. Diskussion und Ausblick

Erste Ergebnisse weisen v.a. auf Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgaben zu Boxplots, zur kritischen Analyse von graphischen Darstellungen, zur Kausalität von Ereignissen und zur Standardabweichung hin. Die PC-Items zeigen eine ausgewogene Einschätzung der Lehrerselbstwirksamkeit und ein relativ hohes Maß an Freude bei vergleichbar geringen Ausprägungen von Angst, Ärger und Langeweile. Die Studie wird im Frühjahr 2015 abgeschlossen und eine Stichprobe von ca. 60 Lehrkräften umfassen. Mit den Ergebnissen aus der Befragung sollen u.a. Fortbildungskonzepte sowie didaktische Materialien weiterentwickelt werden.

## Literatur


Enochs, L. G., Smith, P. L., & Huinker, D. (2000). Establishing Factorial Validity of the Mathematics Teaching Efficacy Beliefs Instrument. School Science and Mathematics, 100(4), 194–202.

Frenzel, A. C., Goetz, T., Stephens, E. J., & Jacob, B. (2010). Antecedents and Effects of Teachers’ Emotional Experiences: An Integrated Perspective and Empirical Test. In P. A. Schutz & M. Zembylas (Eds.), Advances in Teacher Emotion Research. The Impact on Teachers’ Lives (pp. 129–151). Springer US.

Gal, I. (2004). Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking (pp. 47-78). Dordrecht: Springer Science + Business Media Inc.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Eds.). (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster [u.a.]: Waxmann.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1–22.

Tschannen-Moran, M., Hoy, A. W., & Hoy, W. K. (1998). Teacher efficacy: Its meaning and measure. Review of educational research, 68(2), 202–248.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching Our Society. Journal of the American Statistical Association, 88(421), 1-8.

Heinz SCHUMANN, Weingarten

# Polyeder-Metamorphosen – eine Anwendung raumgeometrischen Konstruierens

Der Raumgeometrie-Unterricht an allgemeinbildenden Schulen ist vor allem geprägt von Berechnungen an geometrischen Körpern als eine Anwendung von Formelwissen und numerisch-algebraischen Verfahren. Die Formenkunde stellt dafür einen bescheidenen Vorrat an solchen Körpern zur Verfügung. Sie hat dabei eher die Funktion einer „dienenden Magd“ als die der Entwicklung einer Formen-Systematik raumgeometrischer Figuren (u. a. Schumann 2009). Ein Aspekt einer solchen Entwicklung sind die Verwandlungen bzw. Metamorphosen und die damit verbundenen Verwandtschaften geometrischer Körper. Hier wollen wir unter der Metamorphose einer geometrischen Figur eine ihre Form variierende, nicht nur stetig verlaufende Verwandlung dieser Figur in eine neue Figur verstehen.

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit besonderen Körper-Metamorphosen, nämlich denjenigen von Polyedern (u. a. Ziegler 2012). Neben der erkenntnis- und raumvorstellungsbildenden Bedeutung haben die Polyeder-Metamorphosen eine attraktive ästhetische Wirkung, welche in ihren Animationen zur Entfaltung kommt.

Das Lernen von Geometrie vollzieht sich an und mit adäquaten Realisaten geometrischer Figuren in physischer, handzeichnerischer, printmedialer und computergrafischer Darstellung. Mit der Verfügbarkeit von Dynamischen Geometrie-Systemen (DGS) und – seit etwa zehn Jahren – von Dynamischen Raumgeometrie-Systemen (*DRGS*) für den Geometrie-Unterricht besteht die Möglichkeit der interaktiven computergrafischen Konstruktion und dynamischen Variation geometrischer Figuren. Diese Darstellung geometrischer Figuren ist besonders für ihre Metamorphosen geeignet. Dabei kann das Primat physischer Primärerfahrung beim Raumgeometrie-Lernen nicht mehr aufrecht erhalten werden. So haben z. B. raumgeometrische Konstruktionen als räumliche Erweiterung der Zirkel-Lineal-Konstruk-tionen zu den Kugelzirkel-Planeal-Konstruktionen keine physische bzw. analoge Entsprechung; das trifft auch für zahlreiche direkte Manipulationen räumlicher Figuren zu. Viele Themen der Raumgeometrie, auch das Thema „Polyeder-Metamorphosen“, können überhaupt erst richtig durch die Nutzung von *DRGS* zugänglich gemacht werden (Schumann 2007 u. 2008). Dabei sind die Erfahrungen beim Agieren in den virtuellen Räumen der 3D-Computerspiele, welche von vielen Schülern und Schülerinnen heute gespielt werden, für die Nutzung eines *DRGS* von Vorteil.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Es existieren bereits ihren Verlauf wiedergebende Polyeder-Metamorphosen in Gestalt von fertigen *Animationsvideos*:

- als Export aus spezifischen *Polyeder-Tools* (z. B. GreatStella, http://greatstella.en.softonic.com/ , auch als App MoStella)
- als *YouTube*-Videos (z. B. https://www.youtube.com/watch?v=tzBN0Kr1Xes)
- auf *Websites* (z. B. http://www.math.uni-augsburg.de/~bernt/Archimedes/Stumpf-Stutz-Morph/index.html#imago)
- auf *DVD*s (Lernmaterial, z. B. Schumann (2006): Interaktive Videos für die Raumgeometrie mit Cabri 3D. Rosenheim: co.Tec).

Diese Videos zeigen als „*Black-Box-Videos*" zwar den Verwandlungsverlauf, aber nicht den Herstellungsprozess der Generierung einer Metamorphose.

Eine zeitgemäße, auf das Verstehen zielende Herstellung im Kontext der Schulgeometrie ist ihre Erzeugung mittels interaktiver Konstruktion in *DRGS*, z. B. in dem prototypischen *Cabri 3D* mit Verwendung des Zugmodus bzw. von Animationsoptionen. Dabei kommt man mit wenigen Konstruktionsoptionen aus. Besonders die Konstruktionen mit Kongruenzabbildungen und die Polyederkonstruktion als konvexe Hülle dienen einer ökonomischen Erzeugung. Für den Erwerb der *DRGS*-Konstruktionsfähigkeit und -fertigkeiten gibt es bereits geeignete Instruktionsvideos (Knapp 2011).

Folgende Formvariationen an Polyedern sind mit einem solchen *DRGS* herstellbar: *Ecken- und Kantenstumpfen*, *Sternen und Zelten*, *Durchdringen* (Verbundpolyeder), *Kantenknicken* usw. Besondere reichhaltige Metamorphosen sind jene mit *Invarianz der Ecken-Äquivalenz* (isogonale Metamorphosen) und *Flächen-Äquivalenz* (isoedrische Metamorphosen).

Als *erstes Beispiel* zeigen wir das Ergebnis einer *isogonalen Metamorphose*, welche auf dem Würfel und der Konstruktion eines Start-Polyeders basiert, dessen Ecken einander kongruent sind (Abbildung 1).

Mit dem Würfel beginnend, ergeben sich links herum, ohne Beachtung von Zwischenkörpern, folgende Archimedischen bzw. Platonischen Körper: *Würfel*, *Gestumpfter Würfel*, *Kuboktaeder*, *Ikosaeder*, *Oktaeder*, *Rhombenkuboktaeder* und wiederum der *Würfel*. Das Start-Polyeder erfährt mit seiner Verwandlung zum Ikosaeder sogar einen Symmetriegewinn!

*Anmerkung*: Den fachgeometrischen Hintergrund solcher Metamorphosen bildet die Theorie der Deckabbildungsgruppen von Polyedern. In unserem Beispiel erzeugen die Abbildungen der 24-elementige Untergruppe $T_h$ der 48-elementige Deckabbildungsgruppe des Würfels die Metamorphose.

Geht man vom regelmäßigen Ikosaeder als Basispolyeder aus, so erhält man mit Anwendung der Gruppe *I* der Deckdrehungen des Ikosaeders und z. B. mit dem regulären Dodekaeder als Ausgangskörper folgende ecken-äquivalente Polyeder: *Dodekaeder*, *Ikosaeder*, *Ikosidodekaeder*, *Kleines Rhombenikosidodekaeder*, *Abgeschrägtes Dodekaeder*, *Gestumpftes Dodekaeder*, *Gestumpftes Ikosaeder*. Usw.

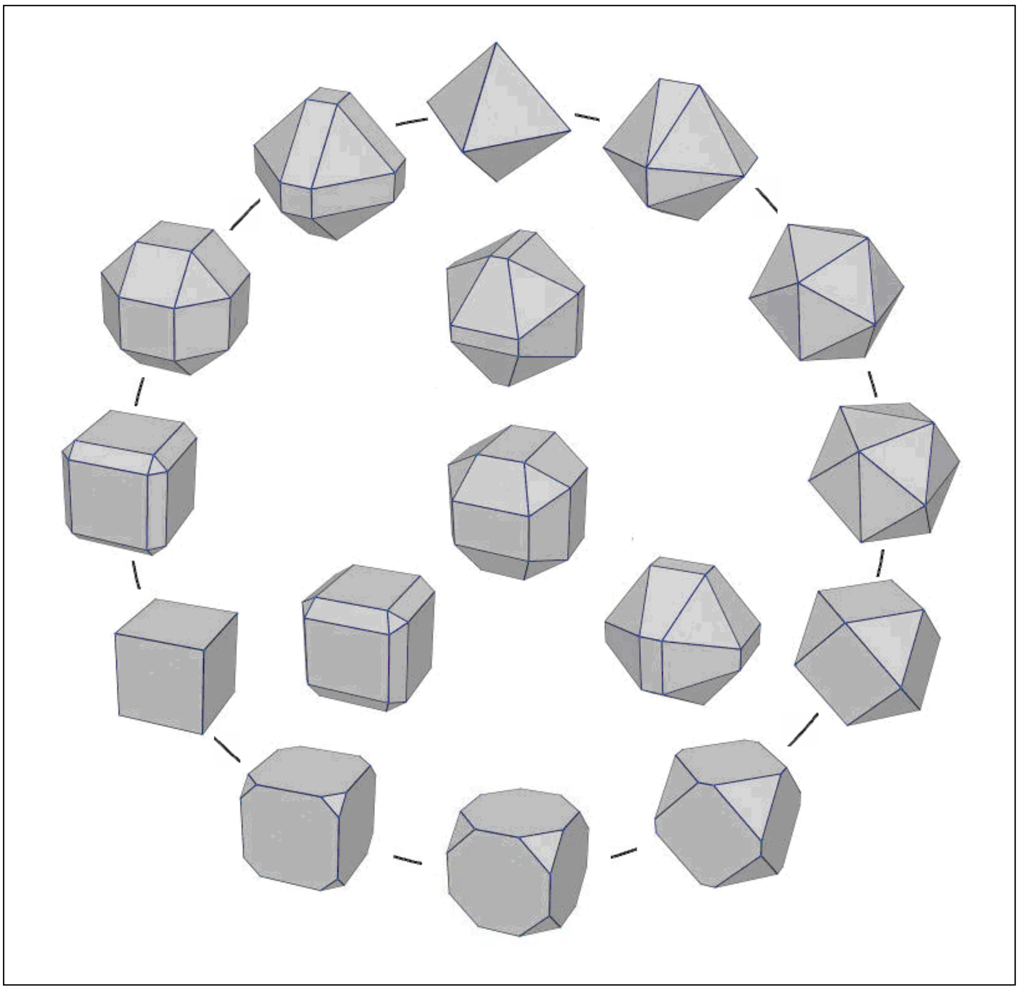


**Abb. 1 Ein Zyklus isogonaler Polyeder vom Würfel aus**

In einem *zweiten Beispiel* zeigen wir eine Metamorphose des regelmäßigen Iko-saeders, welche wegen Flächendurchdringungen, die keine vorstellbaren physischen Entsprechungen haben, als irreal zu bezeichnen ist. Dazu wird ein zehnflächiges Teilnetz des Ikosaeders konstruiert, welches zusammen mit seinem Punktspiegelbild in seinem Winkel zwischen den Dreiecksflächen variiert werden kann (Abbildung 2). Man erhält so das *I-kosaeder*, das *Oktaeder*, das „Doppeltetraeder" *stella octangula*, das *Große Ikosaeder* (eines der vier nicht konvexen regelmäßigen Polyeder, auch Kepler-Poinsot-Körper genannt) und das *Hexagramm*, zehnfach aufeinander liegend (Abbildung 3).

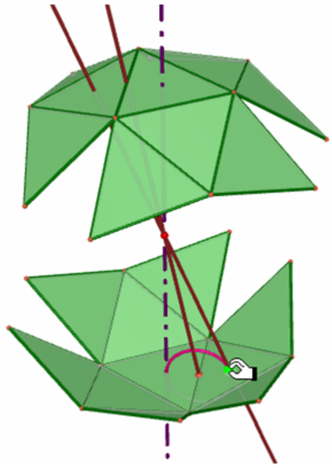


**Abb. 2**

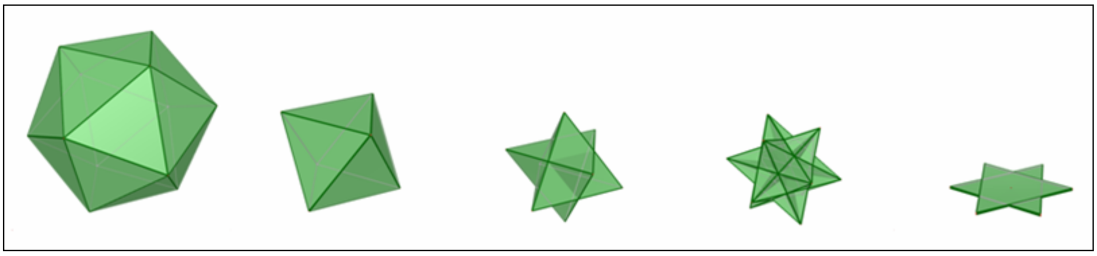


**Abb. 3**

*Fazit*: Als eine Anwendung raumgeometrischen Konstruierens mit *DRGS*, welche als Dynamische Geometrie-Systeme zugelassene Unterrichtssoftware sind, bietet das formenkundliche Thema „Polyeder-Metamorphosen“ ein interessantes und herausforderndes Arbeitsfeld für Schüler und Schülerinnen der oberen Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II – und auch für Studierende des Lehramtes Mathematik. Das außerunterrichtliche Thema eignet sich u. a. für die Projektarbeit, für Arbeitsgemeinschaften und für individuelle Schülerarbeiten.

## Literatur

Knapp, O. (2011): Tutorial zum Lernen von Raumgeometrie für Schüler aller Schularten ab der Klassenstufe 7. Rosenheim: co.Tec Verlag.

Schumann, H. (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Franzbecker.

Schumann, H. (2008). Interaktives geometrisches Konstruieren im virtuellen Raum. Teil1 u. 2. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht MNU, Jg. 61, Heft 3, 145-149; Heft 4, 211-216.

Schumann, H. (2009). Interaktive Polyederkonstruktion im virtuellen Raum − offene Aufgaben zum Thema „Raum und Form“. Der Mathematikunterricht MU 2009, 55. Jg., Heft 1, 26-37.

Ziegler, R. (2012): Platonische Körper: Verwandtschaften, Metamorphosen, Umstülpungen. 4. Auflage. Dornach: Verlag am Goetheanum.

Toshihiko SHINDO, Seiji MORIYA, Japan

# Number Lines as an Instrument for Solving Problem on Relative Values

## 1. Introduction

In teaching relative values, teachers in Japan usually use number lines because it is believed that they promote understanding of content related to relative values. That is to say, when learning relative values, it is necessary to relate to two actual quantities to the corresponding ratio. The advantage of using number lines is that it visually demonstrates these relationships. However, it is not known if number lines are used as an instrument for thinking by elementary school students, in promoting their understandings of relative values.

The purpose of this study was to elucidate the conditions for understanding number lines by fifth graders. The problems of relative values were classified into the following three types, and data were analyzed for each type. The first type: Compared value and base quantity are already known, and relative value is to be answered. The second type: Base quantity and relative value are already known, and compared quantity is to be answered. The third type: Compared quantity and relative value are already known, and base quantity is to be answered.

## 2. Study I

### Procedure

Participants were 55 fifth graders from two classes of a elementary school. Two question sheets (A and B) were prepared, both of which contain three problems on relative value. The question sheet A was distributed to one of the classes (Group A, n = 22), and the question sheet B was distributed to the other class (Group B, n = 23). The participants were asked to solve all problems. The three problems on question sheets A and B were exactly the same except that Group A were asked to draw a number line when solving problems, whereas Group B had already printed number lines applicable to the problems on their sheet. The problems presented to participants are as follows.

Problem 1: There is a 30 cm stick. You cut 18 m for work. The length you cut is how many times the length of the original stick? (The first type)

Problem 2: A class consists of a total of 40 students. The number of boys in the class was 0.6 times the total number of the class. How many boys are there in this class? (The second type)

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Problem 3: A boy gave 15 marbles to his sister. The number of marbles that the boy gave to his sister was 0.6 times the marbles that he originally had. How many marbles did the boy originally have? (The third type)

## Results

The purpose of this study was to examine students' understanding of the three third problem types. Therefore, responses to the problems were evaluated based on the adequacy of the formulae written by students. If the correct formula was used, but a wrong answer was written on the answer sheet due to a miscalculation, it was regarded as a correct answer.

The percentages of question answered correctly in Group A, which was asked to draw a number line was 9 %, 67 %, and 45 % for problems 1, 2, and 3, respectively. On the other hand, question answered correctly in Group B which provided a number line were 87 %, 78 %, and 78 %, respectively.

In Group A, very few students were able to draw appropriate number lines for the presented problems. Many of those students who could not draw appropriate number lines were not able to fill in relative value (ratio) on the number lines for any problem. Although clear conclusions cannot be drawn due to the limited number of participants, it appears that students who were able to draw number lines for any one of the question had higher percentages of correctly answered problems than those who were not able to draw the lines. In addition, the reason for the lower score for problem 1 in Group A is that many students had the misconception that "the bigger value is the dividend and the smaller value is the divisor in division," and they solved the problem based on this misunderstanding, even though the "dividend" was smaller than the "divisor."

## Discussion

The above results indicated the following two points. Firstly, the comparison between Group A and B indicated that Group B had higher percentages of correct answers for three problems than Group A. Furthermore, in Group A, students who drew appropriate number lines tended to have higher percentages of correctly answered questions for the three problems than those who were not able to draw the lines. These findings indicated that the presentation of a number line is an important instrument in the thought process of problem solving.

Secondly, a few students were able to draw appropriate number lines for Group A, which indicated that the automatic use of number lines is difficult for fifth graders. This suggests that many students do not fully understand the number line, and that there is a need to consider effective instructional strategies to teach the number line itself.

## 3. Study II

### Procedure

Pre-test, question sheet A used in Study I was given to a fifth grader C. Then, she was taught number lines based on the prepared teaching objectives. After that a post-test, using the same content as the pre-test, was given to C to examine the effect of the instructions. Two fourth graders, K and H, also participated in the instruction session as their participation was necessary to compare each person's height to show and confirm that a ratio between shadow and height is the same for everyone. This paper only reports the results of C.

### Teaching Objectives

I Students were asked to fully complete activities to draw a line that was *p* times a given arbitrary length. Next, they were asked to calculate the values using actual measured values by three type's formulas.

II The structure of the number line indicating the relationship between an actual measured value and a relative value was carefully taught to students.

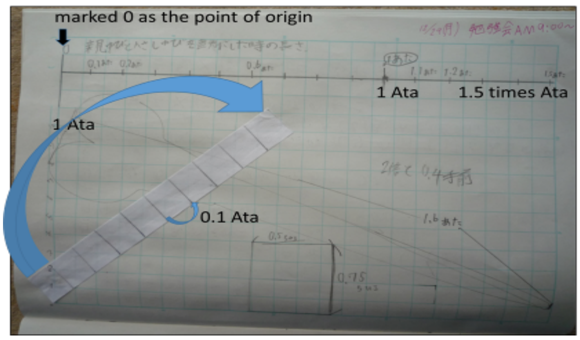
III The second type, obtaining a compared quantity, was introduced first to students.

IV The first and the third types were introduced by expression transformations using the unknown as □ in the formula of the second type.

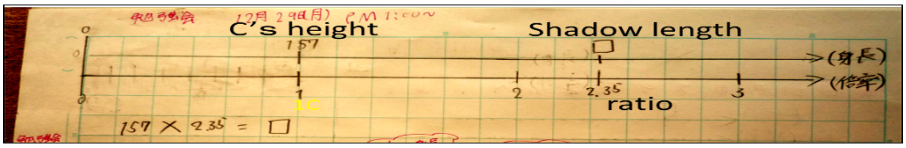
### Five Teaching Steps and Teaching Process

Step 1. Teaching Number Lines The students were instructed on how to draw a number line and 0.1 figure, and how to measure a length *p* times.

Step 2. Making a My Ruler by Themselves The students were asked to make a ruler of themselves by using a paper tape, the height of each student was regarded as 1C (in C's case; the unitary name is the name of each student). The students were instructed that 1C was divided into 10 or 100 equal parts represented as 0.1 or 0.01, respectively.



Step 3. Application to the Second type Formula C also expressed the measured length of her shadow in Step 2 above as a formula, and calculated as 157cm×2.35=368.95cm (the shadow was 2.35 times of her length ).




Step 4. Application to the First Type for Obtaining a Ratio The students were asked to calculate the number of times K's height (i.e., 142 cm) would be based on H's height (i.e., 140 cm). First, the ratio was set as □ , and the students were asked to express it on a number line. C wrote and transformed her formulae in the following order: 140×□＝142, □＝142÷140, and □＝1.014.

Step 5. Application to the Third Type for Obtaining Base Quantity Participant C was able to correctly calculate and answer, 140 cm, using the following formula, □ ×1.014＝142 and 142÷1.12 ＝□.

**Results**

The results of the pre-test indicated that C made errors in writing formulae using □ for the three problems and using number lines inappropriately. Moreover, she wrote incorrect answers for all the problems. This condition was identical to the students in Study I.

The results of the post-test indicated that C was able to write the number line and the formula correctly for Problem 1. For Problem 2, the number line, the formula, and the answer were correct; however, she was not able to write the formula using □ correctly. For problem 3, C was not able to draw a number line; however, she wrote the following formula, □ = 15÷0.6, □ = 25, when instructed about the number line. In this case, C did not have confidence in her answer, because she perceived her answer as too large for the result of division. After the instructor taught C to consider the relationship between the quotient and the dividend when the divisor was less than 1 and over 1, she was able to fully understand the answer.

**Discussion**

Initially, C was not able to solve word problems at all; however, she came to be able to draw a number line and solve them by writing a formula using □ . This is because she acquired knowledge experientially that her height became the base quantity measured by the My Ruler, and that she projected the My Ruler into the word problems, which made it easier for her to select and confirm the base quantity.

Ulrike SIEBERT, Aiso HEINZE, Kiel

# Validität eines Instruments zur Erfassung berufsfeldbezogener mathematischer Kompetenzen von Industriekaufleuten

Zur Untersuchung berufsfeldbezogener mathematischer Kompetenzen von Industriekaufleuten zu Beginn der dualen beruflichen Erstausbildung ist es notwendig, diese Kompetenzen auf theoretischer Ebene zu beschreiben. Dazu wird zunächst auf die Zielsetzung mathematischer Bildung in der Schule und in der beruflichen Bildung eingegangen, um vor diesem Hintergrund berufsfeldbezogene mathematische Kompetenzen zu modellieren. Die Validität des entwickelten Instruments wird dann anhand einer Anforderungsanalyse der Lernfelder überprüft.

## Ziele mathematischer Bildung

In der allgemeinbildenden Schule wird die mathematische Bildung als Teil der Allgemeinbildung aufgefasst, für die auf Basis eines zumeist kognitiv interpretierten Kompetenzbegriffs nach Weinert (2001) Lerngelegenheiten geschaffen werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen im Sinne eines anschlussfähigen Lernprozesses mit einer mathematischen Grundbildung ausgestattet werden, die sie insbesondere auf die berufliche Ausbildung vorbereitet (KMK, 2003). Mathematische Inhalte werden in der allgemeinbildenden Schule im Schulfach Mathematik unterrichtet, dessen Curriculum sich an der Struktur der wissenschaftlichen Disziplin Mathematik orientieren. Die Konkretisierung der Bildungsziele erfolgt aktuell u. a. in den von der KMK verabschiedeten Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Sie repräsentieren auf normativer Ebene diejenigen mathematischen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler zu bestimmten Zeitpunkten ihrer Bildungskarriere erworben haben sollen.

In der beruflichen Bildung hingegen stehen andere Ziele im Vordergrund: Auszubildende sollen eine berufliche Handlungskompetenz bzw. Mündigkeit erwerben (KMK, 2011), die sie dazu befähigen soll, in berufstypischen Anforderungssituationen angemessen zu handeln. Die berufliche Bildung strebt neben der Vermittlung der beruflichen Fachkompetenz auch den Erwerb einer beruflichen Grundbildung im Sinne einer Vertiefung der schulisch erworbenen fachlichen Grundbildung an, welche die Auszubildenden dazu befähigen soll, sich in der beruflichen Domäne grundlegend zurecht zu finden. Lernprozesse sind in der dualen beruflichen Bildung aufgrund der Handlungsorientierung oft an der vollständigen beruflichen Handlung ausgerichtet. Inhalte werden seit Mitte der 1990er Jahre nicht mehr in Schulfächern strukturiert, sondern in sogenannten Lernfelder, d. h., „durch

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Ziel, Inhalte und Zeitrichtwerte beschriebene thematische Einheiten, die an beruflichen Aufgabenstellungen und Handlungsfeldern orientiert sind“ (KMK, 2007, S.17). Folglich sind mathematische Aufgaben in berufliche Anforderungssituationen integriert. Entsprechend wird auch von einer Verknüpfung auf kognitiver Ebene ausgegangen („problemorientierte Konzeptintegration“, Sträßer, 1996).

## Berufsfeldbezogene mathematische Kompetenzen

Zur Beschreibung berufsfeldbezogener mathematischer Kompetenzen von Auszubildenden wird folgendes Kompetenzmodell (vgl. Abb. 1) postuliert.

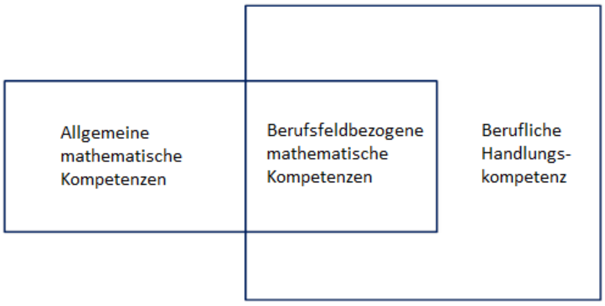



**Abbildung 1: Modellierung berufsfeldbezogener mathematischer Kompetenzen**

Im Sinne des Kompetenzbegriffs nach Weinert (2001) sind berufsfeldbezogene mathematische Kompetenzen als Teil der schulisch erworbenen bzw. generischen mathematischen Kompetenzen aufzufassen: Schulisch erworbene mathematische Kompetenzen werden nur noch in beruflichen Situationen angewendet, d. h., es kommt zu einer Einschränkung der bisher in der Schule behandelten Kontexte. Mit dieser Einschränkung geht gleichzeitig eine Spezialisierung und Kontextuierung einher, da schulisch erworbene mathematische Kompetenzen nur noch in kaufmännischen Problemstellungen angewendet werden. Auszubildende begegnen mathematikhaltigen Anforderungen unter Berücksichtigung situativer Gegebenheiten und bewältigen diese in beruflichen Anforderungssituationen im Sinne der Handlungsorientierung, indem sie mathematische und berufliche Inhalte miteinander verknüpfen. Mathematische Kompetenzen sind dabei eines von vielen Hilfsmitteln; damit sind berufsfeldbezogene mathematische Kompetenzen auch zentraler Bestandteil der beruflichen Fachkompetenz.

Ein ähnliches Modell wird von Winther, Sangmeister und Schade (2013) für die kaufmännische Domäne formuliert. In diesem Modell werden nicht nur generische und berufliche Kompetenzen und Zusammenhänge zwischen diesen Kompetenzen modelliert, sondern insbesondere domänenverbundene Kompetenzen im Sinne einer Operationalisierung der beruflichen Grundbildung. Vor dem Hintergrund der Zielsetzung mathematischer Bildung und in Anlehnung an die Beschreibung der domänenverbundenen

Kompetenz, welche eine Facette ökonomische Numeralität beinhaltet, kann die Rolle berufsfeldbezogener mathematischer Kompetenzen folgendermaßen beschrieben werden: Es sind schulisch erworbene mathematische Kompetenzen, die in spezifischen beruflichen Anforderungssituationen zum Tragen kommen, d.h. funktional angewendet werden. Sie konkretisieren das Konstrukt der beruflichen Grundbildung aus fachspezifischer Sicht und können im Sinne des anschlussfähigen Lernens erfasst werden. Inhaltlich bieten sie die Möglichkeit den Übergang zwischen allgemeinbildender und beruflicher Ausbildung genauer zu untersuchen.

**Anforderungsanalyse der Lernfelder**

Eine Analyse der 12 Lernfelder des Ausbildungsberufs zum Industriekaufmann/ zur Industriekauffrau im Hinblick auf mathematikhaltige berufliche Anforderungen zeigt, dass mathematische Inhalte in den verschiedenen Lernfeldern unterschiedlich stark akzentuiert sind. Zentrale Themen sind vor allem die Grundrechenarten, einfache Arithmetik, Dreisatz, Prozentrechnung und lineare Funktionen, die typischen kaufmännischen Situationen aus den Bereichen Jahresabschluss, Finanzierung, Bilanzierung oder Kostenrechnung (vgl. Sträßer, 1996).

Eine Strukturierung der Anforderungen nach den Kompetenzen aus den Bildungsstandards Mathematik zeichnet ein domänenspezifisches Bild. Vor allem der Umgang mit quantitativen Größen und die situationsspezifische Verwendung von Rechenverfahren z. B. zur Berechnung von Angebotspreisen (Leitidee Zahl) prägen diesen Ausbildungsberuf. Dabei müssen die Auszubildenden diese Größen wie z. B. Zeitspannen (Liefertermine) beurteilen (Leitidee Messen). Zudem steht die Modellierung von Zusammenhängen zwischen realen kaufmännischen Größen und Auswirkungen von Veränderungen (Leitidee Funktionaler Zusammenhang) beispielsweise bei der Gewinnermittlung im Vordergrund. Die Leitidee Raum und Form ist für Industriekaufleute kaum relevant und auch die Leitidee Daten und Zufall wird nur sekundär bezüglich des Umgangs mit Daten angesprochen.

Wie in den bisherigen Ausführungen bereits angeklungen ist, müssen die Auszubildenden vielfach reale kaufmännische Zusammenhänge mittels Standardmodellen beispielsweise der Prozentrechnung modellieren (Mathematisch Modellieren, K3). Bei der Berechnung kaufmännischer Kennzahlen und Größen verwenden sie meist standardisierte Verfahren und Algorithmen, d. h., sie müssen mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen können (K5). Das Anforderungsniveau liegt zumeist im unteren bzw. mittleren Bereich, da eine Verallgemeinerung oder Reflektion von Ursachen kaum gefordert ist.

## Konzeption des Instruments

Es wurde ein Test zur berufsfeldbezogenen Mathematik mit 43 Aufgaben entwickelt, der sich an den Prüfungsaufgaben der Industrie- und Handelskammer der letzten Jahre orientiert. Die Aufgaben sind grundsätzlich mit schulisch erworbenem Wissen lösbar, so dass eine Trennung der theoretisch postulierten Kompetenzdimensionen (vgl. Abb. 1) nicht bereits in der Konzeption der Aufgaben angelegt ist. In Abgrenzung zu den Aufgaben zur Überprüfung der Bildungsstandards besitzen alle Aufgaben einen kaufmännischen Kontext, d. h., insbesondere innermathematische Modellierungen sind nicht erforderlich. Die Aufgaben aus dem berufsfeldbezogenen Mathematiktest bilden die Aspekte der Anforderungsanalyse valide ab, da die Aufgaben vor allem den relevanten Leitideen und allgemeinen Kompetenzen zuzuordnen sind.

Der berufsfeldbezogene Mathematiktest wurde auf Basis einer Stichprobe von N = 2002 Auszubildenden eindimensional Rasch-skaliert. Dabei zeigte sich, dass die Aufgaben zu Beginn der dualen beruflichen Ausbildung zwar relativ schwer für kaufmännische Auszubildende sind (MW = 1.96 Logits, SE = 1.24 Logits), jedoch trotzdem zufriedenstellende Trennschärfen aufweisen ($r_{it}$ = .16 - .75). Dieser Test kann somit sowohl bereits zu Ausbildungsbeginn als auch im weiteren Verlauf der dualen beruflichen Erstausbildung eingesetzt werden. Darüber hinaus kann von einer zufriedenstellenden Konstruktvalidität gesprochen werden, da es eine angemessene Korrelation zu den Aufgaben der Bildungsstandards Mathematik (r = .80) gibt.

## Literatur

KMK. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss: [Beschluss vom 4.12.2003]*. München: Wolters Kluwer Deutschland GmbH.

KMK. (2011). Handreichungen für die Erarbeitung von Rahmenlehrplänen der Kultusministerkonferenz (KMK) für den berufsbezogenen Unterricht in der Berufsschule und ihre Abstimmung mit Ausbildungsordnungen des Bundes für anerkannte Ausbildungsberufe. Berlin: Sekretariat der Kultusministerkonferenz Referat Berufliche Bildung, Weiterbildung und Sport.

Sträßer, R. (1996). Professionelles Rechnen? Zum mathematischen Unterricht in Berufsschulen. *mathematica didactica*, *19*(1), 67–92.

Weinert, F. E. (2001). Schulleistungen - Leistungen der Schule oder der Schüler ? In F. E. Weinert (Ed.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 73–86). Weinheim: Beltz.

Winther, E., Sangmeister, J. & Schade, A. K. (2013). Zusammenhänge zwischen allgemeinen und beruflichen Kompetenzen in der kaufmännischen Erstausbildung. In R. Nickolaus, J. Retelsdorf, E. Winther, & O. Köller (Eds.), Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik Beihefte: Vol. 26. Mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung. Stand der Forschung und Desiderata (S. 139–157). Stuttgart: Steiner.

Kerstin SITTER, Landau

# Außerschulische Lernorte im Geometrieunterricht der Grundschule – eine Wirksamkeitsstudie

Im vorliegenden Forschungsprojekt steht die Einbeziehung authentischer Umgebungen im Geometrieunterricht der Grundschule im Zentrum. Schwerpunkt des Forschungsvorhabens ist die Entwicklung von geometrischem Wissen und Können zu Körpern. Durch eine adäquate Vernetzung schulischen und außerschulischen Lernens in Verbindung mit dem Protokollieren soll ein nachhaltiger Erkenntnisgewinn zu geometrischen Körpern bei Viertklässlern erreicht werden.

## 1. Theoretischer Hintergrund

Das Nutzen und Einbinden außerschulischer Lernorte in den Unterricht hat in den vergangenen Jahren stark zugenommen. Obwohl geometrische Inhalte immer wieder auf die Umwelt der Kinder zurückgeführt werden, werden außerschulische Lernorte im Geometrieunterricht der Grundschule (zumindest was den deutschsprachigen Raum betrifft) jedoch kaum bis gar nicht genutzt (vgl. Wendel, 2014). Wenn, so könnte man vermuten, gehört das Lernen am außerschulischen Lernort vor allem zur gängigen Praxis im Sachunterricht. Aber auch hier gibt es Aussagen, die dies widerlegen: „Exkursionen erfreuen sich bei Grundschullehrerinnen und Grundschullehrern einer großen theoretischen Zustimmung, bleiben im Schulalltag aber eine seltene Sonderveranstaltung“ (Mitzlaff, 2004, S. 140). Welchen Einfluss ein außerschulischer Lernort ganz konkret im Vergleich zu einem Geometrieunterricht, der ausschließlich im Klassenzimmer erfolgt, auf den Lernerfolg jüngerer Schülerinnen und Schüler nimmt, bleibt zudem offen. Bisher gibt es diesbezüglich keinerlei Unterrichtsforschung. Studien (vgl. z. B. Klaes, 2008) belegen, dass die Nachhaltigkeit außerschulischer Lernorte ganz allgemein entscheidend von einer adäquaten Vernetzung mit dem schulischen Lernen abhängt. Wesentlich ist vor allem das lehrplankonforme Arbeiten an einem Thema an beiden Standorten sowie eine intensive Vor- und Nachbereitung der Besuche außerschulischer Lernorte im Unterricht. Daneben sehen wir in Anlehnung an Dörfler (1989) und anderen vor allem aber auch im Protokollieren am außerschulischen Lernort eine wichtige Grundlage für nachhaltiges Wissen. Durch das Verschriftlichen werden die neuen Lerninhalte tiefer durchdrungen und ein besserer bzw. differenzierterer Blick auf wichtige mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge wird erreicht. Das Protokoll ist dabei jedoch nicht nur Denk- und Ausdrucksmittel des Lernprozesses, sondern gestattet auch eine sinnvolle Reflexionstiefe sowie eine rückblickende Bewertung des selbstständig-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

keitsorientierten, forschenden Erkenntnisprozesses und kann somit auch zum Ausgangspunkt von Reflexionsphasen werden. Beschäftigt man sich mit geometrischen Körpern, so spielt auch das Bilden mathematischer Begriffe eine ganz wesentliche Rolle. In der Literatur gibt es zahlreiche Stufenmodelle für den mathematischen Begriffsbildungsprozess. Im Rahmen der Untersuchung lehnen wir uns an Winters Modell an, welches davon ausgeht, dass es, um ein effektives Lernen zu ermöglichen, einem Zugang bedarf, „der sowohl die maximale Eigeninitiative begünstigt als auch die Bedeutungshaltigkeit des zu erwerbenden Begriffs von vornherein erkennen lässt“ (Winter, 1983, S. 177). Die Schülerinnen und Schüler sollen die Gelegenheit haben, den Begriff selbst zu entdecken und Definitionen nachzuempfinden. Und dabei geht es nicht nur um eine „quantitative Vermehrung“, sondern auch um eine „qualitative Umwertung“ des Wissens – das Verständnis der Begriffe soll bewusster, beziehungshaltiger, beweglicher, präziser und reflektierter werden (vgl. ebd., S. 181 f.).

## 2. Methode und Design

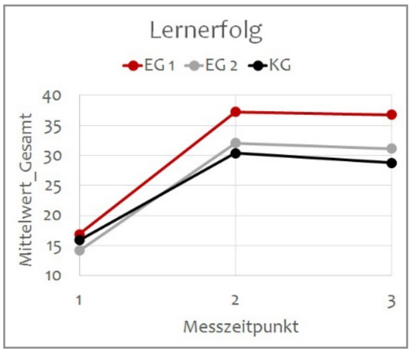
Zum Nachweis der Wirkung des Lernkonzeptes am außerschulischen Lernort in Verbindung mit dem Protokollieren wurde ein Prä-Post-Test-Kontrollgruppendesign mit zwei Experimental- und einer Kontrollgruppe (N = 119 Grundschulkinder der vierten Jahrgangsstufe) gewählt. Über sechs Wochen hinweg (eine Doppelstunde pro Woche) erweiterten und vertieften die Lernenden ihr geometrisches Wissen und Können zu Körpern. Die Experimentalgruppe 1 (EG 1) betrachtete und erforschte dabei verschiedene Gebäude aus der nahen Umgebung unter geometrischen Gesichtspunkte genauer und protokollierte erste Entdeckungen skizzenhaft. Die Experimentalgruppe 2 (EG 2) hingegen entwickelte ihre geometrischen Kompetenzen anhand von Abbildungen an Stationen im Klassenzimmer weiter. Die einzelnen Arbeitsschritte waren identisch mit denen der EG 1. Auch hier wurde protokolliert. Der Geometrieunterricht orientierte sich in beiden Gruppen an dem Vier-Phasen-Unterrichtsmodell von Bezold (2009, S. 182 ff.): (1) Reflexion, (2) Initiierungsphase, (3) gemeinsames Erkunden – skizzenhaftes Protokollieren (außerschulisch vs. schulisch), (4) individuelles Darstellen – Protokollieren. Lernende der Kontrollgruppe (KG) erweiterten ihr geometrisches Wissen und Können zu Körpern wiederum nach dem „klassischen Unterrichtsstil“ anhand von Kopiervorlagen aus verschiedenen Lehrbüchern sowie Prototypen und Unterrichtsmodellen zu Körpern (ohne außerschulischen Lernort, ohne Protokolle). Inhaltlich und zeitlich war der Unterricht an die EG angepasst. Ein Instrument zur Datenerhebung war ein eigens erstellter Test zur Erfassung geometrischer Kompetenzen mit dem Schwerpunkt geometrische Körper. Dieser umfasst insgesamt 14 Items. Ein weiteres Instrument wurde in gruppenübergreifender Zusammenarbeit eines Forscherteams der Universität Koblenz-Landau zur Analyse der Protokollierfähigkeit entwickelt, welches im vorliegenden Beitrag jedoch vernachlässigt wird (näheres dazu in Engl et al., 2014). Erfasst wurden die Daten zu je drei Messzeitpunkten: unmittelbar vor, direkt nach sowie vier Wochen nach der Intervention.

3. Zielsetzung und ausgewählte Forschungsfragen

Ein Ziel der Studie ist es, zu untersuchen, wie sich die Einbeziehung außerschulischer Lernorte und der Einsatz von Protokollen auf die Entwicklung nachhaltigen geometrischen Wissens auswirken. Im Zentrum stehen dabei folgende Forschungsfragen:

- Wie entwickeln sich die Leistungen der Schülerinnen und Schüler über die drei Messzeitpunkte hinweg?
- Gibt es einen ähnlichen Leistungszuwachs in den Gruppen oder unterscheiden sich die Gruppen hinsichtlich ihres Lernerfolgs?

## 4. Erste Ergebnisse




Die Varianzanalyse mit Messwiederholung (Mixed ANOVA) zeigt, dass in allen Gruppen ein Lernzuwachs vorhanden ist, der sich jedoch unterscheidet. Es gibt einen signifikanten Haupteffekt des Faktors Zeit ($F(1.93,224.29) = 415.83$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .782$) und einen signifikanten Haupteffekt des Faktors Gruppe ($F(2,116) = 8.27$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .125$). Ebenfalls statistisch signifikante Effekte zeigen sich bei der Betrachtung der Wechselwirkung der Faktoren Gruppe und Zeit ($F(3.87,224.29) = 4.50$, $p = .002$, $\eta_p^2 = .072$), welche sich auch in der Steigung der Graphen widerspiegelt. Ausgehend von fast gleichen Ausgangswerten verläuft der Lernzuwachs der EG steiler als der der KG. Der Leistungsanstieg der KG ist weniger steil und mit einem allgemeinen Lernzuwachs zu interpretieren. Daraus lässt sich schließen, dass der Lernerfolg von Pre- zu Post- zu Follow-up-Test sich signifikant zwischen den untersuchten Gruppen unterscheidet. Der Post-hoc Vergleich mit dem Tukey HSD Test zeigt, dass sich der Mittelwert der EG 1 bezüglich des Lernerfolgs sowohl von der EG 2 als auch der KG signifikant unterscheidet. Betrachtet man die einzelnen Messzeitpunkte genauer, so fällt auf, dass dieser signifikante Effekt jedoch nur über die Messzeitpunkte zwei und drei vorhanden ist. Insgesamt kann festgehalten werden, dass sich durch die adäquate Vernetzung schulischen und außerschulischen Lernens in Verbindung mit dem Protokollieren geometrischer Kompetenzen langfristig entwickeln lassen.

## Ausblick

Hinsichtlich des Lernerfolgs sind vor allen Dingen noch aufgabenspezifische Analysen geplant. Untersucht werden soll zudem, ob gute Schulnoten als Prädiktor für gute Leistungen gelten. Was die Protokollierfähigkeit betrifft, so wurde, wie bereits erwähnt, in gruppenübergreifender Zusammenarbeit ein sogenanntes „Video-Item“ sowie ein entsprechendes Analyseschema entwickelt. Auch hier ergab sich ein signifikanter Interaktionseffekt der Faktoren Zeit und Gruppe ($F\ (4{,}232) = 3.63$, $p = .007$, $\eta_p^2 = .059$). Wie sich die Leistungen der Schülerinnen und Schüler aber auch hier in den einzelnen Kategorien, die zu dem Gesamtkonstrukt Protokollierfähigkeit führen, weiterentwickelt haben, ist bis jetzt noch offen. Offen ist zudem, ob die Schülerinnen und Schüler, die im Pretest gute Protokollierfähigkeiten zeigten, auch im Post-Test bessere Ergebnisse erzielten. Bezüglich Zusammenhangsanalysen steht noch aus, welchen Einfluss auf den Lernerfolg das Protokollieren hat. Untersucht werden soll, ob eine hohe Testleistung mit einer hohen Protokollierfähigkeit korreliert.

## Literatur


Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hamburg: Dr. Kovac.

Dörfler, W. (1989). Begriffsentwicklung durch Handlungsprotokolle. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 139-142). Bad Salzdetfurth: Franzdecker.

Engl, L., Schumacher, S.; Sitter, K.; Größler, M.; Niehaus, E.; Rasch, R.; Roth, J.; Risch, B. (2014). Entwicklung eines Messinstrumentes zur Erfassung der Protokollierfähigkeit – initiiert durch Video-Items. In *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*.

Klaes, E. (2008). Stand der Forschung zum Lehren und Lernen an außerschulischen Lernorten. In D. Höttecke (Hrsg.), *Kompetenzen, Kompetenzmodelle, Kompetenzentwicklung: Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik*: *Jahrestagung in Essen 2007* (S. 263-268). Berlin: LIT-Verlag.

Mitzlaff, H. (2004). Exkursionen im Sachunterricht: Der Königsweg zu den „Sachen“? In A. Kaiswer & D. Pech (Hrsg.), *Basiswissen Sachunterricht (Band 5): Unterrichtsplanung und Methoden* (S. 136-144). Baltmannsweiler: Schneider Verlag.

Wendel, K. (2014). *Einbeziehung außerschulischer Lernumgebungen bei der Bearbeitung geometrischer Aufgabenstellungen im Geometrieunterricht der Grundschule.* Unveröffentlichte Bachelorarbeit, Universität Koblenz-Landau.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 4/3*, 175-204.

Johann SJUTS, Leer/Osnabrück

# Mathematisches Denken unter die Lupe nehmen: Wie lassen sich Erkenntnisse im Berufsfeld gewinnen und Optionen für professionelles Handeln entwickeln?

Die Wirksamkeit der institutionellen Lehrerausbildung gilt nach wie vor als nicht hoch genug. Jedoch: Wie werden Lerngelegenheiten nutzungsintensiver? Wie kommen Forschung, Entwicklung und Berufsfeldbezug in allen Lehrerausbildungsphasen stärker zum Tragen? Forschendes Lernen – gerade zum mathematischen Denken – kann probate Möglichkeiten schaffen, aus denen durch die analytische Auseinandersetzung mit beruflichen Standardsituationen Kompetenzen für ein evidenzbasiertes professionelles Handeln erwachsen.

Infolge der empirischen Wende hat die Evidenzbasierung Einzug in die Pädagogik gehalten. Ideen und Konzepte bieten ohne empirische Fundierung in der Bildungs-, Unterrichts- und Lehr-Lern-Forschung sowie in der Schul- und Professionsforschung keine ausreichende Sicherheit für Handlungen und Entscheidungen in Schule und Unterricht. Das bedeutet, dass die Lehrerausbildung sich selbst an Evidenzbasierung auszurichten und angehenden Lehrkräften ein evidenzbasiertes Professionswissen zu vermitteln hat.

Eine derartige Forderung darf indes nicht unkritisch erhoben werden. Zu berücksichtigen sind der jeweilige Stand wissenschaftlicher Erkenntnisse sowie deren Aussagekraft, Gültigkeit und Reichweite. Unumgänglich sind also Interpretation und Prüfung vor der Anwendung im Einzelfall. Und dies ist zu lernen. Somit gehören eine Einführung in wissenschaftliche Vorgehensweisen und Methoden sowie ein entsprechendes forschendes tätigkeitsfeldbezogenes Lernen zum festen Bestandteil von Studium und Vorbereitungsdienst.

Zu erweitern sind folglich die Fähigkeiten von Lehramtsstudierenden und Lehrkräften im Vorbereitungsdienst im Umgang mit Forschung und damit zum Handeln nach wissenschaftlichen Erkenntnissen. Forschung ist das Mittel, das Berufsbild von Lehrkräften als einer Profession zu schärfen. Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Fragen des Tätigkeitsfeldes schafft für Wissen, Können und Haltung ein ausgewiesenes Maß an Abstützung und Absicherung.

Berufsfeldbezug, Forschung und Entwicklung sind die Leitlinien, die Theorie und Praxis verbinden. Sie sorgen für Zusammenführung und Kontinuität der Lehrerbildungsphasen. Lehramtsstudierende, Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst und Lehrkräfte im Beruf haben damit eine wissenschaftsorientierte Grundhaltung, die für berufliches Handeln durchgängig von Bedeutung ist. Die permanente Weiterführung einer evidenzbasierten Reflexion schulischer

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

und unterrichtlicher Prozesse ist Kennzeichen einer gezielten Professionalisierung.

| | **Forschungsbasierte Erkenntnisse** lassen sich gewinnen … | **Evidenzbasierte Handlungsoptionen** lassen sich entwickeln … |
|---|---|---|
| Studium (Ausbildung) | … durch eine theoriegeleitete Auseinandersetzung mit Standardsituationen des Berufsfeldes,<br>… mittels passender Instrumente zur Erfassung von Lehr-Lern-Prozessen in reduzierter Komplexität,<br>… durch quantitative und qualitative Analysen von Schülereigenproduktionen und Unterrichtstranskripten. | … durch komparative Erstellung von Konzepten für gezielte Lehr-Lern-Prozesse,<br>… durch Überprüfung von adaptiv angelegten förderdiagnostischen Maßnahmen,<br>… mittels Erprobung unter Labor- oder einfachen Alltagsbedingungen. |
| Vorbereitungsdienst (Ausbildung) | … durch eine Beschreibung von schulischen und unterrichtlichen Handlungssituationen,<br>… durch reflektierte Selbstbeobachtung (insbesondere beim Unterrichten mit zielbezogener Vorbereitung, Durchführung und Auswertung),<br>… durch methodengestützte Erhebung und Auswertung der Wirksamkeit des eigenen beruflichen Handelns. | … aus fallbezogener Arbeit an Problemlagen (insbesondere Erschließung und Lösungsfindung),<br>… durch explorative und zugleich kontrollierte Gestaltung von Lernumgebungen,<br>… mittels tentativer und revidierbarer Vorgehensweisen in komplexen Berufskontexten. |
| Beruf (Fort- und Weiterbildung) | … durch fragegeleitete, thematisch ausgerichtete Untersuchungen von Tiefenstrukturen des (eigenen) Unterrichts,<br>… durch Strukturierung gesammelter Lernprodukte,<br>… durch Analysen von systematisch dokumentierten Langzeiteffekten. | … durch Erstellung und Nutzung eines Fallarchivs für eine planvolle langfristige Arbeit,<br>… durch Agieren unter Folgenabschätzung in beruflichen Anforderungssituationen,<br>… durch bewährungsprüfende Rückbezüge auf ein breites Expertenwissen. |

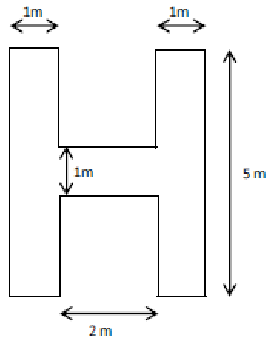
Die vorstehende Übersicht soll zumindest andeuten, welche Methoden genutzt werden können, um forschungsbasierte Erkenntnisse zu gewinnen, und welche Vorgehensweisen eingeschlagen werden können, um evidenzbasierte Handlungsoptionen zu entwickeln. Dabei gilt es zu berücksichtigen, dass das berufsfeldbezogene Lernen methodisch und sprachlich kontrolliert erfolgt und dass die Optionen für ein Handeln unter Ungewissheit, Uneindeutigkeit und Unsicherheit entworfen werden. In Hochschul- und Seminardidaktik wird der Professionalisierung durch berufsfeldbezogenes forschendes Lernen mehr und mehr Aufmerksamkeit zuteil (Huber u.a., 2009; Roters u.a., 2009; Sjuts & Ehrig, 2014). Berufsfeldbezogenes forschendes Lernen bildet die Voraussetzung für eine berufslange Weiterentwicklung der eigenen Professionalität.

Als eine Möglichkeit gilt die Arbeit mit Fallstudien. Dazu eignen sich Lehr-Lern-Prozesse im Unterricht und im Labor wie auch Lernprodukte, die authentisch erfasst oder mittels Vignetten präsentiert und dann bearbeitet werden. So wird es möglich, Lehren und Lernen systematisch und kategorisiert zu perzipieren, Situationen des Tätigkeitsfeldes zu analysieren und zu reflektieren, Adaptivität und Flexibilität zu erproben sowie Handlungsoptionen zu entwickeln und zu vergleichen. Beispielhaft genannt seien zwei Aufgaben, die Lehramtsstudierende für Fallstudien eingesetzt haben. Sie stammen aus einem mathematikdidaktischen Seminar der Masterphase mit dem Titel „Vorstellungen, Grundvorstellungen und Modellvorstellungen in Mathematik“.

Die Anforderungen an die Lehramtsstudierenden in diesem mathematikdidaktischen Seminar setzen sich aus fünf Bestandteilen zusammen. Nach einem Semesterarbeitsplan haben die Studierenden a) sich die zugehörige Literatur zu erschließen, b) eine Mini-Forschung durchzuführen, c) eine Sitzung vorzubereiten und zu gestalten, d) eine Ausarbeitung anzufertigen, e) sich einem Abschlusskolloquium zu unterziehen. Zur Mini-Forschung sei Folgendes gesagt: Lehramtsstudierende müssen die Fähigkeit, mit Forschung umzugehen, einüben. Somit sind auch kleinere Untersuchungen zu erledigen. Die Studierenden machen sich mittels ihrer thematisch gebundenen Untersuchung vertraut mit Schul- und Unterrichtswirklichkeit.

In einem bestimmten Umfang erkunden sie Vorgehensweisen und Positionen von Mathematik-Lehrkräften sowie Wissens- und Denkleistungen von Schülerinnen und Schülern, häufig in vergleichender Weise und im Bezug zu eigenen Lernerfahrungen. Die erhobenen Ergebnisse werden dann – von einer distanzierten und reflektierten Warte aus – theoretisch eingeordnet. Die Einordnung bezieht sich indes nicht nur auf die aus dem Berufsfeld gewonnenen Ergebnisse, sondern auch auf publizierte Forschungs- und Entwicklungsresultate. Zum Thema „Grundvorstellungen in der Elementaralgebra“ ist für die fallanalytische Untersuchung nachstehende Aufgabe eingesetzt worden:

*Im Parkhaus stehen schon einige Autos. Kommen 45 Autos hinzu, sind es insgesamt viermal so viele wie vorher. Wie viele Autos sind insgesamt im Parkhaus? Erläutere deinen Lösungsweg ausführlich.*




Und zum Thema „Grundvorstellungen in der Elementargeometrie“ ist für eine fallanalytische Untersuchung folgende Aufgabe eingesetzt worden: *Firma Hansen druckt zu Werbezwecken ein Plakat in einer speziellen Form (siehe Abbildung). Dieses Plakat soll bemalt werden. Für wie viel m² Fläche muss die Firma Farbe besorgen? Beschreibe dein Vorgehen ausführlich.*

Die von Schülerinnen und Schülern angefertigten Aufgabenbearbeitungen sind im Rahmen des forschenden Lernens zum Gegenstand einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) geworden. Ausgewählte Beispiele und ihre Analyse sind dann im mathematikdidaktischen Seminar dargestellt worden. Dabei stand die Herausarbeitung von Grundvorstellungen und Fehlvorstellungen im Mittelpunkt. Zielsetzung war ein begründetes Fallverstehen in einem begrenzten Kontext. Einer solchen Schwerpunktsetzung zum Aufbau unterrichtsbezogener Kompetenzen im Studium liegt die Intention zugrunde, über gezielte Erfassungen und geeignete Auswertungen von Lernprozessen und Lernergebnissen theoretische Ansätze und empirische Befunde zu verbinden. Von dieser Verknüpfung wird ein besonderes Potential für die Entwicklung beruflicher Kompetenzen erwartet.

Von Bedeutung ist jedoch nicht nur der Aufbau, sondern auch der Nachweis beruflicher Kompetenzen. Für den Nachweis bietet sich die Bewältigung in eigens dafür vorgesehenen Situationen, aber auch im Berufsfeld selbst an. Indes bedürfen Formate hinsichtlich ihrer Eignung noch einer weiteren Erforschung.

## Literatur

Huber, L. u.a. (Hrsg.) (2009). Forschendes Lernen im Studium. Aktuelle Konzepte und Erfahrungen. Bielefeld: Universitätsverlag Webler.

Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken. 11. Auflage. Weinheim: Beltz.

Roters, B. u.a. (Hrsg.) (2009). Forschendes Lernen im Lehramtsstudium. Hochschuldidaktik, Professionalisierung, Kompetenzentwicklung. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Sjuts, J. & Ehrig, D. (Hrsg.) (2014). Professionalisierung durch Praxisforschung. Schriftliche Arbeiten zur Stärkung eines evidenzbasierten Handelns im Berufsfeld Schule. Leer.

Anna-Christin SÖHLING, Münster

# Problemlösen – Mittels Irrtümern zu strukturellen Erkenntnissen

## 1. Einleitung

Beim Lösen von mathematischen Problemaufgaben in eigenen Erkundungen konnte beobachtet werden, wie Schüler zunächst einen aus Expertensicht wenig erfolgversprechenden Lösungsansatz verfolgten. Dennoch kamen auch diese Schüler oftmals zu einer Lösung des Problems. Es stellte sich die Frage, ob das Gehen des Irrwegs bei der Lösungsfindung einen Nutzen hatte. Wie kamen die Schüler von einem „falschen" zu einem „richtigen" Vorgehen? War der Umweg für die Schüler hilfreich oder eher unnötige Zeitverschwendung? Kann man davon sprechen, dass die Schüler aus ihren Fehlern bzw. Irrtümern klug werden konnten?

## 2. Zum Begriff und Nutzen des Irrtums

Eine frühe Unterscheidung der Begriffe „Fehler" und „Irrtum" geht auf Weimer (1929) zurück. Demnach sei ein Fehler „eine Handlung, die gegen die Absicht ihres Urhebers vom Richtigen abweicht" (S. 5) und ein Irrtum „ein seelischer Zustand, [ein] Fürwahrhalten des Falschen, das bedingt ist durch die Unkenntnis oder mangelnde Kenntnis gewisser Tatsachen" (S. 5). Nach dieser Definition ist der Irrtum wohl eher charakteristisch für das Problemlösen, weil sich die Schüler dabei in Unkenntnis über ein passendes Lösungsverfahren befinden.

Der Irrtumsbegriff und der Nutzen des Irrtums für die Wissenschaften wurden vom Philosophen Mittelstraß genauer beschrieben. Nach Mittelstraß (1989) ist ein Irrtum einerseits „eine Bezeichnung für eine mit der Überzeugung der Wahrheit verbundene falsche Behauptung" und andererseits „eine Eigenschaft dessen […], der die Wahrheit sucht, sie aber verfehlt." (S. 92f). Diesen Scheinwiderspruch erklärt Mittelstraß, indem er sagt, dass Irrtümer „einen pragmatischen, das Wissen mit dem Handeln verbindenden Charakter" (S. 93) hätten. Weingardt (2004) bewertet Mittelstraß' Differenzierung als „insofern hilfreich, als es deutlich macht, dass das ‚Voran-Irren' dem Auffinden der Wahrheit dienlich ist, also die Irrtümer der Wahrheit nahe stehen können und nicht etwa ihr Gegenteil verkörpern" (S. 207). Gerade beim Problemlösen suchen Schüler in unbekannten Gebieten nach Regeln und Lösungswegen und „irren voran" bei dieser Suche.

Mittelstraß untersucht die Rolle und den Nutzen von Irrtümern in der Wissenschaft und nennt Beispiele, in denen ein lang gehegter Irrtum dabei geholfen hat, neue Theorien zu entwickeln und Erkenntnisse zu gewinnen. So

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

hat Einstein die Relativitätstheorie unter der Annahme des sogenannten Machschen Prinzips entwickelt und hat erst nach der Formulierung der Relativitätstheorie festgestellt, dass das Machsche Prinzip bei gleichzeitiger Gültigkeit der Relativitätstheorie nicht gelten kann. Dennoch war das Machsche Prinzip bei der Entwicklung der Relativitätstheorie von Nutzen.

Besonders interessant ist die Frage, ob ein Irrtum beim Lösen von mathematischen Problemen in der Schule einen ähnlichen Nutzen haben kann wie beim Lösen wissenschaftlicher Probleme, wie Mittelstraß sie beschreibt.

Eine Theorie zum Nutzen des Fehlers bieten die Erziehungswissenschaftler Oser et al. (1999), die den Begriff des negativen Wissens geprägt haben. Für sie besteht der Nutzen von Fehlern insbesondere darin, dass durch Fehler gelernt werde, was man nicht tun darf (Handlungswissen) und was nicht zu einer Sache gehört (Abgrenzungswissen) (vgl. S. 17). Hierbei verstehen Oser et al. unter einem Fehler „von der Norm abweichende Sachverhalte oder von einer Norm abweichende Prozesse“ (S. 11). Dies schließt Fälle ein, in denen nach Mittelstraß ein Irrtum vorliegt, wenn Schüler im Glauben sind, das Richtige zu tun, aber ein von mathematischen Normen abweichendes Lösungsverfahren oder mathematische Struktur wählen. Durch das Aufdecken von Fehlern bzw. Irrtümern entstehe nach Oser et al. beim Problemlösen ein Wissen darüber, wie das Problem nicht zu lösen ist.

Wenn aber nur gelernt werden würde, wie ein Problem nicht zu lösen ist, würde man bei der Suche nach einem passenden Lösungsweg im Dunkeln tappen und vielleicht irgendwann zufällig einen passenden Lösungsweg finden. In den eigenen Erkundungen konnte ein derartiges Suchverhalten jedoch nicht beobachtet werden. Hier führte das Aufdecken eines Irrtums auch dazu, dass dem Schüler früher oder später klar wurde, wie er anstatt seines erfolglosen Irrwegs vorgehen muss. Es entsteht mehr als nur negatives Wissen, nämlich positives Wissen, welches vorher nicht vorhanden war, im Gegensatz zum Lernen aus Fehlern im Sinne Osers et al., bei denen das Richtige durch das Begehen eines Fehlers nun besonders hervortritt, aber nicht erst neu erkannt wird.

## 3. Methoden

Um näher bestimmen zu können, wie und welches positive Wissen aus Irrtümern gelernt wird, wurden Einzelinterviews mit Schülern der 4.-6. Klasse geführt, während derer sie aufgefordert wurden, typische Problemaufgaben laut denkend zu lösen. Die Transkripte der Interviews wurden im Sinne der Objektiven Hermeneutik nach Oevermann (1979) interpretiert und mithilfe der Abduktionstheorie nach Peirce (um 1900) analysiert.

## 4. Abduktionstheorie

Im Gegensatz zur Deduktion und zur Induktion ist die Abduktion ein Schluss, bei dem neue Erkenntnisse gewonnen werden können (vgl. Meyer 2007). Interessant sind für die oben genannte Fragestellung besonders solche Stellen, an denen der Erkenntnisgewinn beim Aufdecken von Irrtümern rekonstruiert werden kann. Hier gelang es durch Fallstudien einen allgemeinen Erkenntnisweg „Aus Irrtümern lernen“ theoretisch mit dem logischen Begriffsnetz nach Peirce herauszuarbeiten und zu charakterisieren.

## 5. Erkenntnisweg „Aus Irrtümern lernen“

Der Erkenntnisweg „Aus Irrtümern lernen“ umfasst mindestens vier verschiedene abduktive Schlüsse, deren ausführliche Darstellung allerdings den Rahmen dieses Textes sprengen würde. Der allgemeine Erkenntnisweg lässt sich am Einzelfall rekonstruieren, wie im Vortrag gezeigt wurde. Da die Rekonstruktion an realen Fällen recht komplex ist, soll hier eine kurze Konkretisierung an einem fiktiven, aber durchaus in ähnlicher Weise beobachteten Beispiel ausreichen.

| |
|---|
| x ist 3 Jahre älter als y und x ist 5 Jahre älter als z. Zusammen sind die drei 37 Jahre alt. Wie alt ist x? |

**Kasten 1: Altersproblem**

Bei Altersproblemen wie dem in Kasten 1 kann die Mathematisierung der Aufgabenstellung für Schüler schwierig sein. So kann es sein, dass ein Schüler den Aufgabentext „x ist d Jahre älter als y“ folgendermaßen in eine irrtümliche Formel überträgt: „$x + d = y$“. Arbeitet der Schüler mit dieser Mathematisierung kommt er mit der Formel $x + y + z$, in die er z.B. systematisch Werte für x und entsprechend für y und z einsetzt, nicht zu einer Lösung des Problems, wie er durch Validierung am Aufgabentext feststellen kann. Für $x = 9$ ergibt sich $9 + 12 + 14 = 35$ und für $x = 10$ ergibt sich $10 + 13 + 15 = 38$. Beim Erkenntnisweg „Lernen aus Irrtümern“ ist eine wichtige Voraussetzung, dass Schüler ihre Irrtümer selber aufdecken können, etwa durch eine genannte Validierung. Hierbei ist es wichtig, dass keine Scheinlösungen möglich sind. Eine Scheinlösung im Beispiel ergäbe sich, wenn trotz der irrtumbehafteten Mathematisierung eine ganzzahlige Lösung erzielt werden könnte. Ob dies möglich ist, hängt von den in der Aufgabe eingesetzten Zahlen ab.

Bis hierhin wurde im Sinne Osers bereits negatives Wissen erlangt darüber, wie das Problem nicht zu lösen ist. Nun kann der Schüler nach Gründen für sein Scheitern suchen. Entdeckt er hierbei, dass seine vorgenommene Mathematisierung des Aufgabentextes nicht zum Problem passt, besteht die

Chance, dass er erkennt, wie eine passendere Mathematisierung und damit ein verbessertes Lösungsverfahren aussehen kann: wenn x um d älter als y ist, dann ist x größer als y und folglich muss der Abstand d zu y dazu addiert werden und nicht zu x. Also muss gelten „$x = y + d$“.

Für den Mathematikunterricht ist an dieser Stelle im Problemlöseprozess der mathematische Erkenntnisgewinn aus dem Irrtum besonders interessant, wenn sich dieser nicht nur auf die bearbeitete Problemaufgabe beschränkt, sondern auch bei anderen Aufgaben im Mathematikunterricht genutzt werden kann. Das positive Wissen, welches hier entsteht, wäre in diesem Fall über die Problemstellung hinaus nutzbar.

## 6. Fazit und Ausblick

Es ist gelungen, das Lernen aus Irrtümern theoretisch zu beschreiben und die Entstehung negativen und positiven Wissens beim Lernen aus Irrtümern mithilfe logischer Analysen zu rekonstruieren. Die Vermutung, dass Irrtümer nützlich für das Problemlösen sein können, konnte theoretisch begründet werden. Als besondere Voraussetzungen für das Lernen aus Irrtümern konnten die Möglichkeit der Validierung gefundener Lösungen am Aufgabentext und die Vermeidung von Scheinlösungen bei der Aufgabenkonstruktion identifiziert werden.

Interessant für Lehrkräfte ist die sich anschließende Frage, wie Irrtümer beim Problemlösen fruchtbar genutzt werden können, ob beispielsweise auch das stellvertretende Lernen aus den Irrtümern von Mitschülern möglich ist und welche Irrtümer bei bestimmten Problemaufgaben besonders häufig vorkommen und besonders gut nutzbar sind.

## Literatur


Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Mittelstraß, J. (1989). Der Flug der Eule. Von der Vernunft der Wissenschaft. Suhrkamp: Frankfurt.

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In W. Althof (Hrsg.), Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehler (S. 11-41). Opladen: Leske + Budrich.

Peirce, C. S. Collected Papers of Charles Sanders Peirce, (Band 1-6. Hartshorne, C. & Weiß, P. (Hrsg.), 1931-35; Band 7-8 Burks, A.W. (Hrsg.), 1985), Cambridge: Harvard University Press.

Weimer, H. (1929). Psychologie der Fehler. Leipzig: Klinkhardt.

Weingardt, M. (2004). Fehler zeichnen uns aus. Transdisziplinäre Grundlagen zur Theorie und Produktivität des Fehlers in Schule und Arbeitswelt. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Daniel SOMMERHOFF, Stefan UFER, Ingo KOLLAR, München

# Forschung zum Mathematischen Argumentieren – Ein deskriptiver Review von PME Beiträgen

Die Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft. Mathematisches Argumentieren und Beweisen (MA&B) sind zentrale Aktivitäten der Mathematik und gehören zu den wichtigsten zu erlernenden Fähigkeiten im schulischen und universitären Bereich (Brunner, 2014). Gerade in der Sekundarstufe wurde der Fokus auf Argumentieren in den letzten Jahren weltweit durch curriculare Änderungen verstärkt, entsprechend ist MA&B auch innerhalb der Didaktik der Mathematik wieder zunehmend in den Forschungsmittelpunkt gerückt. In diesem Beitrag wird Argumentieren im Sinne Toulmins relativ offen verstanden, insbesondere werden auch nicht deduktives Schlussfolgern und Beweisen als Spezialfälle des Argumentierens verstanden (Reiss & Ufer, 2009).

## 1. Forschungsperspektiven MA&B

Argumentations- und Beweisfähigkeiten werden aus verschiedenen Perspektiven untersucht. Einerseits werden intraindividuelle Voraussetzungen von Personen betrachtet, da MA&B eine komplexe Fähigkeit ist, welche die Integration verschiedener (Teil-)Fähigkeiten oder Wissensfacetten benötigt. Das Framework von Reiss & Ufer (2009) nennt sechs Voraussetzungen, die auch Prädiktoren genannt werden, da sie prädiktiv für MA&B Fähigkeiten sind. Bei den Prädiktoren des Frameworks (*mathematische Wissensbasis*, *Methodenwissen*, *mathematisch-strategisches Wissen*, *Problemlösen, Beliefs* und *affektive Aspekte)* handelt es sich jeweils um Voraussetzungen, die in empirischen mathematikdidaktischen Studien bereits einen bedeutenden Einfluss auf MA&B gezeigt haben.

Neben den Voraussetzungen sind die Teilprozesse eines MA&B Prozesses ein Fokus der Forschung. Das Framework von Fischer et. al (2014), welches diese Teilprozesse aus einer interdisziplinären Sichtweise untersucht, schlägt acht sogenannte epistemische Aktivitäten (vgl. Tabelle 1) vor. Diese Aktivitäten werden als wesentliche Teile von Argumentationsprozessen gesehen, müssen jedoch nicht immer in allen MA&B Prozessen vorkommen.

Die dritte Perspektive auf MA&B widmet sich den Zielen, welche eine Person zu Argumentations-/Beweisprozessen veranlassen. Mejia-Ramos & Inglis (2009) beschreiben drei übergeordnete Zielbereiche, die *Konstruktion*, *Rezeption* und *Präsentation* von Beweisen, die wiederum jeweils einige Subziele enthalten.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

| Aktivität | Beschreibung |
|---|---|
| *Ein Problem identifizieren* | Ein kognitiver Konflikt wird wahrgenommen und eine erste Problemrepräsentation kreiert |
| *Fragen stellen* | Eine oder mehr initiale Fragen werden gestellt |
| *Hypothesen generieren* | Mögliche Antworten auf die Fragen werden basierend auf Beobachtungen, Modellen, Theorien, o.ä. erstellt |
| *Erstellen und Überarbeiten von Artefakten* | Ein prototypisches Objekt (z.B. DGS-Arbeitsblatt), axiomatisches System o.ä. wird entwickelt, um mit diesem an dem Problem zu arbeiten |
| *Evidenz generieren* | Evidenz für die Hypothese wird generiert |
| *Evidenz evaluieren* | Evidenz wird, bezugnehmend auf entsprechende Normen, evaluiert |
| *Schlussfolgern* | Verschiedene Beweisteile werden integriert. Die initiale Behauptung wird unter dem Licht der Evidenz neu bewertet |
| *Kommunizieren und Prüfen* | Individuelle Argumente und Beweise werden innerhalb einer Community geteilt und diskutiert |

**Tabelle 1: Überblick der epistemischen Aktivitäten (Fischer et al., 2014).**

## 2. Fragestellungen

Im Rahmen dieses Reviews (siehe auch Sommerhoff, Ufer, & Kollar, eingereicht) wurde die Forschung im Bereich MA&B der letzten fünf Jahre unter Berücksichtigung der verschiedenen Blickwinkel systematisch analysiert. Dabei sollte insbesondere untersucht werden, inwiefern die Forschung zu mathematischem Argumentieren und Beweisen die verschiedenen Prädiktoren, Teilprozesse und Ziele von MA&B-Prozessen untersucht. Weiter sollte geklärt werden, welche Kombinationen von Prädiktoren und epistemischen Aktivitäten in der Forschung zu MA&B betrachtet werden.

## 3. Methodik

Die Datenbasis für den Review bilden die Research Reports (RR) der Konferenzen der „International Group for the Psychology of Mathematics Education“ von 2009 bis 2014. Aus den insgesamt 782 RRs wurden nach einer initialen Kodierung durch zwei Reviewer 129 RRs (16,5% der RRs) ausgewählt, die sich mit dem Thema MA&B im Sekundar- oder Tertiarbereich befassen. Beiträge aus dem Primarbereich wurden ausgeschlossen, da hier häufig eher allgemeines Begründen anstatt MA&B betrachtet wird und Argumentieren in vielen Forschungsprojekten auch implizit enthalten ist. Die verbliebenen 129 RRs wurden anschließend hinsichtlich der untersuchten Prädiktoren, Prozesse und Ziele kodiert, wobei jeweils der gesamte RR als Basis für die Kodierung verwendet wurde. Die Interraterreliabilität erreichte mit einem mittleren Wert $\kappa_{\mathrm{Mean}}$ = 0,77 (SD = 0,15) ein gutes Niveau.

## 4. Ergebnisse

Bei der Analyse der betrachteten Prädiktoren zeigten sich deutliche Ungleichgewichte. Im Vordergrund der Forschung stand der Prädiktor *Mathematische Wissensbasis* (47% der RRs) gefolgt von *Problemlösefähigkeiten* (18%) und *Methodenwissen* (17%). Die anderen Prädiktoren wurden hingegen kaum untersucht (siehe Abbildung 1, links). Bei nur 22% der RRs standen mehrere Prädiktoren im Forschungsmittelpunkt, wobei maximal zwei Prädiktoren gleichzeitig betrachtet wurden und es sich jeweils um eine Kombination mit *Mathematische Wissensbasis* handelte.

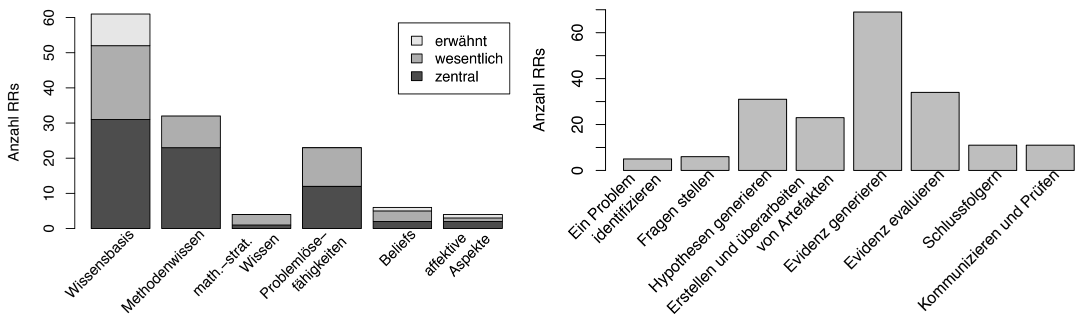



**Abbildung 1: Verteilung der untersuchten Prädiktoren (links) und Teilprozesse (rechts)**

Ein ähnliches Bild ergab sich auch bei den Teilprozessen von MA&B (siehe Abbildung 1, rechts). Von den insgesamt acht epistemischen Aktivitäten wurden primär die Prozesse *Hypothesen generieren* (24% der RRs), *Erstellen und überarbeiten von Artefakten* (18%), *Evidenz generieren* (53%) und *Evidenz evaluieren* (26%) untersucht. Insbesondere die zu Beginn eines MA&B-Prozesses vorkommenden Aktivitäten wie *Ein Problem identifizieren* und *Fragen stellen* wurden kaum untersucht. Unter allen epistemischen Aktivitäten nimmt *Evidenz generieren* eine herausragende Position ein, da diese in über 50% der RRs im Forschungsfokus lag. Dieser Schwerpunkt spiegelt sich auch in den untersuchten Zielen von MA&B-Prozessen wider. Hier war das überragende Ziel in den RRs die *Konstruktion von Argumenten* (57% der RRs); *Präsentation* (1%) und *Rezeption* (7%) wurden hingegen kaum untersucht (siehe Abbildung 2, links). Immerhin 7% der RRs hatten mehr als eine Zielperspektive. 29% der RRs konnte jedoch keine Zielperspektive zugewiesen werden, da es sich um theoretische RRs handelte oder die Beschreibung der konkreten Aktivitäten nicht detailliert genug dargestellt war.

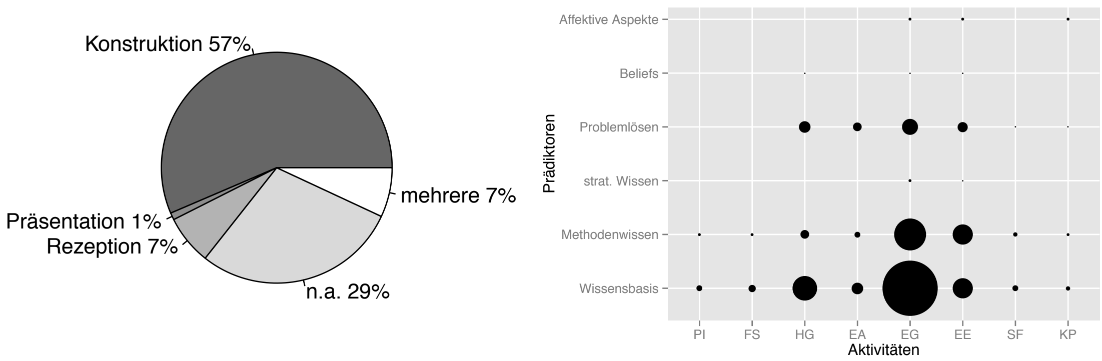



**Abbildung 2: Anteil der Ziele (links) und Kombinationen epist. Aktivitäten & Prädiktoren (rechts)**

Auffallend ist, dass die einzelnen Prädiktoren und Teilprozesse in den RRs nur in wenigen Kombinationen betrachtet wurden. Im Blasendiagramm (siehe Abbildung 2, rechts) ist deutlich zu erkennen, dass viele Kombinationen durch die RRs gar nicht abgedeckt wurden.

Mit 20% machen RRs zum Thema MA&B einen signifikanten Anteil der mathematikdidaktischen Forschung der letzten fünf Jahre aus. Die systematische Analyse dieses Reviews zeigt jedoch eine deutliche Konzentration auf einzelne Bereiche, die viel untersucht wurden. Ist das Ziel mathematikdidaktischer Forschung ein integriertes Modell von MA&B, welches über spezifische Situationen und Anforderungen hinausgeht, so tragen die untersuchten RRs sowohl in Bezug auf die einzelnen Voraussetzungen, Prozesse und Ziele als auch deren Interaktion nur wenig bei. Gerade das Verständnis dieser Interaktionen ist jedoch nicht nur aus theoretischer Sicht von Interesse, sondern kann eine effektive und langfristige Förderung von MA&B unterstützen.

## Literatur


Brunner, E. (2014). Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *35*(2), 229–249.

Fischer, F., Kollar, I., Ufer, S., Sodian, B., Hussmann, H., Pekrun, R., … Eberle, J. (2014). Scientific reasoning and argumentation: Advancing an interdisciplinary research agenda. *Frontline Learning Research*, *4*, 28–45.

Mejia-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88–93). Taipei, Taiwan

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus?. *Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, *111*(4), 155–177.

Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (eingereicht). Research on mathematical argumentation: a descriptive review of PME proceedings. Manuskript eingereicht zur Publikation in *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tasmania, Hobart: PME.

Lara SPRENGER, Florian SCHACHT, Stephan HUßMANN

# Diagnose und Förderung eines nachhaltigen Dezimalzahlverständnisses aus inferentialistischer Sicht

## Einführung

In der Schule und vor allem auch im Alltag ist der verständige Umgang mit Dezimalbrüchen von zentraler Bedeutung (vgl. Padberg 2009). Durch die Erfahrungen z.B. mit Geld und Größen bringen die Schülerinnen und Schüler diverse Vorkenntnisse in diesem Bereich mit. Dennoch zeigen sich selbst bei Schülerinnen und Schülern am Ende der Sekundarstufe I immer wieder spezifische Hürden, insbesondere beim Ordnen mehrerer Dezimalbrüche. Das folgende Beispiel einer Schülerin aus einer achten Klasse (Abb. 1) verdeutlicht eine typische Verständnishürde. Es wird auch deutlich, dass einem richtigen Ergebnis nicht notwendigerweise eine mathematisch tragfähige Strategie zugrunde liegen muss.

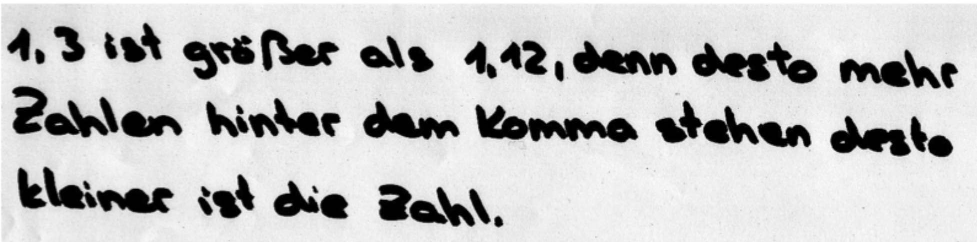



**Abb. 1: Aussage von Marie, 8. Klasse Realschule, beim Zahlvergleich von 1,3 und 1,12**

Diese und ähnliche Fehlerstrategien sind zahlreich dokumentiert (u. a. Padberg 2009; Heckmann 2006; Steinle & Stacey 2004). Insgesamt besteht allerdings nach wie vor eine Forschungslücke bei der Rekonstruktion von Lernprozessen und individuellem Schülerhandeln beim situationsspezifischen Umgang mit Dezimalbrüchen. Im vorliegenden Beitrag werden erste Ergebnisse aus einem Projekt zur Nutzung unterschiedlicher Strategien beim Vergleich von Dezimalbrüchen diskutiert. Dabei steht die Identifizierung von Lernpfaden im Fokus, um Argumentationslogiken der Strategieverwendung und das zugrundeliegende konzeptionelle Verständnis zu rekonstruieren. Dies soll genutzt werden, um Lernende adäquat zu fördern, indem Lerngegenstand und Lernumgebung entsprechend restrukturiert werden.

## Der theoretische Zugriff mit Festlegungen und Inferenzen

Die vorliegende Studie hat insofern einen doppelten Anspruch, als die Beforschung von individuellen Lernprozessen zum Umgang mit Dezimalbrüchen eng verknüpft ist mit der Weiterentwicklung des Lehr-/Lernarrangements. Sowohl auf der konstruktiven als auch auf der rekon-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

struktiven Ebene wird ein epistemologischer und sprachanalytischer Theorierahmen genutzt, der es möglich macht, einerseits zentrale Setzungen im Lehr-/Lernarrangement mit den individuellen Begriffsbildungsprozessen der Lernenden in Beziehung zu bringen, andererseits die zu lernenden und die individuellen Konzepte inferentiell nach den genutzten Argumenten zu gliedern, um daraus tragfähige Lernpfade zu gewinnen. Begriffe werden dabei verstanden als Prädikate in Aussagen, auf die sich ein Individuum festlegt (vgl. Hußmann / Schacht 2015). Festlegungen sind Behauptungen in propositionaler Form, die das Subjekt für wahr hält. Festlegungen können als Gründe dienen, insofern sind Festlegungen inferentiell gegliedert.. Dabei können individuelle Festlegungen und Inferenzen in der empirischen Analyse rekonstruiert werden, während sich mit Hilfe konventionaler Festlegungen und Inferenzen mathematische Gegenstandsbereiche, Begriffsnetze und prototypische Lernpfade aus normativer Sicht strukturieren lassen.

## Das Untersuchungsdesign

Die Studie ist als Fachdidaktische Entwicklungsforschung angelegt, bei der die Beforschung von Lehr-/Lernprozessen ebenso im Forschungsinteresse steht wie die Entwicklung von Lehr-/Lernarrangements (vgl. Prediger et al. 2012). Die vier Phasen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung gliedern sich in die *Spezifizierung und Strukturierung von Lerngegenständen*, die *Entwicklung eines Designs*, die *Durchführung und Auswertung von Design-Experimenten* und die *(Weiter)Entwicklung von lokalen Theorie*. Ausschlaggebend in diesen Forschungs- und Entwicklungsprozessen sind vier Leitideen: Die *Gegenstandsorientierung*, d. h. die Hinterfragung und Rekonstruktion der fachlichen Gegenstände und ihrer fachlichen Strukturierung, die *Prozessorientierung*, die den Fokus auf die Lernprozesse mit ihren Voraussetzungen, Verläufen, Hürden, Bedingungen und Wirkungen legt, sowie der *zyklische Ablauf* von Forschung und Entwicklung mit dem Bestreben der *Vernetzung* der Arbeitsbereiche. In diesem Beitrag beschäftigen wir uns vor allem mit der Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes und der Entwicklung des Designs. Die empirischen Ergebnisse des ersten Forschungszyklus bilden dabei die Grundlage für die fachliche (Re-)Strukturierung des Lerngegenstandes sowie für die Weiterentwicklung des Designs. Den Aufgaben des Lehr-/Lernarrangements lagen folgende Designprinzipien zugrunde, die eng mit dem sprachanalytischem Rahmen verknüpft sind: (1) Diskursive und kommunikative Gestaltung der Lehr-/Lernumgebung, (2) inferentielle Gliederung der zentralen Konzepte, (3) Explizierung und Reflexion von (Fehl)Festlegungen durch die Lernenden und (4) die Nutzung unterschiedlicher Repräsentationsebenen.

### Normative Strukturierung des Gegenstandsbereiches

Vor dem Hintergrund der vielfältigen Forschungsergebnisse zu unterschiedlichen Strategien zum Dezimalbruchvergleich wurden idealtypische Lernpfade entwickelt, d.h. die Strategien wurden auf Basis einer formalen, semantischen und epistemologischen Analyse gegliedert. Der Fokus lag auf der Komplexität der Argumente und der verwendeten Argumentationsbasen wie z.B. Stellenwerttafel oder Zahlenstrahl. Beispielsweise ist es aus normativer Sicht sinnvoll, dass die Strategie des Vergleichs durch Ergänzen von Nullen, um die Nachkommastellen zahlweise und nicht die ziffernweise bzw. stellenweise zu vergleichen, auf der Strategie des Stellenweise-Vergleichens (von links nach rechts mit Hilfe der Stellentafel) fußt. Vor dem Hintergrund dieser normativen Strukturierung wurden verschiedene fachlich tragfähige und linear strukturierte Lernpfade entwickelt.

In der anschließenden empirischen Erhebung wurden die folgenden Forschungsfragen bearbeitet: (1) Inwiefern nutzen die Lernenden spezifische Strategien beim Vergleich von Dezimalzahlen und begründen diese durch situationsspezifische (individuelle) Festlegungsnetze? (2) Welche Erkenntnisse liefert die empirische Untersuchung für die Restrukturierung des Gegenstandes und des Lernarrangements?

### Ergebnisse und Diskussion

Im Folgenden werden exemplarisch das Vorgehen dargelegt und erste Ergebnisse der Studie dargestellt. Grundlage für den in diesem Beitrag dargestellten Zugriff ist ein Partnerinterview mit zwei Schüler/innen einer achten Klasse zum Vergleich von Dezimalbrüchen. Innerhalb eines kurzen Zeitraums im Interview nutzen die beiden Lernenden die folgenden drei Strategien, mit dem Ziel die zwei Dezimalbrüche 1,12 und 1,3 zu vergleichen. Der Pfeil deutet die verwendeten inferentiellen Gliederungen an.

St1: Nachkommastellen sind natürliche Zahlen → 12 > 3 →1,12 > 1,3

St2: a weiter rechts auf dem Zahlenstrahl als b → 1,3 >1,12

St3: Eine nat. Zahl a hat mehr Ziffern als eine natürliche Zahl b → 12>3 → zwei Dezimalzahlen a und b unterscheiden sich nur durch die Nachkommastellen und a hat mehr Nachkommastellen als b → a<b → 1,12<1,3

Diese Rekonstruktionen der individuellen Argumentationslogiken bringen etwa zum Ausdruck, dass sich zwei fast gleichzeitig aktivierte Argumentationslogiken widersprechen (St1 und St3). Gleichzeitig wird deutlich, inwiefern individuelle Logiken in Abhängigkeit der Nutzung bestimmter Repräsentationsebenen aktiviert werden (St. 2).

Diese und weitere Analysen zeigen für die betrachteten Fälle folgendes: Die Lernenden

- verknüpfen Strategien und Konzepte aus unterschiedlichen Lernpfaden miteinander, nutzen dabei eine Vielzahl an nicht tragfähigen Schlüssen, die jedoch aus individueller Perspektive meist in sich schlüssig sind;
- halten an wenigen zentralen individuellen Argumenten fest und versuchen alle weiteren Aussagen damit zu stützen. Es zeigte sich, dass die Auseinandersetzung mit eigenen bzw. fiktiven Schülerfestlegungen die Modifikation eigener (nicht tragfähiger) Festlegungen und deren inferentieller Gliederung fördert;
- begründen die Tragfähigkeit von Strategien mit der Gültigkeit des Ergebnisses, ändern jedoch Ergebnisse je nach Argumentationsbasis ab und zeigen sich von der Widersprüchlichkeit unbeeindruckt.

Für die Restrukturierung des Lerngegenstandes und der Lernumgebung und damit für den nächsten Zyklus des Designexperiments werden diese Aspekte aufgenommen und Aufgabenformate entwickelt, die die netzartige Struktur der verwendeten Konzepte anspricht und es ermöglichen, die zentralen indiv. Argumente zum Gegenstand einer eingehenden Analyse zu machen.

## Literatur


Heckmann, K. (2006): Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Berlin: Logos Verlag.

Hußmann, Stephan & Schacht, Florian (2015): Fachdidaktische Entwicklungsforschung in inferentieller Perspektive am Beispiel von Variable und Term. Journal für Mathematikdidaktik, 35(1), doi:10.1007/s13138-014-0070-9.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B. & Thiele, J. (2012): Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell.

Roche, A., & Clarke, D. (2004). When does successful comparison of decimals reflect conceptual understanding? In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean, *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. V. 2, pp. 486–493. Sydney: MERGA.

Steinle, V. & Stacey, K. (2004): A Longitudinal Study of Students´ Understanding of Decimal Notation: An Overview and Refined Results. In: I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.): *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. V. 2, 541-548. Townsville: MERGA.

Andrea STEIN, Dortmund

# Kognitionsorientierte Aufgaben zur Auseinandersetzung von Lernenden mit Fehlern zu funktionalen Zusammenhängen – Eine Entwicklungsforschungsstudie

Der Kurzbeitrag berichtet aus einer Entwicklungsforschungsstudie zur Ausgestaltung kognitionsorientierter Aufgaben zum Konzept des funktionalen Zusammenhangs. Untersucht wird, wie ca. Sechzehnjährige zur aktiven Auseinandersetzung mit Fehlern angeregt werden können.

## 1. Aspekte des Forschungs- und Entwicklungsstands zum Umgang mit Fehlern im Bereich des Funktionalen Zusammenhangs

Das Themengebiet „Funktionale Zusammenhänge" ist bereits breit erforscht; der Lerngegenstand ist spezifiziert und strukturiert, d.h. zentrale Verstehenselemente und Könnensaspekte wurden identifiziert und zueinander in Beziehung gebracht (z.B. Vollrath 1989, vom Hofe 2003). Empirische Studien haben typische Fehler dokumentiert (z.B. Leinhardt et al. 1990, Nitsch 2014). Diese Befunde finden Beachtung durch entsprechende Schwerpunktsetzung in Unterrichtskonzepten, in Diagnosetests oder in zentralen Abschlussprüfungen. Es fehlen jedoch empirisch fundierte Konzepte zur Auseinandersetzung von Lernenden mit diesen Fehlern.

Die hier fokussierten Fehler tauchen immer wieder in Lösungen der Lernenden auf (vgl. Laakmann 2013). Es zeigen sich wiederholende Fehlermuster, welche anscheinend in den Vorstellungen der Lernenden begründet liegen und somit zu den systematischen Fehlern zählen. Diese Fehler können positiv genutzt werden, um Negatives Wissen aufzubauen. Die Lernenden entwickeln Strategien, wie sie das Falsche identifizieren können und zum Richtigen gelangen (vgl. Oser & Spychiger 2005).

## 2. Entwicklung Negativen Wissens und Strategiewissens zum Aufbau eines vertieften Verständnisses

Im Sinne von Oser (1999, S. 17) wird unter Negativem Wissen „das Wissen um das, wie etwas nicht ist (deklarativ) oder nicht funktioniert (prozedural)" verstanden. „Das sinnvolle Fehlermachen besteht darin, daß am Schluß ein sicheres Beherrschen eines Ablaufs, einer Tätigkeit vorliegt, ohne daß Fehler dieses gefährden, und daß das Wissen über richtig und falsch gut verankert ist." (Oser 1999, S. 20). Sinnvolles Fehlermachen nach Oser beinhaltet eine Form von Strategiewissen und Negativem Wissen. Beide Wissensbereiche sind notwendig, um auch anspruchsvollere Aufgaben richtig zu lösen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Für das Konzept des funktionalen Zusammenhangs kann die Grundlage für eine mögliche *Lösungs-* und auch *Validierungsstrategie* für typische Mathematisierungsaufgaben zu einem vorgegebenen Sachzusammenhang die Bearbeitung folgender Fragen umfassen:

1. Welche Größe steht wie mit welcher Größe in einem Zusammenhang?
2. Wenn sich die eine Größe ändert, wie ändert sich dann die andere?
3. Wie sieht die Wertetabelle dazu aus?
4. Wie stellt sich die Veränderung im Überblick dar?
5. Wie sieht der Graph dazu aus?

## 3. Design-Prinzipien für kognitionsorientierte Aufgaben

Damit Fehler zu produktiven Lernanlässen werden können, gibt es Bedingungen an die zu vollziehenden kognitiven und metakognitiven Aktivitäten (vgl. Oser & Spychiger 2005, Guldimann & Zutavern 1999): Lernende

- stellen die Lösung der Aufgaben in Frage
- erkennen, dass ein Fehler vorliegt
- lokalisieren den Fehler und wissen um seine Konsequenzen
- vollziehen die richtigen gedanklichen / rechnerischen Schritte nach
- erklären, wieso sie den Fehler gemacht haben.

Kaune (2001) schlägt unterschiedliche Aufgabenformate zur Auseinandersetzung mit Fehlern vor. Ein bewährtes Aufgabenformat enthält fiktive Gespräche zu unzureichenden / falschen Strategien sowie Fragestellungen, die die Lernenden zur Analyse der Strategien anleiten.

Vor diesem Hintergrund wurden zwei verschiedene Aufgaben für die Partnerarbeit konzipiert. Die erste Aufgabe zielt auf die Auseinandersetzung mit dem Graph-als-Bild-Fehler; die zweite Aufgabe auf drei Fehler, die beim Darstellungswechsel von der Tabelle zum Graphen passieren können (falsche Zuordnung der Größen an die Achsen, die Beschriftung der Achsen von groß nach klein, nicht-äquidistante Einteilung der Achsen bei einem quadratischen Zusammenhang).

Als Einstieg werden jeweils eine richtige und eine falsche Bearbeitung präsentiert, zwischen denen sich die Lernenden entscheiden. Anschließend sollen sie ihrem Partner darlegen, warum sie diese Bearbeitung wählen und die andere ablehnen. Bei unterschiedlicher Wahl müssen die Lernenden sich begründet für eine entscheiden, ggf. durch Tipps und Arbeitsaufträge unterstützt. Um sich mit diesen Strategien vertraut zu machen (s. Abschnitt 2), beinhalten beide Aufgabentypen eine Phase, in der die fünf strategischen Fragen bearbeitet werden.

Durch diese Strukturierung der Aufgaben sollen die als Rahmenbedingung von Oser und Spychiger (2005) geforderten kognitiven und metakognitiven Aktivitäten der Lernenden initiiert werden. Die starke Kontrastierung von richtig und falsch soll zusätzliche Kommunikationsanlässe schaffen und ggf. Widersprüche erzeugen.

## 4. Methoden der Design-Experimente

Die Wirkungen der Strukturelemente der Aufgaben wurden in Design-Experimenten (Prediger et al. 2012) in einem bzw. in zwei Zyklen mit je 5 x 2 Lernenden (im Alter von 15-17 Jahren) untersucht. Laborsettings wurden gewählt, da sie eine intensivere Beforschung der individuellen Denkweisen und Hürden ermöglichen. Die Videos der Design-Experimente wurden zunächst grob analysiert bzgl. der auftretenden Bearbeitungsschritte, danach intensiver qualitativ interpretiert betreffs der Strategien der Lernenden und der Aktivitäten der Lernenden in der Auseinandersetzung mit dem Fehler.

## 5. Erste Einblicke in initiierte kognitive und metakognitive Aktivitäten

Wesentlich für das Design der Aufgaben ist die kontrastierte Präsentation von richtigen und falschen Bearbeitungen als Einstieg sowie die Diskussion der Lernenden über die richtige Lösung. Exemplarisch zeigt folgender Transkriptauszug einer Aufgabe zum Darstellungswechsel von einer Tabelle zum Graphen die Möglichkeit, die intendierten metakognitiven und kognitiven Aktivitäten der Lernenden in Partnerarbeit zu initiieren:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | R | Was hast du? Hast du gesagt, dass Situation zw. Warum hast du hier gesagt, dass Situation 2 richtig ist? Du hast ja. Weil, guck mal, Jana macht‘s auch richtig, die macht von 50 40 30 20 10. *[zeigt auf Achseneinteilung der y-Achse von Janas Graphen]*. | **Gedankengänge des Mitschülers nachvollziehen** |
| 10 | L | Aber muss man nicht. Muss man nicht generell bei Graphen die Einteilung von von klein nach groß wählen? *[zeigt auf die y-Achse von Tobis Graphen]* | **Regelbenennung** |
| 11 | R | Das ist jetzt mein Problem, was ich hab, ob man das muss. Also, es ist ja eigentlich egal. Hauptsache, du kann ablesen, is un unvorteilhaft gewählt, ne?! *[zeigt auf Janas Graphen]* Aber | **Konsequenzen bedenken** |
| 13 | R | Und das ist. Hat er‘s denn auch richtig eingeteilt? | **Prüfung 1** |
| 15 | R | Guck mal, er hat bei 50 Litern | **Prüfung 2** |
| 16 | L | Also das sind 10, das stimmt schon mal. [*zeigt auf Punkt 10/50 in Tobis Lösung*] | |
| 17 | R | Bei 50 Litern hat er 0. Bei 40 hat er 5 [*überprüft die Punkte in Tobis Graphen*], weil | |
| 18 | L | Ja, das stimmt. [*zeigt auf Janas Graph*] | |
| 19 | R | Ja, das stimmt, dann ist Tobi richtig, also, weil, das sind einfach *[kreuzt Tobis Lösung an]* nur vorteilhaft und unvorteilhaft gewählt, geht, dass man besser ablesen kann. | **Schlussfolgerung** |

Die unterschiedlichen graphischen Darstellungen erzeugen Begründungsbedarf bzw. generieren Nachfragen nach der Entscheidung des Partners (Z. 9). Mit dem Ziel, die Lösungen voneinander abzugrenzen, benennen die Lernenden Regeln und suchen nach Fehlern in den Lösungen (Z. 10). Hier prüfen die Lernenden die äquidistante Einteilung der Achsen (Z. 15) und anschließend, ob die Punkte der Tabelle im Graphen wiederzufinden sind (Z. 16-18). Dabei bedenken diese Lernenden die Konsequenz, dass diese graphische Darstellung schlechter ablesbar wird (Z. 19).

Somit konnte das Design der Aufgaben die intendierten kognitiven und metakognitiven Aktivitäten erfolgreich initiieren und damit die Voraussetzungen zum Aufbau vom Negativen Wissen schaffen. Die Konstruktionsprozesse für das Negative Wissen und für das Strategiewissen sind Gegenstand weiterer Analysen.

## Literatur


Guldimann, T. & Zutavern, M. (1999). „Das passiert uns nicht noch einmal!" Schülerinnen und Schüler lernen gemeinsam den bewussten Umgang mit Fehlern. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern* (S. 233-258). Opladen: Leske + Budrich.

Hofe, vom R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren*, 78, 4-8.

Kaune, C. (2001). Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe". *Der Mathematikunterricht,* 47 (1), 35–46.

Laakmann, H. (2013). Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung in rechnerunterstützten Lernumgebungen. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Nitsch, R. (2014). Schülerfehler verstehen. Typische Fehlermuster im funktionalen Denken. *Mathematik lehren*, 187, 8-11.

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen" Wissens. In W. Althof, (Hrsg.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern* (S. 11-41). Opladen: Leske + Budrich.

Oser, F. & Spychiger, M. (2005). Lernen ist schmerzhaft. Zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur. Weinheim: Beltz.

Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In H. Bayrhuber, U. Harms, B. Muszynski, B. Ralle, M. Rothgangel, L.-H. Schön, J.H. Vollmer, H.G. Weigand (Hrsg.), *Formate fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte – historische Analysen – theoretische Grundlegungen.* (S. 29-46). Münster [u.a.]: Waxmann

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10, 3-37.

Martin STEIN, Münster, Yvonne KORFLÜR, Münster

# Mathematische Kompetenzprofile in der beruflichen Ausbildung

## 1. Einleitung

Im Projekt Mathe-Meister (2007 bis 2011) wurden für verschiedene Meisterausbildungen erforderliche mathematische Basiskompetenzen untersucht. Ausgangspunkt des Projekts war die Beobachtung, dass „viele Interessierte an Meisterlehrgängen vor Lehrgangsbeginn starke Defizite im Bereich der elementaren Schulmathematik auf[weisen], obwohl mathematische Grundkenntnisse eine unverzichtbare Grundlage in allen Bereichen der Meisterqualifizierung sind." (Stein et al. 2010, S. 827). Das für den Bereich der Meisterausbildung beobachtete Problem ist allerdings nicht für diesen Bereich fortgeschrittener Berufsausbildung spezifisch, sondern stellt sich in der gleichen Weise durchgehend in der auf den Besuch der allgemein bildenden Schule folgenden beruflichen Ausbildung im handwerklichen, technischen, sozialen und kaufmännischen Bereich dar.

Seit 2013 wird im Nachfolgeprojekt "Mathe-Meister 2.0" untersucht, welche Basiskompetenzen im Bereich elementarer mathematischer Fertigkeiten in verschieden Berufsausbildungen benötigt werden. Folgend wird beispielhaft anhand von zwei Berufen dargestellt, dass Ausmaß und Art der benötigten Kompetenzen dabei stark vom jeweiligen Beruf abhängen – technikorientierte Berufe wie Anlagenmechaniker_in für Sanitär-, Heizungs- und Klimatechnik haben ein eher „mathematik-intensives", kaufmännisch orientierte Berufe ein eher „mathematik-fernes" Berufsprofil.

Für die Analyse der benötigten Kompetenzen werden jeweils spezifische Lehr- und Lernwerke zur Vorbereitung auf die Abschlussprüfung herangezogen, da diese exemplarische Aufgaben für die Gebiete der Ausbildung („Lernfelder") enthalten. Die Analyse erfolgt mit Methoden der *rationalen Aufgabenanalyse* (vgl. z. B. Bromme et al. 1990, S. 4 f.) und fasst die Ergebnisse in sogenannten „Kompetenzprofilen" zusammen. Für die Erstellung dieser Profile werden die Aufgaben in die folgenden Kategorien eingeteilt:

Arithmetik – *Runden* – *Rechnen mit Einheiten* – Algebra – Bruchrechnung – Dreisatz und Prozente – *Diagramme und Tabellen*

Dabei sind die kursiv gehaltenen Kategorien zum alten Mathe-Meister-System ergänzt worden, da Aufgaben aus diesen Bereichen in einigen Berufen einen so hohen Stellenwert einnehmen, dass die Aufnahme in eine eigene Kategorie gerechtfertigt ist.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 2. Die Kauffrau / Der Kaufmann im Einzelhandel

Der Ausbildungsunterricht für Kaufmänner / Kauffrauen im Einzelhandel findet auf Grundlage eines Rahmenlehrplans statt, der nach Lernfeldern organisiert ist. Von den insgesamt 14 Lernfeldern werden lediglich in 6 mathematische Grundqualifikationen gefordert. Bedeutsam sind hier alle Aufgaben im Zusammenhang mit Warenanschaffung und Preiskalkulation. Die mathematischen Anforderungen (im Bereich der Basiskompetenzen) können hier nur exemplarisch am Beispiel einer Aufgabe demonstriert werden:

> *Ein Warenhaus bezahlt an seine Mitarbeiter umsatzbezogene Prämien. So werden für einen Umsatz von 2.000,00 € 60,61 € Prämien gezahlt. Wie hoch ist die Prämie bei einem Umsatz von 2.800,00 €?*

**Abb. 1: Beispielaufgabe 1 zur Darstellung der Kompetenzanalyse (in Anlehnung an (Colbus 2013: 148))**

Zur Lösung dieser Aufgabe kann die Dreisatzrechnung angewendet werden, wobei zunächst aus dem Kontext erschlossen werden muss, dass es sich um einen *proportionalen Dreisatz* handelt. Im Anschluss werden die Rechenoperationen ausgewählt, mit denen man von 2.000,00 € ausgehend möglichst geschickt 2.800,00 € errechnet.

| | Umsatz | Prämie | |
|---|---|---|---|
| | 2.000,00 € | 60,61 € | |
| :5 | 400,00 € | 12,122 € | :5 |
| *7 | 2.800,00 € | 84,854 € | *7 |

**Abb. 2: Proportionaler Dreisatz zur Lösung der Beispielaufgabe 1**

Da das Ergebnis die Einheit „Euro“ hat, muss es noch auf zwei Nachkommastellen gerundet werden, sodass die Prämie 84,85 € beträgt. Dementsprechend werden eine *Division reeller Zahlen* und eine *Multiplikation reeller Zahlen* in einem Dreisatz durchgeführt (Kategorie: Dreisatz und Prozente). Die Rechnungen umfassen zudem das *Rechnen mit Euro* (Kategorie: Rechnen mit Einheiten) sowie das *Runden einer reellen Zahl auf zwei Nachkommastellen* (Kategorie: Runden).

Auf dieselbe Weise wurden alle Aufgaben aus dem im Quellverzeichnis genannten

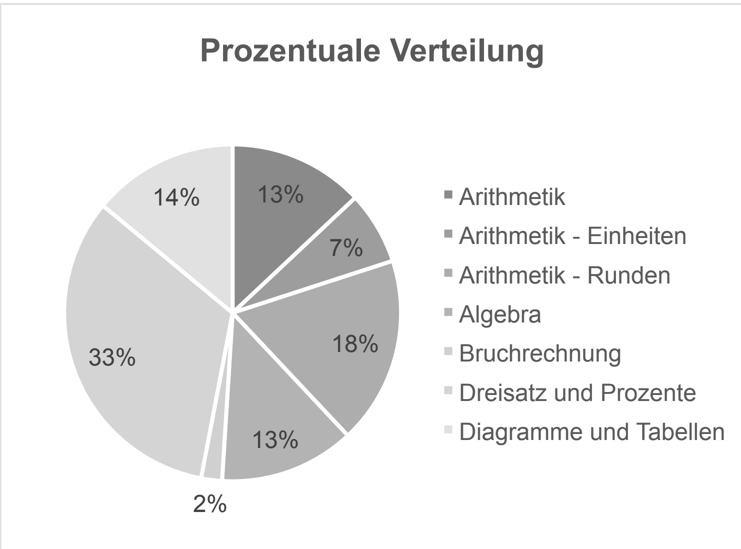



**Abb. 3: Kompetenzprofil Kaufmann / Kauffrau im Einzelhandel**

Lehr- und Lernwerken analysiert, für die mathematische Kenntnisse erforderlich sind. Die Zuordnung zu Kategorien ergab das in Abbildung 3 dargestellte Kompetenzprofil.

Das Kompetenzprofil zeigt die große Bedeutung elementarer Rechenfertigkeiten (Arithmetik, Runden), sowie des Dreisatzes und der Prozentrechnung. Die Bruchrechnung ist praktisch bedeutungslos.

## 3. Die Anlagenmechanikerin / Der Anlagenmechaniker für Sanitär-, Heizungs- und Klimatechnik

Der Rahmenlehrplan für diese Ausbildung ist in 15 Lernfeldern organisiert, von denen 13 mathematische Grundqualifikationen erfordern. Auch hier sollen die mathematischen Anforderungen am Beispiel einer typischen Aufgabe demonstriert werden:

> *Ein Flachstahl von 680 mm Länge soll 8 Bohrungen erhalten. Randabstände und Bohrungsabstände sind gleich. In welchem Abstand sind die Bohrungen anzukörnen?*

**Abb. 4: Beispielaufgabe 2 zur Darstellung der Kompetenzanalyse (in Anlehnung an (Härterich 2011: 88))**

Zur Lösung dieser Aufgabe werden verschiedene Teilkompetenzen benötigt, die in der folgenden Abbildung dargestellt sind.

| | |
|---|---|
| 1. Rechengrößen zusammenstellen | Geg.: l = 680 mm n = 8<br>Ges.: Abstand a |
| 2. Notation der Formel | a = l : (n + 1) |
| 3. Einsetzen in die Formel | a = 680 mm : (8 + 1) |
| 4. Berechnung | a = 680 mm : 9<br>= 75,5555 mm |

**Abb. 5: Lösung zur Beispielaufgabe 2 zur Darstellung der rationalen Aufgabenanalyse**

Die ersten beiden Lösungsschritte setzen mit einem fachlichen Verständnis der Aufgabe fachspezifische Kenntnisse voraus, sodass diese nicht in das Mathe-Meister-Kategoriensystem aufgenommen werden. Im dritten Schritt müssen für die Variablen in der *Formel die gegebenen Werte eingesetzt* (Kategorie: Algebra) werden. Für die Berechnung der korrekten Lösung werden Kenntnisse der *Division unter Berücksichtigung der Klammerregeln* sowie der richtige Umgang mit *Einheiten* vorausgesetzt (Kategorie: Rechnen mit Einheiten). Zuletzt ist es üblich, das *Ergebnis auf zwei Nachkommastellen zu runden* (Kategorie: Runden).

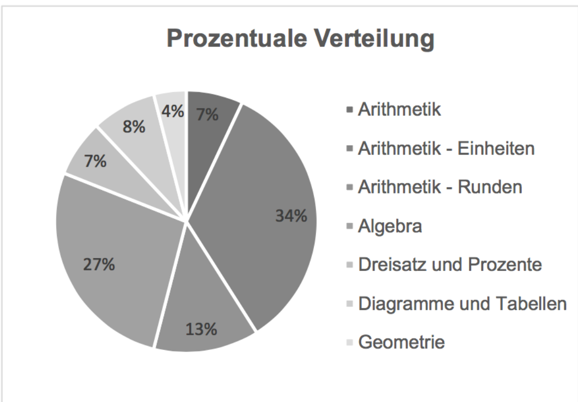



**Abb. 6: Kompetenzprofil Anlagenmechaniker_In**

Auf dieselbe Weise wurden alle Aufgaben aus den im Quellverzeichnis genannten Lehr- und Lernwerken analysiert, für die mathematische Kenntnisse erforderlich sind. Die Zuordnung zu den Kategorien ergab das in Abbildung 6 dargestellte Kompetenzprofil.

Die klassische Bruchrechnung hat in der Ausbildung keinerlei Bedeutung, das Rechnen mit Einheiten ist besonders wichtig – neben dem Rechnen mit Längen etc. spielen hier die physikalischen Einheiten besonders auch aus dem Bereich der Elektrik eine große Rolle.

## 4. Fazit

Die im Projekt Mathe-Meister 2.0 entstandenen und hier exemplarisch erörterten Ergebnisse zeigen, dass im Rahmen einer klassischen Berufsausbildung eine Reihe grundlegender mathematischer Kompetenzen benötigt werden, wobei die prozentuale Verteilung auf die verschiedenen Kategorien berufsabhängig variiert.

Während sich die Profile der hier vorgestellten Berufe deutlich unterscheiden, lassen sich bei Kompetenzprofilen einer Berufsgruppe (z. B. technisch orientierte Berufe) starke Gemeinsamkeiten erkennen. Auch Berufe die auf den ersten Blick nur wenig gemein haben (z. B. Zahnmediziner_Innen und Friseur_Innen) weisen zum Teil sehr ähnliche mathematische Profile auf, die bei einer auf Berufsgruppen beschränkten Analyse unentdeckt blieben.

## Literatur


Colbus, G. (2013): Prüfungsvorbereitung aktuell für Kauffrau/Kaufmann im Einzelhandel, Abschlussprüfung, gestrecktes Prüfungsverfahren, 10. Auflage. Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel.

Beck, J. (2007): Schwerpunkt Einzelhandel, Arbeitsheft – Schuljahr 2. Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel.

Beck, J. (2012): Schwerpunkt Einzelhandel, Arbeitsheft – Schuljahr 1, 2. Auflage. Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel.

Uhr, Ulrich et al. (2013): Prüfungsvorbereitung Aktuell. Zwischen- und Abschlussprüfung. Anlagenmechaniker/-in für Sanitär-, Heizungs- und Klimatechnik. 3.Auflage. Haan Gruiten: Verlag Europa Lehrmittel.

Härterich, M. et al. (2011): Installations- und Heizungstechnik, Fachkunde, Grundlagen & Lernfelder 1-15. 4.Auflage. Haan-Gruiten: Verlag Europa Lehrmittel.

Stein, M. et al. (2010): Das Projekt Mathe-Meister: Stand der Dinge. In: Lindmeier, A. M., Ufer, ,S. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. S. 827-830.

Bromme, R. et al. (1990): Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler. In: IDM-Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 14, Köln: Aulis-Verlag.

Waldemar STRAUMBERGER, Bielefeld

# Entwicklung von Selbsteinschätzung und Leistung beim Üben mit Selbstdiagnosebögen

Die Idee hinter den Selbstdiagnosebögen ist es die Verantwortung für das Lernen bei den Lernenden zu fördern und die Nutzung der Übungshasen zu optimieren. Es Üben nicht alle dieselben Inhalte, sondern jeder übt individuell nach seinem eigenen Bedarf. Erfahrungsberichte aus der Praxis bestätigen die Umsetzung dieser Ideen. Sie berichten aber auch von unzureichender Passung von Selbsteinschätzung und Leistung, die sich im Laufe der Verwendung verbessert (Reiff 2008, Achilles 2011). Es stellt sich daher die Frage, wie das Verhältnis von Einschätzung und Leistung zu unterschiedlichen Zeitpunkten ist und wie es sich im Laufe der Zeit verändert.

## Design und Methoden

Für die Erfassung von Selbsteinschätzung und Leistung beim Üben mit Selbstdiagnosebögen wurde eine Studie konzipiert. Bei der Konzeption wurde darauf geachtet ein praxistaugliches Konzept zu entwickeln, mit einer in die Übungsphase integrierten Datenerhebung. Es gab keine zusätzlichen Unterrichtsstunden für die Studie. Die beteiligten Lehrerinnen und Lehrer planten ihren Unterricht so, dass vor den Klassenarbeiten vier Unterrichtsstunden zum Üben zur Verfügung standen. Für die Studie wurde eine 5. Jahrgangsstufe einer Realschule in Bielefeld Mitte ausgewählt. Die Jahrgangsstufe bestand aus drei Klassen mit 86 Schülerinnen und Schülern. Ungefähr 70 % der Schülerschaft haben einen Migrationshintergrund.

Zu Beginn der Übungsphase schätzten sich die Lernenden bezüglich der für die Klassenarbeit relevanten Kompetenzen auf dem Selbstdiagnosebogen ein. Anschließend übten sie basierend auf ihrer Einschätzung zwei Stunden selbstständig. In der dritten Stunde schätzten sie sich erneut anhand derselben Kompetenzen ein und bearbeiteten anschließend einen Selbsttest, den sie selbst anhand einer Musterlösung kontrollierten. Der Selbsttest diente neben der Überprüfung der eigenen Leistung auch zur Erhebung von Leistungsdaten zu den Kompetenzen. In der vierten Stunde konnten die Lernenden bei eventueller Fehleinschätzung noch Defizite aufarbeiten. Während der Übungsphasen wurden zusätzlich mittels eines Fragebogens psychologische Skalen zu Freude im Unterricht, Angst im Unterricht, Anstrengungs-Erfolgs-Überzeugungen und Selbstregulation des Lernens im Mathematikunterricht gemessen.

Bisher gibt es keine vergleichbaren Studien, die sich mit der Selbsteinschätzung von Lernenden beschäftigen. In der Psychologie hingegen gibt

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

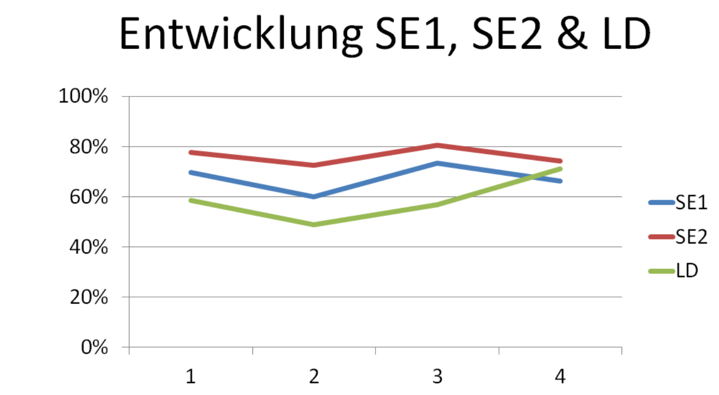
es im angloamerikanischen Bereich Forschung zu dem Verhältnis von Einschätzung und Leistung, welche mit Calibration oder auch accuracy bezeichnet wird (Stone 2000). Generell wird das Verhältnis von Selbsteinschätzung und Leistung in unterschiedlichen Inhaltsbereichen und in unterschiedlichen Settings erhoben. Dabei können die Studien danach unterschieden werden, ob das Urteil über die eigene Leistung vor oder nach der Leistung erhoben wurde, und nach dem Lernstand des Inhalts. Ist der geprüfte Inhalt noch nicht gelernt worden, spricht man von Ease-of-Learning. Befindet sich der Inhalt aktuell im Lernprozess oder wurde sein Lernprozess gerade beendet, spricht man von Judgement-of-Learning. Wurde der Inhalt bereits gelernt und ist aktuell nicht abrufbar, so wird das Urteil als Feeling-of-Knowing bezeichnet (Schneider & Artelt 2010). Die Urteile über die eigene Leistung bei der Selbstdiagnose entsprechen Judgement-of-Learning. Es gibt jedoch auch in der Psychologie keine Studien, die Selbsteinschätzung bezogen auf Kompetenzen beim Mathematiklernen untersuchen; ebenso wenig gibt es Studien, die sich mit der Entwicklung von Selbsteinschätzung beschäftigen. Für die Messung des Verhältnisses werden unterschiedliche Methoden genutzt. SCHRAW führt fünf häufig genutzte Methoden auf (Schraw 2009). Für die Analyse der in der Studie erhobenen Daten wurden der Absolute Accuracy Index (AAI) und der Bias ausgewählt. Mit dem AAI wird die Übereinstimmung von Einschätzung und Leistung gemessen und mit dem Bias die Richtung der Abweichung. Für beide Methoden werden Prozentwerte verwendet. Bei der Leistung wird der Anteil der richtig bearbeiteten Items verwendet.

Bei der Auswertung der Ergebnisse aus der Studie wurde die Selbsteinschätzung und die Leistung mittels 4-Punkt Ordinalskala modelliert, wobei 1 das schlechteste Niveau und 4 das höchste Niveau beschreibt. Außerdem wird angenommen, dass die Abstände zwischen den vier Niveaus nahezu gleichgroß sind, so dass Selbsteinschätzung und Leistung verglichen werden können. Für die Berechnung des AAI und des Bias wurden Prozentwerte genutzt.

## Ergebnisse

Die Datenauswertung ist aktuell noch nicht abgeschlossen, so dass die hier dargestellten Daten vorläufige Ergebnisse darstellen. An dieser Stelle werden die Daten von 37 Lernenden vorgestellt, bei denen maximal Daten einer Variable an einem Messzeitpunkt (MZP) fehlten. Die MZP lagen ungefähr 2 Monate auseinander. Zur groben Orientierung werden zuerst die Mittelwerte zur Selbsteinschätzung (SE1 und SE2) und Leistung (LD) der Lernenden dargestellt; anschließend einzelne Lernende im Detail betrachtet.

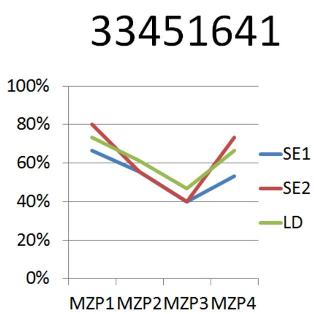
Die mittleren Werte aller Lernenden verändern sich nur leicht. Die Selbsteinschätzung (SE1 und SE2) schwankt leicht zwischen den MZP. Die Leistung hingegen steigt zum Ende hin erkennbar an. Die Differenz zwischen Selbsteinschätzung und Leistung steigt vom ersten bis zum dritten MZP an, sinkt aber am letzten MZP. Der Bias zeigt zum letzten MZP eine Tendenz der Abnahme der Überschätzung an.




| MZP | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Absolute Accuracy Index | 0,17 | 0,21 | 0,22 | 0,15 |
| Bias | +0,15 | +0,40 | +0,17 | +0,07 |

**Abbildung 1: Mittelwerte aller Lernender**

Betrachtet man die Entwicklung einzelner Lerner, sind die in der Übersicht erkennbaren Schwankungen deutlicher zu erkennen. Betrachtet man die Mittelwerte des folgenden Lernenden (33451641) so fällt auf, dass die Einschätzung und Leistung relativ nah beieinander liegen. Durch den AAI wird deutlich, dass die Einschätzung und Leistung zum Ende hin realistischer wird. Dies wird vor allem beim Betrachten der Einschätzung und Leistung bezogen auf die Kompetenzen zu den einzelnen MZP deutlich. So lagen bei MZP1 in drei Kompetenzen Fehleinschätzungen vor und bei MZP4 nur noch bei einer. Es ist auch zu sehen, dass eine differenzierte Einschätzung der Leistungsniveaus vorgenommen wird. Die hier sichtbare Entwicklung entspricht einer idealen Entwicklung, wie sie in den Erfahrungsberichten beschrieben wurde.




| | MZP1 | MZP2 | MZP3 | MZP4 |
|---|---|---|---|---|
| AAI | 0,24 | 0,28 | 0,07 | 0,02 |
| Bias | 0,20 | -0,17 | -0,20 | 0,20 |

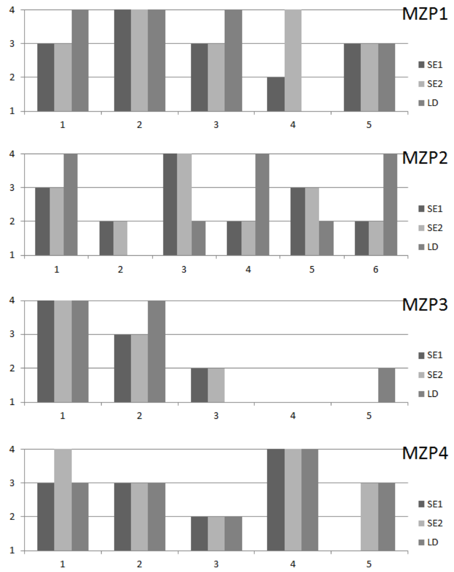
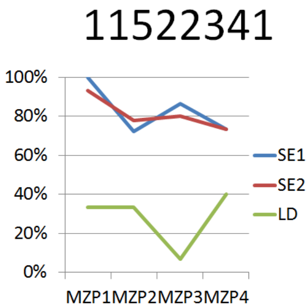



**Abbildung 2: Lernender 33451641**

Bei anderen Lernenden ist diese Entwicklung nicht erkennbar. Sie überschätzen sich durchgehend und schaffen es vereinzelt ihre Leistung bei den Kompetenzen richtig einzuschätzen. Wie beispielhaft bei 11522341 zu sehen ist, ist die Diskrepanz zwischen Einschätzung und Leistung bereits bei den Mittelwerten an den MZP sichtbar. Der AAI zeigt diese Diskrepanz auch an. Dennoch ist auch hier eine positive Entwicklung sichtbar. Im Gegensatz zu MZP1, wird die Leistung in den einzelnen Kompetenzen unterschiedlich eingeschätzt. Es kann also von einer Entwicklung zu einer passenderen Einschätzung ausgegangen werden.




| | MZP1 | MZP2 | MZP3 | MZP4 |
|---|---|---|---|---|
| AAI | 0,42 | 0,46 | 0,60 | 0,47 |
| Bias | 0,60 | 1,28 | 0,73 | 0,33 |

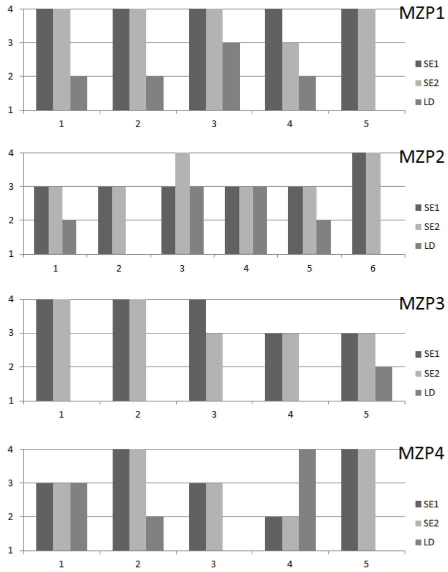



**Abbildung 3: Lernender 11522341**

Im nächsten Schritt der Datenauswertung sollen die Lernenden nach den unterschiedlichen Entwicklungsverläufen gruppiert werden. Zusätzlich sollen die gemessenen psychologischen Skalen in die Datenauswertung miteinbezogen werden.

## Literatur


Achilles, H. (2011). Selbst organisierte Prüfungsvorbereitung mithilfe von Selbsteinschätzungsbogen unterstützen. *PM. Praxis der Mathematik in der Schule*, *41*, 17–22.

Reiff, R. (2008). Selbst- und Partnerkontrolle.: Ein effizientes Verfahren zur produktbezogenen Diagnostik. *Mathematik Lehren*, *150*, 47–51.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM, 42*(2), 149–161.

Schraw, G. (2009). A conceptual analysis of five measures of metacognitive monitoring. *Metacognition and Learning, 4*(1), 33–45.

Stone, N. J. (2000). Exploring the Realtionship between Calibration and Self-Regulated learning. *Educational Psychology Review, 12*(4), 437–475.

Christine STREIT, Christian RÜEDE und Christof WEBER, Basel

# Diagnostische Kompetenz – Wie sich Experten und Novizen beim „Lesen“ von Schülerdokumenten unterscheiden

## 1. Einführung

In herkömmlichen Studien zur diagnostischen Kompetenz wurde vor allem die Fähigkeit von Lehrkräften, „Schülermerkmale und Aufgabenschwierigkeit zutreffend zu beurteilen“, untersucht (Schrader, 2009). Zunehmend geraten aber auch prozessorientierte Ansätze in den Fokus. So wird der zirkuläre Prozess des Diagnostizierens betont (Klug et al., 2013), und über die Diagnose wird auch die Förderung in den Blick genommen. Zugleich zeigen empirische Studien, dass Diagnoseleistungen fachbezogen und nicht fachübergreifend erfolgen (Lorenz & Artelt, 2009). Es ist also davon auszugehen, dass diagnostische Kompetenz eine gewisse fachdidaktische Fundierung voraussetzt. Dieses in mathematikspezifischen Diagnosesituationen benötigte „handlungsnahe Wissen“ (Riese & Reinold, 2010) wird in unserer Studie durch einen *kontrastiven Vergleich* zwischen Experten und Novizen sichtbar gemacht. Dazu wurden Vignetten entwickelt und in einem offenen Fragebogen Experten (Mathematikdidaktiker/innen) und Novizen (Lehramtsstudierende der Grundschule im 4. und 5. Semester) zur Beurteilung vorgelegt (Streit & Weber, 2013).

## 2. Zum methodischen Vorgehen

Alle Proband/inn/en bearbeiteten schriftlich vier Vignetten, wobei die Bearbeitungszeit für jede Vignette 30 Minuten betrug. Jede Vignette ist dreiteilig aufgebaut: eine Beschreibung der Ausgangslage, drei Fragen und entsprechende Schülerdokumente. In der Ausgangslage werden die Ziele der Lernstanderfassung benannt, und jede Diagnose ist an eine Weiterarbeit mit einem oder mehreren Kindern gekoppelt. Die erste Frage bezieht sich auf die Erfassung des Lernstandes, die Fragen 2 und 3 fokussieren auf die Weiterarbeit.

Zur Auswertung der Daten wurde ein mehrschrittiges induktiv-deduktives inhaltsanalytisches Vorgehen gewählt. Die initiierende Textarbeit und ihre Diskussion in der Forschergruppe machte Unterschiede vor allem auf folgenden zwei Ebenen sichtbar: in der Argumentationsstruktur im weiteren Sinne (*Wie* wird diagnostiziert?) und auf der inhaltlichen Ebene (*Was* wird diagnostiziert und in welcher Form für die Weiterarbeit genutzt?).

Die Argumentationsstruktur i.w.S. wurde wie folgt untersucht:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

– Festlegen der Kodiereinheiten: Dazu wurden mithilfe eines Leitfadens die Texte der Proband/inn/en im Fall von komplizierten Satzstrukturen vereinfacht. Die Festlegung der Einheiten wurde von zwei Kodierern durchgeführt. Die prozentuale Übereinstimmung lag bei 96%, die verbleibenden Kodiereinheiten wurden im Konsensentscheid festgelegt.
– Anschließend wurden die Kodiereinheiten nach inhaltlichen und syntaktischen Kategorisierungsregeln vier Kategorien („Beschreibungen", „Belege und Schlussfolgerungen", „Behauptungen im weiteren Sinne", „Anmerkungen auf der Metaebene") sowie mehreren Subkategorien zugeordnet.
– Die Berechnung der Kodierer-Übereinstimmung ergab für Cohens Kappa (über alle Vignetten und vier Kategorien mit Zufallsbereinigung) nach Brennan und Prediger einen Wert von 0.894.
– Zuletzt wurden die häufigkeitsbezogenen Verteilungen der Merkmale in Kreuztabellen mittels Chi-Quadrat-Tests auf statistische Signifikanz überprüft.

Im Folgenden werden die Ergebnisse zur Argumentationsstruktur im weiteren Sinne („*Wie* wird diagnostiziert?") vorgestellt.

## 3. Ergebnisse: Unterschiedliche Argumentationsstrukturen

Die Häufigkeiten der Kodiereinheiten sind in Abbildung 1 graphisch dargestellt. Die Farben entsprechen den Kategorien (gelb: „Behauptungen i.w.S.", grün: „Beschreibungen", pink: „Belege und Schlussfolgerungen", grau: „Anmerkungen auf der Metaebene"), einzelne Subkategorien sind den Beschriftungen einzelner Kreissektoren zu entnehmen.

Damit lassen sich folgende (statistisch signifikante) Unterschiede in den Argumentationsstrukturen von Experten und Novizen erkennen:

1. Während 10% der Kodiereinheiten von Experten der (grauen) Kategorie „Anmerkungen auf der Metaebene" zuzuordnen sind, machen Novizen nur äusserst selten Anmerkungen auf der Metaebene (1%). Verantwortlich dafür sind Kodiereinheiten der Subkategorie „Erkennen der Lücke". Entsprechende Ankerbeispiele lauten: „Es ist nicht zu erkennen, was die Kinder inspiriert hat" und „Nicht immer kann ich aus den Interviews auf die zugrunde liegenden Strategien rückschließen". Offenbar sind Experten im Unterschied zu Novizen in der Lage, aufgrund der in der Vignette beschriebenen Ausgangslage einzuschätzen, auf welche Aspekte der Denk- und Vorgehensweisen in den Schülerdokumenten zu schauen ist. In der Folge bemerken sie, wenn ihnen Informationen fehlen, um Aussagen über die Denk-

und Vorgehensweisen der Kinder machen zu können. Ein Ziel der Weiterarbeit kann daher sein, diese Lücken zu schließen.

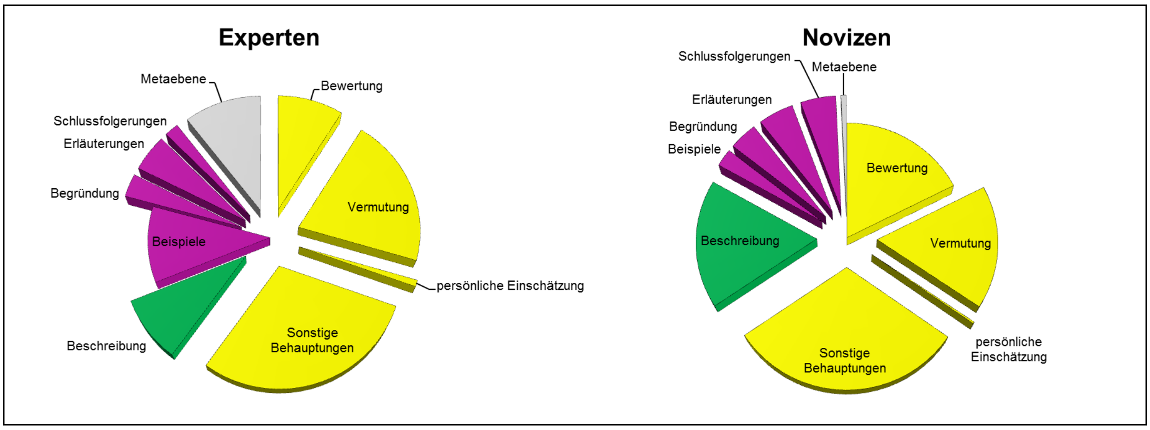



**Abb. 1: Häufigkeitsverteilung von Merkmalen in den Argumentationen von Experten und Novizen (gelb: „Behauptungen i.w.S.", grün: „Beschreibungen", pink: „Belege und Schlussfolgerungen", grau: „Anmerkungen auf der Metaebene")**

2.a) Zwar stellen auch Experten viele „Behauptungen i.w.S." (gelb) auf (60%, gegenüber 65% bei Novizen), aber sie kommen eher als Vermutungen daher. So sind ein Drittel der Behauptungen von Experten Vermutungen, bei den Novizen jedoch bloss ein Viertel. Ankerbeispiele für Vermutungen sind etwa „Auch hier wird vermutet, dass Julia zunächst die Kreise gemalt hat" und „Zahlbeziehungen scheinen bei allen Kindern mehr oder weniger verfügbar zu sein". Dies weist auf eine Einstellung zum Diagnostizieren hin, die als forschendes (Kennen-)Lernen (Horstkemper, 2006) aufgefasst werden kann: Experten verstehen Diagnose als Hinweis darauf, worauf bei der Weiterarbeit (auch noch) geachtet werden sollte.

2.b) Der Anteil der Subkategorie „Bewertungen" ist bei den Experten deutlich geringer als bei den Novizen. Insgesamt sind bei den Experten nur 9% der Kodiereinheiten bewertend, während es bei den Novizen fast doppelt so viele sind. Ankerbeispiele für Bewertungen sind „In dieser Aufgabe hat sie richtig gezählt" und „Jana kann noch nicht mit dem Zehnersystem rechnen". Zusammen mit Punkt 2.a) heisst das: *Für Experten ist Diagnostizieren eher ein forschendes Lernen, für Novizen eher ein Bewerten.*

3. In der Kategorie „Belege und Schlussfolgerungen" (21% bei Experten, gegenüber 17% bei Novizen) zeigt sich, dass Novizen eher Behauptungen aufstellen und daraus folgern, während Experten ihre Behauptungen eher begründen oder mit Beispielen belegen. Ankerbeispiele für solche „Belege mit Beispielen" sind „..., denn er sagt ‚fünfzehn geht nicht'" und „..., denn es verwendet Begriff ‚Ergänzen'", Ankerbeispiele für Schlussfolgerungen

sind „... somit hat sich die rechte Zahl um 1 verkleinert“ und „..., also stellte sie diese als Rest dar“. Indem Experten ihre Diagnosen mit Aussagen, Zeichnungen und Abbildungen belegen, die aus den Vignetten der Kinder stammen, versuchen sie diesen Oberflächenmerkmalen jene Bedeutung zuzuweisen, die sie für die Kinder gehabt haben könnte. Kurz: *Experten gelingt es, Oberflächenmerkmale in ihre Tiefenstruktur einzubinden*.

## 4. Ausblick

Obige Resultate zeigen markante Unterschiede zwischen Experten und Novizen hinsichtlich der Art und Weise, *wie* sie diagnostizieren. Es ist zu erwarten, dass sich diese Unterschiede darauf auswirken, *was* Experten und Novizen diagnostizieren und wie sie dies für die Weiterarbeit nutzen. Beispielsweise schätzen wir, dass ein Experte, der im Gegensatz zum Novizen während seiner Diagnose Informationslücken feststellt, diese in der Weiterarbeit berücksichtigen wird, indem er sie zu schließen versucht. Entsprechende Belege und weitere Erkenntnisse sind nach Abschluss der laufenden Auswertungsarbeiten zu erwarten.

## Literatur


Horstkemper, M. (2006). Fördern heißt Diagnostizieren: Pädagogische Diagnostik als wichtige Voraussetzung für individuellen Lernerfolg. In: *Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken – Können entwickeln (4–8).* Friedrich Jahresheft 24.

Klug, J., Bruder, S., Kelava, A., Spiel, C., & Schmitz, B. (2013). Diagnostic competence of teachers: A process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. *Teaching and Teacher Education*, *30*, 38–46.

Lorenz, C. & Artelt, C. (2009). Fachspezifität und Stabilität diagnostischer Kompetenz von Grundschullehrkräften in den Fächern Deutsch und Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *23*(34), 211–222.

Riese, J. & Reinhold, P. (2010). Empirische Erkenntnisse zur Struktur professioneller Handlungskompetenz von angehenden Physiklehrkräften. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaft*, *16*, 167–187.

Schrader, F. (2009). Anmerkungen zum Themenschwerpunkt Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift Pädagogische Psychologie, 23*(34), 237–245.

Streit, C. & Weber, C. (2013). Vignetten zur Erhebung von handlungsnahem, mathematikspezifischem Wissen angehender Grundschullehrkräfte. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (986–989). Münster: WTM-Verlag.

Nina STURM, Landau

# Die Rolle selbstgenerierter Repräsentationen beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben und Fördern von „problem representation skills“

Beim Lösen kniffliger Textaufgaben stoßen Grundschulkinder häufig auf Problembarrieren. Sie stehen vor der Aufgabe lösungsrelevante Informationen und ihre Relationen zu identifizieren und sie im zweiten Schritt neu miteinander zu verknüpfen (Schukajlow, 2011). Das Abrufen der Lösung aus dem Gedächtnis ist durch die anspruchsvolle mathematische Struktur der Problemstellungen nicht ohne Weiteres möglich (Hussy, 1993). Problemhaltige Textaufgaben zählen zu den Aufgaben, welche die Lösenden herausfordern neue Wege zu gehen und das Erreichen der Zone der nächsten Entwicklung ermöglichen können (Vygotskij, 2002).

Externe Repräsentationen können, insbesondere wenn sie selbst konstruiert und für die Lösungsfindung genutzt werden, das Überwinden von Problembarrieren ermöglichen. Einerseits entlastet das Verschriftlichen der individuellen Gedankengänge das Arbeitsgedächtnis; die Aufgabenbedingungen müssen nicht mehr präsent gehalten werden, wodurch Kapazität für den Lösungsprozess geschaffen werden (Schnotz et al., 2010). Andererseits fungieren sie als Gedächtnis-Trigger (Ohlsson, 1992) und aktivieren Wissen, wenn der Anfangszustand mit einer passenden Repräsentation dargestellt wird. Wird dieser (noch) nicht treffend repräsentiert, so hat der Lösende die Möglichkeit seine Repräsentation zu verändern.

Trotz des hohen Potentials externer Repräsentationen konstruieren Grundschulkinder in den seltensten Fällen von sich aus externe Repräsentationen (Hohn, 2012). Allein eine Konstruktion ist jedoch noch kein Garant für den Lösungserfolg. Vielmehr werden Repräsentationen mit adäquaten Strukturen benötigt, welche es ermöglichen den Gegenstand korrekt zu erfassen und einfache Lösungsschritte anzuwenden (Fehse, 2001; Rasch, 2001). Gelingt die Problemlösung trotz externer Repräsentationen nicht, so lässt sich dies größtenteils auf eine fehlerhafte Repräsentation der Problemstruktur und nicht auf Berechnungsfehler zurückführen (Fehse, 2001). Grundschulkinder mangelt es an Erfahrungen, sie sind hinsichtlich der Konstruktion von Repräsentationen Novizen und benötigen Unterstützung, um in Abhängigkeit von dem gerade zu lösenden Problem entscheiden zu können, welche Repräsentationen hilfreich sind (Cox,1999). Diesbezüglich wird die Fokussierung von „problem representation skills“ anstelle von „symbol manipulation skills“ im Problemlöseanfangsunterricht empfohlen (Brenner et al., 1997). Die Autoren warnen davor zu schnell mit dem Rechnen zu

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

beginnen, ohne sicherzustellen, dass das Problem verstanden wurde. Es bleibt festzuhalten, dass Kinder beim Externalisieren ihrer mentalen Modelle Unterstützung benötigen und diesbezüglich Trainingsbedarf besteht.

In diesem Beitrag wird die Forschungsfrage, ob Drittklässler, die beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben trainiert wurden, externe Repräsentationen wie Tabellen, Zeichnungen, Rechnungen und begründende Texte zu konstruieren, nach dem Training höhere problem representation skills besitzen. Ferner wird der Fragestellung nachgegangen, in wie fern die einzelnen Gruppen hinsichtlich ihrer Kompetenzentwicklung divergieren.

Im vorliegenden Pre-Post-Test-Kontrollgruppen-Design (vgl. Sturm, 2014) werden vier Gruppen unterschieden:

- *trainierte Klassen* mit kommunikativen Zweiersettings (T+KS)

  und ohne kommunikative Zweiersettings (T)
- *nicht trainierte Klassen* mit kommunikativen Zweiersettings (KS)

  und ohne kommunikative Zweiersettings (Kontrollgruppe, KG)

Erhebungsinstrument der problem representation skills war ein selbst konstruierter Test, der aus drei problemhaltigen Textaufgaben dreier Aufgabengruppen bestand (Vgl. Sturm, 2014; Sturm & Rasch, im Druck). Die Tests der Messzeitpunkte 2 und 3 umfassten strukturgleiche Aufgaben.

Als Analyseinstrument wurde die fünfstufige „Focused Holistic Scoring Point Scale“ von Charles, Lester & O´Daffer (1987) adaptiert eingesetzt. Jede Aufgabe wurde zunächst mit 0, 1, 2, 3 oder 4 bepunktet. Anschließend folgten für den Pre-, Post- und Follow-up-Test gesonderte Mittelwertberechnungen aus den drei zu bearbeitenden Textaufgaben.

| | | Pretest | | Posttest | | Follow-up-Test | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gruppe | *n* | *M* | *SD* | *M* | *SD* | *M* | *SD* |
| KG | 79 | .17 | .34 | .97 | .99 | .95 | 1.04 |
| KS | 88 | .42 | .63 | 1.48 | 1.22 | 1.54 | 1.17 |
| T | 93 | .50 | .77 | 2.23 | 1.23 | 2.23 | 1.31 |
| T+KS | 91 | .43 | .62 | 2.34 | 1.03 | 2.60 | 1.13 |

***Tabelle*. KG = Kontrollgruppe, KS = kommunikative Settings, T = trainierte Klassen, T+KS = trainierte Klassen mit kommunikativen Settings.**

Rein deskriptiv spiegelt sich in allen Gruppen vom Pre- zum Posttest ein Anstieg der problem representation skills wider (vgl. Tabelle, Abbildung). Die größte Steigerung war hypothesenkonform in den trainierten Klassen mit kommunikativen Settings (T+KS) zu beobachten. Der Kompetenzzuwachs lag hier bei 1,9 Punkten. Gefolgt von den trainierten Klassen ohne kommunikative Settings (T), welche einen Zuwachs von 1,7 Punkten erzielten. Auch in den nicht trainierten Klassen gab es einen Zuwachs, jedoch fiel dieser kleiner aus (KS um 1,1 Punkte, KG um 0,8 Punkte).

Die mixed ANOVA ergab einen signifikanten Haupteffekt des Faktors Gruppe ($F$ (3, 347) = 33.05, $p$ < .001), einen signifikanten Haupteffekt des Faktors Zeit ($F$ (1.99, 691.23) = 440.99, $p$ < .001) und einen signifikanten Interaktionseffekt der Faktoren Gruppe und Zeit ($F$ (5.98, 691.23) = 18.62, $p$ < .001). Aufgrund der unterschiedlichen Ausgangsvoraussetzungen zu Messzeitpunkt 1 wird der signifikante Haupteffekt der Gruppe nicht interpretiert. Geplante orthogonale Kontraste decken auf, dass sich die KG bezüglich ihres Kompetenzzuwachses von Pre- zu Posttest signifikant von den Experimentalgruppen ($t$ (351) = 5.90, $p$ < .001, $r$ = .30) und die KS sich von den trainierten Klassen ($t$ (351) = 5.663, $p$ < .001, $r$ = .29) unterscheiden. Ferner zeigen weitere geplante orthogonale Kontraste signifikante Unterschiede im Kompetenzzuwachs von Pre- zu Posttest zwischen trainierten und nicht trainierten Klassen ($t$ (351) = 8.10, $p$ < .001, $r$ = .40).

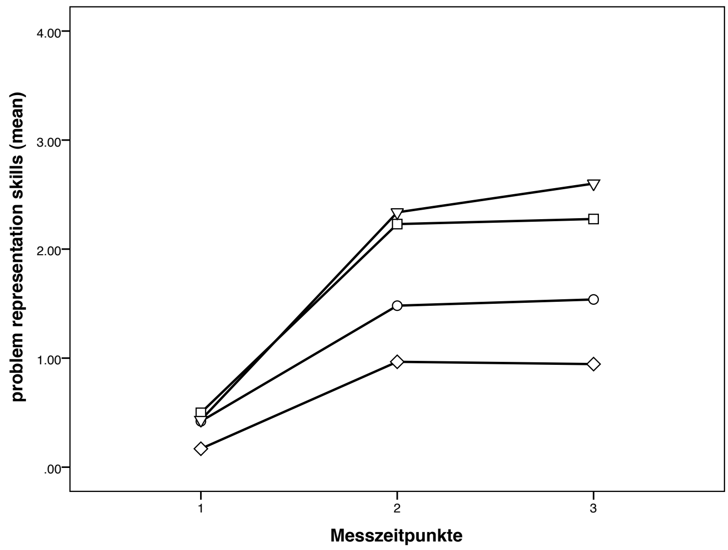



***Abbildung.*** **◇ = KG, ○ = KS, □ = T, ▽ = T+KS**

Weitere Gruppenunterschiede wurden nicht signifikant.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass nach der zwölfwöchigen Intervention in allen Gruppen ein signifikanter Kompetenzzuwachs vorhanden war. Dabei erreichten trainierte Klassen höhere problem representation skills als nicht trainierte Klassen. Hieraus kann geschlossen werden, dass das Thematisieren verschiedenartiger Herangehensweisen wie das Rechnen, Zeichnen, Tabellieren und Begründen heterogenen Lerntypen beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben gerecht wird. Unterschiedliche und vielfältige Lösungsmöglichkeiten helfen Novizen beim Aufbau eines Repräsentationsrepertoires und bei der anfänglich schwierigen Unterscheidung zwischen Repräsentationen adäquater und inadäquater Struktur. Das Training sensibilisiert die Grundschulkinder für unterschiedliche Zugänge, so dass sie bei der jeweils zu bearbeitenden Aufgabe immer wieder neu entscheiden können, welche Repräsentationen ihnen zur erfolgreichen Problemlösung verhelfen.

## Literatur


Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Smith Reed, B., & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra. *American Educational Research Journal*, 39 (4), 663-689.

Cox, R. (1999). Reprasentation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction, 9*, 343-363.

Charles, R., Lester, F. K. & O´Daffer, P. G. (1987). How to evaluate progress in problem solving. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fehse, E. (2001). *Unterstützung von Kohärenzbildung beim kooperativen und individuellen Lernen mit externen Repräsentationen.* Freiburg im Breisgau: Universitätsbibliothek. Verfügbar unter: http://www.freidok.uni-freiburg.de/

Hohn, K. (2012). Gegeben, gesucht, Lösung? Selbstgenerierte Repräsentationen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben (Dissertation, Universität Koblenz-Landau). Verfügbar unter: http://d-nb.info/1028021070/34.

Hussy, W. (1983). *Denken und Problemlösen* [Thinking and Problem Solving]. Stuttgart, Germany: Kohlhammer.

Ohlsson, S. (1992). Information processing explanations of insight and related phenomena. In M. Keane, K. Gilhooly (Eds.), *Advances in the psychology of thinking* (pp. 1-44). London: Harvester-Wheatsheaf.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hildesheim: Franzbecker.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A. & Rasch, R. (2010). Creative Thinking and Problem Solving with Depictive and Descriptive Representations. In L. Verschaffel, E. De Corte, J. Elen & T. de Jong (Eds.), *Use of External Representations in Reasoning and Problem Solving* (pp. 11-35). Amsterdam: Elsevier.

Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur.* Münster: Waxmann.

Sturm, N. (2014). Sind Repräsentationen beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben lösungsunterstützend? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1191-1194). Münster: WTM-Verlag.

Sturm, N. & Rasch, R. (in press). Forms of representation for solving mathematical word problems - development of an intervention study. In W. Schnotz, A. Kauertz, H. Ludwig, J. Pretsch, & A. Müller (Hrsg.), *Multiple Perspectives on Teaching and Learning.*

Vygotskij, L. S. (2002). *Denken und Sprechen*. Weinheim, Germany: Beltz.

Alexandra STURM, Freiburg; Andreas EICHLER, Kassel

# Überzeugungen verändern mittels Medienberichte und 'kritischer Fragen'? Eine Interventionsstudie

Statistik spielt im alltäglichen Leben eine große Rolle. Dennoch messen viele Schüler und Erwachsene ihr weder eine hohe Bedeutung für das eigene Leben noch für die Gesellschaft bei. Mit einer anwendungsorientierten Intervention zum Satz von Bayes wird versucht, diese Überzeugungen bei SchülerInnen und Studierenden zu verändern. Im Rahmen dieses Beitrags werden Elemente der Intervention und erste empirische Ergebnisse vorgestellt.

## 1. Theoretischer Rahmen

Medientexte und andere Informationsquellen, die statistische Informationen enthalten, sind in unserem Alltag nahezu omnipräsent. Daher wird etwa vom Mathematical Sciences Education Board der Umgang mit quantitativen Daten als unabdingbare Kompetenz angesehen (Mathematical Sciences Education Board, National Research Council [MSEB-NRC], 1990). Oftmals scheinen Erwachsene diese Kompetenz jedoch nicht zu besitzen (Gal, 2004). Problematisch ist hierbei, dass häufig nicht einmal die Notwendigkeit gesehen wird, mit Statistik umgehen zu können (Eichler, 2008). Diese Erkenntnisse sind besonders besorgniserregend vor dem Hintergrund, dass SchülerInnen bzw. Studierende, welche ihre Statistikkurse mit negativen Überzeugungen verlassen, das gelernte Wissen aller Wahrscheinlichkeit nach nie anwenden werden (Schau & Emmioglu, 2012).

Die bereits genannten Facetten, zum einen das Wissens zu besitzen, um mit quantitativen Daten umgehen zu können, zum anderen die dispositionale Seite, statistisches Wissen anwenden zu wollen, also auch die Notwendigkeit hierfür zu sehen, können mit dem Konstrukt der Statistical Literacy beschrieben werden (Gal, 2004).

Um die Frage zu beantworten, ob sich neben der Wissensfacette auch die dispositionale Facette der Statistical Literacy (nachhaltig) fördern lässt, wurde eine Intervention zum Satz von Bayes entwickelt. Es wird die Frage untersucht, ob sich statistikbezogene Überzeugungen dahingehend verändern lassen, dass Studierende und SchülerInnen der Statistik eine höhere Bedeutung beimessen. Dabei umfasst dies sowohl das Erkennen der gesellschaftlichen und der persönlichen Relevanz der Statistik als auch die positive Beeinflussung des individuellen Statistik-Interesses.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 2. Design

Um potentielle Veränderungen in den statistikbezogenen Überzeugungen messen zu können, wurde eine zweistündige Intervention zum Satz von Bayes entwickelt und es wurde als Untersuchungsdesign ein Pre-Post-Follow-up-Design gewählt, sodass jeder Proband an insgesamt drei Messzeitpunkten teilgenommen hat. Zu allen drei Messzeitpunkten wurden sowohl Wissenselemente als auch Überzeugungen erhoben. Zur Überprüfung längerfristiger Effekte wurde zwei Wochen nach der Intervention eine Follow-up-Messung durchgeführt. Die in diesem Projekt untersuchte Stichprobe umfasst neben SchülerInnen (11. Klasse, Gymnasium) auch Studierende verschiedener Disziplinen. Diese breite Stichprobenauswahl begründet sich darin, dass Mathematikstudierende u.U. durch ihren mathematischen Bezug durch die Intervention angesprochen werden, während Studierende der Gesundheitspädagogik eine große inhaltliche Relevanz, gerade im Hinblick auf ihre zukünftigen Berufsfelder, sehen könnten. Von Interesse ist ferner aber auch, ob die Intervention bei Studierenden ohne direkten mathematischen oder beruflichen Bezug Effekte hat. Neben zwei Interventionsbedingungen, die sich lediglich hinsichtlich der eingesetzten Visualisierung (Baumdiagramm, Einheitsquadrat) unterschieden, wurde eine Warte-Kontrollgruppe gebildet, welche erst nach der Follow-up-Messung die Inhalte der Intervention erhalten hat.

Als Messinstrument wurde zur Erhebung der Überzeugungen ein Fragebogen mit einer 6-stufigen Likert-Skala eingesetzt, der u.a. 2 Subskalen des SATS-36© (Schau et al., 1995), des Survey of Attitudes Towards Statistics, beinhaltet. So wurde eine deutsche Version der Subskala „value“ eingesetzt, um die Bedeutungszuschreibung gegenüber Statistik zu messen. Das individuelle Statistikinteresse wurde mittels der Subskala „interest“ erhoben. Weitere Konstrukte, die erhoben wurden, waren das Mathematikinteresse, das mathematische Selbstkonzept sowie das mathematische Weltbild (Grigutsch, 1995).

## 3. Eine Intervention zum Satz von Bayes

Als Thema der Intervention wurde der Satz von Bayes gewählt. Dies begründet sich darin, dass dieser für die meisten Studierenden respektive SchülerInnen potentiell etwas Neues darstellt und es Medienberichte, wie sie im Alltag vorkommen, zu diesem Thema gibt. Drittens existieren zahlreiche Forschungsergebnisse, wie dieses Thema in kurzer Zeit gelehrt werden kann. So ist eine Inhaltsvermittlung in kurzer Zeit möglich (Sedlmeier & Gigerenzer, 2001) und es gibt etliche anwendungsorientierte Beispiele (u.a. Wassner, 2004), die jedoch meist größere Lehreinheiten und damit mehr Zeit in Anspruch nehmen als es bei dieser Kurzintervention gewünscht war.

Es wurden drei Beispiele zu medizinischen Testverfahren gewählt, die hinsichtlich der Komplexität anstiegen. Als einführendes Beispiel wurde das Mammographie-Screening gewählt, bei dem es vorwiegend um das Kennenlernen der Problematik positiver Testergebnisse und das Verständnis der jeweiligen Visualisierung ging. Um sicherzustellen, dass die Informationen aus den Visualisierungen entnommen werden konnten, wurden Fragen zur Visualisierungen gestellt (Curcio, 1989). Ein Bluttest, mit welchem bereits in der Schwangerschaft Trisomie 21 erkannt werden kann, bildete das zweite inhaltliche Beispiel. In diesem Rahmen wurde thematisiert, welchen Einfluss das Alter einer Schwangeren auf den positiven prädiktiven Wert (P(krank|positiv)) hat. Als abschließendes Beispiel wurde die Zulassung des HIV-Schnelltest in den USA gewählt, welche zur Folge hatte, dass sich Menschen von nun an privat – ohne ärztliche Aufsicht – auf HIV testen können.

Zu allen drei Themen wurden Medienberichte und zu zwei davon auch noch kurze Videosequenzen in die Intervention integriert, um den Bezug zum Alltag und die Bedeutung für die Gesellschaft hervorzuheben und die Thematik somit realitätsnah und nicht als eingekleidete Aufgabe wirken zu lassen. Um kritische Fragen („Was wäre, wenn die vom Hersteller angegebene Testgüte nicht der eigentlichen entspräche?“) zu diskutieren und den rechnerischen Aufwand gering zu halten, wurde ferner mithilfe von Software die Variation der Testeigenschaften gesteuert. Die zweistündige Einheit wurde so konzipiert, dass möglichst wenig Vorwissen voraussetzt wurde. Auf symbolische Darstellungen und Fachtermini (z.B. Sensitivität, Spezifität, bedingte Wahrscheinlichkeit) wurde verzichtet, da die Intervention in keinen regulären Statistikkurs eingebettet war.

Auch wenn viele Studien gezeigt haben, dass die Verwendung von natürlichen Häufigkeiten der Verwendung relativer Häufigkeiten überlegen ist (vgl. u.a. Sedlmeier & Gigerenzer, 2001), wurden beide Informationsformate verwendet. Dies erhöht gewiss die Schwierigkeit, entspricht aber der im Alltag üblichen Informationsrepräsentation durch relative Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten.

## 4. Erste Ergebnisse

Erste Ergebnisse liegen bis dato aus einer Erhebung mit 117 Studierenden der Gesundheitspädagogik vor. Es zeigte sich, dass die eigenesetzten SATS-Subskalen gute Reliabilitäten aufweisen. So lag Cronbach‘s alpha bei den Skalen „value“ bzw. „interest“ zu allen Messzeitpunkten über 0,8.

Ferner weisen erste Datenanalysen auf einen positiven Einfluss der Intervention auf die statistikbezogenen Überzeugungen hin. So scheint das Statistikinteresse in den Interventionsgruppen positiv beeinflusst worden zu sein. Zur Bedeutung der Statistik zeigten sich bei der Post-Messung positive Effekte, die jedoch im Follow-up-Test keinen Bestand zeigten.

## 5. Diskussion und Ausblick

Wie bereits aufgezeigt, herrscht eine große Notwendigkeit, statistikbezogene Überzeugungen zu fördern. Mit dem hier dargestellten Ansatz, welcher sich zum einen durch eine starke Betonung realer Kontexte, zum anderen durch eine starke Betonung von Visualisierungen zur Strukturierung der quantitativen Informationen auszeichnet, wird versucht, auch die dispositionale Facette zu fördern. Erste Ergebnisse aus einer Erhebung mit Gesundheitspädagogen, die jedoch bisher nur unter Vorbehalt zu betrachten sind, deuten darauf hin, dass dieser Ansatz erfolgsversprechend sein kann. Weitergehende Analysen sowie die noch ausstehenden Erhebungen mit Mathematikstudierenden, Deutschstudierenden sowie SchülerInnen werden dann weitere Schlüsse zulassen.

## Literatur


Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension. Elementary and middle school activities*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Eichler, A. (2008). Teachers' Classroom Practice and Students' Learning. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Hrsg.), *Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.* Monterrey: ICMI and IASE.

Gal, I. (2004). Adults' Statistical Literacy: Meaning, Components, Responsibilities. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Hrsg.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (S. 47–78). Dordrecht: Kluwer.

Grigutsch, S. (1995). Mathematik-Bilder bei Schülern: Struktur, Entwicklung, Einflußfaktoren. *Beiträge zum Mathematikunterricht,* 198–201.

Mathematical Sciences Education Board, National Research Council [MSEB-NRC]. (1990). *Reshaping school mathematics: A philosophy and framework for curriculum*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Schau, C. & Emmioglu, E. (2012). Do Introductory Statistics Courses in the United States Improve Students' Attitudes? *Statistics Education Research Journal, 11* (2), 86–94.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of Experimental Psychology: General, 130* (3), 380–400.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens. Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen*. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Petra Carina TEBAARTZ, Gießen

# Eigenproduktionen zu Beweisaufgaben von Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Mathematik-Olympiade

Dieser Beitrag gibt einen Einblick in die Heterogenität von Eigenproduktionen zu Beweisaufgaben durch Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Mathematik-Olympiade. 216 Wettbewerbsteilnehmende in den Klassenstufen 5 bis 13 wurden im Rahmen der mathematischen Sommerakademie 2013 des Landesverbands Mathematikwettbewerbe NRW e.V. zum Beweisen aufgefordert. In den unteren Klassenstufen sind die Unterschiede besonders differenziert. Deshalb werden, nach einer kurzen Einführung des theoretischen Rahmens, exemplarisch Eigenproduktionen von Fünftklässlern analysiert und mögliche Bedingungsfaktoren der heterogenen Leistungen ausgeführt.[1]

## Theoretischer Rahmen zur Beschreibung von Schülerproduktionen zu Beweisaufgaben

Im Folgenden werden unter dem Begriff „Beweisaufgaben“ ausschließlich Interpolationsaufgaben verstanden. Die Bearbeitungen solcher Aufgaben werden auf die verwendeten Schlussweisen sowie deren Vollständigkeit und Korrektheit untersucht. Dafür wird unterschieden, ob ein begründender Ansatz erkennbar ist oder ob die zu zeigende Aussage ausschließlich induktiv überprüft wird. Mit dem Ausdruck „Begründung“ soll dabei hervorgehoben werden, dass der Grad an formalsprachlicher Darstellung nicht berücksichtigt wird und zudem neben strengen Beweisen auch andere Begründungsformen mitgedacht sind. Um die vorliegenden Begründungen näher zu beschreiben, wurden die Argumentketten der Probanden zunächst auf Grundlage der verwendeten Wissensbasen zu verschiedenen fachinhaltlichen Herangehensweisen gruppiert und mithilfe des Schemas von Toulmin (1996) rekonstruiert. Für jede dieser Herangehensweisen wurde anschließend festgelegt (definiert), welche Argumente erwartet werden, um eine Begründung als vollständig und korrekt zu bezeichnen. Hierauf aufbauend werden an den Schülerdokumenten die Vollständigkeit und Korrektheit der Begründungen erfasst. Außerdem wird unterschieden, ob die Schlussweise in einer Begründung deduktiv ist oder zwischen induktiv und deduktiv liegt. Dabei ist Letzteres der Fall, wenn eine Deduktion einer Argumentkette an einem Spezialfall vollzogen wird.

[1] Die theoretischen Grundlagen, das methodische Vorgehen und weitere Ergebnisse eines Auszugs der schriftlichen Befragung werden in Tebaartz und Lengnink (in Druck) vorgestellt.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Eigenproduktionen von Fünftklässlern

| Aufgabe 1: Teilbarkeit<br>Zeige: *Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch drei teilbar.* | |
|---|---|
| Bearbeitung 1: fehlerhafte induktive Prüfung<br>3+4+5 = 12 = 12 : 3 = 4 | Bearbeitung 4: deduktive, unvollständige und fehlerhaft Begründung<br>weil wenn ABC +1 ergibt A=B=C |
| Bearbeitung 2: zwischen induktiv und deduktive, unvollständige und fehlerhafte Begründung<br>123 = 6 6 : 3 = 2<br>234 = 9 : 3 = 3<br>345 = 12 : 3 = 4<br>usw...<br>Die Zahl wird bei jeder Ziffer um 1 größer.<br>1 2 3 = 6<br>+1 +1 +1 = 3<br>2 3 4 = 9<br>Insgesamt (für jede Stelle sind das insgesamt 3. | Bearbeitung 5: deduktive, vollständige und korrekte Begründung<br>1+2+3 = 6 6 : 3 = 2 2+3+4 = 9 9 : 3 = 3 3+4+5 = 12 12 : 3 = 4<br>Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist durch 3 teilbar, da die erste Folge. 0+1+2=3 3:3=1 durch 3 teilbar ist. In jeder nächster Zahlenfolge kommen immer 3 dazu, da alle Zahlen 1 größer werden. So sind alle Folgen durch 3 teilbar<br>11+12+13 = 36 36 : 3 = 12 |
| Bearbeitung 3: deduktive, unvollständige und korrekt Begründung<br>3+4+5 = 12 12 : 3 = 4<br>12+13+14 = 39 39 : 3 = 13<br>7+8+9 = 24 24 : 3 = 8<br>16+17+18 = 51 51 : 3 = 17<br>Es funktioniert bei jeder Zahlenfolge da jede dritte Zahl durch drei teilbar ist und wenn bei den drei Zahlen eine Zahl vorkommt die durch drei teilbar ist, was immer der Fall ist, so entsteht wieder eine durch drei teilbare Zahl. | Bearbeitung 6: deduktive, vollständige und korrekte Begründung<br>$n \in \mathbb{N}$<br>$\frac{n + n+1 + n+2}{3}$<br>$\Leftrightarrow \frac{3n+3}{3}$<br>Die Summe 3 aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer 3n+3. Jede natürliche Zahl, die mit 3 multipliziert wird, ist auch durch 3 teilbar, denn das Produkt hat mindestens einen Faktor 3. Da jede dritte Zahl durch drei teilbar ist, ist die Zahl immernoch durch 3 teilbar, wenn wir 3 addieren. |

**Abb. 1: Aufgabe 1, sechs Bearbeitungen von Fünftklässlern**

In der schriftlichen Befragung sollte u.a. bewiesen werden, dass die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch drei teilbar ist. Abb. 1 zeigt sechs Eigenproduktionen der insg. 24 Fünftklässler. In Bearbeitung 1 wird die Behauptung ausschließlich am Beispiel der aufeinanderfolgenden Zahlen 3, 4 und 5 überprüft. Dabei enthält die numerische Darstellung einen Fehler, der darauf hindeutet, dass das Gleichheitszeichen prozedural, d.h. als Ergebniszeichen, gedeutet wurde. In Dokument 2 wurde aus den Beispielen heraus eine Begründung für die Richtigkeit der zu zeigenden

Aussage entwickelt, wobei der Ausdruck „usw.“ die Allgemeingültigkeit der Überlegungen andeutet. Allerdings ist die Begründung nicht korrekt, weil z.B. anstatt der Addition „1+2+3“ die Zahl „123“ aufgeschrieben wurde. Auch der Satz „Die Zahl wird bei jeder Ziffer um 1 größer“ deutet eine nicht vollständig korrekte Interpretation des Ausdrucks „aufeinanderfolgende Zahlen“ an. Bei Bearbeitung 3 ist die Schlussweise deduktiv. Jedoch ist fraglich, ob der Proband erklären könnte, warum aus der Teilbarkeit durch drei einer der aufeinanderfolgenden Zahlen die zu zeigende Aussage folgt. Demgegenüber ist die Grundidee in Bearbeitung 4 vollständig repräsentiert und es liegen primär Schwierigkeiten in der sprachlichen Darstellung vor. Der Pfeil mit der Anmerkung „+1 abgibt“ verdeutlicht, dass von einer Zahl eins subtrahiert und zu einer anderen Zahl addiert wird. Berücksichtigt man die Voraussetzung, dass es sich um drei aufeinanderfolgende Zahlen handeln soll, und (offensichtlich) C für die größte der drei Zahlen steht, so ist plausibel, dass A = B = C – beziehungsweise mathematisch korrekt (A+1) = B = (C–1) – gilt. Angesichts dieser Beweisführung könnte der Schüler die zu zeigende Teilbarkeit als offensichtlich angesehen haben. Die letzten beiden Bearbeitungen (Dokumente 5 und 6) sind deduktive, korrekte und vollständige Begründungen, die schließlich auf große Unterschiede in der Herangehensweise und im Grad an formalsprachlicher Ausführung auch zwischen Bearbeitungen innerhalb der gleichen Kategorien hinweisen. In Bearbeitung 6 werden Fachausdrücke wie „natürliche Zahl“ und „Produkt“ sowie die Variable n, Terme und das mathematische Symbol für „Element von“ verwendet. Die Schülerin scheint mit der Termdarstellung bereits über ein „fertiges Konzept“ für solche Aufgaben zu verfügen. In Bearbeitung 5 ist die Darstellung weitaus umgangssprachlicher. Der Schüler scheint zudem aus den Beispielen heraus, insbesondere der Beobachtung der Invariante („In jeder nächsten Zahlenfolge kommen immer 3 dazu“), die Beweisidee entwickelt zu haben.

## Mögliche Bedingungsfaktoren

Die Bearbeitungen in Abb. 1 zeigen auf, dass die Leistungen der Fünftklässler teils weit über die Vorgaben im Kernlehrplan NRW hinausgehen, wonach Lernende am Ende der sechsten Klassenstufe Aussagen intuitiv begründen können sollen (MSW, 2007). Dies scheint bei einigen Probanden mit einer Förderung in Mathematik zusätzlich zum Regelunterricht zusammenhängen. Während z.B. fünf der elf vor der Erhebung noch nicht geförderten Fünftklässler die zu zeigende Aussage ausschließlich überprüft haben (siehe Abb. 1, Bearbeitung 1), trifft dies nur auf einen der 13 Probanden zu, die bereits gefördert wurden, etwa in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft in ihrer Schule. Insbesondere deutet die Datenlage an, dass weit über die curricularen Vorgaben hinausgehende Leistungen eine intensive Förderung in Mathematik voraussetzen. Beispielsweise hat die Autorin der Bearbeitung 6 in Abb. 1 angegeben, einmal in der Woche Mathematikunterricht von einer Studentin zu erhalten. Neben der unterschiedlichen Teilhabe an Förderangeboten kann die Heterogenität der Schülerproduktionen u.a. damit zusammenhängen, dass in der Untersuchungspopulation ein breit gefächertes Spektrum an Leistungen vorliegt, von Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade 2012/13, die nur die Schulrunde bestritten haben, bis hin zu Preisträgern der Bundesrunde. Da bei der Mathematik-Olympiade mit steigender Klassen- und Wettbewerbsstufe tendenziell mehr und komplexere Beweise gefordert werden, sind v.a. ab der siebten Klassenstufe bei mehreren Aufgaben deutliche Differenzen zwischen Bearbeitungen unterschiedlich erfolgreicher Probanden erkennbar.

## Diskussion

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung deuten an, dass zwischen Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade in der gleichen Klassenstufe deutliche Unterschiede in den Bearbeitungen von Beweisaufgaben bestehen, die insb. ab der Klassenstufe 7 mit unterschiedlichem Wettbewerbserfolg einhergehen und durch die Teilnahme einiger Lernender an Förderangeboten im mathematischen Bereich verstärkt werden. Hierbei ist v.a. zu beachten, dass es sich nur um eine explorative Studie handelt. Zudem können weitere Faktoren wie der individuelle Mathematikunterricht der Probanden die Bearbeitung der Beweisaufgaben beeinflusst haben (siehe auch Reiss, Hellmich & Thomas, 2002). Jedenfalls machen die Ergebnisse Mut, Förderkomponenten zur Beweiskompetenz von jungen mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern zu entwickeln.

## Literatur


Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen.* Verfügbar unter http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/ upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf [05.02.2015].

Reiss, K., Hellmich, F., Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen.* 45. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik (S. 51–64). Weinheim: Beltz.

Tebaartz, P. C. & Lengink, K. (in Druck). Was heißt mathematischer Beweis? – Realisierungen in Schülerproduktionen. In A. Budke, A. Creyaufmüller, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen*. Münster: Waxmann.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten*. Weinheim: Beltz.

Alexandra THIEL-SCHNEIDER, Dortmund

# Wie gelingt die Verbindung unterschiedlicher Perspektiven auf exponentielles Wachstum?

Der Begriff des exponentiellen Wachstums bildet einen zentralen Aspekt für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. Der Aufbau eines tragfähigen Verständnisses exponentieller Wachstumsprozesse ist bedeutend für die Weiterentwicklung des Verständnisses exponentieller Funktionen in der Sekundarstufe I und II. Ergebnisse im Rahmen von Design-Experimenten zeigen (vgl. Thiel-Schneider 2014), dass eine typische Schwierigkeit für Schüler/innen in der inhaltlichen Unterscheidung von ganzzahligen und nicht ganzzahligen Wachstumsfaktoren liegt. Der vorliegende Beitrag konzentriert sich darauf aufzuzeigen, wie eine Verbindung unterschiedlicher Perspektiven auf exponentielles Wachstum mit Hilfe einer Intervention mit einem geeigneten Anschauungsmittel gelingen kann.

## 1. Spezifiziertes Forschungsinteresse und methodologischer Zugang

Lernende neigen dazu, zuvor entwickelte lineare Konzepte auf exponentielle Zusammenhänge zu übergeneralisieren und exponentielle Wachstumsprozesse falsch zu deuten (vgl. Ebersbach & van Dooren 2008). Dem gegenüber stehen Herausforderungen wie Kovariation und Änderungsraten, die bei exponentiellem Wachstum eine zentrale Rolle spielen. Lernende, die den Begriff des exponentiellen Wachstums noch nicht kennengelernt haben, zeigen drei intuitive Vorstellungen von exponentiellen Änderungsraten: a) multiplikativ, (b) additiv und (c) proportional new to old, zu dem vorherigen Wert wird ein proportionaler Anteil davon, hinzuaddiert (vgl. Confrey & Smith 1995). Diese und weitere Studien zeigen (vgl. Ellis et al. 2012), dass eine Fokussierung auf den Kovariationsaspekt einen effektiven Ansatz zur Vorstellungsentwicklung bei exponentiellem Wachstum leisten kann. Weitere differenzierte Studien zur Entwicklung von Lernprozessen bei exponentiellem Wachstum, z.B. wie unterschiedliche Perspektiven auf exponentielles Wachstum gelingen können, sind bislang wenig vertreten (vgl. Ellis 2012). Deshalb befasst sich diese Studie im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung (Hußmann et al. 2013) u.a. mit der Erforschung von Lernprozessen zur Begriffsbildung exponentieller Funktionen. Es soll analysiert werden, welche Gelingensbedingungen beim Vorstellungsaufbau unterstützen und welche Hürden auftreten können.

## 2. Methodische Umsetzung

Die Erhebung der Daten findet in drei Zyklen von Designexperimenten (vgl. ebd) statt, größtenteils in Form von klinischen Interviews. Die Analy-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

se der Begriffsbildungsprozesse erfolgt mit Hilfe der Theorie der inferentiellen Begriffsbildung (vgl. Hußmann 2013). Auf der Entwicklungsebene wurde im Rahmen des Projektes KOSIMA (vgl. Hußmann et al. 2011) ein Lehr-Lernarrangement mit dem sinnstiftenden Kontext ‚Sparstrategien – Wie kann ich mein Geld gewinnbringend anlegen?' entwickelt. Im ersten Teilkapitel soll das Kapital bei gegebenem Zinssatz und Startkapital nach mehreren Jahren in einem Schritt bestimmt werden, im zweiten Teilkapitel erkunden die Lernenden u.a., welche Strategien vom proportionalen Denken auf exponentielles Wachstum übertragen werden können.

## 3. Auszug eines möglichen Lernverlaufes

Der erste Designzyklus dient zur Entwicklung der Kernidee und des sinnstiftenden Kontextes der Lernumgebung und zielt auf erste Erkenntnisse über die Lernendenperspektive. Im zweiten Design-Zyklus wird die Lernumgebung erstellt und Lernprozesse und individuelle Vorstellungen zu spezifischen Aspekten des exponentiellen Wachstums erforscht. U.a. wird im Rahmen von Einzel- und Partnerinterviews (n=12) beobachtet, dass bei einigen Lernenden, unabhängig davon, ob sie mit der entwickelten Lernumgebung gearbeitet haben, am Ende des Lernprozesses bei ganzzahligen Wachstumsfaktoren die Vorstellung der proportional new to old-Änderungsrate nicht hinreichend vorhanden ist. Es fehlt die Vorstellung, dass z.B. bei einer Verdreifachung zu dem vorherigen Wert das Zweifache des vorherigen Werts addiert wird bzw. dass zu den vorhandenen 100% ein dazu proportionaler Anteil von 200% addiert wird. Dies ist jedoch Voraussetzung, um das später zu entwickelnde Kalkül inhaltlich zu stützen. Auch bei prozentualen Wachstumsfaktoren ist die Vorstellung der multiplikativen Änderungsrate nicht hinreichend vorhanden. Die Analyse der Interviews zeigt, dass die Lernenden dazu neigen, prozentuales Wachstum mit der Zinseszinsformel $K_n=K_0(1+p/100)^n$ zu verbinden. Allerdings können sie die einzelnen Elemente der Formel nicht erklären und es fehlt die Vorstellung der multiplikativen Änderungsrate, für die Lernenden ist bei dem prozentual gebildeten Faktor 1+p/100 die Addition die präferierte Operation. Es findet also keine entsprechende Vernetzung des Konzeptes des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors statt (vgl. Thiel-Schneider 2014).

## 4. Konsequenzen für das Design – Anschauungsmittel Prozentstreifen

Im dritten Design-Zyklus wird deshalb im Rahmen von Einzel- und Partnerinterviews (n=9) untersucht, ob und wie die oben genannte Vernetzung vom Konzept des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors mit Hilfe eines geeigneten Anschauungsmittels vorstellungsorientiert hergestellt werden kann. Als Anschauungsmittel wird der Prozentstreifen (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2003) verwendet, da hier die multiplikative wie auch die proportional new to old-Änderung veranschaulicht werden können. Der Umgang mit diesem Anschauungsmittel in Bezug auf exponentielles Wachstum soll ebenfalls untersucht werden.

In der Lernumgebung, die im Rahmen der Interviews eingesetzt wird, können die Lernenden als Darstellungen Wertetabellen und Prozentstreifen nutzen, um spezifische Vergleiche beider Darstellungen zu ermöglichen. Im Folgenden soll ein Ausschnitt aus einem individuellen Lernpfad einer mathematisch eher leistungsschwachen Schülerin der 10. Klasse eines Gymnasiums exemplarisch zeigen, wie das ‚neue' Anschauungsmittel im Sinne einer Verbindung unterschiedlicher Perspektiven auf exponentielles Wachstum genutzt wird. Der Schülerin gelingt es, die gestellte Aufgabe (Berechnung des Kapitals nach mehreren Jahren) mit Hilfe einer Tabelle zu lösen, wobei sie zuerst pro Schritt einen zum vorherigen Wert proportionalen Wert addiert. Nach weiteren Überlegungen kann sie erklären, wie man das Kapital nach n-Jahren in einem Schritt berechnet und nutzt dabei Vorstellungen zur multiplikativen Änderung. Ihr gelingt es ebenfalls, diese Vorstellungen auf den Prozentstreifen zu übertragen. Die Frage der Interviewerin, was mit der Strecke der Länge 1 passiert, um die Strecke der Länge 1,05 zu erhalten, erklärt die Schülerin folgendermaßen: *„Ja gestreckt auf 1,05, weil man halt auf diese 105 Prozent im Endeffekt kommen muss, weil er ja 5 Prozent Zinsen bekommt."* Im weiteren Verlauf des Interviews benutzt die Schülerin den Begriff „Streckung" als Synonym für die Multiplikation. Sie differenziert zwischen der multiplikativen und proportional new to old-Änderung und erläutert: *„Das ist dann wieder 1 und dann wären die 100, also die Linie zwischen der 0, ist das die Linie (neben dem Prozentstreifen), ja, dann wäre die Linie zwischen der 0 und der 130 wieder dieses 1,3, das heißt wieder, das was wir schon haben wieder halt hochgerechnet, also gestreckt und nicht addiert."* Auf die Frage, wie die Addition, welche die Schülerin erwähnt hat, am Prozentstreifen aussieht, erläutert sie: *„Ja, indem man einfach was draufsetzt, also indem man quasi das hier unten nochmal nimmt und da draufsetzt (S zeigt auf den unteren Abstand und bewegt diesen nach oben am Prozentstreifen) und nicht das, was man schon hat, halt in die Länge zieht. Das wäre halt wieder das, was ich mit dem Dreisatz ausgerechnet hätte, aber das geht ja auch ohne."*

Diese Äußerungen zeigen zum einen, dass die Schülerin die Veranschaulichung der beiden Änderungen am Prozentstreifen nicht nur erklären, sondern auch voneinander abgrenzen kann. Zum anderen kann sie das, was sie am Prozentstreifen veranschaulicht hat, wieder differenziert auf ihre Rechnungen in der Tabelle zurückführen. Auch bei ganzzahligen Wachstumsfaktoren unterstützt der konsequente Darstellungswechsel zwischen Tabelle und Prozentstreifen dabei, tragfähige Vorstellungen zu beiden Änderungen auszubilden. Dieses Beispiel zeigt, dass eine Verbindung unterschiedlicher Perspektiven auf exponentielles Wachstum gelingen kann. Die Studien im dritten Designzyklus sollen darüber Auskunft geben, inwiefern die Lernumgebung die Lernenden beim Vorstellungsaufbau unterstützt. Darauf basierend werden lokale Theorien für den erörterten Lerngegenstand weiterentwickelt.

## Literatur


Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 135-164.

Ebersbach M., Van Dooren, W., Van Den Noortgate, W., Resing, W. (2008). Understanding linear and exponential growth: Searching for the roots in 6- to 9-years-olds. *Cognitive Development 23*(2)*,* 237-257.

Ellis, A.B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C. & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the Jactus. In R. Mayes & L. Hatfield (Eds.), *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93-112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Hußmann, S. (2013). The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations, Preprint, TU Dortmund.

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. *Beiträge zum Mathematikunterricht,* 419-422.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Kormorek & S. Prediger (Hrsg.): *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25-42). Münster: Waxmann.

Thiel-Schneider, A. (2014): Exponentielles Wachstum verstehen. In Roth, J. & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM Verlag: 1215-1218.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Daniel THURM, Essen, Marcel KLINGER, Essen, Bärbel BARZEL, Essen

# Rahmenbedingungen und Wirksamkeit einer DZLM-Fortbildungsreihe zum GTR auf Lehrer- und Unterrichtsebene

Im Zuge der verbindlichen Einführung graphikfähiger Taschenrechner (GTR) in der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen unterstützt das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) Lehrkräfte mit der Fortbildungsreihe „GTR kompakt". Im hier vorgestellten Forschungsprojekt „GTR NRW" werden in diesem Rahmen zu berücksichtigende *Rahmenbedingungen* sowie die *Wirksamkeit* der Fortbildung 1. auf der Lehrer- und Unterrichtsebene und 2. auf der Ebene der Schülerinnen und Schüler untersucht. In diesem Beitrag soll das auf die Lehrer- und Unterrichtsebene fokussierende erste Teilforschungsprojekt dargelegt werden. Im Mittelpunkt stehen hierbei die technikbezogenen Überzeugungen sowie unterrichtliche Charakteristika beim Einsatz des GTR. Zur Betrachtung der Schülerebene im Rahmen des zweiten Teilforschungsprojektes sei auf den Beitrag von Klinger et al. (2015) in diesem Tagungsband verwiesen.

## Theoretischer Rahmen

Die Einführung von Technologien im Mathematikunterricht ist allgemein mit dem Ziel einer Akzentverschiebung vom Regellernen hin zu einem verständnisorientierten und schülerzentrierten Unterricht verknüpft (Barzel 2012; Hoyles 2010). Studien zeigen, dass der GTR hierbei auf vielfältige Weise unterstützen kann: So kann der GTR-Einsatz konzeptuelles Wissen insbesondere durch einen einfachen Darstellungswechsel im Bereich der Funktionenlehre unterstützen (Laakmann 2013). Zudem kann der GTR ein nützliches Hilfsmittel zum entdeckenden Lernen sein (Barzel & Möller 2001). Die Integration des GTR in den Unterricht stellt jedoch hohe Herausforderungen an die Lehrkraft (Clark-Wilson 2014). Barzel (2012, S. 54) folgert: „Deshalb ist eine angemessene Lehreraus- und -fortbildung als Vorbereitung auf die Schwerpunktverschiebung im Lernprozess dringend notwendig [...]".

Forschung im Bereich der Lehrerfortbildung zeigt, dass Weiterbildungsangebote wirksam sein können, wenn bestimmte Kriterien für deren Gestaltung berücksichtigt werden. Das DZLM hat basierend auf dem aktuellen Forschungsstand diese Kriterien in sechs Gestaltungsprinzipien zusammengefasst: (a) Kompetenzorientierung, (b) Teilnehmerorientierung, (c) Kooperationsanregung, (d) Fallbezogenheit, (e) Methodenvielfalt, (f) Reflexionsförderung (Barzel & Selter 2015). Die Wirksamkeitseffekte einer

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Fortbildung können sich dabei auf verschiedenen Ebenen entfalten. Lipowsky & Rzejak (2012) identifizieren die folgenden vier Wirkebenen: 1. Akzeptanz der Lehrkräfte bezüglich der besuchten Fortbildung, 2. Veränderung professioneller Kompetenzen der Lehrkräfte, 3. Veränderung des unterrichtlichen Handelns der Lehrkräfte und 4. Veränderung von Schülerleistungen. Das hier vorgestellte Teilforschungsprojekt fokussiert dabei die Untersuchung der zweiten und dritten Ebene.

## Design der Fortbildungsreihe „GTR kompakt"

Basierend auf dem dargestellten Theorierahmen hat das DZLM gemeinsam mit dem Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen die Fortbildungsreihe „GTR kompakt" entwickelt. Es wurden vier zusammenhängende Module konzipiert, welche über einen Zeitraum von November 2014 bis Mai 2015 an drei Standorten in NRW mit jeweils 30 Lehrkräften durchgeführt werden. Die Module fokussieren jeweils unterschiedliche Bereiche: Modul A: Einstieg in das Unterrichten mit dem GTR, Modul B: Modellieren/Problemlösen mit dem GTR, Modul C: Unterrichtsprozesse mit dem GTR gestalten und Modul D: GTR in Prüfungssituationen. Zwischen den Modulen finden jeweils Erprobungsphasen im Unterricht der Teilnehmenden statt und es werden Austauschmöglichkeiten über eine Moodle-Plattform angeboten. Von Beginn der Fortbildungsreihe wurde zudem Wert auf die Gründung professioneller Lerngemeinschaften gelegt. Durchgeführt werden die Fortbildungen von Teams aus Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern und aktiv unterrichtenden Lehrkräften mit Fortbildungserfahrungen.

## Forschungsfragen

Um Lehrerfortbildungen zum produktiven Einsatz des GTR empiriebasiert weiterentwickeln zu können, sind Erkenntnisse über die zu berücksichtigenden Rahmenbedingungen und über die Wirksamkeit von Fortbildungen auf den verschiedenen Wirkebenen notwendig. Hieraus ergeben sich die folgenden Forschungsfragen, wobei auf Überzeugungen der Lehrkräfte und deren unterrichtliches Handeln fokussiert wird:

<u>A) Rahmenbedingungen:</u>

– $F_1$: Welche Überzeugungen haben Lehrkräfte zum Einsatz des GTR im Mathematikunterricht?
– $F_2$: Wie setzen Lehrkräfte den GTR im Unterricht ein?
– $F_3$: Wie hängen Überzeugungen zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht und unterrichtlicher Einsatz des GTR zusammen?

B) Wirksamkeit:

– $F_4$: Wie ändern sich Überzeugungen zum Technologieeinsatz von fortgebildeten Lehrkräften im Vergleich zu nicht fortgebildeten Lehrkräften?
– $F_5$: Wie ändert sich der unterrichtliche Einsatz des GTR von fortgebildeten Lehrkräften im Vergleich zu nicht fortgebildeten Lehrkräften?

## Methodologie

Um die Forschungsfragen zu beantworten, wurde ein Pre-Posttest-Design gewählt. Dabei wird eine Interventionsgruppe von n=66 Fortbildungsteilnehmerinnen und -teilnehmern mit einer Kontrollgruppe von n=142 nicht fortgebildeten Lehrkräften verglichen. Um längerfristige Effekte messen zu können, soll zusätzlich sechs Monate nach Beendigung der Intervention ein Follow-up-Test durchgeführt werden. Die Erfassung der technologiebezogenen Überzeugungen erfolgt dabei mit Hilfe eines adaptierten Fragebogens (Rögler 2014). Unterrichtliche Charakteristika werden mit einem entwickelten Lehrkräfte-Reflexionsbogen erhoben.

## Erste Ergebnisse

Im Folgenden sollen erste Ergebnisse zur Forschungsfrage $F_1$: „Welche Überzeugungen haben Lehrkräfte zum Einsatz des GTR im Mathematikunterricht?“ skizziert werden. So ist zwar ein Großteil der Lehrkräfte der Überzeugung, dass der GTR entdeckendes Lernen unterstützen kann, allerdings lehnt auch knapp ein Fünftel der Lehrkräfte dies stark ab. Ein homogenes Bild zeigt sich bei der Skala „Der GTR schadet prozeduralen Fähigkeiten“ (s. Abb. 1, links). Hier sind sehr hohe Zustimmungswerte zu beobachten. Im rechten Histogramm von Abbildung 1 zeigt sich hingegen eine starke Heterogenität bezüglich der Überzeugung zum Zeitpunkt des GTR-Einsatzes. Während knapp 50 Prozent der Lehrkräfte der Überzeugung sind, dass der Rechner erst eingesetzt werden sollte, wenn mathematische Konzepte ohne den GTR verstanden sind, haben ebenso viele Lehrkräfte genau gegensätzliche Überzeugungen.

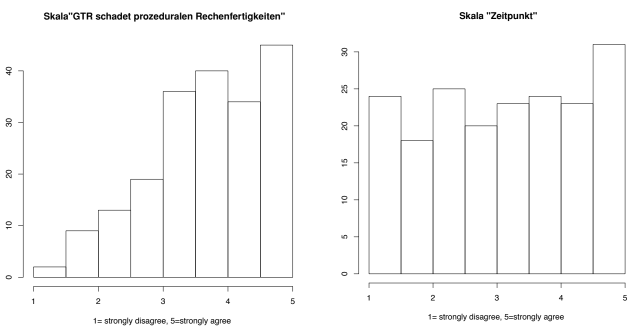



**Abbildung 1:** Histogramm der Skalen „Der GTR schadet händischen Rechenfertigkeiten“ (links) und „Zeitpunkt“

## Ausblick und Diskussion

Die Ergebnisse machen deutlich, dass die vielfältigen und differenzierten Überzeugungen zum GTR bei der Gestaltung einer Fortbildung zu berücksichtigen sind. So passt zum Beispiel die starke Ablehnung von einem Fünftel der Lehrkräfte zum entdeckenden Lernen nicht zu den empirischen Erkenntnissen über die Nützlichkeit des GTR in diesem Bereich. Bei der Einführung von Konzepten und Methoden müssen Fortbildnerinnen und Fortbildner sich diesen Überzeugungen in den verschiedenen Dimensionen bewusst sein und die Teilnehmer aktiv zu einer Reflexion über diese Überzeugungen anregen. Dies könnte durch den verstärkten Einbezug von Forschungsergebnissen begleitet durch eine Verknüpfung mit methodischen und didaktischen Konzepten zu den jeweiligen Themen erfolgen. Nach Durchführung des Post- und Follow-up-Tests sollen Analysen hinsichtlich möglicher Veränderungen von Überzeugungen und unterrichtlichem Einsatz des GTR erfolgen.

## Literatur


Barzel, B., & Möller, R. (2001). About the Use of the TI-92 for an Open Learning Approach to Power Functions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 33*(1), 1–5.

Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht: Ein Mehrwert – aber wann?* Münster: Waxmann.

Barzel, B., & Selter, C. (2015, im Erscheinen). Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*.

Clark-Wilson, A., Aldon, G., Cusi, A., Goos, M., Haspekian, M., Robutti, O., Thomas, M. (2014). The challenges of teaching mathematics with digital technologies – the evolving role of the teacher. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* (Bd. 1, S. 87–116). Vancouver: PME.

Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (Hrsg.). (2010). *Mathematics Education and Technology Rethinking the terrain: The 17th ICMI Study*. Dordrecht: Springer.

Klinger, M., Thurm, D. & Barzel, B. (2015). Evaluation der Rahmenbedingungen und Wirksamkeit einer DZLM-Fortbildungsreihe zum GTR auf Schülerebene. In diesem Band.

Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lipowsky, F., & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen effektiver Lehrerfortbildungen. *Schulpädagogik heute 5*(3), 1–17.

Rögler, P. (2014). Überzeugungen von Mathematiklehrkräften als Basis zur Entwicklung von Lehrerfortbildung zu Technologien im Unterricht. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 297–300). Münster: WTM-Verlag.

Kerstin TIEDEMANN, Bielefeld

# Mathematiklernen im Sprachbad

Inzwischen ist die zentrale Bedeutung der Sprache für den Mathematikunterricht unbestritten. Sie wird dort als Lernmedium, als Lerngegenstand und als mögliches Lernhindernis in den Blick genommen (vgl. Meyer & Prediger 2012). Der Physikdidaktiker Leisen (2010, S. 76) behauptet für den Fachunterricht allgemein: „Die Lerner stehen […] im Fachunterricht inmitten eines CALP-Sprachbades.“ Damit bezieht er sich auf ein Konzept von Cummins (1979), in dem zwischen zwei unterschiedlichen Kompetenzbereichen des Sprachgebrauchs unterschieden wird, den *basic interpersonal communication skills* (BICS) einerseits und der *cognitive academic language proficiency* (CALP) andererseits. Mit BICS geht es um den Sprachgebrauch in Situationen des Alltags, welcher sich durch Worte mit weiten Bedeutungsfeldern, durch einfache Satzstrukturen und einen regen Gebrauch von Gesten auszeichnet. Mit CALP ist hingegen eine schriftförmige Sprachverwendung gemeint, die sich durch definierte Worte, komplexe Satzstrukturen und explizite Markierungen des Zusammenhangs auf Textebene auszeichnet. Diese Cummin'sche Unterscheidung findet ihre Entsprechung im deutschsprachigen Raum in der Unterscheidung zwischen Alltagssprache einerseits und Fach- oder Bildungssprache andererseits (vgl. Gogolin et al. 2011). Nun stellt der Mathematikunterricht bezüglich des Sprachgebrauchs keine bloße Realisierung gegebener theoretischer Kategorien dar, sondern ist aus interaktionistischer Perspektive, welche hier eingenommen wird, ein soziales Geschehen, in dem die Beteiligten selbst aushandeln, mit welcher Sprache sie über Mathematik sprechen (vgl. Tiedemann 2014). Wie also gestalten Lernende und Lehrende das Sprachbad im Mathematikunterricht?

## 1. Normierung des Sprachbades

Die situative Gestaltung des Sprachbades im Mathematikunterricht ist aus didaktischer Perspektive interessant, weil mit der Etablierung von Regeln für den Sprachgebrauch sprachliche Anforderungen erwachsen, die Chancen und Begrenzungen für das fachliche Lernen sein können. Sie sollen im Folgenden interpretativ als Normen rekonstruiert werden (vgl. Tiedemann 2012, 2014). Dabei wird unter einer Norm in Anlehnung an Sfard (2008, S. 204f.) eine verbindliche Regel für den Sprachgebrauch verstanden. Die Verbindlichkeit ist im Unterrichtsgespräch daran zu erkennen, dass eine Verletzung einer bereits etablierten Norm eine Korrektur erforderlich macht. Gleichzeitig ist eine Norm nach Voigt (1994, S. 105) ein Wertkriterium, da mit ihr festgelegt wird, was in der Interaktion als gut, als akzepta-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

bel oder angemessen gilt. So ist eine Norm im Sprachbad des Mathematikunterrichts also eine verbindliche Regel für den Sprachgebrauch, die festlegt, was in der Unterrichtsinteraktion als angemessen gilt.

## 2. Typen der Normierung als empirische Ergebnisse

Nachfolgend werden an Beispielen aus dem Arithmetikunterricht zwei unterschiedliche Typen der Normierung illustriert. Die Szenen sind in unterschiedlichen Lerngruppen eines zweiten Jahrgangs entstanden; in beiden Fällen wird eine Einheit zur Orientierung an der Hundertertafel durchgeführt.

**Grammatische Normierung.** Frau Pohl behandelt in der ersten Stunde der Einheit sog. Zahlenrätsel. Solche Zahlenrätsel haben bei ihr die immer selbe Struktur: „Die Zahl steht in der x. Zeile und in der y. Spalte." Die nachfolgende Szene setzt ein, als zum ersten Mal ein Schüler ein Zahlenrätsel stellen darf. Es ist Ozan.

| | |
|---|---|
| Ozan: | Die Zahl steht in der 4. Spalte und… in der 3. Zei- |
| Lehrerin: | Nein, erst die **Zeile**. |
| Ozan: | Äh.. Die Zahl steht in der 3. Zeile und in der 4. Spalte. |
| Lehrerin: | Okay. Nimm ein Kind dran, Ozan. |

Wenn wir annehmen, dass Ozan seinen ersten Satz mit dem Wort ‚Zeile' beenden würde, produziert er eine fachlich wie sprachlich korrekte Äußerung. Mit seinem Zahlenrätsel ist die 24 als gesuchte Zahl eindeutig bestimmt. Dennoch unterbricht Frau Pohl ihn und beharrt darauf, dass zuerst die Zeile benannt wird. Ozan bestätigt diese Forderung im Folgenden, wenn er sein Zahlenrätsel reformuliert, dabei erneut die 24 beschreibt, nun aber zuerst die Zeile nennt. Ozan und Frau Pohl handeln damit aus, wie die Position einer Zahl auf der Hundertertafel ‚angemessen' zu beschreiben ist. In diesem Prozess fokussieren sie auf die Struktur der sprachlichen Äußerung: Es soll zuerst die Zeile und dann die Spalte genannt werden. Man könnte sagen, dass Ozan und Frau Pohl eine eigene Grammatik für Zahlenrätsel etablieren. Dabei wird ein erweiterter Grammatikbegriff zugrunde gelegt, wie ihn die neuere Sprachwissenschaft nutzt (vgl. Linke et al. 2004, S. 56f.). Die Grammatik wird nicht länger auf die ausschließliche Untersuchung sprachlicher Strukturen reduziert, sondern um damit verbundene semantische Betrachtungen ergänzt. So gerät in dem analysierten Beispiel auch nur etwas fachdidaktisch Relevantes in den Blick, wenn nicht allein Wortarten oder Satzglieder betrachtet werden (dann gleichen sich Ozans zwei Varianten seines Zahlenrätsels!), sondern die Inhaltsgebundenheit der sprachlichen Struktur berücksichtigt wird. Die Beteiligten einigen sich für Zahlenrätsel auf eine Reihenfolge von Zeile und Spalte und legen damit fest, dass bei der Stellung eines Zahlenrätsels zunächst jene Information gegeben werden soll, die eine schnelle Abschätzung der Größenordnung der gesuchten Zahl erlaubt. Werden auf eine solche inhaltsgebundene Weise die Strukturen von Sprache im Mathematikunterricht verhandelt, spreche ich von einer grammatischen Normierung.

**Pragmatische Normierung.** Frau Yildiz ist Lehrerin in der Parallelklasse. Sie behandelt in der ersten Stunde zur Orientierung an der Hundertertafel ebenfalls Zahlenrätsel, wobei es in ihrer Lerngruppe unerheblich ist, ob zuerst die Zeile genannt wird. Die folgende Szene entstammt dem Beginn der zweiten Stunde.

> Lehrerin: Wer erklärt mir, was eine Zeile ist? [4 Sek.; *einige Schüler melden sich, darunter Mahmud*] Mahmud?
>
> Mahmud: Die geht [*mit dem Zeigefinger horizontal vor sich hin- und herfahrend*] so in eine Reihe so. Immer geradeaus.
>
> Lehrerin: Mmh, aber jetzt will ich nicht **so** hören. Weil wenn ich jetzt nicht äh wenn ich jetzt mit dir telefoniere und und du erklärst mir das und du machst [*Mahmuds Geste wiederholend*] so… Dann kann ich das ja nicht sehen. Kannst du mir das mit Worten erklären?
>
> Mahmud: Ja, es geht geradeaus.

Als Antwort auf die Frage von Frau Yildiz, was eine Zeile sei, entwickelt Mahmud zwei unterschiedliche Erklärungen. In der ersten Variante gibt er auf der verbalsprachlichen Ebene an, dass eine Zeile wie eine Reihe „immer geradeaus" „geht", und auf der gestischen Ebene, dass sie horizontal verläuft und zwar sowohl von links nach rechts als auch von rechts nach links. In der zweiten Variante verzichtet Mahmud auf Gesten und benennt nur noch, dass eine Zeile „geradeaus" „geht". Herausgefordert wird die Überarbeitung der ersten Version hin zur zweiten von der Lehrerin, die anmerkt, dass sie Mahmuds erste Version am Telefon nur eingeschränkt verfolgen könnte. Sie fragt nach einer ausschließlich verbalsprachlichen Erklärung: „Kannst du mir das mit Worten erklären?" In dieser Szene wird also ausgehandelt, wie auf angemessene Weise zu erklären ist, was eine Zeile ist. Dabei steht nicht die Struktur der Sprache im Mittelpunkt, sondern die Frage der Adressatengerechtheit. Denn die Erklärung, was eine Zeile ist, soll so gestaltet werden, dass sie auch für jemanden verständlich ist, der ihr per Telefon folgt. Gefordert ist somit ein schriftförmiger

Sprachgebrauch, der auf Gesten verzichtet. Mahmud bestätigt diese Forderung, als er im zweiten Versuch eine rein verbalsprachliche Erklärung produziert. Dieser kommunikationsorientierte Blick auf Sprache ist ein pragmatischer. Die Pragmatik fragt danach, wie Sprache in konkreten Situationen angepasst wird, um gegebene kommunikative Ziele zu erreichen (vgl. Linke et al. 2004, S. 195). Wenn also mit Blick auf tatsächlich vorhandene oder, wie in der analysierten Szene, fiktive kommunikative Zwecke die Angemessenheit von Sprache im Mathematikunterricht ausgehandelt wird, spreche ich von einer pragmatischen Normierung.

**Fazit.** Die empirischen Ergebnisse zeigen, dass die Lernenden im Mathematikunterricht nicht automatisch inmitten eine CALP-Sprachbades stehen, sondern die Regeln für ihren Sprachgebrauch und damit die Gestalt und Güte ihres Sprachbades selbst aushandeln. Lehrkräfte dafür zu sensibilisieren, welche Bedeutung einer fundierten Planung der sprachlichen Ebene des Mathematikunterrichts und ihrem eigenen Sprachverhalten im Unterricht zukommt, ist daher ein wichtiges Ziel in der Förderung eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts.

## Literatur


Cummins, J. (1979). Cognitive/academic language proficiency, linguistic interdependence, the optimum age question and other matters. *Working Papers on Bilingualism, 19* (S. 121-129). Toronoto: Ontario Institute for Studies in Education.

Goglin, I., Lange, I., Hawighorst, B., Bainski, C., Heintze, A., Rutten, S. & Saalmann, W. (2011). *Durchgängige Sprachbildung. Qualitätsmerkmale für den Unterricht*. Münster: Waxmann.

Leisen, J. (2010). *Handbuch Sprachförderung im Fach – Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis*. Bonn: Varus.

Linke, A., Nussbaumer, M. & Portmann-Tselikas, P.R. (2004). *Studienbuch Linguistik*. Tübingen: Niemeyer.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik, 54*(45), S. 2-9.

Tiedemann, K. (2014). Der Gebrauch von Fachsprache im Mathematikunterricht der Grundschule. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1219-1222). Münster: WTM.

Tiedemann, K. (2012). *Mathematik in der Familie. Zur familialen Unterstützung früher mathematischer Lernprozesse in Vorlese- und Spielsituationen*. Münster: Waxmann.

Voigt, J. (1994). Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (S. 77-111). Köln: Aulis.

Philipp ULLMANN, Frankfurt

# Islamische Mathematik – kulturelle Heterogenität in der Lehramtsausbildung

In meinen Lehrveranstaltungen für das Lehramt Mathematik beider Sekundarstufen an der Universität Frankfurt wurde ich immer wieder (und in ganz unterschiedlichen Zusammenhängen) mit kultureller Heterogenität konfrontiert.[1] Die unterschiedlichen kulturellen Ressourcen der Studierenden spielten in den ‚traditionellen' Veranstaltungen zur Mathematik und Mathematikdidaktik aber kaum eine Rolle, während ich hier eine Gelegenheit sah, in einen interkulturellen Dialog einzutreten und daran (nicht nur) etwas über Mathematik zu lernen.[2]

In der Literatur finden sich zahlreiche Argumente, kulturelle Ressourcen in der Lehre aufzugreifen. Der (leider kürzlich verstorbene) Mathematikdidaktiker Paulus Gerdes (2011, S. 7 f.) hat seine jahrzehntelangen Erfahrungen auf diesem Gebiet in folgenden drei Punkten zusammengefasst:

- Durch die Einbindung mathematischer (Alltags-)Praxen kann Mathematik als subjektiv bedeutsam erfahren werden.
- Kulturelle Elemente können als Ausgangspunkt für interessante Mathematik genutzt werden.
- Durch die Wertschätzung ihres kulturellen Hintergrundes wird das Selbstvertrauen von Lernenden gestärkt.

Darüber hinaus findet sich in den KMK-Standards für die Lehrerbildung ein einschlägiger Passus, der die Berücksichtigung der interkulturellen Dimension(en) „bei der Gestaltung von Bildungs- und Erziehungsprozessen" (KMK 2014 [2004], S. 9) anmahnt.

Ein entsprechender Versuch, kulturelle Elemente didaktisch aufzugreifen, schien sich also sowohl hinsichtlich des Lehramtsstudiums Mathematik als auch im Sinne einer Professionalisierung der angehenden LehrerInnen zu empfehlen.

1 Auf meinen Gebrauch des Begriffs ‚kulturelle Heterogenität' werde ich im weiteren Verlauf noch eingehen. In der Zwischenzeit werde ich mir mit dem (etwas unglücklichen) Konstrukt ‚Migrationshintergrund' behelfen, das ich aus dem Heterogenitätsdiskurs entlehnt habe.

2 In letzter Konsequenz geht es darum, Mathematik als scheinbar ‚kultur-freie' westlich-hegemoniale Denkform zu unterlaufen, wie es vor allem im Kontext der Ethnomathematik diskutiert wird. Aus Platzgründen kann ich darauf leider nicht eingehen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Islamische Mathematik

Angesichts zahlreicher Studierender mit türkischem bzw. arabischem Migrationshintergrund wählte ich als Ausgangspunkt meiner Überlegungen al-Chwarizmi, den ‚Stammvater der Algebra', der im 9. Jahrhundert in Bagdad wirkte. In der Mathematikdidaktik ist vor allem sein Buch über die Algebra (*al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala*) bekannt, weil darin (unter anderem) quadratische Gleichungen systematisiert und geometrisch gelöst werden und die Algebra diesem Werk ihren Namen verdankt. Von Anschlussfähigkeit an studentische Alltagspraxen allerdings konnte in diesem über ein Jahrtausend zurückliegenden (und wissenschaftshistorisch reichlich verwickelten) Fall nicht wirklich die Rede sein.

Doch als der Blick für arabisch-islamische Kultur erst einmal sensibilisiert war, fiel eine kulturelle Praxis ins Auge, die die Jahrhunderte überspannt und bis in die Gegenwart reicht: das rituelle Gebet (*ṣalāh*), eine der fünf Säulen des Islam. Gläubige Muslime verrichten es fünf Mal am Tag zu festgelegten Zeiten und wenden sich dabei gen Mekka, die vorgeschriebene Gebetsrichtung (*qibla*).

Die Bestimmung der Gebetsrichtung und der Gebetszeiten (letztere orientieren sich im Wesentlichen am Stand der Sonne) sind – mathematisch gesehen – (kugel)geometrische Probleme, die spätestens seit der ersten kulturellen Blütezeit des Islam im 8./9. Jahrhundert zum festen Kanon der Islamischen Mathematik gehören.[3]

Weitere Themen, die sich anschließen lassen, sind der Mondkalender, astronomische Instrumente wie die Sonnenuhr oder das Astrolabium, aber auch Fragen der Erbteilung, wie sie in dem oben erwähnten Buch von al-Chwarizmi ausführlich behandelt werden.[4]

Die zugrundeliegende Mathematik (vgl. etwa Ilyas 1984) und die zum Verständnis notwendige Astronomie lassen sich (zumindest in ihrem heutigen Gewand) ohne allzu großen Aufwand mit dem algebraischen und trigonometrischen Wissen der Sekundarstufe I erarbeiten. Damit bietet sich ein vielversprechender Ansatzpunkt für eine Lehrveranstaltung, die einen interkulturellen Dialog initiieren will anhand von Inhalten, die sowohl mathematisch gehaltvoll sind als auch anschlussfähig an (nicht nur) studentische Vorstellungen.

[3] Zur Bezeichnung ‚Islamische Mathematik' für eine wissen(schaft)sgeschichtliche Formation des 8.-15. Jahrhunderts siehe Høyrup (1987).

[4] Es muss hier Fußnote bleiben, dass al-Chwarizmi in allen Gebieten der Islamischen Mathematik einschlägige Beiträge geleistet hat; vgl. etwa King (1993).

In aller Kürze lautet das Konzept: Ausgehend von islamischen Kulturpraxen werden geeignete (authentische) Problemstellungen mathematisch präzisiert und die zur Lösung benötigte Mathematik schrittweise entwickelt. Begleitend werden astronomische, historische und kulturelle Aspekte beleuchtet. Die Veranstaltung wird derzeit (in überarbeiteter Form) erneut angeboten, und alle drei von Gerdes angeführten Aspekte scheinen sich zu bestätigen. Und doch ist ein theoretischer Einwurf am Platze.

**Kulturelle Heterogenität**

Die Vielfalt der Lernenden hinsichtlich lernrelevanter Merkmale – zu den gebräuchlichsten gehören ‚Geschlecht', ‚Migrationshintergrund' und ‚Behinderung' – wird derzeit unter dem einheitlichen Label ‚Heterogenität' verhandelt. Auch in der Mathematikdidaktik erfreut es sich zunehmender Beliebtheit; dabei zeichnet sich ab, dass die dort noch häufig anzutreffende Verengung auf Leistungsheterogenität – und damit auf eine lehr-lernpsychologische Perspektive (vgl. Trautmann & Wischer 2011, S. 42-47) – überwunden wird und neben individuellen (Lern-)Merkmalen vermehrt soziale und kulturelle Kategorien in den Blick genommen werden.

Insbesondere die konstruktivistische Perspektive auf Heterogenität, die sich laut dem Bildungstheoretiker Jürgen Budde (2013, S. 15 f.) in letzter Zeit etabliert hat, ist mathematikdidaktisch anschlussfähig. Schule und Unterricht werden dabei als Orte gefasst, an denen Heterogenität (re)konstruiert und (re)produziert wird. Heterogenität wird dabei verstanden als Differenz, die einer sozialen Situation zugeschrieben und mit dieser Zuschreibung als für diese Situation bedeutsam ‚fest-gestellt' wird.

Für den hier verhandelten Fall bedeutet das: Kulturelle Heterogenität wird als für das Lernen von angehenden MathematiklehrerInnen in Frankfurt relevante Kategorie behauptet, und zwar in Form des Konstruktes ‚Migrationshintergrund' – in Übereinstimmung mit aktuellen Bezeichnungspraxen, die damit je nach Kontext eine überaus unscharfe Trennlinie ziehen, sei es aufgrund juristischer, biographischer, kultureller, sprachlicher, ethnischer, religiöser oder anderer Merkmale (vgl. Wenning 2013, S. 137 f.).

Dieses Vorgehen bietet zunächst Vorteile. Die Lehr-Lern-Situation kann so (subjektiv) als ‚kulturell heterogen' gedeutet und (dadurch!) didaktisch reflektiert und (um)gestaltet werden. Zugleich aber läuft diese Deutung Gefahr, sich zu verselbständigen. Erstens kann ‚Kultur' statt *einer möglichen* als *die bestimmende* Kategorie (miss)verstanden werden. Gerade bei der Diskussion wissenschaftsgeschichtlicher Texte tritt diese Tendenz besonders deutlich hervor, und es ist immer wieder eine didaktische Herausforderung, nicht bei der Wahrnehmung des Fremdseins stehen zu bleiben (‚die

Muslime haben (das) eben *anders* gerechnet'). Zweitens kann ‚Kultur' als Differenzkriterium von Heterogenität ausgesprochen homogenisierend wirken, indem sie die Vielfalt innerhalb der jeweils erzeugten Kategorien aus dem Blick verliert. Hier besteht die Herausforderung etwa darin, das Gefühl dafür wachzuhalten, dass ‚die' Islamische Mathematik eine Geschichte hat, die über sieben Jahrhunderte und drei Kontinente reicht, und dass der bestimmte Artikel in solchen Zusammenhängen zumindest problematisch ist (‚*die* Muslime haben (*das*) eben anders gerechnet'). Ähnliches gilt für ‚die' gelebten Praxen ‚der' muslimischen Studierenden. Drittens – und verallgemeinernd – leistet die Kategorie ‚Kultur' einer Kulturalisierung Vorschub, die meint, mit dem Label ‚Kultur' sei schon alles erklärt, und damit Ursachen und Aspekte sozialer Ungleichheit systematisch ausblendet (‚die *Muslime* haben (das) eben anders gerechnet').

## Fazit

Als Fazit lässt sich formulieren: Heterogenität stellt Lehrenden eine (durchaus nicht unproblematische) Kategorie bereit, um die eigenen Erfahrungen mit (kultureller) Vielfalt zu theoretisieren und damit sowohl reflektiertem Handeln als auch einer vorsichtigen (Um-)Gestaltung zugänglich zu machen.

Die Herausforderung an die Mathematikdidaktik ist es, geeignete (mathematische) Inhalte zu erschließen, die im Sinne Gerdes' Ressourcen aus den Alltagspraxen der Lernenden kulturell sensibel aufgreifen und damit zugleich einen Beitrag zum (allgemeinen) Bildungs- und Erziehungsauftrag von Schule leisten. Dieser Prozess ist prinzipiell unabschließbar, denn: Heterogenität ist jedes Mal anders.

## Literatur


Budde, Jürgen (2013): Einleitung: Unscharfe Einsätze – (Re-)Produktion von Heterogenität im schulischen Feld. In: Ders. (Hrsg.): *Unscharfe Einsätze*. Springer, S. 7-26.

Gerdes, Paulus (2011): *African Pythagoras. A Study in Culture and Mathematics Education*. MERC.

Høyrup, Jens (1987): The Formation of "Islamic Mathematics". Sources and Conditions. *Science in Context* 1/2, S. 281-329.

Ilyas, Mohammad (1984): *A Modern Guide to Astronomical Calculations of Islamic Calendar, Times and Qibla*. Berita.

King, David (1993): *Astronomy in the Service of Islam*. Variorum.

KMK = Kultusministerkonferenz (2014 [2004]): *Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften*. Sekretariat der Kultusministerkonferenz.

Trautmann, Matthias & Wischer, Beate (2011): *Heterogenität in der Schule.* VS.

Wenning, Norbert (2013): Die Rede von der Heterogenität – Mode oder Symptom? In: Budde (Hrsg.): *Unscharfe Einsätze*. Springer, S. 127-150.

Elisabeth UNTERHAUSER, Hedwig GASTEIGER, München

# Begriffsverständnis von Parallelität bei Kindern im Alter zwischen 3 und 6 Jahren – Eine explorative Interviewstudie

Der Fokus von Studien, die sich mit dem Begriffserwerb von Flächenformen bei Kindern im Vorschulalter befassen, liegt vor allem auf der Benennung und Unterscheidung verschiedener Flächenformen. Weitgehend ungeklärt ist bislang wie Kinder Flächenformen wahrnehmen – z. B. auf welche Aspekte sie achten – und was ihre Entscheidung beeinflusst, mit der sie eine Flächenform einer bestimmten Begriffsklasse zuordnen. Da Eigenschaften eine zentrale Komponente für den Erwerb von Begriffsverständnis darstellen (Vollrath 1984), liegt die Vermutung nahe, dass Kinder verschiedene Eigenschaften berücksichtigen, wenn sie Flächenformen klassifizieren sollen. Eine Eigenschaft, die v. a. für die Klasse der Vierecke von Bedeutung ist, ist die Parallelität. Um erste Einsichten zur Wahrnehmung von Eigenschaften bei Flächenformen zu gewinnen, wurde eine explorative Interviewstudie zum Begriffsverständnis von Parallelität durchgeführt.

## 1. Erkenntnisse und offene Fragen zum Begriffsverständnis von Flächenformen

Zunächst erfolgt ein kurzer Überblick über Forschungsergebnisse zum Begriffsverständnis von Flächenformen.

Kinder gehen im Vorschulalter bei der Wahrnehmung und Beurteilung von Flächenformen sowohl holistisch (visuelle Ganzheit) als auch analytisch (Eigenschaften) vor. Dabei beziehen sich manche Kinder auf Eigenschaften, jedoch ohne dass von einem umfassenden Begriffsverständnis nach Vollrath (1984) ausgegangen werden kann. So werden z. B. Begründungen auf Basis der Anzahl der Ecken formuliert ohne zwischen Ecke und Seite unterscheiden zu können (z. B. Aslan & Aktaş Arnas, 2007; Piaget & Inhelder, 1971). Der Einfluss von Eigenschaften auf die Entscheidungsfindung bezüglich der Zuordnung zu einer Begriffsklasse variiert allerdings zwischen den verschiedenen Flächenformen. Sollen Kinder aus einem Pool an Formen Dreiecke wählen, dann werden in einem bestimmten Alter Formen mit abgerundeten *Ecken* toleriert, wenn die Gesamtform stimmt. In diesem Fall scheint die Anzahl der *Ecken* entscheidender als die Tatsache, dass es sich nicht wirklich um *Ecke*n handelt. Als Repräsentant der Flächenform Rechteck werden teilweise langgezogene Trapeze und Parallelogramme akzeptiert (z. B. Clements et al., 1999; Tirosh et al., 2008). Das könnte daran liegen, dass die Parallelität als wichtiger erachtet wird, als die rechten Winkel.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Die Forschungsergebnisse zeigen, dass Eigenschaften von Flächenformen bereits im Vorschulalter in Wahrnehmungs- und Entscheidungsprozesse einfließen. Eine der Eigenschaften, in der sich Flächenformen unterscheiden können, ist die Parallelität verschiedener Seiten.

## 2. Erkenntnisse und offene Fragen zum Begriffsverständnis von Parallelität

Über den Abstand kann Parallelität folgendermaßen definiert werden: *Zwei Geraden heißen parallel, wenn alle Punkte der einen Geraden von der anderen Geraden denselben Abstand haben*. Vor allem für die Arbeit mit Flächenformen im Elementar- und Primarbereich ist die Parallelität als Eigenschaft wichtig. Bei einer Raute nutzen Kinder z. B. im Vorschulalter vermutlich weniger die Tatsache, dass gegenüberliegende Winkel gleich groß sind (Lehrer et al., 1998) um die Flächenform als Raute zu identifizieren, sondern eher die Eigenschaft der Parallelität gegenüberliegender Seiten. Zum Begriffsverständnis von Parallelität bei Kindern im Vor- und Grundschulalter gibt es einige wenige Ergebnisse aus der Forschung.

Kindern gelingt früh eine Unterscheidung zwischen parallelen und sich schneidenden Streckenpaaren (z. B. Abravanel, 1977). Parallelität in diesem Sinne kann verhältnismäßig leicht erkannt, aber eher schwer beschrieben werden. Beim Beschreiben betrachten Kinder verschiedene Relationen zwischen den Strecken: den Neigungswinkel (*Sie werden sich treffen, weil sie sich aufeinander zuneigen.*) oder den Abstand (*Weil das da nicht die gleiche Dicke ist.*) (Sinclair et al., 2013, Übersetzung d. Verf.). Anhand dieser Beschreibungen kann nicht nur die Parallelität isolierter Streckenpaare, sondern auch Parallelität innerhalb von Formen betrachtet werden (z. B. Mitchelmore, 1992).

Aus der Zusammenschau der Ergebnisse zum Begriffsverständnis von Flächenformen und Parallelität können folgende Forschungsfragen für die Interviewstudie abgeleitet werden:

1. Wie zeigt sich ein elementares Begriffsverständnis von Parallelität? Unter *elementarem Begriffsverständnis* wird hier ein Niveau verstanden, das der ersten – intuitiv, Begriff als Phänomen – und in Teilen der zweiten – inhaltlich, Begriff als Träger von Eigenschaften – Stufe des Begriffsverständnisses nach Vollrath (1984) entspricht.
2. Welche Rolle spielt Parallelität als Eigenschaft von Flächenformen? Es soll herausgefunden werden, wie bzw. ob Parallelität in Flächenformen wahrgenommen und/oder zur Beurteilung von Gemeinsamkeiten verschiedener Flächenformen herangezogen wird.

3. Wie müssen Items konzipiert werden, damit Kinder ihre Kompetenzen bezüglich Parallelität zeigen können?

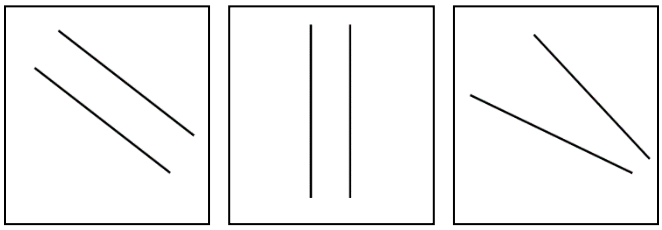
## 3. Explorative Interviewstudie zum elementaren Begriffsverständnis von Parallelität

Mit Hilfe halbstandardisierter Einzelinterviews (ca. 30min) mit 15 Kindern im Alter zwischen 3;4 und 6;5 Jahren erfolgte eine Annäherung an diese Fragestellungen. Es wurden neun Items zu vier Komponenten eines elementaren Begriffsverständnisses von Parallelität eingesetzt:

| *Komponenten eines Begriffsverständnisses von Parallelität* | *Anzahl* |
|---|---|
| Benennen, Zeichnen und Identifizieren verschiedener Strecken | 2 Items |
| Beschreiben und Unterscheiden verschiedener Streckenpaare | 3 Items |
| Legen von Parallelen isoliert und in Formen | 1 Item |
| Erkennen von Parallelen in Umriss- und Flächenformen | 2 Items |

Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse liefern lediglich einen ersten Einblick und können aufgrund des explorativen Charakters der Interviewstudie nicht als allgemeingültig angesehen werden.

Wenn Kinder Strecken oder Streckenpaaren betrachten oder vergleichen gehen sie, genauso wie bei Flächenformen, holistisch und analytisch vor. Beispielsweise entscheiden sich jüngere Kinder bei der Frage, welche zwei dieser drei Bilder besonders gut zusammenpassen, für Bild 1 und 3 mit der Begründung,



dass sie *gleich schräg* sind und beziehen sich dabei also eher auf die Ganzheit. Ältere Kinder hingegen tendieren zu den Bildern 1 und 2 und begründen dabei über die Parallelität (*Weil die eigentlich gleich dick sind.*). Kinder im Vorschulalter zeigen früh Ansätze eines elementaren Begriffsverständnisses von Parallelität. Sie können Eigenschaften wie Neigung und Linienart (z. B. gebogen, gerade) wahrnehmen, zwischen parallelen und nicht parallelen Streckenpaaren unterscheiden und Parallelität als Eigenschaft bei einzelnen Flächenformen erkennen. Dabei beschreiben sie das Verhältnis zweier Strecken zueinander auf drei verschiedene Arten: über den Abstand zwischen den Strecken (*Weil die immer so gleich nebeneinander sind.*), über den Schnittwinkel bzw. die Neigung (*Weil da keine Überkreuzung ist.*) oder über die Richtung (*Weil die beide in die gleiche Richtung gehen.*).

## 4. Ausblick

Ziel der weitergehenden Forschung ist es herauszufinden, wie Kinder im Vorschulalter andere Eigenschaften, wie z. B. Ecken oder Seiten, wahrnehmen und wie sie diese in ihre Wahrnehmungs- und Entscheidungsprozesse miteinbeziehen. Von Interesse ist unter anderem: wenn Kinder ein Quadrat sehen, was nehmen sie dabei wahr, auf welche Eigenschaften achten sie; wenn Kinder aus einem Formenpool Rechtecke wählen sollen, welche Flächenformen wählen sie dann und warum wählen sie diese, d. h. welches Begriffsverständnis von Rechteck haben sie. Um einen Einblick in das tatsächliche Vorgehen (z. B. Wahrnehmen von Flächenformen, Entscheidungen über Repräsentanten und Nicht-Repräsentanten) von Kindern im Vorschulalter bekommen zu können, ist es unabdingbar Begründungen für die getroffenen Entscheidungen einzufordern. So kann Einsicht in notwendige Voraussetzungen beim Begriffserwerb von Flächenformen gewonnen und der Erwerb geometrischer Kompetenzen im Vorschulalter detaillierter beschrieben werden.

## Literatur


Abravanel, E. (1977). The figural simplicity of parallel lines. *Child Development, 48,* 708-710.

Aslan, D. & Aktaş Arnas, Y. A. (2007). Three- to six-year-old children's recognition of geometric shapes. *International Journal of Early Years Education, 15*, 83-104.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Zeitler Hannibal, M. A. & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 192-212.

Lehrer, R., Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mitchelmore, M. (1992). Children's concepts of perpendiculars. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME Conference, Volume 2* (pp. 120-127). Durham: PME.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1971). *Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde*. Donauwörth: Druckerei Ludwig Auer.

Sinclair, N., Freitas, E., & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: the murky and furtive world of mathematical inventiveness. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 45*, 239-252.

Tsamir, P., Tirosh, D. & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 81-95.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.

Ödön VANCSÓ, Budapest

# Reine oder Angewandte Mathematik sollte in der Schule unterrichtet werden?

Diese Frage ist uralt[1], erst bei der Griechen aufgetaucht als die heutige deduktive Mathematik erschien. Sie hat im Unterrichtswesen im XIX. aber wesentlich im XX. Jahrhundert (*nach dem Auftreten* der „New Math" Bewegung) eine Bedeutung gewonnen Humenberger-Reichel (1995) S.14-15.

> „Die Trennung der Mathematik in zwei separate Bereiche – „Reine" und „Angewandte" Mathematik – erfolgte in Ansätzen erst im 19., zum Großteil aber erst im 20. Jahrhundert, eine Entwicklung, die dann noch durch die Erfindung von elektronischen Rechenhilfmitteln fulminant beschleunigt wurde. (s.später bei J. ***Neumann***)"

Später setzt der Zitat folgenderweise fort:

> „Wir verwehren uns dagegen, im Terminus „angewandte Mathematik" einen Gegensatz zur „Reinen Mathematik" zusehen und zu versuchen, die Mathematik in zwei „feindlichen Lager" aufzuspalten."(S. noch im ***Bolyai***'s Fall)

## Bolyai und die fünfte Postulate von Euklid

Die Ableitbarkeitsfrage der fünften Postulate wurde im Mittelalter mehrere Jahrhunderte lang (XV-XVIII.) untersucht, bis der „negativen Lösung" von J. Bolyai und N. I. Lobatschewski 1823-1826. Dies war vom Anfang an eine *rein-mathematische* Frage noch aus dem Altertum uns geblieben. Zwei Forscher haben (wieder unabhängig voneinander) fast gleichzeitig solche Texten bei *Aristoteles* gefunden, die die folgende Behauptung „Es ist möglich eine nicht-euklidischen Geometrie" schon bei der Griechen aufgetaucht, unterstützen: s. Freudenthal, H.(1991) und Tóth, I. (1969).

## Bolyai's Antwort auf die alte Frage der Parallelengerade

*„Ich habe eine neue Welt geschaffen",* wie er formulierte in 1823 in einem Brief zu seinem Vater, als er erst bewiesen hat, dass sowie die Postulate wie auch ihre Negation nicht abgeleitet werden kann. Mit „heutigem Sprachgebrauch" hat *János Bolyai* einen Satz in der Geometrie - verstehend unter Geometrie, die aus den „Rest-axiomen" leitbare Geometrie, die von ihm „*Absolute Geometrie*" genannt wurde - gefunden, der *unentscheidbar* ist (s. den berühmten *Gödel's* Satz fast hundert Jahre später). Wir

[1] die Antwort von Euklid einem Schüler, der von ihm gefragt hat, welche Profit aus meinem Studium bei ihnen stammt. Hersch, R. & Davies, P. J. (1981) S.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

kennen noch eine solche unentscheidbare Behauptung in der Mengentheorie „das Kontinuum-Hypothese" von *Cantor,* G.. Seit dieser Zeit gibt es schon „mehrere Mathematik". Siehe Hersch, R. (1988), S. 132 bzw.138-139. oder Chaitin, G. (2005) Appendix I S.165-166.

**Eine Wendung bei Bolyai's Einstellung**

Der Grund dieser Wendung ist *János Bolyai's hoffnungsloser* Kampf gegen den Zeitgenossen, die Anerkennung seiner Theorie zu erreichen. Er hat verstanden, dass diese nur dadurch möglich ist, wenn er eine *wichtige **Anwendung*** seiner Theorie finden könnte. Seine *geniale Idee* die ***Geometrie des Weltraums*** war, aber diese erst später durch *Einstein* gezeigt wurde. Also der „Rein-Mathematiker" Bolyai ist langsam ein *guter* „Angewandte-Mathematiker" geworden (*gut* im Sinn von Freudenthal, s. unten). Mehr über Bolyai ist im Buch von Weszely, T. (2012) zu lesen. Hier erschien auch die auf Deutsch übersetzte Bolyai Sonette von M. Babits.

**Drei Strömungen gegen der Bewegung „New Math" in 70er Jahren**

(I) der Realistische Mathematik (Freudenthal, H.)

(II) der Komplexe Mathematikunterricht (Varga, T.)

(III) mehrere Gruppen des *Anwendungsorientierten Mathematikunterrichtes*, siehe *die Vertreter* später

Bevor diese Reformbewegungen kurz diskutiert wären, sei eine Behauptung von Struve, H. (1994) zitiert: „Die große Leistung von Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie" bestand darin, eine neue Auffassung über Mathematik entwickelt zu haben. Er zeigte, dass der Begriff der *mathematischen Theorie* auch unabhängig von möglichen Anwendungen *sinnvoll* definierbar ist. In der Historie herrschte bis zum Beginn des XX. Jahrhunderts ein anderes Mathematikverständnis vor, und auch in der Schule wird Mathematik anders gelernt." **Zu (I)** „Das größte Verdienst der Mathematik ist ihre *Flexibilität.* Die Schüler sollen nicht *angewandte Mathematik*, sondern *die Anwendung der Mathematik* lernen. Freudenthal meint also, dass die Schüler lernen sollen, wie man Mathematik anwendet, dass sie selber ihre Modelle bei neuen Situationen entwickeln sollen und dass sie *nicht* auf Modelle zurückgreifen sollen, die schon jemand andere einmal aufgestellt und ausprobiert hat, dass sie die Modelle *nicht* nur einfach *benützen* sollen. Meine Auffassung über die Anwendungen stimmt mit diesem Zitat vollkommen überein. S. Fazit 2. **Zu (II)** Gosztonyi, K. forscht jetzt den MU in Ungarn „vor und mit" T. Varga, was Thema ihre Dissertation wird. Bis die Veröffentlichung ihrer Ergebnisse kommt nur eine unvollständige Namenliste über solche Mathematiker, die mit dem Unterricht (einbezogen auch die Lehrerausbildung) besonders viel beschäftigt haben: *Hajós, Gy.,* *Kürschák*, *J*., *Péter*, *R*., *Gallai*, T., *Kalmár*, *L*., *Rényi*, *A*., *Surányi*, *J*., *Deák*, *E*.. **Zu (III)** Blum, W. (1996) hat in Klagenfurt in einem Vortrag gefragt: *„Welche Organisationsformen für die Verbindung inner- und außermathematischer Komponenten zweckmäßig sind?“* Seine Antwort lautet so: Das Spektrum reicht von *vollkommener Trennung* bis zu *vollkommener Integration* in einem fachübergreifenden Gesamtunterricht. Bemerkungen zu den zwei Extremen von Blum: (i) Vollkommene Trennung bedeutet allgemein das folgende Verfahren: Zuerst wird ein mathematisches Thema ausführlich behandelt und danach kommt eine oder mehrere Anwendungen dazu. Das ist typisch auch im klassischen Mathematikunterricht vor allem auf höheren Stufen. *Ein Beispiel dafür* war das Leben von *Bolyai J*.. (ii) Vollkommene Integration wird immer wieder propagiert und doch im Unterrichtsalltag so gut wie nie realisiert. Blum behauptet: Es ist günstiger ein sachsystematisch aufgebauter Unterricht mit mehreren „lokalen” und ein paar paradigmatisch ausgewählten „globalen” Anwendungsbeispielen, darunter auch projektartige, wenn möglich im Fächerbund behandelte Unterrichtseinheiten (s. MUED Materialien oder das Beispiel Ampelkreuzung Fischer/Malle (1985) S. 122-141). Blum fordert in 1994 mehrere empirische Untersuchungen. Ich selbst habe in zwei solchen Projekte - die diese Untersuchungen in den Schulalltag in verschiedenen Ländern durchgeführt (DQME-II und LEMA Projekte) - zwischen 2004 und 2010 teilgenommen. Auch meine Erfahrungen unterstützen den Standpunkt von Blum.

***Neumann***, J. ist mein perfektes Beispiel wie der „Reine” und der „Angewandte” Mathematiker koexistiert. P. Lax sagte: „Seine Genialität *wurzelte in der Mathematik*; seine Denkart war in allen Lebensbereichen völlig durchdrungen von der mathematischen Denkweise, gepaart mit einem enormen Maß an *gesundem Menschenverstand*. Das gilt für ihn als technischen Experten, nicht anders als bei der Analyse politischer Situationen oder der effizienten Ausführung umfangreicher Berechnungen mit Computer.” Die Fortsetzung der Lax’s Meinung lautet so: „Einer der *wichtigsten Charakterzüge* von *Neumann* war seine *leidenschaftliche Verbundenheit mit dem Problemlösen*. Er war vorsätzlich bestrebt, die Wirksamkeit der Mathematik auch *in außermathematischen Gebieten* zur Geltung zu bringen.“ Ich habe im Vortrag durch ein einfaches Spiel gezeigt, wie der Kern der Spieltheorie auch noch in der Schule verstanden werden kann. Das wird aber erst später mit einem Schulexperiment zusammen publiziert.

**Fazit 1**: Die Wichtigkeit solcher Fragen kennen wir aus „Beliefs” Forschungen, denn wird der Unterricht am stärksten von den Einstellungen der Lehrer/Innen beeinflusst. Deshalb habe ich an unserer Universität einen Kurs für Lehramt Studenten schon am Ende der 90er Jahren angeboten, der sehr erfolgreich bis 2005 - die Einführung der „Bologna-Typ” Lehrerausbildung – weitergelaufen ist. Der Titel war – folgend den Titel des Buches von Currant, R., Robbins, H. – „Was ist die Mathematik überhaupt?”. Der Kurs hat noch auch die Gedanken von Hersch, R. (1988) gebraucht. Im Kurs war ein wichtiger Punkt die Reine vs. Angewandte Mathematik und ihre Beziehungen.

**Fazit 2**: Ich hätte einen verbreiteten *Wahnglaube* – nach dem die meisten Schüler die Mathematik nur brauchen wird, also ist es *genug nur das Gebrauch die Mittel zu erlernen*, die (reine) *Mathematik ist zu vermeiden* – schwächen mögen. Es muss bemerkt werden, dass die wahre, richtige Anwendungen nur von solchen Personen gehofft werden kann, die sich über die Aufbau und die innere Struktur der Mathematik klar sind; unabhängig davon, ob sie sich erst mit reinmathematischen Problemen beschäftigen und später mit ihrer Anwendungen (Bolyai) oder sofort mit komplexen Problemen wie die Spieltheorie oder Quantenmechanik (Neumann).

**Fazit 3**: Eines der wichtigsten Ziele des Unterrichts ist, die Schüler von der Effizienz der mathematischen Denkweise zu überzeugen. Es gibt *Komponenten der Persönlichkeitsentwicklung*, die *nur durch Mathematik (*oder am leichtesten durch Mathematik) gefördert werden können. Welche sind *die Kompetenzen*, in deren Entwicklung der *Mathematik eine vorrangige Rolle* zukommt? Die Behandlung solcher Fragen sollte als besonders wichtiges Forschungsgebiet in der Mathematikdidaktik angesehen werden.

## Literatur


Humenberger, J., Reichel, H.-Ch.(1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik, S. 13-14. (BI Verlag Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich)

Freudenthal, H.(1991) Nichteuklidische Geometrie im Altertum? In: Archive for History of Exact Science 43, 1991/92, 189-197.

Tóth, I.: Non Euclidian Geometry before Euklid? Scientific Am. 221/5, 1969, 87-98.

Hersch, R.& Davies, P.J. (1981): The Mathematical Experience Cambridge: Birkhäuser

Hersch, R. (1988): What is Mathematics, really? Vintage, London

Chaitin, G. (2005):Meta Math! Vintage New York

Weszely, T. (2012): János Bolyai - Die ersten 200 Jahre. Birkhäuser 2012 (Springer) http://www.springer.com/birkhauser/history+of+science/book/978-3-0346-0045-3

Struve, H.(1994): Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in Mathematik erfahren und lernen Festschrift für Hans-Joachim Vollrath Klett Verlag 1994, S. 227

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematiknterricht - Trends und Perspektiven, Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky Wien

Fischer, R., Malle, G. (1985): Mensch und Mathematik. BI Verlag, Mannheim

Lara VANFLOREP, Paderborn

# Einflüsse von Praxisphasen auf das professionelle Selbst angehender Mathematiklehrkräfte

Die Inkraftsetzung des Lehrerausbildungsgesetzes (LABG) NRW vom 12. Mai 2009 hatte für Lehramtsstudiengänge an Universitäten in NRW die Neustrukturierung der Praxisphasen zur Folge (vgl. §12 Praxiselemente, Abs.1). Absolvierten Lehramtsstudierende im Fach Mathematik zuvor ihr Fachpraktikum innerhalb von vier Wochen, ist nun ein fünfmonatiges Praxissemester im Masterstudiengang implementiert. Ein zentrales Ziel dieser Praxisphase ist laut Lehramtszugangsverordnung vom 18. Juni 2009, dass „die Studierenden des Praxissemesters über die Fähigkeit verfügen [sollen], ein eigenes professionelles Selbst zu entwickeln."

## Fragestellung

Diese Forderung sowie die Umstellung des Lehramtsstudiums sind Anlass zu fragen, inwiefern sich Praxisphasen auf das professionelle Selbst angehender Mathematiklehrkräfte auswirken. Um dieser Frage nachgehen zu können, muss jedoch zunächst geklärt werden, wie diese Auswirkungen beschrieben werden können. Dies steht im Zentrum des vorliegenden Beitrags.

## Das professionelle Selbst

Betrachtet man Konzeptualisierungen der professionellen Kompetenz angehender Mathematiklehrkräfte in einschlägigen mathematikdidaktischen Studien (vgl. u.a. MT21, TEDS-M, COACTIV), so stellt man schnell fest, dass zur Beschreibung der Auswirkungen von Praxisphasen auf das professionelle Selbst ein neuer theoretischer Ansatz erforderlich ist, da weder Praxisphasen noch das professionelle Selbst als solches Gegenstand der Betrachtung sind. Der Erziehungswissenschaftler Karl-Oswald Bauer (1996) hingegen berücksichtigt diese beiden Komponenten in seiner Theorie. Im Kern seines Modells steht das professionelle Selbst, dessen Entwicklung maßgeblich von Praxisphasen beeinflusst wird. Doch was ist das professionelle Selbst und wie entsteht es? Das professionelle Selbst ist das organisierende Zentrum, das zum einen Werte und Ziele, Handlungsrepertoires, Fachwissen und Fachsprache, Wahrnehmung und Feedback miteinander verbindet (Bauer, 2002, S.55). Zum anderen entwickelt sich das professionelle Selbst auf eine eigene Weise. Ohne äußere Anreize oder die Aussicht auf Belohnung setzt es sich stets neue Ziele und „betrachtet die eigene berufliche Weiterentwicklung und die Erweiterung der beruflichen Handlungskompetenz als lohnende Aufgabe" (Bauer, 1998, S.354f.). Einfacher

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ausgedrückt spricht Bauer (1998) von dem professionellen Selbst als das Bewusstsein von der persönlichen Entwicklungsaufgabe, das die eigene (imperfekte) Professionalität steuert. Diese Unvollkommenheit versucht der Akteur, in seiner Praxis zu überwinden. Somit offenbart sich das professionelle Selbst nicht nur im unterrichtlichen Handeln, sondern es erzeugt sich dort selbst (Bauer, 2002, S.55). Das bedeutet, dass ein Entwurf des eigenen Selbst in der Praxis erprobt und immer wieder neu gefasst wird.
Wenn das professionelle Selbst also das Bewusstsein über die eigene Professionalität bezeichnet, so bedeutet es, dass es der Reflexion zugänglich ist. Wenn es der Reflexion zugänglich ist, so sollte es sich wiederum in einem qualitativen Forschungsansatz und konkret in Gesprächen, also mittels Interviews, erfassen lassen.

## Datenerhebung und Vorstellung zweier Fallbeispiele

Aus diesem Grund wurde für die Datenerhebung das offene Leitfadeninterview gewählt (Helfferich, 2009, S.178ff.). Befragt wurden zunächst sechs Mathematikstudierende des Grundschullehramts mit der kurzen Praxisphase von vier Wochen, jeweils vor und nach dem schulischen Aufenthalt. Zwölf weitere Mathematikstudierende des Grundschullehramts werden derzeit im Praxissemester begleitet und stellen die Vergleichsgruppe zu den Studierenden mit der kurzen Praxisphase dar.

Im Folgenden werden zwei typische Fallbeispiele hinsichtlich ihres Bewusstseins über die eigene (imperfekte) Professionalität vorgestellt. Im Vordergrund steht dabei zunächst das theoretische Interesse, ob die *persönliche Entwicklungsaufgabe* ein geeignetes Konzept ist, um die Auswirkungen einer Praxisphase auf das professionelle Selbst zu beschreiben. Die Daten wurden mit Hilfe der Auswertungsmethoden der Grounded Theory kodiert und analysiert (Strauss & Corbin, 1996).

Beide Studierenden befanden sich zum Zeitpunkt der Befragung am Ende ihres Hauptstudiums und hatten zuvor lediglich das bildungswissenschaftlich begleitete Orientierungspraktikum absolviert, das der kritisch-analytischen Auseinandersetzung mit der Schulpraxis und der Entwicklung einer professionsorientierten Perspektive für das weitere Studium dient (LABG §12 Praxiselemente, Abs.2). Somit handelt es sich um vergleichbare Rahmenbedingungen vor Beginn des Mathematikpraktikums. Dennoch sind nach Abschluss der Praxisphase divergente Erkenntnisse hinsichtlich der Auswirkung des schulischen Aufenthalts zu beobachten.

Die befragte Studentin konnte bereits vor Beginn des Praktikums eine detaillierte Einschätzung ihrer Kompetenz als Mathematiklehrerin betreffend zum Ausdruck bringen. Für sie stand im Vorgespräch fest, dass ihr Kompe-

tenzen im Vermittlungsbereich fehlen: „Also gerade beim Formulieren muss ich aufpassen, das weiß ich[1].“ Hier artikuliert die Studentin eine eigene Entwicklungsaufgabe. Das Bewusstsein darüber wurde auch im Nachhinein besonders deutlich, indem sie betonte: „Da wusst‘ ich ja, wie gesagt, dass das [Formulieren] mein kleiner Knacks ist.“ Folglich bestand ihr Ziel für die bevorstehende Praxisphase darin, auf klare Formulierungen zu achten. Dass sprachliche Sensibilität vornehmlich im Mathematikunterricht bedeutsam ist, begründet die Studentin damit, dass in diesem einerseits Regeln explizit erklärt werden müssen, andererseits aber auch Texte in Form von Sachaufgaben sowie Fachbegriffe in der Unterrichtssprache vorkommen.
Im Nachgespräch konnte nicht nur eine positive Entwicklung im Hinblick auf die eigene Formulierungskompetenz beobachtet werden, sondern auch ein Perspektivwechsel in demselben Kompetenzbereich. Aufgrund von frisch erlebten Erfahrungen aus dem Mathematikpraktikum scheint der Studentin bewusst geworden zu sein, dass die bereits erkannte sprachliche Sensibilität sowohl in der mündlichen als auch in der schriftlichen Kommunikation, z.B. bei der Konzeption von Arbeitsblättern, eine Rolle spielt.

Stellt man dieser Beobachtung das zweite Fallbeispiel gegenüber, so konnte der befragte Student vor der Praxisphase wenig konkrete Aussagen darüber treffen, wie er seine Kompetenz als Mathematiklehrkraft einschätzt. Ihm war zwar bewusst, dass sie „noch ausbaufähig“ ist, jedoch konnte er seine Entwicklungsaufgabe noch nicht artikulieren. Sie war ihm zu diesem Zeitpunkt noch nicht bewusst.
Nach Ablauf der Praxisphase konnte der Studierende hingegen sehr detailliert auf dieselbe Frage antworten. Folglich scheinen ihm viele Komponenten der eigenen Kompetenz als Mathematiklehrer bewusst geworden zu sein. So ging er bspw. auf Planungskompetenzen, allgemein didaktische sowie fachspezifische Kompetenzen und auf die Lehrerpersönlichkeit ein. Besonders betonte er jedoch das Wissen über die Lernvoraussetzungen seiner Schülerinnen und Schüler und im Speziellen ihre sprachlichen Lernvoraussetzungen. Der Studierende möchte sich im Hinblick auf „kindgerechte Ausdrucksweisen“ weiterentwickeln. Dies wird besonders in der folgenden Aussage deutlich: „Also, dass man differenziert, wie man selber das erklären würde und wie das vielleicht didaktisch sinnvoller wäre. Dass man das vielleicht auch gegenüberstellt. Das kann ja auch mathematikspezifisch sein.“ Hier artikuliert der Student eine Möglichkeit, sich dem Entwicklungsbedarf in Form eines universitären Seminars anzunehmen.

[1] Diese und die folgenden zitierten Aussagen stammen aus den entsprechenden Interviewtranskripten.

Zusammenfassend können zwei unterschiedliche Entwicklungsverläufe festgehalten werden: Einerseits ein solcher, der bereits vor Antritt des Mathematikpraktikums eine detaillierte Auffassung einer Entwicklungsaufgabe aufweist und im Nachhinein einzig einen Perspektivwechsel impliziert. Andererseits ein solcher, in dem vor Absolvierung der Praxisphase keine Konkretisierung der Entwicklungsaufgabe deutlich wird und erst im Nachhinein ein differenzierteres Bild davon zum Vorschein kommt, in welchen Kompetenzbereichen eine Weiterentwicklung erforderlich bzw. anzustreben ist.

## Fazit

Anhand der vergleichenden Analyse der beiden Fallbeispiele wird deutlich, dass die Rekonstruktion der *eigenen Entwicklungsaufgabe* der Studierenden ein sinnvoller Ansatz zu sein scheint, mit dessen Hilfe sich Auswirkungen von Praxisphasen auf das professionelle Selbst konzeptualisieren und beschreiben lassen.

Diese Möglichkeit der Rekonstruktion wird zunächst an weiteren Fallbeispielen überprüft, bevor in einem nächsten Schritt darauf aufbauend die Auswirkungen von Praxisphasen im Einzelnen analysiert und ausgewertet werden können.

## Literatur


Bauer, K.-O., Kopka, A. & Brindt, S. (1996). *Pädagogische Professionalität und Lehrerarbeit. Eine qualitativ empirische Studie über professionelles Handeln und Bewusstsein*. Weinheim/München: Juventa-Verlag.

Bauer, K.-O. (1998). Pädagogisches Handlungsrepertoire und professionelles Selbst von Lehrerinnen und Lehrern. *Zeitschrift für Pädagogik 44* (3), 343 – 359.

Bauer, K.-O. (2002). Kompetenzprofil LehrerIn. In H.-U. Otto et al. (Hrsg.), *Erziehungswissenschaft: Professionalität und Kompetenz (*S. 49 – 63*)*. Stuttgart: utb.

Helfferich, C. (2009). *Die Qualität qualitativer Interviews: Manual für die Durchführung qualitativer Interviews*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Ministerium für Inneres und Kommunales des Landes Nordrhein-Westfalen (2009). *Gesetz zur Reform der Lehrerausbildung*. Verfügbar unter: https://recht.nrw.de/lmi/owa/br_vbl_detail_text?anw_nr=6&vd_id=11419&ver=8&val=11419&sg=0&menu=1&vd_back=N [24.02.2015].

Ministerium für Inneres und Kommunales des Landes Nordrhein-Westfalen (2009). Verordnung über den Zugang zum nordrhein-westfälischen Vorbereitungsdienst für Lehrämter an Schulen und Voraussetzungen bundesweiter Mobilität (Lehramtszugangsverordnung - LVZ). Verfügbar unter https://recht.nrw.de/lmi/owa/br_bes_text?anw_nr=2&gld_nr=2&ugl_nr=223&bes_id=12808&aufgehoben=N&menu=1&sg=0 [25.02.2015].

Strauss, A., Corbin J. (1996). *Grounded Theory. Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz, Psychologie-Verlag-Union.

Emese VARGYAS, Mainz

# Mathematisches Entdecken am Beispiel der Wechselwegnahme

## Motivation

Die Forderung, für Schülerinnen und Schüler erfahrbar zu machen, „dass sich die Bedeutung der Mathematik als Wissenschaft nicht auf den Anwendungsbezug reduzieren lässt“, hat Einzug auch in die rheinland-pfälzischen Lehrpläne gefunden. Gleichzeitig soll die Beschäftigung mit Mathematik als Tätigkeit erlebt werden, „die um ihrer selbst willen betrieben wird und Freude bereiten kann“ (vgl. MfBWW-RLP). Da diese Ziele in den Lehrplänen relativ allgemein formuliert sind, stellt sich die Frage nach der konkreten Umsetzung. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Möglichkeit aufzuzeigen, wie ein Mathematikunterricht in diesem Sinne zu einer gymnasialen Bildung beitragen könnte. Den Anstoß dafür hat die Veranstaltung „Didaktik der Algebra“ an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz gegeben. Die Studierenden (angehende Gymnasiallehrer) waren im Rahmen dieser Veranstaltung mit dem klassischen Beweis der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale in einem Quadrat konfrontiert.

Dieser Beweis durch Wechselwegnahme wurde in der Literatur von vielen Autoren unter verschiedenen Aspekten beschrieben. So findet man dazu zum Beispiel bei Toeplitz (1949) eine kurze historische Exkursion. Ausgehend von der Frage „In welchem Längenverhältnis ist eine Figur ähnlich zu vergrößern, damit ihre Fläche verdoppelt werde?“, weist A. I. Wittenberg in seinem Buch „Bildung und Mathematik“ auf eine mögliche Behandlung der oben genannten Inkommensurabilität im gymnasialen Mathematikunterricht hin. Spies (2012) geht in ihrer Arbeit vom ästhetischen Standpunkt an dieses Thema heran. Eine Skizze des Beweises ist noch in manchen Lehrbüchern für die neunte Klasse zu finden (z.B. Schmid & Weidig), auch wenn nur am Rande des Kapitels zur Einführung der reellen Zahlen. Abbildung 1 fasst diesen Beweis kurz zusammen:

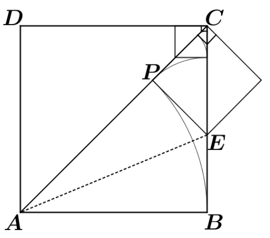



**Abb. 1:** Diagonale und Seite eines Quadrates sind inkommensurabel

Angenommen, Diagonale und Seite des Quadrates ABCD wären kommensurabel, so würde ein gemeinsames Maß m existieren, so dass $s_1 = |AB| = m \cdot k_1$, $d_1 = |AC| = m \cdot l_1$, wobei $k_1, l_1 \in N$. Da laut Konstruktion $s_2 = |CP| = d_1 - s_1 = m(l_1 - k_1) = m \cdot k_2$ und $d_2 = |CE| = s_1 - s_2 = 2s_1 - d_1 = m \cdot (2k_1 - l_1) = m \cdot l_2$, wobei $k_2, l_2 \in N$, folgt, dass auch im

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zweiten Quadrat Seite und Diagonale mit demselben Maß m messbar sind. Da man diese Argumentation unendlich weiter fortsetzen kann, werden die entstehenden Quadrate beliebig klein. Dadurch kann man zu jedem gemeinsamen Maß m ein Quadrat finden, dessen Seite und Diagonale kleiner sind als dieses. Das bedeutet: m kann kein gemeinsames Maß von Seite und Diagonale im ursprünglichen Quadrat sein.

Nach einer entsprechenden Vorbereitung (Euklidischer Algorithmus, gemeinsames Maß zweier Strecken, kommensurable Strecken) hat es den meisten Studierenden keine Probleme verursacht, den Beweis nachzuvollziehen. Schwierigkeiten sind aber bei der Übertragung der Beweisidee auf andere Fälle aufgetreten. Unklar war auch, warum man gerade das Lot in P auf AC oder die Winkelhalbierende AE des Winkels $\widehat{BAC}$ einzeichnen sollte, wie es die meisten Quellen suggerieren. Abbildung 2 zeigt, wie man mittels Faltens auf die Idee des Lotes PE oder der Winkelhalbierenden AE kommen könnte. Durch Wiederholung des Schrittes „trage auf der längeren Strecke die kürzere ab“ gelangt man dann zur Abbildung 2.

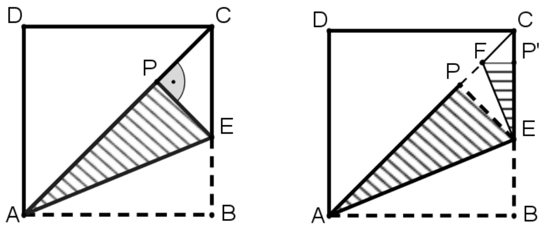


**Abb. 2:** Falten eines Quadrates

## Irrationalität von $\sqrt{3}$

Nachdem dieser Beweis hinreichend durchleuchtet wurde, stellte sich die Frage, inwiefern die Methode auch auf andere Fälle übertragbar ist.

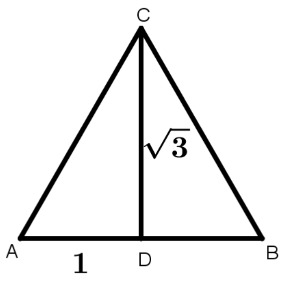


**Abb. 3: Wurzel 3**

Möchte man die Frage für $\sqrt{3}$ beantworten, so bietet sich als mögliche Ausgangsfigur das gleichseitige Dreieck ABC mit Seitenlänge 2 (cm) an. Wie aus Abbildung 3 ersichtlich, ist die Irrationalität von $\sqrt{3}$ äquivalent zur Inkommensurabilität der Strecken AD und CD.

Wenn man das Dreieck gemäß Abbildung 4 faltet und versucht, zu der ursprünglichen Figur (d.h. dem gleichseitigen Dreieck) ähnliche Figuren zu erstellen, gelangt man zu folgenden Beweisideen (Abbildung 5):

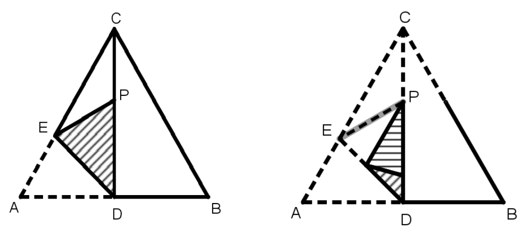


**Abb. 4:** Falten eines Dreiecks

Schlägt man einen Kreis um Punkt D mit Radius $|AD|$, so schneidet dieser die Höhe CD im Punkt E. Die Differenz $|CD| - |AD|$ lässt sich entweder auf der Strecke ED (links: Kreis um E mit Radius $|EC| = |EF| = \sqrt{3} - 1$) oder auf AD (rechts: Parallele zu BC durch F) abtragen. Mittels der übrig gebliebenen Strecke $A_1D$ bildet man das gleichseitige Dreieck $A_1B_1C_1$. Sei $|AD| = b = 1$ und $|CD| = a = \sqrt{3}$. Dann folgt aus der Konstruktion, dass $|A_1D| = 2b - a$ und $|C_1D| = 2a - 3b$. Angenommen, im ursprünglichen Dreieck ABC wären die Strecken a und b mit einem gemeinsamen Maß m messbar, so wären auch im neuen Dreieck $A_1B_1C_1$ Höhe und Hälfte der Seitenlänge mit demselben Maß m messbar. Da man die Konstruktion unendlich weiter fortsetzen kann, führt die Annahme eines gemeinsamen Maßes, ähnlich wie beim Quadrat, zum Widerspruch.

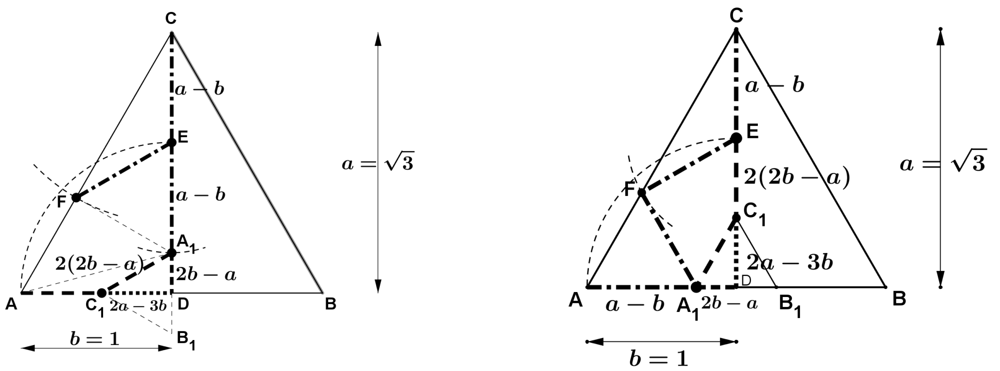



**Abb. 5:** Wechselwegnahme beim gleichseitigen Dreieck

## Von der Geometrie zur Algebra

Was kann man aus der Abb. über $\sqrt{3}$ ablesen? Auf dem rechten Bild erkennt man, dass

$$\sqrt{3} = |CD| = |AD| + |CE| = 1 + |CE| \qquad (1)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A_1DC_1$ und ADC folgt, dass $\frac{|A_1D|}{|AD|} = \frac{|C_1D|}{|CD|}$, d.h. $\frac{1-|CE|}{1} = \frac{\sqrt{3}-|CE|-2(1-|CE|)}{\sqrt{3}}$. Daraus ergibt sich, dass $|CE| = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (1) ein, so folgt die bekannte Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1+\frac{2}{2+\frac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\cdots}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\cdots}}} = [1;\overline{1,2}]$$

Hat man sich hier Erkenntnisse aus der Geometrie im Kontext der Algebra zu Nutze gemacht, stellt sich die Frage, ob das auch umgekehrt möglich ist.

## Von der Algebra zur Geometrie

Für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ gibt es verschiedene algebraische Beweise (vgl. Harris), für die vorliegende Arbeit betrachtet man Fermats Beweis mit der Methode des unendlichen Abstiegs (vgl. Harris). Aus der Annahme, dass $\sqrt{3} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}$, folgt nach Umformung, dass $\frac{a}{b} = \frac{3b-a}{a-b}$, wobei $3b - a, a - b \in \mathbb{N}$ und $3b - a < a, a - b < b$. Nun stellt sich die Frage, ob man im vorherigen gleichseitigen Dreieck das Verhältnis $\frac{3b-a}{a-b}$ finden kann. Dafür verlängert man die Seite BC über B hinaus um die Länge b und schlägt um C einen Kreis mit Radius a.

Das entstandene Dreieck $A_1D_1C_1$ bildet die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Seitenverhältnis $\frac{|C_1D_1|}{|A_1D_1|} = \frac{3b-a}{a-b}$. Diese Konstruktion kann man unendlich weiter fortführen. Dadurch entsteht eine unendliche Kette gleichseitiger Dreiecke mit Seitenverhältnissen, bei denen sowohl Zähler als auch Nenner immer kleiner werdende natürliche Zahlen sind, was schließlich zum Widerspruch führt.

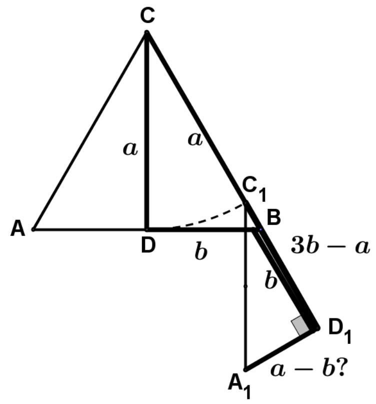



**Abb. 6:** Unendliche Dreieckskette

Der/die interessierte Leser/in ist eingeladen, weitere Möglichkeiten für die Erstellung des Verhältnisses $\frac{3b-a}{a-b}$ im Dreieck ABC zu finden.

## Literatur


Harris, V. C. (1971). On Proofs of the Irrationality of $\sqrt{\mathbf{2}}$. *The Mathematics Teacher*, 64(1), 19-21.

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung Rheinland-Pfalz (1998). *Lehrplan Mathematik: Gymnasiale Oberstufe*.

Schmid, A. & Weidig, I. (Hrsg.) (2001). *Lambacher Schweizer 9, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium*. Stuttgart: Ernst Klett.

Spies, S. (2012). Schön irrational! – Irrational schön? Ein klassischer Unterrichtsgegenstand aus mathematikästhetischer Perspektive. *mathematica didactica*, 35, 5-24.

Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*. Berlin: Springer.

Wittenberg, A. I. (1963). *Bildung und Mathematik*: *Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Stuttgart: Ernst Klett

Ingrida VEILANDE, Riga

# Notes on the students' solutions of Mathematical Olympiad problems

**Introduction.** The quality of mathematics education in schools of Latvia can be evaluated by several criteria: on national level – by the results of centralized examination, by diagnostic tests, by students' achievements in educational Olympiads, and in international comparison – by analysis of results of students' assessment programs such as TIMSS and PISA. These statistics identify the major problems in mathematics education.

**The level of mathematical knowledge of Latvian students.** Last year's (2014) results of centralized examination in mathematics for high school students demonstrate that a considerable large part of them had moderate, superficial mathematical knowledge – the mean score of the results was 43.34%. Especially students' performance in problem solving was poor – the mean score in this part of examination was only 15.10%. Latvian students demonstrate quite an average level of proficiency in mathematics in international comparison as well. In PISA 2012 study, students achieved a mean score 491 which is below the OECD average score 494. The relevant criterion in this assessment was the number of top performers in mathematics. Only 3.7% of participants demonstrated good problem solution skills, which is below the average OECD score 4.4% (OECD, 2014). Searching for ways to fill the gaps in mathematics education and to improve students' mathematical knowledge, the National Centre for Education produces various diagnostic tests and conducts the analysis of results. Some of the most recent results in primary school indicate that students have little experience in solving non-standard problems, which may be due to the lack of such problems in textbooks, as well as to the difficulties that teachers face in applying modern didactic methods (Krastina, Vituma, 2014).

**To improve the quality of mathematics education,** there were amendments made to mathematics curriculum in elementary education in 2013, emphasizing the students' mastering of mathematical problem solving skills, and the development of thinking. In this scope the teachers' guide books could be supplemented by non-standard mathematics problems and didactic advice to introduce students to the methodology of problem solving.

Considering the fact that the set of Mathematical Olympiad problems differs rather significantly from the tasks included in textbooks, one can find in students' Olympiad works most diverse problem-solving approaches, which to a certain extent characterize their knowledge, way of thinking,

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

originality of ideas, and views on the solution of the problem. The analysis of these works could help school teachers develop a methodology of mathematics classes.

**Geometry problems in Open Mathematical Olympiad.** Open Mathematical Olympiad (OMO), organized for every student from the $1^{st}$ till the $12^{th}$ grade, can test their competences in problem solution. Because of the large number of participants (approximately 3000 in the last few years), students' Olympiad works implicitly reflect the teaching-learning methods used in the schools of Latvia. Some of the works reveal the gaps in the students' mathematical knowledge.

The OMO problem set contains many challenging problems including the tasks of combinatorial and Euclidean geometry. Here the notes on solutions of 3 geometry problems will be presented. Two problems for $6^{th}$ and $10^{th}$ grade are of combinatorial type. The third problem for $8^{th}$ grade can be solved in combinatorial way or by using results of Euclidean geometry.

<u>Problem 1.</u> (OMO39, $6^{th}$ grade.) Dissect the square into two equal polygons a) hexagons; b) heptagons.

<u>Problem 2.</u> (OMO41, $8^{th}$ grade.) Line segments AB, BC, CD and DE are constructed in the vertices of orthogonal lattice (see figure 1.a)). Which of the angles is bigger: ∠ABC or ∠ CDE?

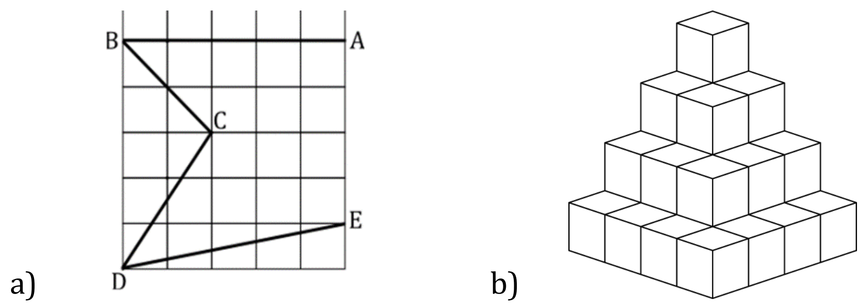



**Figure 1. a)** Problem 2; **b)** Problem 3.

<u>Problem 3.</u> (OMO38, $10^{th}$ grade.) A tower is constructed from equal cubes of size 1 x 1 x 1 (see figure 1.b). Is it possible to construct such a tower a) from duo-blocks of size 1 x 1 x 2; b) from L – shaped blocks containing 3 cubes?

**Students' solutions.** Both parts of the first problem can be solved in different ways: case a): joining the opposite sides of square by broken line; case b): joining the opposite vertices. There were 16% of students that drew the answers straight away. 36% of participants solved only case a), 3% solved only case b). A quarter of students did not find any correct dissection. An investigation of drafts made by students showed that they were interested in this problem, sometimes drawing more than 20 figures. Some of the students analyzed the configurations of polyominoes, whereas the sense of the given problem is based on the symmetry principle. There were some creative solutions too: one of the participants dissected every unit square of the given figure into two triangles to determine the correct dissection of the square into hexagons. Another student constructed two equal hexagons inside the square and then filled the empty places to get the answer.

Second problem OMO41 can be solved by the investigation of different configurations of the rectangle of size 2 x 3 unit squares. Such an original approach can be named „a proof without words" (see figure 2).

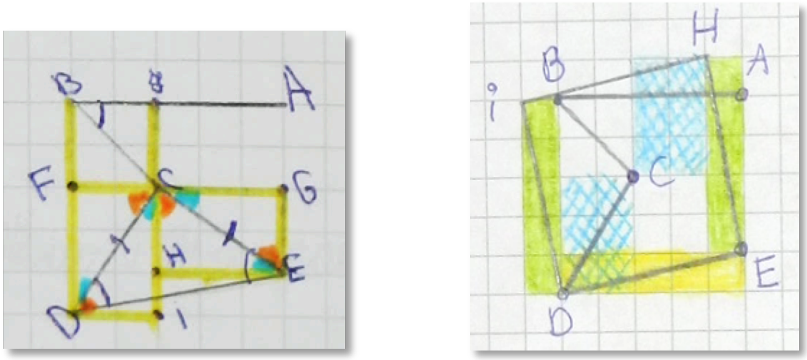



**Figure 2.** Examples of solution of the problem OMO41.

Using this method, the problem was solved by 4.6% of participants. All of the students who tried to prove the equivalence of given angles using the results of Euclidean geometry did not solve the problem. Some students noted the possibility to turn the angle ∠ CDE, but did not complete the construction to find the similar triangles and to use the Pythagorean theorem.

The $10^{th}$ grade problem consists of two different parts. 27% of students demonstrated good spatial imagination. They interpreted the construction of L-shaped blocks by coloring all separate layers, or used the enumeration of unit cubes of the tower, or drew 3-dimensional constructions. Case a) need to be proved. Only 7% of students did the correct proof of impossibility of the given construction. One of the shortest ways of solution is the use of the method of invariants by implementation of coloring of the unit cubes in chessboard fashion. Most students tried to research examples of the construction, but none made the full enumeration of all variants. Figure 3 shows a student's experiment to complete the construction by duo-blocks. The question marks suggest to remind the well-known problem about the covering of chessboard by dominoes if two squares are cut out from the same diagonal of the board (Soifer, 2010).

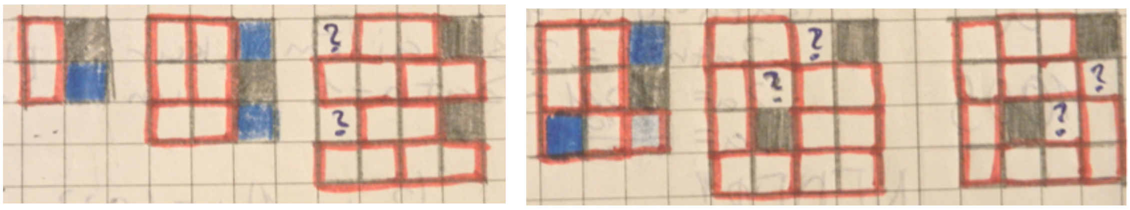


**Figure 3**. Schematic constructions of the tower by duo-blocks.

Combinatorial geometry problems are problems that almost all participants of Olympiads try to solve. The evaluation of students' works characterizes the differences in their performance and shows the deficiencies that have to be eliminated. A significant part of students are not flexible at the stage of problem analysis: they chose only one way of solution and did not change their viewpoint. Students do not know the main solution methods of geometry tasks. Students have difficulties with mathematically correct argumentation, explanation, and justification. Regardless of the fact that the students did not solve the problems completely, they had interesting, lively ideas that have to be developed.

**Conclusion.** Many challenging Olympiad problems can be introduced in mathematics classes in an appropriate way. Geometry tasks develop students' imagination and promote students' skills of mathematical argumentation. So the first problem could be to supplement the topic on symmetry, where the initial question, for example, could be: in how many ways can the rectangle be dissected by one or more straight lines? The second problem can be recommended to the topic on the similar triangles, application of Pythagorean theorem, or rotation of figures. The last problem is useful in combinatorial calculations and in mastering heuristic problem solution methods and general reasoning methods.

## Literature

Krastina, E., Vituma, M. (2014) *Diagnostic work in mathematics for 6$^{th}$ grade in school year 2013/2014: analysis of results and recommendations.* (in Latvian) URL (26.02.2015):http://visc.gov.lv/vispizglitiba/eksameni/dokumenti/metmat/2013_2014_ddarbs_matem_6kl_met_mat.pdf

OECD (2014), PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014), PISA, OECD Publishing.

Soifer, A. (2010). Geometric Etudes in Combinatorial Mathematics. New York: Springer

Sylvia VOGEL, Berlin, Stephanie SCHULER, Ludwigsburg, Gerald WITTMANN, Freiburg

# Untersuchung der Konstruktvalidität mathematikdidaktischer Kompetenztests bei angehenden frühpädagogischen Fachkräften

Gegenwärtig werden in mehreren Forschungsprojekten Instrumente zur Messung mathematikdidaktischer Kompetenzen von ErzieherInnen und LehrerInnen entwickelt und eingesetzt. Dabei stellt sich die Frage, ob – trotz jeweils unterschiedlicher Konzeptualisierungen und Operationalisierungen mathematikdidaktischer Kompetenzen – die Konstruktvalidität gewahrt werden kann. Ein erster Ansatz dazu wird in diesem Beitrag vorgestellt: Die Projekte KomMa (Jenßen et al. 2015) und AnschlussM (Carle & Wittmann 2015), die unabhängig voneinander geplant und durchgeführt wurden, zielen beide unter anderem auf das professionelle Wissen von ErzieherInnen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Es liegt deshalb nahe, in einem Anschlussprojekt die Konstruktvalidität der Instrumente an einer gemeinsamen Stichprobe zu prüfen.

## 1. Testinstrumente und dahinter stehende Konstrukte

Das Testinstrument aus dem Projekt KomMa erfasst in Anlehnung an Shulman (1986) mathematisches, mathematikdidaktisches und pädagogisches Wissen mittels dreier Skalen eines Paper-Pencil-Tests, dessen Aufgaben überwiegend aus Multiple-Choice-Items und einigen offenen Items bestehen. Motivationsaspekte und Einstellungen gegenüber Mathematik werden mit vier weiteren Skalen ermittelt. Neben Spaß und Interesse an Mathematik sind dies drei modifizierte Skalen nach Grigutsch, Raatz & Törner (1998): Anwendungs-Aspekt, Prozess-Aspekt sowie zusammengefasst Formalismus- und Schema-Aspekt.

Mit dem (teilweise bereits deutlich weiterentwickelten) Testinstrument aus dem Projekt AnschlussM werden unter anderem zwei Konstrukte gemessen: Ein Multiple-Choice-Test (Binärfragen) erhebt elementarmathematisches und mathematikdidaktisches Wissen in einer kompakten, 14 Items umfassenden Skala. Sieben Bildvignetten mit offenen Freitextantworten zielen auf die Erfassung handlungsnaher mathematikdidaktischer Kompetenzen, die über das mathematikdidaktische Wissen hinaus gehen.

Während das KomMa-Testinstrument speziell für ErzieherInnen entwickelt wurde, bezieht sich das AnschlussM-Testinstrument auf professionelle Kompetenzen von ErzieherInnen und LehrerInnen die notwendig sind, um Kinder im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule mathematikdidak-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

tisch adäquat begleiten zu können. Beiden Projekten liegen also entsprechend der jeweiligen Forschungsziele unterschiedliche Konzeptualisierungen mathematikdidaktischer Kompetenzen pädagogischer Fachkräfte zugrunde.

## 2. Forschungsziele und -methoden

Das mathematische und mathematikdidaktische Fachwissen und die mathematikbezogenen Überzeugungen können als latente Merkmale gelten, die sich im Handeln der jeweiligen Personen (korrespondierende manifeste Merkmale) äußern. Empirisch schließt man von den beobachtbaren Indikatoren (konkret: Testaufgaben) auf die dahinter stehende Kompetenz bzw. auf einzelne Kompetenzfacetten. Die Konstruktvalidität bedeutet, dass die Messung eines Konstrukts weder durch systematische Fehler noch durch andere Konstrukte verfälscht ist, dass also der Bedeutungsumfang des Konstruktes vollständig, präzise und nachvollziehbar abgebildet wird. Als empirische Indikatoren der Konstruktvalidität gelten die konvergente und divergente Validität, die durch Skaleninterkorrelationen beschrieben werden. „Anstatt ein einziges manifestes Außenkriterium zu benennen, formuliert man ein Netz von Hypothesen über das Konstrukt und seine Relationen zu anderen manifesten und latenten Variablen. [...] Der Umstand, dass Testwerte so ausfallen, wie es die aus Theorie und Empirie abgeleiteten Hypothesen vorgeben, kann als Indiz für die Konstruktvalidität des Tests gewertet werden." (Bortz & Döring 2006, S. 201)

Konkret bedeutet dies: Sowohl im Projekt KomMa als auch im Projekt AnschlussM wurden Skalen konstruiert, die das Konstrukt mathematikdidaktisches Wissen erfassen sollen (wenngleich in unterschiedlicher Konzeptualisierung und Operationalisierung). Zwischen diesen beiden Skalen wird deshalb die höchste Korrelation vermutet. Umgekehrt ist die niedrigste Korrelation zwischen jenen Skalen zu erwarten, die verschiedene Konstrukte mit unterschiedlichen Methoden erheben. (Methode meint hier unterschiedliche Testinstrumente.) Grundsätzlich ist dahinter die Idee des Multitrait-Multimethod-Ansatzes (vgl. Schmermelleh-Engel & Schweizer 2012) zu erkennen, auch wenn die Zahl der zu prüfenden Relationen im vorliegenden Fall deutlich geringer ist.

Weiter ist nach Weinert (2001) davon auszugehen, dass die Überzeugungen von Studierenden der Frühpädagogik (konkret: das Bild von Mathematik nach Grigutsch, Ratz & Törner 1998) eine wesentliche Facette der professionellen Kompetenz sind und daher in enger Beziehung zum mathematikdidaktischen Wissen stehen.

Es werden folgende Forschungsfragen formuliert:

- Lassen sich Maße für die konvergente und divergente Validität und somit für die Konstruktvalidität der in beiden Projekten entwickelten Instrumente ableiten?
- Welche Zusammenhänge zwischen den individuellen Überzeugungen zur Mathematik und dem mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen lassen sich mit den beiden Testinstrumenten empirisch nachweisen?

Die Analysen beruhen auf den Daten von N = 120 angehenden frühpädagogischen Fachkräften, die an baden-württembergischen Fachhochulen und Pädagogischen Hochschulen in Freiburg, Heidelberg und Ludwigsburg studierten, überwiegend im zweiten Fachsemester; der Altersdurchschnitt beträgt 22,7 Jahre; 110 Studierende waren weiblich (92%). Die Erhebung wurde im Sommersemester 2014 durchgeführt.

In einem ersten Ansatz wurden zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage die Testergebnisse bzw. die Kompetenzparameter der drei mit dem KomMa-Testinstrument erfassten Skalen mathematisches, mathematikdidaktisches und pädagogisches Wissen sowie der beiden mit dem AnschlussM-Testinstrument erfassten Skalen elementarmathematisches und mathematikdidaktisches Wissen und handlungsnahe mathematikdidaktische Kompetenz miteinander korreliert.

Um die zweite Forschungsfrage zu beantworten, erfolgte eine Zusammenhangsanalyse zwischen den Testergebnissen bzw. Kompetenzparametern und den mathematikbezogenen Überzeugungen. Hierfür wurden die zwei Skalen mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen aus dem KomMa-Testinstrument und die zwei Skalen elementarmathematische und mathematikdidaktische Wissen und handlungsnahe mathematikdidaktische Kompetenz aus dem AnschlussM-Testinstrument mit den vier Skalen Spaß und Interesse an Mathematik, Anwendungs-Aspekt, Prozess-Aspekt sowie zusammengefasst der Formalismus- und Schema-Aspekt miteinander korreliert.

## 3. Erste Ergebnisse und Diskussion

Die ersten Ergebnisse im Hinblick auf die konvergente und divergente Validität bestätigen die Annahmen: So verhält sich die Rangfolge der Skaleninterkorrelationen wie erwartet. Dies würde für die Konstruktvalidität der in beiden Projekten entwickelten Instrumente sprechen. Insbesondere lassen sich auf diese Weise auch die Abgrenzbarkeit der Wissensfacetten in mathematisches, mathematikdidaktisches und pädagogisches Wissen im Projekt KomMa sowie die enge Verknüpfung von elementarmathematischem und mathematikdidaktischem Wissen im Projekt AnschlussM als empirisch tragfähige Konzeptualisierungen bestätigen. Insofern kann die erste Forschungsfrage verhalten positiv beantwortet werden.

Einschränkend sei hier auf den geringen Stichprobenumfang verwiesen. Hierdurch mussten unterschiedliche Skalierungsstichproben herangezogen werden, da aufgrund des Multi-Matrix-Designs des KomMa-Testinstruments die Skalierung an der Gesamtstichprobe des Projekts (1851 angehende FrühpädagogInnen) durchgeführt werden musste, was gleichzeitig mit unterschiedlichen Skalierungsmethoden der beiden Testinstrumente einherging.

Die Zusammenhangsanalyse mit den mathematikbezogenen Überzeugungen ergab ein überraschendes Bild: Hier zeigten die beiden Testinstrumente unterschiedliche Zusammenhänge auf. Bei näherer Betrachtung der Items liegt die Vermutung nahe, dass Testergebnisse, die auf Items mit einem hohen Situationsbezug beruhen, einen höheren Zusammenhang mit individuellen Überzeugungen zur Mathematik aufzeigen. Abhängig davon, welches Testinstrument eingesetzt wird, ergeben sich für die zweite Forschungsfrage jeweils andere Antworten.

## Literatur


Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation*. Heidelberg: Springer (4. Auflage).

Carle, U. & Wittmann, G. (Hrsg.) (2015). *AnschlussM. Anschlussfähigkeit der mathematikdidaktischen Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen*. Münster: Waxmann (in Vorbereitung).

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik*, 19(1), 3–45.

Jenßen, L., Dunekacke, S., Baack, W., Tengler, M., Koinzer, T., Schmude, C., Wedekind, H., Grassmann, M. & Blömeke, S. (2015). KomMa: Mathematikbezogene Kompetenz von Erzieher/-innen: Theoretischer Rahmen, Strukturanalyse und Zusammenhang zu Ausbildungsinhalten. In B. Koch-Priewe, A. Köker, J. Seifried & E. Wuttke (Hrsg.), *Kompetenzen von Lehramtsstudierenden und angehenden ErzieherInnen*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt (im Druck).

Shulmann, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14.

Schmermelleh-Engel, K. & Schweizer, K. (2012). Multitrait-Multimethod-Analysen. In: H. Moosbrugger & A. Kelava (Hrsg.), *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Weinert, F. E. (2001). Concept of Competence: A Conceptual Clarification. In D. S. Rychen & L. H. Sagalnik (Hrsg.), *Definition and selection of competencies – theoretical and conceptual foundations* (S. 45–65). Kirkland: Hogrefe & Huber.

Anna VOGTLÄNDER, Essen

# Mathematische Lerngelegenheiten in Bilderbüchern entdecken und nutzen

Die Entwicklung und Erforschung früher mathematischer Bildung begann bereits mit den Arbeiten von Friedrich Fröbel (1782-1852) und Maria Montessori (1870-1952; vgl. Kaufmann 2010, S. 8), wobei erst in den letzten Jahren die frühe mathematische Bildung wieder an Bedeutung gewonnen hat. Vor allem durch Ergebnisse aus internationalen Vergleichsuntersuchungen und der daran anschließenden allgemeinen Bildungsdiskussion rückt die Frage nach frühen Bildungsprozessen von Kindergartenkindern auch in das Blickfeld von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern (vgl. Hellmich 2007, S. 2).

## 1. Bilderbücher als Kontexte

Im Rahmen früher mathematischer Bildung bieten Bilderbücher einen wichtigen Kontext, denn sie können die Motivation fördern und zum mathematischen Denken anregen (vgl. Griffiths/Clyne 1991, S. 42). Bilderbücher können dazu beitragen, dass Mathematik nicht nur als abstrakte Disziplin gesehen wird, sondern auch als Teil unserer Lebenswelt (vgl. ebd.).

Die Arbeit mit Bilderbüchern im Bereich der frühen mathematischen Bildung eröffnet ein neues Feld, welches erst wenig erforscht ist, aber zunehmend an Bedeutung gewinnt, wie verschiedene Studien zeigen (vgl. z.B. van den Heuvel-Panhuizen/van den Boogaard 2008).

Für die Studie wurden Bilderbücher ausgewählt, denen keine spezifische mathematikdidaktische Konzeption zugrunde liegt, also nicht explizit mathematische Themen ansprechen und auf deren Erarbeitung bzw. Auseinandersetzung mit diesen abzielen. Damit sich in der Auseinandersetzung mit den Bilderbüchern trotzdem mathematisch bedeutsame Lernsituationen ergeben können, wurden Bilderbücher ausgesucht, welche implizit die Inhaltsbereiche der Bildungsstandards Mathematik für die Grundschule ansprechen. Das kann sowohl in den Bildern als auch in den Texten sein.

Um eine hohe literarische Qualität zu gewährleisten, wurden nur Bücher ausgewählt, die mit Kinderbuchpreisen ausgezeichnet worden sind. Sie enthalten für Kinder ansprechende und ausdrucksstarke Bilder. Der Text ist i.d.R. einfach strukturiert und dem kindlichen Sprachvermögen angepasst. Die Bilderbücher schaffen also bedeutungsvolle Kontexte, in denen neben der Geschichte, welche Themen unserer Lebenswelt behandelt, auch die Mathematik eine Rolle spielt. Somit ist zu erwarten, dass die ausgewählten Bücher das Potential haben um mathematische Lern- und Interaktionspro-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zesse hervorzurufen (vgl. van den Heuvel-Panhuizen/van den Boogaard 2008, S. 353).

## 2. Forschungsfrage und Methode

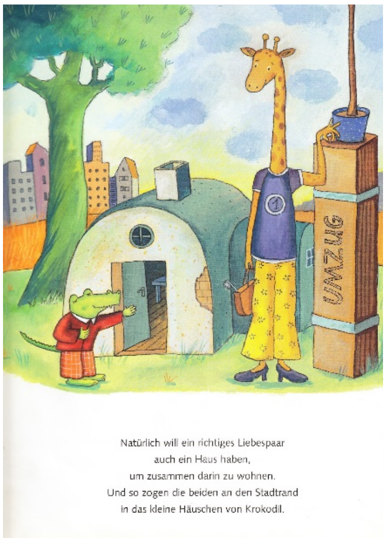
Für das Projekt ergab sich u.a. folgende Fragestellung: Welche frühen mathematischen Kenntnisse und Kompetenzen zeigen sich bei Kindergartenkindern beim Einsatz von Bilderbüchern?

Für die Studie wurden sogenannte „Lesesitzungen“ konzipiert, welche mit jeweils drei Kindern zwischen 3 und 6 Jahren einer Kindergartenstammgruppe durchgeführt werden. Die Untersuchungssituation kommt der alltäglichen Situation im Kindergarten sehr nahe, in welcher Erzieher und Erzieherinnen mit kleinen Gruppen Bilderbücher lesen und betrachten. Außerdem ist das Gespräch in der Gruppe ein „lockerer und meist als angenehm empfundener Kommunikationsaustausch“ (Lamnek 2005, S. 51). Dabei ist die Lesesitzung offen konzipiert. Die Kinder werden vor Beginn der Lesesitzung dazu aufgefordert, im weiteren Verlauf alles was ihnen zur Geschichte einfällt, zu äußern. Das soll den Kindern die Möglichkeit geben, den mathematischen Inhalt selbst zu entdecken und zu erforschen.

Basierend auf dem Ansatz des dialogischen Lesens („dialogic reading“; Whitehurst et al. 1988) wurde ein offener Interviewleitfaden entwickelt, welcher der Lesesitzung eine gewisse Orientierung gibt, aber den Kindern trotzdem genügend Freiraum zur eigenen Betonung der inhaltlichen Aspekte des Bilderbuchs lässt. Die Fragetechniken des dialogischen Lesens, welche vor allem als eine Methode der Sprachförderung entwickelt worden sind, haben zum Ziel das Kind zum Erzähler der Geschichte zu machen und den Erwachsenen zum aktiven Zuhörer, welcher Fragen stellt, Impulse gibt und zum Weitererzählen ermuntert (vgl. Kraus 2005, S. 109). Deshalb werden auch nur zu wenigen ausgewählten Bilderbuchseiten, welche besonders mathematisch gehaltvoll sind, Fragen gestellt, die die Kinder zu einer aktiven Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten anregen sollen.

## 3. Einsatz des Bilderbuchs „Das kleine Krokodil und die große Liebe“

Eines der ausgewählten Bilderbücher ist das Buch „Das kleine Krokodil und die große Liebe“ (Kulot 2003), welches die Geschichte des kleinen Krokodils und der großen Giraffe erzählt. Die beiden sind ein Paar und wollen zusammen wohnen. Doch dabei stoßen die beiden aufgrund ihres Größenunterschiedes auf einige Schwierigkeiten und machen sich gemeinsam auf die Suche nach einer Lösung (Abb. 1a/b).



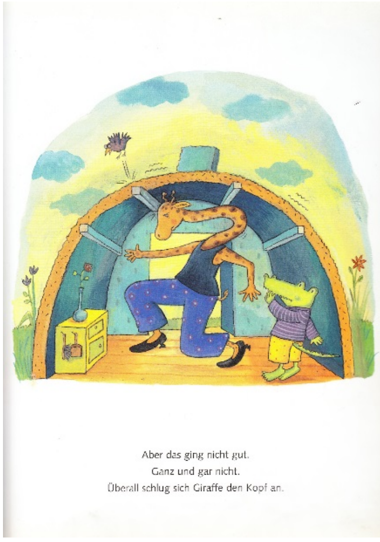




**Abb. 1a und 1b:** Seiten 5 und 6 des Bilderbuchs „Das kleine Krokodil und die große Liebe“

Das Bilderbuch spricht den mathematischen Inhaltsbereich „Größen und Messen“ der Bildungsstandards an (vgl. KMK 2004, S. 11). Schwerpunktmäßig wird die physikalische Größe „Länge“ thematisiert, welche besonders durch den Größenunterschied von Krokodil und Giraffe zum Tragen kommt. Im Text werden Maßeinheiten und Maßzahlen verwendet und auch verschiedene Relations- und Eigenschaftsbegriffe. Daraus lassen sich mögliche beobachtbare Kompetenzen ableiten: (1) Die Kinder verwenden in ihren Äußerungen Relationsbegriffe, Maßeinheiten und Maßzahlen. (2) Die Kinder ordnen und vergleichen Größen, z.B. „das Krokodil ist viel kleiner als die Giraffe“.

In einer Lesesitzung mit Jonas (3;10), Paul (4;9) und Lena (5;3) ergab sich bei der Betrachtung von Seite 5 folgende Szene:

| | |
|---|---|
| I | Oh, was sieht man denn hier auf dem Bild? |
| Jonas | Dass die Fußball spielen. |
| I | Woran siehst du das denn? |
| Jonas | Weil der [*zeigt auf die Giraffe*] da eine Eins auf dem T-Shirt hat und der drei [*zeigt auf das Krokodil*]. |
| I | Mhm. Und seht ihr noch mehr? |
| Jonas | Ja, da ist ein Baum. [*zeigt auf den Baum auf dem Bild*] |
| I | Mhm. |
| Paul | Und da sind ganz viele Häuser. |
| I | Wo siehst du die Häuser? |
| Paul | Hier, hier, da, da und da [*zeigt jeweils auf ein Haus*]. |

Jonas (3 Jahre) identifiziert das Zahlsymbol „1“ auf dem T-Shirt der Giraffe und folgert daraus, dass die Giraffe ein Fußballtrikot trägt und mit dem

Krokodil nun Fußball spielt. Paul (4 Jahre) nimmt die vielen Häuser im Hintergrund des Bildes wahr, ohne aber eine konkrete Anzahl zu nennen.

Nach dem Vorlesen des Textes äußert sich Jonas folgendermaßen:

Jonas Aber die Giraffe ist doch viel zu groß [*zeigt auf die Giraffe*]. Das Krokodil ist klein, weil die Tür ist größer und das Krokodil kleiner. Die Giraffe ist größer als das Haus und auch die Tür.

Jonas nimmt sofort die Schwierigkeit wahr, dass die Giraffe für das kleine Haus des Krokodils viel zu groß ist und verwendet zur Beschreibung dieses Problems verschiedene Relations- und Eigenschaftsbegriffe. Außerdem versucht er, die Objekte Giraffe, Krokodil, Tür und Haus nach ihrer Größe zu ordnen.

## 4. Schlussbemerkung

Die ausgewählte Szene und die ersten Erhebungen machen deutlich, dass verschiedene Kompetenzen aus unterschiedlichen Inhaltsbereichen in der Arbeit mit den Bilderbüchern zum Tragen kommen können. Die Kinder entdecken und erforschen die mathematischen Inhalte selbstständig und setzen sich individuell damit auseinander.

## Literatur


Griffiths, R./Clyne, M. (1991). The power of story: Its Role in Learning Mathematics. *Mathematics Teaching, 135/2*, 42-45.

Hellmich, F. (2007). Möglichkeiten der Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten im vorschulischen Bereich. *bildungsforschung, 4/1*, URL: http://bildungsforschung.org/index.php/bildungsforschung/article/view/61/64 [05.02.15].

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Schroedel.

KMK (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. URL: http://kmk.org [05.02.15].

Kraus, K. (2005). Dialogisches Lesen – neue Wege der Sprachförderung in Kindergarten und Familie. In S. Roux (Hrsg.), *PISA und die Folgen: Sprache und Sprachförderung im Kindergarten* (109-129). Landau: Verlag Empirische Pädagogik.

Kulot, D. (2003). *Das kleine Krokodil und die große Liebe*. Stuttgart/Wien: Thienemann.

Lamnek, S. (2005). *Gruppendiskussion – Theorie und Praxis*. Weinheim/Basel: Beltz.

Van den Heuvel-Panhuizen, M./van den Boogaard, S. (2008). Picture Books as an Impetus for Kindergartners' Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10/4*, 341-373.

Whitehurst, G.J./Falco, F.L./Lonigan, C.J./Fischel, J.E./DeBaryshe, B.D./Valdez-Menchaca, M.C./Caulfield, M. (1988). Accelerating language development through picture book reading. *Developmental Psychology, 24/4*, 552-558.

Andreas VOHNS, Klagenfurt

# Zermelo, Rasch, Schrödinger: Ein stoffdidaktischer Zugang zur probabilistischen Modellierung mathematischer Leistung

## 1. Einführung und Motivation

Probabilistische Testmodelle, allen voran das Rasch-Modell, spielen in der Erfassung mathematischer Leistungen in den letzten gut 15 Jahren eine zunehmende Rolle, initiiert durch die großen internationalen Schulleistungsvergleiche TIMSS und PISA. Dabei wird dem Modellcharakter der eigensetzten Test- und Messmodelle meinem Eindruck nach nur relativ wenig Aufmerksamkeit gewidmet. Betrachtet man das Zugänglicher-Machen von Mathematik als ein Grundanliegen stoffdidaktischen Arbeitens und weist dem Herausarbeiten des „mathematischen Kerns der Sache" (Kirsch, 1977) dafür eine wesentliche Rolle zu, so kann man hinsichtlich des Rasch-Modells stoffdidaktischen Forschungsbedarf sehen: In der Diskussion um Vor- und Nachteile der Verwendung des Rasch-Modells für mathematische Leistungserfassung wird bei Befürwortern wie Gegnern nicht immer gründlich zwischen dem Modell selbst und davon unabhängigen Erweiterungen unterschieden. Der Einfluss des Modells auf die Leistungsmessung wird dann u. U. sowohl über- als auch unterschätzt.

Im Vortrag (und abgekürzt in diesem Beitrag) wird versucht, das Rasch-Modell in einer anderen Einkleidung (Modellierung der Spielstärke im Schach) mathematisch besser zugänglich zu machen und diesen Kontext dann mit dem eigentlich interessierenden Kontext der Modellierung von (mathematischen) Leistungsdaten zu kontrastieren. Besondere Bedeutung nimmt dabei die Frage ein, welche „Erfüllungsnormen" (Schreiber, 1980) das Rasch-Modell an (mathematische) Tests und deren Bearbeitung anlegt. Eines kritischen Blicks wird die „spezifische Objektivität" der Rasch-Skala gewürdigt, die bisweilen auch unter der leicht missverständlichen Bezeichnung „Stichprobenunabhängigkeit" firmiert. Abschließend wird diskutiert, inwiefern die Tendenz zur Bildung von „Subskalen" nicht auf eine gewisse kognitive Dissonanz in der Verwendung des (strikt eindimensionalen) Rasch-Modells für inhaltlich eher breite Konzepte wie „mathematische Kompetenz am Ende einer Schulstufe" hinweist.

## 2. Einkleidung: Zermelos abgebrochenes Schach-Turnier

Bereits mehr als dreißig Jahre vor Georg Raschs Nutzung eines probabilistischen Modells für die Konstruktion und Auswertung von Tests nutzte Ernst Zermelo (1929) ein sehr ähnliches Verfahren, um im Falle eines vorzeitig abgebrochenen Schach-Turniers eine faire Bewertung der beteiligten

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Spieler zu ermitteln (die resultierende Bewertung der Spielstärke ist eng mit den Elo-Zahlen verwandt). Um die Analogie zur Leistungsmessung zu verdeutlichen, präsentiere ich es in leicht abgewandelter Form:

Ein Schach-Verein mit 14 Mitgliedern will seine 5 spielstärksten Mitglieder zu einem internationalen Turnier schicken. Die Mitglieder unterteilen sich in 5 „Meister“ (waren im letzten Jahr beim internationalen Turnier) und 9 „Stümper“ (waren im letzten Jahr nicht dabei). Ein Vorauswahlturnier soll entscheiden. Es findet in zwei Runden statt. Erste Runde: Jeder Meister tritt gegen jeden Stümper an. Zweite Runde: Alle Meister treten gegeneinander an, ebenso alle Stümper gegeneinander. Zum internationalen Turnier fahren diejenigen Spieler, die insgesamt die größte Anzahl an Siegen für sich verbuchen können.

Das Turnier muss nach der ersten Runde abgebrochen werden. Wie kann man nun entscheiden, wer insgesamt am besten war? Zermelos Vorschlag läuft darauf hinaus, unter den Meistern weiterhin nach Anzahl der Siege (gegen 0, 1, …, 9 Stümper) zu sortieren, ebenso unter den Stümpern (gegen 0, 1, …, 4 Meister). Ein Meister gilt ferner dann besser als eine Gruppe von Stümpern (mit gleicher Anzahl von Siegen), wenn er mehr als 50% der Partien gegen diese Gruppe gewonnen hat. Ebenso gilt ein Stümper als besser als eine Gruppe von Meistern (mit gleicher Anzahl von Siegen), wenn er mehr als 50% der Partien gewonnen hat. Diese Regeln lösen das Sortierproblem aber nur zum Teil, weil es zu Intransitivitäten kommen kann (Beispiel: Meister A ist besser als Stümper B, der besser als Meister C ist, der wiederum besser ist als Stümper D. Stümper D ist aber besser als Meister A).

Die probabilistische Modellierung ersetzt nun empirisch aufgetretene relative Häufigkeiten von Siegen (in Gruppen gleich starker Spieler) durch ML-geschätzte (gemäß einer speziellen logistischen Funktion) geglättete Gewinnwahrscheinlichkeiten, die stets zu transitiven Ordnungen auf der Vereinigungsmenge von Meistern und Stümpern führt und die Ordnungen gemäß tatsächlichen Siegen auf den beiden Teilmengen selbst respektiert.

## 3. Anwendung: Leistungsmessung

Hier treten nicht Meister gegen Stümper an, sondern Personen gegen Items. Ein Item „gewinnt“ gegen eine Person, wenn es falsch (bzw. nicht zustimmend) beantwortet wird, eine Person gewinnt gegen ein Item, wenn es korrekt (bzw. zustimmend) beantwortet wird. Das „Turnier“ ist hier notwendig unvollständig: Personen können nicht direkt gegen Personen antreten, Items keine Items bearbeiten. Man kann dennoch die Regeln von oben adaptieren, um Items und Personen wieder auf eine gemeinsame Skala an-zuordnen: Ein Item ist „schwieriger" als ein anderes Item, wenn es insgesamt weniger oft korrekt gelöst wurde, eine Person „fähiger" als eine andere, wenn sie mehr Items korrekt gelöst hat. Eine Gruppe von gleichfähigen Personen wird höher als ein Item eingeschätzt, wenn der Anteil korrekter Lösungen größer als 50% ist, umgekehrt ein Item besser als eine Personengruppe, wenn der Lösungsanteil kleiner als 50% ist. Auch hier können Intransitivitäten auftreten (Beispiel: Item A ist zu schwierig für Person B, die Item C beherrscht, das wiederum zu schwierig ist für Person D. Person D beherrscht aber Item A).

Die probabilistische Modellierung ersetzt aufgetretene relative Lösungshäufigkeiten (in Gruppen gleichfähiger Personen) durch ML-geschätzte (gemäß einer bestimmten logistischen Funktion, dem sog. Rasch-Modell) geglättete Lösungswahrscheinlichkeiten, die stets zu einer transitiven Ordnung auf der Vereinigungsmenge von Items und Personen führt und die Ordnung gemäß Anzahlen korrekter Lösungen auf den beiden Teilmengen selbst respektiert (zum Schätzverfahren vgl. Rost, 1996).

## 4. Erfüllungsnormen und Konsequenzen

Zentrale, wenn nicht einzige Erfüllungsnorm der Rasch-Modellierung ist die Eindimensionalität der Messung. Für die Fähigkeitsschätzung im Rasch-Modell ist (im Falle des Ein-Matrix-Designs, also: alle Personen bearbeiten sämtliche Items) ausschließlich die Anzahl der Items entscheidend, die korrekt gelöst wurden, nicht aber welche Items. Für die Schwierigkeitsschätzung eines Items ist einzig entscheidend, wie viele Personen es nicht korrekt bearbeitet haben, nicht welche. Das Modell wird die realen Daten daher umso besser approximieren, desto homogener das Lösungsverhalten ist, d.h.: Das Modell setzt voraus bzw. passt dann gut, wenn a) bei einem Test Personen, die die gleiche Anzahl von Items korrekt bearbeitet haben, stets auch in etwa dieselben Items korrekt bearbeitet haben und b) eine Gruppe A von Personen, die mehr Items als eine andere Gruppe B korrekt bearbeitet, möglichst viele der Items auch korrekt bearbeitet, die die schwächere Gruppe B korrekt bearbeitet. Relative Stärken von Gruppen (z.B. eine Hälfte der 5 Items lösenden Personen löst eher die Items 1-5 korrekt, die zweite eher die Items 6-10) können mit dem Rasch-Modell nicht erklärt werden, sie sind Residuen (zufällige Abweichungen und/oder Anzeichen dafür, dass ein mehrdimensionales Konstrukt gemessen wird).

Während in der Psychometrie ein wichtiger Einsatzzweck der Rasch-Modellierung in der Überprüfung der Eindimensionalität von Konstrukten besteht, wird diese Annahme bei mathematischen Leistungsmessungen regelmäßig aus testpragmatischen Gründen schlicht unterstellt und auch zur

Itemselektion in der Pilotierung von Tests herangezogen. Entscheidendes Motiv für die pragmatische Unterstellung der eindimensionalen Modellierbarkeit mathematischer Leistung ist vor allem die Möglichkeit, eine Rasch-Modellierung in Multi-Matrix-Designs einzusetzen, d.h. dort, wo gerade nicht allen Personen sämtliche Items administriert werden können oder sollen. Bearbeiten verschiedene Gruppen von Personen verschiedene Testhefte, so kann bei ausreichend großen Schnittmengen der Items zwischen den Testheften und unter Voraussetzung der Passung des Rasch-Modells ein Vergleich aller Personen und aller Aufgaben auf einer gemeinsamen Skala immer noch vorgenommen werden. Dabei können die Testhefte sogar gezielt unterschiedlich schwer sein (um etwa verschiedene Jahrgänge miteinander zu vergleichen).

## 5. Stichproben(un)abhängigkeit und Lösungswahrscheinlichkeit

Der Vortrag schließt mit einer Betrachtung der sog. „Stichprobenunabhängigkeit" (= spezifische Objektivität). Diese Eigenschaft kommt dem Modell (approximativ dann dem Datensatz) zu und besagt im Kern, dass bei Bildung von Teiltests (nur ein Teil der getesteten Aufgaben wird berücksichtigt) die Rangreihenfolge der Personen unverändert bleiben muss. Es wird dann argumentiert, dass ein Konzept wie „Lösungswahrscheinlichkeit" in diesem Modell immer von der (Gesamt-)Stichprobe abhängig ist, insofern es seine Zufälligkeit zunächst nur aus der Ziehung einer Person aus einer Gruppe gleich viele Items korrekt lösender Personen bezieht. Inwiefern eine individuelle Interpretation des Wahrscheinlichkeitswerts sinnvoll ist, kann in Frage gestellt werden (hier wird ein Bezug zu „Schrödingers Katze" hergestellt, vgl. Wainer, 2010).

Bezüglich der spezifischen Objektivität wird auch diskutiert, inwiefern die Bildung von Subskalen bzgl. eines Tests, der bereits einer Itemselektion bzgl. einer Gesamtskala unterzogen wurde, eine vertretbare statistische Praxis darstellt.

## Literatur


Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik, 5*, 87–101.

Rost, J. (1996). *Lehrbuch Testtheorie Testkonstruktion*. Bern: Hans Huber.

Schreiber, A. (1980). Idealisierungsprozesse — ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Funktion. *Journal für Mathematik-Didaktik, 1 (1-2)*, 42-61.

Wainer, H. (2010). Schrödinger's Cat and the Conception of Probability in Item Response Theory. *Chance*, *23 (19)*, 53-56.

Zermelo, E. (1929). Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift, 29 (1)*, 436–460.


*Foliensatz unter: http://de.slideshare.net/andreasvohns/zermelo-schrdinger-rasch*

Nicolai VON SCHROEDERS, Erlangen-Nürnberg

# Datenanalyse und -kodierung zur Kategorisierung eines Merkmals Rechenschwäche

## 1. Ausgangslage

BIRTE 2 ist eine computergestützte Diagnostik, die am Institut für Didaktik der Mathematik von Schipper und Wartha entwickelt und im Jahr 2011 veröffentlich wurde. Basierend auf einer Normierungsstichprobe von über 2000 Schülerinnen und Schülern kann der Test eingesetzt werden, um die arithmetischen Kompetenzen von SchülerInnen in der Mitte des 2. Schuljahres zu messen. Anhand von Eingaben zu insgesamt 145 Aufgaben und der Erfassung der Bearbeitungszeiten wird die arithmetische Gesamtleistung eingeschätzt und Hypothesen zu besonderen Auffälligkeiten hinsichtlich verschiedener Fehlertypen formuliert. Unter anderem werden dazu Zählfehler, Zahlendreher, Inverse-Operationsfehler und Ziffernstrategiefehler, die als Indikatoren für Hauptsymptome einer sich entwickelnden Rechenschwäche zu verstehen (SCHIPPER et. al., 2011) sind, mitgezählt und bei Überschreitung einer normativ festgelegten Grenze entsprechende Hinweise formuliert.

Obwohl die Aufgaben nicht an einem Stück bearbeitet werden müssen, bedeutet die große Anzahl an Aufgaben und die damit verbundenen lange Bearbeitungszeit gerade für rechenschwache Kinder eine hohe kognitive Beanspruchung. Die eigentliche Intention von BIRTE 2 ist jedoch nicht, primär die arithmetische Kompetenz zu messen, sondern den Lehrkräften ein Instrument an die Hand zu geben, mit denen potentiell rechenschwache Kinder identifiziert werden können. Intensive Tests mit Kindern, denen anhand vorab durchgeführter Gespräche eine Rechenschwäche attestiert wurde, zeigen, dass diese zwar in BIRTE 2 auffällig werden, die Hypothesen und Ergebnisse aber teilweise nicht so ein deutliches Bild aufzeigen.

## 2. Grundidee von BIRTE 2 (AS)

Aus diesem Grund ist der Wunsch entstanden, einen BIRTE 2 (AS) Test – das ist vorerst ein Projektname – zu entwickeln, der vor allem den Fokus weg von der arithmetischen Kompetenz hin auf die Messung einer Rechenschwächesymptomatik legt. Dabei soll das Augenmerk viel deutlicher auf Aufgaben gelegt werden, die spezifisch für besondere Fehlertypen sind, und die Aussagen bezüglich einer Rechenschwäche nicht mehr absolut anhand von Grenzwerten festgemacht sondern probabilistisch formuliert werden. Dazu ist es notwendig, die Aufgaben nicht nur für sich isoliert zu be-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

trachten, sondern Antwortmuster und Fehlermuster zu identifizieren, die für bestimmte Gruppen von Kindern symptomatisch sind.

## 3. Kodierung der Daten

In einem ersten Schritt sind dazu sämtliche Lösungseingaben der 2078 SchülerInnen neu kodiert worden. Die Messung einer Rechenschwäche erfordert nun, dass nicht mehr das einzelne Ergebnis erfasst wird, sondern eine dichotome Kodierung der besonderen Fehlertypen vorgenommen wird. Jede Aufgabe wird daraufhin untersucht, ob der Eingabe ein Zählfehler, ein Zahlendreher, ein Inverse-Operationsfehler, ein Ziffernstrategiefehler oder auch eine Kombination der zuvor genannten Fehlertypen zumindest hypothetisch zu Grunde liegen kann.

| Zählfehler | Zahlendreher | Ziffernstrategiefehler | Inverse-Operationsfehler |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |

**Abb1:** Kodierung der Fehlertypen je Aufgaben

Für diese Art der Kodierung sind verschiedenste typische Fehler und Fehlstrategien in der Statistik Software R implementiert worden, um programmgesteuert die Eingabedaten auszuwerten. Die folgende Aufzählung zeigt exemplarisch, wie sich Zählfehler oder auch Ziffernstrategiefehler bei Rechenaufgaben manifestieren können.

Zählfehler: +1/-1 Fehler, +10/-10 Fehler, +10/+1, -1/-10 Fehler

Ziffernstrategiefehler bei Aufgaben der Form $z_1e_1 + z_2e_2$:
$z_1+z_2;e_1+e_2$ $e_1+e_2;z_1+z_2$ $z_1+z_2 + e_1+e_2$ ....

Insbesondere die Kombination derartiger Fehler und Fehlstrategien, ermöglicht es, hypothetisch aber zumindest theoriegeleitet verschiedenste Eingaben zu erklären.

| | |
|---|---|
| 75 | Zahlendreher im 1. und 2. Summanden (B) $z_1e_1$ + $e_1$ Fehler (I)(6) +1 Fehler (D)(2) Zahlendreher im Ergebnis (B) |
| 75 | Zahlendreher im 1. und 2. Summanden (B) $z_2e_2$ + $e_2$ Fehler (I)(7) +1 Fehler (D)(2) Zahlendreher im Ergebnis (B) |
| 76 | ziffernweise $z_1$ + $z_2$ und $e_1$ oder $e_2$ (I)(11) |
| 79 | Kippfehler (G)(2) |
| 80 | -1 Fehler (D)(1) |
| 81 | richtige Addition 35+46 (R) |
| 81 | $z_1$+$z_2$ + $e_1$+$e_2$ Fehler (I)(1) Zahlendreher im Ergebnis (B) |
| 81 | ziffernweise ohne Übertrag Fehler (I)(8) +1 Fehler (D)(2) Zahlendreher im Ergebnis (B) |
| 81 | Zahlendreher im 1. und 2. Summanden (B) $z_1$+$z_2$ + $e_1$+$e_2$ Fehler (I)(1) Zahlendreher im Ergebnis (B) |
| 82 | +1 Fehler (D)(2) |

**Abb.2:** Auszug möglicher Kombinationsfehler für die Aufgaben 35+46

Interessant dabei ist, dass es Aufgaben gibt, bei denen selbst richtige Eingaben sich auch aus der Kombination von Fehlern ergeben können und dass auch verschiedenste Kombinationen zu gleicher Ergebnissen führen.

Für eine Selektion an Aufgaben können somit neben dem Schwierigkeitsgrad (Lösungsanteil) einer Aufgabe auch der Anteil an spezifischen Eingaben oder auch den Anteil spezifischer Eingaben an allen Fehleingaben berücksichtigt werden. Am Beispiel einiger Additionsaufgaben wird deutlich, wie diese Auswahlkriterien sich bei verschiedenen Aufgabentypen (ZE+ZE mit Zehnerübergang, Schnapszahl + Einer mit Zehnerübergang) darlegen.

| **Zähl-fehler** | 33+9 | 57+6 | 38+40 | 35+46 | 53+17 | 48+37 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fehler-anteil | 3,67% | 2,78% | 2,51% | 16,0% | 9,35% | 8,23% |
| Lösungs-anteil | 76,4% | 75,2% | 72,8% | 57,1% | 64,5% | 52,3% |
| Anteil an Fehlern | 15,5% | 11,2% | 9,22% | 37,3% | 19,6% | 17,3% |

**Abb.3:** Fehleranteile und Schwierigkeitsgrad bei Additionsaufgaben

Diese Kriterien alleine reichen aber noch nicht aus, um gute - im Sinne der Identifikation rechenschwacher Kinder - Aufgaben auswählen zu können. Im nächsten Schritt werden deshalb Antwortmuster analysiert.

## 4. Kategorisierung

Die Kernidee ist, Gruppen von Kinder mit einem annähernd gleichem Antwortverhalten zu identifizieren und die Zugehörigkeit zu diesen Gruppen probabilistisch vornehmen zu können. Als Methode für dichotome Kodierungen stellt die Statistik dafür die Latent Class Analyse (LCA) zur Verfügung (ROST, 2004). Eine Latent Class Analyse für vier Additionsaufgaben hinsichtlich der Symptomatik der Zählfehler liefert als Ergebnis drei Gruppen, deren Antwortwahrscheinlichkeiten die „Schwächen“ der Gruppenmitglieder aufzeigen (siehe Abb. 4).

Während die erste Gruppe nur einen Anteil von 1,76 % der Grundgesamtheit präsentiert, verdeutlich das Antwortverhalten bzw. deren Antwortwahrscheinlichkeiten, dass für die Aufgaben 38+40 und 48+37 die Mitglieder mit einer hohen Wahrscheinlichkeit (zu 95,57% und 82,87%) eine Eingabe mit einem Zählfehler abliefern werden. Hingegen für die gleiche Gruppe die Aufgabe 53+17 mit annähernden 100 % keine Zählfehlerproblematik erkennen lässt, was aber nicht gleichbedeutend damit ist, dass diese Aufgabe richtig gelöst wird.

| **57 + 6** | (0) | (1) | **53 + 17** | (0) | (1) |
|---|---|---|---|---|---|
| Gruppe 1: | 0.7099 | 0.2901 | Gruppe 1: | 1.0000 | 0.0000 |
| Gruppe 2: | 0.9410 | 0.0590 | Gruppe 2: | 0.9856 | 0.0144 |
| Gruppe 3: | 0.8556 | 0.1444 | Gruppe 3: | 0.1184 | 0.8816 |
| **38 + 40** | (0) | (1) | **48 + 37** | (0) | (1) |
| Gruppe 1: | 0.0443 | 0.9557 | Gruppe 1: | 0.1713 | 0.8287 |
| Gruppe 2: | 0.9703 | 0.0297 | Gruppe 2: | 0.7872 | 0.2128 |
| Gruppe 3: | 0.8263 | 0.1737 | Gruppe 3: | 0.6747 | 0.3253 |
| **Gruppe 1: 1,76%** | | **Gruppe 2: 88,26%** | | **Gruppe 3: 9,98%** | |

**Abb. 4:** LCA für vier Additionsaufgaben, kein Zählfehler (0), Zählfehler (1)

Die Antwortwahrscheinlichkeiten ermöglichen neben der Hervorhebung einzelner Aufgabentypen für jedes beliebige Antwortmuster eine probabilistische Zuordnung zu einer Gruppe. Wird bei einem Kind z.B. bei allen vier Aufgaben ein Zählfehler identifiziert, so liefert die bedingte Gruppenzugehörigkeitswahrscheinlichkeit für die Gruppe 1 einen Wert von 0,0%, für Gruppe 2 0,07% und Gruppe 3 99,92%. Damit ist die Gruppe 3, die insgesamt einen Anteil von 9,98% einnimmt, die Gruppe die hinsichtlich dieser Aufgabenauswahl eine stark ausgeprägte Tendenz für eine Zählfehlerproblematik aufweist.

## 5. Ausblick

Es gilt nun, mit Hilfe der Latent Class Analyse aussagekräftige und trennscharfe Aufgaben für jeden Fehlertyp zu selektieren, und eine Kodierung der Bearbeitungszeiten vorzunehmen, um auch diesem Indikator rechenschwacher Kinder gerecht zu werden. Die Identifikation bestimmter Aufgabentypkonstellationen kann dann zu neuen Hypothesen für Zusammenhänge sowohl zwischen einzelnen Aufgaben als auch den Fehlertypen führen.

## Literatur


Bortz, J., Döring, N. (2006). Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler. Berlin: Springer.

Fischer, G. (1974). Einführung in die Theorie psychologischer Tests. Bern: Huber.

Rost, J.(2004). Lehrbuch Testtheorie und Testkonstruktion. Bern: Huber.

Schipper, W., Wartha, S., von Schroeders, N. (2011). BIRTE 2, Rechentest für das zweite Schuljahr, Handbuch zur Diagnostik. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Katrin VORHÖLTER, Hamburg

# Konzeptualisierung und Messung metakognitiver Modellierungskompetenz

Metakognitive Kompetenz wird seit einigen Jahren als zentraler Bestandteil der Modellierungskompetenz angesehen (vgl. bspw. Maaß 2004), ihre Bedeutung ist mehrfach belegt. Bislang fehlen jedoch eine Konzeptualisierung sowie ein geeignetes Messinstrument zur Erhebung dieser Kompetenzfacette. Erste Schritte eines Projekts zur Konzeptualisierung, Messung und Förderung metakognitiver Modellierungskompetenz werden im Folgenden vorgestellt.

## 1. Metakognition im Modellierungsprozess – Theorie und Bedeutung

Das Konzept der Metakognition ist aktuell noch nicht ausgereift, es gibt noch keinen Konsens über eine Definition des Konstrukts und seiner Facetten. Dennoch ist den meisten Definitionen die Differenzierung in deklaratives Metawissen und prozedurale Metakognition gemein (Artelt & Neuenhaus 2010). Deklaratives Metawissen wird dabei als das explizite bzw. explizierbare Faktenwissen über die eigene kognitive Disposition (und die anderer), Wissen über Anforderungen von Aufgaben und Wissen über Strategien gefasst, die prozedurale Metakognition als die Regulation und Steuerung kognitiver Prozesse. Die Anwendung metakognitiven Wissens und die Bereitschaft zur Ausführung metakognitiver Strategien hängen von motivationalen, kognitiven und dispositionalen Faktoren ab, die Einfluss auf die Performanz in konkreten Lern- und Problemlösesituationen haben.

Die aktuelle Diskussion weist darauf hin, dass hohes metakognitives Wissen hohe mathematische Leistung ermöglicht (Schneider & Artelt 2010) und metakognitive Prompts die mathematische Leistung steigern und gleichzeitig metakognitive Kompetenz fördern können (Mevarech & Kramarski 1997). Auf die zentrale Bedeutung von Metakognition in Modellierungsprozessen weisen mehrere Studien hin (für eine Übersicht der aktuellen Diskussion vgl. Stillman, 2011). In diesen Studien wird deutlich, dass nicht vorhandenes oder nur sehr geringes Metawissen über den Modellierungsprozess beachtliche Probleme bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben nach sich ziehen kann. Die Erhebung metakognitiver Kompetenzen erweist sich dabei als problembehaftet. Besonders deutlich wird dies daran, dass trotz der zahlreichen positiven Befunde zum Zusammenhang von Metakognition und Leistung in der Studie von Schukajlow & Leiss (2011) keine signifikanten Korrelationen weder zwischen selbstberichteten allgemeinen noch selbstberichteten aufgabenbezogenen Strategien

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

und der mathematischen Modellierungsleistungen nachgewiesen werden konnten.

## 2. Konzeptualisierung und Messung metakognitiver Modellierungskompetenz

Die Konzeptualisierung und Entwicklung eines geeigneten Testinstrumentes ist in der vorliegenden Studie als design-based Prozess mit mehreren Teilstudien angelegt[1]. Sie zielt darauf ab, einen Fragebogens zur Erhebung prozeduraler Metakognition, also metakognitiver Strategien, zu entwickeln. Grund hierfür ist, dass zur Entwicklung empirisch-belastbarer Aussagen metakognitives Wissen auch empirisch erfassbar angewendet werden muss, und der Umfang der Stichprobe so groß sein sollte, dass nicht zufällige Effekte die Ergebnisse beeinflussen. Beobachtungen und Interviews fielen damit als Erhebungsmethoden aus. Die Befragung sollte außerdem an einen konkreten Bearbeitungsprozess von Modellierungsaufgaben durch die befragten Lernenden gekoppelt werden, um so prozedurale Metakognition zu erheben und nicht lediglich das Wissen über metakognitive Aktivitäten.

In einem ersten Schritt wurde auf der Grundlage der Theorie zum mathematischen Modellieren sowie zur Metakognition ein Fragebogen mit vierstufiger Likert-Skala und insgesamt 27 Items zu den Phasen Planung, Überwachung, Regulation und Bewertung sowie drei Items zur Bewertung der subjektiv empfundenen Aufgabenschwierigkeit entwickelt. Dieser wurde in fünf 9. Gymnasialklassen mit 66 Lernenden pilotiert. In der Pilotierungsstunde bearbeiteten die Lernenden zunächst in selbst gewählten Kleingruppen eine komplexe Modellierungsaufgabe und bekamen im Anschluss an die Bearbeitung den Auftrag, den Fragebogen auszufüllen, wobei sie sich in ihrer Kleingruppe austauschen durften. Darüber hinaus wurde mit zwei Schülerpaaren ein Interview geführt. Der Bearbeitungsprozess der Lernenden wurde videographiert und jeweils vier Expert(inn)en gaben ebenfalls ihre Einschätzung zur metakognitiven Kompetenz der videographierten Lernenden auf der Grundlage des Fragebogens ab.

Die Ergebnisse wurden – getrennt nach Schülerselbsteinschätzung und Experteneinschätzung – ausgewertet. Hierbei ergaben sich sehr unterschiedliche Häufigkeitsverteilungen und Itemschwierigkeiten und auch die Korrelationen zwischen Expert(inn)en- und Selbsteinschätzungen waren niedrig. Doch konnten mithilfe der Interviews und der Aufzeichnungen der Schülergespräche während des Ausfüllens der Fragebögen Begründungen hierfür gefunden werden: Die metakognitiv schwächeren Lernenden glichen ih-

[1] Ich danke an dieser Stelle Lea Schröder, Helge Janetzko, Janina Breese und Julia Wenzel für ihre Unterstützung.

re Antworten in der Regel denen der Stärkeren an und einige Lernende begründeten, dass sie metakognitive Strategien im Kopf gehabt, diese aber nicht verbalisiert oder gut ersichtlich gezeigt hätten. Daher unterschieden sich die Selbsteinschätzungen und die Einschätzungen der Experten voneinander. Schließlich wurden auch einige Items sprachlich nicht verstanden.

Zeitgleich wurde in einer anderen Studie induktiv mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse auf der Datenbasis von Videoaufnahmen von zwei Schülergruppen beim Bearbeiten eines komplexen Modellierungsprozesses ein Kodierleitfaden erstellt, der theoriesensibilisiert rekonstruierbare deklarative und prozedurale Metakognition enthielt. Die rekonstruierten metakognitiven Strategien differenzierten sich in die Phasen Orientierung, Planung, Überwachung/Kontrolle und Bewertung.

Auf der Grundlage der Ergebnisse dieser Teilstudien wurde der Fragebogen überarbeitet und in mehreren Schritten mit Lernenden der 7. und 9. Klasse sprachlich pilotiert. Das Resultat war ein Fragebogen mit 20 Items zu metakognitiven Strategien sowie sieben Items zum Lösungsprozess. In einer ersten Pilotierungsstudie wurde überprüft, inwieweit die Urteile Studierender zur metakognitiven Modellierungskompetenz von Schülerinnen und Schüler übereinstimmen. Hierzu wurde Studierenden eine Aufnahme von vier Schülern beim Lösen einer Modellierungsaufgabe vorgespielt und sie sollten mithilfe des Fragebogens die metakognitive Kompetenz eines Schülers bewerten (pro Schüler sechs Studierende). Aufgrund der geringen Stichprobe sind lediglich qualitative Aussagen zur Reliabilität des Fragebogens möglich. Zur Auswertung wurden Median, Mittelwert und Spannweite jedes Items berechnet (vgl. Abb. 1). Grundsätzlich ist festzuhalten, dass kein Item bei allen vier Schülern eine große Spannweite aufweist, was bedeutet, dass kein Item generell ungenau von den Studierenden eingeschätzt werden konnte. Die Güte der Einschätzung hängt vielmehr von dem Verhalten des beobachteten Schülers ab. Doch lassen sich Items feststellen,

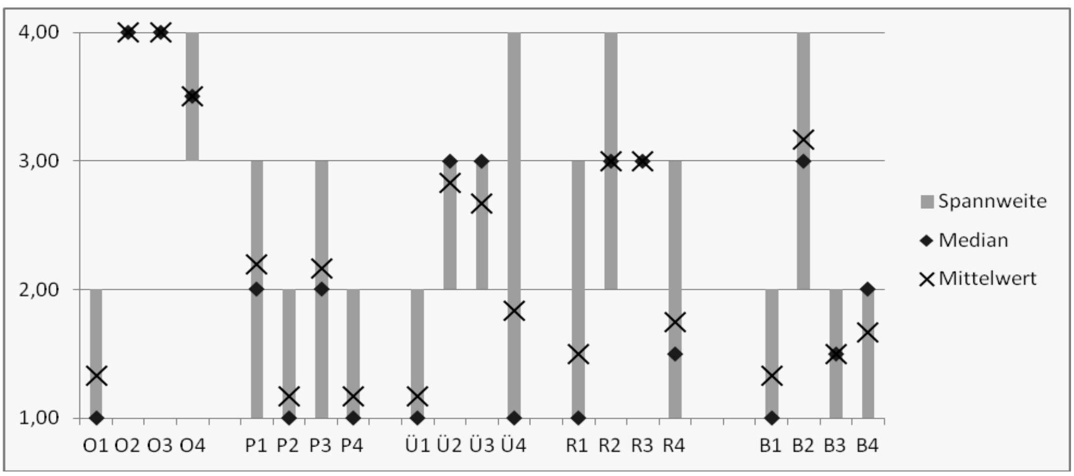



**Abb. 1:** Einschätzung der metakognitive Kompetenz eines Schülers

bei denen die Spannweite regelhaft höher ist als bei anderen. Eine detaillierte Analyse dieser Items ergibt, dass es sich um Items handelt, die Denkprozesse der Schüler abfragten; diese wurden von den Schülern jedoch oft nicht verbalisiert, weswegen die Studierenden diese unterschiedlich gut rekonstruierten. Ein Vergleich der metakognitiven Kompetenz aller vier Schüler ergibt, dass sich die Schüler deutlich darin unterscheiden, in welchen Phasen sie metakognitive Strategien einsetzen.

## Schlussfolgerungen

Beide Teilstudien zeigen, dass die Übereinstimmung von externen Beobachtern und den Selbsteinschätzungen der Schülerinnen und Schüler immer dann belastbar sind und übereinstimmen, wenn sich metakognitive Strategien in Handlungen manifestieren. Werden jedoch metakognitive Überwachungs- und Regulationsprozesse nicht verbalisiert, können Beobachter diese nicht ausreichend gut bewerten. Daher ist die Selbstbewertung der Lernenden für die Erhebung metakognitiver Strategien essentiell. Daher wurde der Fragebogen bereits als Selbsteinschätzungsinstrument für Schülerinnen und Schüler 9. Klassen pilotiert. Die Ergebnisse stehen noch aus. Geplant ist weiterhin eine Studie, in der der Fragebogen zugleich als Selbst- wie auch als Fremdeinschätzungsinstrument eingesetzt wird, um die Bewertungen beider Gruppen miteinander vergleichen zu können.

## Literatur


Artelt, C., & Neuenhaus, N. (2010). Metakognition und Leistung. In W. Bos (Ed.), *Schulische Lerngelegenheiten und Kompetenzentwicklung. Festschrift für Jürgen Baumert* (pp. 127–146). Münster: Waxmann.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht: Ergebnisse einer empirischen Studie. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre: Vol. 30*. Hildesheim: Franzbecker.

Mevarech, Z., & Karmarski, B. (1997). IMPROVE: A Multidimensional Method for Teaching Mathematics Improve: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal, 34*(2), 365–394.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. In G. A. Stillman & Z. Mevarech (Eds.), *Metacognition Research in Mathematics Education* (pp. 149–161). Springer.

Schukajlow, S., & Leiss, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *Journal für Mathematikdidaktik, 32,* 53–77.

Stillman, G. A. (2011). Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and Modelling Tasks at Secondary School. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. A. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. ICTMA14* (pp. 165–180). Dordrecht: Springer.

Hans WALSER, Uni Basel

# Das DIN-Format. Workshop

Zusammenfassung: Das DIN-Format ist mehr als ein Stück Papier und die Quadratwurzel aus Zwei. Wir treffen auf Spiralen, Grenzpunkte, Faltprobleme und Legespiele nach Fröbel. Explizit werden Faltaufgaben besprochen, die nur mit einem Papierblatt in einem DIN-Format möglich sind. Insbesondere kommen das regelmäßige Achteck sowie Kantenmodelle von Würfel und Tetraeder zur Sprache.

## 1. Einführung

In einem als Referat gehaltenen Einführungsteil erwähnte der Vortragende weitere Beispiele zur dem DIN-Format zugrundeliegenden Idee. Diese besteht in der Zerlegbarkeit in zwei zum Original ähnliche Teile. Solche Beispiele sind etwa eine Strecke, ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck (Geo-Dreieck), ein Quader mit passenden Kantenlängen (Abb. 1), die gleichtemperierte 12-Ton-Stimmung oder Jakobs Himmelsleiter. Weiter hatten die Teilnehmer und Teilnehmerinnen Gelegenheit zu einigen präliminaren Faltübungen.

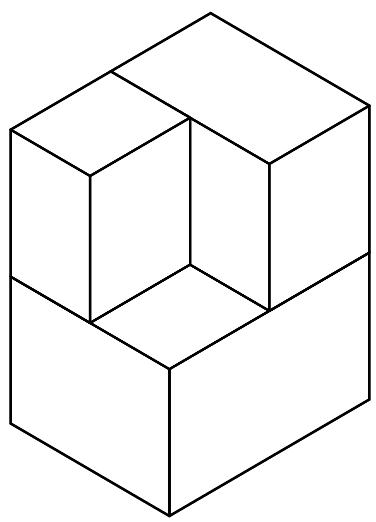


**Abb. 1:** DIN-Quader

## 2. Würfel

Im eigentlichen Workshopteil wurde ein Kantonmodell eines Würfels erarbeitet. Nämlich so:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Als Baumaterial dient Papier im DIN A6-Format. Geeignet ist Papier der Stärke 80 g/m2, das vom Format DIN A4 auf DIN A6 zugeschnitten wird. Ebenfalls geht es mit dünnen Karteikarten.

Für jede Kante braucht es ein Papier.

Für den Faltprozess verwenden wir eine etwas festere A6-Karte als Faltlehre. Wir legen diese Faltlehre diagonal auf ein DIN A6-Papier (Abb. 2) und falten die vorstehenden Ecken des darunterliegenden Papiers nach oben über die Faltlehre. Dann entfernen wir die Faltlehre. Der Umriss des gefalteten Blattes ist nun ein Rhombus.

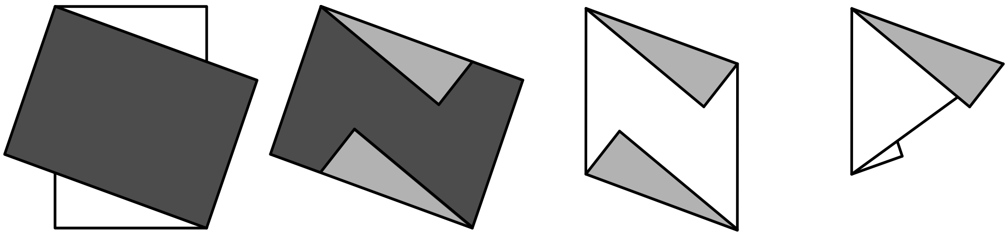


**Abb. 2:** Faltvorgang

Nun falten wir die untere Spitze des Rhombus nach hinten unter die obere Spitze. Diese letzte Faltlinie – also die kurze Diagonale des Rhombus – wird im Modell zu einer Kante des Würfels. Was an dieser Kante noch vorsteht, kann zurückgebogen oder abgeschnitten werden. Damit haben wir unser Bauteil. Es hat die Form eines doppellagigen gleichschenkligen Dreiecks mit zwei Verbindungslaschen zum Einschieben in die Nachbarteile.

**Abb. 3:** Bauteil

Die Abbildung 3 zeigt ein geöffnetes Bauteil von innen. Die Spitzen der beiden Rhomben-Hälften müssen vor dem Zusammenbau des Modells noch aufeinander gelegt werden. Diese Spitzen kommen alle in den Mittelpunkt des Würfels zu liegen. Die Seiten der Rhomben werden zu halben Raumdiagonalen des Würfels.

Wir benötigen 12 Bauteile. Beginnend mit drei verschiedenfarbigen DIN A4-Papieren die wir zu DIN A6-Papieren vierteln, erhalten wir drei Sätze zu je vier gleichfarbigen Bauteilen. Damit können wir den jeweils vier parallelen Würfelkanten dieselbe Farbe zuordnen.

Und nun kommt das Interessante, der Zusammenbau (Abb. 4). Wir schieben jeweils eine Verbindungslasche zwischen die beiden gleichschenkligen Dreiecke des Nachbarbauteils. Dabei achten wir darauf, dass an jeder halben Raumdiagonale des Würfels drei Bauteile in den drei verschiedenen Farben zusammen kommen. Parallele Würfelkanten haben dieselbe Farbe.

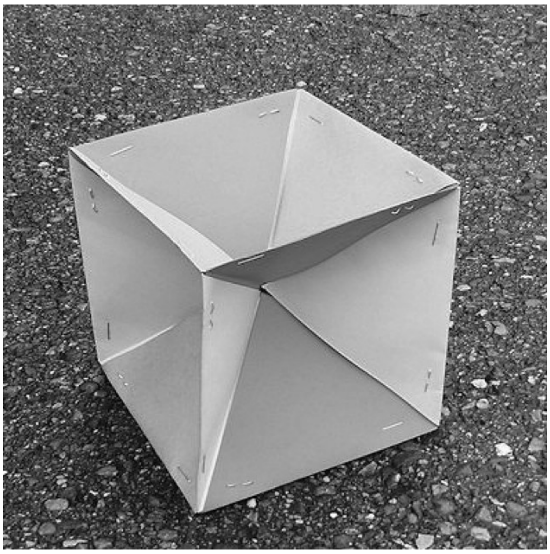


**Abb. 4:** Kantenmodell des Würfels

Es empfiehlt sich, den Zusammenbau schrittweise mit Büroklammern zu fixieren. An jeder Ecke des Würfels ergeben sich schließlich drei Büroklammern.

Wenn alles sitzt, können die Büroklammern einzeln entfernt und durch eine Heftklammer mit dem Tacker ersetzt werden. Dabei hat man den Ehrgeiz, dass die Klammern symmetrisch eingebracht werden.

## 3. Tetraeder

Analog zum Kantenmodell des Würfels kann ein Kantenmodell des Tetraeders gebaut werden (Abb. 5). Für das Bauteil muss der Rhombus der Abbildung 2 (drittes Teilbild) nun längs der langen Diagonalen gefaltet werden. Für den Tetraeder benötigen wir sechs Bauteile.

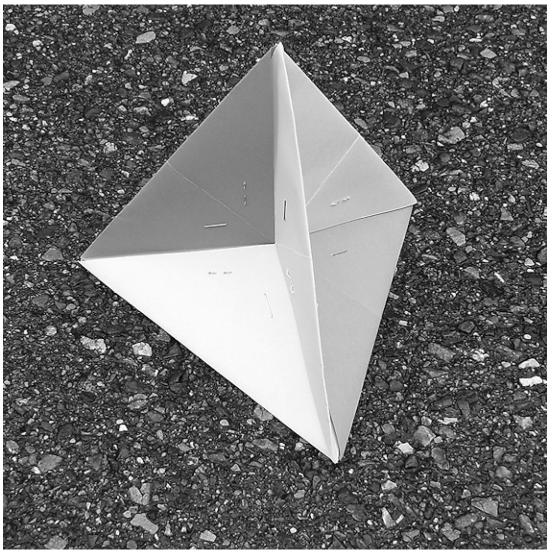


**Abb. 5:** Kantenmodell des Tetraeders

Der Workshop wurde am Tag für Lehrerinnen und Lehrer zweimal durchgeführt.

## Literatur

Walser, Hans (2013): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz.

Unterlagen auf: www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/Vortrag83_7

Hans WALSER, Uni Basel

# Siebenbannstein

Zusammenfassung: Ausgehend vom Siebenbannstein bei Lörrach werden einige Gedanken zum regelmäßigen Siebeneck vorgestellt: Streifen- oder Knotenmodell, Faltmodell, Gelenkgeometrie, Winkeldrittelung, Modelle in der hyperbolischen Geometrie. Historische und personelle Lokalbezüge zu Basel und Umgebung.

## 1. Intentionen des Referenten

Der Referent wollte folgende drei Aspekte vorstellen: Lokalbezüge zum Tagungsort Basel und dessen Umgebung. Fragen zur Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebenecks. Ein Zugang zur Kugelgeometrie und zur hyperbolischen Geometrie

## 2. Lokalbezüge zu Basel

Der Siebenbannstein befindet sich in der Nähe von Lörrach (nördlich von Basel) mitten im Wald (47° 36’ 22.52“ N / 07° 43’ 05.12“ E / 472 H). Hier trafen die alten Banne von Lörrach, Stetten, Inzlingen, Hagenbach, Adelhausen, Ottwangen und Brombach zusammen. Der Grenzstein (Abb. 1) hat einen siebeneckigen Querschnitt.

**Abb. 1:** Der Siebenbannstein

Die dichteste Kugelpackung kann mit einer Pyramide aus Glaskugeln illustriert werden. Solche Glaskugeln (Murmeln, Abb. 6b) heißen auf Baseldeutsch Glucker oder Glugger. Es gibt in Basel am Heuberg 34 ein Haus namens *Gluggerturm* mit einer aufschlussreichen Inschrift: Prosper Nepomuk Glucker gelang an Lichtmess 1726 seine umwälzende Erfindung.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777), ein Zeitgenosse Eulers, wurde in Mühlhausen (heute Mulhouse) geboren.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

**Abb. 2:** Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Das elsässische Mühlhausen ist eine Nachbarstadt von Basel und gehörte damals zur Schweiz. Lambert arbeitete zeitweise bei der Basler Zeitung. Bekannt wurde er durch seinen Beweis der Irrationalität der Kreiszahl $\pi$. Lambert war einer der Pioniere der hyperbolischen Geometrie. Er schlug vor, die hyperbolische Geometrie als die Geometrie auf einer Kugel mit dem Radius i zu verstehen.

## 3. Das regelmäßige Siebeneck

Das regelmäßige Siebeneck lässt sich nach einem Satz von Gauß nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Es gibt aber viele andere Zugänge zum regelmäßigen Siebeneck.

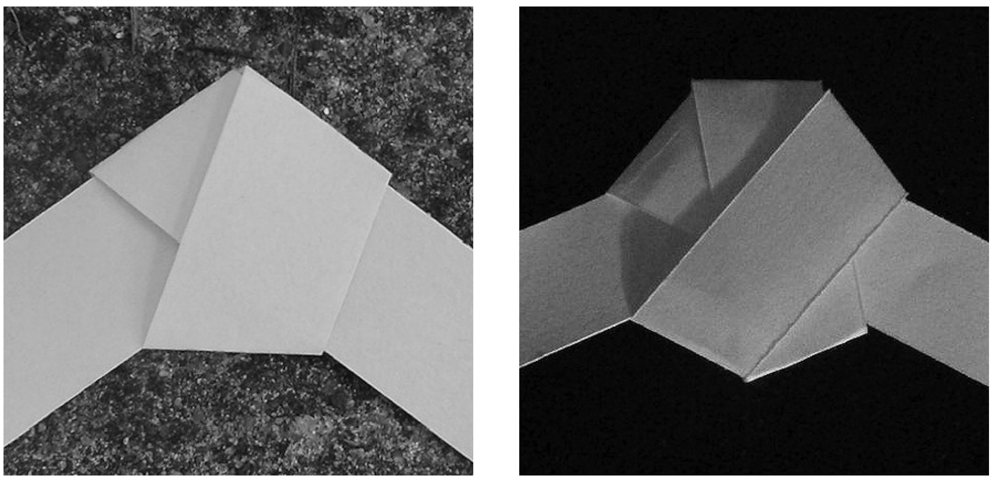


**Abb. 3:** Fünfeck und Siebeneck als Papierstreifenknoten

Papierstreifenknoten: Sehr bekannt ist die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfeckes als Knoten aus einem Papierstreifen (Abb. 3a). Wenn wir beim Knoten eine Schlaufe mehr anbringen erhalten wir das regelmäßige Siebeneck (Abb. 3b). Der Verknotungsprozess braucht etwas Fingerspitzengefühl, aber es geht.

Gelenkmodelle: Die Gelenkmodelle der Siebenecke beruhen auf sieben Gelenk-, Scheren- oder Fächerteilen, die geöffnet und an den Enden zusammengeheftet ein zu sieben regelmäßig auf einem Kreis verteilten Punkten führen. So hat zum Beispiel ein Schirm in der Regel acht Speichen. Wir können nun zwei benachbarte Speichen an den Enden zusammenbinden und erhalten beim Öffnen des Schirms ein regelmäßiges Siebeneck. Die Abbildung 4 zeigt zwei geometrische Gelenkmodelle mit den Symmetrien des regelmäßigen Siebenecks.

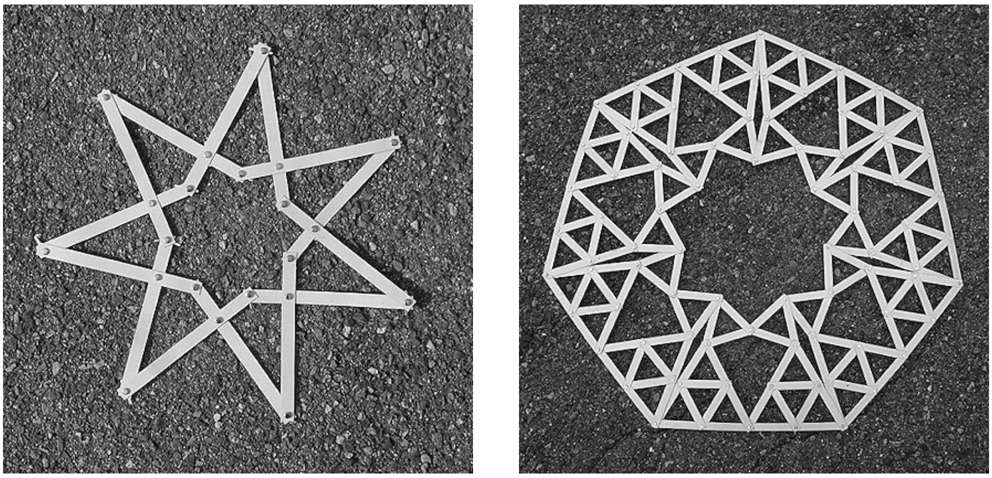


**Abb. 4:** Gelenkmodelle

## 3. Modelle aus Plastikband

Die Abbildung 5 zeigt zunächst ein aus Plastikbändern (Verpackungsmaterial) und Mustertütenklammern hergestelltes Geflecht aus regelmäßigen Sechsecken und Dreiecken. Werden die Sechsecke zu Fünfecken reduziert, krümmt sich die Sache in den Raum und wir erhalten eine Halbkugel, die wir leicht zu einer Kugel ergänzen können.

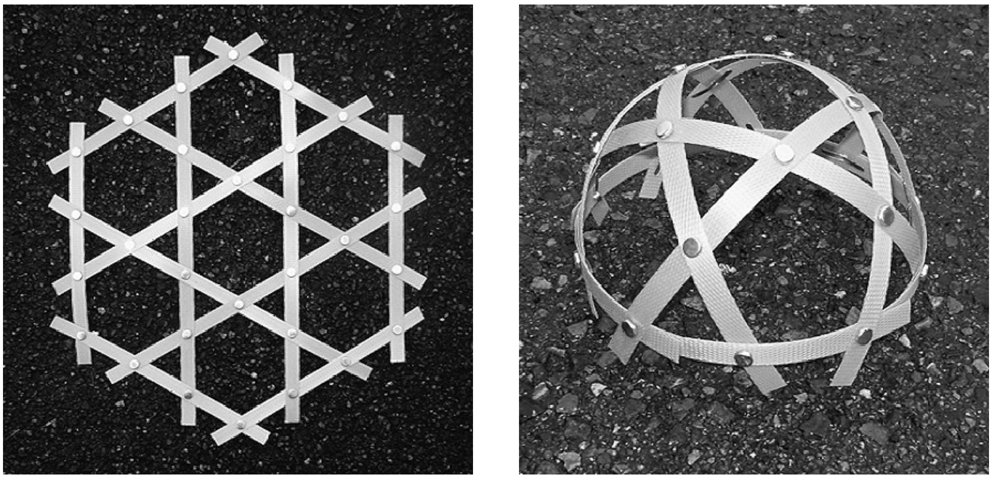
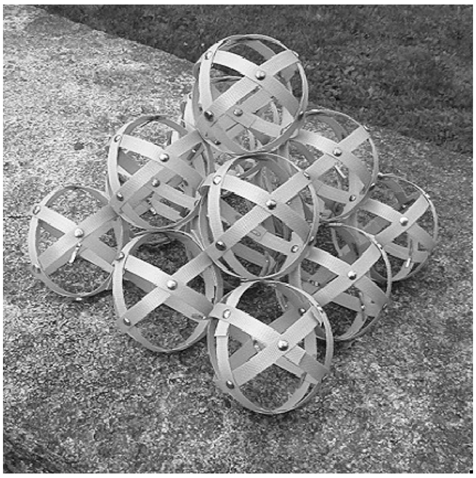


**Abb. 5:** Modelle aus Plastikstreifen

Werden die Fünfecke weiter zu Vierecken reduziert, ergeben sich Kugeln, die zu einer dichtesten Kugelpackung (Kepler, Hales) verwendet werden können (Abb. 6a). Die Positionen der Mustertütenklammern sind dabei genau die Kontaktpunkte zu den Nachbarkugeln. Damit können zwei sich berührende Kugeln mit einer durchgehenden Mustertütenklammer verbunden werden. Dichteste Kugelpackungen können auch mit Glasmurmeln gebaut werden (Abb. 6b). Eine geeignete Unterlage verhindert das Wegrollen der Murmeln.



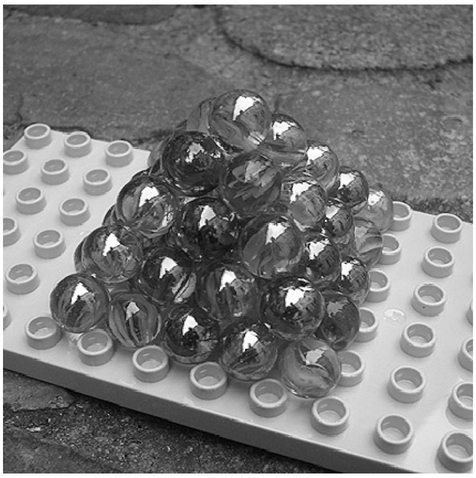
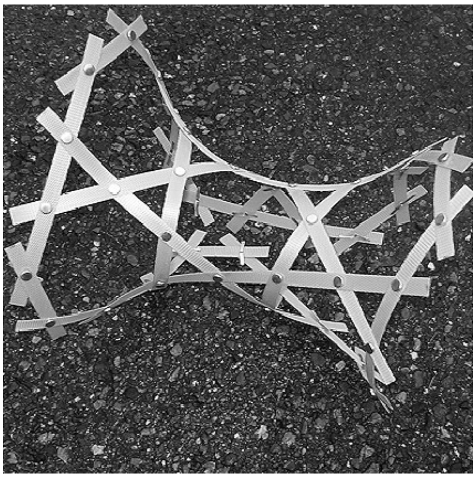


**Abb. 6:** Dichteste Kugelpackungen

Wir können aber auch die Sechsecke der Abbildung 5a zu Siebenecken ausweiten. Damit ergibt sich ein Gebilde mit hyperbolischer Krümmung (Abb.7a).



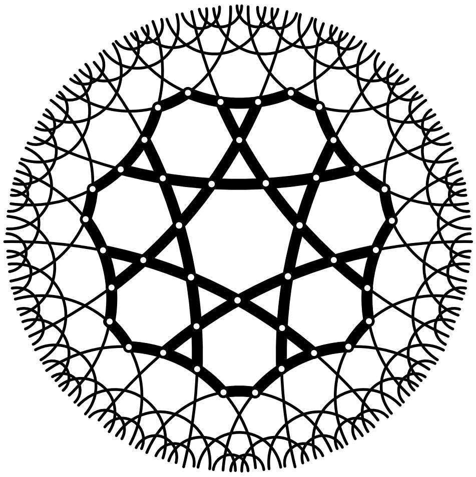


**Abb. 7:** Hyperbolisches Modell

Die Abbildung 7b zeigt einen entsprechenden Ausschnitt aus dem Kreismodell von Poincaré.

Der Vortrag wurde anlässlich der Jahresversammlung 2015 des Arbeitskreises Geometrie der GDM gehalten.

Unterlagen auf: www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/Vortrag90/index.htm

Hans WALSER, Uni Basel

# Vom Strahlensatz zum Strahlensatz – Motive und Phänomene

Zusammenfassung: Ausgehend von einem didaktischen Fehler in einem Arbeitsblatt ergibt sich eine Gedankenreise, welche beim Strahlensatz beginnt und über verschiedene Stationen wie Parabel, Symmetrie, Faltgeometrie und rechte Winkel wieder zum Strahlensatz führt.

## 1. Der Strahlensatz

Der Strahlensatz ist ein ästhetisches Ärgernis: In der Strahlensatzfigur (Abb. 1a) haben wir einerseits eine Schar paralleler Geraden und andererseits eine Geradenschar durch einen Punkt. Das sind begrifflich asymmetrische Vorgaben. Die Satzaussage ist aber symmetrisch: In beiden Geradenscharen sind je entsprechende Teilverhältnisse gleich.

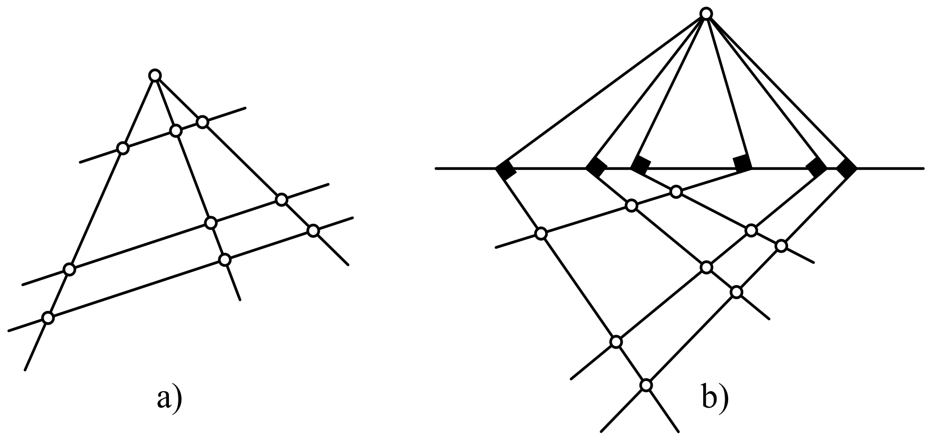



**Abb. 1:** Gleiche Teilverhältnisse

Eine begrifflich symmetrische Situation ergibt sich so (Abb. 1b): Wir beginnen mit einem Punkt und einer nicht durch diesen Punkt verlaufenden Geraden. Nun passen wir zwei Sets von je drei rechten Winkeln – Winkeleisen aus Großvaters Werkstatt – ein so dass die Scheitel der rechten Winkel auf der Geraden liegen und jeweils ein Schenkel durch den Punkt verläuft. Die anderen Schenkel schneiden sich wechselseitig. Diese Schnittpunkte unterteilen die Schenkel je im gleichen Verhältnis. Im Beispiel der Abbildung 1b sind es die Verhältnisse 2:1 und 5:2. Der rechnerische Beweis führt zu interessanten Formeln. Im Vortrag hatten die Teilnehmer Gelegenheit dieselbe Situation durch einen Faltprozess herzustellen. Für Winkel ungleich 90° sind die Teilverhältnisse nicht mehr invariant, wie ein Vortragsteilnehmer gleich nachwies.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Der gewöhnliche begrifflich asymmetrische Strahlensatz erweist sich zwar nicht als Sonderfall, aber doch als Grenzfall der Figur der Abbildung 1b. Dies wird durch die Figurensequenz der Abbildung 2 illustriert. Der Punkt wird dabei gegen die Gerade heruntergedrückt. Die Winkel auf der linken Seite drehen sich um den Scheitelpunkt. Die Winkel auf der rechten Seite verschieben sich parallel nach links.

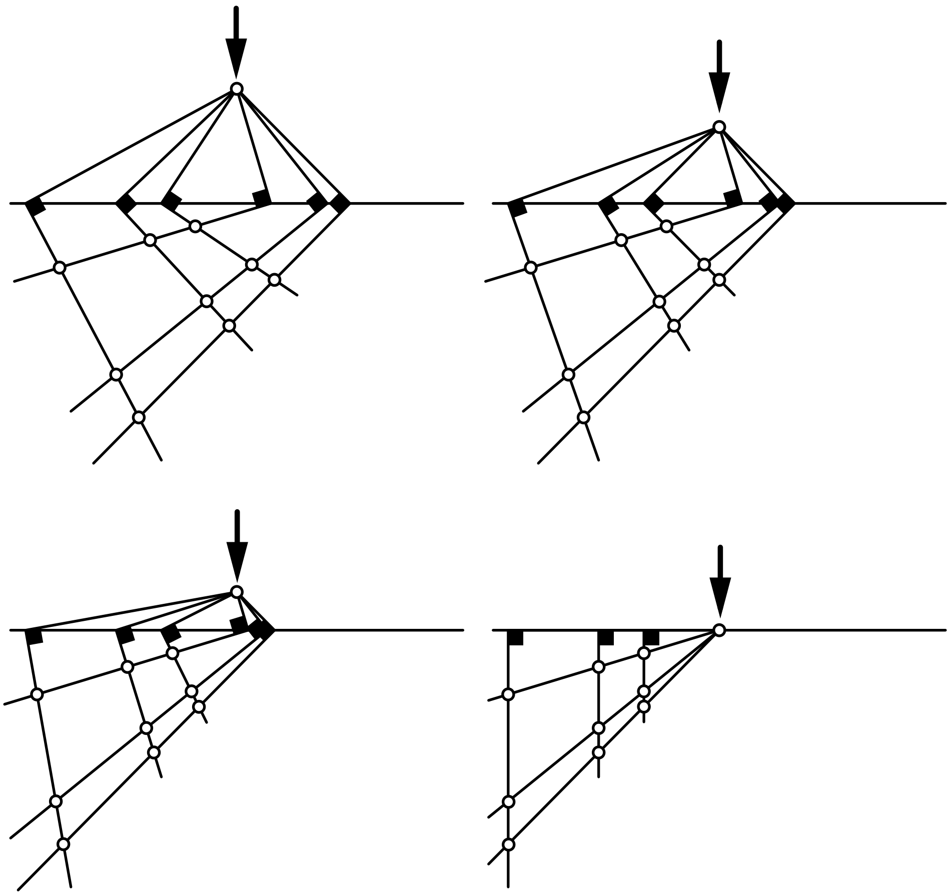


**Abb. 2:** Strahlensatz als Grenzfall

## 2. Der didaktische Fehler

In einem Arbeitsblatt (8. Schuljahr) war zu lesen:

> Eigenschaften der Trapeze
> - Jedes Trapez hat ein Paar gegenüberliegender paralleler Seiten.
> - Beide Mittellinien halbieren sich.

Dies ist zwar sachlich richtig, didaktisch aber falsch. Die erste Zeile ist definierend für das Trapez, die zweite gilt in jedem Viereck (Abb. 3a).

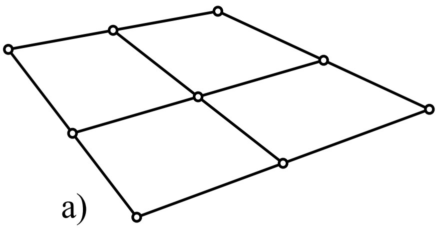


**Abb. 3:** Halbieren und Dritteln

Dabei stellt sich unmittelbar die Frage, ob Entsprechendes auch für Dritteln (Abb. 3b) oder weiteres Unterteilen gilt. Ein Vortragsteilnehmer gab dem Referenten einen eleganten elementargeometrischen Beweis für das Dritteln. Für den allgemeinen Fall gestaltet sich ein induktiver geometrischer Beweis recht aufwändig. Ein weiterer Vortragsteilnehmer lieferte dazu einen schönen rechnerischen Beweis.

## 3. Viereckraster

Wir kehren nun die Situation um und beginnen mit einem Viereck, das keine parallelen Seiten enthält. Die Viereckseiten erweitern wir mit je äquidistanten Punkten (Abb. 4a).

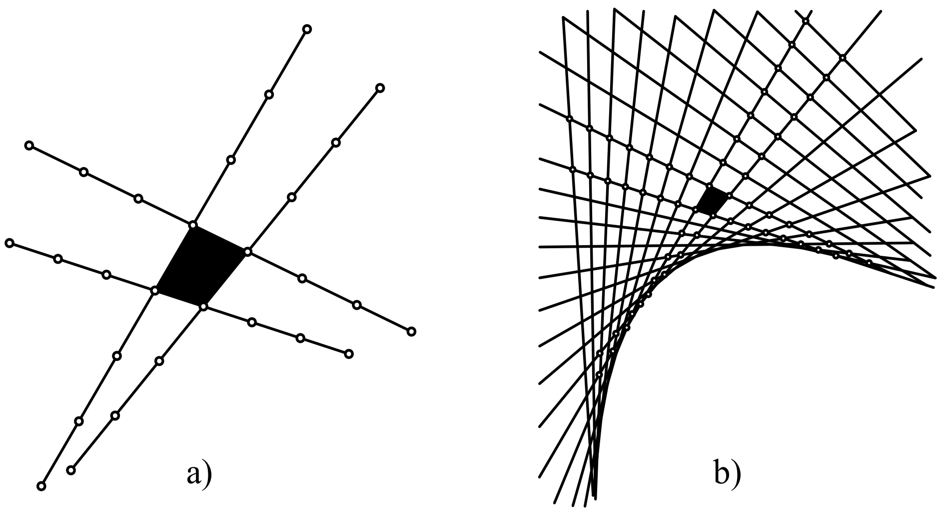


**Abb. 4:** Viereckraster

Durch entsprechende Punkte legen wir neue Geraden und erhalten so einen Viereckraster (Abb. 4b). Die Kontur (Enveloppe) ist eine schräge Parabel.

## 4. Parabeltangenten

Nun kehren wir die Sicht nochmals um und beginnen mit einer Parabel, an die wir zweimal drei Tangenten legen (Abb. 5).

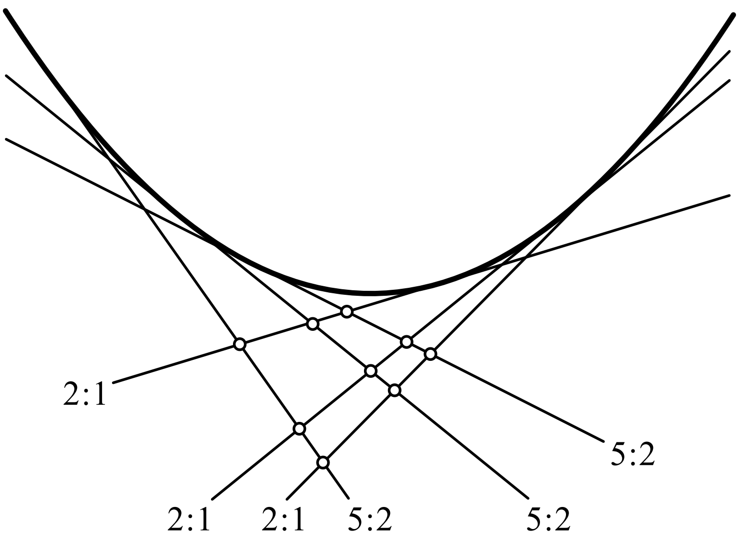



**Abb. 5:** Parabeltangenten

Es erscheinen wiederum gleiche Teilverhältnisse auf den Tangentenscharen. Damit kommen wir zum Eingangsbeispiel (Abb. 1b) zurück. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass sowohl die Winkeleisenkonstruktion wie auch das mit den Vortragsteilnehmern durchgeführte Faltprozedere sich mit Parabeltangenten erklären lassen.

Entsprechendes geht nicht mit Kreis, Ellipse oder Hyperbel.

Der Vortragende war sehr erfreut über die vielen Reaktionen der Vortragsteilnehmer. Er hat dabei viel gelernt und weiterführende Anregungen erhalten.

Unterlagen: www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/Vortrag89/index.html

Candy WALTER, Hildesheim

# Planung und Erhebung statistischer Daten im Mathematikunterricht

Die Planung und Durchführung statistischer Erhebungen sind *zwei bedeutende Phasen im Gesamtprozess einer statistischen Untersuchung* und durch die nationalen Bildungsstandards verbindliche Unterrichtsinhalte der Sekundarstufen I & II (KMK 2003,S.16). Dennoch werden sie im Schulunterricht eher wenig thematisiert. Laut Pisa 2012 zeigen sich bis heute immer noch *„relative Schwächen im Bereich der Unsicherheit und Daten. Hier zeichnet sich somit ein Ansatzpunkt für eine weitere Verbesserung mathematischer Kompetenz in Deutschland ab.“* (Pisa, 2012, S.82).

Der Artikel stellt zum Beitragsthema *Planung und Erhebung statistischer Daten im Mathematikunterricht* erste Grundgedanken eines empirischen Studienvorhabens und ein normativ entwickeltes Planungs- und Entscheidungsmodell heraus – welches einen mögl. Handlungsablauf innerhalb einer statistischen Planungsphase wiedergibt.

Das *Hauptanliegen* der Studie besteht darin, mittels des entworfenen theoretischen Planungs- und Entscheidungsmodells einen Rahmen zu schaffen, mit dessen Hilfe sich Schülerschwierigkeiten, Fehler und Lernstrategien beim statistischen Planen empirisch identifizieren lassen.

## Der Gesamtprozess einer statistischen Untersuchung als lineares Modell

Statistische Untersuchungen sind i.A. vielschichtig und lassen sich am geschicktesten durch mehrere Etappen (Phasen) beschreiben. Am Prozessanfang steht immer einen *Problem- oder Fragestellungen* (Ausgangssituation). In einer anschließenden *Planungs- und Entscheidungsphase* werden erste Vorüberlegungen und Alternativen diskutiert. Die Beschaffung des statistischen Datenmaterials findet in der Phase der *Datenerhebung* entweder primär oder sekundär statt.

Das gesammelte Datenmaterial wird in einer weitern Prozessphase *aufbereitet und analysiert*. Mit Bezug zur Fragestellung findet letztlich eine erste Bilanz (ein Fazit) in der *Conclusionsphase* über die Interpretation und Bewertung der Analyseergebnisse statt. Die meisten wirtschaftlichen Modelle, die die Vorgehensweise bei statistischen Untersuchungen widerspiegeln, werden in den meisten Fachliteraturen durch *normative lineare Modellketten* verdeutlicht, vgl. etwa (Grimmer, 2014, S. 8).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Der Gesamtprozess einer statistischen Untersuchung als zirkulares Modell

Beim linearen Modell werden implizit die Rückinterpretation sowie die Validierung stillschweigend angenommen. Vom *didaktischen Interesse* sind i.A. eher zirkuläre Modelle, die deutlich machen, dass die gewonnenen Ergebnisse einer Rückschau auf die Ausgangssituation bedürfen. Das nachfolgende Modell verdeutlicht in Anlehnung am Modellkreislauf von WILD & PFANNKUCH (Wild & Pfannkuch, 1999, S.226) den Gesamtprozess einer statistischen Untersuchung als *sechsschrittigen Modellierungskreislauf.*

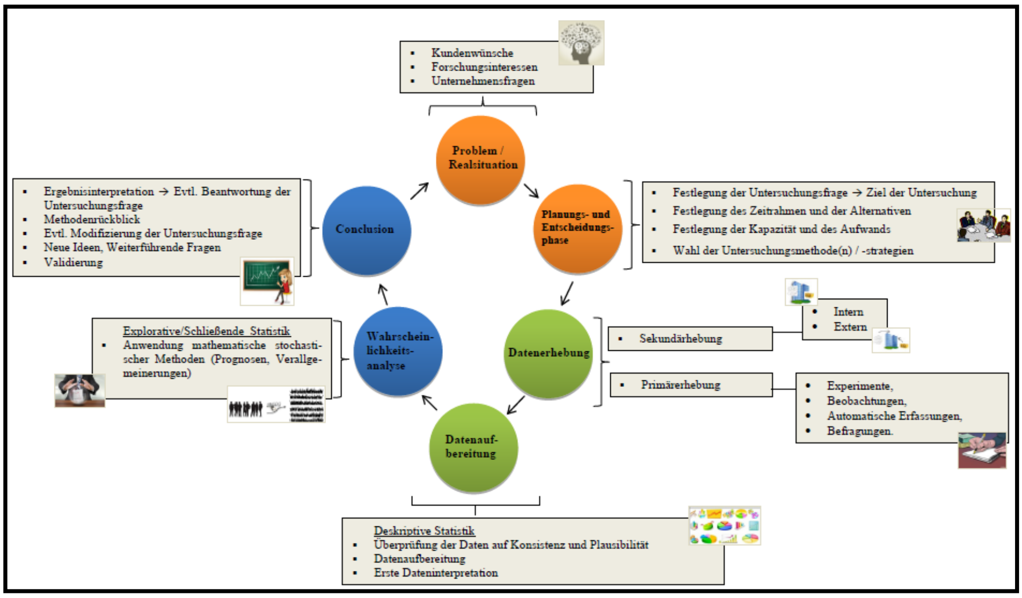



**Abb. 1**: Gesamtprozess einer statistischen Untersuchung als zirkulares Modell (In Anlehnung an WILD & PFANNKUCH, 1999).

Die Phasen im Modellkreislauf bauen nicht nur logisch aufeinander auf, sondern bilden bei den Prozessabläufen i.A. eine Wiederholungsschleife, sodass eine Interpretation und Validierung zur Ausgangssituation stattfindet. Die Kreise geben die einzelnen Prozessphasen und die jeweiligen Kästen die dazugehörigen möglichen Inhalte an.

## Die Planungs- und Entscheidungsphase

Die Phase der Planung und Entscheidung beinhaltet wesentliche Aspekte, die den Verlauf einer statistischen Untersuchung vorzustrukturieren versucht. Da keine statistische Untersuchung ohne ein *Informationsbedarf*, d.h. dem Interesse an z.B. der Beantwortung einer Fragestellung, der Klärung einer Hypothese oder ganz allgemein einer Problemstellung stattfindet, sollten möglichst präzise Vorüberlegungen angestellt werden. Hier stehen vorranging das Problem über eine *genaue Zielformulierung*, der Untersuchungszeitraum, die vorhandenen Ressourcen, die möglichen Alternativen und die Untersuchungsmethoden im Diskussionszentrum. Eine wohldachte Planung führt letztlich zu annehmbaren Entscheidungen und folglich zu eine (hoffentlich) stimmigen und zufriedenstellenden Beantwortung der Untersuchungsfrage. Das nachfolgende kybernetische Planungsmodell zeigt einen möglichen Ablauf, der aus theoretischen Überlegungen entwickelt wurde. Die genannten Planungsinhalte geben hier nur einen kleinen Auszug aus den vielfältigen inhaltlichen Betrachtungen und möglichen Entscheidungen wieder. In der Praxis müssen oft wesentlich mehr Inhalte und Entscheidungen diskutiert und abgewogen werden als hier angegeben.

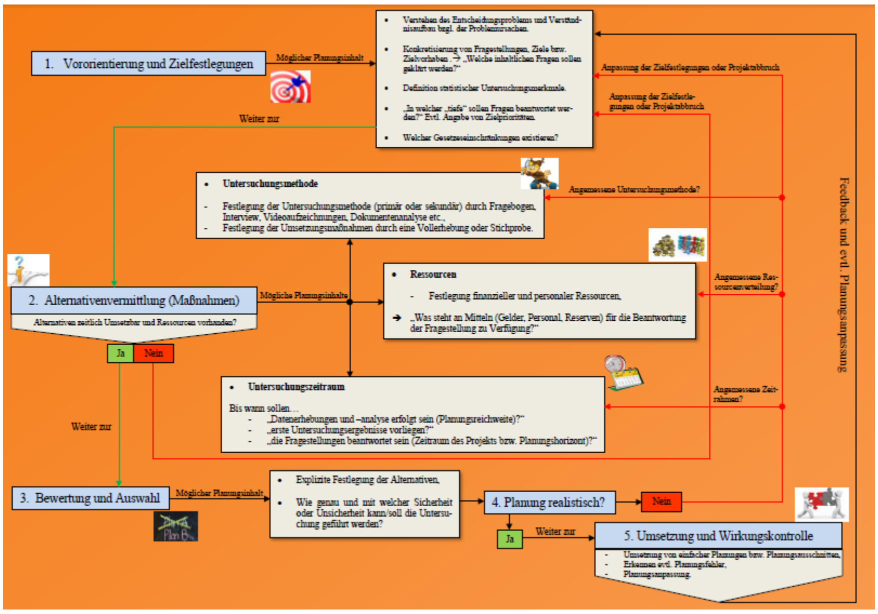



**Abb. 2:** Kybernetisches Planungsmodell

## Empirisches Untersuchungsvorhaben und präzisierende Fragestellungen

Das *Anliegen* der Untersuchung besteht darin Schülerschwierigkeiten, Fehler und Lernstrategien beim Planen und Durchführen statistischer Datenerhebungen mittels anwendungsbezogener Kontexte empirisch zu diagnostizieren und den Schwierigkeiten und Fehlern mithilfe didaktisch geeigneter Lernumgebungen entgegenzuwirken.

Hieraus ergeben sich folgende Fragestellungen:

– Können Schülerinnen und Schüler Fragestellungen konkretisieren und interessierende Merkmale/Ausprägungen genau festlegen?
– Erkennen SuS die Notwendigkeit einer Stichprobenerhebung aus einer großen Grundgesamtheit?
– Welche Planungsfehler (z.B. sachlicher, zeitlicher oder örtlicher Art) machen Schülerinnen und Schüler bei der Festlegung der Grundge samtheit/Stichprobe?

- Welche eigenen Planungsfehler werden von Lernenden während der realen (enaktiven) Auseinandersetzung mit dem Problem selbst er kannt?
- Welche Lernstrategien lassen sich beim Planen und Erheben statisti schen Daten beobachtet.

**„Definition": Fehler und Schwierigkeiten**

> *„Ein Fehler ist ein von der Norm abweichender Sachverhalt oder Prozess [...]. Normen stellen das Bezugssystem dar, und ohne Normen und Regeln wäre es nicht möglich, fehlerhafte und fehlerfreie Leistungen, also das Richtige vom Falschen zu unterscheiden." (Oser, 1999,S. 11).*
>
> *„Schwierigkeiten stellen Barrieren dar, die das Ausführen eines Operators behindern und dadurch den Lösungsprozess erschweren." (Newell & Simon, 1972).*

Als Bezugssystem dient hier das obere Planungs- und Entscheidungsmodell. Ein Fehler im Planungsprozess liegt folglich genau dann vor, wenn Fehler in diesem Modell auftreten.

## Forschungsmethode

Als Probanden sollen ca. 32 Schülerpaare verschiedener 8. und 10. Jahrgangsstufen (Realschule, Gymnasium) dienen. Sie bearbeiten verschiedene Aufgabenstellungen schriftlich. Um später an „vertiefte" Einblicke in die kognitiven Denkprozesse der Lernenden zu gelangen, soll während der Aufgabenbearbeitung ein Videomitschnitt der einzelnen Schülerpaare erfolgen. Die Lernenden sollen nach der Bearbeitung mit der Methode *„stimulated recall"* (Nachträglich lautes Denken) interviewt werden. Hierzu wird jeweils derjenige Schüler ausgewählt, der während der Bearbeitung mögliche Schwierigkeiten im stärkeren Maße verbalisiert hat. Die Interviews werden videografiert und transkriiert.

## Literatur


Grimmer, A. (2014). Statistik im Versicherungs- und Finanzwesen – Eine anwendungsorientierte Einführung, Springer.

A. Newell, A. & Simon, H.A. (1972). Human problem solving, Engelwood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Oser, F. et al. (1999). Lernen aus Fehlern Zur Psychologie des negativen Wissens. In: W. Althof, (Hrsg.): Fehlerwelten. Leske+Budrich, Opladen, S. 11-41.

Wild, C.J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Emprical Enquiry, Department of Statistics, University of Auckland, New Zealand.

Daniel WALTER, Dortmund

# Nutzungsverhalten rechenschwacher Kinder im Umgang mit Tablet-Apps

Über den unterrichtlichen Einsatz digitaler Medien wird immer mehr und zunehmend kontrovers debattiert. Forschungsbemühungen, die den Schwerpunkt auf das Schülerhandeln im Umgang mit Software thematisieren, sind jedoch rar (vgl. Krauthausen 2012). Das in diesem Beitrag vorgestellte Projekt verfolgt daher das Ziel, das Nutzungsverhalten von (rechenschwachen) Schülern anhand ausgewählter Tablet-Apps zu beforschen. Dabei wird der inhaltliche Fokus auf den Arithmetikunterricht des ersten Schuljahres gelegt.

## Zählendes und nichtzählendes Rechnen

Verfestigt zählendes Rechnen wird übereinstimmend als eines der Hauptsymptome von ‚Rechenschwäche' charakterisiert (vgl. u.a. Gerster & Schultz 2004; Gaidoschik 2010; Wartha & Schulz 2013). Die Fachdidaktik gibt das Ziel aus, dass Schüler am Ende des ersten Schuljahres im Zahlenraum bis 10 nichtzählend rechnen sollten (vgl. z.B. Schipper 2009). Internationale (vgl. Gray 1991; Geary et al. 1996) sowie Befunde des deutschsprachigen Raumes (vgl. Gaidoschik 2010) offenbaren, dass diese Zielsetzung jedoch nicht von allen Schülern erreicht wird. Die Ausarbeitung von Fördermaßnahmen ist für die Überwindung zählender Rechenstrategien von entscheidender Bedeutung. Häsel-Weide et al. (2014) betonen in diesem Zusammenhang insbesondere Maßnahmen, die auf das *Rechnen mit Zahlbeziehungen* abzielen. Ausgewählte Tablet-Applikationen (s.u.) bieten Potential für diese Zwecke.

## Lernen mit digitalen Medien

Studien zum unterrichtlichen Einsatz digitaler Medien verdeutlichen, dass sogenannte *Lernprogramme* im Grundschulunterricht eine wesentliche Komponente des Medieneinsatzes darstellen (vgl. Insitut für Demoskopie Allensbach, 2014). Krauthausen (2012) bemerkt kritisch, dass diese in der Regel „auf reproduktiv ausgerichtete Trainings- und Drillprogramme reduziert zu verstehen sind" (Krauthausen 2012, 115). Nicht zu vernachlässigen sind jedoch diejenigen Programme, die für den Aufbau mathematischen Wissens konzipiert wurden. In diesem Zusammenhang sei insbesondere auf die von Urff (o.J.) und Ladel & Kortenkamp (2014) entwickelten Applikationen hingewiesen, die nicht nur die Potentiale digitaler Medien, sondern auch Erkenntnisse mathematikdidaktischer Forschung berücksichtigen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Forschungsinteresse

Das Projekt verfolgt das Ziel, Erkenntnisse über das Nutzungsverhalten rechenschwacher Schüler im Umgang mit Tablet-Apps, die für den Aufbau mathematischen Wissens entwickelt wurden, zu gewinnen. Dementsprechend liegt der Schwerpunkt auf deskriptiven Analysen von Schülerhandlungen. Exemplarisch werden in diesem Beitrag diejenigen Gestaltungsmerkmale der Applikation *virtuelles Zwanzigerfeld* (siehe Abb., Urff o.J.) untersucht, die Potential für die Überwindung zentraler Hürden zählend rechnender Schüler bieten. So ist es beispielsweise möglich, fünf Plättchen simultan hinzuzufügen, was einem einseitig ordinalen Zahlverständnis entgegenwirken könnte. Darüber hinaus ist die mathematisch-symbolische mit der ikonischen Repräsentation einer Aufgabe durch die Applikation synchron miteinander vernetzt, so dass ein intermodaler Transfer herausgefordert werden kann. Schließlich besteht durch das automatische Sortieren und Ordnen der Plättchen eine mögliche Hilfestellung hinsichtlich des Darstellens und Erfassens von Plättchenmengen.

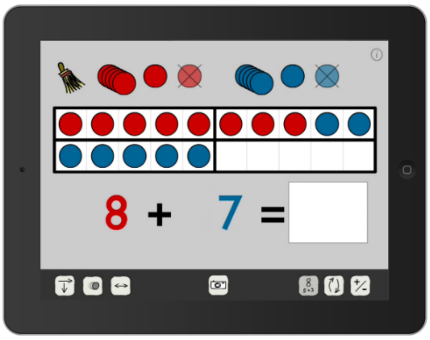


**Abb. 1:** Virtuelles Zwanzigerfeld

Für die Analyse von Schülerhandlungen am virtuellen Zwanzigerfeld sind folgende Fragen von besonderem Interesse:

- Wie stellen Schüler Aufgaben am virtuellen Zwanzigerfeld dar?
- Worauf fokussieren sich Schüler im Zuge des Legeprozesses?
- Wie überprüfen Schüler ihr Ergebnisse?

## Untersuchungsdesign

Für die Beantwortung obiger Fragen wurden qualitative Interviewsitzungen mit $n = 19$ Schülern zu Beginn ihres zweiten Schuljahres im August und September 2014 durchgeführt. Die Ermittlung ‚rechenschwacher' Schüler erfolgte zunächst auf Grundlage ausgewählter Diagnoseaufgaben (aus: Peter-Koop et al. 2007; Wartha & Schulz 2013; Häsel-Weide et al. 2014) im Rahmen qualitativer Lernstandserhebungen. Anschließend wurde mit jedem Kind an sechs aufeinanderfolgenden Schultagen jeweils eine Interviewsitzung durchgeführt, die aus zwei Perspektiven videographiert wurden. Während sich die ersten drei Sitzungen auf Schülerhandlungen im Umgang mit der Applikation ‚Virtuelles Rechentablett' und dem damit verbundenen *Teile-Ganze-Konzept* bezogen, thematisierten die folgenden Interviews das *Rechnen mit Zahlbeziehungen im Zahlenraum bis 20*, wofür das virtuelle Zwanzigerfeld herangezogen wurde.

Ferner ist zu betonen, dass die Schüler vor dem Umgang mit den digitalen Arbeitsmitteln im Rahmen der jeweils ersten Interviewsitzung am physischen Pendant operierten. Darüber hinaus wurde vor der Arbeit an den digitalen Arbeitsmitteln stets eine gemeinsame Erarbeitung der Funktionsweise der Applikationen durchgeführt.

## Erste Ergebnisse

Anhand des erhobenen Datenmaterials werden die im Zuge des Forschungsinteresses aufgeworfenen Fragen im Folgenden beantwortet. Als Datengrundlage dienen die Schülerhandlungen am ‚virtuellen Zwanzigerfeld' am Beispiel der Aufgabe 8+7. Hierfür wurden die Schüler zunächst gebeten, das Ergebnis der Aufgabe ohne die Applikation zu bestimmen, was sie in der Regel über Zählstrategien ermittelten. Im weiteren Verlauf stellten die Schüler die Aufgabe dar und überprüften ihr zuvor mental errechnetes Ergebnis. Inwieweit die aufgezeigten Potentiale der Applikationen dabei genutzt wurden, steht im Zentrum des Interesses.

- *Wie stellen Schüler Aufgaben am virtuellen Zwanzigerfeld dar?*

Die Analyse der Daten hat gezeigt, dass mehr als die Hälfte der interviewten Schüler (10) am virtuellen Zwanzigerfeld bei mindestens einem Summanden der Aufgabe 8+7 die Möglichkeit des simultanen Legens von fünf Plättchen nutzt. Ferner nutzten acht Kinder diese Möglichkeit nicht und legten konsequent einzelne Plättchen. Ein weiteres Kind agierte während des Legens der Plättchen ohne Berücksichtigung der Aufgabenstellung.

- *Worauf fokussieren sich Schüler im Zuge des Legeprozesses?*

Im Zuge des Darstellens der Aufgabe 8+7 zeigten sich drei verschiedene Vorgehensweisen. Während einige Probanden (1) das *Plättchenbild als Kernreferenz* heranzogen und den Legeprozess beendeten, nachdem sie das virtuelle Plättchenbild entweder ausgezählt oder die Teilsummanden quasi-simultan erfasst haben, bezogen sich andere Probanden (2) auf die *mathematisch-symbolischen Zahlsymbole der Summanden*. Hierbei beendeten Schüler den Legeprozess, sobald die sichtbaren Zahlsymbole die gesuchten Summanden darstellten. Neben diesen beiden Vorgehensweisen, die sich an dargebotenen Darstellungsebenen der Applikation orientieren, gingen wiederum andere Schüler ohne unmittelbaren Bezug zu diesen vor. Ein charakteristisches Vorgehen dieses Typus bestand im (3) *begleitendem mentalen Zählen*, während die einzelnen Plättchen an der Applikation hinzugefügt wurden.

- *Wie überprüfen Schüler ihr Ergebnis?*

Die am häufigsten vertretene Strategie bestand im (1) *Aufdecken des mathematisch-symbolischen Zahlsymbols* des Ergebnisses, welches durch Verschieben eines weißen Fensters (siehe Abb. zum virtuellen Zwanzigerfeld) sichtbar wird. Wiederum andere Schüler (2) *zählten die zuvor gelegten Plättchen erneut* aus. Als weitere Vorgehensweise konnte die (3) quasisimultane Erfassung des Plättchenbildes ausgemacht werden, ohne dass das Zahlsymbol des Ergebnisses explizit aufgedeckt wurde. Zusammenfassend ist festzuhalten, dass einige Probanden bereits nach kurzer Einführung in die Applikation ‚virtuelles Zwanzigerfeld' theoretische Potentiale der Software zur Überwindung zentraler Hürden zählend rechnender Schüler nutzten. Allerdings zeigen sich ebenso Vorgehensweisen, die eine Verfestigung von Zählstrategien begünstigen können. Die theoretisch erdachten Potentiale von Tablet-Applikationen werden folglich nicht automatisch von jedem Schüler selbst erkannt und genutzt. Erst nach einer gemeinsamen Erarbeitung erwächst die Chance, von den Potentialen der Applikationen zu profitieren.

## Literatur


Gaidoschik, M. (2010). Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres. Dissertation. Universität Wien.

Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., Fan, L. & Siegler, R. S. (1996). Development of Arithmetical Competences in Chinese and American Children: Influence of Age, Language, and Schooling. Child Development, 67, 2022 - 2044.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Verfügbar unter phfr.bsz-bw.de/files/16/gerster.pdf [17.01.15]

Gray, E. M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: Preference and its consequences. Educational Studies in Mathematics, 22, 551-574.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2014). Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen. Seelze: Klett.

Insitut für Demoskopie Allensbach (2014). Digitale Medienbildung in Grundschule und Kindergarten. Verfügbar unter www.telekom-stiftung.de.

Krauthausen, G. (2012). Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Heidelberg: Springer Spektrum.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014). „Ist das dann noch ein Zehner oder ein Einer?“ – Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten. Beiträge zum Mathematikunterricht, 527-530.

Peter-Koop, A.; Wollring, B.; Spindeler, B; Grüßing, M. (2007). ElementarMathematisches Basisinteriew Zahlen und Operationen. Offenburg: Mildenberger.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Urff, C. (o.J.). Virtuelle Arbeitsmittel. Verfügbar unter http://www.lernsoftware-mathematik.de.

Wartha, S & Schulz, A. (2013). Rechenproblemen vorbeugen. Berlin: Cornelsen.

Sabine WEIDENEDER, Stefan UFER, München

# Auswahl und Analyse von Aufgaben als professionelle Kompetenz einer Mathematik-Lehrkraft

## 1. Forschungsstand

Aufgaben sind ein zentrales Element im Mathematikunterricht und in dessen Vorbereitung (Hiebert et al., 2003; Bromme, 1981). Der Einsatz kognitiv aktivierender Aufgaben wird als zentral für die Konzeption wirksamen Mathematikunterrichts gesehen. Verschiedene Studien zeigen, dass die didaktische Qualität von Aufgaben ein Prädiktor für wirksame Lernprozesse ist (z.B. Baumert et al., 2010). Ein Blick in die Unterrichtspraxis ergibt jedoch, dass das Aufgabenpotential oft niedrig ist, Aufgaben häufig nicht auf die intendierte Weise eingesetzt werden und somit ein Teil des Potentials der Aufgabe ungenutzt bleibt (Jordan et al., 2008; Stein & Lane, 1996). Damit gewinnt die Frage nach der professionellen Kompetenz von Lehrkräften, Aufgaben für ihren Unterricht auszuwählen und zu analysieren, als eine Facette professioneller Kompetenz, an besonderer Bedeutung. Offen ist, inwiefern Lehrkräfte das kognitive Potential von Aufgaben bei der Auswahl und Analyse von Aufgaben in der Unterrichtsplanung erkennen und berücksichtigen. Um eine umfassendere Erfassung dieses Kompetenzbereichs zu ermöglichen, befasst sich diese Arbeit mit dem Bereich der Analyse von Aufgaben und einer möglichen Operationalisierung der damit verbundenen Kompetenzanforderungen.

## 2. Konzeptualisierung

Unter dem Begriff des *Aufgabenpotentials* verstehen wir eine in der Aufgabe angelegte, aber noch nicht realisierte Nutzungsmöglichkeit für verständnisvolle Lernprozesse. Wir nehmen an, dass für einen lernförderlichen Umgang mit Aufgaben nicht allein die Wahl einer bestimmten Aufgabe mit hohem Potential im Vordergrund steht, sondern dass für eine adäquate Nutzung des Aufgabenpotentials zuallererst die unterrichtlichen Lerngelegenheiten der Aufgabe wahrgenommen werden müssen. Zur Konzeptualisierung der Kompetenz zur Analyse des Aufgabenpotentials beziehen wir uns auf das theoretische Konzept der professionellen Wahrnehmung (Goodwin, 1994; Sherin, 2002). Damit umfasst die Analyse von Aufgaben die Identifikation und Begründung lernwirksamer Aufgabenmerkmale, wobei hier drei qualitativ unterschiedliche Ebenen von Bedeutung sind (nach van Es & Sherin, 2008): (1) Das Beschreiben der für den Lernprozess relevanten Aufgabenmerkmale, (2) auf Basis des eigenen Wissens die Aufgabenmerkmale erklären und deren (3) Wirkungen auf weitere Lehr-Lern-Prozesse vorhersagen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 3. Umsetzung in einer Fragebogenstudie

Aufbauend auf einer qualitativen, explorativen Vorstudie (Weideneder&Ufer, 2013) wurden wesentliche Anforderungen in Bezug auf die Analyse und Auswahl von Aufgaben identifiziert und in Items für einen Kompetenztest umgesetzt, der von N=95 aktiven und zukünftigen Mathematiklehrkräften der Sek I bearbeitet wurde. In diesem Beitrag wird auf folgende Fragekomplexe eingegangen:

1. Welche Kriterien ziehen Lehrkräfte für die Aufgabenwahl heran? Inwieweit beziehen sich Lehrkräfte hierbei auf lernwirksame Merkmale? Lassen sich Lehrkraftgruppen identifizieren, die sich in der Art der Begründung ihrer Aufgabenwahl unterscheiden?
2. Lässt sich empirisch erfassen, auf welchem Niveau Lehrkräfte die Wahl von Aufgaben begründen?

In den für die Beantwortung der Fragen herangezogenen Items waren jeweils zwei Aufgaben gegenübergestellt und eine Unterrichtssituation mit konkretem Lernziel vorgegeben. Die Lehrkräfte sollten dafür die ihrer Meinung nach geeignetere Aufgabe auswählen und ihre Wahl begründen. Die Begründungen wurden anschließend einzeln bezüglich ihres Typs und ihres Niveaus analysiert. Für die Codierung des Typs wurden die einzelnen Begründungen nach Dimensionen von Unterrichtsqualität und weiteren für die Wahl von Aufgaben relevanten Aspekten von der Erstautorin und einer unabhängigen Raterin codiert. Die Codierung des Begründungsniveaus orientierte sich an den drei Ebenen der professionellen Wahrnehmung (siehe Tab. 1).

**Tabelle 1:** Übergeordnetes Kategorisierungsschema des Begründungsniveaus mit Beispielantworten

| Niveau | Beispiele |
|---|---|
| **Beschreibung**<br>Beschreibung eines Aufgabenmerkmals oder Aspekts | • In der Aufgabe muss man Schätzen.<br>• Die Aufgabe hat einen Alltagsbezug. |
| **Erklärung**<br>Aufgabenmerkmal oder Aspekt wird beschrieben und es wird erklärt, was dieser im Arbeits-/Lernprozess bewirkt | • Das Schätzen ermöglicht eine Fehlerkorrektur.<br>• Der Alltagsbezug ist motivierend. |
| **Vorhersagen**<br>Aufgabenmerkmal oder Aspekt wird beschrieben und es wird erklärt, welche Wirkung dieser auf **weitere** Lehr-Lernprozesse hat | • Das Schätzen ermöglicht neben der Fehlerkorrektur eine Entwicklung von Größenvorstellungen.<br>• Der Alltagsbezug ist motivierend, deswegen können die Schüler besser in die Aufgabe einsteigen. |

## 4. Erste Ergebnisse

Die Analyse der Kriterien, die für die Begründung der Aufgabenwahl herangezogen wurden, zeigt, dass sich Lehrkräfte auf lernwirksame Merkmale beziehen. Mit einer Clusteranalyse konnten drei Begründungsprofile identifiziert werden, welche sich in der Art ihrer Begründungen unterscheiden. Dieser Unterschied ist vor allem vor dem Hintergrund unserer Annahme von Interesse, dass eine Fokussierung auf lernwirksame Merkmale in der Aufgabenwahl mit einer adäquaten Aufgabenimplementation zusammenhängt.

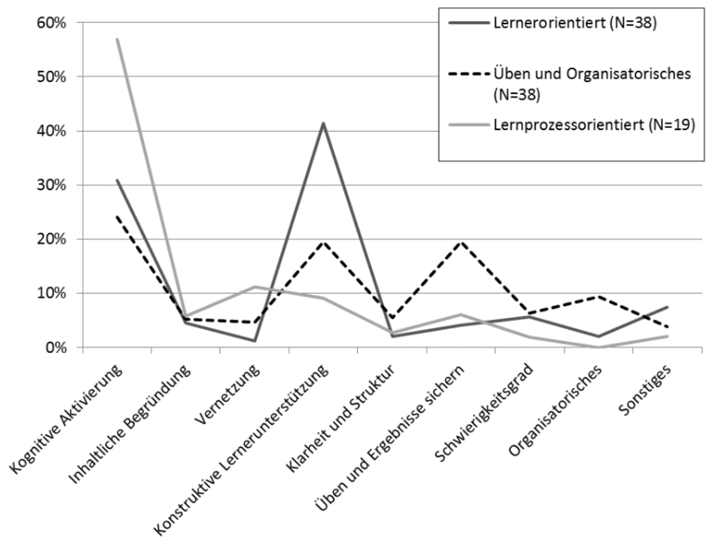



**Abbildung 1:** Begründungsprofile

Die lernprozess-orientierte Gruppe (N=19) zeichnet sich durch eine im Vergleich zu den anderen beiden Gruppen starke Orientierung an kognitiven Pro-zessen und der Vernetzung mathe-matischer Ideen aus, was beides auf eine Fokussierung auf den Lern-prozess, der mit den gewählten Aufgaben angeregt werden soll, hindeutet. Bei der lernerorientierten Gruppe (N=38) hingegen spielte die konstruktive Unterstützung der Lernenden eine entscheidende Rolle. 41% der Begründungen thematisierten Aspekte, die zum Beispiel die Steigerung der Motivation durch den Aufgabenkontext, die Möglichkeit einer Differenzierung mit der Aufgabe oder das Ermöglichen von Erfolgserlebnissen in den Vordergrund der Aufgabenauswahl stellen. Charakteristisch für die Üben Gruppe (N=38) war der Schwerpunkt auf generelle mathematische Tätigkeiten, wie Üben und Ergebnisse sichern. Hier wurden ebenso mathematische Tätigkeiten angesprochen, jedoch ohne erkennbaren Bezug zu Qualitäts-merkmalen von Unterricht. Des Weiteren kennzeichnete diese Gruppe ihre signifikant häufigere Orientierung an organisatorischen Aspekten, die mit der Aufgabe verbunden sind.

Diese Gruppe zeigt also bei der Aufgabenauswahl eine Orientierung eher an Merkmalen der Oberflächenstruktur von Unterricht. Des Weiteren war es mit der vorgeschlagenen Konzeptualisierung möglich, das Begründungsniveau der Aufgabenwahl empirisch zu erfassen. Das Niveau der Begründungen für die Wahl einer Aufgabe ergab einen Mittelwert von 2,33 (SD=,42). Die Aufgabenmerkmale wurden also nicht nur erklärt, sondern einige Lehrkräfte gingen auf mögliche weitere Wirkungen des Aufgabenmerkmals auf den Lernprozess ein. Beschreibungen findet man sehr wenige, was auch im Zusammenhang mit dem Itemformat betrachtet werden muss, welches explizit nach einer Erklärung fragt.

## 5. Ausblick

Nächste Schritte sind die Untersuchung von weiteren Facetten der Kompetenzen zur Aufgabenanalyse und Zusammenhängen zwischen diesen Facetten. Ein Schwerpunkt wird hierbei der Zusammenhang zwischen dem Niveau der Aufgabenanalyse und einer adäquaten Vorbereitung der Aufgabenimplementation sein, wofür auch ein entsprechendes Maß entwickelt wurde. Des Weiteren werden Zusammenhänge und Mediationseffekte der umgesetzten Kompetenzfacetten mit Indikatoren professionellen Wissens analysiert.

## Literatur


Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. et al. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal, 47* (1), 133–180.

Bromme, R. (1981). *Das Denken von Lehrern bei der Unterrichtsvorbereitung. Eine empirische Untersuchung zu kognitiven Prozessen von Mathematiklehrern*. Weinheim: Beltz.

Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American anthropologist, 96* (3), 606–633.

Hiebert, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study:* DIANE Publishing.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M. et al. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29* (2), 83–107.

Sherin, M. G. (2002). When teaching becomes learning. *Cognition and instruction, 20* (2), 119–150.

Stein, M. K. & Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation,*

van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers'"learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24* (2), 244–276.

Weideneder, S., Ufer, S. (2013). Which Kinds of Tasks do Mathematics Teachers Select for Instruction, and why? In: A. Lindmeier, A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 4, pp. 385-392. Kiel, Germany: PME.

Julia WEINSHEIMER, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

# Diagnostische Fähigkeiten von Grundschullehrkräften bei der Begleitung von Lernprozessen im Bereich Arithmetik

Um Lernvoraussetzungen, Fähigkeiten und Schwierigkeiten bei der Begleitung der Lernprozesse ihrer Schüler angemessen einschätzen zu können, müssen Lehrkräfte über entsprechende diagnostische Fähigkeiten verfügen. Diagnostische Fähigkeiten stellen eine „Voraussetzung für angemessene Unterrichtsgestaltung und gezielte individuelle Förderung“ (Artel & Gräsel, 2009) dar. Neben einer angemessenen Beurteilung von Schülermerkmalen kommt der adäquaten Einschätzung von Lern- und Aufgabenanforderungen ebenso Bedeutung zu.

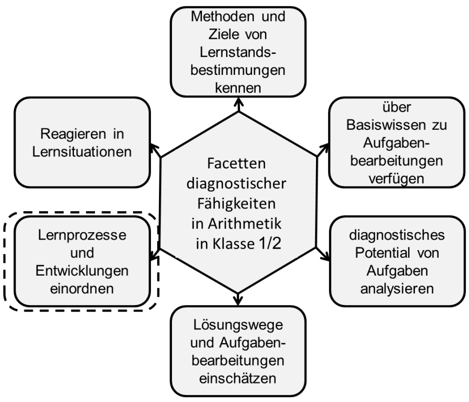
## Diagnostische Fähigkeiten konzeptualisieren und erfassen

Ziel des vorgestellten Dissertationsprojekts ist es, ein Instrument zu entwickeln und zu evaluieren, mit dem aus fachdidaktischer Perspektive die diagnostischen Fähigkeiten von Lehrkräften im Rahmen der Begleitung von Lernprozessen – speziell im Bereich Arithmetik des Anfangsunterrichts – erfasst und analysiert werden können. Hierfür wurde ein qualitatives methodisches Vorgehen gewählt. Die beruflichen Anforderungen, die an Lehrkräfte in diesem Kontext bei der Begleitung von Lernprozessen gestellt werden, sollten dabei möglichst adäquat abgebildet werden. So wurden neben Beurteilungen von Schülerlösungen und Mathematikaufgaben auch Videosequenzen eingesetzt, in denen Lehr-Lern-Situationen eingeschätzt und Reaktionen in Form möglichen Lehrerhandelns formuliert werden sollten. Im Rahmen der Operationalisierung lieferten verschiedene Modelle die theoretische Grundlage (Details in Weinsheimer & Rathgeb-Schnierer, 2013). Das Instrument kam bei verschiedenen Gruppen zum Einsatz: bei Mathematik-Studierenden für Grundschullehramt (a) Studienanfängern und b) Studierenden im höheren Semester), c) bei Lehrkräften (Teilnehmern einer Fortbildungsreihe), sowie d) bei Mathematikdidaktikern. Mit Hilfe der offenen Items lassen sich nun die jeweiligen diagnostischen Fähigkeiten in sechs Facetten (vgl. Abb. 1) analysieren und in Form eines Kompetenzprofils (vgl. Abb. 2) darstellen. Ein Vergleich der jeweiligen Ausprägungen zwischen den verschiedenen Gruppen wird möglich. Mittels intraindividuellen Vergleichs soll außerdem der Frage nachgegangen werden, ob sich mit Hilfe des Instruments auch Entwicklungen bei den Lehrkräften nachzeichnen lassen, die schuljahrbegleitend an einer Fortbildungsreihe teilgenommen hatten.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Diagnostische Fähigkeiten analysieren

Die Auswertung erfolgte itemspezifisch. Basierend auf den Antworten einer Stichprobe (jede Gruppe vertreten, 1/3 aller auszuwertenden Daten) wurden zunächst inhaltsanalytisch verschiedene Kategorien theoriegestützt, vorwiegend induktiv herausgearbeitet. Im nächsten Schritt erfolgte die Generierung eines Ratingverfahrens, das es ermöglicht, die verschiedenen Antwortformate hinsichtlich ihrer Qualität einer Qualitätsstufe a, b oder c zuzuordnen. So werden besonders komplexe fachlich angemessene Antworten mit Qualitätsstufe a geratet. Hierbei lieferten neben der Theorie vor allem die Antworten der Mathematikdidaktiker eine Orientierung im Sinne einer Experten-Normierung. In der weiteren Analyse werden die Items gleicher Facetten diagnostischer Fähigkeiten gebündelt. Der Median der jeweils erreichten Qualitätsstufen je Facette wird bestimmt und auf einer der sechs entsprechenden Dimensionen in einem Netzdiagramm abgetragen (vgl. Abb. 2). Aus dem entstandenen Kompetenzprofil lassen sich nun die Ausprägungen der diagnostischen Fähigkeiten für jede Facette ablesen: je weiter nach außen das Kompetenzprofil reicht, umso höhere Qualität weisen die Antworten der jeweiligen Facette auf (vgl. auch Weinsheimer & Rathgeb-Schnierer, 2014). In den dargestellten Kompetenzprofilen einer Lehrkraft zu Fortbildungsbeginn und -ende (vgl. Abb. 2) lassen sich in vier Facetten positive Entwicklungen über den Fortbildungszeitraum erkennen.



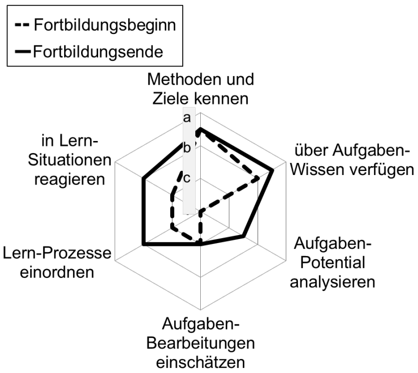




**Abb. 1** Modell diagnostischer Fähigkeiten in Arithmetik in Klasse 1/2 **Abb. 2** Kompetenzprofil einer Lehrkraft der Fortbildungsreihe

## Die Facette „Lernprozesse und Entwicklungen einordnen"

Wie sich aus den Antworten das Kompetenzprofil bezüglich der Facette ableiten lässt, soll exemplarisch anhand eines Items aufgezeigt werden. Mit Item 14 werden die diagnostischen Fähigkeiten in der Facette „Lernprozesse und Entwicklungen einordnen" erfasst. Hierzu sind Lernstände zu verschiedenen mathematischen Inhalten (Mengenerfassung, Zahlenschreiben, Rechnen, Zahlwortreihe) beschrieben, die sich jeweils auf einen bestimmten Zeitpunkt im Schuljahr beziehen. Die Probanden sollen nun einschätzen, ob der Lernstand bezogen auf den Zeitpunkt eher kritisch zu beurteilen ist, d. h. damit auch einer gezielten Förderung bedarf. Zudem werden die Probanden zur Begründung ihrer Einschätzung aufgefordert. Abbildung 3 gibt einen Überblick über die vier beschriebenen Lernstände, von denen zwei in Anbetracht des angegebenen Zeitpunktes als kritisch einzuordnen sind und einen dringenden Handlungsbedarf durch die begleitende Lehrkraft offerieren; die beiden anderen geschilderten Situationen sind als weniger kritisch einzuordnen, da davon auszugehen ist, dass nicht mangelndes grundlegendes Verständnis ursächlich ist.

| Inhalt | Zeitpunkt | Situation | Einordnung | Cohens κ |
|---|---|---|---|---|
| **Mengen-erfassung** | Anfang 1. Klasse | kein Erfassen der Würfel-Fünf | problematisch | 1,00 |
| **Zahlen schreiben** | Mitte 1. Klasse | spiegelbildliche Notation von 3,5,6 | unproblematisch | 0,71 |
| **Rechnen** | Ende 1. Klasse | zählendes Lösen von 3+5 | problematisch | 0,70 |
| **Zahlwort-reihe** | Ende 2. Klasse | Zählen „98-99-100-einhundert-200“ | unproblematisch | 0,90 |

**Abb. 3** Übersicht Item 14 „Lernprozesse und Entwicklungen einordnen“

Im Rahmen des Forschungsprojekts wurden die Antworten der Stichprobe von zwei unabhängigen Ratern zunächst codiert und anschließend geratet. Abbildung 3 zeigt die jeweilige Intercodier-Übereinstimmung, die mittels Cohens κ für jede einzuordnende Situation berechnet wurde. Für das Rating wurde folgendes Vorgehen gewählt: Wurde die Hälfte der beschriebenen Situationen hinsichtlich ihrer Problematik korrekt eingeschätzt und fachlich angemessen begründet, erfolgte die Zuordnung zu Qua litätsstufe c. Bei korrekter Einschätzung und entsprechender Begründung aller vier Situationen wurden die Antworten mit a geratet. In Abbildung 4 sind die Antworten einer Lehrkraft dargestellt: Während diese zu Fortbildungsbeginn nur eine Situation korrekt einordnen konnte und somit nicht einmal Qualitätsstufe c erreichte, gelang ihr zu Fortbildungsende die korrekte Einschätzung und entsprechende Begründung von drei der vier beschriebenen Situationen, was Qualitätsstufe b entsprach.

| | Antwort einer Lehrkraft zu Fortbildungsbeginn | | | Antwort derselben Lehrkraft zu Fortbildungsende | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Inhalt** | **Einordnung** | **Begründung** | ✓ | **Einordnung** | **Begründung** | ✓ |
| **Mengen-erfassung** | völlig unproblematisch | Er kann zählen. Er kann die Zahlen einer Menge zuordnen. Man kann nun die Simultanerfassung üben und zu einem späteren Zeitpunkt schauen, ob es ihm gelingt. | – | weniger problematisch | Er kann Mengen und Zahlen in Verbindung setzen und zählen. Möglicherweise wurde er mit Würfelbildern nicht konfrontiert, also kann er es nicht wissen. | – |
| **Zahlen schreiben** | [fehlt] | | – | weniger problematisch | Gibt sich durch Übung mit der Zeit. | ✓ |
| **Rechnen** | [fehlt] | | – | eher problematisch | Es ist normal, dass es diese Kinder am Ende der 1. Klasse noch gibt, aber ich würde ihn speziell im Auge behalten. | ✓ |
| **Zahlwort-reihe** | weniger problematisch | Er hat den Zahlenraum bis 100 erfasst. Sobald man ihm erklärt, dass es ebenso weitergeht, wird er es aufgrund seiner Vorerfahrungen sehr schnell verstehen. | ✓ | völlig unproblematisch | Ziel Klasse 2 ist Zahlenraum bis 100 → erreicht! | ✓ |

**Abb. 4** Antworten einer Lehrkraft auf Item 14 „Lernprozesse und Entwicklungen einordnen“

## Ergebnisse zur Facette „Lernprozesse und Entwicklungen einordnen“

Betrachtet man die Ausprägungen der diagnostischen Fähigkeiten in der Facette „Lernprozesse und Entwicklungen einordnen“ bei einer Auswahl von zehn Lehrkräften zu Fortbildungsbeginn und -ende, zeigt sich folgendes Bild (vgl. Abb. 5): Bei der Hälfte der Lehrkräfte lässt sich eine positive Entwicklung und Verbesserung um mindestens eine Qualitätsstufe ausmachen. Während nach der Fortbildungsreihe alle Lehrkräfte mindestens die Hälfte aller beschriebenen Situationen zu Lernprozessen von Kindern im 1.-2. Schuljahr korrekt einordnen konnten, gelang den meisten sogar 3/4 aller Situationen korrekt einzuschätzen und entsprechend fachlich zu begründen.

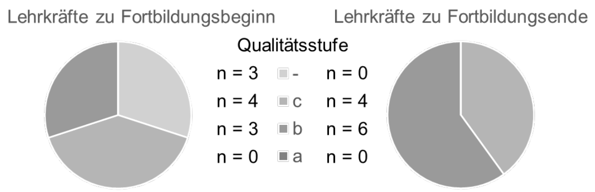



**Abb. 5** Ausprägungen in der Facette „Lernprozesse und Entwicklungen einordnen“ bei den Lehrkräften

Im interindividuellen Vergleich zwischen den Antworten der verschiedenen Gruppen (vgl. Abb. 6) wird deutlich, dass es vor allem Studienanfängern schwerfällt, Situationen zu Lernprozessen und Entwicklungen von Kindern adäquat einzuordnen. Studierende im höheren Semester können dagegen meistens die Hälfte der beschriebenen Situationen korrekt einordnen und erreichen in dieser Facette überwiegend Qualitätsstufe c.

| Qualitätsstufe | – | c | b | a |
|---|---|---|---|---|
| Studienanfänger (n=9) | 7 | 2 | 0 | 0 |
| Studierende (n=11) | 1 | 8 | 1 | 1 |
| Lehrkräfte (n= 10) | 0 | 4 | 6 | 0 |
| Mathematikdidaktiker (n=6) | 0 | 0 | 3 | 3 |

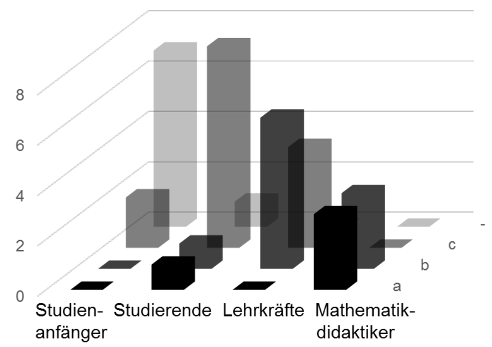



**Abb. 6** Ausprägungen in der Facette „Lernprozesse und Entwicklungen einordnen“ im Gruppenvergleich

## Literatur


Artelt, C., Gräsel, C. (2009). Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *23 (3-4)*, 157–160.

Weinsheimer, J., Rathgeb-Schnierer, E. (2013). Diagnosekompetenz von Grundschullehrkräften erfassen – Einblicke in die Entwicklung eines Erhebungsinstruments. In G. Greefrath, F. Käpnick, M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 1078–1081). Münster: WTM-Verlag.

Weinsheimer, J. Rathgeb-Schnierer, E. (2014): Diagnostische Fähigkeiten von Grundschullehrkräften im Bereich Arithmetik erfassen und analysieren. In J. Roth, J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 1291–1294 und 1371–1372). Münster: WTM-Verlag.

Stephanie WESKAMP, Essen

# Einsatz von substanziellen Lernumgebungen in heterogenen Lerngruppen im Mathematikunterricht der Grundschule

## 1. Bedeutung von substanziellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Grundschule

Empirische Befunde zeigen, dass der Umgang mit einer zunehmenden heterogenen Schülerschaft, insb. mit einem breiten Leistungsspektrum im Mathematikunterricht der Grundschule, als zentrale Anforderung gilt (vgl. Krauthausen & Scherer 2014; Stanat et al. 2012; Walther et al. 2008). Als Reaktion auf diese Ergebnisse folgte u. a. die Entwicklung der Bildungsstandards, die sich mit dem Aspekt der Leistungsheterogenität auseinandersetzen und in diesem Kontext die Anforderungsbereiche einführten (vgl. KMK 2005, S. 13). Insgesamt hat die Unterrichtsentwicklung durch eine geeignete Aufgabenkultur seit einigen Jahren an zentraler Bedeutung gewonnen, daneben sind jedoch noch weitere Faktoren, wie die Bedingungen seitens der Lehrperson und der Lernenden sowie die Unterrichtskultur entscheidend (vgl. Büchter & Leuders 2011; Krauthausen & Scherer 2014). In der mathematikdidaktischen Literatur wird in diesem Zusammenhang die natürliche Differenzierung als ein geeignetes Konzept beschrieben (vgl. Wittmann 1990; Krauthausen & Scherer 2014), welches sich besonders gut beim Einsatz substanzieller Lernumgebungen realisieren lässt (vgl. Krauthausen & Scherer 2014). Derartige Lernumgebungen definiert Wittmann (z. B. 1998) mit folgenden Merkmalen: Sie repräsentieren zentrale Ziele, Inhalte sowie Prinzipien des Mathematikunterrichts, bieten reichhaltige mathematische Aktivitäten, sind flexibel nutzbar und integrieren mathematische, psychologische sowie pädagogische Aspekte (vgl. auch Krauthausen & Scherer 2014). Substanzielle Lernumgebungen sind für den Mathematikunterricht von großer Bedeutung: Sie realisieren fundamentale Ideen der Mathematik, fördern die Kompetenz des Argumentierens sowie mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten und bieten die Möglichkeit, produktiv mit der heterogenen Schülerschaft umzugehen (vgl. ebd.). Lernumgebungen, die zentrale mathematische Kernideen aufgreifen, sind elementarer Bestandteil des Projekts ‚Mathe-Spürnasen' an der Universität Duisburg-Essen. Im Rahmen von Experimentiervormittagen bearbeiten Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse unter vielfältigen Perspektiven (Einführungen und Vertiefungen) ausgewählte Lernumgebungen (vgl. Baltes et al. 2014). Das hier vorgestellte Forschungsprojekt lässt sich in das Gesamtprojekt ‚Mathe-Spürnasen' einordnen und erforscht zum einen die Konzeption von Lernumgebungen und zum anderen die konkreten Bearbeitungsprozesse

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

der Schülerinnen und Schüler. Dazu wird die Bearbeitung der Lernumgebungen in Kleingruppen videographiert und zusammen mit den dabei entstandenen schriftlichen Schülerdokumenten analysiert. Anschließend werden ausgewählte Einzelinterviews geführt, um einen detaillierten Einblick in die Bearbeitungsprozesse der Lernenden zu gewinnen. Bezüglich der Charakterisierung dieser Prozesse werden u. a. die Anforderungsbereiche (AB; vgl. KMK 2005, S. 13) der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Lernumgebungen identifiziert. Dabei werden Schülerbearbeitungen, die Unterschiede bzgl. der AB in Einführung und Vertiefung aufweisen oder Schülerbearbeitungen, die auf eine nicht hierarchische Anordnung der Anforderungsbereiche (bspw. Schwierigkeiten bei AB I, gelungene Bearbeitung im AB II) hindeuten, genauer untersucht.

## 2. Lernumgebung Pascalsches Dreieck

Im Folgenden soll exemplarisch die im Rahmen des Forschungsprojekts konzipierte Lernumgebung Pascalsches Dreieck vorgestellt werden. Diese umfasst eine Einführungseinheit, in der das Pascalsche Dreieck durch eine kombinatorische Aufgabenstellung hergeleitet wird sowie drei Vertiefungen Galtonbrett, Wege in Mannheim und Zahlenmuster. Die Lernumgebung bietet die Möglichkeit für kombinatorische und musterbezogene Aufgabenstellungen und spricht somit die Vernetzung verschiedener inhaltlicher Leitideen an. Neben inhaltlichen Zielen verfolgen die vielfältigen Aktivitäten auch allgemeine Ziele. Im Folgenden wird die Einführungseinheit und die Vertiefung Zahlenmuster näher vorgestellt, um anschließend exemplarische Bearbeitungen von Grundschulkindern aufzuzeigen und auf erste Erkenntnisse aus Pilotierungen einzugehen.

### 2.1. Einführung Kennenlernen des Pascalschen Dreiecks

Ausgangspunkt für die Herleitung des Pascalschen Dreiecks ist eine kombinatorische Aufgabenstellung, der eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang $k$ aus $n$ Elementen in Form von verschiedenfarbigen Murmeln (mit $n > k$) zu Grunde liegt. Hierbei bestimmen die Lernenden zunächst alle möglichen Kombinationen und deren Anzahl. Die jeweiligen Ergebnisse werden in einer Tabelle festgehalten. Durch Heranziehen des historischen Kontextes in Form einer Abbildung des Yang-Hui-Dreiecks (vgl. z. B. Martzloff 1997) wird die tabellarische Form zur Dreiecksform umstrukturiert, sodass die arithmetische Bildungsregel deutlicher hervorgeht. Diese können die Lernenden zum Fortsetzen des Pascalschen Dreiecks nutzen.

## 2.2. Vertiefung Zahlenmuster

Im Mathematikunterricht der Grundschule ist die Beschäftigung mit Mustern unterschiedlicher Art, wie z. B. die Auseinandersetzung mit Zahlenmustern von großer Relevanz (vgl. Wittmann 2003; MSW 2008). Dieser Aspekt findet in der Vertiefung durch das individuelle Entdecken von Zahlenmustern im Pascalschen Dreieck (vgl. Benz 2014) besondere Berücksichtigung. Um das Pascalsche Dreieck fortzusetzen, können die Lernenden auf die in der Einführung thematisierte additive Bildungsregel zurückgreifen oder bereits erkannte arithmetische Beziehungen zwischen den Zahlen nutzen (vgl. Stufe I des Zahlenmusterverständnisses (ZMV) nach Steinweg 2001). Darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Entdeckungen bzgl. der Zahlenmuster beschreiben. Diese Beschreibungen können ganz unterschiedlichen Charakter besitzen. Denkbar sind beispielgebundene Beschreibungen von exemplarischen aufgaben- oder zahlenfolgenbezogenen Mustern durch Einfärben von Zahlen oder verbale bzw. schriftliche Beschreibungen. Hingegen äußern sich generalisierende Beschreibungen durch die Formulierung einer allgemeinen Regel (vgl. Stufe II des ZMV, ebd.). Auch das Begründen eines Zahlenmusters wird angestrebt, wobei Argumentationen am Beispiel oder allgemeingültige Argumentationen möglich sind (vgl. Stufe III des ZMV, ebd.). Durch die Komplexität der Aufgabenstellung werden den Lernenden unterschiedliche Bearbeitungsniveaus ermöglicht. Dies kommt auch durch die Anforderungsbereiche der Bildungsstandards zum Ausdruck (vgl. KMK 2005, S. 13).

**Reproduzieren (AB I):** Berechnen der Zahlen im Pascalschen Dreieck unter Anwendung der additiven Bildungsregel

**Herstellen von Zusammenhängen (AB II):** Exemplarisches und generalisierendes Beschreiben von Zusammenhängen zwischen Zahlen

**Verallgemeinern und Reflektieren (AB III):** Verallgemeinern von Zahlenmustern und Begründen der Beziehungen zwischen Zahlen

Im Rahmen der Pilotierung wurden in der Einführungseinheit bei den Viertklässlerinnen Amba und Ulima beim Fortsetzen des Pascalschen Dreiecks mittels der additiven Bildungsregel Schwierigkeiten bei AB I bzgl. der Rechenfertigkeiten deutlich. Dennoch nutzten die Lernenden arithmetische Zusammenhänge zwischen Zahlen (AB II), um die Diagonalen mit 1 und mit natürlichen Zahlen im Pascalschen Dreieck fortzusetzen. Im Interview nutzte Ulima Tauschaufgaben im Pascalschen Dreieck, die sich aufgrund der Symmetrie ergeben, um weitere Zahlen zu bestimmen. Amba führte eine generalisierende Beschreibung ihrer Entdeckung an, indem sie auf die von ihr eingefärbten Zahlen und deren arithmetische Beziehung einging:

„*Da haben wir entdeckt, dass alle Zahlen durch fünf teilbar sind. (...) Nicht alle, nur die Blauen.*“ Die Beispiele aus Pilotierungen deuten bereits an, dass eine differenzierte Beschreibung der Bearbeitungsniveaus innerhalb der eingesetzten Lernumgebungen notwendig ist. Dabei sind die Anforderungsbereiche nicht unbedingt hierarchisch zu sehen. Im weiteren Verlauf des Forschungsvorhabens sind weitere Analysen vorzunehmen, um die Bearbeitungsniveaus unter Berücksichtigung weiterer Facetten zu erfassen.

## Literatur


Baltes, U., Rütten, Ch., Scherer, P. & Weskamp, S. (2014). Mathe-Spürnasen – Grundschulklassen experimentieren an der Universität. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Bd. 1, S. 121-124). Münster: WTM.

Benz, Ch. (2014). Das Pascal'sche Dreieck. In V. Ulm (Hrsg.), *Gute Aufgaben Mathematik* (5. Aufl., S. 60-64). Berlin: Cornelsen.

Büchter, A. & Leuders, T. (2011). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen* (5. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

KMK (Hrsg., 2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004*. München: Wolters Kluwer.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.

Martzloff, J.-C. (1997). *A history of Chinese Mathematics*. Berlin/Heidelberg: Springer.

MSW – Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg., 2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Frechen: Ritterbach.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K. & Richter, D. (Hrsg., 2012). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011*. Münster: Waxmann.

Walther, G., Selter, Ch., Bonsen, M. & Bos, W. (2008). Mathematische Kompetenzen im internationalen Vergleich. In W. Bos et al. (Hrsg.), *Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 49-85). Münster: Waxmann.

Wittmann, E. Ch. (1990). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (S. 152-166). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *16*(3), 329-342.

Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule* (S. 18-46). Seelze: Kallmeyer.

Eva-Maria WIßING, Essen

# Kinder deuten strukturierte arithmetisch-symbolische Zahlenmuster – Erste Einsichten aus einer qualitativen Studie

Die Mathematik wird als eine Wissenschaft von den Mustern, Beziehungen und Strukturen verstanden (vgl. DEVLIN (1997), S. 3). Daher spielen Muster, Beziehungen und Strukturen schon im Mathematikunterricht der Grundschule eine bedeutende Rolle. So gibt z. B. der LEHRPLAN NRW an: „Dem Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen kommt eine wesentliche Rolle im Mathematikunterricht zu. Muster und Strukturen bestimmen häufig die einzelnen Themenbereiche und können zur Verdeutlichung zentraler mathematischer Grundideen genutzt werden." (LP (2008), S. 7)

## Theoretischer Hintergrund

STEINWEG (2001) untersuchte im Rahmen eines Forschungsprojektes das Zahlenmusterverständnis von Grundschulkindern. Sie gliedert den Umgang bzw. das Verständnis von Zahlenmustern in drei Stufen: I. *Erkennen* und *Intuitives Fortsetzen* des Musters; II. *Beschreiben* des Musters (exemplarisches vs. generalisierendes Darstellen); III. *Erklären* des Musters (Argumentieren am Beispiel vs. auf Allgemeingültigkeit zielendes Argumentieren) (vgl. STEINWEG 2001, S. 115 ff).

STEINWEG analysierte Deutungen der Kinder hinsichtlich der Stufen I und II. Ferner gab sie an, dass innerhalb ihrer Studie, die aus einem Paper-Pencil-Test und klinischen Interviews bestand, keine Ergebnisse zu dem Begründungsverhalten der Kinder (Stufe III) geliefert werden können.

LINK (2012), der sich an STEINWEG orientierte, konzentrierte sich in seinen Untersuchungen auf das Beschreiben von operativen Zahlenmustern und entwickelte Unterrichtsaktivitäten (Umsetzung von Merkmalen der Entwicklungsforschung), durch die Kinder zum Beschreiben von Zahlenmustern angeregt werden. In seiner Analyse konzentrierte er sich darauf, wie die Operation und wie das Objekt von Kindern beschrieben wird (vgl. LINK (2012)).

SÖBBEKE (2005) erforschte die visuelle Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern und charakterisierte eine Spanne von konkret empirischen bis hin zu strukturorientierten, relationalen Deutungen (vgl. SÖBBEKE (2005), S. 346ff). Auf diese Ergebnisse aufbauend konnte STEENPAß (2014) in ihrem Dissertationsprojekt herausarbeiten, dass Kinder bei der Deutung von Anschauungsmitteln entweder eine dingbezogene oder eine systembezogene Rahmung einnehmen. Entsprechend unterscheidet sie

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zwischen einer Welt der Dinge und einer Welt der Beziehungen (vgl. STEENPAß (2014)).

Worin bestehen nun die epistemologischen Besonderheiten mathematischer Strukturen und Beziehungen in symbolisch-arithmetischen gegenüber geometrisch-visuellen Kontexten?

## Das Forschungsprojekt KidZ

Das Deuten, vor allem das Begründen von Zahlenmustern innerhalb strukturierter arithmetisch-symbolischer Aufgabenkontexte, spielt im Rahmen des alltäglichen Mathematikunterrichts häufig (noch) eine untergeordnete Rolle. Viele Aufgaben enthalten oft lediglich die Anforderung, Strukturen zu entdecken und zu beschreiben, jedoch nicht, den entdeckten Strukturzusammenhang zu begründen. Aber gerade die Kompetenz des Begründens hat im Mathematikunterricht der Grundschule eine wichtige Funktion. So gibt der LEHRPLAN NRW (2008) an, dass die Anwendungs- und Strukturorientierung die wichtige Beziehungshaltigkeit der Mathematik verdeutlichen soll. „Das Prinzip der Strukturorientierung unterstreicht, dass mathematische Aktivität häufig im Finden, Beschreiben und Begründen von Mustern besteht.“ (LP (2008), S. 6)

Im Rahmen des Forschungsprojektes „KidZ – Grundschul**Ki**nder **d**euten **Z**ahlenmuster“ soll untersucht werden, wie Schülerinnen und Schüler des vierten Schuljahres strukturierte, arithmetisch-symbolische Aufgabenkontexte wahrnehmen, beschreiben, bearbeiten und vor allem wie sie strukturelle Zusammenhänge erklären und begründen. Hierbei stellt sich die Frage, in welchem Deutungsspektrum die Aussagen der Kinder zu finden sind. Worin bestehen Gemeinsamkeiten und Unterschiede der arithmetisch-symbolischen und der visuellen Strukturierungsfähigkeit (vgl. SÖBBEKE 2005)? Des Weiteren stellt sich die Frage, inwiefern ein Wechselspiel zwischen dem *(Aus-)Rechnen* und dem *Struktur(en)sehen* besteht. Hier stehen sich ein rechnerisch-algorithmischer und ein strukturell-operativer Zusammenhang gegenüber.

## Forschungsdesign

Um die arithmetische Strukturierungsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern zu charakterisieren, wurden mittels Prä-Interviews spontane Deutungen von insgesamt zehn Schülerinnen und Schülern zweier Grundschulen in Essen im Rahmen von halbstandardisierten klinischen Interviews (vgl. SELTER, SPIEGEL 1997) erhoben. Dazu wurden drei substanzielle arithmetische Lernumgebungen eingesetzt: Strukturierte Päckchen, Zahlenfelder, „Triff die 50!“ (vgl. u.a STEINBRING 1995), für die jeweils unterschiedliche Bearbeitungsformate konzipiert wurden (s. Tab 1). Im Anschluss an die Prä-Interviews erfolgte eine Intervention mit den jeweiligen Klassen zur Förderung des arithmetischen Struktursinns. Die Intervention setzte sich aus insgesamt vier Doppelstunden á 90 Minuten zusammen. Hier wurden einzelne Schwerpunkte der umfangreichen Lernumgebungen Umkehrzahlen, Zahlenmauern, Zahlengitter und Vierersummen an der Hundertertafel thematisiert. Anschließend erfolgten die Post-Interviews zu den gleichen Lernumgebungen der Prä-Interviews.

In dieser Studie soll nicht untersucht werden, ob bei einzelnen Schülerinnen und Schülern aufgrund der Intervention ein Lernzuwachs an zusätzlichem, stofflichem Wissen festzustellen ist. Vielmehr ist von Interesse, ob nach intensiver Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen, die arithmetisch-symbolische Deutungskompetenz der Schülerinnen und Schüler deutlich ausdifferenziert wurde.

<table>
<tr><th>Charakterisierung</th><th colspan="2">Lernumgebung</th></tr>
<tr><td>Fest vorgegebene Struktur ohne Veränderungsmöglichkeit</td><td>Strukturierte Päckchen</td><td rowspan="3">Umkehrzahlen<br>Zahlenmauern<br>Zahlengitter<br>Vierersummen an der Hundertertafel</td></tr>
<tr><td>Fest vorgegebene Struktur mit Veränderungsmöglichkeit</td><td>Zahlenfeld</td></tr>
<tr><td>Offene arithmetische Struktur mit Vorgabe(n)</td><td>Triff die 50!</td></tr>
</table>

**Tab 1.** Charakterisierung der Lernumgebungen

## Erste Einsichten am Beispiel „Yunis "

Im Rahmen eines Prä-Interviews wurde Yunis dazu aufgefordert, ein 4x4-Zahlenfeld (s. Abb.1) genau zu betrachten und zu beschreiben. In einem zweiten Schritt sollte er die Summe aller Zahlen geschickt bestimmen. Abschließend sollte er seine Rechenwege begründen und angeben, welchen Rechenweg er beim nächsten Mal wieder wählen würde.

Yunis gibt an, dass das Zahlenfeld 16 Zahlen beinhaltet und dass sechs Zahlen doppelt vorkommen („6 Paare"). Er benennt diese Paare und gibt im Folgenden weiter an: „[...] eine Zahl vergrößert sich immer um plus drei [...]".

Insgesamt gibt Yunis fünf Möglichkeiten an, die Summe aller Zahlen zu bestimmen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **15** | **21** | **27** | **33** | ← 96 |
| **12** | **18** | **24** | **30** | |
| **9** | **15** | **21** | **27** | |
| **6** | **12** | **18** | **24** | |

**Abb. 1:** Zahlenfeld

Aus Platzgründen kann an dieser Stelle exemplarisch nur eine Deutungsmöglichkeit näher vorgestellt werden. Yunis bestimmt zunächst die Summe der vier Zahlen der ersten Zeile (96) und notiert diese rechts neben dieser Zeile (s. Abb. 1). Er betrachtet im Folgenden die Zahlen der ersten und zweiten Zeile und sagt: „Weil wenn man jetzt hier guckt, dann wird das ja hier immer drei weniger (*tippt mit dem Stift nacheinander auf die 15, dann auf die 12, dann auf 21/18, 27/24, 33/30*) und dann ist es insgesamt zwölf weniger und dann kann (.) es vierundacht oder? Ja, vierundachtzig werden“. Im Folgenden rechnet Yunis die vier Zahlen der zweiten Zeile zur Kontrolle zusammen und kommt auf dasselbe Ergebnis „84“. Es wird deutlich, dass Yunis zunächst die dem Zahlenfeld zugrundeliegende Struktur nutzt, um die Summe der vier Zahlen der zweiten Zeile zu bestimmen. Erst in einem weiteren Schritt addiert er diese Zahlen, um seine Vermutung zu überprüfen. Im Weiteren geht er analog vor.

## Zusammenfassung und Ausblick

Es zeigt sich, dass ein Schüler die dem Aufgabenformat zugrundeliegende Struktur nutzt, um die Summe von Zahlen geschickt zu bestimmen. Im Rahmen weiterer Analysen des erhobenen Datenmaterials sollen verschiedenste Schülerdeutungen analysiert werden, um die arithmetische Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern auszudifferenzieren.

## Literatur


Link, M. (2012). Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2008). Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes Nordrhein-Westfalen. Frechen: Ritterbach Verlag.

Selter, Chr., Spiegel, H. (1997). Wie Kinder rechnen. Leipzig: Klett-Grundschulverlag.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Steenpaß, A. (2014). Grundschulkinder deuten Anschauungsmittel. Eine epistemologische Kontext- und Rahmenanalyse zu den Bedingungen der visuellen Strukturierungskompetenz. http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-37000/Steenpa%C3%9F_Dissertation.pdf

Steinbring, H. (1995). Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da. In: Wittmann, Müller (1995). Mit Kindern rechnen. Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e. V., S. 225-239.

Steinweg, A. S. (2001): Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung. Münster: LIT-Verlag.

Erich Ch. WITTMANN, Dortmund

# Kompetenzorientierung vs. solide mathematische Bildung: Wohin steuert der Mathematikunterricht?

Ziel dieses Beitrags ist es, Analogien zwischen zwei gescheiterten Reformansätzen vor 50 Jahren und der heutigen Entwicklung aufzuzeigen und dazu aufzufordern, daraus die nötigen Lehren zu ziehen.

## 1. Die Neue Mathematik („Mengenlehre“)

Angeregt durch die Erfolge der axiomatischen Methode Anfang des 20. Jhdts. schlossen sich 1935 einige (vorwiegend französische) Mathematiker unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki mit dem Ziel zusammen, die Mathematik schrittweise aus einfachen „Mutterstrukturen“ aufzubauen. Diese „Strukturmathematik“ breitete sich ab 1960 an den Universitäten auf breiter Front aus und beherrschte schnell Forschung und Lehre. Ausgelöst durch den Sputnik-Schock 1957 begannen in den westlichen Ländern hektische Bemühungen um eine grundlegende Reform des Mathematikunterrichts. Signalwirkung hatte die von der OECD 1959 organisierte Royeaumont-Konferenz. Die Richtung wurde dabei von Mathematikern bestimmt, die bei Bourbaki aktiv waren und schon 1952 an einer Konferenz über „Structures mathématiques et structures mentales“ teilgenommen hatten, bei welcher der Eindruck entstanden war, die von Piaget aufgedeckten elementaren psychologischen Strukturen seien eng mit den Mutterstrukturen von Bourbaki verwandt. Bereits 1963 folgte das im Auftrag der OECD erarbeitete Buch „Synopsis für die Schulmathematik“, 1964 folgten die „Nürnberger Lehrpläne“ der MNU, 1968 die „Empfehlungen und Richtlinien“ der KMK, und daran anschließend entsprechende Lehrpläne der einzelnen Bundesländer. Die „Neue Mathematik“ erfasste innerhalb kurzer Zeit nahezu die gesamte Mathematikdidaktik und wurde den Schulen mit massivem administrativem Druck aufoktroyiert. An Kritik an der „Mengenlehre“ hat es nicht gefehlt. Bereits 1962 verabschiedeten etwa 70 amerikanische Mathematiker ein wohlformuliertes Memorandum für eine vernünftige Curriculum-Reform (Ahlfors et al. 1962). Unter den späteren Kritikern ragt der französische Fields-Medaillist René Thom heraus, der überzeugend aufzeigte, dass „New Math“ auf einem falschen, nämlich formalistischen, Bild von Mathematik beruhte (Thom 1972). Die Bildungsadministration und die große Mehrheit der Mathematikdidaktiker verschlossen sich gegen diese Kritik. Erst der offenkundige Misserfolg der „Mengenlehre“ in der Praxis zwang zu einer zögerlichen Abkehr. Es dauerte bis 1985, bis der von Heinrich Winter entwickelte Grundschullehrplan von 1985 in Nordrhein-Westfalen einen Neuanfang ermöglichte. Bereits vorher hatte Bourbaki in-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

nerhalb der Mathematik seinen Einfluss verloren. Der IMU-Kongress von 1978 in Helsinki gilt als Zeitmarke für die Abkehr von dieser Richtung: Die Neue Mathematik beruhte auf einem Irrtum.

## 2. Die Operationalisierung von Lernzielen

Zeitgleich mit der Mengenlehre fasste eine andere Bewegung, die ebenfalls durch die OECD unterstützt wurde, in Europa Fuß. Protagonisten waren amerikanische Psychologen, die für das Militär gearbeitet hatten und der Auffassung waren, die dort bewährte genaue Beschreibung von Lernzielen könne unmittelbar auf den Unterricht übertragen werden. Auch an dieser Position, die eng mit der Erstellung von Taxonomien von Lernzielen verbunden ist, wurde fundierte Kritik geübt, insbesondere durch Freudenthal (1974). Gleichwohl fand auch diese Position im deutschsprachigen Raum schnell Anhänger, insbesondere in der empirisch ausgerichteten Pädagogik. Es ist kein Zufall, dass Gagné (1973), eines der Hauptwerke der Lernzieloperationalisierung, in einer Reihe erschienen ist, die von Heinrich Roth herausgegeben wurde, der die „empirische Wende" der Pädagogik postuliert hatte. Die Beurteilung von Unterrichtsstunden dahingehend, ob die Ziele nach Fein- und Feinstlernzielen richtig aufgeschlüsselt waren, erfasste die zweite Ausbildungsphase.

Eine kritische Bewertung der Lernzieloperationalisierung findet man in Wittmann (1974, Kap. 9), wo insbesondere festgestellt wird, dass die dieser Richtung zugrunde liegende Psychologie, der Behavorismus, dem Organismus Mathematik nicht gerecht wird. „Die Mathematik kann nicht als ... abgelagerter, fertiger Wissensbestand aufgefasst werden und lässt sich nicht atomistisch sezieren." (Wittmann 1974, 125). Auch die Operationalisierung von Lernzielen scheiterte schließlich weniger an der Kritik aus der Wissenschaft als an der Praxis. Auch sie war ein fundamentaler Irrtum.

## 3. Die Situation heute

Die Entwicklung des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik ist seit etwa 10 Jahren durch die sog. „Kompetenzorientierung" gekennzeichnet, die eine Mutation der Lernzielorientierung darstellt. Den Hintergrund bildet eine Ausprägung der Kognitionspsychologie, die nichts als ein verfeinerter Behaviorismus ist. Ziel ist erneut, das gewünschte Verhalten von Schülerinnen und Schüler in „Kompetenzen", wie es heute heißt, festzuhalten, um das Leistungsniveau in einem psychometrischen Bildungsmonitoring verfolgen und steuern zu können. Neue Lehrpläne wie der Lehrplan 21 in der Schweiz listen die Kompetenzen in der gleichen Diktion auf wie die berüchtigten Lehrpläne in Hessen von 1972 die Lernziele: „Die Schülerinnen und Schüler können ...".

Wie vor 50 Jahren ist die treibende Kraft hinter dieser Bewegung die OECD, und Bildungspolitik und Bildungsadministration versuchen wie damals, die Kompetenzorientierung mit administrativer Macht durchzusetzen. Weite Teile der Mathematikdidaktik unterstützen dies im engen Schulterschluss mit der Bildungsforschung: ein merkwürdiges déjà vu.

Die Kritik an der Lernzieloperationalisierung kann voll auf die Kompetenzorientierung, so wie sie heute praktiziert wird, übertragen werden: Die Mathematik als gewachsener Organismus lässt sich auch nicht in Kompetenzen sezieren. Punkt. Unter den Kritikern aus der Mathematik ragt wie damals ein französischer Fields-Medaillist mit einer subtilen Analyse heraus (Lafforgue 2007). Gewichtig ist auch die Kritik eines Philosophen, der mit der Kompetenzorientierung zurecht auch die „Fächerdämmerung" und die „neue Disziplinlosigkeit" geißelt (Liessmann 2014, 45 - 77). Im Vergleich mit früher zeigt sich, dass auch die Kompetenzorientierung auf einem falschen Bild von Mathematik beruht: Während seinerzeit die „Neue Mathematik" einseitig die strukturelle Seite der Mathematik betonte, wird heute in einer Art Gegenreaktion einseitig auf die „Anwendungen" der Mathematik gesetzt. Verschärfend kommt noch hinzu, dass das, was heute weithin als „Anwendungen" vorgegeben wird, mit echten Anwendungen der Mathematik nichts zu tun hat (Kühnel 2015).

Fazit: Mit der Kompetenzorientierung wird dem alten Kulturfach Mathematik genauso der Geist ausgetrieben wie vor 50 Jahren mit der „Mengenlehre". Der russische Mathematiker Novoshilov hat damals den Kampf gegen die Verbreitung des mathematischen Formalismus in der Weltbevölkerung als ökologische Aufgabe bezeichnet. Auch der Kampf gegen die Kompetenzorientierung ist eine ökologische Aufgabe.

## 3. Die Alternative

Es ist keine Frage, dass der Mathematikunterricht heute hinter dem zurückbleibt, was er leisten könnte. Der Forderung der Bildungspolitik und Bildungsadministration nach besseren schulischen Leistungen ist nachzuvollziehen. Es ist aber eine Tragödie, dass die Bildungspolitik die Kompetenzorientierung in Verbindung mit dem Bildungsmonitoring als einzig erfolgversprechenden Weg ansieht und sich auch durch fundierte Kritik nicht davon abbringen lässt. Der richtige Weg wäre, zu Lehrplänen zurückzukehren, die auf einem *authentischen Bild von Mathematik* beruhen und sich an Ausschnitten elementarer Theorien orientieren. Darauf aufbauend müssten Curricula entwickelt werden, die *aufbauendes fachliches Lernen* vom Kindergarten bis zum Abitur ermöglichen. Struktur- und Anwendungsorientierung müssten dabei in sinnvolle Beziehung gesetzt werden. Zum Modellieren benötigt man Bausteine, die aber nur aus der Mathematik kommen können, was ohne Strukturorientierung nicht möglich ist (Wittmann 2014). Vorbild für eine solche Entwicklungsforschung ist das Werk von Heinrich Winter. Winters allgemeine mathematische Lernziele „Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren und Formulieren“ sind eng an klassische Inhalte gebunden und widerspiegeln authentische Prozesse des mathematischen Arbeitens (Winter 1975/2012). Durch ein fachlich aufbauendes Curriculum kann für eine Sicherung der *Grundkenntnisse* in stetiger Wiederholung gesorgt werden, was der erste Schritt zu einer Konsolidierung sein muss. Wenn die Schülerinnen und Schüler dazu noch lernen, dieses Grundwissen bei der Erforschung innermathematischer und realer Situationen intelligent anzuwenden, sind die besten Voraussetzungen für *solide mathematische Bildung* geschaffen. Die Qualitätssicherung muss im Unterrichts selbst, d.h. *systemisch*, erfolgen. In diese Richtung sollte die Bildungsadministration in Kooperation mit der konstruktiven Entwicklungsforschung und der Lehrerschaft tätig werden. Von außen bzw. oben lassen sich komplexe Systeme nicht steuern.

## Literatur


Ahlfors, L. et al. (1962): On the Mathematics Curriculum of the High School. *American Mathematical Monthly* 69, No.3, 189 – 193

Freudenthal, H. (1974): Lernzielfindung im Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Pädagogik* 20, 719 - 738

Gagné, R.M. (1973): Bedingungen des menschlichen Lernens. Hannover: Schroedel

Kühnel, W. (2015): Modellierungskompetenz und Problemlösekompetenz im Hamburger Zentralabitur. *Math. Semesterberichte* 62/H.1

Lafforgue, L. (2007): Les savants et l'école. In: Lafforgue, L. & Lurçat, L. (Hg.): *La débâcle de l'école. Une tragédie incomprise.* Paris: F.X. Guibert 2007, chapitre X, 177 – 201 (Deutsche Übersetzung s. www.Mathe2000.de/Downloads).

Liessmann, K.P. (2014). Geisterstunde. Die Praxis der Unbildung. Wien: Zsolnay

Thom, R. (1973): Modern Mathematics: does it exist? In: Howson, A.G. (ed.): *Developments in Mathematical Education.* Proc. ICME 2, Cambridge: CUP,194 - 209

Winter, H. (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. *ZDM* 7, 106 – 116. Nachdruck in: Müller, G.N., Selter, Ch. & Wittmann, E.Ch. (Hg.)(2012): *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben.* Stuttgart: Klett, 41 - 60

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1974): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig/Wiesebaden: Vieweg

Wittmann, E.Ch. (2014): Von allen guten Geistern verlassen. Fehlentwicklungen der Bildungspolitik am Beispiel Mathematik. *Profil* 6/2014, 20 - 30

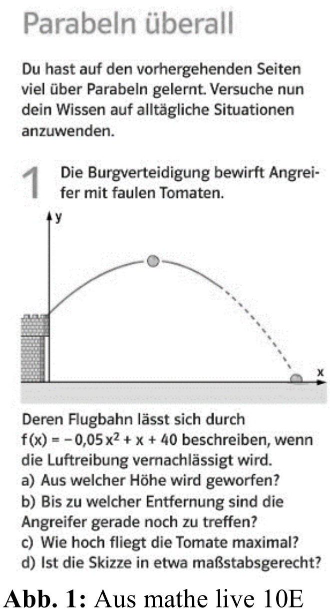
Ingo WITZKE, Siegen

# Fachdidaktischverbindendes Lernen und Lehren im MINT-Bereich

Der Beitrag stellt ein Forschungs- und Lehrprojekt des neugegründeten Zentrums der MINT-Didaktiken der Universität Siegen vor. Im Projekt *FäMaPdi* (Fächerverbindendes Seminar für Mathematik- und Physikdidaktik) werden im Rahmen der in NRW neu eingeführten Praxisphase von Masterstudierenden theoriereflektiert fächerverbindende Unterrichtskonzepte in Zusammenarbeit mit Schulen entwickelt und diskutiert. Die zentrale Forschungsfrage ist dabei, ob „fachdidaktischverbindendes" Arbeiten gewinnbringende Perspektiven für die Lehrerbildung eröffnen kann.

## 1. Motivation

Schaut man in aktuelle Kernlehrpläne, so wird unmittelbar klar, dass ein wichtiger Auftrag darin formuliert ist, das Fach Mathematik in authentischen Anwendungsituationen erfahrbar zu machen. Dort heißt es, in Anlehnung an die Grunderfahrungen H. Winters, unter Aufgaben und Zielen z.B. im aktuellen Kernlehrplan für das Gymnasium (Sek. I, G 8, NRW), dass „Schülerinnen und Schüler [...] Erscheinungen aus Natur, Gesellschaft und Kultur mithilfe der Mathematik wahrnehmen und verstehen [sollen]." Diese Forderung nach Anwendungsbezug findet sich an vielen weiteren Stellen im Lehrplan. Zwar gibt es vielfältige Ansätze zu einer authentischen Umsetzung des Anwendungsaspektes, leider werden aber viel zu viele Lernumgebungen angeboten die diese Forderung nur eingekleidet und bemüht umsetzen (vgl. Abb.1). Einen Ausweg aus dieser Situation können fächerverbindende Unterrichtssettings bieten in denen eine Fragestellung aus der Perspektive von zwei Fächern betrachtet wird (vgl. Peterßen 2000). Im Gutachten der Bund-Länder Kommission zu mathematisch-naturwissenschaftlichem Unterricht hieß es dazu schon 1997, dass „ das Fach [...] wenn es reflexiv unterrichtet wird, immer schon über sich selbst hinaus [weist]. Der fächerverbindende und fachübergreifende Unterricht ist nicht nur notwendige Ergänzung des Fachunterrichtes, sondern Teil dessen Vollendung." Aus vielfältigen Gründen wird die aktuelle Unterrichtspraxis diesem Anspruch aber nicht gerecht. Insgesamt spielt fächerverbindender Unterricht, außer in speziellen singulären Projekten, der-


Parabeln überall

Du hast auf den vorhergehenden Seiten viel über Parabeln gelernt. Versuche nun dein Wissen auf alltägliche Situationen anzuwenden.

1 Die Burgverteidigung bewirft Angreifer mit faulen Tomaten.



Deren Flugbahn lässt sich durch $f(x) = -0{,}05x^2 + x + 40$ beschreiben, wenn die Luftreibung vernachlässigt wird.
a) Aus welcher Höhe wird geworfen?
b) Bis zu welcher Entfernung sind die Angreifer gerade noch zu treffen?
c) Wie hoch fliegt die Tomate maximal?
d) Ist die Skizze in etwa maßstabsgerecht?

**Abb. 1:** Aus mathe live 10E (S. 36)

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zeit eine untergeordnete Rolle. Ein Aspekt, der u. a. aus Sicht der Natur- und Ingenieurswissenschaften zu bedauern ist, da diese später an den Hochschulen mit wenig vernetzten Mathematikkenntnissen konfrontiert werden.

## 2. Das Projekt *FäMaPdi*

Vor der oben skizzierten Ausgangslage setzt das gemeinsame Forschungsprojekt der Mathematikdidaktik und der Physikdidaktik in Siegen an. Im Rahmen der neugeschaffenen Praxisphase im Master für die Lehramtsstudiengänge in NRW entwickeln und erforschen Projektpartner aus Wissenschaft und Schulpraxis auf fachdidaktischverbindender Grundlage ein Lehrformat, dass Lehramtsstudierende an der Nahtstelle von Theorie und Praxis für Fragen von fächerverbindendem Unterricht im MINT-Bereich sensibilisieren soll. Grundlage für die Zusammenarbeit von Physik- und Mathematikdidaktik ist dabei – neben der klassischen Anwendungs- und Werkzeugvorstellung – die Erkenntnis, das Mathematik und Physik, so wie sie aktuell im Schulkontext gelehrt werden, auf erkenntnistheoretischer Ebene große Parallelen aufweisen. Nach Burscheid & Struve (2010) erwerben Schülerinnen und Schüler im anschauungsgeleiteten Mathematikunterricht eine *empirische* Auffassung von Mathematik über die eingesetzten Anschauungsmittel. Dies führt dazu, dass schulische Mathematik in weiten Teilen physikalisch Gegenstandsbereiche beschreibt und somit ihr Wahrheitsbegriff (im Unterschied zur Hochschulmathematik) an gegenständliche Überprüfbarkeit, z.B. im Rahmen experimentellen Vorgehens (vgl. Abb. 2.), gebunden ist.

1 Ein Kreis hat eine besondere Eigenschaft. Ihr könnt diese Eigenschaft herausfinden.
a) Nehmt mindestens zwei Gegenstände mit kreisförmigem Durchmesser (Dose, Flasche, Batterie ...). Messt möglichst genau den Umfang und den Durchmesser. Schreibt die Ergebnisse in einer Tabelle auf.
b) Sucht einen besonderen Zusammenhang zwischen Umfang und Durchmesser. Was passiert, wenn man die Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert? Experimentiert mit den Zahlen. Rundet die Ergebnisse auf eine Kommastelle.
c) Schreibt auf, wie ihr vorgegangen seid und was ihr herausgefunden habt. Tauscht dann eure Beschreibungen aus und korrigiert euch gegenseitig.

**Durchführung eines Experiments**

Wenn du ein Experiment durchführst, dann arbeite mit System.
**Planung:** Kläre dein Ziel: Was möchte ich herausfinden? Was brauche ich dafür? Wie gehe ich vor?
**Beobachtung:** Notiere die Durchführung in Stichpunkten. Formuliere Rechnungen und Zwischenergebnisse.
**Ergebnis:** Beende deine Beschreibung mit einer Vermutung, einer Erkenntnis oder einer weiterführenden Frage.

**Abb. 2:** Aus mathe live 9G (S. 104)

## 3. Das Seminar

Das Vorbereitungsseminar zur Praxisphase im Rahmen von *FäMaPdi* steht auf zwei inhaltlichen Säulen. Zum einen werden die Studierenden in wissenschaftlicher Begleitung angeregt aus theoretischer Sicht fachdidaktischverbindende Perspektiven auf Unterricht zu entwickeln (vgl. Abb. 3). Zum anderen konzipieren sie in Begleitung erfahrener Lehrkräfte fächverbindenden Unterricht, der im Schülerlabor erprobt wird.

Die in den Theoriesitzungen entwickelten Beobachtungsfragen können dann wiederum genutzt werden, um die Unterrichtsversuche im Schülerlabor aus einer wissenschaftlichen Perspektive zu beobachten, bzw. diese in einem Forschungsprojekt für die Praxisphase zu verwenden. Von den Studierenden entwickelte Beobachtungfragen lauteten im ersten Durchgang: Welcher Natur sind die Gegenstände des Unterrichts? (Charakterisierung: Mathematisch, physikalisch, empirisch-gegenständlich, formal-abstrakt etc.), Wie wird das Verhältnis von Mathematik zu Physik (implizit und explizit) thematisiert? An welchen Stellen werden bei Lehrenden und Lernenden Präkonzepte/Eigentheorien sichtbar, kollidieren diese miteinander? Welcher Modellierungsbegriff liegt der Vorgehensweise der Lehrenden zu Grunde? Welche Interaktionsmuster werden aktiviert?

| Mathematikdidaktik | Physikdidaktik |
|---|---|
| Auffassungen von Mathematik | Nature of Science |
| Argumentieren & Problemlösen | |
| Modellieren | Modellbegriff |
| Subjektive Erfahrungsbereiche | Präkonzepte |
| Interaktionstheorie | Basismodelltheorie |

**Abb. 3:** Fachdidaktischverbindende Themen der Theoriesitzungen

Zudem konzipierten die Studierendenteams, die so organisiert waren, dass jeweils Expertise aus der Physik und der Mathematik vorhanden war, fünf fächerverbindende Unterrichtsentwürfe (vgl. Abb 4.)

Den Widerstand „kleinkriegen“ durch Notabschaltung. **Widerstände – Rationale Zahlen**

Wie lange hält das Fahrradstandlicht ? Spannung integrieren. **Kondensator - Integral**

Strahlenschutz durch Abstandsvergrößerung – welche Wirkung? **Radioaktivität - Exponentialfunktion**

Wie funktioniert eine Kamera? **Optik – Geometrie**

Linsen und Geometrie. Mit Mathe und Physik verkleinern. **Optik – Geometrie**

**Abb. 4:** Themen der fächerverbindenden Unterrichtsentwürfe

Die Durchführung im Schülerlabor wurde videographisch dokumentiert und kann so im Weiteren als Forschungsgrundlage dienen. Dabei führt die Analyse vor dem gesetzten theoretischen Rahmen zu diskussionswürdigen Ergebnissen. So zeigte sich z.B. im Unterrichtsversuch zu Linsen und Geometrie unter der Fragestellung „Warum können Kameras so schmal gebaut werden?“, dass das Studierendenteam trotz der ausführlichen vorangegangenen Thematisierung von fächerverbindendem Lehren und Lernen bei der Durchführung ihres Unterrichtsversuches stereotyp Mathematik und Physik voneinander abgrenzten. Diese grundsätzliche Trennung, der wohl die eng gezogenen Fächergrenzen sowie stark vereinfachende Modellierungsvorstellungen zu Grunde liegen, zeigte sich bei einigen Studierenden auch im Post-Test (vgl. Abb. 5), der in Form offen gestalteter Fragebögen durchgeführt wurde. Der Auftrag für den kommenden Durchgang des Vorbereitungsseminars, der sich aus diesen Erfahrungen ergibt, ist, dass den Studierenden noch enger die Verzahnung von mathematisch und naturwissenschaftlichen Arbeiten erfahrbar gemacht werden muss, damit diese auch in anforderungsreichen Unterrichtsituationen berücksichtigt werden kann. Ein Bewusstsein für ein adäquateres Verständnis für die Beziehung von Mathematik und Physik kann durch Einsatz historischer Zeugen, wie z. B. M. Pasch, der Geometrie gerade als Naturwissenschaft definierte (1882), oder L. Euler, der die physikalische Frage nach der Bemastung eine Schiffes gerade ohne Experiment durch pure Deduktion zu lösen suchte (1726), gefördert werden. Zudem soll eine vergleichende Schulbuchanalyse dazu beitragen die erkenntnistheoretischen Parallelen von Schulmathematik und Schulphysik deutlicher zu machen; denn der Wirklichkeitsbezug der (Schul-)Mathematik (und die damit implizierten Schluss- und Denkweisen) verbindet sie mit den Naturwissenschaften. Mathematik gegenüber dem „Rest der Welt" abzutrennen, erscheint unauthentisch und unangemessen. (vgl. Voigt & Meyer 2010)

| Mathematik | Physik |
|---|---|
| deduktiv | induktiv, experimentell |
| abstrakt | gegenständlich, anwendbar |
| ideal | konkret, messbar |
| formal-beschreibend | erklärend, begründend |

**Abb. 5:** Stereotype Auffassungen von Mathematik und Physik

Das Vorbereitungsseminar sowie das folgende Begleitseminar werden intensiv durch qualitative Messinstrumente begleitet und auf Grundlage didaktischer Analyse wiederholt. Erste Ergebnisse zeigen, dass die skizzierte Konzeption mit einem hohem Aufwand für die Beteiligten verbunden ist, dafür aber tiefgehende Einsichten über fachdidaktischverbindende Ansätze an der Schnittstelle von Theorie und Praxis liefern kann.

## Literatur


Bund-Länder-Kommission-Projektgruppe „Innovationen im Bildungswesen" (1997). Gutachten „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Heft 60.

Burscheid, H. J., Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen*. Hildesheim: Franzbecker.

Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen - Mathematik (2007). 1. Aufl. Frechen: Ritterbach (Schule in NRW, Nr. 3401 : (G8)).

Peterßen, W. H. (2000). *Fächerverbindender Unterricht*. München: Oldenbourg.

Meyer, M. & Voigt, J. (2010): Rationale Modellierungsprozesse. In B. Brandt & M. Fetzer & M. Schütte (Hrsg.): Auf den Spuren interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. Münster: Waxmann, 117 – 148.

Witzke, I. (2012). *Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht?* In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 46, Bd. 2, 949-952.

Jan F. WÖRLER, Würzburg

# Computersimulationen im Mathematikunterricht – Ein Vorschlag der Klassifizierung durch Interaktionsgrade

Computersimulationen treten im Mathematikunterricht vielerorts auf: Für die Stochastik beispielsweise lässt sich in TKP leicht ein Programm erzeugen, das das Gesetz der großen Zahlen beim 2000-maligen Werfen eines Würfels illustriert. Und in der Geometrie nutzen wir in DGS ganz selbstverständlich das Tool *Kreis zeichnen* – und „simulieren" dabei den Einsatz eines Zirkels.

In beiden Fällen steht *simulieren* für *etwas nachmachen*: Beim computergestützten Würfelwurf wird eine reales, physikalisches Experiment virtuell nachgebildet. Und auch das Ziehen eines Kreises in Geometriesoftware ist dem Einsatz des Originalwerkzeugs nachempfunden.

Wie können solche Computersimulationen in Hinblick auf den Einsatz im Unterricht klassifiziert werden? Üblicherweise unterscheidet man bei Simulationen zwischen physikalischen Simulationen und solchen mit mathematischen Modellen (Schneider 1988): Bei den einen wird ein reales, physikalisches Experiment durchgeführt, beispielsweise zum Strömungsverhalten eines Flugzeugmodells im Windkanal, bei den anderen dagegen ein „Berechnungsexperiment" (Krüger 1974, 27) auf der Basis mathematischer Modelle.

Intuitiv würde man Computersimulationen wohl in diese zweite Kategorie einordnen. Doch es spricht einiges dafür, sie auch als physikalische Simulationen aufzufassen, wären doch beide Fälle in gleicher Weise auch real durchführbar: Der 2000-fache Würfelwurf würde zwar einige Zeit dauern, könnte aber abgesehen von diesem eher praktischen Gesichtspunkt auch im Unterricht gut bewältigt werden (20 Schüler werfen je 10 Würfel 10 Mal und notieren die Ergebnisse). Das reale Zeichnen eines Kreises auf Papier ist ebenfalls vergleichsweise trivial.Offenbar ist die oben genannte klassische Differenzierung von Simulationen für viele Computersimulationen, die im Mathematikunterricht eingesetzt werden und reale Experimente virtuell nachbilden, ungünstig.

## Simulation als Experiment mit Modellen

Auf der Suche nach Alternativen muss man die Charakteristika derartiger Computersimulationen berücksichtigen und vergleichen. Der Aspekt, dass die hier genannten Simulationen ein reales Vorbild haben, schlägt die Brücke zum Begriff des mathematischen *Modells*: „Simulieren ist das Experimentieren mit Modellen", heißt es etwa bei Krüger (1974) und ganz ähn-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

lich bei Greefrath und Weigand (2012). Diese Sichtweise passt zu den oben genannten Beispielen; sie beantwortet die Frage nach dem Wesen der Simulation aber nur scheinbar und wirft vielmehr zwei weitere Fragen auf: Was sind Modelle? Und was bedeutet Experimentieren?

Zur Frage nach der Bedeutung des Begriffes *Modell* wird häufig auf Henn (2000) verwiesen, der in Modellen „vereinfachende […] Darstellungen der Realität“ sieht. Andererseits sind aber unsere mathematischen Sammlungen voll von Modellen abstrakt-mathematischer Objekte, wie etwa Drahtmodellen der Kleinschen Flasche, weshalb Henns Sichtweise um den Aspekt der Darstellung abstrakter, nicht-realer Strukturen ergänzt werden kann.

Der Begriff des *Experiments* wird dagegen entscheidend durch die Naturwissenschaften geprägt: So sieht Berger (2006) im Experiment ein „objektives und wiederholbares [...] Verfahren zur Erkenntnisgewinnung“ und Kircher et al. (2009) führen zum Experimentieren für die Physik aus: „Unter festgelegten und kontrollierbaren Rahmenbedingungen werden Beobachtungen und Messungen an physikalischen Prozessen und Objekten durchgeführt; Variablen werden systematisch verändert und Daten gesammelt“. Das Prinzip der Variation und mit ihr auch des (parallelen oder seriellen) Wiederholens beim Arbeiten mit Modellen ist dem Experimentieren also inhärent.

### Die sechs Interaktionsmöglichkeiten

Wenn aber die *Variation bei der Arbeit mit Modellen* für das Simulieren von zentraler Bedeutung ist, so muss man fragen: Was lässt sich denn hier eigentlich variieren? Nach den oben ausgeführten Überlegungen sind Veränderungen entweder am *Modell* oder an der (Experimentier-) *Umgebung*, also dem System aus Umwelteinflüssen, Randbedingungen und Experimentator, denkbar. Weil sich ein Modell aus Sicht der Systemtheorie aus Elementen und ihren Beziehungen zueinander zusammensetzt, können Variationen theoretisch an sechs Punkten angreifen, den *Interaktionsmöglichkeiten* (Wörler 2015, 86f) des Nutzers mit dem zugrunde liegenden Modell:

(I 1) Variation der Anzahl von Modell-Elementen,

(I 2) Variation der Eigenschaften der Modell-Elemente,

(I 3) Variation der Beziehung zwischen den Modell-Elementen,

(I 4) Variation der Beziehung zwischen Modell und Modellumwelt, also der (Randbedingungen),

(I 5) Variation des Modell-/Simulationszwecks (Fragestellung)

(I 6) Variation der Modellannahmen.

Da diese Interaktionsmöglichkeiten aus der Theorie abgeleitet wurden, sind sie universell auf jegliche Art des Experimentierens mit Modellen übertragbar.

**Beispiel: Würfelsimulation**

Im Hinblick auf das Ausgangsbeispiel der Simulation eines 2000-fachen Würfelwurfes kann eine Implementierung des Experiments auf einem Computer folgende Variationsmöglichkeiten bieten:

zu (I 1): Seitenanzahl variieren, also statt eines sechsseitigen Würfels einen siebenseitigen verwenden ODER Anzahl der Würfe variieren ODER Anzahl der Würfel variieren

zu (I 2): Geometrie verändern, also statt sechs gleich großen Würfelseiten die Größe der Seitenflächen verschieden wählen

zu (I 3): Führt Rollen eines geraden, regelmäßigen Sechseckprismas auf dieselben Ergebnisse?

zu (I 4): Würfeln auf verschiedenen Untergründen, ergeben sich draus hinsichtlich der Würfelergebnisse Unterschiede (Sind auf einem dicken Teppich z. B. Kantenlagen denkbar?)? Wirkt sich der Schwung beim Würfeln auf das Ergebnis aus?

zu (I 5): Wie weit oder in welche Richtungen rollt ein Würfel beim 2000-fachen werfen?

zu (I 6): Die Punkte zur Kennzeichnung der Seiten eines Würfels sind nicht gewichtslos, sondern beeinflussen die Masse der jeweiligen Würfelseite.

**Interaktionsgrad der Implementierung einer Simulation**

Aus diesen Interaktionsmöglichkeiten lässt sich ein Klassifikationssschema für Simulationen ableiten. Hierzu prüft man für eine vorliegende Softwareumsetzung, welche Möglichkeiten der Interaktion mit dem zugrundeliegenden Simulationsmodell dem Nutzer eingeräumt werden, genauer, welche Freiheitsgrade jener bei der Nutzung des Simulationsprogrammes erhält. Diese Freiheitsgrade werden addiert und ergeben eine natürliche Zahl als abstraktes Maß für die Existenz und den Umfang solcher Möglichkeiten, den Interaktionsgrad einer Implementierung (vgl. Wörler 2012b, 42ff). „Darunter soll ein ordinales, nicht-metrisches Merkmal verstanden werden, das iterativ definiert wird: Mit jedem Freiheitsgrad, den eine Umsetzung dem Benutzer zusätzlich erlaubt, erhöht sich der Interaktionsgrad um den Wert 1. Als Referenzwert wird der Interaktionsgrad einer Simulation dann auf Null gesetzt, wenn der Benutzer keinerlei Einfluss auf den Ablauf und die Ausgestaltung des Experiments oder des mathematischen Modells hat.“ (Wörler 2015, 85).

Der Interaktionsgrad bezieht sich also immer auf eine spezielle Implementierung einer Simulation: Eine Simulation des 2000-fachen Würfelwurfs, die auf Knopfdruck allein eine Häufigkeitsverteilung liefert, hätte demnach den Interaktionsgrad 0, weil sie dem Nutzer keinerlei Möglichkeiten für Variationen am Modell oder dessen Umwelt an die Hand gibt. Lässt sich jedoch beispielsweise die Anzahl der Würfe verändern, so würde dieser Simulation der Interaktionsgrad 1 zugeordnet (Freiheitsgrad: Anzahl der Würfe). Man beachte: Für einen Vergleich zweier Simulationen zu verschiedenen Simulationsmodellen ist der Interaktionsgrad nicht geeignet.

Das Konzept der Interaktionsgrade, das auf theoretisch abgeleiteten Interaktionsmöglichkeiten fußt, hilft dabei, die Möglichkeiten spezieller Simulationen für experimentelles Arbeiten zu hinterfragen. Es kann dazu genutzt werden, Simulationsvarianten zu einem konkreten mathematischen Modell zu klassifizieren, bietet also eine Orientierungshilfe bei der Erstellung, Optimierung und Verwendung von Simulationen im Mathematikunterricht.

Es darf vermutet werden, dass sich Simulationen mit geringem Interaktionsgrad eher zur Präsentation und für Novizen eignen. Echtes experimentelles Arbeiten dagegen erfordert eher einen hohen Interaktionsgrad, also verschiedene Möglichkeiten, auf Modellelemente und ihre Beziehungen zugreifen und sie verändern zu können. Simulationen, die das leisten, könnten ggf. aber auch zur Überforderung ihrer Nutzer führen.

## Literatur


Berger, V. (2006): Im Unterricht experimentieren. In H. F. Mikelskis, V. Berger: *Physik-Didaktik* (S. 149–167). Berlin: Cornelsen Scriptor,

Henn, H.-W. (2000): Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen ... oder ... von guten und von schlechten Modellen. In H. Hischer (Hrsg.): *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht* (S. 9–17). Hildesheim: Franzbecker.

Greefrath, G.; Weigand, H.-G. (2012): Simulieren: Mit Modellen experimentieren. *mathematik lehren, 147*, 2–6.

Kircher, E.; Girwidz, R.; Häußler, P. (Hrsg.) (2009): *Physikdidaktik: Theorie und Praxis*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Krüger, S. (1974): *Simulation: Grundlagen, Techniken, Anwendungen*. Berlin, New York: De Gruyter.

Schneider, H.-J. (Hrsg.) (1998): *Lexikon Informatik und Datenverarbeitung*. München, Oldenburg: Oldenbourg.

Wörler, J. F. (2015): *Konkrete Kunst als Ausgangspunkt für mathematisches Modellieren und Simulieren*. Münster: WTM.

Alexander WOLFF, Hildesheim

# Aspekte zum kompetenten Arbeiten mit Concept Maps im Mathematikunterricht

## Ausgangslage

Concept Maps stellen eine Methode im und für den Unterricht dar Wissen auf vielfältige Weise zu managen. Auf den Unterrichtprozess bezogen bedeutet dies, sich verschiedener Einsatzformen zu bedienen. So kann über den Einsatz von Concept Maps Vorwissen aktiviert werden, Wissen vernetzt werden, Wissen aufgebaut werden, Wissensspeicher angelegt werden uvm. (siehe z.B. Mathe vernetzt 2011). Gerade im Mathematikunterricht bietet sich der Einsatz von Concept Maps an. Repräsentationsformen sowie das Herstellen von Beziehungen nehmen im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle beim Wissenserwerb ein. Für das selbstständige Arbeiten und Anfertigen von Concept Maps treten jedoch häufig Schwierigkeiten in der kompetenten Handhabung auf. Dies kann sich u.a. darin äußern, relevante Begriffe zu identifizieren, Relationen zwischen diesen zu spezifizieren, die Technik zu verinnerlichen usw. MCCAGG & DANSEREAU stellten fest, dass die Effizienz und die Akzeptanz stark davon abhängen, wie gut die Lernenden die Technik beherrschen (vgl. 1991, S. 323). Auch CAÑAS & NOVAK (2006) betonen, wie bedeutend das Beherrschen und das Verständnis der Technik für den Lernerfolg im Unterricht ist. Wenige Ansätze beschäftigen sich dabei jedoch mit dem Erlernen der Technik (siehe MANDL/ FISCHER, 2000, S.7). Hinzu kommen für den Einsatz der Methode im Mathematikunterricht die fachspezifischen Besonderheiten. Basierend auf dem Ansatz der Wissensmanagementmethode der Concept Maps sollen im Hinblick auf das Fach der Mathematik Aspekte in der kompetenten Handhabung für SuS und Lehrkräfte gezogen werden.

## 1. Concept Maps

Bei Concept Maps handelt es sich um zweidimensionale Darstellungen von propositionalen Begriffsstrukturen. Sie werden von oben nach unten und in Pfeilrichtung gelesen. Begriffe, zuweilen auch Konzepte genannt, werden als wahrgenommene Regelmäßigkeiten in und über Gegenständen, die über ein Zeichen/ Symbol oder Wort ausgedrückt werden, beschrieben (vgl. z.B. CAÑAS / NOVAK, 2006). Sie werden in einer rechteckigen oder in einer ovalen Form dargestellt und über Pfeile vielfältig und sinnvoll miteinander verbunden. Auf diesen Pfeilen wird die Relation, die zwischen den Begriffen besteht, ausgedrückt. Dies wird auch als Proposition bezeichnet. Sie ist die kleinste Wisseneinheit, die einen Wahrheitswert annehmen kann. Nach

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

STERNBERG, R. J. & STERNBERG, K. können vier Relationstypen unterschieden werden: Aktionen, Eigenschaften, räumliche Verortungen und hierarchische Anordnungen (Klassenzugehörigkeit) (vgl. 2011, S. 282). Um die graphische Artikulation einer Concept Map hervorzurufen, sollte eine Fragestellung der Anfertigung vorausgehen. Explanative Fragestellungen sollten deskriptiv-kategorisierenden Fragestellungen vorgezogen werden, weil sie ein elaborierteres, tiefergehendes Verständnis erfordern.

TERHART (2004) unterscheidet sieben Prozesskategorien, zu denen Concept Maps ihren spezifischen Beitrag leisten: Wissensidentifikation, Wissensrepräsentation, Wissensdiagnose, Informationssuche, Wissenserwerb, Wissenskommunikation und Wissensnutzung (vgl. S. 260-246). Einsatzformen im und für den Unterricht lassen sich auf diese Prozesskategorien zurückführen und aus ihnen entwickeln. Werden Concept Maps als Lehr- und/oder Lernmethode im Unterricht eingesetzt, so sollte der neue Lerngegenstand in Relation zum Vorwissen der SuS stehen. Neu zu erwerbendes Wissen muss aus vorhandenen kognitiven Strukturen der SuS aufgebaut werden können. Der lernpsychologische Hintergrund der Wissensmanagementmethode begründet sich in der Annahme, dass das Gedächtnis als ein aktives strukturelles Netzwerk aus Begriffen und Relationen gesehen wird (siehe JÜNGST, 1998, S.11). Concept Maps können somit als eine Repräsentation jener Gedächtnisinhalte verstanden werden.

## 2. Natur mathematischen Wissens

Mathematische Begriffe unterscheiden sich in ihrer Beschaffenheit von denen aus anderen Disziplinen, wie z.B. der Biologie oder der Geographie. Während in diesen Fächern Substanzbegriffe thematisiert und gelernt werden, stehen in der Mathematik Beziehungsbegriffe als Lerngegenstand im Unterrichtsgeschehen. SFARD spricht bei der Beschaffenheit mathematischer Begriffe von einer Doppelnatur. So besitzen mathematische Begriffe eine interne relationale Struktur, gleichfalls sind sie operationale Werkzeuge (vgl. 1991). Sie entstehen nach HISCHER, indem Beziehungen einerseits zwischen den Gegenständen in der Empiriesphäre und andererseits zwischen den Zeichen bzw. Symbolen in der Kalkülsphäre hergestellt werden (vgl. 2012, S. 39). Da mathematisches Wissen keine Substanz besitzt und nur über Repräsentationsformen äußerlich ist, erfolgt das Lernen über das Herstellen der Äquivalenz von Zeichen (vgl. DUVAL, 2006). Mathematische Begriffe lassen sich nach STEINBRING definieren als „symbolisierte operative Beziehungen zwischen ihren abstrakten Kodierungen (Zeichen/ Symbol) und den sozial intendierten Deutungen“ (2000, S. 34).

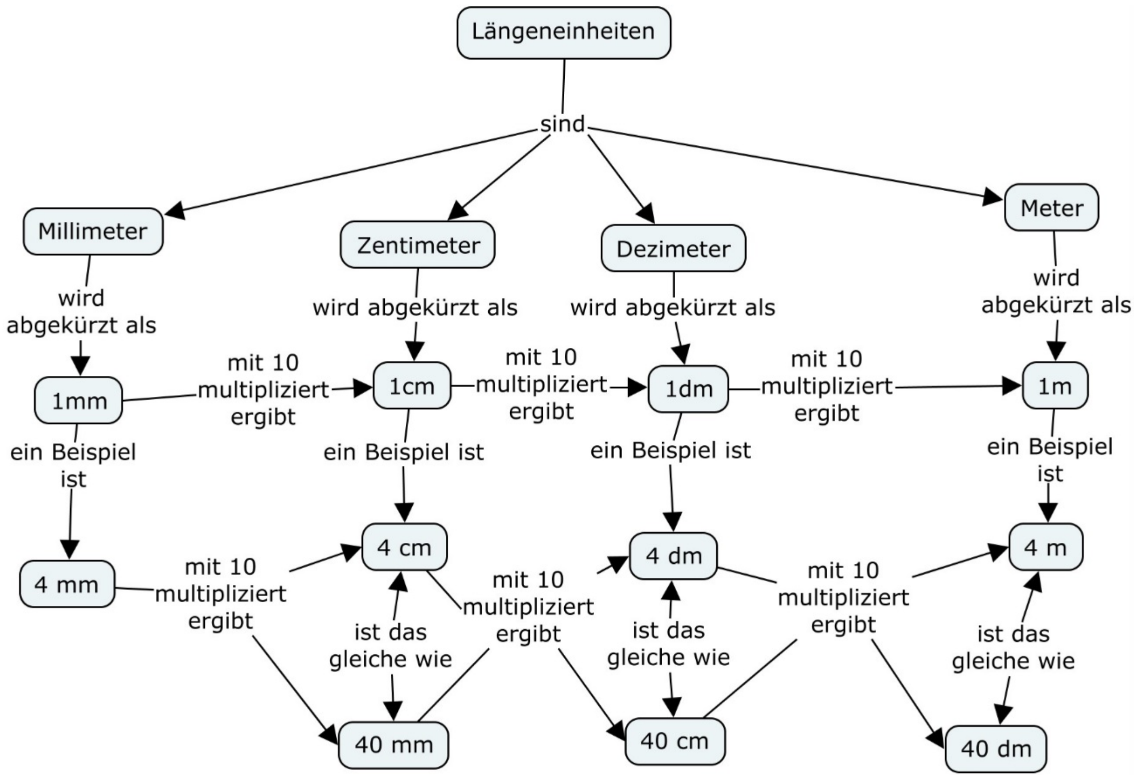



**Abb. 1:** Concept Map zum Thema: Längeneinheiten

## 3. Aspekte zum kompetenten Arbeiten mit Concept Maps im Mathematikunterricht

Für das Arbeiten mit Concept Maps im Mathematikunterricht lassen sich aus dem Ansatz der Wissensmanagementmethode im Hinblick auf das Fach folgende Aspekte ziehen:

Die SuS sollten…

- verstehen können, was ein Begriff ist
- Substanzbegriffe von Beziehungsbegriffen trennen können
- selbstständig Propositionen bilden können
- die Bezeichnung/ den Begriffsnamen (Zeichen/ Symbol) vom Begriff (Bedeutung) trennen können
- Repräsentationsformen wechseln können

Die Lehrkraft sollte…

- den Lernstoff in Relation zum Vorwissen sehen können
- adäquate Fragestellungen formulieren können, wobei explanative Fragestellungen rein deskriptiv-kategorisierenden Fragestellungen vorzuziehen sind

## 4. Ausblick

Die aufgestellten Aspekte zum kompetenten Arbeiten mit der Technik müssen in praktische Unterrichtsschritte mit passendem Arbeitsmaterial zum Erlernen und Üben übersetzt werden. Die Konzeption und die Erprobung von Unterrichtsmaterial zu einer kompetenten Handhabung stehen noch aus.

## Literatur


Brinkmann, A./ Maaß, J./ Siller, H.-S.(2001). *Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht.* Düsseldorf: Aulis Verlag.

Cañas, A./ Novak. J. (2006). Re-examining the foundations for effective use of concept maps. In Cañas, A.J./ Novak, J.D. *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proceedings of the Second International Conference on Concept Mapping (S. 494-502)*. San José, Costa Rica: Universidad de Costa Rica.

Duval, R. (2006). *A cognitive Analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 61, S. 103-131.

Jüngst, K.H. (1998). *Lehren und Lernen mit Begriffsnetzdarstellungen.* Frankfurt am Main: Afra Verlag.

Hischer, H. (2012). *Grundlegende Begriffe der Mathematik. Entstehung und Entwicklung.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Mandl, H./ Fischer, F. (2000). Mapping Techniken und Begriffsnetze in Lern- und Kooperationsprozessen. In Mandl, H./ Fischer, F. *Wissen sichtbar machen (S. 1-14)*. Göttingen: Hogrefe Verlag.

McCagg, E.C./ Dansereau, D.F. (1991). *A convergent paradigm for examining knowledge mapping as a learning strategy*. Journal of educational Research, 84, S. 317-324.

Steinbring, H. (2000). *Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion- Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung*. Journal für Mathematikdidaktik, 21, S. 28- 49.

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational studies in Mathematics, 22, S. 1-36.

Sternberg, R.J., /Sternberg, K. (2011). *Cognitive Psychology*. Belmont: Calif: Wadsworth Inc Fulfillment.

Terhart, S.-O. (2004). Wissensmanagement mit Concept Maps. In Reinmann, G./ Mandl, H. *Psychologie des Wissensmanagements (S. 259- 266).* Göttingen: Hogrefe Verlag.

Julia ZERLIK, Frankfurt am Main

# Geometrische Formen rhythmisch umgesetzt

Aufgaben zur Raumvorstellung werden in Schulen oft klassischerweise durch visuelle Hilfsmittel, wie zum Beispiel Bilder, unterstützt. Diese werden ergänzend zur Aufgabe eingesetzt, um das Generieren von Vorstellungsbildern zu unterstützen oder kommen bei der Präsentation der Lösung zum Einsatz. Doch ist es auch möglich Aufgaben zu stellen, die eine akustische Unterstützung als Hilfsmittel bieten? Für die hier vorgestellte explorative Studie wurden zwei Aufgaben entwickelt, in denen geometrische Formen, wie Dreieck, Sechseck und Raute, anhand eines Klangrhythmus bzw. einer mündlichen Beschreibung erkannt werden mussten. Die Erprobung dieser beiden Aufgaben mit Probanden unterschiedlichen Alters zeigte, dass beide die Grundvoraussetzungen einer Raumvorstellungsaufgabe erfüllen. So muss erkennbar sein, dass man zum Lösen „die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken“ (Maier, 1999, S.14) benötigt und dabei „Vorstellungsbilder [entstehen], die auch ohne das Vorhandensein der realen Objekte verfügbar sind.“ (ebenda, S. 14).

## 1. Zentraler Arbeitsauftrag

Der Arbeitsauftrag für die Klangrhythmus-Aufgabe lautet:

*„Höre dir nacheinander die einzelnen Klangrhythmen an und finde heraus, welche geometrische Figur zu hören ist. Woran hast du die Figur erkannt? Bitte sprich alle deine Gedanken laut aus! Hinweis: Es sind immer geschlossene Figuren, der Läufer steht also am Ende immer genau an derselben Stelle und schaut auch in dieselbe Richtung wie am Anfang.“*

Bei der zweiten Aufgabe wurden die Klangrhythmen durch eine lautsprachliche Beschreibung ersetzt und der Arbeitsauftrag entsprechend angepasst.

Zu jeder der beiden Aufgaben gibt es sechs Beispiele, die die Figuren Dreieck, Sechseck, Rechteck, Raute, Quader und Zylinder klangrhythmisch bzw. lautsprachlich beschreiben. Bei der Klangrhythmus-Aufgabe werden die Seiten der Figuren durch eine bestimmte Anzahl an Schritten, die sich je nach Seitenlänge ändert, dargestellt. Nach jeder Seite erklingt ein Rutschgeräusch, das je nach Winkelgröße, länger oder kürzer ist. Zur Darstellung der dritten Dimension wird zeitgleich zu den Schritten ein Tempelblock im Takt geschlagen. Dadurch, dass dieses Anschlagen mit den Händen erfolgt, wird in der körperlichen Repräsentation ein Ort gewählt, der einen gewissen Abstand (Höhe) zum Boden hat.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Diese Aufgabe ist dem Kopfgeometrie-Typ „Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase 1“ zuzuordnen. Es werden die genannten akustischen Hilfsmittel in der 1. Phase (Aufgabenpräsentation) angeboten. Die eigentliche Aufgabe wird dann durch Operieren im Kopf gelöst und das Ergebnis verbalisiert (vgl. Franke, 2007, S.68).

Bei der zweiten Aufgabe dagegen wird eine Seite mit dem sich anschließenden Winkel durch die Wörter „fünf Schritte nach vorne, Drehung“ lautsprachlich zum Ausdruck gebracht.

Im Gegensatz zur Klangrhythmus-Aufgabe ist diese Aufgabe der reinen Kopfgeometrie zuzuordnen, denn die Aufgabenstellung und die Lösung werden verbalisiert dargestellt und keine weiteren Hilfsmittel, wie Zeichnungen, Klänge oder Modelle als Hilfsmittel für diese Phasen verwendet (vgl. Franke, 2007, S.68 und Senftleben, 1996, S. 54).

Bei beiden Aufgaben können die Probanden selbstständig jede der sechs Figuren beliebig oft abspielen.

## 2. Forschungsfragen

Bei beiden Aufgaben geht es zunächst darum, herauszufinden, ob sie überhaupt als Raumvorstellungsaufgaben einzustufen sind. Daher lautet die zentrale Fragestellung: „Wie kommt Raumvorstellung zum Ausdruck?“ Da Probanden aus drei unterschiedlichen Altersgruppen an der Erhebung teilnahmen, stellt sich außerdem die Frage, ob es Unterschiede zwischen diesen Altersgruppen gibt und ob die beiden Aufgabentypen unterschiedlich bearbeitet werden.

## 3. Untersuchungsdesign

Nach dem Ausfüllen eines kurzen Fragenbogens (Personendaten, Selbsteinschätzung zur Raumvorstellungsfähigkeit und Verhältnis zur Mathematik) lösen die Probanden eine der beiden Aufgaben. Das Lösen der Aufgabe wurde videographiert. Im letzten Schritt wurde gemeinsam mit der begleitenden Person das Video der Aufgabenbearbeitung angeschaut, um noch einmal im Gespräch den Lösungsprozess zu rekonstruieren. Auch dieses Gespräch wurde videographiert.

Die Probanden sind Grundschulkinder, Grundschullehramtsstudierende und Senioren. Die folgende Tabelle zeigt einen Überblick über die relevanten Personendaten und die Selbsteinschätzung zur individuellen Raumvorstellungsfähigkeit, die die Probanden im Fragebogen angegeben haben:

| | Grundschul-kinder | Grundschullehr-amtsstudierende | Senioren |
|---|---|---|---|
| Anzahl | 3 | 4 | 5 |
| Durchschnittsalter | 7 | 30,25 | 61,6 |
| Selbsteinschätzung Raumvorstellungsfähig-keiten (Median) | Durch-schnittlich | Gut | Schlecht |
| Verhältnis zu Mathema-tik (Median) | Sehr gut | Durchschnittlich | Durch-schnittlich |

**Tab. 1:** Überblick über Probanden

## 4. Ergebnisse

*Welche Figuren wurden erkannt?*

Diejenigen Probanden, die das Dreieck erkennen (8 von 12), haben auch keinerlei Probleme beim Erkennen des Sechsecks und des Rechtecks. Die Figuren, bei denen sich lediglich die Anzahl bzw. Länge der Seiten verändert (in Bezug auf das Dreieck), scheinen also keine große Herausforderung darzustellen.

Verändert sich allerdings die Winkelgröße (Raute) oder kommt der Klang des Tempelblocks hinzu (Quader und Zylinder), werden die Figuren nicht mehr erkannt. Dies lässt darauf schließen, dass sich die Probanden beim Zuhören auf einen Aspekt (hier: Zählen der Schritte) konzentrieren und den Rest ausblenden. Weist man die Probanden darauf hin, dass sie beispielsweise auch auf die Klangfarbe achten könnten, erkennen immerhin einige Probanden (überwiegend die Grundschullehramtsstudierenden) die dritte Dimension und können die Figur benennen.

*Wie kommt Raumvorstellung zum Ausdruck?*

Es konnten drei Kategorien von Mentalen Bildern rekonstruiert werden, die beim Lösen der Aufgaben genutzt werden:

**Dynamisches Mentales Bild**: Die Probanden haben die Vorstellung einer Person oder einer (Spiel-)Figur, die die Kanten einer mathematischen Figur abläuft. Beispiel: *„Er geht fünf Schritte nach vorne dann dreht er sich – nach links oder rechts, kann ich mir jetzt aussuchen. Ich habe mir das nach rechts vorgestellt – dann dreht er sich nach rechts und geht wieder fünf Schritte nach vorne. […]“* (Senior, P7, m)

**Statisches Mentales Bild**: Die Probanden stellen sich die mathematische Figur als Ganzes, beziehungsweise Seitenweise vor. Beispiel: *„Ich habe mir auch diesen Läufer gar nicht vorgestellt, ich hab mir immer gleich ne Linie gedacht“* (Grundschullehramtsstudierende, P10, w)

**„Assoziatives“ Mentales Bild**: Die Probanden verbinden mit dem gehörten Klang bzw. Geräusch eine Figur. Beispiel: *„Das hört sich so an wie‘n Klackerschuh und dann ists vielleicht n Rechteck, weil Klackerschuhe sehen aus wie ein Rechteck“* (Grundschulkind, P2, m)

*Welche Unterschiede zwischen den Altersgruppen treten auf?*

Grundschulkinder nutzen statische, sowie „assoziative“ mentale Bilder. Dies ließ sich, neben den lautsprachlichen Äußerungen, durch konzentrierte Blicke und Augenbewegungen rekonstruieren.

Bei Grundschullehramtsstudierenden lassen sich dynamische und statische mentale Bilder rekonstruieren. Auffällig war hierbei, dass häufig die Finger als Hilfsmittel verwendet wurden (Figur mit dem Finger in die Luft zeichnen, im Takt schnipsen, Abzählen der Seiten an den Fingern).

Die Arbeit mit dynamischen und „assoziativen“ mentalen Bilder dominieren bei der Personengruppe der Senioren. Sie nutzten häufig die Kopfpartie als Hilfsmittel (nicken des Kopfes im Takt, stummes Mitzählen, geschlossene Augen).

*Traten Unterschiede zwischen den beiden Aufgabentypen auf?*

Beide Aufgaben wurden auf die gleiche Art und Weise gelöst und es traten an denselben Stellen Schwierigkeiten auf. Somit lässt sich kein Unterschied feststellen.

## 5. Fazit

Die Ergebnisse zeigen, dass die beiden akustischen Aufgaben Anforderungen an die Raumvorstellung der Probanden stellen. Allerdings deuten die Ergebnisse daraufhin, dass akustische Hilfsmittel in der ersten Phase der Kopfgeometrieaufgabe nicht in besonderer Weise genutzt werden. Ein erster Interpretationsansatz wäre, dass wir nicht auf auditive Hilfsmittel trainiert sind und diese damit auch nicht in der entsprechenden Weise nutzen können.

## Literatur

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.Maier, P. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth: Auer.

Senftleben, H.G. (1996). *Erkundungen zur Kopfgeometrie*. In: Journal für Mathematik-Didaktik 17/1.

Thurstone, L.L. (1951). *An Analysis of Mechanical Aptitude*. Psychometric Laboratory Research Report No. 62. Chicago: University of Chicago Press.

Carina ZINDEL, Dortmund

# „Wenn ich wüsste, was davon was ist…“ – konzeptuelle und sprachliche Hürden bei funktionalen Abhängigkeiten

## Ausgangspunkt: Prüfungsergebnisse

Das Zitat aus dem Titel stammt von der Zehntklässlerin Hanna, als sie sich mit der Verbrauchs-Aufgabe (in Abbildung) aus den Zentralen Abschlussprüfungen 10 (ZP10, 2012) in NRW beschäftigt hat. Es illustriert die Herausforderung, die inhaltliche Bedeutung der Variablen (und Parameter) aus der Funktionsgleichung zu klären.

> Für das Auto von Familie Wacker lässt sich der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch (in l / 100 km) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (in km/h) näherungsweise mit der folgenden Gleichung berechnen:
>
> $$f(x) = 0{,}0005 \cdot (x - 40)^2 + 4{,}5462.$$
>
> a) Wie hoch ist der durchschnittliche Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 150 km/h. Notiere deine Rechnung.
>
> b) Wie hoch ist die Geschwindigkeit, wenn 9,0 l auf 100 km verbraucht werden? Notiere deine Rechnung.

**Abbildung 1:** Verbrauchs- Aufgabe der ZP10 2012 NRW (im Original Prüfungsteil 2, Aufgabe 2c)

Dass Lernende mit dieser Aufgabe Probleme haben, zeigen Ergebnisse des Projekts MuM-ZP (Prediger et al., 2013). Aufgabenteil a) haben hiernach nur 49,9% der Lernenden (47% der sprachlich Schwachen, 56% der sprachlich Starken), Aufgabenteil b) sogar nur 11% der Lernenden (10% der sprachlich Schwachen, 15% der sprachlich Starken) gelöst. Im gesamten Test schnitten sprachlich schwache Lernende jeweils schlechter ab als sprachlich starke Lernende. Der Einfluss der Sprachkompetenz auf die Testleistung war insbesondere größer als Faktoren wie der Migrationshintergrund oder der sozio-ökonomische Status (Prediger et al., 2013). Dies wirft die Frage nach der Rolle der Sprache auf. Die Sprache ist auch in der Mathematik nicht nur als Lernmedium, sondern auch als Lerngegenstand und bei einigen Lernenden als erst zu schaffende Lernvoraussetzung anzusehen (Prediger, 2013). In einem Dortmunder Projekt MuM-Funktionen wird daher zwei Fragen nachgegangen: Wie sind beim Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten konzeptuelle und sprachliche Hürden verknüpft? Welche Förderansätze lassen sich daraus ableiten? In diesem Beitrag liegt der Fokus auf den möglichen Hürden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Methodischer Rahmen

Den Rahmen bildet die Fachdidaktische Entwicklungsforschung mit ihrer iterativen Verknüpfung von Entwicklung und Forschung (Prediger et al., 2012). Es wurden 22 Designexperimente im Interview- Setting mit jeweils zwei Lernenden videographiert, partiell transkribiert und qualitativ analysiert im Hinblick auf mögliche Hürden und Zusammenhänge.

## Erste empirische Ergebnisse: Facetten der inhaltlichen Bedeutung

Dass auch in der Mathematik sprachliche Besonderheiten mögliche Hürden darstellen, wird zunehmend in den Blick genommen (vgl. z.B. Prediger et al., 2013; Maier & Schweiger, 1999). Doch ist bislang wenig themenspezifisch erforscht, wie Hürden für spezifische Themen wie funktionale Abhängigkeiten genau ineinander greifen. Beispiele für sprachliche Mittel zur verbalen Darstellung von Funktionen sind „…in Abhängigkeit von…“, „…wird… zugeordnet“ usw., die für Lernende keineswegs selbstverständlich, sondern explizit zu lernen sind. Eine mögliche Hürde liegt in ihrer starken Komprimiertheit, so dass wichtige Facetten der funktionalen Abhängigkeit von Lernenden erst entschlüsselt werden müssen. Empirisch rekonstruiert wurden folgende Facetten der inhaltlichen Bedeutung einer funktionalen Abhängigkeit, die Lernende ansprechen, wenn sie sich mit der Verbrauchsaufgabe beschäftigen: *Beziehung zwischen zwei Größen, Richtung der Abhängigkeit, Bedeutung der Variablen* und *Bedeutung der Parameter* (Abbildung 2).

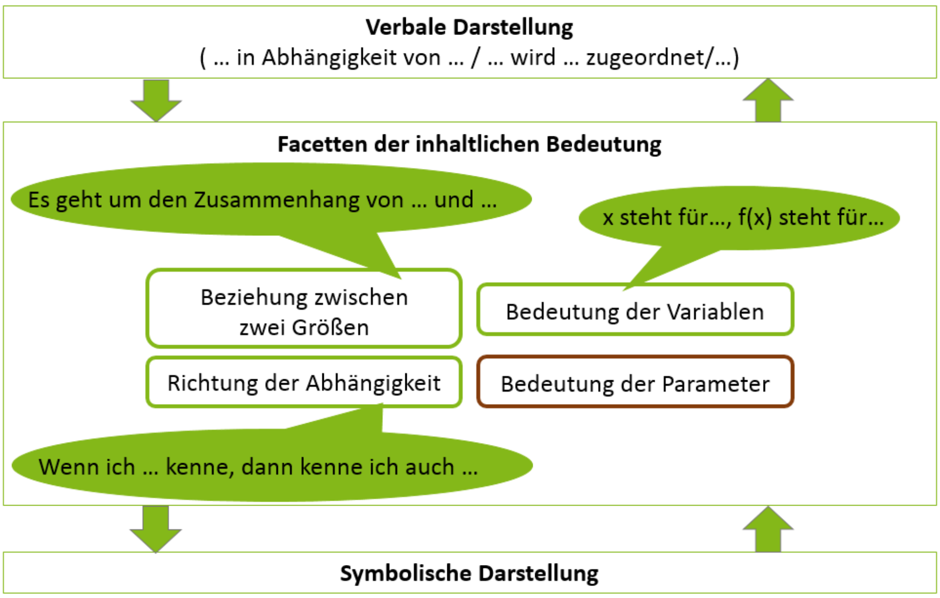



**Abbildung 2:** Facetten der inhaltlichen Bedeutung und ihre Sprachmittel

Hierbei treten verschiedene Hürden auf, von denen hier einige exemplarisch vorgestellt werden.

*Beziehung zwischen zwei Größen*

Paola: „Hm, ja weil hier ist ja die Gleichung und das war jetzt die einzige Zahl [zeigt auf die 150], die es gab und bei x muss dann eigentlich immer dann einsetzen, also war das so die einzige Möglichkeit…"

Für Paola stellt es eine Herausforderung dar, zu erkennen, dass es überhaupt um die Beziehung von *zwei* Größen geht und die Fixierung auf eine Größe nicht ausreicht. Eine weitere mögliche Hürde bei dieser Facette wäre auch die Identifizierung der beiden relevanten Größen.

*Richtung der Abhängigkeit*

Luisa: „Ich [weiß], was man einsetzen muss, einmal die Geschwindigkeit, einmal den Verbrauch, aber ich habe da jetzt keinen Sinn, keine Logik darin gesehen, wie man das jetzt einsetzt."

Für Luisa stellt die Klärung der Richtung der Abhängigkeit eine Hürde dar. Sie kann die verbale Darstellung in dieser Hinsicht nicht auf die Bedeutung der Variablen in der symbolischen Darstellung übertragen.

*Bedeutung der Variablen*

Dennis: „Kraftstoffverbrauch […] – weiß ich jetzt nicht genau, was das dabei sein soll – aber x ist die Geschwindigkeit, so dass man für x immer etwas anderes einsetzen kann."

Dennis argumentiert darüber, dass das x immer als Platzhalter für die in der Aufgabenstellung gegebene Größe fungiert und klärt so die Bedeutung der Variablen, ohne die im Text beschriebene Beziehung zwischen *zwei* Größen oder die Richtung der Abhängigkeit in den Blick zu nehmen.

*Bedeutung der Parameter*

Carlotta: „Ja aber das ist doch noch nicht der Kraftstoffverbrauch – 0,0005 was ist das denn?"

Carlotta sucht die Antwort auf die Aufgabenstellung in den Parametern der Funktionsgleichung. Hier fehlt der Bezug zu allen anderen Facetten, die Relevanz der Parameter wird überbewertet.

Mögliche Hürden bestehen also zum einen, wenn einzelne Facetten in der Bedeutung nicht korrekt erfasst werden. Zum anderen liegen sie aber auch gerade in der Vernetzung der Facetten, wie die Beispiele bereits andeuten. Um die komprimierte verbale Darstellung zu entschlüsseln, sind noch weitere bedeutungsbezogene Sprachmittel erforderlich (vgl. **Abbildung**).

## Fazit und Ausblick

Die verschiedenen Darstellungen einer funktionalen Abhängigkeit umfassen komprimiert jeweils alle Facetten der inhaltlichen Bedeutung. Die für den Umgang mit Textaufgaben notwendige Vernetzung der verbalen und symbolischen Darstellungen erfordert dementsprechend auch eine Betrachtung all dieser Facetten. Dies stellt für Lernende mögliche Hürden dar.

Bei diesen Hürden ist auch die Sprache in mehrerer Hinsicht von Bedeutung. In Form der verbalen Darstellung ist sie Teil des Lerngegenstands und müsste von Lernenden hinsichtlich ihres konzeptuellen Gehalts entschlüsselt werden. Um die einzelnen Facetten überhaupt umschreiben zu können, braucht es allerdings weitere bedeutungsbezogene Sprachmittel, diese sind Lernvoraussetzung an dieser Stelle.

Potentiellen Hürden könnte man vorgreifen, wenn die verschiedenen Facetten sowie ihre zugehörigen Sprachmittel explizit mit zum Lerngegenstand und Variationen der verbalen Darstellung als Lernmedium fruchtbar gemacht werden. Die bedeutungsbezogenen Sprachmittel zu den einzelnen Facetten sollten dabei als Lernvoraussetzung gewährleistet sein, z.B. durch das Angebot entsprechender Satzgerüste. Dies wird Gegenstand der nächsten Zyklen der Entwicklungsforschungsstudie sein.

## Literatur


Maier, H., & Schweiger, F. (1999). Mathematik und Sprache - Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien: öbv & hpt.

Prediger, S. (2013): Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen. Mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In: Becker-Mrotzek, M.; Schramm, K.; Thürmann, E.; Vollmer, H.-J. (Hg.): Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen. Münster, München [u.a.]: Waxmann, 167–183.

Prediger, S.; Link, M.; Hinz, R.; Hußmann, S.; Thiele, J.; Ralle, B. (2012): Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. MNU, 65 (8), 452-457.

Prediger, S.; Renk, N.; Büchter, A.; Gürsoy, E.; Benholz, C. (2013): Family background or language disadvantages? Factors for underachievement in high stakes tests. In: Lindmeier, A. & Heinze, A. (Hrsg.): Proceedings of the 37th Conference of PME, Kiel: PME, 4.49-4.56.

ZP10 (2012). Ministerium für Schule und Weiterbildung: Zentrale Abschlussprüfung 10 Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Düsseldorf.

Larissa ZWETZSCHLER, Duisburg-Essen

# „Weil ich da keine Satzanfänge zu hinkriege“ – Scaffolding von Schreib- und Lernprozessen zu Prozenten

Fehler im Bereich der Prozentrechnung waren und werden bereits seit vielen Jahren dokumentiert (als Überblick: Lamon 2007). Zu Fehlern Stellung zu nehmen, ist zwar im Lernprozess eine lernförderliche Tätigkeit, gleichzeitig sind dafür jedoch sprachlich-diskursive Fähigkeiten erforderlich, deren Bedeutung für das Mathematiklernen zunehmend ins Bewusstsein der mathematikdidaktischen Forschung rückt (als Überblick: Morgan 1998).

Daher stellt sich die Frage, wie Lernprozesse im Bereich der Prozentrechnung und die schriftsprachliche Ausdrucksfähigkeit *gemeinsam* gefördert werden können: Wie lässt sich ein Lehr-Lernarrangement möglichst lernförderlich gestalten, sodass Schreib- und Lernprozesse gemeinsam gefördert werden? Welche individuellen Konzepte im Bereich der Prozentrechnung und welche schriftsprachlichen Kompetenzen haben die Schülerinnen und Schüler und inwiefern können diese weiterentwickelt werden?

Diese Fragen wurden angebunden an das Projekt *Mathamtiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit* (MuM) im Rahmen eines Entwicklungsforschungsprojektes beforscht. Dazu wurden in mehreren Forschungszyklen Design-Experimente in Labor- und Klassensettings durchgeführt und ausgewertet.

## 1. Theoretischer Hintergrund

Zahlreiche Fehler in der Prozentrechnung wurden empirisch identifiziert, Parker und Leinhardt (1995) nennen die häufige Unsichtbarkeit von Relationen in der Sprache als einen von vier zentralen Gründen für die zahlreichen Fehler in der Prozentrechnung. Eine zentrale Herausforderung in diesem Bereich ist es, den Prozentwert und den Grundwert, sowie deren Beziehungen zueinander zu identifizieren (Broekman & Strufland 1993; u.a.).

Um Lerngelegenheiten zur Überwindung solcher Herausforderungen zu schaffen, kann das Design-Prinzip *Aufbau negativen Wissens* (Oser & Spychiger 2005) leitend sein. Hierbei sind Fehler der Anlass zu verstehen, unter welchen Bedingungen Konzepte nicht tragfähig sind und wann nicht. Ein konkretes Modell zur Unterstützung von Lernprozessen in der Prozentrechnung ist der Prozentstreifen (bar model bei van den Heuvel Panhuizen 2003). An diesem können die Beziehungen zwischen dem Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz veranschaulicht werden. Der Zweck des Schreibens im Unterricht lässt sich allgemein durch die zwei Bereiche 1. *Schreiben lernen* und 2. *Lernen durch Schreiben* (Morgan 1998) beschreiben.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Diese Bereiche können u.a. durch eine fokussierte Sprachförderung (Meyer & Prediger 2012) angeregt werden, indem durch den Ansatz des Macro-Scaffoldings (Hammond & Gibbons 2005) eine geplante, fach- und themenspezifische Förderung auf Wort- und Satzebene angeregt wird.

## 2. Entwicklung eines Lehr-Lernarrangements

Zur Konstruktion eines Lehr- Lernarrangements wurden Erkenntnisse aus der Schreibdidaktik (als Überblick: Feilke & Bachmann 2014) und zentrale Design-Prinzipien herangezogen, u.a. zum Scaffolding und negativen Wissen. Entstanden ist ein Lehr-Lernarrangement, das den Lernenden in Aufgabe A1) eine fehlerhafte Situation präsentiert. In der Situation möchte eine Geschäftsführerin eines Handyhandels das neue iPhone für die ersten 555 Kunden für nur 555 Euro anbieten. In einer Werbeanzeige bietet sie das neue iPhone dann mit über 43% Rabatt auf den Kaufpreis von 799 Euro an. Ein Kunde sieht diese Anzeige und berechnet, dass er das Handy dann für ca. 455Euro bekäme. In Aufgabe A2) sollen die Lernenden diese Situation mithilfe von Prozentstreifen analysieren. Sie bekommen zu einen richtigen und einen der zum Fehler passt. Dadurch sollen sie anschließend in Aufgabe A3) eine Stellungnahme an die Geschäftsführerin in Briefform schreiben können. Das Schreiben des Briefes wird dabei durch drei Arten von Scaffolding-Angeboten unterstützt: 1. Sprachlich-argumentatives Scaffolding, das durch Satzfragmente allgemein die Formulierung von Argumentationen unterstützt 2. Sprachlich-prozentbezogenes Scaffolding, das durch Satzfragmente die Formulierung von Relationen im Bereich der Prozente fokussiert (s. Abb. 1) und 3. Graphisch-schematisches Scaffolding, das in Form des Prozentstreifens die Relationen graphisch visualisiert.

Wenn du Frau Dr. Boll erklärst, warum dein Ansatz richtig ist kannst du zum Beispiel schreiben:

- weil der Grundwert ist … und davon werden die Prozente abgezogen
- der Prozentwert beträgt …% des Grundwertes
- es gibt … % Rabatt auf den Grundwert

**Abb.1:** Sprachlich-prozentbezogenes Scaffolding

## 3. Empirische Einblicke

In einem Design-Experiment bearbeiten Tim und Büsra (7. Klasse, Realschule) die zuvor vorgestellten Aufgaben. Während sie den Brief in A3) schreiben, werden sie von der Design-Experimentleiterin (DE-L) aufgefordert, das Scaffolding aus Abb. 1 zu berücksichtigen. Tim antwortet daraufhin:

Tim: Irgendwie glaub ich, sind diese Sätze nicht so gut (...)
Weil ich da – keine Satzanfänge zu hinkriege (...)

|  |  |
|---|---|
|  | Weil der Grundwert ist 799 Euro und davon werden – die 57 % abgezogen. – Könnte man vielleicht so schreiben. (...) |
| DE-L: | Die 57 oder die 43? |
| Tim: | Die sss – Hm. – die – Da haben sie mich jetzt aber ins Nachdenken gebracht. |

In dieser Szene zeigt sich, dass Tim das Scaffolding nicht nutzen kann, um die Beziehung zwischen dem Grundwert, dem Prozentwert und der Reduzierung zu klären. Um zu verstehen, warum er dies hier nicht nutzen konnte, wurden die vorherigen Szenen analysiert. Es zeigte sich, dass Tim bereits in A2) die Relationen nicht mit in den Blick nimmt. So begründet er die Wahl des richtigen Prozentstreifens wie folgt:

|  |  |
|---|---|
| Tim: | Und.-wenn dann da-halt die kleinen Dinge schon auffallen und man ein bisschen was vergleicht, dann-merkt man schon, dass das hier unten (falsche Prozentstreifen) eigentlich richtig ist. |
| DE-L: | Mhm. Weil dann mehr Zahlen einfach zusammenpassen? |
| Tim: | Ja. |

In dieser Szene zeigt sich, dass Tim bereits in A2) die Beziehungen nicht berücksichtigt hat. Er kann somit bereits hier nicht die intendierte relationale Sichtweise einnehmen. Ähnliche Befunde zeigten sich auch in den Briefen anderer Schülerinnen und Schüler. Bei richtigen Sätzen, stellt sich nun allerdings die Frage, ob die versprachlichten Beziehungen durch die Lernenden aktiv nachkonstruiert wurden, oder nur unverstanden adaptiert wurden. Insgesamt zeigt sich somit, dass ein relationales Scaffolding nicht verstanden werden kann, solange die Lernenden die Situation, den Prozentsteifen oder den Bezug zwischen beidem ausschließlich instrumentell verstehen (Zwetzschler 2015).

## 4. Fazit

In den Analysen hat sich gezeigt, dass der Übergang von einer instrumentellen zur relationalen Sicht auf Begriffe der Prozentrechnung (Skemp 1976) eine Herausforderung für die Lernenden darstellt. Um sie zu überwunden, sind zusätzlich zum Scaffolding weitere explizite Lerngelegenheiten notwendig. Die von Prediger (2013) beschriebene wechselseitige Abhängigkeit von Begriffen und deren verbalen Darstellung kann somit für diesen Bereich der Prozentrechnung konkretisiert werden: eine relationale Sicht ist eine Voraussetzung dafür, dass die verbale Darstellung aufgenommen und lernförderlich genutzt werden kann. Zudem zeigte sich in den Analysen, dass eine sensible Sicht auf Eigenproduktionen der Lernenden notwendig ist. Da bei der Nutzung des angebotenen Scaffolding durch Schülerinnen und Schüler zu klären bleibt, inwiefern sie die fokussierten Relationen eigenständig (nach-)konstruieren, oder unverstanden verwenden. Das Fokussieren der häufig unsichtbaren Relationen in der Prozentrechnung (Parker & Leinhardt 1995) durch Scaffolding, bedarf somit ein Abwägen von vorgegebenen Strukturen und angeregter Eigentätigkeit.

## Dank

Für die Beratung möchte ich den Schreibdidaktikern Prof. Dr. Thorsten Steinhoff und Lars Rüßmann von der Universität Siegen herzlich danken.

## Literatur

Feilke, H. & Bachmann, T. (2014). Werkzeuge des Schreibens – Theorie und Potenziale einer Didaktik der Textprozeduren. Stuttgart: Klett.

Broekman, H. & Stufland, L. (1993). A realistic Approach To Percentages. Mathematics Teaching, 145, 34-37.

Hammond, J. & Gibbons, P. (2005). Putting scaffolding to work: The contribution of scaffolding in articulating ESL education. Prospect, 20 (1), 6-30.

Lamon, S. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning. Toward a Theoretical Framework for Research. In F. K. Lester (Hrsg.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (S. 629-667). Charlotte: Information Age.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht - Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. Praxis der Mathematik in der Schule, 54 (45), 2-9.

Morgan, C. (1998). Writing Mathematically. The Discourse of Investigation. London / Bristol, PA: Falmer Press.

Oser, F. & Spychiger, M. (2005). Lernen ist schmerzhaft. Zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur. Weinheim: Beltz.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: A Privileged Proportion. Review of Educational Research, 65 (4), 421-481.

Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J.Vollmer (Hrsg.), Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen (S. 167-183). Münster et al.: Waxmann.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teacher, 77, 20-26.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics, 54 (1), 9–35.

Zwetzschler, L. (2015, im Druck): Adaptivity challenges for relational scaffolding. In N. Vondrova & K. Krainer (Hrsg.), Proccedings of CERME 9. Praha: ERME.

# 5 Predoc-Beiträge

Marie-Elene BARTEL, Jürgen ROTH, Landau

# Diagnostische Kompetenz durch Videovignetten fördern

Diagnostische Kompetenz ist für professionelles Lehrerhandeln von großer Bedeutung (Praetorius u.a., 2012). Dies legt eine Förderung der diagnostischen Kompetenz von Lehramtsstudierenden bereits in der ersten Ausbildungsphase nahe. Für die in den Mathematiklehramtsausbildungen üblichen Großveranstaltungen fehlen jedoch bisher entsprechende Konzepte zur Umsetzung. Unsere Idee hierfür ist es, die diagnostische Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden mit Hilfe von Videovignetten zu erfassen und zu fördern. Die verwendeten drei- bis fünfminütigen Videovignetten stammen von Gruppenarbeitsphasen aus dem Mathematik-Labor „Mathe ist mehr", einem Schülerlabor der Universität Koblenz-Landau. Zusammen mit weiteren Materialien, wie beispielsweise Arbeitsaufträgen und verwendeten Simulationen, sollen die Videovignetten den Studierenden in einer computerbasierten Lernumgebung, einem sogenannten Learning Management System (LMS), zur Verfügung gestellt werden. Im Rahmen der mathematikdidaktischen Großveranstaltungen des Bachelor of Education werden die Studierenden zu einer selbstständigen Bearbeitung von Diagnoseaufträgen angeleitet.

## 1. Diagnostische Kompetenz und Mikroadaptation

In der Literatur finden sich viele unterschiedliche Definitionen für das Konstrukt der *diagnostischen Kompetenz*. So versteht Schrader (2010, S. 102) darunter die „Fähigkeit eines Urteilers, Personen zutreffend zu beurteilen". Weinert (2000, S. 16) geht weit über die Urteilsgenauigkeit hinaus und bezeichnet diagnostische Kompetenz als ein „Bündel von Fähigkeiten, um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann." Wie in dieser Definition angedeutet, müssen weitere didaktische Schritte auf eine Diagnose folgen (Hoge & Coladarci, 1989). Stellen diese Schritte kurzfristige Anpassungen und Interventionen im Unterrichtsprozess dar, wie eine Reaktion auf einen Schülerfehler, spricht Schrader (2013) von *Mikroadaptationen*.

Wie in der Definition von Weinert (2000) angedeutet, sind Diagnosen für viele verschiedene Aspekte des Unterrichts von essentieller Bedeutung. Im Mathematikunterricht gilt dies insbesondere für das Begriffslernen, also die Entwicklung des Begriffsverständnisses der Schüler/innen (Weigand, 2012).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

In diesem Zusammenhang kommt den Grundvorstellungen sowie den erreichten Stufen des Begriffsverständnisses eine zentrale Bedeutung zu. Da diese nicht direkt sichtbar sind, müssen sich die Lehrenden bei ihren Diagnosen auf Handlungen, verbale Äußerungen und selbstproduzierte Repräsentationen der Schüler/innen beziehen. Hier setzen die Videovignetten, die die Kommunikation der Lernenden und deren Umgang mit Materialien abbilden, und ergänzende Schülerdokumente an.

## 2. Videoeinsatz in der Lehrerbildung

Seit den 1960er Jahren werden Videos in der Lehrerausbildung und -weiterbildung auf verschiedene Arten eingesetzt. Einen Überblick über Formen und Ziele des Videoeinsatzes in der Lehrerbildung liefern u. a. Janík und Kollegen (2013). Auch zur Förderung der diagnostischen Kompetenz (bzw. Unterrichtswahrnehmung) und der Adaptation werden Videos in der Lehrerbildung bereits eingesetzt. Exemplarisch seien hier zwei Projekte genannt. Seidel und Kollegen (2010) erheben mit dem Videotool „Observer“ die professionelle Unterrichtswahrnehmung mit besonderem Fokus auf Zielklarheit, Lehrerunterstützung und Lernklima. Im Projekt „VideA“ setzen Biaggi u. a. (2013) Videovignetten in Seminaren ein, um die Analyse- und Adaptationsfähigkeit von Mathematiklehramtsstudierenden zu fördern.

## 3. Entwicklung des Instrumentes

Die Entwicklung des Messinstrumentes ist ein mehrstufiger Prozess.

(1) Zunächst gilt es Videovignetten und zugehörige Materialien auszuwählen. Die Vignetten sollen zwischen drei und fünf Minuten lang sein. Sie können aus einer zusammenhängenden Sequenz oder zur Veranschaulichung eines Lernprozesses auch aus mehreren zusammengeschnittenen Videosequenzen bestehen. Die Inhalte der Vignetten müssen auf bestimmte Vorlesungsinhalte abgestimmt sein. So können etwa Videoausschnitte, die Schüler/innen bei der Erarbeitung von Grundvorstellungen zur Bruchrechnung zeigen, in die Vorlesung „Didaktik der Zahlbereichserweiterung“ integriert werden. Außerdem sollten die Schüler/innen in den gewählten Videoausschnitten sich implizit zu ihrem Begriffsverständnis äußern.

(2) Im Anschluss werden Expert/inn/en (Mathematikdidaktiker/innen) gebeten, eine erste Diagnose zum Begriffsverständnis der Schüler/innen durchzuführen und vorher Indikatoren, auf die sie ihre Diagnose stützen, zu benennen sowie ggf. zu erklären. Schließlich sollen sie kritische Stellen im Lernprozess der Schüler/innen und eine geeignete Mikroadaptation des Unterrichtshandelns angeben.

(3) Auf der Basis der Experteneinschätzung werden Diagnoseaufträge zu den gewählten Videovignetten erstellt. Diese können je nach Intention geschlossen oder offen sein, wobei beide Varianten Vor- und Nachteile haben. Geschlossene Items sind u.a. einfacher auszuwerten, können jedoch je nach Art der Formulierung an Validität verlieren. Offene Formate eröffnen Probanden die Gelegenheit eigene Ideen einzubringen, etwa bei potentiell erforderlichen Mikroadaptationen.

(4) Die Diagnoseaufträge werden zusammen mit den Videovignetten und den ergänzenden Materialen in ein LMS eingebunden. Bei der Konzeption der Oberfläche der Lernumgebung (vgl. Abb. 1) ist auf eine möglichst selbsterklärende und übersichtliche Gestaltung zu achten. Durch das Betätigen der einzelnen Buttons öffnen sich in einem Fenster die für eine adäquate Diagnose ggf. notwendigen Informationen, wie beispielsweise Arbeitsaufträge oder Schülerdokumente.

**Abb. 1:** Oberfläche der Lernumgebung

(5) Abschließend werden die Videoitems von Expert/inn/en (u. a. Fachleiter/innen) validiert. Es werden letztendlich nur solche Videovignetten und Diagnoseaufträge verwendet, welche eine ausreichende Übereinstimmung in den Expertenantworten aufweisen. Das Maß für die Güte der Studierendenantworten ist die Übereinstimmung mit dem Expertenurteil.

## 4. Untersuchungsdesign

Das konzipierte Instrument wird in mathematikdidaktischen Großveranstaltungen mit bis zu 320 Studierenden des Bachelor of Education eingesetzt. Die Untersuchung zur Wirksamkeit des Instruments ist nach dem Test- und Kontrollgruppendesign mit Pre- und Posttest konzipiert (vgl. Abb. 2). In der Experimentalgruppe werden gezielt Videovignetten zur Förderung diagnostischer Kompetenz und Mikroadaptation eingesetzt, in der Kontrollgruppe

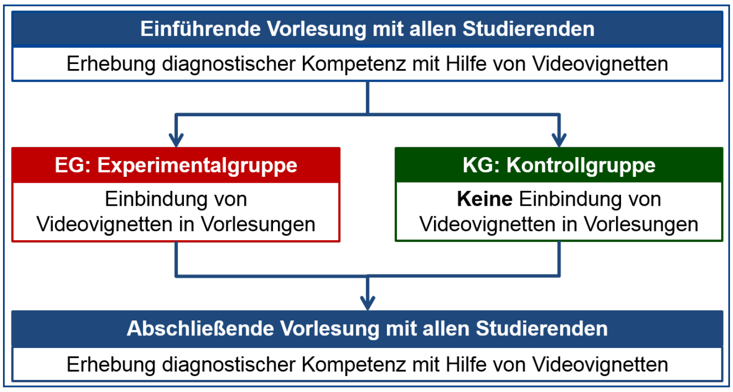


**Abb. 2:** Untersuchungsdesign

wird hingegen ausschließlich „verbaler“ Input zu den beiden Konstrukten gegeben. Es wird darauf geachtet, dass sich Experimental- und Kontrollgruppe darüber hinaus so wenig wie möglich unterscheiden (Dozent, Inhalte und zeitlicher Umfang sind identisch). Da eine vollständig randomisierte Gruppenzuweisung der Studierenden aus organisatorischen Gründen nicht möglich ist, handelt es sich um eine quasiexperimentelle Studie.

## Literatur


Biaggi, S., Krammer, K. & Hugener, I. (2013). Vorgehen zur Förderung der Analysekompetenz in der Lehrerbildung mit Hilfe von Unterrichtsvideos. Erfahrungen aus dem ersten Studienjahr. In H. Dorlöchter, U. Krüger & D. Wiebusch (Hrsg.), *Videografie in der Lehrerbildung*. SEMINAR Lehrerbildung und Schule (S. 26–34). Schneider Verlag Hohengehren.

Hoge, R. D. & Coladarci, T. (1989). Teacher-Based Judgements of Academic Achievement: A Review of Literature. *Review of Educational Research, 59* (3), 297–313.

Janik, T., Minarikova, E. & Najvar, P. (2013). Der Einsatz von Videotechnik in der Lehrerbildung. Eine Übersicht leitender Ansätze. In U. Riegel (Hrsg.), *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (Fachdidaktische Forschungen, Bd. 4, S. 63–78). Münster: Waxmann.

Praetorius, A.-K., Lipowsky, F. & Karst, K. (2012). Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: Aktueller Forschungsstand, unterrichtspraktische Umsetzbarkeit und Bedeutung für den Unterricht. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 115–146). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Schrader, F.-W. (2010). Diagnostische Kompetenz von Eltern und Lehrern. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch pädagogische Psychologie* (Programm PVU, Psychologie-Verlags-Union, 4., überarb. und erw. Aufl, S. 102–108). Weinheim [u.a.]: Beltz.

Schrader, F.-W. (2013). Diagnostische Kompetenz von Lehrpersonen. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 31* (2), 154–165.

Seidel, T., Blomberg, G. & Stürmer, K. (2010). „Observer“ – Validierung eines videobasierten Instruments zur Erfassung der professionellen Wahrnehmung von Unterricht. *Zeitschrift für Pädagogik, 56* (Beiheft), 296–306.

Weigand, H.-G. (2012). Begriffe lehren - Begriffe lernen. *mathematiklehren* (172), 2–9.

Weinert, F. E. (2000, März). Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche für das Lernen in der Schule, Pädagogisches Institut Bad Kreuznach.

Dorothea BUSSMANN, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

# Entwicklungen beim Zahlbegriffserwerb in unterschiedlichen Settings zur mathematischen Frühförderung

Die Thematik der frühkindlichen Bildung ist nicht neu und über die Notwendigkeit, mathematische Fähigkeiten bereits im vorschulischen Alter zu fördern, herrscht bereits seit längerer Zeit Konsens (z.B. Wittmann, 2004; Heinze & Grüßing, 2009; Kaufmann, 2010). Beim Blick in Theorie und Forschung wird jedoch deutlich, dass zwar die Desiderate einheitlich sind, nicht aber die Vorstellungen darüber, wie die frühkindliche Förderung gestaltet werden sollte. Es „besteht noch massiver Forschungsbedarf zur Frage, welche Ziele bei welchen Kindern mit welchen Fördermaßnahmen erreichbar sind" (Hasselhorn & Schneider, 2011, S. 6).

Genau an dieser Stelle setzt die zentrale Frage der vorgestellten Studie an: Welche Lernentwicklungen zeigen Kinder mit geringem mathematischem Vorwissen beim Erwerb des Zahlbegriffs in unterschiedlichen Settings zur mathematischen Frühförderung im letzten Kindergartenhalbjahr?

Die Bearbeitung dieser Frage erfordert ein angemessenes Datenerhebungsinstrument, welches Einblicke in die Lernentwicklungen der Kinder ermöglicht. Einerseits muss dabei der Unvorhersagbarkeit der Denkwege der Kinder Rechnung getragen werden. Andererseits muss eine gewisse Vergleichbarkeit möglich sein, um Veränderungen in den Lernständen der Kinder sichtbar machen zu können (Selter & Spiegel, 1997).

## Datenerhebung – Erfassung der Lernentwicklungen

Zu Beginn des letzten Kindergartenhalbjahres wurden aus elf Kindertagesstätten mit Hilfe des standardisierten Tests MARKO-D (Ricken, Fritz & Balzer, 2013) und Gesprächen mit den pädagogischen Fachkräften 28 Kinder ausgewählt, deren Lernentwicklungen genauer untersucht werden sollten (Überblick über die Datenerhebung vgl. Abb. 2). Diese Kinder waren zum Zeitpunkt der ersten Lernstandsdiagnose zwischen fünf Jahren und zwei Monaten und sechs Jahren und drei Monaten alt. Bei der Auswahl der Kinder bildete stets die jeweilige Kindergartengruppe die Norm. Es wurden jeweils diejenigen Kinder einer Kindergartengruppe ausgewählt, die im Vergleich zu den anderen Kindern der Gruppe das geringste mathematische Vorwissen aufwiesen. Aufgrund dieses Vorgehens unterscheiden sich die ausgewählten Kinder in ihren Lernständen, was allerdings aufgrund der angestrebten Beschreibung der individuellen Lernentwicklungen kein Problem darstellt. Mit den ausgewählten Kindern wurde im letzten Kindergartenhalbjahr dreimal im Abstand von etwa zwei Monaten dasselbe halbstandardisierte Interview durchgeführt, das auf Grundlage der Lernstandserfas-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

sung mit dem Goldstückspiel von Moser Opitz und Schmassmann (2007) entwickelt wurde.

Der erstellte Interviewleitfaden setzt sich aus zwei Teilen zusammen: im ersten Teil werden den Kindern gezielte Aufgaben gestellt, im zweiten Teil steht das Spielen des Goldstückspiels im Mittelpunkt. Die Aufgaben und Leitfragen des Interviews orientieren sich an den zentralen Fähigkeiten des Zahlbegriffs, sodass Aussagen über die Entwicklung der Kinder in den einzelnen Teilfähigkeiten gemacht werden können. Dazu gehören unter anderem: „das Vergleichen von Mengen, das Aufsagen der Zahlwortreihe, das Abzählen von Dingen, das simultane oder quasi-simultane Erfassen von Anzahlen in Würfel- oder anderen Zahlbildern, das Zerlegen von Mengen von Dingen, das Bestimmen von Vorgänger und Nachfolger, das Zuordnen der Zahl zu einer Menge und erstes Rechnen“ (Rathgeb-Schnierer, 2012, S. 58). Die folgende Tabelle (Abb. 1) zeigt Beispiele aus dem Interviewleitfaden:

| **Aktivität** | **Teilfähigkeit des Zahlbegriffs** |
|---|---|
| Wie alt bist du? Kannst du diese Zahl auch schon aufschreiben? Welche Zahlen kannst du noch schreiben? | Zahlen schreiben |
| Zähle bitte einmal so weit, wie du kannst. | Aufsagen der Zahlwortreihe |
| Wer die größere Augenzahl würfelt, darf beginnen. | Mengen vergleichen |
| Während des Spiels wird das Kind nach jedem Wurf gefragt, welche Augenzahl es gewürfelt hat. | Anzahlerfassung von Würfelbildern |
| Ab der Hälfte des Spiels wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Das Kind wird so dazu herausgefordert, zwei Teilmengen zu einer Gesamtmenge zusammenzusetzen. | Teilmengen zu einer Gesamtmenge zusammensetzen |

**Abbildung 1:** Beispiele aus dem halbstandardisierten Interview

Von 23 Kindern liegen alle drei Interviews vor. Sie stammen aus zehn verschiedenen Kindertagesstätten, in denen während des Datenerhebungszeitraums der reguläre Kindergartenalltag stattfand. Einige Kindertagesstätten haben in diesem Zeitraum das Programm Zahlenland (Friedrich & de Galgóczy, 2004) durchgeführt, andere haben die mathematische Frühförderung vorwiegend durch den Einsatz von Regelspielen mit Potenzial zur Unterstützung des Zahlbegriffserwerbs umgesetzt oder auf andere Art und Weise in den Kindergartenalltag integriert. Um die jeweiligen Settings genauer beschreiben zu können, wurde ein Fragebogen eingesetzt. Am Ende des Kindergartenjahres wurde der eingangs durchgeführte standardisierte Test noch einmal mit 73 Kindern wiederholt, um auf diese Weise weitere Aussagen über die Lernfortschritte der Kinder machen zu können.

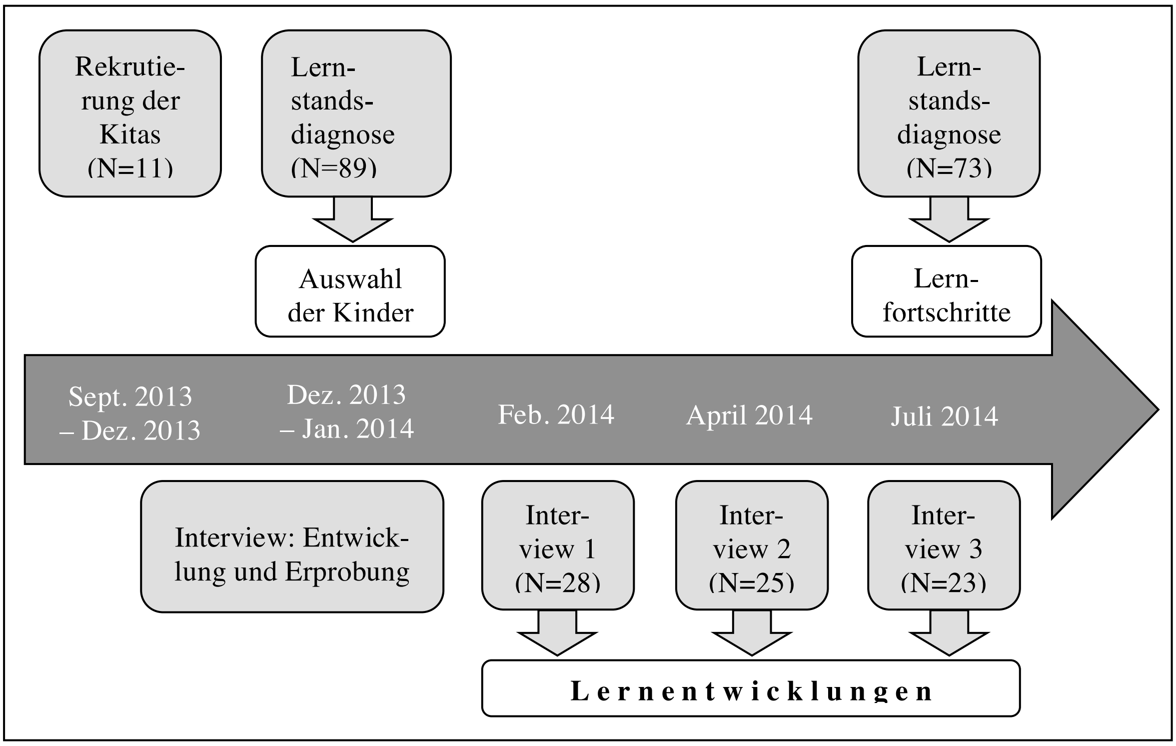



**Abbildung 2:** Datenerhebung im Überblick

## Analyse der Lernentwicklungen – Vorgehensweise

Zur Analyse der Lernentwicklungen wurde ein Schema entwickelt, das Rückschlüsse auf die jeweiligen Ausprägungen der Teilfähigkeiten des Zahlbegriffs ermöglichen soll (Abb. 3). In Anlehnung an den Interviewleitfaden wurden zunächst thematische Hauptkategorien gebildet, welche die Teilfähigkeiten des Zahlbegriffs wiederspiegeln (1). Anhand dieser Kategorien ist eine Codierung der gesamten Interviews vorgesehen, wobei eine Mehrfachcodierung möglich ist (2). Dabei wird jede Sequenz, in der das Kind eine mathematische Aktivität zeigt, als Event (Codiereinheit) betrachtet. Im Anschluss an die Codierung erfolgt eine Bündelung der einzelnen Events einer Hauptkategorie, das heißt, es werden alle mit der gleichen Hauptkategorie codierten Sequenzen zusammengestellt. Zu jedem dieser Events wird eine kurze verbale Beschreibung erstellt (3). Daran schließt sich eine kategorienbasierte Gesamtauswertung an: alle zusammengestellten und beschriebenen Events einer Hauptkategorie werden in ihrer Gesamtheit betrachtet und eine zusammenfassende Inhaltsbeschreibung zu jeder einzelnen Hauptkategorie angefertigt (4). Diese vier Schritte werden für alle Interviews durchgeführt. Auf dieser Basis können dann die Ausprägungen der einzelnen Kinder in den jeweiligen Teilfähigkeiten des Zahlbegriffs nebeneinandergestellt, verglichen und in Form von Lernentwicklungen beschrieben werden (5). An diesen intraindividuellen Vergleich sollen sich schließlich interindividuelle Vergleiche anschließen, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Entwicklungen der Kinder herausarbeiten zu können.

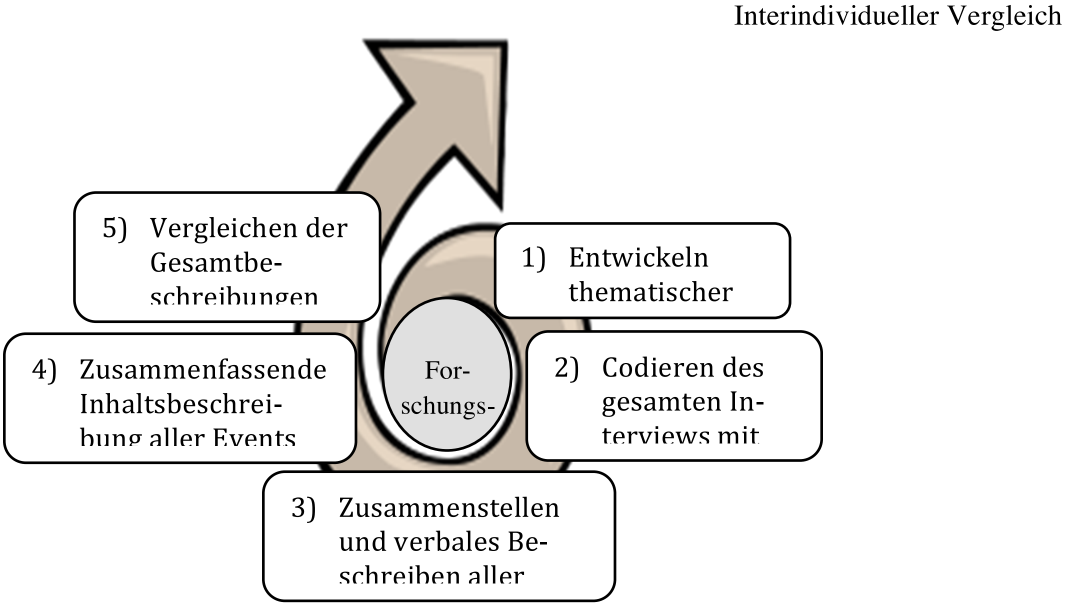



**Abbildung 3:** Vorläufiges Ablaufschema (in Anlehnung an Kuckartz, 2012, S. 78)

## Literatur

Friedrich, G. & de Galgóczy, V. (2004). *Komm mit ins Zahlenland. Eine spielerische Entdeckungsreise in die Welt der Mathematik.* Freiburg i. Br.: Christophorus-Verlag.

Hasselhorn, M. & Schneider, W. (2011). Trends und Desiderate der Frühprognose schulischer Kompetenzen: Eine Einführung. In Hasselhorn, M. & Schneider, W. (Hrsg.), *Frühprognose schulischer Kompetenzen* (S. 1-10).

Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.) (2009). *Mathematiklernen von Kindergarten bis zum Studium: Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht.* Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Schroedel.

Kuckartz, U. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* Weinheim und Basel: Beltz Juventa.

Moser Opitz, E. & Schmassmann, M. (2007). *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 1.* Zug: Klett & Balmer

Rathgeb-Schnierer, E. (2012). Mathematische Bildung. In Kucharz, D. (Hrsg.), *Elementarbildung. Bachelor / Master* (S. 50-85). Weinheim und Basel: Beltz.

Ricken, G., Fritz-Stratmann, A. & Balzer, L. (2013). *MARKO-D. Mathematik und Rechnen – Test zur Erfassung von Konzepten im Vorschulalter*. Göttingen: Hogrefe

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch. (2004). Design von Lernumwelten zur mathematischen Frühförderung. In Faust, G., Götz, M., Hacker, H. & Roßbach, H.-G. (Hrsg.), *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich* (S. 49-63). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Sofia CHASAKI, Saarbrücken

# Auf dem Weg zu einem flexiblen Stellenwertverständnis

## 1. Situationsanalyse

Die Aufgaben zur Prüfung des Stellenwertverständnisses bei Kindern, die in den Schulbüchern oft zu finden sind, verlangen einen Transfer, dessen erfolgreiche Bewältigung nicht primär auf das Vorhandensein eines Stellenwertverständnisses schließen lässt. Eine solche Aufgabe ist beispielsweise folgende: Wie viele Hunderter, wie viele Zehner und wie viele Einer hat die Zahl 153? Solche Aufgaben können mechanisch von den Kindern gelöst werden und geben keinesfalls einen Hinweis darüber, ob die Lernenden über ein vertieftes Stellenwertverständnis verfügen. Die Schülerinnen und Schüler könnten auswendig gelernt haben, dass z.B. rechts immer die Einer sind, in der Mitte immer die Zehner und links die Hunderter.  Das Konzept des Stellenwerts ist nicht nötig, um solche Aufgaben richtig zu lösen (Gerster & Schultz 2004, S. 80).

Manche Schülerinnen und Schüler, welche die oben genannten Aufgabentypen richtig nachvollziehen können, haben jedoch große Schwierigkeiten beim Transfer von nicht-Standard Teilungen in Standard Teilungen. Diese Schwierigkeiten zeigen sich beispielsweise in der Nichtbeachtung des Stellenwerts (Abb. 1a) oder der Nichtbeachtung von Bündelungseinheiten (Abb. 1b) Dies zeigt, dass die Kinder über kein flexibles Stellenwertverständnis verfügen.

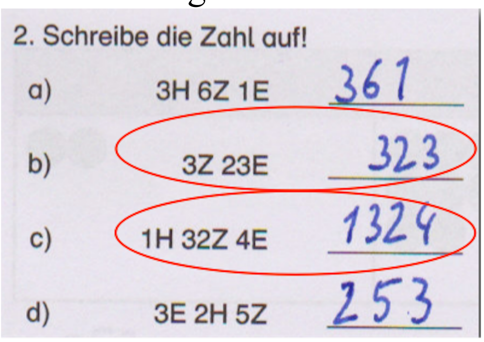



**Abbildung 1a:** Nicht-Beachten des Stellenwerts

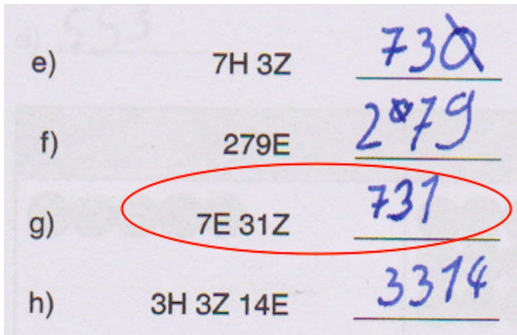



**Abbildung 1b:** Nicht Beachten von Bündelungseinheiten

(Schülerdokument aus der Studie Ladel & Kortenkamp, 2014)

## 2. Definition des flexiblen Verständnisses von Stellenwerten

Das flexible Stellenwertverständnis ist definiert als die Fähigkeit der Kinder zwischen den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten einer Zahl fle-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

xibel zu wechseln Die drei Darstellungsmöglichkeiten einer Zahl sind folgende (Abb.2):

a) Die Standard Teilung beschreibt die Darstellungsweise, welche durch fortgesetzte Bündelung erreicht wird. Die Zahl 231 wird als 2H 3Z 1E dargestellt.

b) Die nicht-Standard strenge Teilung ist diejenige, bei der die Zahl noch lesbar/erkennbar ist. Eine solche liegt im Fall der 231 als 23Z 1E oder 2H 31E vor.

c) Die nicht-Standard Teilung, ist diejenige, bei der nach der Bündelung erst noch addiert werden muss, um die Zahl zu erhalten. Eine solche liegt z.B. bei 1H 13Z 1E vor.

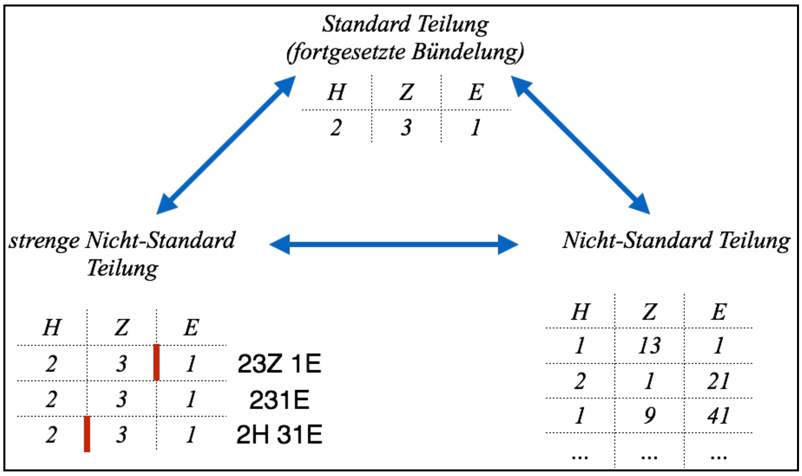



**Abbildung 2: Flexible Interpretation des flexiblen Stellenwertverständnisses (Ladel &, Kortenkamp, 2014a, übersetzt von der Autorin)**

## 3. Die Forschungsfrage des Projekts

Die übergreifende Forschungsfrage dieses Dissertationsprojekts lautet:

Wie kann ein gezielter, kombinierter Einsatz der physischen und der virtuellen Stellenwerttafel die Entwicklung eines flexiblen Stellenwertverständnisses der Kinder unterstützen?

Dabei widmet sich die Studie dieses Dissertationsprojekts unter anderem den folgenden Teilfragen:

- Gelingt den Kindern der intermodale Transfer zwischen der verbalen symbolisch und der non-verbalen symbolisch Darstellung der Zahlen?
- Gelingt den Kindern der intermodale Transfer zwischen der ikonischen Darstellung der Zahlen mithilfe von Bündelungsmaterial, der verbal-symbolischen und der non-verbal-symbolischen Darstellung der Zahlen?

- Können die Kinder den Wert einer Ziffer in einer Zahl erklären?
- Können die Kinder die Beziehung zwischen der nicht-Standard Darstellung einer Zahl mithilfe von Bündelungsmaterial und den Ziffern der Zahl erkennen?
- Gelingt den Kindern der Transfer zwischen Angaben von Bündelungseinheiten, den gesprochenen und geschriebenen Zahlen?
- Gelingt den Kindern der Transfer zwischen der standardisierten und der nicht standardisierten Darstellung einer Zahl zu den gesprochenen und geschriebenen Zahlen?

## 4. Das Untersuchungsdesign

Die qualitative Studie wird mit Kindern der zweiten Klasse durchgeführt. Die Stichprobe der Studie besteht aus 50 Kindern einer staatlichen Schule in Saarbrücken.

Zur Überprüfung des aktuellen Wissens der Kinder bezüglich des Stellenwertverständnisses werden leitfadengestützte Einzelinterviews durchgeführt. Die Interventionsphase wird von den Lehrpersonen übernommen. Hierfür wurde ein Handbuch entwickelt, welches sowohl den theoretischen Hintergrund als auch vier konkrete Aufgabentypen, die eingesetzt werden sollen, enthält. Vor der Interventionsphase werden außerdem Workshops mit den Lehrpersonen durchgeführt. Während der Interventionsphase werden die Kinder viermal zu Analysezwecken per Video aufgenommen. Abschließend werden wieder leitfadengestützte Einzelinterviews durchgeführt.

## 5. Die Studie

Die Aufgaben des Interviews sind in drei Teile unterteilt. Der erste Teil überprüft die Voraussetzungen zum Stellenwertverständnis. Der zweite prüft das Stellenwertverständnis der Kinder und der dritte Teil überprüft das flexible Stellenwertverständnis der Kinder.

Im Folgenden werden vier Aufgabentypen und ihre theoretische Grundlage beschrieben, die während der Interventionsphase zum Einsatz kommen. Der erste Typ von Aufgaben beinhaltet das Verschieben eines Plättchens sowohl in der realen als auch in der virtuellen Stellenwerttafel. Je nachdem mit welchem Material die Kinder arbeiten, haben die Handlungen eine ganz andere Bedeutung. Das Verschieben eines Plättchens in der physischen Stellenwerttafel ist oft mit einer Wertänderung der Zahl verbunden. Verschieben die Kinder aber ein Plättchen in der virtuellen Stellenwerttafel, wird ein kognitiver Konflikt erzeugt, da diese Tätigkeit eine Darstellungsänderung der Zahl zur Folge hat. (Ladel & Kortenkamp, 2014b, S. 162) Um ein vollständig ausgebildetes Verständnis von Stellenwerten zu erlangen ist es wichtig, beide Darstellungen in einem handelnden Umgang zu erfahren.

Der zweite Aufgabentyp ist für die virtuelle Stellenwerttafel gedacht. Die Kinder sollen eine beliebige Zahl wie z.B. die Zahl 45 mit Plättchen in der Stellenwerttafel darstellen. Danach werden die Kinder aufgefordert, alle anderen Darstellungsmöglichkeiten dieser Zahl zu finden. Sie sollen verstehen, dass die Standard-Darstellung einer Zahl nur eine Möglichkeit von vielen ist. Wichtig ist zu verstehen, wie ausgehend von der Standard-Darstellung einer Zahl alle anderen Nicht-Standard-Darstellungen gebildet werden können. Das ist nur durch kontinuierliche Entbündelung möglich. Da die virtuelle Stellenwerttafel mit Bündelung und Entbündelung verknüpft ist kann dies gut veranschaulicht werden.

Bei dem dritten Typ von Aufgaben werden die Kinder aufgefordert alle Zahlen zu finden, bei denen eine bestimmte Anzahl von Darstellungen möglich ist. Alle Zahlen haben eine Standard-Darstellung. Bei allen zweistelligen Zahlen hängt die Anzahl der nicht-Standard-Darstellungen von der Anzahl ihrer Zehner ab und folglich davon, wie viele Entbündelungen möglich sind.

Der vierte Aufgabentyp zielt auf das Gelingen des Transfers von der nicht-Standard-Teilung einer Zahl zu der Standard-Teilung ab. Dabei werden die Kinder insbesondere dazu aufgefordert verschiedene Wege und Möglichkeiten der Bündelung zu finden, um die Zahl von der nicht-Standardform zur Standardform zu bringen.

## Literatur

Gerster, H.-D., Schultz, R. (2004). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Online im Internet: http://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/index/index/docId/16, (zuletzt aufgerufen am 15.01.2015).

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014a) Development of a flexible understanding of place value. In: Proceedings of POEM 2. Malmö, Schweden.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014b). Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten-Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory. In S. Ladel & Chr. Schreiber (Hrsg.), Lernen, Lehren und forschen mit digitalen Medien, Von Audiopodcast bis Zahlensinn (S. 151- 175). Münster: WTM Verlag

Miriam DIMARTINO, Saarbrücken

# Mit Wendestäben zum Strategiewechsel

Zählen ist für Kinder der erste Zugang zu Zahlen und zum Rechnen. Während sich einige davon im Verlauf des ersten Schuljahres lösen, bleiben andere weiterhin als Zähler zurück.

## Problemlage

Um die Kinder bei der Ablösung vom zählenden Rechnen zu unterstützen, werden im Unterricht häufig Mischformen didaktischer Arbeitsmaterialien, wie der Rechenrahmen oder das strukturierte Zwanzigerfeld mit Wendeplättchen eingesetzt. Diese eröffnen durch ihre Fünferstruktur die Möglichkeit, Mengen quasi–simultan zu erfassen. Aufgrund des Materialaufbaus sind die Handlungen am Zwanzigerfeld oftmals durch Eins–zu–Eins–Zuordnung oder durch Abzählen einzelner Plättchen und deren Verschiebung ins Zwanzigerfeld geprägt. Der Rechenrahmen besitzt durch seinen Aufbau hingegen den Vorteil, dass Anzahlen quasi–simultan nicht nur erfasst, sondern auch dargestellt werden können.

Generell ist die Fünferstruktur der Materialien zur Darstellung der ersten Teilmenge und zur Erfassung der Summe/Differenz von Vorteil. Für weitere Handlungen ist sie jedoch nur schwer nutzbar. Sollen Additionen im ZR bis 9 visualisiert werden, stoßen die Materialien bei Aufgaben, deren zweiter Summand größer als der Erste und deren Summe größer 5 ist, an ihre Grenzen. Durch die Darstellung der ersten Teilmenge wird die Fünferstruktur zerstört, somit das quasi–simultane Erfassen der zweiten Teilmenge mittels „Kraft der 5" unmöglich (Abb.1). Wenn diese in einem weiteren Schritt nicht richtig zerlegt wird (bspw. mittels Ergänzung zur 5), können die Aufgaben nur durch das Schieben und Zählen der Einzelelemente gelöst werden.

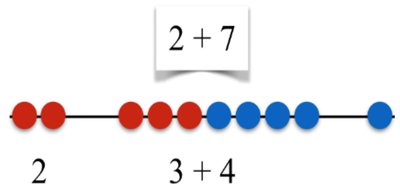



**Abb. 1:** Zerstörte Fünferstruktur bei der 7

Dementsprechend verhält es sich bei Subtraktionen deren Minuend größer/gleich sechs (bestehend aus „fünf" und überschreitendem Rest) und der Subtrahend größer als der zu überschreitende Minuendenrest ist.

> *„Wenn wir im Piaget'schen Sinne Operationen als ‚verinnerlichtes Tun" begreifen, dann setzt das voraus, dass die Handlungen am Material mit den angestrebten Verfahren strukturell übereinstimmen. Bereits die Handlung muss die Struktur des künftigen Kopfrechenverfahrens enthalten. Nur so können sich aus Handlungen durch Verinnerlichung die erwünschten (mentalen) Operationen entwickeln."*
> *(Schipper 2003, S. 223)*

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Die Materialien eröffnen den Kindern durch ihren Aufbau zwar die Möglichkeit sich bei Zahlauffassungen und –darstellungen von ihren Zählstrategien zu lösen, beim Rechnen stellen sie aber keine echte Lernhilfe dar. Kinder, die bereits über Zerlegungsstrategien verfügen, werden sich wohl alsbald vom Material lösen. Kinder aber, die den Zerlegungen nicht mächtig sind, verharren am Material im Zählen, um handlungsfähig zu bleiben.

## Forschungsinteresse und Fragestellung

Um die Kinder bei der Ablösung vom zählenden Rechnen zu unterstützen, erfolgte nach Analyse der didaktischen Materialien und theoretischer Erkenntnisse durch Bündelung der Vorteile eine Optimierung und Neukonzeption eines didaktischen Anfangsmaterials in Form von Wendestäben.

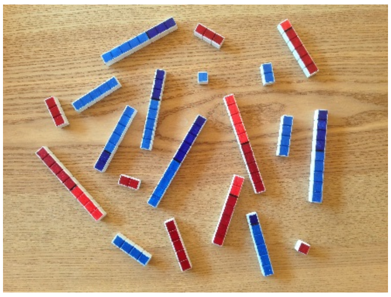


**Abb. 2:** Wendestäbe mit farbig überschreitendem Rest

Dabei hantieren die Kinder mit strukturierten Ganzheiten. Kerbeinheiten verdeutlichen die Zusammensetzung der Stäbe aus einzelnen Würfelelementen. So können Anzahlen bis vier simultan, Anzahlen größer fünf durch die Farbvarianz zwischen „Fünfer“ und überschreitendem Rest quasi–simultan erfasst und dargestellt werden (Abb. 2). So lassen sich bei der Addition beide Teilmengen erfassen und im strukturierten Zwanzigerfeld darstellen. Durch den Materialaufbau lassen sich auch Subtraktionen vollziehen. Die Gesamtmenge wird im beiliegenden Zwanzigerfeld positioniert, durch das Auflegen der zu subtrahierenden Teilmenge (gedrehter Wendestab zeigt mit weißer Seite nach oben) kann ein Wegnehmen simuliert werden. Dabei bleiben Minuend, Subtrahend und Differenz bestehen. Zum Material wurden zudem zehn blaurote Wendewürfel, ein Zahlenstrahl, Zerlegungshäuser sowie Tafelmaterial gefertigt.

Es stellt sich die Frage, ob der Einsatz von Wendestäben die Ablösung von Zählstrategien und den Aufbau effektiverer Strategien unterstützen kann?

## Untersuchungsdesign

In einer qualitativen Längsschnittstudie (N=77) erfolgen seit Beginn des Schuljahres 2014/15 an drei Grundschulen im Saarland der Einsatz und die Erprobung des Materials durch vier Kohorten von Schulanfängern. Dabei unterscheiden sich die Einzugsgebiete der Schulen hinsichtlich ihres sozioökonomischen und soziokulturellen Milieus.

Die Lehrer/innen wurden in das Unterrichtsmaterial und in die Handreichungen zum Einsatz mit Wendestäben eingeführt. Die Einsatzhäufigkeit des Materials liegt dabei in ihrem Ermessen.

Die Daten werden im Verlauf des Schuljahres zu drei Untersuchungszeitpunkten in einem Vor–, Zwischen– und Abschlusstest videografiert erhoben und qualitativ und quantitativ ausgewertet. Das leitfadengestützte Interview zur Erhebung des Vorwissens wurde für eine etwa dreißigminütige Befragungsdauer konzipiert. Die Testitems wurden teilweise aus bestehenden Testverfahren entnommen und/oder modifiziert und erweitert.

## Kohortenspezifische Auswertung des Eingangstests

| ***Zählen*** | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
|---|---|---|---|---|---|
| Vorwärts Zählen (bis 20) | 52,4% | 89,5% | 81,8% | 73,3% | 74,0% |
| 6 Schritte weiterzählen (von 12) | 0% | 31,6% | 13,6% | 20,0% | 15,6% |
| Rückwärts Zählen (von 20) | 14,3% | 36,8% | 22,7% | 26,7% | 24,7% |
| 5 Schritte rückwärts zählen (von 16) | 4,8% | 21,1% | 9,1% | 6,7% | 10,4% |
| ***Zahlauffassung*** | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
| simultan: 3 (verzerrtes Würfelbild) | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |
| quasi- simultan: 5 (Würfelbild); | 85,7% | 100,0 | 100,0 | 93,3% | 94,8% |
| simultan: 2 (verzerrtes Würfelbild) | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |
| quasi- simultan: 7 (aus Würfelbild 6 + 1 ) | 23,8% | 73,7% | 36,4% | 53,3% | 45,5% |
| simultan: 4 (verzerrtes Würfelbild) | 85,7% | 100,0 | 95,5% | 80,0% | 90,9% |
| ***Kardinaler Zahlaspekt*** | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
| Gib mir 4 Würfel. | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |
| Gib mir 7 Würfel. | 95,2% | 100,0 | 100,0 | 93,3% | 97,4% |
| Gib mir 12 Würfel. | 57,1% | 73,7% | 81,8% | 80,0% | 72,7% |
| ***Eins- zu- Eins- Zuordnung*** | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
| zum 4er Wendestab | 90,5% | 100,0 | 95,5% | 100,0 | 96,1% |
| zum 9er Wendestab | 71,4% | 100,0 | 81,8% | 73,3% | 81,8% |
| zu vorgegebener Menge | 38,1% | 57,9% | 63,6% | 60,0% | 54,5% |
| ***Ordinaler Zahlaspekt*** | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
| Zeige den dritten Würfel | 28,6% | 78,9% | 77,3% | 93,3% | 67,5% |
| Zeige den sechsten Würfel. | 14,3% | 84,2% | 45,5% | 80,0% | 53,2% |
| Zeige den zwölften Würfel. | 9,5% | 52,6% | 45,5% | 53,3% | 39,0% |
| ***Mengen vergleichen*** | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
| unstrukturiert (Gleichheit: Form; Unterschied: Anzahl) | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100% |
| strukturiert (Gleichheit: Form + Anzahl; Unterschied: Farbig- | 38,1% | 78,9% | 72,7% | 80,0% | 66,2% |
| strukturiert (Gleichheit: Form; Unterschied: Anzahl) | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 93,3% | 98,7% |
| strukturiert (Unterschied: Form; Unterschied: Anzahl) | 23,8% | 63,2% | 63,6% | 40,0% | 48,1% |
| ***Teil- Ganze Beziehung*** | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
| richtige Zerlegung auswählen: G = T1 + T2 + T3 ; | 95,2% | 94,7% | 81,8% | 86,7% | 89,6% |
| richtige Zerlegung auswählen: G = T1 + T2 | 81,0% | 89,5% | 81,8% | 86,7% | 84,4% |
| richtige Ganze auswählen: G = T1 + T2 + T3 …. | 61,9% | 68,4% | 68,2% | 73,3% | 67,5% |
| richtige Ganze auswählen: G = T1 + T2 | 81,0% | 73,7% | 77,3% | 86,7% | 79,2% |
| fehlende Teilmenge bestimmen: G = T1 + x <=> G - T1 = x | 33,3% | 68,4% | 54,5% | 73,3% | 55,8% |
| fehlende Teilmenge bestimmen: G - x = T2 <=> G - T2 = x | 28,6% | 68,4% | 59,1% | 60,0% | 53,2% |
| fehlende Teilmengen bestimmen (halbieren): G = x + y | 28,6% | 47,4% | 59,1% | 80,0% | 51,9% |
| ***Sachaufgaben im Zahlenraum bis 10*** | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
| Addition[1] (statisch) Wie viele Bärchen haben sie zusammen? | 61,9% | 84,2% | 81,8% | 73,3% | 75,3% |
| Addition[2] (dynamisch) Wie viele Bärchen hat Tom nun? | 38,1% | 73,7% | 63,6% | 53,3% | 57,1% |
| Subtraktion[1] Wie viele Bärchen hat Tom noch? 7–3=<u>x</u> | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |
| Subtraktion[2] Wie viele Bärchen hat Lisa danach noch? 6– | 42,9% | 57,9% | 63,6% | 60,0% | 55,8% |
| Add./Subtr. mit Ergänzen[1] „Wie viele Bärchen hat Lisa? 8=5+<u>x</u> | 47,6% | 84,2% | 68,2% | 73,3% | 67,5% |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Add./Subtr.[2] Vergleich Wie viele Bärchen hat Lisa mehr? | 9,5% | 36,8% | 27,3% | 40,0% | 27,3% |
| ***Sachaufgaben mit Zehnerüber-/-unterschreitung***[2] | **A** | **B** | **C** | **D** | **Ø** |
| Addition 6+8=<u>x</u> | 14,3% | 42,1% | 36,4% | 33,3% | 31,2% |
| Subtraktion 15–7=<u>x</u> | 14,3% | 15,8% | 4,5% | 6,7% | 10,4% |
| Mehrgl. Add./Subtr. Wie viele Fische hat Lisa weniger?14-<u>x</u>=9;9– | 0% | 10,5% | 0% | 6,7% | 3,9% |

**Tab. 1:** Kohortenspezifische Lösungshäufigkeit in %

**Legende:** [1]mit Material/mit Abzählmöglichkeit [2]ohne Material/ohne Abzählmöglichkeit

Kohorte A zeigt deutliche Divergenzen in den Lösungshäufigkeiten, die sich vermutlich auf sozioökonomische und soziokulturelle Milieuunterschiede zurückführen lassen. Äußerungen, die auf Defizite im sprachlichen Verständnis hindeuteten, wurden während der Befragungen aufgegriffen.

**L.:** *„Kuck mal, ich habe hier zwei Kisten. In welcher Kiste sind denn mehr Bälle?"*
**K.:** (zählt B. in Kiste A) *„1, 2, 3, 4, 5, 6 mehr"* (zählt B. Kiste B) *„1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, viele"*
**L.:** *„Und wo sind mehr Bälle?"*
**K.:** *„Hier."* (tippt mit flacher Hand auf falsche Kiste A mit 6 Bällen)
**L.:** *„Wieso sind da mehr Bälle?"*
**K.:** *„Weil, weil das ist, mehr Bälle sind."*
**L.:** *„O. k.! In welcher Kiste sind denn ganz, ganz viele Bälle?"*
**K.:** *„Die da."* (zeigt auf richtige Kiste B mit 8 Bällen)
**L.:** *„Und in welcher Kiste sind weniger Bälle?*
**K.:** „Die, das." (zeigt mit flacher Hand auf richtige Kiste A mit 6 Bällen)
**L.:** *„Und in welcher Kiste sind mehr Bälle?"*
***K.:*** (überlegt) *„Hier."* (zeigt auf die falsche Kiste A mit 6 Bällen)

Das Transkript zeigt die semantische Fehlvorstellung des Begriffs „mehr" eines Kindes mit nicht deutscher Muttersprache (Fehlvorstellung: „mehr" = „einige" und „viele" = „mehr") und die Auswirkungen auf den Sachverhalt.

## Ausblick

In Anbetracht fachdidaktischer Erkenntnisse ist anzunehmen, dass sich Kinder im Umgang mit Wendestäben von Zählstrategien lösen können. Eins–zu–Eins–Zuordnungen von Würfelmengen zu den entsprechenden Mengenrepräsentanten fördern das Invarianzverständnis. Zudem unterstützt die Materialkonzeption die Sicht auf die strukturierten Zahlenbilder. Darauf aufbauend lassen sich die Beziehungen einer jeden Zahl zu sich selbst und anderen (größer/kleiner/gleich, Doppelte/Hälfte, gerade/ungerade, Zerlegungen) entdecken und sichtbar herausarbeiten. Am Zwanzigerfeld sind Darstellungen von Additions– und Subtraktionsaufgaben ohne erzwungenes Zählen möglich. Dabei können alle Strategien der Zehnerüber–/–unterschreitung, sogar das komplexe Teilschrittverfahren, verstehend entdeckt werden.

## Literatur

Die Literatur kann bei der Autorin angefragt werden.

Frank FEUDEL, Paderborn

# Die Ableitung als absolute Änderung? – Unterschiedliches Begriffsverständnis in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

In der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler spielt der Ableitungsbegriff eine zentrale Rolle, z.B. beim Konzept der Grenzkosten. Das Verständnis des Konzepts in den Wirtschaftswissenschaften unterscheidet sich jedoch vom Verständnis der Ableitung in der Mathematik. In diesem Beitrag wird am Beispiel der Grenzkosten als wesentliche Anwendung der Ableitung in den Wirtschaftswissenschaften analysiert, worin dieser Unterschied besteht und wie in ausgewählten verbreiteten wirtschaftswissenschaftlichen Fachbüchern mit dem Grenzkostenkonzept umgegangen wird. Weiterhin wird darstellt, was Studierende am Ende eines Kurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" für eine verständige Anwendung der Ableitung beim Grenzkostenkonzept wissen sollten. Außerdem wird anhand von Ergebnissen eines Vortests dargestellt, welches Vorwissen die Studienanfänger im Hinblick auf intendierte Wissen mitbringen.

## Die Problematik der doppelten Definition des Begriffs „Grenzkosten" in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Der Begriff der Grenzkosten wird in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften in der Regel unterschiedlich definiert. Deshalb werden im Folgenden zwei verschiedene symbolische Schreibweisen verwendet ($GK_M$ und $GK_W$). In der Mathematik bzw. Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler werden die Grenzkosten als Ableitung einer Kostenfunktion $K: [0; \infty[ \longrightarrow [0; \infty[$ definiert:

$$GK_M(x) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{K(x+h)-K(x)}{h} \text{ (falls er existiert)}$$

Die Grenzkosten sind also die Änderungsrate der Kosten. Ihre zugehörige Einheit ist Euro pro Mengeneinheit, wenn die Ausbringungsmenge in Mengeneinheiten und die Kosten in Euro angegeben werden. In der Ökonomie werden die Grenzkosten häufig wie folgt definiert: „Die Grenzkosten sind die Erhöhung der Kosten, die sich aus der Erhöhung des Outputs um eine zusätzliche Einheit ergibt." (Pindyck & Rubinfeld, 2005, S.301). Als Formel wäre dies $GK_W(x) \coloneqq K(x+1) - K(x)$. Die Grenzkosten sind hier eine absolute Änderung (Einheit: Euro) und keine Rate im Sinne von Thompson (1994, S.18). Beide Objekte hängen aber mathematisch miteinander zusammen, nämlich durch die Approximationsformel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$, die sich aus der Definition der Ableitung als

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt. Da $h = 1$ klein in der Ökonomie ist, sind die numerischen Werte von $GK_M(x)$ und $GK_W(x)$ oft annähernd gleich.

Beide hier genannten Sichtweisen auf die Grenzkosten haben in der Ökonomie ihre Berechtigung. Die Definition der Grenzkosten als Mehrkosten für eine zusätzliche Einheit bildet eine gute anschauliche Basis für das Konzept, weil Mengeneinheiten in der Ökonomie häufig diskret sind. Andererseits ist es aus ökonomischer Sicht praktisch, für die Modellierung wirtschaftswissenschaftlicher Phänomene auf $[0; \infty)$ definierte, glatte Funktionen zu verwenden, da dann viele zusätzliche mathematische Werkzeuge, wie z.B. der Ableitungsbegriff, verwendet werden können. Bei der Arbeit im mathematischen Modell erweist sich dann die Verwendung der Ableitung als Grenzkosten als praktikabel. Bei der Rückinterpretation in die Realität erfolgt dann im Falle diskreter Einheiten wieder eine Interpretation der Ableitung als Mehrkosten für die nächste Einheit.

**Umgang mit dem Grenzkostenkonzept in ausgewählten wirtschaftswissenschaftlichen Fachbüchern**

Die Behandlung des Grenzkostenkonzepts in der wirtschaftswissenschaftlichen Fachliteratur ist uneinheitlich. Es werden kurz unterschiedliche Umgangsweisen in 5 ausgewählten, weit verbreiteten Lehrbüchern vorgestellt.

In dem eben zitierten Lehrbuch von Pindyck und Rubinfeld (2005) wird relativ konsistent das Konzept der Grenzkosten als Zusatzkosten für die nächste Einheit verwendet wird (auch bei Berechnungen). Allerdings werden hier die Einheiten von absoluter Änderung und Änderungsrate miteinander vermischt (Verwendung von „Euro pro Mengeneinheit“ in einer Tabelle mit Berechnungen, aber von „Euro“ im Text (S.301-302)).

Es gibt auch Lehrbücher, in denen auf eine Unterscheidung zwischen der Änderungsrate und der absoluten Änderung Wert gelegt wird. Im Lehrbuch „Grundzüge der Mikroökonomik“ von Varian (2007) werden die Grenzkosten als Kostenänderung pro Mengeneinheit eingeführt, wobei eine Unterscheidung zwischen Änderungsrate und absoluter Änderung explizit hervorgehoben wird (S.437).

Daneben gibt es auch wirtschaftswissenschaftliche Lehrbücher, in denen die Grenzkosten als Ableitung $K'(x)$ definiert werden (Einheit: Geldeinheiten pro Mengeneinheit) und als Mehrkosten für eine zusätzliche Einheit interpretiert werden (Schierenbeck, Wöhle, 2008, S.269-270).

In dem sehr gängigen Lehrbuch „Einführung in die Betriebswirtschaftslehre“ von Wöhe (2011) erfolgt eine Mischung der beiden Sichtweisen ohne weitere Erlärungen. Die Grenzkosten werden als Zusatzkosten der letzten Produktionseinheit definiert (S.311). Danach wird passend dazu erklärt, dass sich die Grenzkosten der 33.Produktionseinheit ermitteln lassen, indem man $K(33) - K(32)$ rechnet. Im folgenden Satz wird dann allerdings ohne weitere Erklärung behauptet, dass die Grenzkosten die Steigung der Kostenfunktion angeben und mit der ersten Ableitung berechnet werden.

Eine Vermischung erfolgt auch in dem Lehrbuch „Mikroökonomie" von Stiglitz und Walsh (2010). Hier werden die Grenzkosten als Mehrkosten für die nächste Einheit eingeführt (S.51). Die verwendete Einheit ist Dollar. Der Zusammenhang zur Ableitung soll später (S.163) durch zwei nebeneinanderstehende Grafiken verdeutlicht werden, die aber widersprüchlich sind: in die erste sind die Grenzkosten als absolute Kostendifferenz, in die zweite sind sie als Steigung der Tangente an dieselbe Kostenfunktion eingezeichnet, wobei neben der Tangente zusätzlich die Gleichung „Steigung der Kostenfunktion=$\Delta C / \Delta Q$" (Q ist der Output) zu finden ist.

Insgesamt zeigen die Analysen, dass die Verwendung des Grenzkostenbegriffs in der wirtschaftswissenschaftlichen Fachliteratur nicht einheitlich ist. Oft kommt es sogar zu einer Vermischung von Ableitung und absoluter Änderung ohne ausreichende Erklärungen, was Verwirrung stiften kann. Daher sollte der Zusammenhang zwischen Ableitung und Mehrkosten für eine zusätzliche Einheit in der Mathematikausbildung thematisiert werden.

## Intendiertes Wissen der Studierenden über das Grenzkostenkonzept

Die Studierenden sollten wissen, dass die Ableitung einer Kostenfunktion $K$ und die Mehrkosten für eine zusätzliche Einheit mathematisch verschiedene Objekte sind, die aber über die Formel $K(x+h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$ für $h \approx 0$ miteinander zusammenhängen. Da $h = 1$ klein in der Ökonomie ist, sind die numerischen Werte von Ableitung und Zusatzkosten für die nächste Einheit oft annähernd gleich, was eine simultane Verwendung beider Sichtweisen auf die Grenzkosten legitimiert. Um die Näherungsformel begründen zu können, müssen die Studierenden die Verbindung zwischen Ableitung und Differenzenquotient über den Grenzprozess kennen und die Ableitung als Approximation für den Differenzenquotienten verwenden. Insbesondere genügt ein Pseudo-Objekt Verständnis (d.h. kein Bewusstsein über den Grenzprozesses, der zur Ableitung führt) nicht (Zandieh, 2000).

## Ergebnisse eines Vortests zur Verbindung zwischen der Ableitung und dem Differenzenquotienten

In einem Vortest der Studienanfänger (Vorkurs 2013) wurden diese aufgefordert, eine Definition der Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer

Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ anzugeben. Es ergaben sich folgende Antwortkategorien:

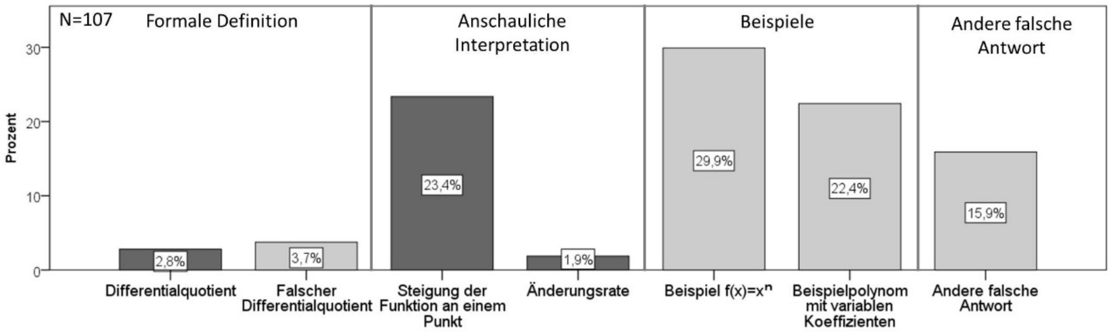



**Abbildung 1:** Antwortverteilung der Studierenden bei der Aufgabe zur Angabe einer Definition der Ableitung, dunkelgrau=„richtige Antwort“, hellgrau=„falsche Antwort“

Aus den Antworten kann man zwei Resultate ablesen. Zum einen wissen die Studierenden nicht, was eine Definition ausmacht. Sie verwechseln sie mit Beispielen, die einen gewissen Allgemeinheitsgrad aufweisen. Zum anderen assoziieren die Studierenden die Ableitung nur selten mit dem Differenzenquotienten, aber auch sehr selten mit der Änderungsrate.

## Ausblick auf weitere empirische Untersuchungen

In einem problemzentrierten Interview sowie durch Analysen von Hausaufgaben und einer Klausuraufgabe soll herausgefunden werden, in wieweit die Studierenden das oben genannte intendierte Wissen am Ende des Kurses „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn erworben haben.

## Literatur

Pindyck, R., Rubinfeld, D. (2005). *Mikroökonomie*. 6.Aufl., Pearson

Schierenbeck H, Wöhle C. (2008): *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*. 17. Aufl., Oldenbourg

Stieglitz, J. E., Walsh, C. E. (2010). *Mikroökonomie*. Band 1, 4.Aufl., Oldenbourg

Thompson, P.W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In: Harel, G., Confrey, J.: *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, NY: SUNY Press, 179-234

Tietze J. (2006). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik.* 13.Aufl., Vieweg

Varian H. (2007). *Grundzüge der Mikroökonomik*. 7.Auflage, Oldenbourg

Wöhe, G. (2008). *Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre*. 23.Aufl., Vahlen

Zandieh M. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. In: Dubinsky, E., Schoenfeld, A., Kaput, J.: *Research in Collegiate Mathematics Education, IV, Issues in Mathematics Education Bd.8.*, RI: American Mathematical Society, 103-127

Sebastian FRICKE, Bielefeld

# Zum Potenzial fachdidaktischen Coachings für Erziehende in Kindertageseinrichtungen

Im Rahmen des Dissertationsprojektes EmMa (ErzieherInnen machen Mathe) werden zwei verschiedene Fortbildungsformate für Erziehende in Kindertageseinrichtungen genauer untersucht. Fokussiert wird dabei zum einen auf ein vielfach angewandtes Fortbildungsformat, bestehend aus vier aufeinander aufbauenden Fortbildungsterminen und zum anderen die gleiche Fortbildung mit einem fachdidaktischen Coaching (Fricke 2014). Im Folgenden geht es genauer um das Potenzial fachdidaktischen Coachings als Fortbildungsformat für Pädagoginnen und Pädagogen in Kindertageseinrichtungen. Um mögliche Chancen aufzuzeigen, wird die Coaching-Sequenz einer Erzieherin aus dem vorliegenden Projekt analysiert.

## Konzeptioneller Rahmen

Konzeptioneller Rahmen des Dissertationsprojektes und damit auch des fachdidaktischen Coachings ist der Ansatz früher mathematischer Bildung in natürlichen Lernsituationen (Gasteiger 2010, 2014). Kernidee dieses Ansatzes ist die reflektierte Nutzung und Initiierung natürlicher mathematischer Lerngelegenheiten in Spielen oder Alltagssituationen (Abb. 1).

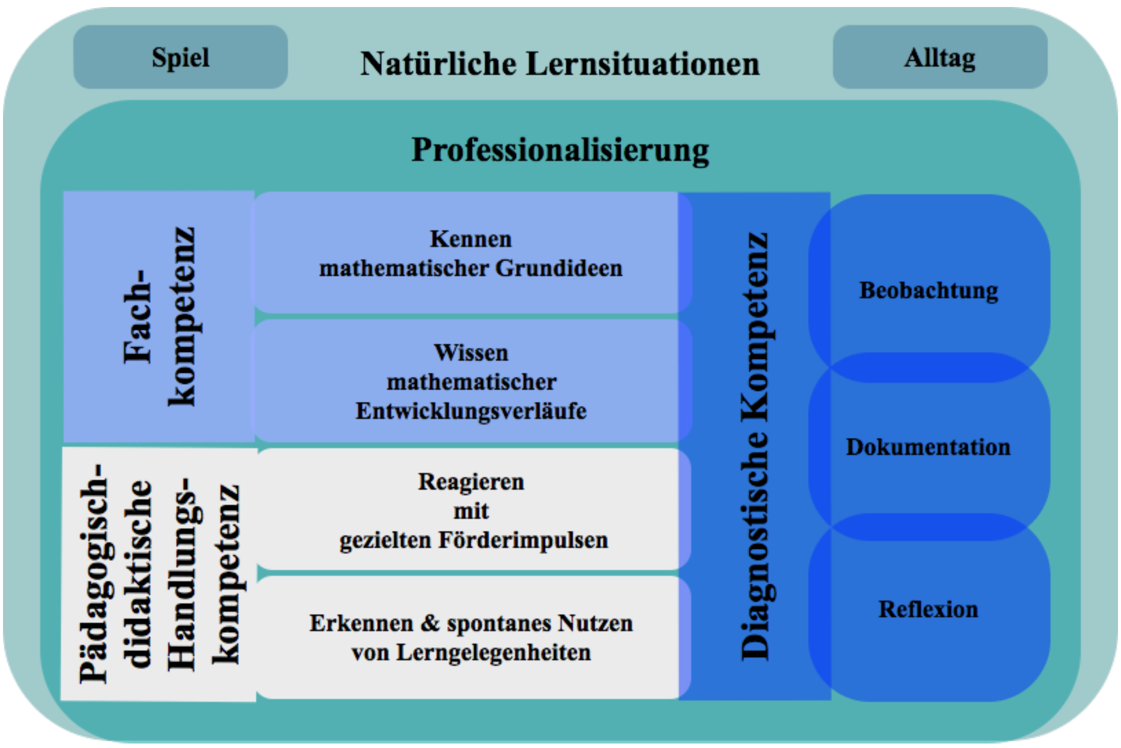



**Abb. 1:** Frühe mathematische Bildung in natürlichen Lernsituationen (vgl. Gasteiger 2010, 2014

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Um das Potenzial dieser Situationen aber zu erkennen und gezielt ausschöpfen zu können, bedarf es Fachkompetenz, pädagogisch-didaktischer Handlungskompetenz und diagnostische Kompetenz. Fachkompetenz als ein Bedingungsfaktor zur Gestaltung reichhaltiger Situationen meint einerseits das Kennen mathematischer Grundideen und Begriffe (z.B. korrekte Bezeichnungen für Formen) und andererseits das Wissen um relevante Entwicklungsverläufe (z.B. die Entwicklung der Zahlwortreihe oder der Raumvorstellung). Unter pädagogisch-didaktischer Handlungskompetenz ist die Verzahnung der Wissens- und Handlungskomponente zu verstehen. Auf der Basis der Fachkompetenz müssen Situationen im Spiel oder Alltag als potenziell mathematisch erkannt und genutzt werden. Das bedeutet aber auch, dass gezielte Förderangebote im Alltag initiiert werden. Ein wichtiges Verbindungselement beider Kompetenzbereiche stellt die diagnostische Kompetenz dar. Grundlage dieser ist auch wieder die Fachkompetenz. Die Basis diagnostischer Kompetenz ist, die Fähigkeiten der Kinder zielgerichtet zu beobachten, im Hinblick auf das zugrunde liegende Modell zu reflektieren und zu dokumentieren. Um passgenaue Impulse im Alltag zu geben oder angemessene Förderangebote zu gestalten, sind diese Beobachtungen wiederum die Entscheidungsgrundlage auf der Handlungsebene (vgl. Gasteiger 2010, 2014).

**Methodischer Rahmen des fachdidaktischen Coachings**

Primäre Ziele des fachdidaktischen Coachings sind eine Verbesserung der pädagogisch-didaktischen Handlungskompetenz bei den Erziehenden und eine individuelle Vertiefung der Fortbildungsinhalte, also eine Verbesserung der Fachkompetenz. Beides geschieht in von ihnen selbst ausgewählten Schwerpunkten, verteilt auf vier Coaching-Sitzungen. Jede Sitzung hat einen Umfang von ca. eineinhalb Stunden und besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird zunächst ein von der gecoachten Person geplantes Angebot und eine Situation im Freispiel vom Coach beobachtet. Diese Situationen haben einen Umfang von ca. 30 Minuten und werden im zweiten Teil dann gemeinsam reflektiert. Die Gespräche werden zur späteren Analyse jeweils aufgenommen.

**Potenzialanalyse des fachdidaktischen Coachings eines Erziehenden**

Um den möglichen Mehrwert des fachdidaktischen Coachings im Rahmen von EmMa genauer zu untersuchen, wurden die Reflexionsgespräche eines Erziehenden im Rahmen einer Masterarbeit (Mertens 2015) analysiert. Die aufgezeichneten Gespräche wurden dazu transkribiert. Es folgte eine deduktive Kategorienbildung hinsichtlich des Ansatzes früher mathematischer Bildung in natürlichen Lernsituationen (Abb.1) und eine qualitative

Analyse und Codierung der transkribierten Gespräche. Die Codes wurden dann, für einen ersten Zugang, quantitativ gedeutet. Da die gebildeten Kategorien nicht trennscharf formuliert wurden, werden im Folgenden eigene gröbere, aber trennschärfere Oberkategorien verwendet. Differenziert wird in Diagnostik, pädagogisch-didaktische Handlungskompetenz, Fachkompetenz, Beurteilungen des Coaches und Beurteilungen des Gecoachten. Jeder codierte Textteil wird dabei unabhängig von der realen Gesprächszeit, in dieser Auswertung gleich gewichtet.

## Ergebnisse

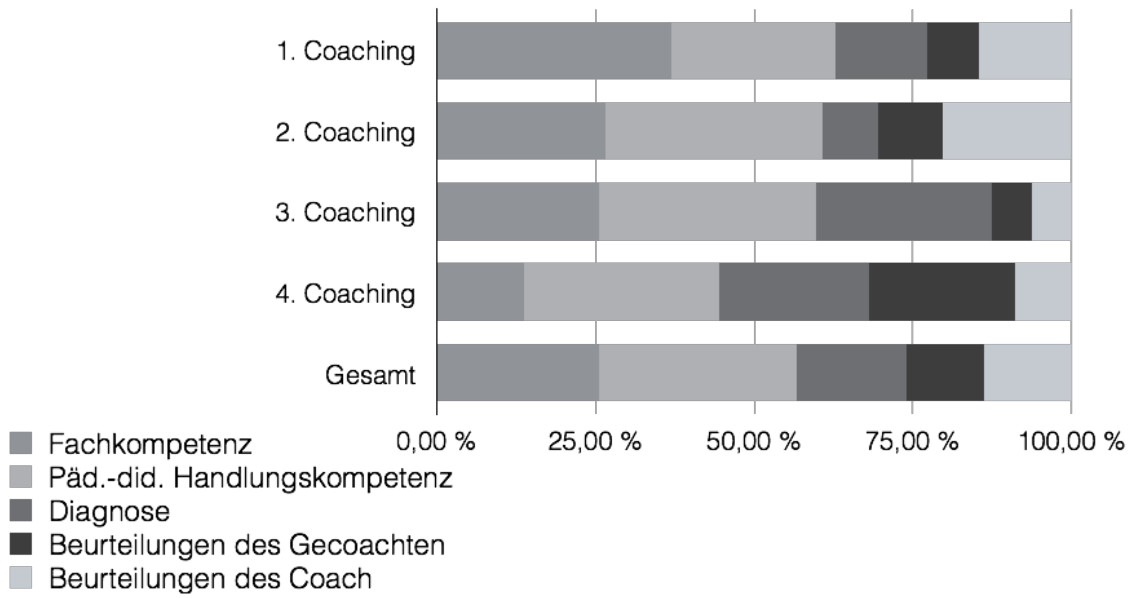



**Abb. 2:** Codierte prozentuale Gesprächsanteile der Coachingsequenz einer Erziehenden

Abbildung 2 zeigt die prozentualen Gesprächsanteile der Codes zu jedem Coaching und abschließend über alle vier Sitzungen gemittelt. Zunächst fällt auf, dass alle für den Professionalisierungsprozess notwendigen Kompetenzbereiche in jeder Sitzung mehr oder weniger, abgedeckt werden. Obwohl die Inhalte der beobachteten Situationen von den Erziehenden individuell ausgewählt werden können und es naheliegend erscheint, dass Gesprächsinhalte sich weniger auf der Ebene der Fachkompetenz bewegen, haben Inhalte die Fachwissen kennzeichnen, hier unabhängig von der Gesprächszeit, einen deutlichen Anteil an Codes. Während dieser Anteil im ersten Gespräch sogar größer ist als der Gesprächsanteil bzgl. pädagogisch-didaktischer Handlungskompetenz, nimmt er in den folgenden Sitzungen ab. Dies kann darauf hindeuten, dass es notwendig ist, zunächst eine gemeinsame fachliche Basis zu finden, auf der dann weitergearbeitet wird und weist außerdem auf die Notwendigkeit eines gewissen Grades an Fachkompetenz hin, um überhaupt praktisch handeln zu können. Der codierte inhaltliche Anteil hinsichtlich pädagogisch-didaktischer Handlungskompetenz ist in den Sitzungen, mit Ausnahme der ersten, konstant hoch. Interessant zu beobachten ist, dass die Codes „Diagnose“ und „Beurteilungen des Gecoachten“ im Gegensatz zu den „Beurteilungen des Coach“ im 3. und 4. Coaching deutlich zunehmen. Dies deutet darauf hin, dass das Reflexionsvermögen hinsichtlich der Einschätzung der Fähigkeiten der Kinder und der eigenen Praxis zunimmt.

## Fazit

Anhand dieser einen Coaching-Sequenz, bestehend aus vier Sitzungen, wird deutlich, dass im Rahmen des fachdidaktischen Coachings alle für den Professionalisierungsprozess notwendigen Komponenten zu einem nicht zu vernachlässigen Anteil mit den Erziehenden thematisiert werden können. Die Ergebnisse deuten ebenfalls darauf hin, dass auch in kurzer Zeit das Reflexionsvermögen der Erziehenden steigen kann und Fachwissen stärker mit der Handlungspraxis vernetzt wird.

## Ausblick

Die hier vorgestellten Ergebnisse beziehen sich nur auf die Coaching-Sequenz eines Erziehenden und weisen damit einen eher explorativen Charakter auf. Es ist geplant, die Reflexionsgespräche aller Erziehenden genauer zu analysieren und das Codesystem zu verfeinern, um genauere Aussagen treffen zu können. Dabei soll der zeitliche Faktor dann ebenfalls berücksichtigt werden.

## Literatur

Fricke, S. (2014). EmMa – ErzieherInnen machen Mathe. In: J. Roth, & J. Ames (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. (S. 377-380). Münster: WTM-Verlag.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes*. Münster: Waxmann.

Gasteiger, H. (2014). Professionalization of Early Childhood Educators with a Focus on Natural Learning Situations and Individual Development of Mathematical Competencies. In U. Kortenkamp et al. (Eds.). *Early Mathematics Learning*. (pp. 275-290). New York: Springer.

Mertens, N. (2015). Eine Untersuchung zum möglichen Mehrwert fachdidaktischen Coachings am Beispiel EmMa bei mathematischen Fortbildungen für Erziehende in Kindertageseinrichtungen. Unveröffentlichte Masterarbeit: Universität Bielefeld.

Hanna GÄRTNER, Matthias LUDWIG, Frankfurt

# Zeichnen im Mathematikunterricht

Die Kompetenz „mathematische Darstellungen verwenden“ ist mittlerweile fest in den Bildungsstandards verankert. Hierzu zählen sowohl die einzelnen Darstellungsformen auszuwählen und anzuwenden als auch Beziehungen zwischen ihnen zu erkennen und zwischen ihnen zu wechseln. Dieser Wechsel ist auch im Mathematikunterricht wichtig, Hohn (2012) hat beispielsweise nachgewiesen, dass sich ein flexibler Darstellungswechsel positiv auf das mathematische Problemlösen auswirkt. Legt man den Fokus auf ikonische Darstellungen, so ist ein Grundbestandteil dieser Darstellungsform im Mathematikunterricht das Zeichnen. Im Geometrieunterricht ist das sofort einleuchtend, aber auch beim Erstellen von Funktionsgraphen oder von Baumdiagrammen wird gezeichnet. Zeichnungen entstehen dabei zum einen mit Stift und Papier, zum anderen auch mit Kreide an der Tafel, manchmal mit dem Computer. Van Essen und Hamaker (1990), die das Anfertigen von Zeichnungen mit Stift und Papier beim Lösen von Textaufgaben untersucht haben, fanden heraus, dass bei Fünftklässlern Zeichnungen bzw. Zeichenübungen einen positiven Einfluss auf die Mathematikleistung haben. Wie viel sollte also im Mathematikunterricht gezeichnet werden? Um zunächst Einblicke zu erhalten, wie viele Zeichnungen von Lernenden selbst angefertigt werden, wurde mittels einer Pilotstudie eine Bestandsaufnahme erstellt, wie viele Zeichnungen in den Heften von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I innerhalb eines Schuljahres vorkommen.

## Design der ZiM-Studie

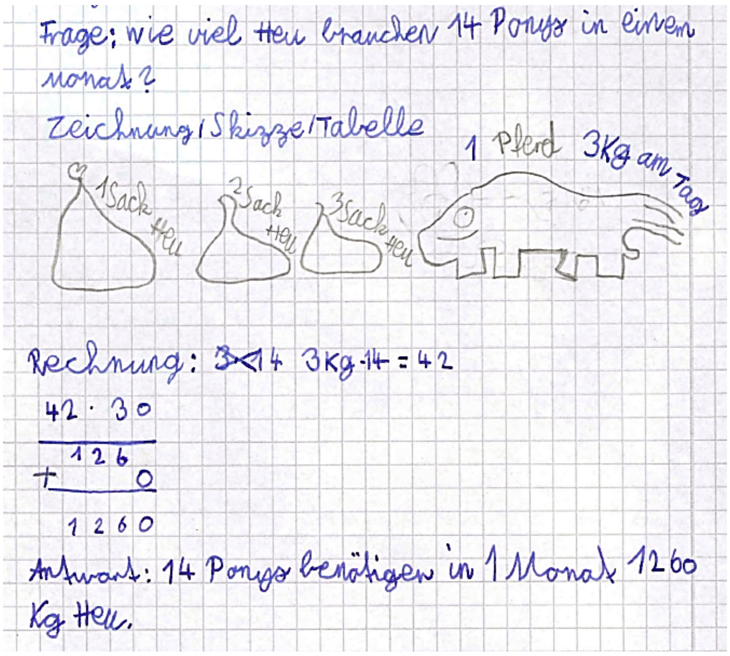
Die Pilotstudie ZiM (Zeichnungen in Mathematikheften) wurde im Herbst 2014 an 5 Regelschulen im Raum Frankfurt durchgeführt, bei der Hefte von Schülerinnen und Schülern von insgesamt zwanzig Klassen der Jahrgangsstufen 5 bis 9 untersucht wurden. Es wurde erhoben, welche Themen in den Heften der Schülerinnen und Schüler behandelt wurden, welchen Leitideen diese zuzuordnen waren und wie viele Zeichnungen zu den einzelnen Themen vorkamen. Als Zeichnung wurde hier jede selbstangefertigte, ikonische Darstellung verstanden, also neben obligatorischen Zeichnungen aus dem Bereich der Geometrie auch Funktionsgraphen oder Strukturskizzen wie Baumdiagramme. Eine freihändig erstellte Skizze wurde genauso gezählt wie eine Zirkel- und Linealkonstruktion.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Ergebnisse der Pilotstudie

Es lässt sich feststellen, dass Hefte innerhalb einer Klasse eine homogene Anzahl an Zeichnungen aufweisen. Kleinere Unterschiede lassen sich mit dem Fehlen eines Lernenden in der jeweiligen Schulstunde erklären, in der die Zeichnung entstand. Da die Anzahlen und Anfertigungszeitpunkte so ähnlich sind, liegt die Vermutung nahe, dass die Zeichnungen nicht aus eigener Motivation der Lernenden entstanden, sondern nach Aufforderung der Lehrperson oder durch Vorgabe aus dem Aufgabentext angefertigt wurden. Als Beispiel für eine starke Aufforderung durch eine Lehrkraft sei eine fünfte Klasse angegeben, bei der die Lehrerin Textaufgaben nicht nach dem Schema Frage-Rechnung-Antwort bearbeiten ließ, sondern dieses Schema auf Frage- Zeichnung/Skizze/Tabelle-Rechnung-Antwort (vgl. Abb. 1) erweiterte.

**Abb. 1:** Bearbeitung einer Textaufgabe nach dem Schema Frage-Zeichnung/Skizze/Tabelle-Rechnung-Antwort

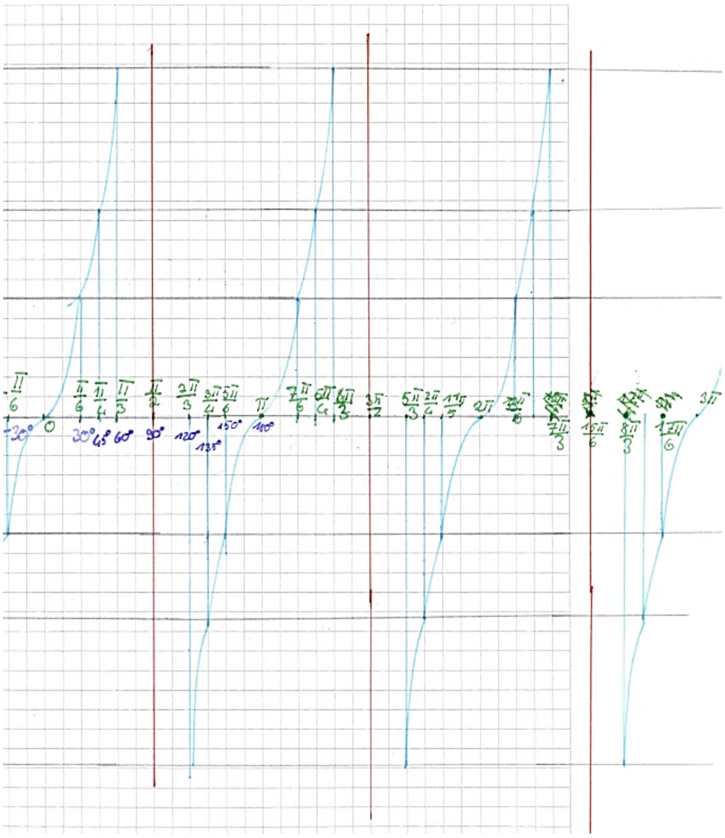



Vergleicht man dagegen die verschiedenen Klassen einer Jahrgangsstufe miteinander, variiert die Anzahl der Zeichnungen sehr stark. So fanden wir beispielsweise eine Klasse der fünften Jahrgangsstufe, bei der innerhalb eines Schuljahres keine einzige Zeichnung in den Heften der Schülerinnen und Schüler auftauchte. In einer anderen fünften Klasse dagegen wurden über 30 Zeichnungen bezogen auf ein Schuljahr gezählt. Dieser Befund der äußerst heterogenen Anzahlen an Zeichnungen trifft auf alle untersuchten Klassenstufen zu. Vergleicht man zudem nicht einzelne Klassen innerhalb einer Jahrgangsstufe sondern die Jahrgangsstufen untereinander, so fällt auf, dass hier die Höchstzahl der vorkommenden Zeichnungen ebenfalls stark variiert. Die höchste Anzahl an Zeichnungen in der siebten Jahrgangsstufe beträgt beispielsweise 16, in der achten Jahrgangsstufe wurden dagegen 48 Zeichnungen über ein Schuljahr als Maximalanzahl gezählt. Die Leitideen „Raum und Form“ und „Größen und Messen“ nehmen in dieser Klasse einen sehr großen Raum ein. Das sind genau die beiden Leitideen, denen erwartungsgemäß die höchste Anzahl an Zeichnungen zugeschrieben werden können. In den siebten Klassen dagegen wurden Themen dieser Leitideen viel weniger umfangreich behandelt, was vergleichsweise weniger Zeichnungen als in den achten Jahrgangsstufen erklärt. Die Schwankungen sprechen dafür, dass die einzelne Lehrkraft starken Einfluss auf die Häufigkeit des Anfertigens von Zeichnungen hat.

## Hypothesen

Die Beobachtungen der Studie lassen sich durch folgende mögliche Ursachen erklären. Zunächst setzt sich die eingangs angesprochene Kompetenz „Darstellungen verwenden“ bezogen auf den Mathematikunterricht aus verschiedenen Darstellungsformen und dem Wechsel dazwischen zusammen. Das Zeichnen an sich bildet dabei nur einen kleinen Bruchteil der ikonischen Darstellungen, werden doch die meisten ikonischen Darstellungen mit digitalen Werkzeugen erstellt, wie in Schulbüchern zu beobachten ist. Das Selbst-Zeichnen zwecks Visualisierung ist dann nicht mehr notwendig, weil Figuren, Situationen oder Sachverhalte bereits im Buch abgedruckt und somit für jeden Lernenden veranschaulicht sind.

**Abb. 2** Graph der Tangensfunktion, Schülerin der Klasse 9



Greift man auf vorgefertigte Materialien zurück, so ergibt sich eine Zeitersparnis gegenüber selbstangefertigten Zeichnungen. Außerdem sind sie hilfreich für Lehrerinnen und Lehrer, die selbst unsicher im Zeichnen sind. Aufgaben zum Freihandzeichnen finden sich selten in Schulbüchern; generell ist zu beobachten, dass in Aufgabenstellungen zwar zum Zeichnen, jedoch ohne konkrete Anleitung aufgefordert wird. Wenn solche Aufgaben an die Lernenden gestellt werden, sollten die Lehrpersonen selbst in der Lage sein, solche (Freihand-) Zeichnungen anzufertigen. Sind diese unsicher im Zeichnen, kann es sein, dass Zeichenaufgaben übersprungen werden. Neben dem Zeichnen an sich sollte aber gerade auch das Freihandzeichnen im Unterricht geübt werden, was an einem Beispiel der Tangensfunktion deutlich wird (Abb. 2). Die Schülerin hat erkannt, dass die einzelnen Punkte nicht mit dem Geodreieck verbunden werden können und benutzt stattdessen ein Parabellineal. Hätte sie dagegen eine Kurve freihändig durch die Punkte gelegt, wäre nicht nur ein geschmeidigerer Graph entstanden. Sie hätte zudem direkt die Steigung der Tangensfunktion erfahren bzw. erfühlen können, die zur Nullstelle immer geringer wird und sich danach wieder vergrößert. Das Zeichnen ohne Hilfsmittel wie Lineal und Co. kann ein Erkennen ermöglichen, das durch die Konzentration auf die Hilfsmittel teilweise verloren geht. Es stellt sich also die Frage, welchen Einfluss die Werkzeuge auf den Verstehensprozess einer Aufgabe bzw. deren Lösungserfolg haben. Eine Zeichnung kann zur Darstellung der Aufgabe, der Lösung oder im Löseprozess selbst angefertigt werden. Je nachdem, wann die Zeichnung „falsch“ oder unvollständig ist: Lässt dieser Zustand auf Verständnis- oder Wissenslücken des Lernenden schließen? Eignen sich entstandene Zeichnungen also eventuell als Diagnosewerkzeug? Die oben angesprochene Studie von Van Essen und Hamaker ist von 1990. Existiert ein Zusammenhang zwischen dem Anfertigen von Zeichnungen und der Mathematikleistung überhaupt auch heute noch? Kann dieser Zusammenhang auch bei anderen Aufgaben als Textaufgaben festgestellt werden? Wenn das Anfertigen einer Zeichnung als gewinnbringend erkannt wird, wird diese Strategie auch selbst gewählt oder wird trotzdem nur nach Aufforderung gezeichnet?

## Ausblick

Zur Klärung der beschriebenen Fragestellungen und aufgestellten Hypothesen ist eine Interventionsstudie im Pre-/Post-Design mit abschließendem Followup-Test geplant, wobei von uns angeleitet festgelegte Zeichenübungen in den Unterricht integriert werden. Es soll der Frage nachgegangen werden, ob sich die Ausweitung der Integration von Freihandzeichnungen in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe lohnt.

## Literatur

Hohn, K. (2012). *Gegeben, gesucht, Lösung? Selbstgenerierte Repräsentationen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben.* Dissertation. Universität Koblenz-Landau, Landau. Fachbereich Psychologie. Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83 (6)*, 301–312.

Marleen HEID, Lüneburg

# Strategien von Grundschulkindern beim Schätzen von visuell wahrnehmbaren Größen

Über die Schätzfähigkeiten von Grundschulkindern ist im deutschsprachigen Raum bisher wenig bekannt. Empirische Studien aus dem angloamerikanischen Raum zeigen, dass das Schätzen von Größen eine hohe Anforderung an Schülerinnen und Schüler stellt (Jones et al. 2012; Swan/Jones 1980). In einer qualitativen Studie wird deshalb der mentale Prozess des Schätzens genauer untersucht. Der vorliegende Beitrag fokussiert die analytischen Strategien beim Schätzen visuell wahrnehmbarer Größen. Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Strategieeinsatz zwischen den Größenbereichen Länge und Fassungsvermögen werden dabei aufgezeigt.

## Theoretischer Hintergrund

Das Schätzen von Größen bezeichnet einen *mentalen Prozess*, bei dem das zu schätzende Objekt mit einer bekannten Größe verglichen wird. Der gedankliche Vergleich setzt dabei ein Wissen um eingeprägte Repräsentanten, sogenanntes Stützpunktwissen, voraus (vgl. Greefrath/Leuders 2009). Der mentale Prozess des Schätzens grenzt sich somit von einer konkreten Messhandlung ab, dadurch dass kein dem Größenbereich entsprechendes Messinstrument zur Verfügung steht (Bright 1976).

Veröffentlichungen zum Strategieeinsatz beim Schätzen von Größen fokussieren das Schätzen von Längen (u.a. Hildreth 1983; Siegel et al. 1982; Joram 2005). Die empirischen Ergebnisse zeigen, dass Grundschulkinder häufig raten oder Begründungen nennen, die sich ausschließlich auf die visuelle Wahrnehmung beziehen: „Weil es so aussieht." (Siegel et al. 1982, S.220). Darüber hinaus setzen sie unterschiedliche *analytische Strategien* ein, um ein Schätzergebnis zu ermitteln. In den oben genannten Veröffentlichungen werden diese Strategien unterschiedlich benannt, inhaltlich lassen sich jedoch folgende Strategien in den Studien unterscheiden:

- *Unit iteration.* Eine Standardeinheit (cm, m) wird genutzt, um das zu schätzende Objekt damit auszumessen.
- *Reference point.* Eine Stützpunktvorstellung wird in Beziehung zum schätzenden Objekt gesetzt. Der Vergleich mit Stützpunkten korreliert dabei mit einer höheren Exaktheit in den Schätzergebnissen im Vergleich zu einer Verwendung von Standardeinheiten (Joram 2005, S.21).
- *Decomposition/recomposition.* Das zu schätzende Objekt wird zerlegt und die entsprechenden Unterabschnitte geschätzt. Die Teiler-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

gebnisse werden daraufhin additiv oder multiplikativ zusammengesetzt.

## Design der Studie

*Stichprobe.* An der Interviewstudie nahmen 47 Schülerinnen und Schüler des vierten Schuljahres aus fünf verschiedenen Klassen aus Niedersachsen und Schleswig-Holstein teil.

*Durchführung.* Die Schülerinnen und Schüler lösten in einem leifadengestützten Interview (15-20min) zwei analog zu einander aufgebaute Aufgabensets zum Schätzen von Längen und zum Schätzen von Fassungsvermögen. Um die Strategien zu erfassen, wurden die Probanden nach jedem genannten Schätzwert aufgefordert, ihren Lösungsprozess zu erklären.

*Aufgaben.* Das Aufgabendesign bestand jeweils aus drei unterschiedlichen Aufgabenblöcken mit jeweils 16 Aufgaben zu Längen und zum Fassungsvermögen. In Anlehnung an das theoretische Modell nach Bright (1979) wurden in *Aufgabenblock 1* verschiedene Objekte nacheinander auf den Tisch gestellt, deren Größe es zu schätzen galt. In *Aufgabenblock 2* wurden die Schülerinnen und Schüler nach der Größe physikalisch abwesender Objekte befragt. In *Aufgabenblock 3* ordneten sie Objekte vorgegebenen Größen zu.

*Auswertungsverfahren.* Die Erklärungen der Kinder wurden transkribiert und thematisch kodiert (vgl. Schmidt, Christiane 2010/Kuckartz 2005, S.83-91). Den ersten Schritt in der Auswertung stellte die Entwicklung von Kategorien dar, die auf dem theoretischen Hintergrund basierten. Die dargestellten Strategien beim Schätzen von Längen ließen sich diesbezüglich nutzen. Die entsprechenden Kategorien wurden durch die empirischen Daten ausdifferenziert und weiterentwickelt. In der Auswertung erfolgte eine Überprüfung der Übertragbarkeit der aus der Literatur bekannten Strategien auf die von den Schülerinnen und Schülern eingesetzten Lösungsstrategien beim Schätzen von Fassungsvermögen. Darüber hinaus auftauchende Lösungsstrategien wurden als solche gekennzeichnet und kategorisiert. Die entsprechenden Ergebnisse werden nachfolgend dargestellt.

## Ergebnisse

### *Strategien in beiden Größenbereichen*

Die auf den theoretischen Vorannahmen basierenden Kategorien bestätigten sich in beiden Größenbereichen. Die Schülerinnen und Schüler führten *Vergleiche mit Stützpunktvorstellungen* und *Einheiten* sowohl beim Schätzen von Längen als auch beim Schätzen von Fassungsvermögen durch. Dabei konnten *direkte* und *indirekte Vergleiche* unterschieden werden. Beruhte die Aussage der Schülerin oder des Schülers auf einer qualitativen Aussage (wie „ein bisschen länger als…“), wurde das zu schätzende Objekt direkt mit einem Stützpunkt oder einer Einheit verglichen. Wurde hingegen eine Einheit oder ein Stützpunkt entsprechend eines Messprozesses wiederholt an dem Objekt abgetragen, wurde dies als indirekter Vergleich kategorisiert. Konventionelle Messinstrumente (u.a. Lineal und Messbecher) wurden dabei besonders häufig als Stützpunkte eingesetzt.

Darüber hinaus fanden in beiden Größenbereichen *Zerlegungsstrategien* Verwendung. Dabei wurde jedoch deutlich, dass die in der Literatur beschriebene Strategie nicht ausreicht, um die Größe eines Objekts zu schätzen, da durch das Zergliedern des Objekts noch kein Schätzwert entsteht. In einem zweiten Schritt muss eine weitere Strategie eingesetzt werden, um ein entsprechendes Schätzergebnis zu ermitteln.

*Spezifische Strategien*

Die Schülerinnen und Schüler verwendeten im Größenbereich Länge besonders häufig *körpereigene Messinstrumente,* um das zu schätzende Objekt zu vergleichen. Neben der Fingerbreite, Hand- und Armspanne diente vermehrt die Schrittlänge als Stützpunktvorstellung. Neben direkten und indirekten Vergleichen auf der mentalen Ebene wurden diese in *konkreten Handlungen* zum Messen der Objekte eingesetzt. Da eine Schätzung als ein mentaler Prozess verstanden wird, entspricht dies in Bezug auf den theoretischen Hintergrund keiner Schätzstrategie. Eine differenzierte Betrachtung von Messhandlungen mit genormten und körpereigenen Messinstrumenten scheint jedoch notwendig zu sein, um den zugrunde liegenden Unterschied zwischen den beiden Handlungen zu verdeutlichen. So beruht das körpereigene Messinstrument auf einer Stützpunktvorstellung, welche manchmal mehr, manchmal weniger mit der realen Länge übereinstimmt, sodass – obwohl eine konkrete Handlung durchgeführt wird – charakteristische Merkmale eines Schätzprozesses deutlich werden.

In den Aufgaben zum Schätzen des Fassungsvermögens führten die Schülerinnen und Schüler *direkte mentale Vergleiche mit Gewichtsvorstellungen* durch. Auch dieses Vorgehen basiert zunächst auf einer konkreten Handlung, das angehobene Objekt wird daraufhin mit einer Gewichtsvorstellung mental in Beziehung gesetzt.

*Aufgabenspezifische Strategien in beiden Größenbereichen*

Über die aus der Theorie bekannten Strategien hinaus konnten Vorgehensweisen erkannt werden, die eng mit der jeweilige Aufgabenart zusammenhängen. Bei diesen beruhte der Vergleich nicht auf verankerten Stützpunkten, sondern auf einem mentalen Vergleich mit realen Objekten, deren

Größe in der Regel nicht bekannt war. In *Aufgabenblock 2* setzten die Schülerinnen und Schüler die zu schätzenden Objekten besonders häufig zu *realen Objekten* ins Verhältnis, um die physikalisch abwesenden Objekte zu veranschaulichen. In *Aufgabenblock 3* wurde das Schätzergebnis über den *Vergleich mit Objekt(teil)en innerhalb einer Aufgabe* vorgenommen.

## Ausblick

Die Kategorisierung der Strategien zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler vielfältige analytische Strategien einsetzen, um ein Schätzergebnis zu ermitteln. Im weiteren Forschungsprozess soll das entwickelte Kategoriesystem für die Auswertung dienen, um den Zusammenhang zwischen Schätzstrategie und der Exaktheit des Ergebnisses zu überprüfen. In einer vertiefenden Analyse von ausgewählten Fällen sollen über den quantitativen Überblick hinaus die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler mit dem mentalen Schätzprozess untersucht werden.

## Literatur


Bright, George W. (1976): Estimation as part of learning to measure. In: Doyal Nelson und Robert E. Reys (Hg.): *Measurement in school mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, S. 87–104.

Greefrath, Gilbert; Leuders, Timo (2009): Nicht von ungefähr. Runden-Schätzen-Nähern. In: *Praxis der Mathematik in der Schule 51 (28)*.

Hildreth, David J. (1983): The Use of Strategies in Estimating Measurements. In: *The Arithmetic Teacher 30 (5)*, S. 50–54.

Jones, M.Gail; Gardner, Grant E.; Taylor, Amy R.; Forrester, Jennifer H.; Andre, Thomas (2012): Students` Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units and Logical Thinking. In: *School Science and Mathematics* 112 (3), S. 171–178.

Joram, Elana; Gabriele, Anthony J.; Bertheau, Myrna; Gelman, Rochel; Subrahmanyam, Kaveri (2005): Children's Use of the Reference Point Strategy for Measurement Estimation. In: *Journal for Research in Mathematics Education 36 (1)*, S. 4–23.

Kuckartz, Udo (2007): *Einführung in die computergestützte Analyse qualitativer Daten.* 2. Aufl. Wiesbaden: VS, Verl. für Sozialwiss.

Schmidt, Christiane (2010): Auswertungstechniken für Leitfadeninterviews. In: *Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft.* 3. Aufl. Weinheim [u.a.]: Juventa-Verl, S. 473–486.

Siegel, Alexander W.; Goldsmith, Lynn T.; Madson, Camilla R. (1982): Skill in Estimation Problems of Extent and Numerosity. In: *Journal for Research in Mathematics Education 13 (3),* S. 211–232.

Swan, Malcolm; Jones, Orville E. (1980): Comparison of students' percepts of distance, weight, height, area, and temperature. In: *Sci. Ed. 64 (3)*, S. 297–307.

Ralf KAMPMANN, Bielefeld

# Projekt MUSE: Muster und Strukturen in der Schuleingangsphase erkunden

Inwieweit profitieren – insbesondere die schwächeren – Kinder in der Schuleingangsphase von der Förderung der Muster- und Strukturierungsfähigkeit? Ziel dieses Projekts im Schnittfeld von Forschung und Entwicklung ist die Konzeption und Erprobung von Aufgaben und Materialien zur Förderung von Muster- und Strukturierungsfähigkeiten im Rahmen des mathematischen Anfangsunterrichts. Vorgestellt werden das Konzept und erste Ergebnisse einer Interventionsstudie.

## Muster und Strukturen in den Bildungsstandards und Lehrplänen

2004 wurde der Inhaltsbereich *Muster und Strukturen* in den Kanon der landesweit gültigen Bildungsstandards aufgenommen – mit dem Auftrag an die Länder, diesen in die länderspezifischen Lehrpläne einzuarbeiten (KMK 2005). Nur drei Bundesländer (Hamburg, Niedersachsen und Saarland) haben *Muster und Strukturen* aktuell als eigenständigen Bereich ausgewiesen und entsprechend mit Kompetenzerwartungen ausgestattet. Die übrigen Länder verweisen auf den übergreifenden Aspekt von *Muster und Strukturen* und dass deshalb die Ausweisung eines eigenen inhaltsbezogenen Kompetenzbereiches nicht nötig sei. Als Beispiel hierfür der Lehrplan aus Bayern: „Der Gegenstandsbereich *Muster und Strukturen* bildet keinen eigenen Lernbereich, sondern ist aufgrund seiner übergreifenden Bedeutung in alle Lernbereiche integriert" (LehrplanPLUS - Grundschule - Mathematik - Fachprofile 2014). Ähnliche Aussagen sind in den weiteren Lehrplänen ohne explizite Ausweisung als inhaltsbezogene Kompetenz zu finden. Die Gefahr, wenn *Muster und Strukturen* „überall" verortet wird, ist, dass „Unterrichtsinhalte willkürlich werden und somit das Label Muster in Unterrichtswerken, Seminarveranstaltungen etc. verschwimmt" (Steinweg 2014, 62). Muster und Strukturen drohen nirgends wirklich verortet zu werden.

## Muster und Strukturen im Unterricht

In den Schulbüchern findet der Bereich *Muster und Strukturen* in unterschiedlicher Art und Weise seine Umsetzung – von gut aufbereitet bis praktisch nicht vorhanden.

> „Teilweise werden strukturierte Aufgabenserien unkommentiert angeboten und es bleibt der Lehrkraft oder den Schülerinnen und Schülern überlassen, Muster zur weiteren produktiven Arbeit im Unter-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

> richt zu nutzen. Teilweise verbleiben die Anforderungen auf der ersten Stufe, wenn ein Muster nur fortgesetzt, oder, als Variante, eine Störung des Musters erkannt und behoben werden soll […]“ (Link 2011, 16).

Gespräche mit KollegInnen und eigene Erfahrungen zeigen, dass diese Seiten in der Schulpraxis häufig nicht beachtet und überblättert werden. Falls sie es doch in den Unterricht schaffen, wird das Potential der Aufgaben selten ausgeschöpft. Hier ergeht es dem Thema *Muster und Strukturen* noch schlechter als geometrischen Themen. Dabei stellte Steinweg (2001, 262) fest, dass sich das Beschreiben von Zahlenmustern mit dem Alter nicht von selbst – etwa wegen zunehmender sprachlicher Kompetenzen – oder als Nebeneffekt des „normalen“ Mathematikunterrichts, entwickelt. Zudem müssen

> „Mustererkennungs- und Strukturierungsfähigkeiten […] keine festgelegte Größe sein. Weitere Forschung ist nötig, um zu evaluieren, ob nicht sogar gerade die Förderung dieser Fähigkeiten ein Stellrädchen zur Weiterentwicklung mathematischer Fähigkeiten insbesondere schwacher Kinder sein könnte.“ (Lüken 2012, 217).

Ferner stellen auch Peter-Koop & Grüßing (2011, 14) noch einen erheblichen Forschungsbedarf insbesondere in Bezug auf die Entwicklungsverläufe von Kompetenzen im Bereich *Muster und Strukturen* fest.

## Design der Studie

Welche Auswirkungen hat die Entwicklung der Muster- und Strukturierungsfähigkeit auf die arithmetischen Kompetenzen von Kindern in der Schuleingangsphase? Tritt bei allen Kindern eine messbare Veränderung ein oder nur bei einer bestimmten Gruppe? Zur Beantwortung dieser Forschungsfragen wurde zur Erfassung der arithmetischen Fähigkeiten der TEDI-MATH und hinsichtlich des Merkmals Intelligenz der SON-R 2 ½ -7 herangezogen. Diese wurden in der Pilotstudie, welche von Januar bis Juli 2014 im ersten Jahrgang einer Grundschule in Ostwestfalen lief, eingesetzt. Eine Klasse mit 25 Kindern diente dabei als Interventionsgruppe, eine zweite Klasse mit 26 Kindern als Kontrollgruppe. Beide Gruppen wurden von einem männlichen Mathematiklehrer nach dem identischen Lehrwerk (Zahlenbuch) unterrichtet. Es fanden 13 Interventionsstunden im Rahmen des regulären Mathematikunterrichtes statt, die Klasse hatte also keinen zusätzlichen Mathematikunterricht. Es fand maximal eine Intervention pro Woche statt. Durchgeführt wurden die Unterrichtsstunden von mir; die reguläre Lehrkraft war als Beobachter anwesend. Angelehnt an Lüken (2012, 29ff) wurde bei der Aufgabenauswahl darauf geachtet, dass geometrische und numerische Muster sich abwechseln, von unstrukturierten Mengen hin zum dekadischen System Entdeckungen gemacht werden können, Aufgaben gestellt werden, in denen die Kinder Muster und Strukturen erkennen, benutzen, beschreiben, begründen, sowie eigene erstellen.

## Ergebnisse

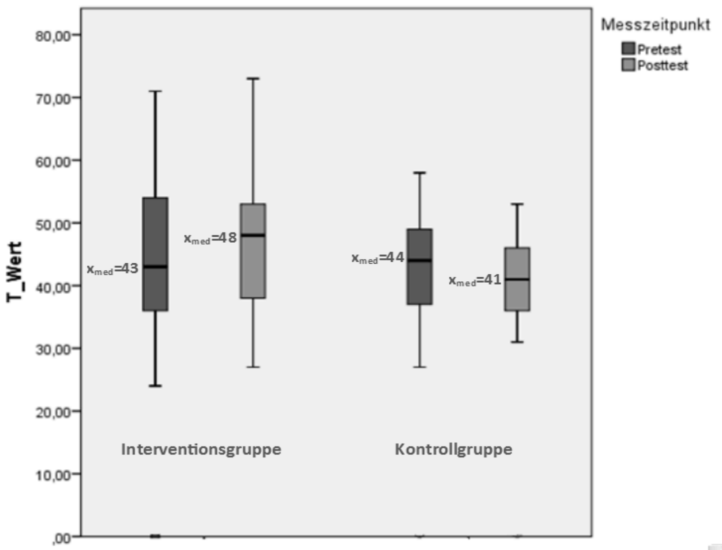



**Abbildung 1:** Arithmetische Leistungen (TEDI-MATH) in den Pre- und Posttests

Die Signifikanzprüfung der Pre-Tests ergaben, dass es sich zu Beginn der Intervention um vergleichbare Klassen handelte und es weder beim TEDI-MATH (p>0,05) noch beim SON-R 2 ½ -7 (p>0,05) signifikante Unterschiede gab. Beim Post-Test wiederum unterschieden sich die Gruppen nach der Intervention in den arithmetischen Leistungen signifikant (p<0,05) – die Kinder der Interventionsklasse erbrachten beim TEDI-MATH deutlich bessere Ergebnisse.

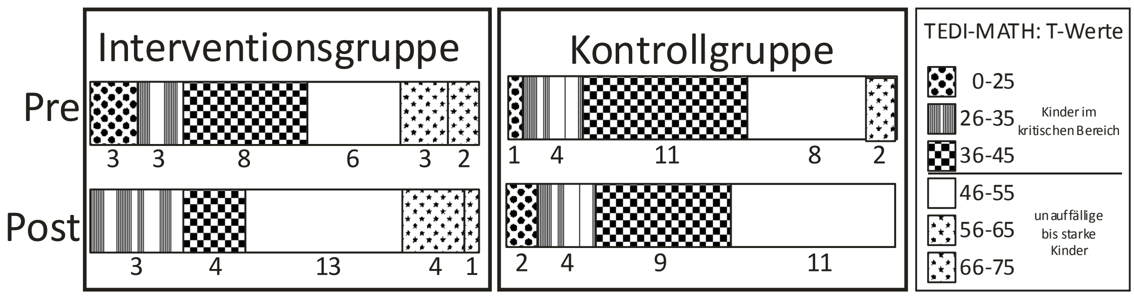



**Abbildung 2:** TEDI-MATH Ergebnisse eingeteilt in arithmetische Leistungen

Ausgewertet nach arithmetischen Leistungsgruppen ist festzustellen, dass im Pre-Test in der Interventionsgruppe 56%, nach der Intervention noch 28% der Kinder in kritischen Bereichen waren. In der Kontrollgruppe hat sich die Zahl jener Kinder von 61% auf 57% nur geringfügig verändert. Auffallend ist, dass insbesondere die schwachen Kinder anscheinend von der Intervention profitiert haben. In Abb. 2 wird ersichtlich, dass sich die Anzahl der Kinder im schwachen Bereich der Interventionsgruppe deutlich verringert hat.

## Fazit/Ausblick

Das explizite Thematisieren von *Muster und Strukturen* hat anscheinend eine stark positive Auswirkung auf die mathematischen Leistungen schwacher Kinder. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass ich als Entwickler der Aufgaben sie in Schulstunden durchgeführt und anschließend ausgewertet habe. Um die Ergebnisse der Pilotstudie bezüglich der Gruppengröße und der Objektivität auf breiter Basis zu bestätigen plane ich, Stundenbeispiele zu *Muster und Strukturen* zu entwerfen. Diese sollen in Grundschulen zum Einsatz kommen, auch um das Thema *Muster und Strukturen* vermehrt in den Mathematikunterricht zu implementieren. Denn es befindet sich – wie oben festgestellt – in allen Inhaltsbereichen.

## Literatur


*LehrplanPLUS - Grundschule - Mathematik - Fachprofile*. URL: http://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/grundschule/mathematik# [Stand 2015-02-25].

Link, Michael 2011. *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster*. Wiesbaden, Dortmund: Springer Spektrum. (Springer Spektrum Research, 1). Online im Internet: URL: http://d-nb.info/1022284134/04 [Stand 2013-12-27].

Lüken, Miriam M. 2012. *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann. (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, 9).

Peter-Koop, Andrea & Grüßing, Meike 2011. *ElementarMathematisches BasisInterview.* 1. Aufl. Offenburg: Mildenberger.

Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland 2005. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich: (Jahrgangsstufe 4) ; [Beschluss vom 15.10.2004]*. Neuwied: Luchterhand. (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz).

Steinweg, Anna S. 2001. *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: Lit. (Pädagogik und Zeitgeschehen. 3).

Steinweg, Anna S. 2014. Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends: Eine Spurensuche, in Steinweg, Anna S. (Hg.): *10 Jahre Bildungsstandards: Tagungsband des Arbeitskreises Grundschule der GDM 2014*. Bamberg: University of Bamberg Press. (Mathematikdidaktik Grundschule, 4), 51–66.

Barbara KIMESWENGER, Linz

# Was sind „gute“ dynamische Materialien?

## 1. Einführung in das Dissertationsprojekt – GeoGebraTube

Mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra können dynamische Materialien für den Mathematikunterricht erstellt werden. Auf der Plattform GeoGebraTube (www.geogebratube.org) können solche hinaufgeladen, bearbeitet und auch in Sammlungen organisiert werden. Mittlerweile befinden sich mehr als 160 000 öffentlich sichtbare Materialien (Stand: Februar 2015) auf dieser Plattform. Jedoch wird das Suchen von „guten“ Materialien gerade durch diese Fülle an Ressourcen erschwert. Um nicht nur Quantität sondern auch Qualität auf dieser Plattform zu sichern, beschäftigt sich dieses Dissertationsprojekt mit eben dieser Thematik.

## 2. Bewertungen dynamischer Materialien auf Plattformen

Verschiedene Plattformen bedienen sich mehreren Möglichkeiten zur Bewertung. Auf Intergeo (2015) können beispielsweise einzelne Materialien mithilfe eines Fragekatalogs beurteilt werden und die „Qualität“ wird im Anschluss in Form von Sternen – so auch auf der Plattform Curriki (2015) – dargestellt. Eine weitere Möglichkeit von (direkter) nutzerInnenbasierter Bewertung sind Kommentare (vgl. Curriki 2015, Khan Academy 2015, Intergeo 2015). Im Gegensatz dazu gibt es auch automatische Bewertungsmöglichkeiten, wobei NutzerInnen nur indirekt beitragen, wie etwa durch die Anzahl der Aufrufe. Ein Material, das sehr oft angesehen wurde, ist demnach „beliebter“ als eines mit weniger Aufrufen. Die Frage stellt sich: Ist es auch „besser“? Aufrufe als alleiniges Qualitätskriterium sind für eine fundierte Bewertung wohl kaum ausreichend.

Für GeoGebraTube soll ein neues Bewertungsystem konzipiert werden, das mehrere Kriterien - nutzerInnenbasierte und vor allem auch automatische - heranziehen soll, um eine Aussage über die Qualität einzelner Materialien für den Mathematikunterricht treffen zu können.

Um NutzerInnen für aktive Arbeit und aber auch Beiträge zur Bewertung auf der Plattform GeoGebraTube zu motivieren und zu belohnen, könnten wie auf der Plattform Khan Academy (2015) sogenannte „Badges“ (Abzeichen für besondere Leistungen) verliehen werden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 3. Was sind „gute“ dynamische Materialien? – Qualität und Einsatz

Das Dissertationsprojekt betrachtet also die Frage nach Qualität und „guten“ dynamischen Materialien für den Mathematikunterricht. Hierbei spielt vor allem der konkrete Einsatz solcher eine entscheidende Rolle:

„The quality of a resource depends on its intrinsic characteristics, as well as on its adequacy to the context in which it will be used. A given resource can be ‘good’ in one context and ‘poor’ in another. Thus clarifying its educational goals and the school context in which its use is intended is also essential in determining and improving the quality of the resource.” (Trgalova et al. 2010, S. 1162)

## 4. Vorgehensweise der qualitativen Studie – ExpertInneninterviews

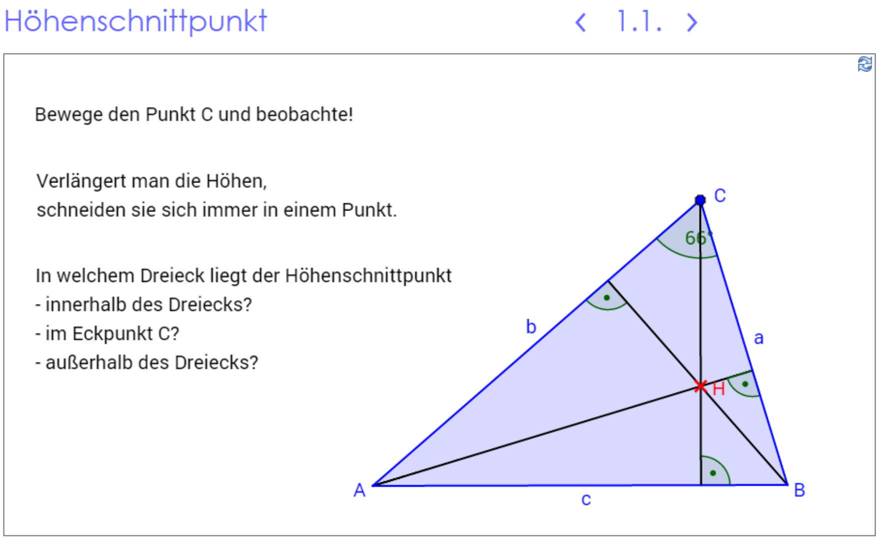
Um der Frage nach der Qualität auf dem Grund zu gehen, soll betrachtet werden, wie „gute“ dynamische Materialien auf GeoGebraTube aus Sicht von ExpertInnen (vgl. Cohen et al. 2011, Gläser & Laudel 2009, Helfferich 2011) aussehen bzw. vor allem auch in welcher Weise sie ihres Erachtens didaktisch wertvoll im Unterricht eingesetzt werden sollen. Grundlage für die qualitative Forschung sind leitfadenbasierte Interviews (vgl. Krotz 2005, Mey & Mruck 2007). Dabei werden sowohl LehrerInnen als auch andere ExpertInnen des Mathematikunterrichts in die Forschung einbezogen, wie etwa auch FachdidaktikerInnen. Maßgeblich für die Arbeit und vor allem für die Analyse der Daten ist das theoriegenerierende Verfahren namens „Grounded Theory“ (vgl. Glaser & Strauss 2010, Krotz 2005, Mey & Mruck 2011, Stübing 2004). Im Zuge der Datenauswertung sollen des Weiteren sogenannte „SchlüsselexpertInnen“ – Personen mit besonders interessante Ansichten – identifiziert werden.

### Ziel der Interviews

Mithilfe der Interviews soll ein theoretischer **Kriterienkatalog** entwickelt werden, anhand dessen eine Aussage über die Qualität – so auch über einen didaktisch wertvollen Einsatz – von dynamischen Materialien auf GeoGebraTube getroffen werden kann. Daraus sollen erste Ideen für ein neues Bewertungssystem für GeoGebraTube abgeleitet werden, wobei diese auf die Bedürfnisse von GeoGebraTube-NutzerInnen zugeschnitten werden sollen. Im Anschluss sollen die „SchlüsselexpertInnen“ mit diesen ersten Ideen konfrontiert und daraufhin diese ersten Ansätze entsprechend adaptiert werden.

## 5. Erste Interviewausschnitte und Ansätze für Bewertungskriterien

Nach der Datenerhebung der ersten drei Interviews mit LehrerInnen, die GeoGebra(Tube) sehr unterschiedlich oft verwenden, soll ein dynamisches Material exemplarisch kurz beschrieben werden. Eine Lehrerin hat es selbst erstellt und setzt es gerne in ihrem Mathematikunterricht ein, wobei ihre SchülerInnen dieses in der Regel selbstständig aber in Partnerarbeit am Computer bearbeiten (Interview, 12.11.2014, siehe Abbildung, dynamisches Arbeitsblatt siehe http://ggbtu.be/m16822).




Im Besonderen schätzt sie an dem dynamischen Material, dass SchülerInnen angeregt werden, selbst mit der dynamischen Konstruktion zu experimentieren, indem sie den Punkt C ziehen. Abhängig von seiner Lage ändert sich die Position des Höhenschnittpunktes. Dabei kann beispielweise entdeckt werden, dass sich in einem spitzwinkeligen Dreieck der Höhenschnittpunkt innerhalb und in einem stumpfwinkeligen außerhalb des Dreiecks befindet. Solche Materialien sollen SchülerInnen anregen, eigene Vermutungen anzustellen und Erkenntnisse zu formulieren, wodurch sich die Qualität dieses Materials aus Sicht der Lehrerin auszeichnet. Da dieses Arbeitsblatt schon achtmal (Stand: Februar 2015) in unterschiedliche GeoGebraBooks auf GeoGebraTube eingebunden wurde, könnte man eventuell vermuten, dass das Potential dieses Materials auch schon andere NutzerInnen erkannt haben. Des Weiteren hat die Lehrerin schon bemerkt, dass ihre eigenen Materialien, die sie auf GeoGebraTube hinaufgeladen und öffentlich zur Verfügung gestellt hat, auch schon von anderen kopiert und für ihren eigenen Bedürfnisse adaptiert wurden. Daraus könnten erste Ideen für automatische Kriterien für die Bewertung eines dynamischen Materials abgeleitet werden. Es könnte die Vermutung angestellt werden, dass Materialien, die häufig in GeoGebraBooks eingebunden oder kopiert wurden, „beliebter“ und eventuell auch „besser“ als andere einzustufen sind. Eine allgemeine Gültigkeit dieser Behauptung ist kaum verifizierbar, jedoch könnte die Anzahl der Einbindungen in GeoGebraBooks bzw. Kopien als automatisch überprüfbare Kriterien für gute Qualität herangezogen werden. Aus derartigen automatischen bzw. nutzerInnenbasierten Bewertungskriterien soll eine erste Konzeption für eine geeignete Beurteilung der Qualität dynamischer Materialien auf GeoGebraTube entwickelt werden.

## 6. Zusammenfassung – Kernaspekte des Dissertationsprojektes

Die Kernaspekte können wie folgt zusammengefasst werden:

- Welche **Kriterien** sind für ExpertInnen für die **Qualität** dynamischer Materialien wichtig?
- Wie beschreiben ExpertInnen einen **didaktisch wertvollen Einsatz** von dynamischen Materialien, die sich auf GeoGebraTube befinden?
- Inwiefern können die Resultate der ExpertInneninterviews über Qualität und Einsatz dynamischer Materialien verwendet werden, um ein **neues Bewertungssystem** für dynamische Materialien auf **GeoGebraTube** zu konzipieren?

## Literatur


Cohen, L., Manion, L. & Morrision, K. (2011). Research Methods in Education. 7. Aufl. London & New York: Routledge.

Curriki (2015). Plattform. http://www.curriki.org/. (21.01.2015).

GeoGebraTube (2015). Plattform. www.geogebratube.org. (06.02.2015).

Glaser, B. & Strauss, A. (2010). Grounded Theory. Strategien qualitativer Forschung. 3. Aufl. Bern: Huber (Original 1967).

Gläser, J. & Laudel, G. (2009). Experteninterviews und qualitative Inhaltsanalyse. 3. Aufl. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Helfferich, C. (2011). Die Qualität qualitativer Daten. Manual für die Durchführung qualitativer Interviews. 4. Aufl. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Intergeo (2015). Plattform. http://i2geo.net. (21.01.2015).

Khan Academy (2015). Plattform. https://www.khanacademy.org. (21.01.2015).

Krotz, F. (2005). Neue Theorien entwickeln. Eine Einführung in die Grounded Theory, die Heuristische Sozialforschung und die Ethnographie anhand von Beispielen aus der Kommunikationsforschung. Köln: Herbert von Halem Verlag.

Trgalova, J., Jahn, A. P. & Soury-Lavergne, S. (2010). Quality Process for Dynamic Geomtry Resources: The Intergeo Project. CERME, 1161-1170.

Mey, G. & Mruck, K. (2007). Qualitative Interviews. http://www.academia.edu/512814/Qualitative_Interviews. (21.01.2015).

Mey, G. & Mruck, K. (Hrsg.) (2011). Grounded Theory Reader. Wiesbaden: Springer.

Stübing, J. (2004). Grounded Theory. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Sebastian KOLLHOFF, Bielefeld

# Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs

Die Lösung von Transferaufgaben wird sowohl im schulischen Kontext wie auch in empirischen Studien häufig zur Bewertung des Erfolgs oder Misserfolgs von Lernprozessen herangezogen und das Gelingen von Transferprozessen gilt gemeinhin als ein wesentliches Kriterium für die Permanenz des Gelernten. Tragfähige, hinreichend vernetzte, flexible und bereichsunabhängig aktivierbare Wissensstrukturen zeichnen sich dadurch aus, dass sie auch in unbekannten wie komplexen Situationen und Lernanforderungen angewandt werden können.

In der pädagogischen Psychologie werden Transferprozesse im Wesentlichen auf Grundlage von drei Paradigmen erklärt:

- Traditionell kognitive Theorien auf Grundlage von Informationsverarbeitungsmodellen beschreiben Transferprozesse als den Abruf von Vorwissensstrukturen, die als Schemata im Langzeitgedächtnis abgelegt sind. Entscheidend für ihre Aktivierung sind zum einen Gemeinsamkeiten in elementaren Eigenschaften (vgl. Singley & Anderson, 1989) sowie Ähnlichkeiten in der Oberflächen- und Tiefenstruktur (vgl. Holyoak, 2012) von Lern- und Anforderungssituation.
- Aus Perspektive der Situierten Kognition wird Lernen als ein aktiver Sozialisationsprozess beschrieben, in dem Wissen in bereichs- und situationsspezifischen Aushandlungen mit der Umwelt entsteht und somit an diese gebunden ist. Durch aktives Handeln entwickeln Lernende situative Handlungsmodelle als Werkzeuge zum mentalen Operieren (vgl. Greeno, Smith & Moore, 1993), die eine Aktivierung in funktional ähnlichen Anforderungssituationen ermöglichen.
- Konstruktivistisch-orientierte Transferrezeptionen beschreiben den Wissensaufbau im Allgemeinen durch Übertragungen von Vorwissensstrukturen (vgl. Bransford, Brown & Cocking, 2000; Lobato, 2012). Neben der direkten Nutzung des Vorwissens bedarf es insbesondere einer stetigen Restrukturierung und Neuinterpretation bestehender Wissensstrukturen, die individuelle Generalisierungen der Schüler zur Folge haben, die als Produkt von Transferprozessen betrachtet werden.

In der experimentalpsychologischen Literatur findet sich eine Vielzahl von Studien zu Transferprozessen mit mathematischen Konzepten als Untersu-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

chungsgegenstand. Die Betrachtung dieser Untersuchungen wirft jedoch auch Fragen auf und offenbart Forschungsdesiderata.

Die psychologische Forschung konzentriert sich häufig auf schematische Inhalte und Problemlösesituationen, wie etwa das Umformen von Gleichungen (vgl. Sweller & Cooper, 1985) oder die Anwendung von Pfadregeln in der Stochastik. Es wird in der Regel ein Verfahren gelernt und in einer späteren Transferphase gemessen, wie das Verfahren in einer neuen Lernsituation angewendet wird. Aufgrund der Fertigkeitsorientierung dieser Studien bleibt zumeist offen, ob die Probanden ein tiefergehendes Verständnis für das Verfahren entwickelt haben oder lediglich gelernt haben, die Bedingungen zur Anwendung eines Lösungsalgorithmus zu erkennen und diesen fehlerfrei anzuwenden. Daher stellt sich die Frage, inwieweit sich Transferprozesse im Aufbau inhaltlicher Vorstellung und dem Verständnis mathematischer Strukturen und Begriffe darstellen.

Zudem folgen die Studien im Wesentlichen zwei Paradigmen: Einerseits haben sie einen Laborcharakter und es wird in kontrollierten instruktionalen Settings eine spezifische Verhaltensänderung der Probanden gefördert. Dementgegen stehen Einzelfallstudien (z.B. Wagner, 2006), die zum Teil ebenfalls unter Laborbedingungen Wahrnehmungs- und Verhaltensänderungen einzelner Probanden über einen mehrstündigen Lehrgang verfolgen. Die Studien werden zumeist mit Studierenden und nicht mit Schülern durchgeführt. Inwieweit sich die hier gewonnen Kenntnisse auf einen schulischen Lernkontext übertragen lassen, ist nicht geklärt.

Ungeachtet der theoretischen Vielfalt und Vielzahl empirischer Studien zu Transferprozessen mit mathematischen Konzepten als Untersuchungsgegenstand erlauben diese nur wenige Übertragungsmöglichkeiten auf schulische Lernprozesse. Für das schulische Mathematiklernen bedarf es differenzierter Erkenntnisse über Transferprozesse, die zum einen eine Grundlage für die Planung von Unterricht bilden und zum anderen für die Analyse von Lernentwicklungsverläufen bei Schülern zur konstruktiven Erarbeitung von Fördermaßnahmen dienen.

In diesem Zusammenhang bietet das Modell der Grundvorstellungen als eine genuin mathematikdidaktische Theorie (vom Hofe, 1995) einen Rahmen, der diese beiden Aspekte vereint. Zum einen können Analysen auf einer normativen stoffdidaktischen Ebene von Schülervorstellungen, die im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergeleitet werden und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs und dessen inhaltlich mathematischen Kerns beschreiben, erfolgen. Zum anderen können deskriptive Analysen Aufschluss über die individuellen und subjektiven Erklärungsmodelle der Schüler geben.

## Anlage einer Studie zur Untersuchung von Transferprozessen bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs

In vielen empirischen Studien stellt sich die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen als ein schwieriger Prozess dar, der konzeptuelle Umbrüche und Erweiterungen von Zahl- und Operationsvorstellungen erfordert. Insbesondere wurden in diesen Studien wesentliche Hürden und Schwierigkeiten in den Lernprozessen der Schüler (vgl. z.B. Wartha, 2007) über ausbleibenden Transfer in Bezug auf die Erweiterung von Grundvorstellungen sowie die Entwicklung von Fehlvorstellungen durch die fälschliche Übertragung von Struktureigenschaften der natürlichen Zahlen erklärt. Auf Grundlage stoffdidaktischer Überlegungen sowie empirischer Befunde lassen sich auf normativer Ebene erforderliche Transferprozesse in der Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu Bruchzahlen beschreiben, die einerseits im Zuge der fortschreitenden Begriffsbildung und andererseits im Hinblick auf die Erweiterung von bestehenden Vorstellungen durch Repräsentationswechsel und Variationen der kontextuellen Einbettung erforderlich bzw. wünschenswert sind.

In der geplanten Studie soll untersucht werden, inwieweit und vor allem wie sich die normativ intendierten Transferprozesse in deskriptiven Analysen der individuellen Lernprozesse der Lernenden abbilden und welche Rolle sie in der Grundvorstellungsentwicklung und Begriffsbildung einnehmen. Ferner soll dabei untersucht werden, ob sich neben erwarteten und intendierten auch andere individuelle Transferprozesse beobachten lassen, die Einfluss auf die Entwicklung des inhaltlichen Verständnisses nehmen. Von besonderer Bedeutung wird für die Analyse von Transferprozessen die Nutzung von Repräsentationen als Träger von Vorstellungen sein. Dabei stellt sich die Frage, welche Repräsentationen in der Arbeit der Schülerinnen und Schüler verwendet werden und wie sich ihre Nutzung in Transfersituationen darstellt und auf diese auswirkt.

Die Studie wird im Rahmen einer unterrichtlichen Einführung der Bruchzahlen in einer fünften Klasse durchgeführt, in der zunächst elementare Vorstellungen zu einfachen Brüchen aufgebaut und im weiteren Verlauf zu komplexeren Bruchzahlvorstellungen erweitert werden sollen.

Zu Beginn und zum Ende der Unterrichtseinheit wird in schriftlichen Tests der Wissenstand der Schüler erhoben. Der Schwerpunkt der Datenerhebung liegt jedoch auf der qualitativen Erfassung der individuellen Entwicklungsverläufe der Schüler. Zu diesem Zweck werden in ausgewählten Sitzungen die Kommunikations- und Argumentationsprozesse der Schüler in Partnerarbeiten auf Video aufgezeichnet. Diese Aufzeichnungen dienen zusammen mit den schriftlichen Schülerdokumenten als Analysegrundlage zur Rekonstruktion und Beschreibung ihrer individuellen Lern- und Transferprozesse im Verlauf der Unterrichtseinheit.

In den Partnerarbeiten arbeiten die Schüler an Übungsaufgaben zu zuvor im Unterricht eingeführten Inhalten. In den Aufgaben werden einerseits die Oberflächenmerkmale hinsichtlich der genutzten Repräsentationen und Kontexteinbettungen der unterrichtlichen Einführung variiert, um so lösungsrelevante Merkmale herauszustellen (nahe Transferaufgaben). In weiterführenden Aufgaben werden neben den Oberflächenmerkmalen auch andere konzeptuelle Strukturmerkmale fokussiert, die zum Teil stark von den bisher bearbeiteten Aufgaben abweichen (weite Transferaufgaben).

## Literatur:


Bransford, J.D., Brown A.L. & Cocking, R.R. (2000): Learning and Transfer. In: J.D. Bransford, A.L. Brown & R.R. Cocking (Hg.): *How People Learn. Brain, Mind, Experience, and School*. Washington D.C.: National Academy Press, S. 31-50.

Greeno, J.G., Smith, D.R. & Moore, J.L. (1993): Transfer of Situated Learning. In: D.K. Dettermann & J.R. Sternberg (Hg.): *Transfer on Trial: Intelligence, Cognition, and Instruction*. Norwood, NJ: Ablex, S. 99-167.

Holyoak, K.J. (2012): Analogy and Relational Reasoning. In: K.J. Holyoak & R.G. Morrison (Hg.): The Oxford Handbook of Thinking and Reasoning. New York: Oxford University Press, S. 234-259.

Lobato J. (2012): The Actor-Oriented Transfer Perspective and Its Contributions to Educational Research and Practice. In: *Educational Psychologist* 47(3), S. 232-247.

Singley, M.K. & Anderson, J.R. (1989): *The Transfer of Cognitive Skill*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Sweller, J. & Cooper, G. (1985): The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. In: *Cognition and Instruction*, 2(1), S. 59-89.

vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg u.a.: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.

Wagner, J.F. (2006): Transfer in Pieces. In: *Cognition and Instruction*, 24(1), S. 1-71.

Wartha, S. (2007): *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Edith LINDENBAUER, Linz

# Der Einsatz von dynamischen Arbeitsblättern zur Unterstützung des funktionalen Denkens in der Sekundarstufe 1

In der Literatur werden vielfältige Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Zusammenhang mit funktionalem Denken angeführt. Besonders stechen dabei ein mangelhaft entwickelter Kovariationsaspekt, der Graph-als-Bild Fehler und die sogenannte ‚Illusion of linearity' hervor (Clement, 1989; De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Malle, 2000; Hoffkamp, 2011). Dieses Dissertationsprojekt hat zum Ziel, im Rahmen einer qualitativen Studie zu ermitteln, welchen Einfluss technologiebasierte dynamische Materialien auf die individuellen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern in Bezug auf funktionales Denken haben.

Vollrath (1989, S.6) beschreibt diesen Begriff folgendermaßen: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist". Malle (2000) formuliert dazu folgende Aspekte funktionalen Denkens:

- **Zuordnungsaspekt**: Jedem Argument x wird genau ein Funktionswert f(x) zugeordnet.
- **Kovariationsaspekt**: Wird das Argument x verändert, so ändert sich der Funktionswert f(x) in einer bestimmten Weise und umgekehrt.

## Problemstellung

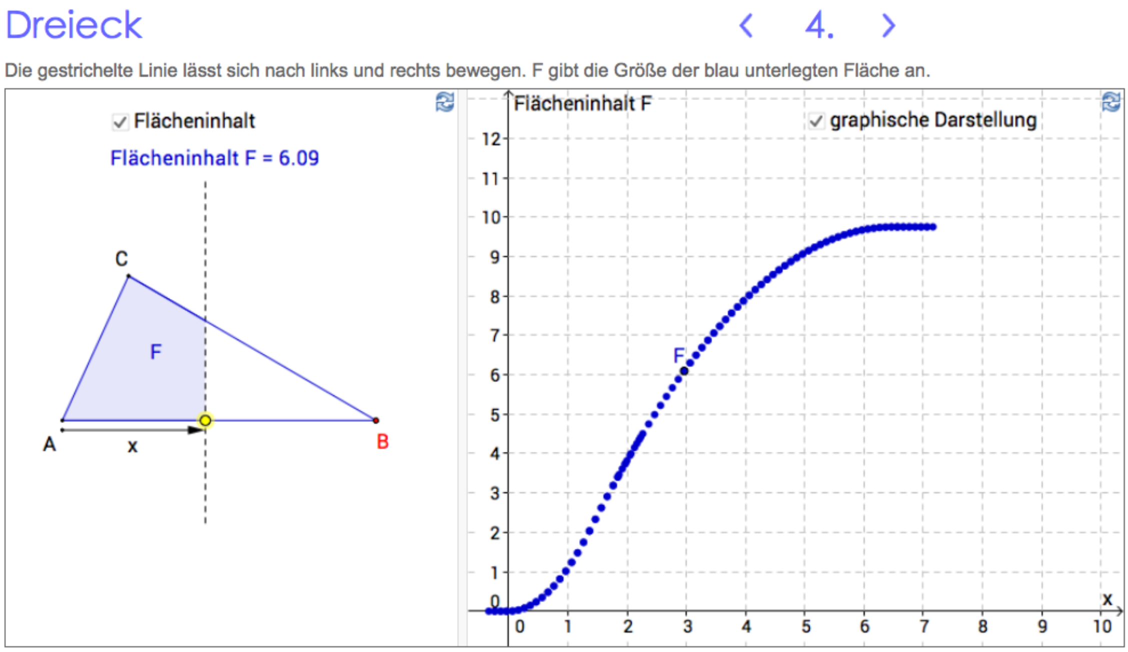
Für das praktische Arbeiten mit Funktionen ist der Kovariationsaspekt sehr wichtig. Empirische Untersuchungen zeigen jedoch, dass vor allem dieser Aspekt des funktionalen Denkens bei Schülerinnen und Schülern unterentwickelt ist (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Malle, 2000; Hoffkamp, 2011).

Dynamische Mathematiksoftware wie GeoGebra eignet sich durch ihre interaktiven Darstellungen, um den Kovariationsaspekt von Funktionen zu betonen, und unterstützt so die Entwicklung des funktionalen Denkens (Hohenwarter, 2006).

Ein mangelhaft entwickelter Kovariationsaspekt von Funktionen ist unter anderem auch erkennbar am Auftreten des Graph-als-Bild Fehlers (Clement, 1989; Schlöglhofer, 2000; Hoffkamp, 2011). In diesem Fall sehen Schülerinnen und Schüler Funktionsgraphen als photographisches Abbild einer Realsituation. Durch eine bewusste Auseinandersetzung mit solchen Aufgaben soll das Verständnis für die Interpretation von Funktionsgraphen vertieft werden.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Ausgangspunkt für das folgende dynamische Arbeitsblatt ist eine Aufgabe von Schlöglhofer (2000).




Dieses GeoGebra-Applet (siehe http://ggbtu.be/bNF0RXfE1) enthält sowohl eine Situationsdarstellung als auch eine Grafikansicht mit dem zugehörigen Funktionsgraphen. Schülerinnen und Schüler sollen eine Hypothese zum Verlauf des Funktionsgraphen bilden. Dieser gibt den markierten Flächeninhalt links von der strichlierten Linie in Abhängigkeit von x (horizontaler Abstand des hellen Punkts vom Eckpunkt A) an. Der Flächeninhalt wird durch Ziehen des hellen Punkts verändert und der zugehörige Wert durch Anklicken des Kontrollkästchens als Hilfestellung angezeigt. Erst zum Schluss sollen sich Schülerinnen und Schüler den Funktionsgraphen im rechten Fenster anzeigen lassen, um damit ihre Vermutungen über den Verlauf des Graphen zu überprüfen.

### Design und Methode

Folgende Aspekte stehen im Zentrum des Forschungsinteresses:

- Welche Vorstellungen haben Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 im Zusammenhang mit funktionalem Denken?
- Wie können dynamische Materialien gestaltet werden, um Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 zu unterstützen, geeignete Vorstellungen zum Thema funktionales Denken zu entwickeln?
- Welchen Einfluss haben dynamische Materialien auf die Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe 1 insbesondere

im Hinblick auf das Verständnis des Kovariationsaspekts von funktionalen Abhängigkeiten?

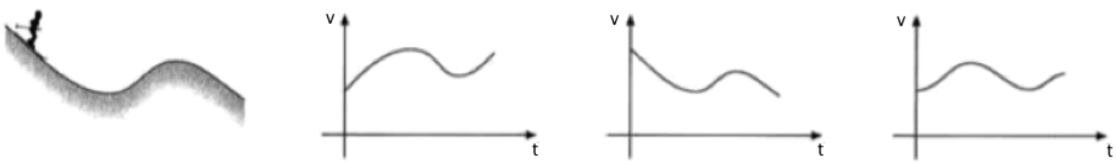
Diese Aspekte werden mit Hilfe einer qualitativen hypothesengenerierenden Studie näher beleuchtet. Dazu werden die entwickelten dynamischen Arbeitsblätter im Unterricht zweier Klassen aus unterschiedlichen Jahrgangstufen der Sekundarstufe 1 eingesetzt. Die qualitative Auswertung greift auf Methoden der Grounded Theory zurück (Glaser & Strauss, 1998). Eine erste Datenerhebung wurde im Dezember 2014 in einer 8. Schulstufe einer Neuen Mittelschule bereits durchgeführt. Sie gliederte sich in einen mehreren Stufen umfassenden Prozess. Zur Erhebung von Fehlern, die auf typische Fehl- und Präkonzepte von Schülerinnen und Schülern zum Thema funktionales Denken hindeuten, diente ein Diagnosetest. Im Anschluss wurden mit einigen ausgewählten Schülerinnen und Schülern diagnostische Interviews geführt, um einen tieferen Einblick in ihre Vorstellungen zu erhalten (Hunting, 1997). In der Folge setzten sich die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit für die Dauer von drei Unterrichtseinheiten – angeleitet durch begleitende Aufgabenstellungen – mit verschiedenen dynamischen Arbeitsblättern auseinander. 10 Schülerinnen und Schüler wurden bei ihrer Arbeit mithilfe von Audio-, Video- und Bildschirmaufnahmen aufgezeichnet. Nach dieser Unterrichtssequenz erfolgte ebenfalls ein Diagnosetest und – ausgehend von einer Analyse der Aufzeichnungen und des Tests – diagnostische Interviews mit einigen Schülerinnen und Schülern.

Eine genauere qualitative Analyse der Beobachtungsdaten und Interviewaufzeichnungen soll einen Einblick in den Einfluss von dynamischen Materialien auf die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler geben. Das Ziel besteht darin, Hypothesen zu dieser Fragestellung zu ermitteln.

## Erste Ergebnisse

Im ersten Diagnosetest wurde unter anderem folgende Aufgabe gestellt:

„Ein Skifahrer fährt eine Piste hinunter. Das Diagramm zeigt seine Geschwindigkeit v im Verlauf der Zeit t. Welches der drei Diagramme ist richtig?“ (Schlöglhofer, 2000, S. 17)




Insbesondere die fehlerhaften Antworten der Schülerinnen und Schüler sind interessant. Exemplarisch hier zwei Antworten:

- **Schüler 1:** *„Ich nehme das Zweite, weil am Bild die Piste auch so ist wie sie am Diagramm dargestellt ist."*
- **Schülerin 2:** *„Beim direkten Hinunterfahren ist der Skifahrer schneller unten – wo der nächste Hügel beginnt, wird er langsamer, und wenn er da ist, muss er wieder hinunterfahren, was bedeutet, dass er wieder schneller wird."*

Interessant sind hier die Begründungen: während der Schüler direkt einen Graph-als-Bild Fehler begeht, beschreibt die Schülerin den Geschwindigkeitsverlauf verbal richtig, der Transfer auf die Darstellung als Funktionsgraph hingegen erfolgt nicht korrekt. Die gleiche falsche Lösung deutet hier auf verschieden ausgeprägte (Fehl-)Vorstellungen der beiden Kinder hin.

## Literatur


Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1-2),* 77–87.

De Bock, D., Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35(1),* 65–83.

Glaser, B.G. & Strauss, A.L. (1998). *Grounded Theory – Strategien qualitativer Forschung*. Verlag Hans Huber, Bern.

Hoffkamp, A. (2011). *Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen: Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse.* Unveröffentlichte Dissertation, Technische Universität Berlin.

Hohenwarter, M. (2006). Funktionales Denken mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra. In R. Grothmann (Hrsg.), *Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik.* Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt, Deutschland.

Hunting, R.P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16(2)*, 145–165.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren, 103,* 8–11.

Schlöglhofer, F. (2000). Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *Mathematik lehren, 103,* 16–17.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10*, 3–37.

Nadine MERTZ, Erfurt

# Empirische Evaluation eines onlinebasierten Einführungskurses im Bereich Mathematik für Lehramtsstudierende

Beim Übergang von der Schule in ein Mathematikstudium bzw. ein mathematikhaltiges Studium gibt es einige Hürden. Indizien hierfür sind unzureichende Studieneingangsvoraussetzungen gerade auch in Bezug auf die Schulmathematik (u.a. Bruder et al., 2012) und hohe Abbruchquoten. Zur Erleichterung des Übergangs Schule-Universität werden an vielen Hochschulen Brücken- oder Einführungskurse zur Auffrischung schulischer Wissensbestände bzw. zur Vermittlung von Arbeitstechniken angeboten. In diesem Beitrag wird eine Studie vorgestellt, die eine Online-Variante als Basis für einen mathematischen Einführungskurs – Math-Bridge – benutzt. Diese Lernplattform wurde hinsichtlich der motivationsförderlichen Gestaltung des mathematischen Lernangebots durch Lernfortschrittsanzeigen untersucht. Im Fokus dieses Beitrags steht die Auswirkung auf das Lernergebnis im Sinne eines Leistungstests.

## E-Learning und Motivation

In einer multimedialen Lernumgebung muss der Lernende seinen eigenen Lernprozess organisieren, was die Anforderungen an seine kognitive und motivationale Leistungsfähigkeit erhöht. E-Learning-Angebote werden oftmals als per se motivierend wahrgenommen, wobei u.a. durch die Unterschätzungsthese (Weidenmann, 2002) und den bei längerer Nutzung verschwindenden Neuigkeitseffekt festgestellt werden muss, dass E-Learning-Angebote nicht grundsätzlich motivierender als andere Lernformate sind.

Nach dem Rahmenmodell der Lernmotivation nach Rheinberg & Fries (1998) ergibt sich die aktuelle Motivation aus einer Wechselbeziehung zwischen Person und Situation. Es können drei Ebenen unterschieden werden, auf denen motivationale Variablen Einfluss auf den Lernprozess haben: die Dauer und Häufigkeit von Lernaktivitäten, die Qualität der ausgeführten Lernaktivitäten (das Lernergebnis) und der funktionale Zustand während des Lernens. In der Studie wurde eine Veränderung der Situation (der Lernumgebung) vorgenommen und betrachtet, inwieweit der Einsatz einer Lernfortschrittsanzeige einen lernmotivationsrelevanten Anreiz darstellen kann. Gerade bei längeren Bildungsmaßnahmen wie Onlineeinführungskursen, die oftmals 4 Wochen oder länger genutzt werden sollen, spielt die motivierende Gestaltung der Lernumgebung eine entscheidende Rolle. Entsprechend des u.a. von Keller & Kopp (1987) auf den E-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Learning-Bereich übertragenen ARCS-Modells unterstützt eine Lernfortschrittsanzeige die motivierende Gestaltung einer Lernumgebung. Das erfolgreiche Bearbeiten von Lernmaterialien wird in der Lernfortschrittsanzeige visualisiert und kann dem Lernenden Rückmeldung über erbrachte Leistungen geben, die dieser als Erfolgserlebnis verbuchen kann (Gelegenheiten für Erfolgserlebnisse). Die Lernfortschrittsanzeige unterstützt somit die Erfolgszuversicht (Confidence) der Lernenden und betont die Fähigkeit und Anstrengung des Lernenden als Erfolgsursache, um den Lernenden zu motivieren. Des Weiteren kann die grafische Anzeige des Lernfortschritts den Lernenden darauf aufmerksam machen, welche Bereiche er noch nicht bearbeitet hat (Unterstützung des Orientierungsverhaltens). Es wurden bereits positive Effekte auf u.a. die Drop-Out-Raten bei der Verwendung von Fortschrittsbalken bei Onlinefragebögen (u.a. Conrad, Couper, Tourangeau & Peytchev, 2010) nachgewiesen.

## Die Studie

Innerhalb der Studie wurde die Auswirkung der Variation der Lernfortschrittsanzeige (Modifikation der Navigationsunterstützung) auf u.a. die aktuelle Motivation und die Qualität des Lernergebnisses untersucht. Die Studie wurde im Prä-Posttest-Design angelegt und im Wintersemester 2014/15 an der Universität Erfurt mit den Lehramtsstudierenden im ersten Semester eines mathematikhaltigen Studiums durchgeführt. Es handelte sich hierbei einerseits um Lehramtsstudierende (Primarstufe und Sekundarstufe I) mit dem Vertiefungsfach Mathematik und anderseits um Studierende mit einem reduzierten Anteil an Mathematik innerhalb des Grundschullehramtsstudiums.

Insgesamt nahmen 238 Studierende an der Untersuchung teil. Die Studierenden waren im Durchschnitt 21,2 Jahre alt und hatten eine durchschnittliche Abiturnote von 2,2 (SD =0,5). Der Prätest bestehend aus Leistungstest und Fragebogen wurde in der ersten Semesterwoche durchgeführt. Die Erstsemesterstudierenden wurden nach der Studierendengruppe (mit und ohne Vertiefungsrichtung Mathematik) und dem Prätestergebnis auf die vier Bedingungen (drei Experimentalgruppen mit Lernfortschrittsanzeige und eine Kontrollgruppe ohne Lernfortschrittsanzeige) aufgeteilt und in Math-Bridge registriert. Die Studierenden sollten wöchentlich zwei Themengebiete wie beispielsweise Bruchrechnung oder Potenzen selbstständig innerhalb von Math-Bridge bearbeiten. Nach fünf Wochen wurde in der Lehrveranstaltung der Posttest durchgeführt, der die Items des Prätests (ergänzt durch Items zur Gesamtbewertung der Plattform und der Einschätzung der Navigation im System) enthielt. Math-Bridge protokollierte alle Interaktionen des Users mit dem System, die im Rahmen von Learning

Analytics zur Einschätzung des Lernprozesses im System herangezogen werden können.

### Der Leistungstest

Der Leistungstest umfasste hauptsächlich Themengebiete der Sekundarstufe I, da Erstsemesterstudierende in diesem Bereich der Schulmathematik Probleme haben (u.a. Eilerts, 2009). Inhalte waren beispielsweise Bruchrechnung oder Potenzen. Die Themengebiete wurden alle innerhalb des Einführungskurses, den die Studierenden in Math-Bridge bearbeiten sollten, behandelt. Die Items entstammten aus standardisierten Tests (u.a. Baumert et al., 1998). Das mathematische Anforderungsniveau des Tests umfasste nicht nur verschiedene mathematische Themengebiete, sondern erforderte auch die Bewältigung fachlicher Anforderungen, die mit unterschiedlichen kognitiven Prozessen verbunden sind. Für diese Ausdifferenzierung wurde an die theoretischen Grundlagen der Studie TEDS-M angeknüpft, indem die dort formulierte Unterscheidung von Kennen und Anwenden aufgegriffen wurde (Blömeke, Kaiser, Lehmann, 2010). Dem entsprechend des Rahmenmodells der Lernmotivation nach Rheinberg & Fries (1998) erwartbaren Qualitätsunterschied des Lernergebnisses soll mit dieser Unterscheidung der Aufgaben des Leistungstests in Aufgaben verschiedener Niveaus (Kennen und Anwenden) Rechnung getragen werden. Jedes Themengebiet des Tests umfasste somit jeweils zwei Aufgaben auf dem Niveau Kennen und zwei Aufgaben auf dem Niveau Anwenden. Als Maß der internen Konsistenz der Skalen wurde Cronbachs Alpha berechnet, was mit .66 für die Items im Bereich Kennen und mit .79 im Bereich Anwenden als ausreichend bewertet wurde. Alle Items hatten eine angemessene Itemschwierigkeit. Für die Prüfung der Kriteriumsvalidität wurde die durchschnittliche Punktzahl in Mathematik in der Sekundarstufe II herangezogen. Es konnte ein positiver mittlerer Zusammenhang zwischen der Note und dem Prätestergebnis festgestellt werden ($r_s \approx .47$). Insgesamt konnten durch die Studierenden 43 Punkte erreicht werden, wobei im Prätest weder Boden- noch Deckeneffekte sichtbar wurden. Der Leistungstest wurde daher nach der umfassenden Itemanalyse als ein geeignetes Testinstrument bewertet.

### Erste Ergebnisse

Entsprechend des Leistungstests erreichten die Erstsemesterstudierenden im Durchschnitt 17,9 Punkte (SD =6,4) im Prätest. Zu diesem ersten Messzeitpunkt zeigten sich signifikante Unterschiede zwischen Studierenden mit (durchschnittlich 21,4 Punkte, $p < .05$) und ohne das Vertiefungsfach Mathematik (durchschnittlich 16.6 Punkte, $p < .05$). Am besten konnten die Studierenden Aufgaben zur Bruchrechnung (Lösungsquote 63,3 in Prozent) und zu den linearen Gleichungen und Gleichungssystemen (59,6 %) lösen. Am schlechtesten waren die Themengebiete binomische Formeln (16,9 %) und Wurzeln (15,2 %) bewältigt worden. Diese Ergebnisse decken sich mit Untersuchungen von Eilerts (2009). Außer bei dem Thema Ungleichungen waren die Studierenden mit der Vertiefungsrichtung Mathematik bei allen Inhalten signifikant besser als die Studierenden ohne die Vertiefungsrichtung. Im Posttest, der die gleichen Items wie der Prätest enthielt und 6 Wochen später durchgeführt wurde, erreichten alle Studierenden im Durchschnitt 25,5 Punkte (SD =6,5), wobei die Studierenden mit der Vertiefungsrichtung mit 29,3 Punkten (SD=6,0) im Mittel signifikant ($p < .05$) besser waren als die Studierenden ohne Vertiefungsfach Mathematik mit 24 Punkten (SD=6,2). Der Vergleich von Prä- und Posttest zeigt sowohl gesamt, als auch für die Studierendengruppen einzeln eine signifikante Verbesserung der mathematischen Leistungen. Untersuchungen zu der Auswirkung der jeweiligen Form der Lernfortschrittsanzeige auf den Posttest zeigten in den ersten Auswertungen keinen signifikanten Unterschied zwischen den Experimentalgruppen und der Kontrollgruppe. Es zeigten sich jedoch signifikante Unterschiede bei anderen abhängigen Variablen des Experiments wie u.a. der aktuellen Motivation.

## Literatur


Baumert et al., 1998. *Testaufgaben Mathematik TIMSS 7./8. Klasse (Population 2)*, Materialien aus der Bildungsforschung, 60, Berlin: MPIB-Berlin.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (2010), *TEDS-M 2008 - Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Bruder, R., Elschenbroich, J., Greefrath, G., Henn, H.-W., Kramer, J., Pinkernell, G. (2010). Schnittstelle Schule – Universität. In. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 75-82). Münster: WTM-Verlag.

Conrad, F. G., Couper, M.G., Tourangeau, R., Peytchev, A. (2010): The impact of progress indicators on task completion. Interaction with computers, 22(5), 417-427.

Eilerts, K. (2009). *Kompetenzorientierung in der Mathematik-Lehrerausbildung. Empirische Untersuchung zu ihrer Implementierung*. Münster: LIT Verlag.

Keller, J. M. & Kopp, T.W. (1987). An application of the ARCS model of motivational design. In Reigeluth, C. M. (Hrsg.), *Instructional theories in action. Lessons illustrating selected theories and models* (S. 289-320). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rheinberg, F. & Fries, S. (1998). Förderung der Lernmotivation: Ansatzpunkte, Strategien und Effekte. *Psychologie in Erziehung und Unterricht,* 44*,* 168-184.

Weidenmann, B. (2002). Multicodierung und Multimodalität im Lernprozess. In L. Issing, & P. Klimsa (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia und Internet*. (S. 45-64). Weinheim: Beltz

Rolf OECHSLER, Landau

# Verwendung von Fachsprache im Kontext eines Schülerlabors Mathematik

Eine Standardsprache wie das Deutsche wird aus soziolinguistischer Sicht als ein System verschiedener sprachlicher Varianten aufgefasst. Diese Sprachvarianten resultieren aus regionalen Differenzierungen, sozial geprägtem Sprachverhalten, funktional-situativen Faktoren und weiteren außersprachlichen Bedingungen (Abb. 1). Bei den funktionalen Varianten steht die Funktion der Sprache bzw. des Sprechens im Vordergrund. Zu ihnen zählen die Fachsprachen, die durch ihre funktionale und situative Ausrichtung gekennzeichnet sind: Sie dienen der genauen und schnellen Informationsübermittlung und sichern die Verständlichkeit und die Verständigung innerhalb der Gruppe der Fachleute. Fachsprachen zielen auf Deutlichkeit und Präzision ab und sind in hohem Maße standardisiert und formalisiert (Bußmann 1983; Maier 2004; Schmidt-Thieme 2010).

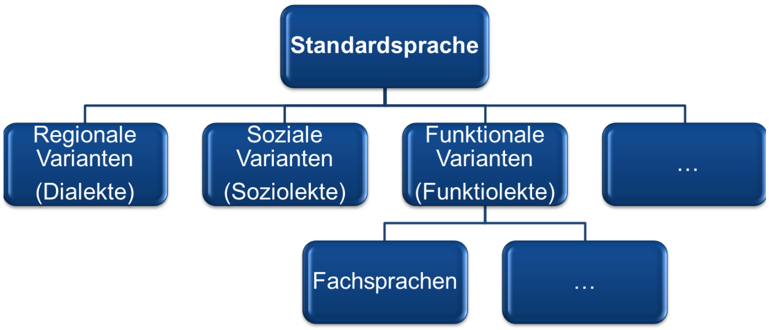



**Abb. 1:** Fachsprachen als Varianten einer Standardsprache

Diese Eigenschaften treffen selbstverständlich nicht auf alle Fachsprachen in gleichem Maße zu. Ebenso gilt, dass sie auf die einzelnen fachsprachlichen Bestandteile einer Variante mehr oder weniger ausgeprägt zutreffen.

## Fachsprache Mathematik

Die Fachsprache der Mathematik manifestiert sich sehr deutlich auf drei Ebenen (Maier 2004): 1. auf der symbolischen Ebene durch die Verwendung fachspezifischer Symbole und Symbolreihen; 2. auf der lexikalischen Ebene durch den Gebrauch von Fachbegriffen und fachsprachlichen Wendungen; 3. auf der syntaktischen Ebene durch die Verwendung charakteristischer Satz- und Textkonstruktionen (vgl. Abb. 2). Wie im Folgenden beschrieben weist dabei das mathematische Fachvokabular einige besonders hervorzuhebende Eigenschaften auf.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

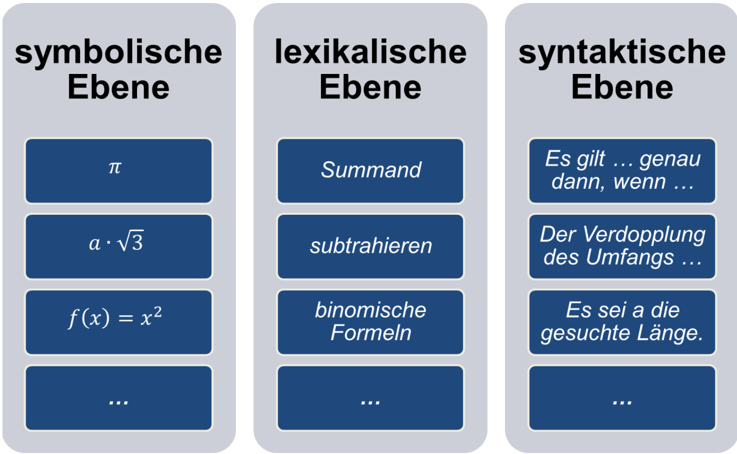



**Abb. 2:** Verschiedene Ebenen der Fachsprache Mathematik

Im lexikalischen Bereich ist eine Kategorisierung unterschiedlicher Fachtermini sinnvoll und möglich, wie sie von Maier & Schweiger 1999 ausführlich vorgenommen wurde. Demnach umfasst das mathematische Fachvokabular Wörter, die in der Umgangssprache gar nicht vorkommen, und solche, die zwar auch in der Umgangssprache verwendet werden, deren fachliche Bedeutung jedoch von der umgangssprachlichen mehr oder weniger stark abweicht: Sie kann enger oder weiter gefasst, völlig losgelöst von der umgangssprachlichen sein oder einer ganz anderen Systematik folgen (Maier & Schweiger 1999; Maier 2004; Hußmann 2010). Interferenzen zwischen fach- und umgangssprachlichen Bedeutungen, aber auch Polysemie (Mehrdeutigkeit) und Synonymie begünstigen begriffliche und/oder inhaltliche Fehlvorstellungen und können dabei das Erlernen und Anwenden der Fachsprache erheblich erschweren.

### Fachsprache im Mathematikunterricht

Die Fachsprache stellt eine sprachliche Herausforderung im Mathematikunterricht dar, und zwar für alle am Lehr-Lern-Prozess beteiligten Akteure: Sie ist einerseits ein (nicht zuletzt curricular eingeforderter) *Lerngegenstand*, der sukzessive eingeführt bzw. erworben werden muss, gleichzeitig aber auch ein *Lernmedium*, durch das Lernprozesse initiiert werden und das zur Darbietung und Vermittlung von Wissen und Informationen dient. Je nach Art des unterrichtlichen Einsatzes kann Fachsprache eine *Lernvoraussetzung* oder ein *Lernhindernis* für Lernende darstellen (Maier & Schweiger 1999; Niederdrenk-Felgner 2000; Meyer & Prediger 2012).

Da die Träger bzw. Benutzer von Fachsprache im Mathematikunterricht die Lehrkräfte, die Schüler/innen und die Unterrichtsmedien sind, kann der Gebrauch von Fachsprache sowohl in mündlichen Interaktions- als auch in schriftlichen Produktions- und Rezeptionsprozessen im Unterricht lokalisiert werden. Mündliche Kommunikations- und Argumentationsprozesse von Schüler/innen untereinander finden häufig in Gruppenarbeitsphasen statt und können zur Feststellung des Grads an Fachsprachlichkeit herangezogen werden.

## Fachsprache im Schülerlabor Mathematik

Die Verwendung mathematischer Fachsprache im Kontext eines außerschulischen Lernstandortes ist von der Art der Einrichtung abhängig. Das hier vorgestellte Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ der Universität Koblenz-Landau am Campus Landau ist sowohl ein klassisches Schülerlabor als auch ein Lehr-Lern-Labor. Die Angebotspalette umfasst Lernumgebungen für ganze Schulklassen der Sekundarstufen. Die Schüler/innen arbeiten selbstständig in Kleingruppen an lehrplanbezogenen mathematischen Fragestellungen. Eine inhaltliche Betreuung durch Laborpersonal erfolgt nicht. Die zu einer Lernumgebung gehörenden Arbeitshefte beinhalten die schriftlichen Arbeitsaufträge, sie dienen außerdem den Lernenden als Laborprotokoll. In den Arbeitsheften wird das Prinzip der kontextbezogenen, sorgfältigen Entwicklung und Einführung von Fachbegriffen beachtet. Es gelten dabei die Gebote der Anzahl- und Umfangsbeschränkung. Um Häufungen von Symbolen in den Texten zu vermeiden, wird ein Teil durch Erläuterungen bzw. Versprachlichung ersetzt. Auch in anderen Bestandteilen der Lernumgebungen, etwa den Computersimulationen, sind fachsprachliche Elemente integriert. Diese auch auf den fachsprachlichen Kompetenzerwerb ausgerichteten Lernumgebungen sind in hohem Maße vom vorausgegangenen Fachunterricht abhängig und auf den darauffolgenden angewiesen.

## Forschungsvorhaben und Datenerhebung

Die im Rahmen der Erprobung und Bearbeitung der Labor-Lernumgebung „Figurierte Zahlen“ erhobenen Daten bilden die Grundlage für die Untersuchung der Verwendung von Fachsprache in einem Schülerlabor. Die Lernumgebung ist für die Jahrgangsstufen 7/8 konzipiert und umfasst, ausgehend von Untersuchungen an figurierten Zahlen, Problemstellungen zum Themenbereich „Aufstellen und Umformen von Termen mit einer Variablen“.

Die Datenerhebung fand von März 2013 bis Dezember 2014 im Mathematik-Labor statt. Von jeder teilnehmenden Schulklasse wurde die Gruppenarbeit je einer Kleingruppe videographiert, sodass als Datenmaterial die schriftlichen Schülerdokumente sowie die Video- und Audioaufnahmen zur Verfügung stehen. Das schriftliche Material wird quantitativ ausgewertet, die Video- und Audioaufzeichnungen werden transkribiert und einer qualitativen Analyse unterzogen.

In den Schülerbearbeitungen lassen sich bereits einige Tendenzen beim Gebrauch von Fachsprache feststellen, etwa zur Verwendung des sog. „didaktischen Vokabulars“ oder solcher Fachbegriffe, die auch in der Umgangssprache vorkommen.

## Forschungsperspektiven

Ziel der vorgestellten Untersuchung ist die differenzierte Beschreibung der beobachtbaren Verwendung mathematischer Fachsprache durch Schüler/innen bei der Bearbeitung lehrpanbezogener Inhalte im Rahmen einer Labor-Lernumgebung eines Schülerlabors Mathematik. Mögliche Forschungsfragen dabei sind:

- Wie verwenden Schüler/-innen beim selbstständigen Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen in einem Schülerlabor mathematische Fachsprache?
- Inwiefern lassen sich bestimmte Bearbeitungsphasen (Hilfsmittel, Kooperationsformen) einer Labor-Lernumgebung als förderlich oder hemmend im Hinblick auf den Erwerb/Gebrauch von Fachsprache charakterisieren?

Weitere mögliche Forschungsperspektiven betreffen die Frage nach einem Zusammenhang zwischen dem Grad fachsprachlichen Gebrauchs und erfolgreicher Problembewältigung sowie die Beziehung zwischen fachsprachlicher und inhaltlicher Begriffsentwicklung.

## Literatur


Bußmann, Hadumod (1983): *Lexikon der Sprachwissenschaft*. Stuttgart: Alfred Kröner Verlag.

Hußmann, Stephan (2003): Umgangssprache – Fachsprache. In: Leuders, Timo (Hrsg.): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (S. 60 – 106). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Maier, Hermann (2004): Zu fachsprachlicher Hyper- und Hypotrophie im Fach Mathematik oder Wie viel Fachsprache brauchen Schüler im Mathematik-unterricht? In: *JMD* 25 (2), S. 153–166.

Maier, Hermann; Schweiger, Fritz (1999): *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Wien: ÖBV & HPT.

Meyer, Michael; Prediger, Susanne (2012): Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht: Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. In: *PM* 54 (45), S. 2–9.

Niederdrenk-Felgner, Cornelia (2000): Algebra oder Abrakadabra? Das Thema "Mathematik und Sprache" aus didaktischer Sicht. In: *Mathematik lehren* 99, S. 4–9.

Schmidt-Thieme, Barbara (2010): Fachsprache oder: Form und Funktion fachlicher Varietäten im Mathematikunterricht. In: Kadunz, Gert (Hrsg.): *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik* (S. 271 – 304). Hildesheim: Franzbecker.

Wolfgang PFEFFER, Passau, Matthias BRANDL, Passau

# Schwierigkeiten beim Übergang Schule – Hochschule in Mathematik. Eine qualitative Längsschnittstudie.

Der Übergang von der Schule zur Hochschule in Mathematik rückt national wie international in den letzten Jahren immer stärker in den Fokus. Die Studienabbruchquote lässt vermuten, dass die Studierenden gerade in der Übergangsphase mit großen Schwierigkeiten zu kämpfen haben. Dieter und Törner (2010) schätzen das Verhältnis von Studienanfängerinnen und Studienanfängern zur Anzahl der Absolventen im Fach Mathematik durchschnittlich nur auf etwas über 20%. Auch in anderen Ländern werden mangelnde Mathematikkenntnisse und das Fehlen von grundlegenden Fertigkeiten beklagt: „A widespread decrease in levels of mathematical competence, including a lack of essential technical facility, a marked decline in analytical powers, and changed perceptions of what mathematics is, especially with regard to the place of precision and proof, have been noted in reports (…), with these difficulties even extend to ‚high-attaining' students." (Hong et al., 2009, S. 250).

## 1. Gründe für Übergangsschwierigkeiten in der Literatur

In der Literatur wird der sich wandelnde Charakter der Mathematik als ein zentraler Grund für die Übergangsschwierigkeiten ausgemacht (u.a. Clark & Lovric, 2009). Während in der Schule noch sehr anschaulich gearbeitet wird, präsentiert sich die Mathematik an der Hochschule als formale Wissenschaft. Dieses Bild wurde im Rahmen des Projektes „Mathematik Besser Verstehen" bestätigt: „Die Studierenden fühlen sich zu Beginn ihres Studiums oft durch die Umstellung von der Schul- zur Universitätsmathematik – vor allem durch den sprunghaft ansteigenden Abstraktionsgrad – überfordert" (Hefendehl-Hebeker et al., 2010, S. 93). Mit steigendem Abstraktionsgrad ist es umso wichtiger, mit den formalen Begriffen Repräsentationen zu assoziieren. In diesem Kontext haben Tall und Vinner (1981) die Begriffe „concept definition" und „concept image" eingeführt. Der Begriff „concept definition" wird von Tall und Vinner (1981) weiter in eine personenbezogene und eine mathematische Variante unterteilt. Während man unter der mathematischen Variante die formale Definition des Begriffs versteht, meint die personenbezogene Variante die individuelle Beschreibung des Begriffs mit Hilfe des „concept image" (vgl. Rach, 2014; Rösken & Rolka, 2007). Den Begriff „concept image" beschrieben Tall und Vinner als „(…) cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes." (Tall & Vinner, 1981, S. 152). Das individuelle „concept image" bedingt

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

also die personenbezogene Variante der „concept definition“ und kann unter Umständen von der formalen Variante abweichen, was unweigerlich zu Problemen führen wird.

Neben dem sich verändernden Charakter der Mathematik spielen auch die sich verändernden Anforderungen an das Lernverhalten eine wichtige Rolle. Bislang gibt es nur wenige empirische Arbeiten zu Lehr-Lern-Prozessen bezüglich der Hochschulmathematik. Stefanie Rach hat sich in ihrer Dissertation mit den Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium beschäftigt und daraus Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg in der Studieneingangsphase herausgearbeitet (Rach, 2014). Wichtige Ansätze finden sich auch in der allgemeinen Lernstrategieforschung. Hier werden besonders die Anforderung an Selbstregulatives Lernen und Verwendung spezifischer Lernstrategien als wichtige Einflussfaktoren auf den Studienerfolg dargestellt (u.a. Wild, 2005).

## 2. Ziele und Forschungsfragen

Im Forschungsfokus stehen aus Studierendensicht vor allem der Kenntnisstand zu Studienbeginn, die zu Studienbeginn vorhandene und sich im Studienverlauf verändernde subjektive Wahrnehmung des Charakters der Mathematik, das individuelle universitäre Lernverhalten sowie die Ausprägung von „concept image“ und „concept definition“ hinsichtlich ausgewählter zentraler mathematischer Begriffe.

Aus dem Blickwinkel der Hochschuldozentinnen und Hochschuldozenten interessiert uns, wie diese den Kenntnisstand zu Studienbeginn, die subjektive Wahrnehmung der angehenden Studierenden, das individuelle universitäre Lernverhalten sowie die Ausprägung von „concept image“ und „concept definition“ hinsichtlich ausgewählter zentraler mathematischer Begriffe einschätzen. Die weiteren Fragen beschäftigen sich mit der Diskrepanz zwischen der realen und hypothetischen Ausprägung der vier oben genannten Variablen im Perspektivenwechsel Studierende ↔ Dozierende.

Die Forschungsfragen lassen sich also in die drei Bereiche „Studierendensicht (real)“, „Dozierendensicht (hypothetisch)“ und „Diskrepanz zwischen den beiden Sichten“ unterteilen (vgl. Abb. 1).

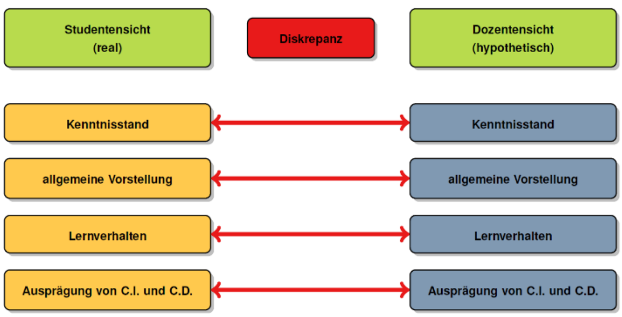



**Abb. 1**: Forschungsfragen.

## 3. Ablauf des Forschungsprojekts

Nahezu alle bisherigen Studien wurden quantitativ durchgeführt und nur selten durch qualitative Daten ergänzt. Deswegen wurde diese Studie bewusst als qualitative Längsschnittstudie konzipiert und begleitet eine Gruppe von rund 30 Studierenden die ersten zwei Semester, um diese zu vier Zeitpunkten mit Hilfe eines leitfadengestützten Interviews zu befragen (s. Abb. 2).

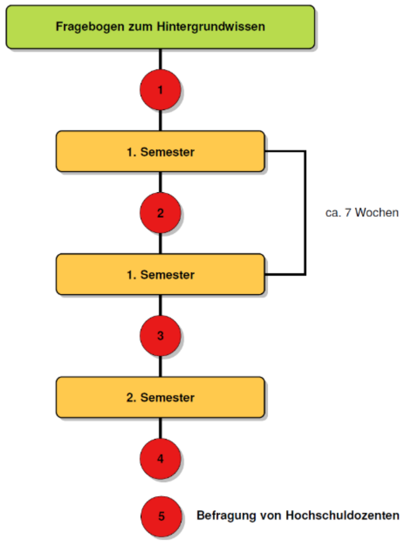



**Abb. 2**: Ablauf des Forschungsprojekts (Interviewzeit-

Zur Abrundung der Studie werden diese Daten mit den Erwartungen und Einschätzungen von Hochschuldozenten verglichen, die ebenfalls durch qualitative Interviews erhoben wurden.

Um eine möglichst heterogene Stichprobe der Studiengänge Lehramt Gymnasium, Bachelor Mathematik, Bachelor Informatik mit Schwerpunkt Mathematik (alle drei vertiefte Vorlesung Lineare Algebra 1) und Lehramt Realschule (nicht vertiefte Vorlesung Lineare Algebra 1) für die Interviews gewinnen zu können, wurde am ersten Tag des Brückenkurses ein Fragebogen zum Hintergrundwissen Mathematik ausgeteilt, den die Studierenden bearbeiten sollten. Ein Großteil der Aufgaben behandelte grundlegende Fertigkeiten und Kenntnisse aus der Schule und orientierte sich an einer Studie von Kajander & Lovric (2005). Zudem wurden offene Fragen zum Bild der Schulmathematik und Erwartungen an die Hochschulmathematik gestellt. An diesem Test nahmen alle Teilnehmer des Brückenkurses Mathematik (N = 111), die am ersten Tag anwesend waren, teil. Anhand der Bearbeitung der Aufgaben und anhand der Antworten auf die offenen Fragen wurden dann geeignete Studienanfängerinnen und Studienanfänger für die Interviews ausgewählt.

Um die Ausprägung von „concept image“ und „concept definition“ erfassen zu können, sollten die Studierenden ab Interviewzeitpunkt 2 zunächst beschreiben, was sie sich unter ausgewählten Begriffen aus der Vorlesung vorstellen und was sie mit diesen Begriffen verbinden. Sie konnten ihre Vorstellung zudem schriftlich visualisieren. Anschließend sollten sie die formale Definition der Begriffe notieren.

## 4. Kenntnisstand zu Studienbeginn – Erste Ergebnisse

Im Folgenden sind exemplarisch die Bearbeitungsstatistiken zu drei Aufgaben aus dem Hintergrundwissenstest Mathematik dargestellt.

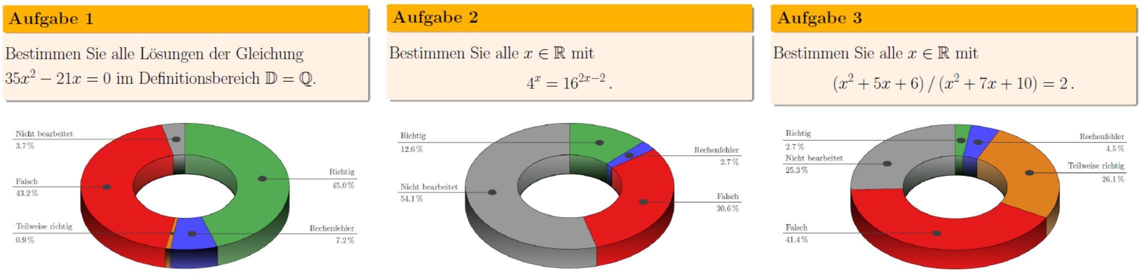



**Abb. 3**: Bearbeitungsstatistiken zu drei Aufgaben aus dem Hintergrundwissenstest Mathematik (N = 111 Studienanfängerinnen und Studienanfänger).

Schwierigkeiten im Übergang zwischen Schule und Hochschule aufdecken und sowohl Studierende wie auch Dozierende dafür sensibilisieren zu können.

## Literatur


Clark, M. & Lovric, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 40(6),* 755-776.

Dieter, M. & Törner, G. (2010). *Zahlen rund um die Mathematik.* Preprint der Fakultät für Mathematik (Universität Duisburg-Essen). Nr. SM-DU-716.

Hefendehl-Hebeker, L., Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2010). Mathematik Besser Verstehen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010.* WTM-Verlag Stein, Münster, 93-94.

Hong Y.Y., Kerr, S., Klymchuk, S., McHardy, J., Murphy, P., Spencer, S., Thomas, M.O.J. & Watson, P. (2009). Modelling the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics Education: Teacher and Lecturer Perspectives. In L. Paditz & A. Rogerson (Hrsg.): *Proceedings of the 10$^{th}$ International Conference of the Mathematics Education into the 21$^{st}$ Century,* 250-254. Dresden, Germany.

Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester.* Münster: Waxmann.

Rösken, B. & Rolka, K. (2007). Integrating Intuition: the Role of Concept Image and Concept Definition for Students‘ Learning of Integral Calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3,* 181-204.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(7),* 151-169.

Wild, K.-P. (2005). Individuelle Lernstrategien von Studierenden. Konsequenzen für die Hochschuldidaktik und die Hochschullehre. *Beiträge zur Lehrerbildung, 23(2),* 191-206.

Jennifer PLATH, Leuphana Universität Lüneburg

# Auswirkung von sprachlichen Hürden auf den Bearbeitungsprozess von mathematischen Textaufgaben

Durch die Notwendigkeit mentale Repräsentationen im Mathematikunterricht aufzubauen, sind das Textverständnis sowie die kompetente Verwendung von (Bildungs-)Sprache verstärkt zu einer zentralen Voraussetzung für die Aufgabenbearbeitung geworden (vgl. Duarte et al. 2011). Diese Voraussetzungen sind insbesondere für Textaufgaben relevant.

## 1. Theoretischer Hintergrund

Durch internationale Vergleichsstudien ins Bewusstsein gerückt, beschäftigen sich verschiedene Studien empirisch mit dem Zusammenhang zwischen sprachlichen Fähigkeiten und Mathematikleistungen.

In der aktuellen Literatur wird angenommen, dass besonders der Sprachstand in der Unterrichtssprache ein benachteiligender Faktor sein kann (vgl. Prediger et al. 2013). Entsprechend kommt etwa die Längsschnittstudie SOKKE zu dem empirischen Ergebnis, dass die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler in der Unterrichtssprache eine zentrale Bedingung für das schulischen Lernen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht darstellen (Heinze et al. 2011). In einer Studie von Heinze et al. (2007) wird aufgrund des signifikant schwächeren Abschneidens von Schülerinnen und Schülern mit Zuwanderungshintergrund und des Verschwindens der Leistungsunterschiede unter Kontrolle des Sprachstandes angenommen, dass Sprache einen großen Einfluss beim Aufbau mentaler Repräsentationen hat.

Dieser Einfluss ist insbesondere bei Textaufgaben relevant, da Leistungsunterschiede bei Textaufgaben deutlich höher sind als bei spracharmen Aufgaben (vgl. Abedi & Leon 1999). Die Leistungen bei Textaufgaben können jedoch durch eine Reduktion der linguistischen Komplexität der Aufgabenstellung verbessert werden (Abedi & Lord 2001).

Die vorhandenen empirischen Studien stellen zwar die Relevanz von Sprache für das Lösen textbasierter Aufgaben im Mathematikunterricht heraus, allerdings gibt es erst wenige Erkenntnisse über spezifische sprachliche Hürden, die den Lösungsprozess von Schülerinnen und Schülern behindern oder beeinflussen können.

Aus einer interdisziplinären Studie zur Untersuchung sprachlicher und konzeptueller Herausforderungen für mehrsprachige Lernende in den Zentralen Prüfungen 10 in Nordrhein-Westfalen im Unterrichtsfach Mathematik

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

liegen bereits erste Ergebnisse zu sprachlichen Schwierigkeitsbereichen vor. Obwohl einzelne lexikalische und syntaktische Merkmale hervorgehoben werden, wird davon ausgegangen, dass das komplexe Zusammenspiel zwischen Textverstehen, Lexik, Morphologie und Syntax sich auf den Erfolg der Bearbeitung auswirken kann (Gürsoy et al. 2013). Haag et al. (2013) untersuchen die Auswirkungen bildungssprachlicher Merkmale von mathematischen Testaufgaben auf differential Item Functioning dieser Testaufgaben bei Schülerinnen und Schülern mit Deutsch als Zweitsprache. Als ein starker Prädiktor für differential Item Functioning erwies sich hierbei die Anzahl der (bildungssprachlichen) Wörter und die Anzahl der Nominalphrasen. In einer Studie von Martiniello (2008) zeigten sich verschiedene lexikalische und grammatikalische Merkmale als möglicherweise schwierigkeitsgenerierend.

## 2. Forschungsfragen und Untersuchungsdesign

Das Forschungsanliegen der Arbeit besteht darin zu untersuchen, durch welche sprachlichen Merkmale in mathematischen Textaufgaben Verstehensschwierigkeiten entstehen und wie sich diese auf den Bearbeitungsprozess auswirken. Bezüglich dieses Anliegens wurden zwei Forschungsfragen formuliert:

1) Welche aus der Literatur bekannten bildungssprachtypischen Ausprägungen weisen realitätsbezogene Textaufgaben aus aktuellen Schulbüchern auf?
2) Welche Auswirkungen hat die Aufgabenvariation mithilfe von einzelnen sprachlichen Ausprägungen auf den Lösungsprozess?

Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage wurde eine korpuslinguistische Analyse durchgeführt. Untersucht wurden 330 anwendungsbezogene Textaufgaben aus den Schulbüchern Mathe live 7, Mathewerkstatt 7, Schlüssel zur Mathematik 7 und Sekundo 7. Es wurden nur Aufgaben ausgewählt, die einen Realitätsbezug, Aufträge zur Einzelarbeit und keine informierenden Diagramme beinhalten. Insgesamt treten in den Aufgaben die Themenbereiche Rationale Zahlen, Zuordnungen, Prozentrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Terme/Gleichungen (Dezimal-)Brüche sowie Flächeninhalt/Volumen auf.

Das Kodiermanual für die linguistische Analyse orientiert sich an typischen Merkmalen für die Fach- bzw. Bildungssprache (vgl. beispielsweise Riebling 2013). Hierbei wurde unterschieden nach Merkmalen der Lexik- und der Syntaxebene. Auf der Lexikebene wurden Fachwörter, Wörter mit divergierender Bedeutung in Alltags- und Fachsprache, Nominalkomposita, Substantivierungen, komplexe Verben und Adjektivderivate näher betrachtet. Auf der Syntaxebene standen Passivformulierungen, Satzgefüge, die Verwendung des Partizips im attributiven Gebrauch und komplexe Attribute im Fokus.

## 3. Erste Ergebnisse

Durch die linguistische Analyse wurde eine Bestandsaufnahme der unterschiedlichen Merkmale in den 330 Aufgaben vorgenommen. Interessant ist, dass die linguistischen Merkmale unterschiedlich häufig vorkommen und kein Merkmal annähernd gleichverteilt in den verschiedenen Themenbereichen auftritt.

Als wenig quantitativ bedeutsam fallen hierbei insbesondere die Wörter mit divergierender Bedeutung in Alltags- und Fachsprache, Substantivierungen, die Verwendung des Partizips im attributiven Gebrauch und komplexe Attribute auf.

Die restlichen Merkmale hingegen treten jeweils mindestens bei 25% aller Aufgaben auf und sind über die Themenbereiche breit verteilt. Diese unterschiedliche Verteilung lässt sich bei einigen Merkmalen durch die genaue Betrachtung des Aufgabenmaterials genauer erklären. Während beispielsweise die mathematischen Fachwörter in mehreren Themenbereichen verstärkt auftreten, fällt bei der Betrachtung der Merkmale Nominalkomposita und Adjektivderivate auf, dass diese signifikant häufiger im Themenbereich Flächeninhalt/Volumen auftreten als in den sechs anderen Themenbereichen. Bei der genauen Aufgabenanalyse lässt sich erkennen, dass die verwendeten Wörter fast ausschließlich Fachkomposita und Fachadjektivderivate sind. Da dieses in den anderen Themenbereichen nicht auftritt, erscheinen diese Merkmale in den vorliegenden Aufgaben als typisch für den Themenbereich Flächeninhalt/Volumen.

## 4. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend lässt sich anhand der Schulbuchanalyse das quantitative Auftreten der zehn linguistischen Merkmale in dem untersuchten Korpus erkennen. Es können jedoch anhand dieser Daten keine Aussagen über potentielle Schwierigkeiten oder die Relevanz der einzelnen Merkmale abgeleitet werden.

Anschließend an diese Bestandsaufnahme wurden die einzelnen Merkmale auf die Möglichkeit zur Variation ohne eine sinnentstellende Veränderung des Satzes überprüft. Für die weiteren Untersuchungen wurden aufgrund dieser Überlegungen mathematische Fachwörter und komplexe Verben als Variationsmerkmale ausgeschlossen.

Ausgehend von der korpuslinguistischen Analyse und den daran anschließenden Überlegung zur Variationsmöglichkeit sollen in der folgenden Studie die linguistischen Merkmale Nominalkomposita, Adjektivderivate, Passivkonstruktionen und Satzgefüge detaillierter untersucht werden. Hierzu werden mithilfe einer qualitativen Pilotierungsstudie erste qualitative Analysen zur Auswirkung der Merkmale auf den Verstehens- und Lösungsprozess durchgeführt. Nachfolgendend werden anhand einer quantitativen Feldstudie statistische Analysen durchgeführt, um zu schauen, ob einzelne Merkmale schwierigkeitsgenerierend sind und welcher Zusammenhang zur sprachlichen Fähigkeit besteht.

## Literatur


Duarte, J., Gogolin, I. & Kaiser, G. (2011). Sprachlich bedingte Schwierigkeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben. In E. Özdil & S. Prediger (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektive der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (S. 35-54). Münster u.a. : Waxmann.

Prediger, S., Renk, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2013). Family background or language disadvantages? Factors for underachievement in high stakes tests. In A. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th conference of the international group for the psychologie of mathematics education* (S. 4.49-4.56). Kiel: PME

Abedi, J. & Leon, S. (1999). *Impact of students' language background variables on content-based performance: Analyses and extant data*. Los Angeles: CRESST.

Abedi, J. & Lord, C. (2001). The language factor in mathematics tests. In: *Applied Measurement in Education*, Heft 14, 219-234.

Gürsoy, E., Benholz, C., Renk, N., Prediger, S. & Büchter, A. (2013). Erlös = Erlösung? – Sprachliche und konzeptuelle Hürden in Prüfungsaufgaben zur Mathematik. In: *Deutsch als Zweitsprache*, Heft 1, 14-24.

Haag, N., Heppt, B., Stanat, P., Kuhl, P. & Anand Pant, H. (2013). Second language learners' performance in mathematics: Disentangling the effects of academic language features. In: *Learning and Instruction*, Heft 28, 24-34.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L. & Reiss, K. (2007). Mathematikkenntnisse und sprachliche Kompetenz bei Kindern mit Migrationshintergrund zu Beginn der Grundschulzeit. In: *Zeitschrift für Pädagogik* 53(4), 562-581.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L., Braun, C. & Reiss, K. (2011). Die Rolle von Kenntnissen der Unterrichtssprache beim Mathematiklernen. Ergebnisse einer quantitativen Längsschnittstudie in der Grundschule. In: S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.). *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (S. 11-33).. Münster u.a.: Waxmann.

Martiniello, M. (2008). Language and the performance of english-language learners in math word problems. In: *Harvard Educational Review*, Heft 78, 333-368.

Riebling, L. (2013). Heuristik der Bildungssprache (S. 106-153). In: I. Gogolin. (Hrsg.). *Herausforderung Bildungssprache. Und wie man sie meistert*. Münster:Waxmann.

Ulrike RODER, Regina BRUDER, Darmstadt

# Das hessische Projekt MAKOS zur Implementierung des neunen Kerncurriculums (KC) Oberstufe

Nach der Einführung der Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife ist es nun die Aufgabe aller Länder, diese in neuen Kerncurricula zu konkretisieren. Für Hessen liegt eine Entwurfsfassung seit November 2014 vor und mit dem Projekt MAKOS (Mathematische Kompetenzentwicklung Oberstufe) sollen die KMK-Empfehlungen und -Vorgaben berücksichtigt und die Implementierung des neuen Kerncurriculums für die Oberstufe unterstützt werden. MAKOS ist ein Kooperationsprojekt zwischen der Universität Kassel, der TU Darmstadt sowie den Studienseminare für berufliche Schulen und Gymnasien in Darmstadt und Kassel, das vom DZLM und vom hessischen Kultusministerium unterstützt wird.

Das Ziel des Projekts ist die Entwicklung und Erprobung technologiegestützter, binnendifferenzierter und kompetenzorientierter Materialbausteine für die Oberstufe, die in Form einer Handreichung zum Kerncurriculum publiziert werden sollen. Das Projekt startete mit dem Schuljahr 2014/15 und ist für einen Zeitraum von zwei Jahren angelegt. Jede der insgesamt 21 Projektschulen entsendet eine Lehrkraft und eine/n Referendar/in zu vier Workshops pro Schuljahr, in denen unter professioneller Begleitung die Materialien entwickelt und im Anschluss in den Jahrgangsteams der beteiligten Schulen erprobt werden. Die Materialien stehen weiterhin auf einer gemeinsamen Kommunikationsplattform für alle Teilnehmer zur Verfügung. Zur Evaluation des Projektes werden unter anderem Lehrer- und Schülerfragebögen sowie ein online-Test zum Grundwissen und –können bezogen auf Inhalte der Sekundarstufe I eingesetzt. Die Qualitätssicherung im Rahmen der Materialentwicklung erfolgt einerseits durch die Erprobung im Unterricht und andererseits durch die wissenschaftliche Begleitung des Entwicklungs- und Erprobungsprozesses an den beiden Universitäten. Darüber hinaus werden in einer begleitenden Studie Effekte auf bestimmte Konstrukte der Selbstregulation in Verbindung mit binnendifferenzierenden Unterrichtsbausteinen untersucht (s. Abschnitt 3).

Wesentliche Anknüpfungspunkte für das MAKOS Projekt bieten die Konzepte und Erfahrungen erfolgreicher Modellprojekte im Bereich Binnendifferenzierung (MABIKOM Sek I) und Technologieeinsatz (CAliMERO Sek I/ Sek II). So wurde beispielsweise im niedersächsischen Projekt MABIKOM ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung in der Sekundarstufe I entwickelt und erprobt, das nun im Projekt MAKOS für die Oberstufe adaptiert wird (Bruder, Reibold & Wehrse 2013).

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Ein binnendifferenziertes Unterrichtskonzept für die Oberstufe

Die Eckpfeiler des Unterrichtskonzepts von MAKOS zur offenen Differenzierung bilden vier didaktische Kernelemente (Bruder & Reibold 2012):

- differenzierte **Ausgangsniveausicherung** (grundlegendes Wissen und Können wachhalten und entstandene Lücken schließen) mithilfe von *vermischten Kopfübungen*
- Sicherstellung der **Ziel- und Inhaltstransparenz** für die Lernenden mittels *differenzierender Unterrichtseinstiege* und *semantischer Netze (Mindmaps)*
- Förderung der **Selbstregulation** (Kompetenzdiagnose mit Selbsteinschätzung) mittels des *Lernprotokolls* und der *Checkliste*
- differenzierte **kognitive Aktivierung** der Lernenden (bei der Erkenntnisgewinnung und beim Festigen durch angepasste Anforderungen an unterschiedliche Lernvoraussetzungen) mittels *Aufgabensets, Blütenaufgaben* und *langfristige Hausaufgaben*

Eine ausführliche Begründung dieser Kernelemente vor dem Hintergrund der Tätigkeitstheorie findet sich bei Bruder und Reibold (2012). In der unten stehenden Abbildung ist ein Überblick zu den Unterrichtsbausteinen des binnendifferenzierten Konzepts im MAKOS Projekt gegeben, anhand derer die vier Kernelemente spezifiziert werden.

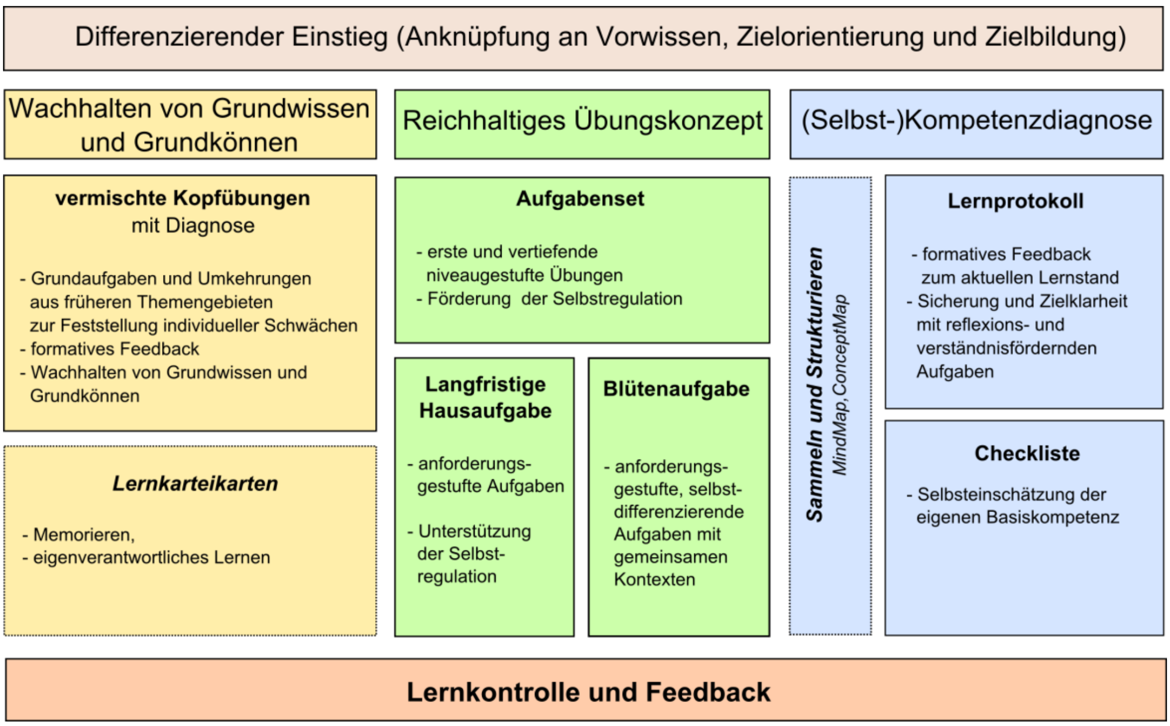



**Abbildung 1:** Gestaltungselemente eines binnendifferenzierten Unterrichtskonzepts

### Förderung der Selbstregulation in Verbindung mit binnendifferenzierenden Unterrichtsbausteinen

Insbesondere mit Blick auf den Übergang von Schule-Hochschule kommt dem Kernelement „Förderung der Selbstregulation“ in dem binnendifferenzierenden Unterrichtskonzept eine wesentliche Bedeutung zu. Von Seiten der Hochschule werden unter anderem in den Bereichen der Selbstorganisation, Selbsteinschätzung und Anstrengungsbereitschaft bei den Studienanfänger/innen Defizite festgestellt (Koepf & Kramer 2014). Somit ist es auch Aufgabe des Unterrichts in der gymnasialen Oberstufe diese allgemeinen Kompetenzen zu befördern. In einer Begleitstudie im Rahmen des MAKOS Projekts wird diesbezüglich der Einfluss bestimmter binnendifferenzierender Unterrichtsbausteine auf Konstrukte der Selbstregulation untersucht. Hierbei wird Selbstregulation als ein Prozess der adaptiven Zielverfolgung verstanden, bei dem die Lernenden aktiv und eigenständig Einfluss auf den Lernprozess nehmen (Zimmerman & Schunk 2011). Dabei lässt sich in diesem Prozess eine präaktionale Phase, eine aktionale Phase und eine postaktionale Phase unterscheiden, was in Abbildung 2 verdeutlicht wird (Schmitz & Schmidt 2007). In der Studie wird sich hauptsächlich auf die Phasen vor und nach der eigentlichen Lernhandlung konzentriert. In der präaktionalen Phase spielen laut Schmidt und Schmitz (2007) insbesondere die Zielbildung und die Selbstwirksamkeitsüberzeugung des Lernenden eine wesentliche Rolle und als ein weiteres Konstrukt der postaktionalen Phase wird die Selbstreflexion nach der Lernhandlung und damit verbunden die Fähigkeit zu einer realistischen Selbsteinschätzung untersucht.

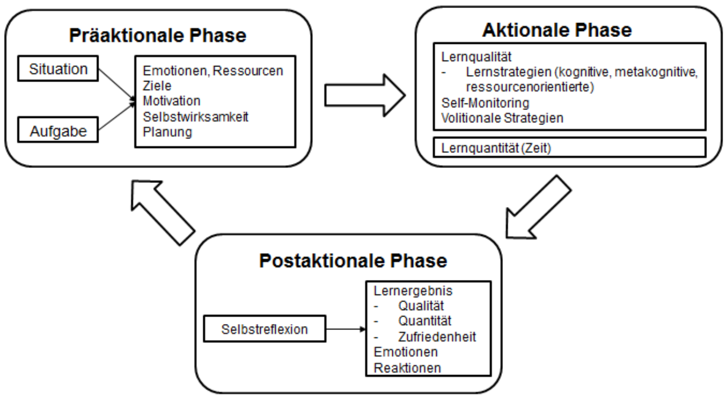



**Abbildung 2:** Prozessmodell Selbstregulation (nach Schmitz & Schmidt 2007, S. 12).

Diese Konstrukte der Selbstregulation werden in Verbindung mit der binnendifferenzierten Methode Aufgabenset betrachtet. Im Rahmen des Unterrichtskonzepts zielt das Aufgabenset darauf ab, unterschiedliche Lernvoraussetzungen bereits in den ersten Übungen zu einem neuen mathematischen Inhalt zu berücksichtigen (Bruder, Reibold & Wehrse 2013). Dabei stehen den Lernenden zehn schwierigkeitsgestufte Aufgaben (Level I-III) zu einem mathematischen Inhalt zur Auswahl und differenziert wird über das Einstiegslevel der Aufgabenbearbeitung, da hier nicht alle Aufgaben bearbeitet werden müssen (in der Regel 5 aus 10 Aufgaben in einer vorgegebenen Zeit). Durch diese Konzeption ist es für die

Lernenden möglich, Aufgaben individuell passend zu ihrem jeweiligen Entwicklungsstand auszuwählen. In der Begleitstudie wird nun untersucht, inwiefern das Arbeiten mit Aufgabensets eine individuelle Zielbildung, die Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und die Fähigkeit zur Selbsteinschätzung fördert. Insbesondere die Selbstwirksamkeit wird als wesentliches Konstrukt der Selbstregulation betrachtet und kann am effektivsten durch eigene Erfolgserlebnisse gefördert werden (Bandura 1997). Diese müssten durch die Konzeption der Aufgabensets für einen Großteil der Lernenden ermöglicht werden, insofern eine passende Aufgabenauswahl erfolgt. Die individuelle Zielbildung und Selbstreflexion wird durch das Aufgabenset zunächst nur indirekt angeregt, weshalb hier „Methoden-Bausteine" zum Setzen eigener Lernziele vor der Aufgabenbearbeitung mit Bezug zu dem jeweiligen mathematischen Inhalt entwickelt werden, die diese Komponente der Selbstregulation direkt ansprechen sollen. Weiterhin wird ein Element zur Selbsteinschätzung im Anschluss an die Bearbeitung des Aufgabensets ergänzt, das einerseits eine realistische Selbsteinschätzung mit Rückbezug zum zuvor gesetzten Lernziel anregen soll und andererseits explizit zum Fassen von Vorsätzen für das weitere Lernen auffordert.

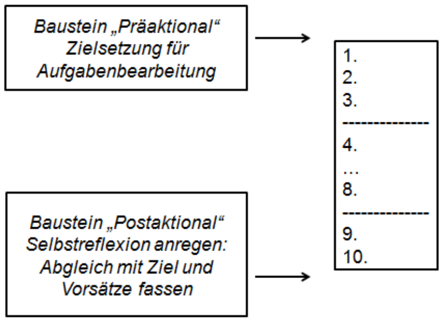



**Abbildung 3:** Direkte Förderung der Selbstregulation durch das Aufgabenset

## Literatur

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: The exercise of control. New York: Freeman.

Bruder, R., Reibold, J. & Wehrse, T. (2013). Binnendifferenziertes Aufgabenmaterial für den Mathematikunterricht der Sek I. Braunschweig: Schroedel Schulbuchverlag.

Bruder, R. & Reibold, J. (2012). Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis (S. 67-92). Bad Heilbronn: Klinkhardt Verlag.

Koepf, W. & Kramer, J. (2014). Der Beitrag der Bildungsstandards zum Übergang Sekundarstufe II – Universität (to appear).

Schmitz, B. & Schmidt, M. (2007). Einführung in die Selbstregulation. In M. Landmann & B. Schmitz (Hrsg.), Selbstregulation erfolgreich fördern. Praxisnahe Trainingsprogramme für effektives Lernen (S. 9-18). Stuttgart: Kohlhammer.

Zimmerman, B. J. & Schunk, D. H. (2011). Self-regulated Learning and Performance: An Introduction and an Overview. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Eds.), Handbook of Self-regulation of Learning and Performance (pp. 1-12). New York, London: Routledge.

Anna-Katharina ROOS, Würzburg

# Fehlvorstellungen Mathematikstudierender im Hinblick auf reelle Funktionen

Verständnis- und Lernschwierigkeiten begegnet man beim Lehren von Mathematik an der Hochschule häufig, u. a. bei der Korrektur von Klausuren oder in Übungen und Tutorien. Auch beim Arbeiten mit reellen Funktionen (im Fachgebiet Analysis), die sowohl am Gymnasium zentral sind als auch in der Hochschulmathematik eine Grundlage für weitere Gebiete darstellen, treten immer wieder gleiche oder ähnliche Fehler beim Bearbeiten von Aufgaben auf, worauf u. a. Dreyfus und Eisenberg (1983) hinweisen. Die Bedeutung der Fehleranalyse allgemein unterstreicht Oser et al. (1999) durch die Theorie des „negativen“ Wissens. Er bezeichnet das Wissen über mögliche Fehler („negatives“ Wissen) als Schutzwissen, da es angibt, was in einer Situation nicht getan werden darf. Auch Schoy-Lutz (2005) behauptet im Hinblick auf die Schule, dass Fehler, die auf Grund von Fehlvorstellungen entstehen, nur vermieden werden können, wenn man die Denkstrategien der Schüler beachtet. Auch hinsichtlich Lernschwierigkeiten an der Hochschule erscheint es somit sinnvoll, Fehler genauer zu betrachten und eventuell einen Überblick über typische Denkmuster bzw. Fehler und Fehlvorstellungen zu gewinnen. Denn wie schon Vinner und Dreyfus (1989) feststellen „The knowledge of these[1] particular cognitive schemes may make the teacher more sensitive to students‘ reactions and thus improve communication.“

Dreyfus und Eisenberg (1983) bemerken zum Funktionsbegriff: „The function concept is one of the most fundamental in all of mathematics and one for which students seldom develop a satisfactory understanding.“ Sie haben sich daher mit Intuitionen Studierender (der Fächer Wirtschaft, Geographie etc.) zum Begriff der Funktion beschäftigt und bestätigen, dass die Studierenden Schwierigkeiten mit den Begriffen Linearität, Differenzierbarkeit und Periodizität haben. Außerdem haben Dreyfus und Eisenberg (1984) die Intuitionen von Junior High School Schülern bzgl. des Funktionsbegriffs mit Hilfe eines Fragebogens geprüft. Wie beide (1982) beschreiben, verstehen sie unter Intuitionen geistige Repräsentationen von Tatsachen, die offensichtlich und selbstverständlich erscheinen.

Auch Vinner und Dreyfus (1989) haben sich mit dem Funktionsbegriff beschäftigt. Sie haben zu Beginn einer Analysis Vorlesung Vorstellungen

---

[1]Gemeint sind jene Denkschemata, die bei derselben Person in unterschiedlichen, zeitnahen Situationen auftreten können.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Studierender mit von diesen gegebenen Definitionen vom Funktionsbegriff verglichen und Übereinstimmungen und Unterschiede aufgezeigt.

Besondere Beachtung haben Tsamir und Ovodenko (2013) Schwierigkeiten bzgl. Wendepunkten geschenkt. Sie haben sowohl auf der sprachlichen, als auch auf der graphischen Ebene untersucht, inwieweit Mathematikstudierende diesen Begriff verinnerlicht haben und anwenden können. Dabei haben sie vier Fehler ermittelt, die in Beziehung mit Wendepunkten stehen und Schwierigkeiten, die in Beziehung mit den Beweistechniken der Studierenden stehen. Insgesamt wurde gezeigt, dass die Probanden fehlerhafte concept images (s. Tall und Vinner (1981)) von Wendepunkten besitzen.

Im Gegensatz zu dieser speziellen Betrachtung des Begriffs des Wendepunktes, sollen im Folgenden die allgemeineren Begriffe Monotonie, Differenzierbarkeit und Extremwerte untersucht werden. Diese sind zentral im Umgang mit Funktionen und spielen gerade für die geometrische Interpretation von Funktionseigenschaften eine wichtige Rolle.

Es gilt zu beachten, dass die nachfolgende Arbeit noch im Entstehen ist und daher noch keine endgültigen Ergebnisse präsentiert werden können.

Ziele und Forschungsfragen sind die Folgenden: Welche Fehler und Fehlvorstellungen lassen sich im Hinblick auf die Themengebiete Monotonie, Extremwerte und Differenzierbarkeit bei den Studierenden nachweisen? Wie verbreitet ist der jeweilige Fehler? Welche Ursachen könnten die identifizierten Fehlerphänomene haben? Beeinflusst die Repräsentationsebene der Aufgabenstellung die Lösungen der Studierenden?

Um Fehlvorstellungen aufzudecken, gibt es viele Möglichkeiten. Im Rahmen dieser Untersuchung wurden – bzw. werden – Fragebögen und Interviews verwendet. Die Fragebögen sollen dabei zwei verschiedene Repräsentationsebenen ansprechen: Zum einen die symbolische Ebene durch einen sprachlichen Test, zum anderen die graphische Ebene durch einen graphischen Test. Inhaltlich sollen dieselben Themen angesprochen werden, um gezielt die möglicherweise unterschiedliche Bearbeitung der beiden Tests vergleichen zu können.

Bisher wurde der sprachliche Test entwickelt. Dieser besteht aus 20 Aussagen (die je ein Item darstellen) über Funktionen, die die Studierenden auf ihren Wahrheitsgehalt hin untersuchen sollen. Es sind dabei 15 Aussagen falsch und fünf Aussagen wahr. Die Aussagen behandeln die Gebiete Monotonie, Extremwerte, Differenzierbarkeit (diese können jedoch nicht immer scharf voneinander getrennt werden). Der graphische Test ist noch in Entwicklung.
Im sprachlichen Test sollen sich die Studierenden zum einen entscheiden,

ob sie eine Aussage als wahr oder falsch annehmen, zum anderen ist zusätzlich eine Begründung gefordert für die Entscheidung, ob die Studierenden denken, dass eine Aussage wahr oder falsch ist. Die Antwort wird hierbei gelenkt durch die Möglichkeiten: „wahr, aus der Vorlesung bekannt“, „wahr, intuitiv klar“, „wahr, sonstiges“ und „falsch, ein Gegenbeispiel ist“. Auf dem Fragebogen ist außerdem viel Platz, damit die Studierenden ihre Begründungen anhand von Zeichnungen illustrieren können. Für die Bearbeitung haben sie 60 Minuten Zeit. Dieser Test wurde in der Bachelorveranstaltung Analysis II im Sommersemester 2014 in Würzburg durchgeführt.

### Quantitative Ergebnisse

Folgende Tabelle zeigt den Anteil der richtigen Antworten der Studierenden zu den Items der Gebiete Monotonie, Extremwerte, Differenzierbarkeit und wahre Items, wobei in der Spalte „Ankreuzen“ lediglich die Entscheidung wahr oder falsch berücksichtigt wurde, d. h. die Tatsache, ob die Studierenden richtig angekreuzt haben, dass eine Aussage wahr bzw. falsch ist. In der Spalte „Begründung“ wurde untersucht, ob die notierten Begründungen der Studierenden mathematisch korrekt sind.

| | Ankreuzen | Begründung |
|---|---|---|
| wahre Items | 86 % | 37 % |
| Monotonie | 35 % | 18 % |
| Extremwerte | 37 % | 17 % |
| Differenzierbarkeit | 21 % | 4 % |

Die Tabelle zeigt beispielsweise, dass die Studierenden die falschen Items, die primär die Monotonie betreffen, zu 35 % als falsche Aussagen erkannt haben, aber nur 18 % dies begründen konnten. Man sieht, dass insgesamt die wahren Items am besten bearbeitet wurden. Außerdem ist schnell klar, dass es den Studierenden – wie erwartet – schwer gefallen ist, ihre Entscheidungen zu begründen. Weitere Auswertungen sind noch in Arbeit.

### Qualitative Ergebnisse

Eine qualitative Auswertung bestand in der Bildung von Antwortkategorien zu jedem Item. Im Anschluss wurden die einzelnen Kategorien miteinander verglichen und Oberkategorien dadurch gebildet, dass die Kategorien der jeweiligen Items zusammengefasst wurden. Es trat z. B. die Verwechslung von Voraussetzung und Folgerung bei drei Items auf, wodurch eine Oberkategorie dazu erstellt wurde.

Zu den Oberkategorien gehören u. a. methodische Fehler etwa, wie oben genannt, die Verwechslung von Voraussetzung und Folgerung, Nichtbeachtung gewisser Voraussetzungen und Zusatzannahmen. Diese Art von Fehler stellt auch Radatz (1980) dar. Außerdem lassen sich inhaltliche Fehler zur Differenzierbarkeit, zu Extremwerten und zur Monotonie finden. Bezüglich der Monotonie sind das z. B. dass konstante Funktionen nicht als monoton erkannt werden, dass die Addition zweier monotoner Funktionen wieder eine monotone Funktion ergibt und dass monoton mit injektiv gleichgesetzt wird. Ein weiteres spannendes Feld für mögliche unzureichende Vorstellungen ist die Oberkategorie Probleme mit der Oszillationsvorstellung.

Ovodenko und Tsamir (2013) bemerken „[…] more research is needed to study students‘ intuitions, concept images, visualization, definitions, proofs, and comprehension of conversions from certain semiotic representations to other“. Es könnte auch hier interessant sein zu vergleichen, ob Studierende auf ähnliche Problemstellungen auf der graphischen Ebene anders als auf der symbolischen Ebene reagieren.

In einem graphischen Test sollen daher in nächster Zeit dieselben Inhalte getestet werden wie im sprachlichen Test. Neben der Entwicklung und dem Einsatz eines graphischen Tests, sind die Durchführung von Interviews sowie die Fertigstellung der Auswertung des sprachlichen Tests geplant.

## Literatur


Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions, Journal for Research in Mathematics Education, 13 (5), 360-380.

Dreyfuß, T., Eisenberg, T. (1983). The Function Concept in College Students: Linearity, Smoothness and Periodicity. Focus on learning problems in mathematics, 5, 119-132.

Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1984). Intuitions on functions. The Journal of Experimental Educational, 77-85.

Oser, F., Hascher, T., & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In W. Althof (Hrsg.), Fehlerwelten (S. 11-41). Opladen: Leske+Budrich.

Radatz, H. (1980). Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.

Schoy-Lutz, M. (2005). Fehlerkultur im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franz-Becker Verlag.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics, 12(2), 151-169.

Tsamir, P., Ovodenko, R. (2013). University students’ grasp of inflection points. Educational Studies in Mathematics, 83(3), 409-427.

Vinner, S., Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Education, 20(4), 356-366.

Marcel SCHAUB, Regina BRUDER, Darmstadt

# Qualitätskriterien für diagnostische Tests im Übergang Schule - Hochschule

In fast allen Fachhochschulen und Universitäten werden Mathematik-Vorkurse am Übergang von der Schule zur Hochschule eingesetzt. Neben dem Nutzen für die Evaluation eines solchen Vorkurses sind diagnostische Elemente in Form von geeigneten Tests von besonderer Bedeutung bei der Erfassung von Grundwissen und -können für eine Individualdiagnostik der Studienanfänger.

## Anforderungen an diagnostische Tests im Übergangsbereich Schule - Hochschule

Für jeden (diagnostischen) Test ist ein ökonomisches Design wünschenswert (vgl. Moosbrugger & Kelava, 2012, S.21).

Durch die hohen Teilnehmerzahlen der meisten Vorkurse ist ein online-Test mit automatisch auswertbaren Items sinnvoll. Dies schränkt die Wahl der Itemformate zwar ein, andernfalls wäre aber der Korrekturaufwand enorm und kaum in kurzer Zeit zu bewältigen.

Des Weiteren sollte der Zeitaufwand für die Studiereden angemessen sein. Da im Übergang Schule – Hochschule eine große Breite des benötigten Grundwissens und –könnens vorliegen sollte (vgl. auch cooperation Schule-Hochschule, 2014), müssen bei der Inhaltsbestimmung diagnostischer Tests Schwerpunkte gesetzt werden.

Neben der Inhaltsbestimmung stellt auch die Entwicklung eines geeigneten Kompetenzstrukturmodells eine große Herausforderung dar. Ein erster möglicher Ansatz im VEMINT-Projekt wird von Fischer (2014) beschrieben. Er unterscheidet u.a. rechnerisch-technische Fähigkeiten und mathematisches Verständnis (vgl. Fischer, 2014, S.66), deren Verhältnis auch als offene Fragestellung bei Pinkernell und Greefrath (2011, S. 109) dargelegt wird.

Nach der Festlegung von Inhalten und Kompetenzen müssen entsprechende Items konstruiert werden, die zudem valide und reliabel sind (vgl. Moosbrugger & Kelava, 2012, S. 11 ff.). Da eine Einschränkung der verwendbaren Itemformate vorliegt, ist es besonders schwierig diese Kriterien zu erfüllen. Damit das Potenzial eines Tests zur individuellen Diagnose auch genutzt werden kann, ist ein adäquates automatisch - generiertes Feedback nötig, das Hinweise zum Weiterlernen gibt.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## Ausgangslage Itemkonstruktion

Die Qualität eines Testitems, die durch ein gut gewähltes Itemformat erlangt werden kann, wird anhand des Lernziels „Wurzelgleichungen lösen können“ beispielhaft erläutert. Die nötigen Teilschritte, die für dieses Lernziel erwartet werden, sind Quadrieren, die Gleichung auflösen und die erhaltenen Lösungen zur Probe erneut in die Gleichung einsetzen.

In Abbildung 1 ist eine entsprechende Aufgabe als Single Choice- Format dargestellt. Der Nachteil dieses Formats ist die hohe Ratewahrscheinlichkeit von 25%. Außerdem kann bei der geringen Anzahl von Distraktoren so lange jede Antwortmöglichkeit in die Gleichung eingesetzt werden, bis die richtige Antwort erhalten wird und somit das eigentliche Lernziel nicht getestet wird. Die Aufgabe ist nicht valide.

Für welches $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Gleichung: $\sqrt{34-2x} = 5 - x$

Kreuzen Sie die richtige Lösung an:

☐ -2 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1

**Abbildung 1:** Aufgabe im Single-Choice-Format „1 aus 4“

Für welches $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Gleichung: $\sqrt{34-2x} = 5 - x$

Geben Sie hier Ihre Lösung an: ________

**Abbildung 2:** Aufgabe im offenen Aufgabenformat mit Vorgabe einer richtigen Lösung

Die Darstellung als Kurzaufsatz-Antwort (siehe Abbildung 2) ermöglicht den Einsatz der Aufgabe ohne diese Nachteile, dennoch sind Hinweise auf die Lösung notwendig. Wenn die Anzahl der Lösungen nicht sofort erkennbar ist, zeigt das offene Kurzaufsatz-Antwort-Format Schwächen. In Abbildung 2 wird die Anzahl mit einer richtigen Antwort vorgegeben, was den Prozess der Aufgabenlösung beeinflussen kann. Mehr Antwortfelder als korrekte Lösungen anzubieten ist irreführend in der Eingabe und je nach verwendeter Software umständlich auszuwerten.

**Aufgabe 4 (Aart3)**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Gleichung: $\sqrt{34-2x} = 5 - x$

Kreuzen Sie **alle** Lösungen an, die zu einer wahren Aussage führen. Antwort:

☐ $-10$ ☐ $-9$ ☐ $-8$ ☐ $-7$ ☐ $-6$ ☐ $-5$

☐ $-4$ ☐ $-3$ ☐ $-2$ ☐ $-1$ ☐ $-0$ ☐ $1$

☐ $2$ ☐ $3$ ☐ $4$ ☐ $5$ ☐ $6$ ☐ $7$

☐ $8$ ☐ $9$ ☐ $10$

**Abbildung 3:** Aufgabe im Multiple-Response-Format

Mit dem Multiple-Response-Format, wie es in Abbildung 3 verwendet wurde, können die Nachteile der vorherigen Formate vermieden werden.

Die Anzahl der korrekten Antworten ist nicht vorgegeben und anhand der Distraktoren nicht zu vermuten, zudem ist durch die hohe Anzahl an Distraktoren das Einsetzen aller Antwortmöglichkeiten unökonomisch geworden. Auch die Ratewahrscheinlichkeit wird geringer.

Analysen der aufgetretenen Fehler im Rahmen des VEMINT-Projekts im letzten Wintersemester ließen vermuten, dass einige Testpersonen statt der Lösungsmenge der Gleichung nur den Definitionsbereich des Wurzelterms berechnet haben. Außerdem lassen sich psychologische Effekte, basierend auf Testerfahrung, nicht ausschließen.

Es zeigt sich also, dass das Multiple-Response-Format, wenn es sich sinnvoll konstruieren lässt, Vorteile gegenüber dem Single- Choice- Format hat. Außerdem hat sich gezeigt, dass bei der Distraktorenentwicklung alle Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren, die in der Aufgabe eine Rolle spielen, berücksichtigt werden sollten. Diese stehen aber nicht für sich alleine, sondern im direkten Zusammenhang mit den getätigten Schülerhandlungen.

## Schülerhandlungen und Itemformate

Zur Beschreibung von Schülerhandlungen wird das Modell von Bruder und Brückner (1989) herangezogen. Sie unterscheiden in den Elementarhandlungen (im Original „elementare Aneignungshandlungen“) das Identifizieren und Realisieren. Unter **Identifizieren** verstehen sie dabei die „[…]Feststellung von Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung auf der Grundlage eines den jeweiligen Abbildungsmerkmalen entsprechenden Idealisierens der gegebenen Objektsituation“ (Bruder & Brückner, 1989, S. 79). Das **Realisieren** beschreibt das „Transferieren, Konkretisieren oder Spezialisieren eines vorgegebenen (bzw. identifizierten) Handlungsgegenstandes […]“ (Bruder & Brückner, 1989 S. 79 f.)

Als Beispiel wird der Darstellungswechsel vom Funktionsterm zum Graphen herangezogen. Wird die dazugehörige Aufgabe offen gestellt (Skizzieren Sie den Graphen…), dann wird das Realisieren des konkreten Graphen gefordert. Zuvor ist jedoch ein gedankliches Identifizieren der Funktionseigenschaften notwendig, um das Realisieren durchführen zu können. Wird die Aufgabe hingegen als Multiple-Choice-Format mit gegebenen Graphen formuliert, dann genügt es, den richtigen Graphen anhand seiner Eigenschaften zu identifizieren ohne jede Realisierungshandlung. Dieses Beispiel zeigt, dass die Itemformate die Schülerhandlungen deutlich beeinflussen können.

Nitsch (in press) hat empirisch gezeigt, dass bei Multiple-Choice-Formaten zu Darstellungswechseln im Bereich linearer und quadratischer Funktionen nur Identifizieren benötigt wird, wohingegen Realisieren eine andere Anforderungsstruktur besitzt. Ein Ansatz von Winter (2011) zeigt, dass durch MC-Formate auch Realisieren gefordert werden kann. Durch zeitversetztes Einblenden von Itemstamm und Antwortformat (vgl. Winter, 2011, S. 85) muss die Aufgabe wie eine offene Aufgabe gelöst werden, sodass die Realisierungshandlung bei diesen Multiple-Choice-Formaten erforderlich ist.

### Resultierende Forschungsfragen

Die bisherigen Überlegungen führen zu folgenden Forschungsfragen, die in der geplanten Promotion bearbeitet werden sollen:

1. Lässt sich das Ergebnis von Nitsch für weitere Inhaltsbereiche bestätigen?
2. Lässt sich Realisieren als von anderen Handlungen unterscheidbare Anforderungsstruktur empirisch bestätigen?
3. Welche Zusammenhänge gibt es zwischen weiteren Itemformaten und Elementarhandlungen?

## Literatur


Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht, *30* (6), 72–82.

cooperation Schule-Hochschule. (2014). *Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0). der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WIMINT-Fächern*.

Fischer, P. R. (2014). *Mathematische Vorkurse im Blended-Learning-Format. Konstruktion, Implementation und wissenschaftliche Evaluation* (Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Mathematik und in der Statistik). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Moosbrugger, H. & Kelava, A. (2012). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion. Mit 66 Abbildung und 41 Tabellen* (Springer-Lehrbuch, 2., aktual. und überarb. Aufl.). Berlin: Springer.

Nitsch, R. (in press). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge,* TU Darmstadt. Darmstadt.

Pinkernell, G. & Greefrath, G. (2011). Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule. *MNU, 64* (2), 109–113.

Winter, K. (2011). *Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse.* Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Ute SKAMBRAKS, Berlin

# Verbindung von fachlichen und fachdidaktischen Aspekten im Lehramtsstudium Mathematik

## 1. Einleitung

Im Rahmen des Projektes „MINT – Lehrerbildung neu denken“ [1], gefördert von der *Deutsche Telekom Stiftung*, durchgeführt am Fachbereich Mathematik und Informatik der Freien Universität Berlin, unter der Leitung von Frau Prof. Lutz-Westphal, wurden einige Maßnahmen zur Verbesserung der Studieneingangsphase für das Lehramt Mathematik entwickelt und im Sommersemester 2014 sowie im Wintersemester 2014/15 durchgeführt. In Umfragen und Interviews unter Lehramtsstudierenden am Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin wurde besonders die empfundene fehlende Nützlichkeit für den späteren Beruf der Mathematikveranstaltungen angesprochen. Um die Wichtigkeit der wissenschaftlichen Ausbildung deutlich zu machen, wurde der Versuch gemacht, sowohl von fachlicher als auch von fachdidaktischer Seite eine klare Verbindung herzustellen und speziell die Verknüpfung von Schul- und Hochschulmathematik aufzuzeigen. An Hand von Beispielen wird hier die Umsetzung beschrieben.

## 2. Hintergrund

Um die Studieneingangsphase von Lehramtsstudierenden in der Mathematik an der Freien Universität Berlin zu verbessern, wurden zunächst verschiedene Umfragen unter Studienanfängerinnen und - anfängern durchgeführt. In diesen Umfragen wurde deutlich, dass unter den Studierenden ein großer Wunsch nach Nützlichkeit herrscht. Außerdem wurde deutlich, dass der Zusammenhang von Hochschulmathematik und der später zu unterrichtenden Schulmathematik größtenteils nicht wahrgenommen wird. Dadurch werden die Mathematikveranstaltungen, die zu Beginn eines Lehramtsstudiums Mathematik stehen, als nahezu bedeutungslos für den beruflichen Werdegang angesehen und erscheinen vielen Studierenden ausschließlich als große Hürde, die es irgendwie zu überwinden gilt. Um auf dieses Problem zu reagieren, wurden verschiedene Ansätze entwickelt, die die Nützlichkeit hochschulmathematischen Wissens verdeutlichen sollten, damit die Studierenden im Laufe ihres Studiums in die Lage versetzt werden, sich den hochschulmathematischen Hintergrund zu verschiedenen schulmathematischen Themen selbstständig zu erschließen. Die Grundidee ist eine intensive Zusammenarbeit zwischen der Mathematik und der Fachdidaktik, um an ausgewählten Beispielen den Zusammenhang zwischen Schul- und

---

[1] http://www.fu-berlin.de/sites/mint-lehrerbildung/projekt/tp1/tp1-2/index.html.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Hochschulmathematik klar herauszuarbeiten und den angehenden Lehrerinnen und Lehrern deutlich zu machen.

## 3. Durchführung

Im Sommersemester 2014 fand die Veranstaltung „Analysis I (lehramtsbezogen)“ statt. An dieser Vorlesung nahmen zum Großteil Studierende des 1. Semesters teil. Begleitend zu der Vorlesung und den Übungsgruppen fand eine Zentralübung statt, zu deren Beginn allgemeine Fragen zu der Vorlesung und ihren Inhalten besprochen wurden. Der zweite Teil war so angedacht, dass Vorlesungsinhalte aufgegriffen und in die Schulmathematik eingebettet werden sollten. Zum Beispiel wurde der Grenzwertbegriff in Schulbüchern verschiedener Klassenstufen gefunden und so in direkten Zusammenhang mit dem Vorlesungsstoff gebracht. Ein weiterer wesentlicher Aspekt waren die wöchentlich zu bearbeitenden Übungsaufgaben. Regelmäßig gab es lehramtsspezifische Übungsaufgaben, die in Zusammenarbeit mit dem Dozenten entwickelt wurden. Die Idee hinter der Zentralübung und den Übungsaufgaben war, bereits im ersten Semester des lehramtsbezogenen Studiums die Verknüpfung der in der Vorlesung behandelten Mathematik und des Schulstoffes herzustellen. Ganz gezielt sollten hier die Themen aus der Vorlesung in Bezug zu Themen aus dem aktuellen Rahmenlehrplan gesetzt und auch verglichen werden.

Ein konkretes Beispiel einer Übungsaufgabe:

Eine Schülerin der 6. Klasse schreibt:

Wir haben gelernt: 1/9 = 0,111... , 3/9 = 0,333... usw. Was aber ist dann 0,999...? Unsere Lehrerin hat gesagt, das wäre 9/9. Das kann aber doch nicht sein. Das wäre doch 1 und 0,999.... ist ein Unendlichstel kleiner als 1. Gibt es 0,999... überhaupt? Aber eine Zahl, die ich mir ausdenken kann, muss es doch geben. Wie kommt man an 0,999...?

Aufgabe:

(a)Worin liegt die Bedeutung des Cauchy-Kriteriums?

(b) Wie würden Sie die Frage der Sechstklässlerin beantworten?

(c) Die Schülerin hat intuitiv die Vollständigkeit von **R** erfasst; woran kann man das in ihrer Anfrage erkennen? Und wie wurde die Vollständigkeit in der Vorlesung technisch präzise beschrieben?

Die Reaktionen auf die lehramtsbezogenen Übungsaufgaben war sehr positiv. Bei der Durchführung der Zentralübung gab es verschiedene Schwierigkeiten, die sich jedoch größtenteils durch fachbereichsinterne Strukturen erklären lassen. Der zweite Angriffspunkt war die Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik“ im Wintersemester 2014/15, die von den meisten Studierenden im 3. oder 5. Semester gehört wird und die die erste mathematikdidaktische Veranstaltung im Studienverlauf darstellt. Als Voraussetzung für die Teilnahme gilt eine erfolgreiche Teilnahme an der Vorlesung zur Analysis I. Die Inhalte der linearen Algebra sind einem Teil der Teilnehmer bereits bekannt, Elementargeometrie und Stochastik werden jedoch von den meisten Studierenden erst in folgenden Semestern gehört. In dieser Veranstaltung wurden klassische Schülerfragen und -probleme hochschulmathematisch untersucht und beantwortet, damit die Studierenden die Bedeutung der Inhalte der bereits gehörten Mathematikvorlesungen erleben konnten. Zunächst wurden die Probleme genau eingeordnet und der notwendige mathematische Hintergrund erarbeitet. Dann wurden die Antworten auf Schülerniveau angepasst und verschiedene Ideen zur Veranschaulichung erarbeitet. Einige Beispiele:

*Warum ist minus mal minus plus?*

- Einbettung in Lineare Algebra I: Gruppen, Ringe, Körper, Zahlbereichserweiterung durch Äquivalenzklassen
- Ideen für Erklärungen auf Schulebene, z.B. Permanenzprinzip

*Warum darf man nicht durch 0 teilen?*

- Betrachtung der Sonderrolle der 0 bei der Definition der Multiplikation in Gruppen und Ringen
- Darstellung des Problems auf Schülerniveau (verschiedene Klassenstufen), z.B.: Betrachtung der Funktion f (x) = 1/x um den Nullpunkt Widersprüche aufzeigen: Was passiert, wenn 0/0 = 0? Oder kann 0/0 =1 sein?

*Phantasieverknüpfungen (nach Ludwig 1997)* [2]

- Erstellen eigener Verknüpfungen, mit eigenen Symbolen
- Welche Verknüpfungen werden als sinnvoll wahrgenommen? Warum?
- Untersuchen der Verknüpfungen auf Kommutativität, Assoziativität, Abgeschlossenheit

[2] Matthias Ludwig, Projektorientierter Mathematikunterricht, Folge 7, in Mathematik in der Schule 35 (1997), S. 583 ff

- Idee und Theorie:

  Warum kann es Sinn machen, so etwas mit Schülern durchzuführen? Wahrnehmung von Mathematik als kreativ, nicht willkürlich, nicht fertig, das Verständnis von Strukturen wird geschult.

Um die Resonanz auf diese Maßnahmen untersuchen zu können, wurde zu Beginn des Semesters eine schriftliche anonyme Umfrage durchgeführt, in der die Frage *„Wozu brauche ich den uni-mathematischen Hintergrund?“* gestellt wurde. Eine weitere Frage war *„Wie sicher fühlen Sie sich im Fach Mathematik als zukünftige/r Lehrer/in?“*. Am letzten Vorlesungstermin wurde dann, in Bezug auf die erste Umfrage, folgende Frage gestellt: *„Hat sich bei Ihnen durch die Vorlesung etwas verändert?“*

Die Reaktionen auf die mathematischen Einschübe in einer Didaktikveranstaltung war sehr gemischt, zeigte jedoch, dass bei vielen Studierenden eine Auseinandersetzung mit dem Thema der Nützlichkeit der Mathematikfachveranstaltungen stattgefunden hat. So gaben einige der Befragten zu Beginn der Vorlesung sehr vage Antworten auf die Frage, wozu der unimathematische Hintergrund gebraucht wird, die erkennen ließen, dass kein wirklicher Nutzen gesehen wird. In der zweiten Umfrage äußerten sie dann, dass sie den Hintergrund für praktisch halten, um zum Beispiel verschiedene Zugänge zu schulmathematische Themen verstehen und erklären zu können.

**4 .Ausblick**

Da die Resonanz auf beide Maßnahmen vorwiegend positiv war, wird an der Weiterentwicklung der Ideen zur stärkeren Verknüpfung von Schul- und Hochschulmathematik sowohl in der Vorlesungen der Mathematik als auch in der Mathematikdidaktik gearbeitet. Außerdem soll in Form von Materialien zur Sachanalyse, als fachwissenschaftliche Auseinandersetzung mit dem zu unterrichtenden Stoff, die jedoch bereits didaktische Aspekte berücksichtigt, eine weitere Hilfestellung für die Studierenden entstehen.

Ute SPROESSER, Markus VOGEL, Tobias DÖRFLER, Heidelberg; Andreas EICHLER, Kassel

# Entwicklung und Evaluation von Lehrercoachings zum Umgang mit Lernschwierigkeiten im Bereich „funktionaler Zusammenhang“ - Projektvorstellung

In diesem Beitrag wird ein Forschungsprojekt vorgestellt, das die Wirksamkeit von Lehrercoachings[1] zum Umgang mit Lernschwierigkeiten im Bereich des funktionalen Denkens untersucht. Im Folgenden werden der theoretische Rahmen sowie die methodische Anlage des momentan im Entwicklungsprozess befindlichen Projektes dargelegt.

## 1. Theoretischer Hintergrund

Der Inhaltsbereich „funktionaler Zusammenhang“ ist von inner- und außermathematischer Bedeutung: Funktionales Denken wird als eine spezifische Art des Denkens, als Denken in Zusammenhängen, angesehen (Vollrath, 1989). Zudem kommen Funktionen häufig als mathematische Modelle beim Bearbeiten von Problemen aus Mathematik und Alltag zum Einsatz (Greefrath, 2010). Verschiedene Studien dokumentieren Probleme beim Lehren und Lernen von Funktionen, beispielsweise im Zusammenhang mit Darstellungswechseln oder als Folge der Überbetonung graphischer Elemente (z. B. Kerslake, 1981; Vogel, 2006). Hadjidemetriou und Williams (2002) berichten, dass solche Lernschwierigkeiten Lehrkräften oft nur teilweise und unzureichend bekannt sind. Nitsch (in press) untersuchte das Vorkommen von Lernschwierigkeiten im Bereich linearer und quadratischer Funktionen in 25 Klassen und stellt auf dieser Grundlage fest, dass sich die betrachteten Lernschwierigkeiten nicht in allen Schulklassen feststellen lassen. Aus diesem Befund folgert sie, dass eine Lehrkraft durch gezielte unterrichtliche Maßnahmen Lernschwierigkeiten entgegenwirken kann. Dies legt die Annahme nahe, dass Lehrerfortbildungen, die Wissen über Lernschwierigkeiten im Bereich „Funktionaler Zusammenhang“ vermitteln, diesbezügliche Schülerleistungen begünstigen können.

Lipowsky (2013) nennt verschiedene Merkmale von Lehrerfortbildungen, die als erfolgsversprechend angesehen werden. Dazu gehören u. a. der Fokus auf eine bestimmte Domäne oder die langfristige Anlage, die einen Wechsel von Theorie, Praxis und Reflexion ermöglicht. Auch die beispielsweise in schulischen Kontexten als lernförderlich angesehene Feedbackgabe (Hattie & Timperley, 2007) zeigte in Lehrerfortbildungen bereits

[1] Zur besseren Lesbarkeit wird hier auf die Unterscheidung der Geschlechter verzichtet

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

positive Effekte. Diese Merkmale können auch in Lehrercoachings, einer speziellen Art von Lehrerfortbildung, gezielt umgesetzt werden. Coachings ermöglichen die Anregung zu Reflexionen und Gabe von Feedback ausgehend von einer konkreten Unterrichtssituation (West & Staub, 2003). Dabei bieten mikroadaptive Ansätze die Möglichkeit, auf aktuelle Äußerungen oder Aktivitäten der gecoachten Personen einzugehen (Leutner, 2004).

An einer großen Anzahl bestehender Fortbildungen gibt es Kritik: Oft erfüllen Studien über Lehrerfortbildungen nicht die nötigen Qualitätsstandards, um Wirkungszusammenhänge belastbar postulieren zu können (Lipowsky, 2013; Yoon et al., 2007). Ein weiterer Kritikpunkt an Lehrerfortbildungen besteht im mangelnden Bezug auf spezifische Wissensfacetten (z.B. „KCS" (knowledge of content and students) und „KCT" (knowledge of content and teaching) nach Ball et al., 2008). Ein solcher Bezug würde jedoch ein hohes Maß an inhaltlicher Fokussierung ermöglichen und spielt auch aus diesem Grund in der Lehrerprofessionsforschung eine Rolle.

## 2. Ziele und Forschungsfragen des Projekts

Aus dem skizzierten Stand der Forschung ergibt sich das Ziel dieses Projekts: In Lehrercoachings sollen spezifische Facetten fachdidaktischen Wissens bezogen auf funktionales Denken, im Besonderen auf den Inhaltsbereich lineare Funktionen, gefördert werden. Dieser Teilbereich wurde einerseits gewählt, da dadurch ein enger inhaltlicher Fokus gegeben ist. Andererseits stellen lineare Funktionen in der Regel den ersten schulischen Kontakt mit Funktionen in mathematisch-formalisierter Form dar. Als eine wesentliche Grundlage für die weitere Auseinandersetzung mit Funktionen ist es in diesem Bereich daher besonders bedeutsam, belastbare Konzepte aufzubauen und Lernschwierigkeiten vorzubeugen bzw. zu überwinden.

Um belastbare Aussagen über die Wirksamkeit der Coachings machen zu können, wird in zwei parallelen Treatments jeweils KCS und KCT gefördert, wobei lediglich in einem dieser Treatments zusätzlich die Feedbackgabe auf Schüler angesichts von Lernschwierigkeiten explizit trainiert wird. Die Forschungsfragen des Projektes betreffen sowohl das (Vor)wissen der Lehrkräfte als auch die Wirkung der Coachings:

- Über welches Wissen verfügen Lehrkräfte bezüglich möglicher Lernschwierigkeiten im Bereich linearer Funktionen (KCS)?
- Welche Kenntnisse haben Lehrkräfte über den didaktischen Umgang mit Lernschwierigkeiten in diesem Bereich (KCT)?
- Welche Wirkung zeigt das Lehrercoaching mit/ohne Fokus auf die Feedbackgabe auf KCS und KCT bezogen auf lineare Funktionen?

- Welche Effekte hat diese Lehrerfortbildung auf das diesbezügliche Wissen und Können der Schüler sowie auf deren Motivation?

## 3. Methodische Anlage

In der Hauptstudie sollen insgesamt 60 Lehrkräfte randomisiert zwei Treatment- und einer Kontrollgruppe zugewiesen werden. In beiden Treatments wird Wissen zum Vorkommen von und unterrichtlichen Umgang mit Lernschwierigkeiten im Bereich linearer Funktionen vermittelt. Als systematische Variation der Treatments werden lediglich die Lehrkräfte in Treatment 1 konkret darin trainiert, Lernenden angesichts von Lernschwierigkeiten lernförderliches Feedback zu geben. Zu drei Messzeitpunkten werden auf Schüler- und Lehrerebene Testungen durchgeführt. Zusätzlich sind stichprobenartige Unterrichtsbeobachtungen vorgesehen, um einen Einblick zu erhalten, wie die Coachings im Unterricht umgesetzt werden. Die auf diesem Weg erhobenen Daten sollen u.a. mittels Mehrebenenanalyse ausgewertet werden, um der genesteten Datenstruktur gerecht zu werden und um Zusammenhänge zwischen den Ebenen zu modellieren.

Im Rahmen der Konzeption der Coachings und Tests findet zunächst eine Vorstudie statt, in der Lehrende aus (Hoch)Schulen und Studienseminaren in Leitfadeninterviews befragt werden, welche Lernschwierigkeiten im Bereich linearer Funktionen sie kennen und wie ihrer Meinung nach angemessen damit umgegangen werden kann. Außerdem werden Schülern Items vorgelegt, anhand derer evaluiert werden soll, ob die aus der Literatur rezipierten Lernschwierigkeiten (z.B. Fokus auf Achsenschnittpunkte, Graph-als-Bild-Fehler, vgl. z.B. Nitsch, in press) auch hierzulande anzutreffen sind. Diese Vorstudie soll klären, auf welche Lernschwierigkeiten die Coachings fokussieren sollten, um Bedürfnisse aus der Praxis zu treffen. Außerdem werden dadurch Expertenmeinungen zum angemessenen Umgang mit diesen Lernschwierigkeiten und Erkenntnisse zur Fragebogenentwicklung gesammelt.

Bei der Entwicklung der Coachings sollen neben den erwähnten Expertenmeinungen auch theoretische Überlegungen, beispielsweise zur Wirkung von Feedback (Hattie & Timperley, 2007) oder über geeignete Repräsentationen je nach Fragestellung (Acevedo Nistal et al., 2014) berücksichtigt werden. Zudem sollen die Coachings Merkmale aufweisen, die sich in empirischen Studien als wirksam gezeigt haben (längerer Fortbildungszeitraum, hohe Fachbezogenheit, regelmäßiges Feedback an die Lehrkräfte).

Parallel zu den Coachings werden auch die Testinstrumente entwickelt. Auf Lehrerebene sollen die Wissensfacetten KCS und KCT in enger Orientierung an die Coachings abgefragt werden. Zusätzlich soll - abgeleitet aus der Theorie - Wissen zur Feedbackgabe erhoben werden. Auf der Grundlage bestehender Skalen sollen Daten zu Überzeugungen über das Fach und das Lernen von Mathematik gesammelt werden. Auf Schülerebene ist ein Kompetenztest bezüglich linearer Funktionen vorgesehen, der auf Grundlage bestehender Instrumente (z.B. Kerslake, 1981; Nitsch, in press) entwickelt werden kann. Auf beiden Ebenen sollen auch Kovariaten wie motivationale Variablen oder kognitive Fähigkeiten einbezogen werden. Momentan befindet sich das Projekt in der Phase der Vorstudie, auf deren Basis die geschilderten Entwicklungsarbeiten erfolgen werden.

## Literatur


Acevedo Nistal, A., van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2013). Improving students' representional flexibility in linear-function problems: an intervention. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*.

Ball, D. L., Hoover Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Hadjidemetriou C. and Williams, J. S. (2002). Teachers' pedagogical content knowledge: graphs, from a cognitivist to a situated perspective. *Proceedings of the 26th Conference of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81-112.

Kerslake, D. (1981). Graphs. In K. Hart, *Children's Understanding of Mathematics 11-16.* London: John Murray.

Leutner, D. (2004). Instructional design principles for adaptivity in open learning environments. In N.M. Seel & S. Dijkstra, *Curriculum, plans, and processes in instructional design.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lipowsky, F. (2013). Theoretische und empirische Perspektiven zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland, *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf.* Münster: Waxmann.

Nitsch, R. (in press). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge.* Dissertation.

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Hildesheim: Franzbecker.

Vollrath, H.-J.(1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik 10*, 3-37.

West, L. & Staub, F. C. (2003). *Content-Focused Coaching: Transforming mathematics lessons*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Yoon, K. S., Duncan, T., Lee, S. W.-Y., Scarloss, B., & Shapley, K. (2007). *Reviewing the evidence on how teacher professional development affects student achievement*. http://ies.ed.gov/ncee/edlabs/regions/southwest/pdf/rel_2007033.pdf [27.01.2015].

Julia STEMMER, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

# Interaktionsprozesse zwischen Kindergartenkindern – mathematische Gespräche beim Spielen von Regelspielen

Die frühkindliche Bildung im Allgemeinen sowie das mathematische Lernen in Kitas gewinnen zunehmend an Bedeutung (z.B. Rathgeb-Schnierer, 2012; Roux, 2008). Eine Möglichkeit, bereits bei Kindergartenkindern mathematische Kompetenzen zu fördern, besteht im Einsatz punktuell einsetzbarer Materialien (Schuler, 2013). Zu diesen gehören unter anderem Regelspiele, welche eine spielorientierte Förderung ermöglichen. Im IBH-Projekt „Spielintegrierte mathematische Frühförderung (spimaf)“ wurde eine Spielekiste mit 18 Regelspielen zur arithmetischen Förderung entwickelt und in der Praxis erprobt. Die hierbei entstandenen Videoaufnahmen sind Grundlage meines Dissertationsprojekts.

## 1. Forschungsinteresse und Fragestellungen

Williams (1994, S. 158) betont, „the key to construction of knowledge is interaction“. Auf diesen Schlüssel zur Wissenskonstruktion im Bereich früher mathematischer Kompetenzen bezieht sich mein Forschungsinteresse. Analysiert werden mathematische Interaktionen zwischen Kindergartenkindern beim Spielen von Regelspielen unter folgenden Fragestellungen:

- Wie kann eine mathematische Interaktion zwischen Kindergartenkindern definiert werden?
- Was sind Auslöser mathematischer Interaktionen im Spiel?
- Welche Begründungen lassen sich in mathematischen Interaktionen finden?
- Was zeichnet ein interaktionsförderndes Spiel aus?

## 2. Methodisches Vorgehen zur Strukturierung des Datenmaterials

Das Herausfiltern der mathematischen Interaktionen aus dem Videomaterial erfolgte anhand verschiedener methodischer Schritte. Nachdem das Konstrukt „mathematische Interaktion“ klar definiert war, wurde darauf aufbauend ein Kodierleitfaden erstellt, erste Probekodierungen von zwei unabhängigen Kodieren vorgenommen und dazu die prozentuale Übereinstimmung berechnet. Nach zufriedenstellender Übereinstimmung erfolgte eine Einfachkodierung aller Daten und zuletzt die Transkription der identifizierten mathematischen Interaktionen (Stemmer & Rathgeb-Schnierer, 2014). Die Transkriptionen, die in MaxQDa an die entsprechenden Videosequenzen gekoppelt sind, werden im weiteren Verlauf analysiert.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 3. „Steinesammeln“ - exemplarische Darstellung erster Ergebnisse

Das Spiel „Steine sammeln“ eignet sich für die Förderung grundlegender Teilaspekte des Zahlverständnisses wie Anzahlen erfassen, Anzahlen bestimmen und Mengen vergleichen. Bei diesem Spiel befindet sich in der Mitte des Tisches ein kleiner Korb mit Steinen (Anzahl je nach gewünschter Spieldauer). Die Kinder würfeln nacheinander und dürfen bei den Augenzahlen zwei bis fünf die entsprechende Anzahl an Steinen aus dem Korb nehmen. Wird eine Sechs gewürfelt, darf das Kind sechs Steine aus dem Körbchen nehmen und ein zweites Mal würfeln. Würfelt ein Kind eine Eins, muss es dem Kind mit den wenigsten Steinen einen schenken. Das Spiel endet, sobald der Korb leer ist. Gewonnen hat das Kind mit den meisten Steinen.

Betrachtet man die mathematischen Interaktionen beim „Steine sammeln“, lassen sich zunächst auf deskriptiver Ebene die äußere Strukturen erfassen: Die kürzeste mathematische Interaktion dauert acht Sekunden, die längste zwei Minuten und zwölf Sekunden. In der gesamten Spieldauer von acht Stunden und fünfzig Minuten, belaufen sich die mathematischen Interaktionen unter den Kindern auf eine Stunde und dreizehn Minuten. Die gesamte Spieldauer umfasst dabei unter anderem auch spielorganisatorische Gespräche, Gespräche über Privates sowie Gespräche mit der pädagogischen Fachkraft. Der prozentuale Anteil der mathematischen Interaktion macht somit vierzehn Prozent der gesamten Spieldauer aus.

In Abbildung 1 wird deutlich, dass mathematische Interaktionen aufgrund unterschiedlicher Auslöser zustande kommen:

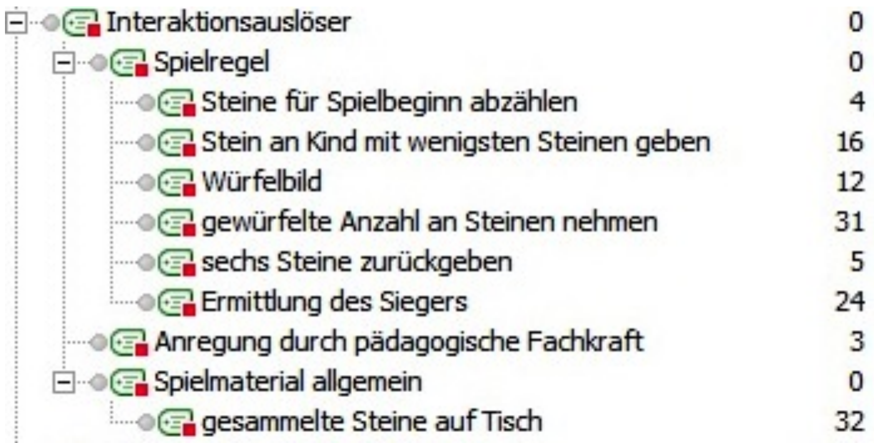



**Abb. 1:** Interaktionsauslöser beim „Steine sammeln“

Die Spielregeln selbst stellen dabei einen wesentlichen Interaktionsauslöser dar. Beispielsweise kommen beim Spiel „Steine sammeln“ durch die Regel der Steinabgabe beim Würfeln einer Eins häufig Gesprächen über das Vergleichen von Mengen zustande (Abb. 2):

| | |
|---|---|
| Kind 10: | ((würfelt eine eins)) Wer hat am wenigsten? |
| Kind 1: | ((zählt Steine von Kind 6 mit dem Finger ab)) Eins, zwei, drei, vier, fünf. ((zählt erneut ab)) Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs. |
| Kind 10: | ((zählt währenddessen seine eigene Steine ab)) Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben. |
| Kind 1: | Sie hat am wenigsten ((zeigt auf Kind 6)). Einen hergeben ((zeigt auf Kind 10)). Sie hat sechs, du hast sieben. |
| Kind 10: | ((gibt ein Stein an Kind 6 ab)) |
| Kind 6: | ((zählt eigene Steine mit Finger ab)) Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben. |

**Abb. 2:** Transkript einer Interaktion beim „Steine sammeln“

Mit der zweiten Kategorie „Anregung durch die pädagogische Fachkraft“ werden mathematische Interaktionen gefasst, die durch Fragen oder Impulse der pädagogischen Fachkraft ausgelöst werden. Dabei ist es zentral, dass die pädagogische Fachkraft sich nach ihrer Anregung aus dem Gespräch zurück zieht und die Kinder das Gespräch alleine fortführen lässt. Als dritten Interaktionsauslöser lässt sich das Spielmaterial definieren. Das heißt die mathematischen Interaktionen werden aufgrund der speziellen Gegebenheiten des Materials ausgelöst: beim Spiel „Steine sammeln“ durch die gesammelten Steine, die die Kinder vor sich haben. Die jeweiligen Subcodes der Kategorien „Spielregel“ und „Spielmaterial allgemein“ sind spielspezifisch. In einem nächsten Schritt werden die drei genannten Hauptkategorien auf die weiteren Spiele übertragen und um entsprechende, spielspezifische Subcodes erweitert.

## 3. Ausblick

Nach Herausarbeitung der Interaktionsauslöser bei allen Spielen, werden die mathematischen Interaktionen im Detail analysiert, die eine Begründung enthalten. Hierbei werden zunächst inhaltsbezogene mathematische Aspekte bestimmt sowie die Grundlage der Begründungen beschrieben. Als Grundlage einer Begründung verstehe ich:

- rein verbales begründen,
- rein nonverbales begründen (beispielsweise aufgrund von Fingerbildern oder Spielmaterial) oder
- verbales begründen, das durch eine nonverbale Handlung gestützt wird.

Bei der Analyse der Begründungen wird zusätzlich darauf geachtet, ob die Kinder mathematische Denk- und Handlungsweisen wie das Klassifizieren, Seriieren oder Strukturieren (Rathgeb-Schnierer, 2012) nutzen, um mathematische Inhalte aufzuzeigen.

Anhand folgenden Transkripts wird eine Interaktion, die durch die Spielregel „gewürfelte Anzahl an Steinen nehmen“ ausgelöst wurde, deskriptiv analysiert (Abb. 3):

| | | |
|---|---|---|
| Kind 16: Steine | ((würfelt eine fünf)) Fünf ((nimmt aus dem Glas)) | → Würfelbild erfassen |
| Kind 12:<br>Kind 16: zwei,<br>Kind 12:<br>16 | Hast du fünf?<br>((zählt Steine aus dem Glas)) Eins, drei, vier, fünf.<br>Darf ich mal sehen, wie viele du hast? ((zählt mit Finger die Steine von Kind ab)) Eins, zwei. | Anzahlbestimmung durch Abzählen |
| Kind 16: | ((zieht seine Hand mit den Steinen zurück)) Ich lege jetzt eine fünf. ((legt eine Würfel 5)) Ja, eine fünf. ((zählt Steine mit Finger ab)) Eins, zwei, drei, vier, fünf. | → Grundlage der Begründung: verbal gestützt auf Spielmaterial, das strukturiert wird |

**Abb. 3:** Analyse einer Interaktion beim „Steine sammeln“

Dieser erste Zugang zur Analyse der mathematischen Interaktionen wird im weiteren Forschungsprozess weiter ausdifferenziert.

## Literatur


Rathgeb-Schnierer, E. (2012). Mathematische Bildung. In D. Kucharz (Hrsg.). *Elementarbildung. Bachelor / Master* (S. 50-85). Weinheim; Basel: Beltz.

Roux, S. (2008). Bildung im Elementarbereich – Zur gegenwärtigen Lage der Frühpädagogik in Deutschland. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.). *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 13-25). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs.* Münster: Waxmann.

Stemmer, J. & Rathgeb-Schnierer, E. (2014). Mathematische Interaktionen zwischen Kindergartenkindern beim Spielen von Regelspielen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1171-1174). Münster: WTM-Verlag.

Williams, L. R. (1994). Developmentally Appropriate Practice and Cultural Values. A Case in Point. In B. Mallory & S. New (Hrsg.). *Diversity and Developmentally Appropriate Practices. Callenges for Early Childhood Education* (S. 137-165). New York: Teachers College Press.

Susanne WÖLLER, Leipzig

# Mathematische Begriffs- und Vorstellungsbildung am Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe – eine theoretische Annäherung

In dem Kinderbuch „Fish is Fish“ von Leo Lionni (erschienen bei Dragonfly Books, 1974) ist eine Passage zu finden, in der Fisch und Frosch aufeinandertreffen und der Frosch dem Fisch von seinen Erkundungen aus der Welt berichtet: “Cows,” said the frog. “Cows! They have four legs, horns, eat grass, and carry pink bags of milk.” Was daraufhin in den Illustrationen des Buches sichtbar wird, ist, dass sich der Fisch eine ganz eigene, für uns befremdliche, Vorstellung von dem Begriff *Kuh* macht. In dieser konstruierten Vorstellung gleicht die *Kuh* einer Fantasiefigur, die einem Fisch ähnelt, dabei aber die vom Frosch aufgezählten Eigenschaften besitzt.

Übertragen auf den kindlichen Begriffserwerb verdeutlicht dieses fiktive Beispiel, dass unsere Vorstellung von Begriffen und Begriffserwerb nicht zwingend mit dem kindlichen Prozess der Ausbildung von Vorstellungen zu einem Begriff korrelieren muss. Im Kontext schulischen Lernens wird dieses Problem besonders deutlich, wenn der Blick auf die kindliche Begriffsbildung am Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe gerichtet wird.

Betrachtet man Unterrichtsangebote, die in besonderer Weise auf den mathematischen Begriffserwerb ausgerichtet sind, fallen in der Praxis erhebliche Unterschiede zwischen Aktivitäten in der Grundschule und Angeboten für den Mathematikunterricht am Beginn der Sekundarstufe auf: In der Grundschule wird offenkundig besonderer Wert darauf gelegt, Kinder z. B. über Materialhandlungen oder das Erstellen von Eigenproduktionen im Sinne des konstruktiven Begriffserwerbs zu unterstützen (vgl. u. a. Franke & Reinhold, 2015). Im Gegensatz dazu ist erkennbar, dass das Begriffslernen in der Sekundarstufe merklich anderen Regeln folgt und stärker gezielt Prozesse des Spezifizierens oder Abstrahierens anspricht, mit Definitionen arbeitet und symbolische Darstellungen einbezieht (vgl. u. a. Weigand, 2014).

Gleichzeitig, als Folge des spezifischen Begriffslernens, beruhen Vorstellungen, die Schüler und Schülerinnen im Laufe des Begriffserwerbs aufbauen, in der Grundschule überwiegend auf gegenständlichen oder bildlichen Repräsentationen (vgl. Vom Hofe, 1996, S. 33; Floer, 1995, S. 20; Lorenz, 2011, S. 50). Andererseits gründen Vorstellungen, die in der Sekundarstufe aufgebaut werden, überwiegend auf bildlichen Repräsentationen abstrakter mathematischer Darstellungen (vgl. Vom Hofe, 1996, S. 34;

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Dawydow, 1972, S. 242). Dieser Übergang, und die damit einhergehende Veränderung des Vorstellungskonzepts beim Begriffslernen, soll in einer eigenen Studie in den Blick genommen werden.

## Facetten des Begriffserwerbs und des Begriffsverständnisses

Doch zunächst soll hier eine theoretische Annäherung an die Problematik erfolgen. Ausgangspunkt ist die Frage, wann Schüler und Schülerinnen in summa einen Begriff *gelernt* haben. Zum Begriffsverständnis, also dem *Gelernten*, gehört neben dem Kennen der Begriffsbezeichnung und -definition ebenso das Beherrschen charakteristischer Eigenschaften dieses Begriffes (Vollrath, 1984, S. 9; Weigand, 2014, S. 99). Versteht man die Grundfertigkeiten beim Begriffserwerb analog zum Van-Hiele-Modell (vgl. Van Hiele, 1964) bzgl. der Entwicklung geometrischen Denkens, lassen sich unterschiedliche Denkebenen konstatieren. Anschließend an die oben genannten Aspekte können darauf aufbauende Gesichtspunkte angebracht werden, wie die Adjunktion von Beispielen und Gegenbeispielen zum besagten Begriff, die Einbettung des Begriffes in ein Beziehungsgeflecht (Ober- und Unterbegriffe) und schließlich die Verwendbarkeit des Begriffes zum Beschreiben von Sachverhalten und Lösen von Problemen (Vollrath, 1984, S. 10; Weigand, 2014, S. 99). Letztendlich ist es notwendig, dass Schüler und Schülerinnen Einsichten in die innere Struktur des Begriffes (Aebli, 1997, S. 269), losgelöst von der besonderen Situation, in welcher der Begriff erarbeitet wurde, erlangen.

Ausgehend von diesen Betrachtungen, lässt sich im Mathematikunterricht, sowohl in der Grundschule, als auch in der Sekundarstufe (und teilweise noch in der Lehrer- und Lehrerinnenausbildung) ein Phänomen beobachten, welches aufzeigt, dass mathematische Begriffe nur schwerlich in ihrer inneren Struktur durchdrungen werden. Dörfler weist diesbezüglich darauf hin, dass ein mathematischer Begriff oftmals mit seiner prototypischen Darstellung identifiziert wird (Dörfler, 1988, S. 110). So findet eine Gleichsetzung zwischen dem Begriff (z. B. *Viereck*) und allen mathematischen Objekten, die ihm zuzuordnen sind, statt (z. B.  ,  , ). Da Begriffe allerdings „abstrakte, ideale Objekte“ bzw. „Objekte des Denkens“ (Dörfler, 1988, S. 110) darstellen und vielmehr theoretischer Natur sind, als dass sie empirische Gegenstände oder Dinge repräsentieren (vgl. Schülke & Söbbeke, 2010, S. 18), kann es vermeintlich zu Problemen beim Begriffslernen und der Anwendung des Begriffes im Mathematikunterricht kommen. Nun kann allerdings nicht geschlussfolgert werden, dass einer Vergegenständlichung im Mathematikunterricht entgegenzuwirken ist (Dörfler, 1988, S. 112). Vielmehr ist der Akt des Findens von Prototypen (z. B. wie oben das Nutzen von Zeichnungen von Vertretern des Begriffes

*Viereck*) ein unentbehrlicher Schritt auf dem Weg zum verständigen Begriffslernen. Die Zeichnung oder das Objekt veranschaulicht den mathematischen Begriff und hilft somit tragfähige Vorstellungen auszubilden (Dörfler, 1988, S. 113; Büchter & Haug, 2013, S. 4).

Zurückkommend auf die eingangs beschriebene Problematik, kann festgestellt werden, dass die in der Grundschule zu mathematischen Inhalten aufgebauten primären Grundvorstellungen eher auf gegenständlichen Handlungserfahrungen (eingebettet in einen situativen Kontext) beruhen und im Laufe der Schulzeit durch sekundäre Grundvorstellungen ergänzt oder teilweise sogar ersetzt werden (Vom Hofe & Hattermann, 2014, S. 2). Jenes Geflecht von Beziehungen und dessen stete Anpassung an die situativen Gegebenheiten bilden das Grundverständnis eines mathematischen Begriffes (Vom Hofe, 1996; Vom Hofe, 2003).

## Offene Fragen und exploratives Vorhaben

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, wie sich elementares Begriffsverständnis bei Schülern und Schülerinnen der Klassenstufen 4, 5 und 6 zeigt und welche interindividuellen Unterschiede sich feststellen lassen. Ebenso soll es ein Anliegen sein, ausfindig zu machen, ob Schüler und Schülerinnen flexibel Begriffe und deren Eigenschaften nutzen können, um ihre Vorstellungen auch auf andere Vertreter der Begriffsklasse übertragbar zu machen (vgl. das Problem der „Disjunktion verschiedener Unterklassen von Begriffen zu einer Klasse“, Weigand, 2014, S. 108). Die eigenen Vorhaben dazu konzentrieren sich auf den Erwerb geometrischer Begriffe (*Quader* als Objektbegriff, *Fläche* als Eigenschaftsbegriff und *ist rechtwinklig zu* als Relationsbegriff).

Perspektivisch ist auch eine ergänzende Längsschnittuntersuchung angedacht. Sofern sich auf der Basis dieser individualdiagnostisch gewonnenen Erkenntnisse typische Entwicklungsverläufe abzeichnen, können die in der Grundschule und Sekundarstufe unterbreiteten (unterschiedlichen) Zugänge zum Begriffslernen kritisch reflektiert werden.

Da geometrische Vorstellungen u. a. durch Handlungen an konkreten Gegenständen ausgebildet werden (Weigand, 2014, S. 103; Maier, 1999, S. 13), erscheint es naheliegend Begriffsverständnis und damit aufgebaute Vorstellungen über bauende und legende Handlungen an haptischen Gegenständen mittels Videoaufzeichnung zu erheben. Zur Erschließung dessen soll sich der konkrete Fragenkatalog an Vollraths Grundfertigkeiten beim Begriffslernen orientieren (Vollrath, 1984). Für die Auswertung der Aufzeichnungen werden kognitionstheoretische Modelle wie die Niveautheorie zur Denkentwicklung nach Van Hiele (u. a. Van Hiele, 1964) herangezogen. Ausgehend von den Beobachtungen und Erkenntnissen könnte eine anschließende Anpassung des Fragenkataloges für weitere Erhebungen erfolgen, die dann eventuell weiterführende Ansätze ermöglichen.

## Literatur


Aebli, H. (1997). *Zwölf Grundformen des Lehrens.* 9. Aufl. Stuttgart: Klett-Cotta.

Büchter, A. & Haug, R. (2013). Lernen mit Material. Anker setzen beim Aufbau mathematischer Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 30/176,* S. 2-7.

Dawydow, W. W. (1972). Über das Verhältnis zwischen abstrakten und konkreten Kenntnissen im Unterricht. In J. Lompscher (Hrsg.), *Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen* (S. 241-259). Berlin: Volk und Wissen.

Dörfler, W. (1988). Rolle und Mittel von Vergegenständlichung in der Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht, 22* (S. 110-113). Hildesheim: Franzbecker.

Floer, J. (1995). Wie kommt das Rechnen in den Kopf? *Die Grundschulzeitschrift, 82,* S. 20-23.

Franke, M. & Reinhold, S. (2015). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule.* 3. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

Lionni, L. (1974). *Fish is Fish.* New York: Dragonfly Books.

Lorenz, J. H. (2011). Die Macht der Materialien (?). In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011* (S. 39-54). Bamberg: UBP.

Maier, P. H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen.* Donauwörth: Auer.

Schülke, C. & Söbbeke, E. (2010). Die Entwicklung mathematischer Begriffe im Unterricht. In C. Böttinger et al. (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder* (S. 18-47). Seelze: Kallmeyer und Klett.

Van Hiele, P. M. (1964). Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindliche Zahlbegriffsentwicklung. In H. Abel et al. (Hrsg.), *Rechenunterricht und Zahlbegriff – Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffs und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht* (S. 105-131). Braunschweig: Westermann.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht.* Stuttgart: Klett.

Vom Hofe, R. (1996). Arithmetische Grundvorstellungen und funktionales Denken. *mathematica didactica, 19, Bd. 2,* S. 28-42.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. *mathematik lehren, 118,* S. 4-8.

Vom Hofe, R. & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *mathematik lehren, 183,* S. 2-7.

Weigand, H.-G. (2014). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand et al. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 99-122). 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Anja ZERRENNER, Anke LINDMEIER, Kiel

# Von der Kompetenz der Lehrkräfte zur fachspezifischen Unterrichtsqualität

Dieser Beitrag beschreibt das Konzept für ein Dissertationsvorhaben, welches sich mit dem Zusammenhang zwischen fachspezifischen handlungsnahen professionellen Kompetenzen und der fachspezifischen Qualität einer Lernumgebung befasst. Es werden nach einer kurzen Darstellung des theoretischen Hintergrundes mögliche daraus resultierende Forschungsfragen für die Arbeit hergeleitet. Übergeordnetes Ziel des Dissertationsprojekts ist eine nähere Beschreibung lernwirksamen Mathematikunterrichts und dessen Bedingungen. Abgesehen von äußeren Einflüssen ist dieser abhängig von der Qualität des Unterrichts bzw. der Lernumgebung einerseits sowie deren Nutzung durch die Schüler andererseits (Angebot-Nutzungs-Modell von Unterricht nach Helmke, 2009). Im Fokus der Arbeit stehen dabei fachspezifische Aspekte der Qualität des Angebots (Lernumgebung bzw. Unterricht), wobei das Modell hier die Lehrperson und insbesondere deren fachspezifische professionelle Kompetenzen als wichtige Einflussgröße beschreibt.

## Professionelle Kompetenzen von Lehrkräften

Nach Weinert (2001b) können folgende vier Bereiche der professionellen Kompetenzen von Lehrkräften identifiziert werden: Zum einen nennt er die fachliche Kompetenz. Diese ist zwar in hohem Maße fachspezifisch, beschreibt aber vorwiegend Aspekte professionellen Wissens, was eine Fokussierung des Kompetenzbegriffs auf kognitive Aspekte darstellt. Darüber hinaus beschreibt er die didaktische und die diagnostische Kompetenz, die in ihrer Konzeptualisierung bei Weinert zwar im Gegensatz zur fachlichen Kompetenz durchaus handlungsnah verstanden werden, sich aber z. T. nicht fachspezifisch ausdifferenzieren lassen. Als vierten Kompetenzbereich nennt Weinert die Klassenführungskompetenz, die jedoch fachunspezifisch gefasst ist und daher für den hier eingenommenen fachspezifischen Blickwinkel nicht weiter zentral erscheint.

Für die Betrachtung der professionellen Kompetenzen unter einem fachspezifischen Blickwinkel, die über ein stark wissensbasiertes Verständnis hinausgeht, eignet sich das Kompetenzmodell nach Lindmeier (2011), welches die Konstrukte des Basiswissens, der reflexiven Kompetenzen sowie der aktionsbezogenen Kompetenzen umfasst. Diese sind fachspezifisch gefasst und an den Anforderungen des Lehrberufs orientiert. Das Basiswissen stellt Weinert (2001a) folgend den Kern der professionellen Kompetenzen

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

i. S. d. fachspezifischen Aspekte des professionellen Wissens dar; d. h. es beinhaltet Fachwissen und fachdidaktisches Wissen, wie es beispielsweise auch bei COACTIV (Kunter et al., 2013) bzw. Shulman (1987) beschrieben wird. Die reflexiven Kompetenzen sind jene fachspezifischen Fähigkeiten, die für Unterrichtsvor- und -nachbereitung benötigt werden. Sie beziehen sich auf Anforderungen wie die begründete Unterrichtsplanung, angemessene Berücksichtigung häufiger Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen bei den Lernenden, Durchführung von Lernstands- oder Lernprozessanalysen sowie die kritische Reflexion von Unterrichtsabläufen. Die aktionsbezogenen Kompetenzen beschreiben gerade die fachspezifischen Fähigkeiten, die für die geeignete spontane Anwendung fachspezifischen Wissens in unterrichtlichen Situationen benötigt werden. Dies meint einerseits die flexible, zielorientierte Umsetzung zuvor geplanten Unterrichts unter Berücksichtigung aktueller Lerngegebenheiten, andererseits die adäquate spontane fachbezogene Reaktion auf Schüleräußerungen oder -fragen, die sich in Beispielen, Rückfragen, Erklärungen u. ä. wiederspiegelt.

Das Wissens- und Kompetenzmodell nach Lindmeier (2011) bietet also den Vorteil, sowohl professionelles Wissen als auch handlungsnahe professionelle Kompetenzen bezogen auf die fachspezifischen Aspekte abzubilden. Bei Lindmeier (ibid.) gibt es bereits Anhaltspunkte für einen Zusammenhang der fachspezifischen handlungsnahen Kompetenzen mit dem Basiswissen. Jedoch sind die Zusammenhänge der genannten Wissens- und Kompetenzfacetten noch nicht hinreichend untersucht, weshalb dies im Rahmen des beschriebenen Dissertationsprojekts noch vertieft werden soll.

## Fachspezifische Qualität der Lernumgebung

Es ist naheliegend, dass insbesondere die fachspezifische Unterrichtsqualität von der Lehrperson wesentlich beeinflusst wird. Aus einer nicht explizit fachspezifischen Perspektive wurden bereits Indikatoren für Unterrichtsqualität identifiziert, die sich in einigen Punkten durchaus fachspezifisch für den Mathematikunterricht anpassen oder ausdifferenzieren lassen – beispielsweise im Zuge des zehngliedrigen Merkmalskataloges bei Helmke (2009) oder im Rahmen der Basisdimensionen nach Klieme et al. (2001). Aus fachspezifischer Perspektive ist die Forschungslage jedoch noch unbefriedigend, auch wenn es erste Ansätze zur Beschreibung von fachspezifischen Qualitätsmerkmalen gibt: z. B. schlägt Vogelsang (2014) für Physikunterricht neben gängigen Indikatoren, wie sie auch bei Helmke (2009) zu finden sind, den Aspekt des „Umgangs mit Experimenten“ als zu berücksichtigende fachspezifische Komponente von Unterrichtsqualität vor. Für Mathematik wäre hier analog beispielsweise eine Kategorie „Umgang mit Argumenten und Beweisen“ denkbar. Drollinger-Vetter (2011) nimmt hingegen bezogen auf den Mathematikunterricht vor allem die strukturelle Klarheit in den Blick. Schoenfeld et al. (2014) stellen im Projekt TRU Math ein fünfdimensionales Konstrukt für Merkmale qualitativ hochwertigen Mathematikunterrichts vor, das sich vorrangig an der Praxis orientiert. Hier werden unter einer breiten Perspektive potenziell die Qualität von Mathematikunterricht beeinflussende Merkmale erfasst.

Insgesamt fehlt allerdings eine adäquate Ausdifferenzierung fachspezifischer Qualitätsmerkmale für Lernumgebungen im Fach Mathematik, die über die reine Unterrichtsqualität, wie sie üblicherweise fachübergreifend und stark an Sichtstrukturen orientiert konzeptualisiert wird (vgl. Clausen, Schnabel & Schröder, 2002), hinausgeht. Hinzu kommt, dass die Aspekte der Vor- und Nachbereitung einer Unterrichtssequenz als weitere qualitätsbeeinflussende Merkmale bisher kaum mit in den Blick genommen wurden. In der Arbeit soll daher die Qualität der Lernumgebung – orientiert am Tätigkeitsspektrum der Lehrperson – als Konstrukt mit drei zeitlich getrennten Dimensionen betrachtet werden. Es werden hierbei die Bereitstellung, die Implementation sowie die Nachbereitung der Lernumgebung unterschieden. Erstere umfasst dabei die Planung einer Unterrichtssequenz und die angemessene Begründung derselben, was auch die geeignete Material- und Aufgabenauswahl mit einschließt. Es ist davon auszugehen, dass eine qualitativ hochwertige Planung (unter Voraussetzung günstiger Rahmenbedingungen) die Qualität der Implementation begünstigt. Die Implementation stellt dabei die adäquate Umsetzung der zuvor geplanten Unterrichtssequenz unter Berücksichtigung aktueller Gegebenheiten dar. Die Nachbereitung beschreibt schließlich die angemessene Reflexion über Planung und Durchführung jener Unterrichtssequenz ebenso wie die geeignete Analyse des aus der neu entstandenen Ausgangssituation resultierenden Potenzials für eine künftige Unterrichtssequenz. Bei entsprechender Bezugnahme auf deren Bereitstellung ist wiederum eine Qualitätssteigerung anzunehmen.

## Forschungsfragen und Hypothesen

Im Rahmen dieses Dissertationsvorhabens soll eine theoretisch fundierte Beschreibung von potenziellen Merkmalen für fachspezifische Qualität einer Lernumgebung im weiteren Sinne erarbeitet, nach geeigneter Operationalisierung empirisch fundiert sowie der Zusammenhang zu fachspezifischen Kompetenzbereichen von Lehrkräften untersucht werden. Es wird dabei ein Zusammenhang der aktionsbezogenen Kompetenzen mit der Qualität der Implementation sowie der reflexiven Kompetenzen mit der Qualität der Bereitstellung und Nachbereitung der Lernumgebung erwartet. Der Einfluss des professionellen fachspezifischen Wissens kann dabei separat untersucht werden. Insbesondere trägt die Forschung also dazu bei, die angenommene Wirkungskette von professionellen Kompetenzen der Lehrkraft über das Potenzial einer Lernumgebung hin zur Unterrichtsqualität besser zu beschreiben.

## Literatur


Clausen, M., Schnabel, K. & Schröder, S. (2002). Konstrukte der Unterrichtsqualität im Expertenurteil. *Unterrichtswissenschaft, 30(3)*, 246–260.

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht.* Münster: Waxmann.

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabenkultur“ und Unterrichtsgestaltung. In: BMBF (Hrsg.). *TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht* (S. 43–57). Bonn: BMBF.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2013). *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers: Results from the COACTIV project.* New York: Springer.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and measuring knowledge and competencies of teachers: A threefold domain-specific structure model for mathematics.* Münster: Waxmann.

Loch, C., Lindmeier, A. & Heinze, A. (2013). Instrumentenentwicklung zur Erfassung professionellen Wissens von Lehramtsstudierenden. In: Greefrath, G., Käpnick, F. & Stein, M. (Hrsg.). *BzMU 2013* (S. 624–627). Münster: WTM.

Schoenfeld, A. H., Floden, R. E. & the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2014). *An introduction to the TRU Math Dimensions.* Retrieved from: http://map.mathshell.org/trumath/trumath_dimensions_alpha.pdf (16.07.2014)

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–21.

Vogelsang, C. (2014). *Validierung eines Instruments zur Erfassung der professionellen Handlungskompetenz von (angehenden) Physiklehrkräften: Zusammenhangsanalysen zwischen Lehrerkompetenz und Lehrerperformanz.* Berlin: Logos.

Weinert, F. E. (2001a). Concept of Competence: A Conceptual Clarification. In: D. S. Rychen & L. H. Salganik (Hrsg.), *Defining and selecting key competencies* (S. 45–65). Kirkland, WA: Hogrefe & Huber.

Weinert, F. E. (2001b). Qualifikation und Unterricht zwischen gesellschaftlichen Notwendigkeiten, pädagogischen Visionen und psychologischen Möglichkeiten. In: W. Melzer & U. Sandfuchs (Hrsg.), *Was Schule leistet. Funktionen und Aufgaben von Schule* (S. 65–85). Weinheim: Juventa.

# 6 Beiträge zu den Posterpräsentationen

Ann-Kathrin BERETZ, Gießen, Katja LENGNINK, Gießen, Claudia VON AUFSCHNAITER, Gießen

## Videoanalysen zum Aufbau diagnostischer Kompetenz bei Studierenden des Lehramtes

Diagnostische Kompetenz gilt als einer der zentralen Aspekte professioneller Kompetenz von Lehrkräften (u. a. v. Aufschnaiter et al., angenommen 2014). Im Rahmen des Verbundprojekts „Diagnose und Förderung heterogener Lerngruppen“ der Universitäten Bremen, Dortmund, Gießen und Oldenburg sollen daher Konzepte zum Aufbau diagnostischer Kompetenz mit Fokus auf den theoriegeleiteten und adressatenorientierten Umgang mit heterogenen Lerngruppen entwickelt und der Kompetenzaufbau von angehenden MINT-Lehrkräften untersucht werden (s. a. Hußmann & Selter, 2013). Dabei wird auf die drei ausgewiesenen Projektschwerpunkte *Sensibilisierung für Heterogenität*, *Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz* und *Diagnose und Förderung in Praxisphasen* Bezug genommen. Im Folgenden werden die im Teilprojekt Gießen angestrebten Forschungs- und Entwicklungsziele umrissen sowie das Forschungsdesign und die Methoden vorgestellt. Im Teilprojekt Gießen werden die beiden erstgenannten Schwerpunkte adressiert und die drei nachstehenden Entwicklungsziele verfolgt:

(1) Lehramtsstudierende der Fächer Mathematik und Physik zur Nutzung von Videoaufzeichnungen und Transkripten von Lehr-Lernprozessen als Datenbasis für Diagnose befähigen.

(2) Kognitive und emotional-motivationale Beteiligung der Studierenden in den Lehrveranstaltungen durch eine adressatengerechte Einbettung von Videoanalyse erhöhen.

(3) Wechselseitig Querbezüge zwischen zwei unterschiedlichen Veranstaltungskonzepten herstellen, u. a. durch die Parallelisierung diagnostischer Kriterien.

Entlang dieser Zielsetzung sollen Video- und Transkriptanalysen im Lehramtsstudium als Element für den Professionalisierungsprozess genutzt werden. Um langfristig die Lehrveranstaltungen optimieren zu können, soll daran anknüpfend untersucht werden, wie Studierende Videos und Transkripte für den Aufbau von Diagnose und Förderkompetenz nutzen und erleben. Ausgangspunkt der Untersuchung bilden zwei verschiedene Veranstaltungsformate in der Physik- und in der Mathematikdidaktik. Diese Veranstaltungen werden von einem Teil der Studierenden nacheinander besucht ($N \approx 20$), ein Teil der Studierenden besucht nur eine der beiden Veranstaltungen ($N_{Physikdidaktik} \approx 20$, $N_{Mathedidaktik} \approx 40$). In beiden Veranstaltungen bilden Videoaufzeichnungen von Lehr-Lernsituationen die Ausgangsbasis für angeleitete diagnostische Aktivitäten. In der Physikdidaktik sind die Studierenden nicht an den aufgezeichneten Videos beteiligt. Es sind überwiegend Schüler/innen zu sehen, die durch schriftliches Material angeleitet – ohne Eingreifen einer Lehrkraft – Lernaufgaben bearbeiten. Im Gegensatz dazu nehmen die Studierenden in der Mathedidaktik selbst Videos auf, in denen sie als Lehrende fungieren. Im Vergleich dieser beiden Veranstaltungen und in Bezug auf die oben aufgeführten Entwicklungsziele (1) bis (3) stellen sich u. a. folgende Forschungsfragen:

- Welche Aspekte von Heterogenität sprechen die Studierenden in ihrer Analyse an und ändern sich diese im Laufe der Veranstaltungszeit?
- Welches Veranstaltungsprofil wird von den Studierenden als ertragreicher erlebt im Hinblick auf ihre kognitive und emotional-motivationale Beteiligung sowie die Relevanz für ihr späteres Berufsleben?
- Stellen die Studierenden Querbezüge zwischen den Veranstaltungen her?

Vor und nach der jeweiligen Veranstaltung wird die diagnostische Kompetenz der Studierenden erhoben, um den aktuellen Status und die Veränderung zu erfassen (vgl. v. Aufschnaiter et al., angenommen 2014). Dazu werden die Studierenden jeweils aufgefordert, schriftliche Analysen von Transkripten herzustellen. Es werden ferner Videoaufzeichnungen der Studierenden bei der Analyse von Unterrichtsvideos angefertigt. Sowohl die schriftlichen Analysen als auch die videographierten Diskurse sollen mithilfe eines einheitlichen Kategoriensystems zur Identifikation der von Studierenden genutzten Kriterien ausgewertet werden. Zusätzlich sind Gruppeninterviews geplant, um das Erleben der Studierenden zu erfassen, die dann im Rahmen einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) ausgewertet werden sollen. Aktuell wurden diese entwickelten Ansätze und Materialien im Rahmen einer im Wintersemester 14/15 durchgeführten Voruntersuchung erprobt und sollen nun für den Einsatz im Rahmen der im Wintersemester 15/16 stattfindenden Hauptuntersuchung optimiert werden.

## Literatur

Aufschnaiter, C. v., Cappell, J., Dübbelde, G., Ennemoser, M., Mayer, J., Stiensmeier-Pelster, J., Sträßer, R. & Wolgast, A. (angenommen 2014). Diagnostische Kompetenz: Theoretische Überlegungen zu einem zentralen Konstrukt der Lehrerbildung. *Zeitschrift für Pädagogik.*

Hußmann, S. & Selter, C. (Hrsg.) (2013). *Diagnose und individuelle Förderung in der MINT-Lehrerbildung – Das Projekt dortMINT*. Münster: Waxmann.Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse.* Weinheim: Beltz

Georg BRUCKMAIER, Regensburg

# COACTIV-Video: Videovignetten zur Erfassung didaktischer Kompetenzen

## Motivation

Zur Erfassung fachdidaktischen Wissens wurden bislang vor allem Papier-und-Bleistift-Tests (mit einer relativ fachnah und stoffdidaktisch geprägten Konzeptualisierung) eingesetzt. Mit dem Ziel, eine unterrichts- und handlungsnähere Erfassung didaktischer Kompetenzen (sog. „situative Unterrichtskompetenz“; kurz: SU) zu erreichen und damit die ökologische Validität der Kompetenzerfassung zu erhöhen, werden in der vorliegenden Teilstudie Videovignetten verwendet (vgl. Bruckmaier, 2015).

## Fragestellungen

1. Ist es möglich, situative Unterrichtskompetenz mittels Videovignetten reliabel zu erfassen (Messung), und welches Modell bildet situative Unterrichtskompetenz dabei am besten ab (Modellierung)?
2. Welche Schulformunterschiede bestehen hinsichtlich situativer Unterrichtskompetenz, und welche Zusammenhänge zeigen sich mit weiteren Lehrermerkmalen (z. B. Fachwissen, Überzeugungen) (Validierung I)?
3. Ist situative Unterrichtskompetenz prädiktiv valide für die Unterrichtsqualität (Validierung II)?

## Methode

Im Rahmen der COACTIV-Video-Studie, einer Teilstudie des COACTIV-Forschungsprogramms (Kunter et al., 2011), wurde eine repräsentative Stichprobe von 284 Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe I (GY, RS, HS) mittels eines Computerfragebogens untersucht. Nach einem einleitenden Beispielvideo mit vier exemplarischen Antworten wurden drei Unterrichtsszenen gezeigt, die an „didaktisch interessanten“ Stellen automatisch stoppten und zu denen die Lehrkräfte jeweils eine Unterrichtsfortsetzung angeben sollten (offenes Format, keine Zeitbegrenzung). Die drei Videovignetten (je 1,5-2 Min. lang) behandelten die Themen Bruchungleichung, Dreisatz bzw. Mittelwerte. Die schriftlichen Antworten der Lehrkräfte wurden von zwei Ratern auf insgesamt fünf Dimensionen (Dim. 1: „Schülerorientierung“; Dim. 2: „methodische Orientierung“; Dim. 3: „Verständnisorientierung“; Dim. 4: „fachliche Präzision“; Dim. 5: „Ergreifen der didaktischen Chance“) jeweils dreistufig kodiert. Aus den Ratings der Lehrerantworten zu den drei Videos wurde ein Summenwert als Maß für die situative Unterrichtskompetenz der jeweiligen Lehrkraft gebildet.

## Ergebnisse und Diskussion

**Zu 1**. Wie sich herausstellte, gelang es mit Hilfe der Videovignetten, situative Unterrichtskompetenz von Lehrkräften reliabel zu erfassen (Cronbachs Alpha: $\alpha_{SU} = .70$). Strukturgleichungsmodelle bestätigten zudem die theoretisch postulierte zweidimensionale Struktur mit einer methodischen Sub-Kompetenz (M, bestehend aus Dim. 1 und 2; $\alpha_{M} = .59$) und einer fachspezifischen Sub-Kompetenz (F, bestehend aus Dim. 3, 4 und 5; $\alpha_{F} = .62$).

**Zu 2.** Es zeigten sich erwartungskonforme Befunde zu Schulformunterschieden von SU, M und F (GYM > RS > HS: jeweils mittlere bis große Effekte). Außerdem ergaben sich hochsignifikant positive Zusammenhänge mit weiteren Lehrermerkmalen wie dem fachdidaktischen Wissen und dem Fachwissen (jeweils gemessen mit Papier-und-Bleistift-Tests) sowie mit konstruktivistischen (+) und mit transmissiven (–) Überzeugungen.

**Zu 3.** Die fachspezifische Komponente F der situativen Unterrichtskompetenz (nicht jedoch die methodische Komponente M) erwies sich als signifikanter Prädiktor für das Ausmaß an kognitiver Aktivierung im Unterricht der Mathematiklehrkräfte (einer Facette der in COACTIV/PISA mittels Aufgaben gemessenen Unterrichtsqualität, vgl. Kunter & Voss, 2011). Das COACTIV-Videoinstrument ergänzt somit die bereits bewährten COACTIV-Tests zum Fachwissen und fachdidaktischen Wissen (Krauss et al., 2008) um eine unterrichts- und handlungsnahe Facette der professionellen Kompetenz.

## Literatur


Bruckmaier, G. (2015). *Didaktische Kompetenzen von Mathematiklehrkräften – Weiterführende Analysen aus der COACTIV-Studie* (Perspektiven der Mathematikdidaktik) (Dissertation). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29* (3/4), 223-258.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Kunter, M., & Voss, T. (2011). Das Modell der Unterrichtsqualität in COACTIV: Eine multikriteriale Analyse. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 85–114). Münster: Waxmann

Florian DEYER, Mainz, Diana HENZ, Mainz; Reinhard OLDENBURG, Augsburg

# Wirkung bewegungsinduzierender Sitzmöbel im Unterricht auf die Lösungsfähigkeit bei Algebra und die Befindlichkeit

Die kognitive Leistungsfähigkeit ist eine grundlegende Voraussetzung für die Bewältigung von Lerninhalten, die im Schulunterricht vermittelt werden. Wissenschaftliche Studien belegen eine enge Verbindung von Motorik und Kognition (z. B. Laufer, Ashkenazi & Josman, 2008), wobei unterschiedliche Fragestellungen, wie etwa der Einfluss des Alters oder die Art der motorisch-kognitiven Aufgaben ein weites Forschungsfeld eröffnen und unterschiedliche Schlussfolgerungen über den Zusammenhang zulassen (vgl. Szturm et al., 2013; Makizako, Furuna, Ihira & Shimada, 2013; Van Impe et al., 2012). In der vorliegenden Studie wurde, basierend auf der Grundannahme einer positiven Wirkung auf die kognitive Leistungsfähigkeit durch Bewegungsinduktion während des Sitzens (vgl. Maus, Henz & Schöllhorn, 2013), die Leistung bei Algebra sowie die subjektive Einschätzung der Befindlichkeit unter bewegtem und statischem Sitzen getestet.

## Studiendesign

Zwei Schulklassen der neunten Klasse einer Realschule-Plus (Rheinland-Pfalz) bildeten die Versuchsgruppen. Die Interventionsklasse (n = 26, 15 weiblich) wurde mit beweglichen Sitzhockern (LeitnerWipp; Leitner Ergomöbel, Lohnsburg, AT) ausgestattet. Die Kontrollklasse (n = 27, 14 weiblich) absolvierte den Testzeitraum von sechs Wochen auf einem Standardschulstuhl mit Lehne. Nach einer Eingewöhnungsphase erfolgte der Prätest, weitere Testungen nach drei und sechs Wochen (Posttest), wobei jeweils ein Algebra- und ein Befindlichkeitstest durchgeführt wurde. Die Lösungsfähigkeit bei Algebra wurde mittels eines ad hoc, jedoch theoriebasierten Computertests erfasst. Im festen Testzeitraum von fünfzehn Minuten wurde die Anzahl bearbeiteter und richtig beantworteter Items je Schwierigkeitsstufe (leicht, mittel, schwer) aufgezeichnet. Die Befindlichkeit wurde mit dem Mehrdimensionalen Befindlichkeitsfragebogen (MDBF) (Styer, Schwenkmezger, Notz & Eid, 1997) erhoben.

## Ergebnisse

Die Interventionsgruppe (Stufen 1-3: M = 21.34, SD = 26.72; M = 27.53, SD = 33.98; M = 16.38, SD = 30.99) schneidet im Mittel besser ab als die Kontrollgruppe (Stufe 1-3: M = 14.50, SD = 5.86; M = 19.33, SD = 13.99; M = 9.52, SD = 7.47). Die zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung für den Innersubjektfaktor Schwierigkeit und den Zwischensubjektfaktor Gruppe zeigt einen statistischen Trend für den Faktor Gruppe auf

($p = .1$, $\eta p2 = .13$). Für die Dimension Wachheit-Müdigkeit des MDBF erreicht die Interventionsklasse einen Score von $M = 26.54$ ($SD = 5.98$), die Kontrollklasse einen Wert von $M = 21.91$ ($SD = 6.78$). Der Unterschied zwischen den Gruppen ist hochsignifikant ($p < .001$, $\eta p2 = .34$).

**Diskussion**

Die Ergebnisse stützen die Annahme, dass das Zulassen von mehr Bewegung im Unterricht förderlich für die Leistung der Schülerinnen und Schüler ist (vgl. Jansen, 2014). Auch wenn einige Studien darauf hindeuten, dass der Kontrolle der Körperhaltung der Vorzug vor der Kognition gewährt wird (vgl. Szturm et al., 2013), könnte die bessere Leistung der Interventionsklasse durch den höheren Grad an Wachheit und damit einhergehend größerer Aufmerksamkeitsfähigkeit erklärt werden. Die Annahme von Riley, Baker und Schmit (2003) einer inversen Beziehung von Haltungskontrolle und Kognition bzw. Aufmerksamkeit sowie die vorliegenden Ergebnisse stützen die Vermutung, dass die stetig variierende Haltung nicht direkt, sondern indirekt über die Aufmerksamkeit positiv auf die mathematische Leistungsfähigkeit wirkt. Weitere Studien sollten auf diesem Gebiet durchgeführt werden. Neben Einflüssen von Altersunterschieden sollten auch Unterschiede zwischen den Schulformen sowie die Auswirkung auf andere Bereiche mathematischen Lernens untersucht werden.

## Literatur


Jansen, P. (2014). Macht Bewegung unsere Kinder wirklich schlauer? Neue Erkenntnisse zum Zusammenhang von Bewegung und kognitiven Fähigkeiten bei Kindern und Jugendlichen. *Sport-Orthopädie - Sport-Traumatologie - Sports Orthopaedics and Traumatology, 30*(3), 267–273.

Laufer, Y., Ashkenazi, T. & Josman, N. (2008). The effects of a concurrent cognitive task on the postural control of young children with and with-out developmental coordination disorder. *Gait & Posture, 27*(2), 347–351.

Makizako, H., Furuna, T., Ihira, H. & Shimada, H. (2013). Age-related differences in the influence of cognitive task performance on postural control under unstable balance conditions. *International Journal of Gerontology, 7*, 199–204.

Riley, M.A., Baker, A.A. & Schmit, J.M. (2003). Inverse relation between postural variability and difficulty of a concurrent short-term memory task. *Brain Research Bulletin, 62*, 191–195.

Steyer, R., Schwenkmezger, P., Notz, P. & Eid, M. (1997). *Der Mehrdimensionale Befindlichkeitsfragebogen (MDBF)*. Göttingen: Hogrefe.

Szturm, T., Maharjan, P., Marotta, J.J., Shay, B., Shrestha, S. & Sakhalkar, V. (2013). The interacting effect of cognitive and motor task demands on performance of gait, balance and cognition in young adults. *Gait & Posture, 38*(4), 596–602.

Van Impe, A., Bruijn, S.M., Coxon, J.P., Wenderoth, N., Sunaert, S., Duysens, J. & Swinnen, S.P. (2013). Age-related neural correlates of cognitive task performance under increased postural load. *AGE, 35*, 2111–2124.

Hans M. DIETZ, Susanne KUNZ, Paderborn

# Abstraktionstraining

Die modernen Wirtschaftswissenschaften sind weithin stark mathematisiert, formalisiert und durch die Verwendung abstrakter Konzepte geprägt. In der Konsequenz müssen Studierende der Wirtschaftswissenschaft mit abstrakten Konzepten umgehen können, die nötigen Formalismen beherrschen sowie die Sprache der Mathematik verstehen. In der Praxis jedoch, so zeigen reichhaltige Erfahrungen in der Lehre, überwiegen bei diesen vielmehr Abneigung bis Angst gegenüber Formalismen und Abstraktion – mit negativen Konsequenzen für den Studienerfolg. Daher besteht das Ziel des Projektes „Abstraktionstraining" darin, die Einstellung der Studierenden zur Abstraktion positiv zu beeinflussen sowie die Bereitschaft und Fähigkeit zur *passiven* wie *aktiven* Abstraktion zu fördern. Das Projekt wird im Umfeld der Kurse zur „Mathematik für Wirt-schaftswissenschaftler" an der Universität Paderborn angesiedelt.

## Abstraktion

Der Begriff „Abstraktion" wird in der Literatur auf verschiedene Art und Weise verstanden und verwendet (vgl. z.B. Dawydow (1977), Hershkowitz et al. (2012)). Für die Zwecke des Projektes ist dieser Begriff im Hinblick auf die Anforderungen des Kurses, den Grad der Operationalisierbarkeit sowie den Grad der Beobachtbarkeit zu spezifizieren. Im Rahmen des Projektes konzentrieren wir uns auf die Kompetenzen des Symbolisierens, des Strukturierens sowie des qualitativen Argumentierens auf der Basis abstrakter Konzepte. Die folgenden zwei Beispiele illustrieren den Abstraktionsbedarf im Kurs „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler":

- *Symbolisieren/Strukturieren:*

$$f(x) = e^{2\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}} = e^{etwas(x)} = e^{\varphi(x)}$$

- *Qualitatives Argumentieren:*

*Was können Sie über den betriebsminimalen Output einer neoklassischen Kostenfunktion* $K : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *aussagen?*

## Projektdesign

Kursbegleitend werden über ein Semester mehrere Trainingseinheiten durch-geführt (Abb. 1). Die Trainingsgruppe hat maximal 20 Teilnehmer, die randomisiert aus einem größeren Bewerberpool ausgewählt werden. Die übrigen

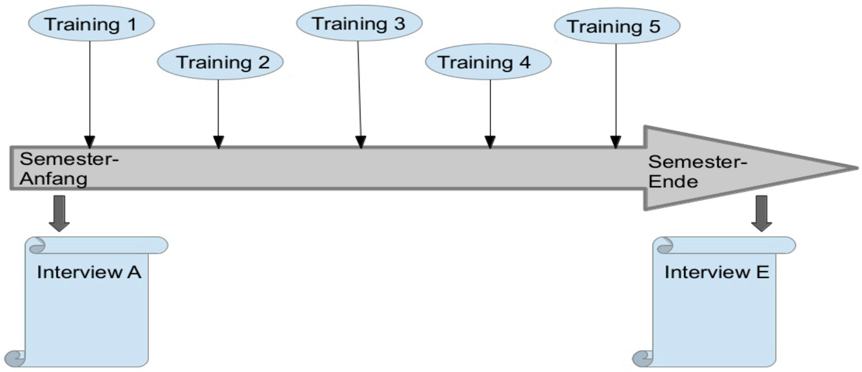



**Abb. 1:** Projektablauf

Bewerber bilden die Kontrollgruppe; sie nehmen zwar an der Vorlesung, aber nicht an den Trainingseinheiten teil. Zu Beginn und zum Ende des Semesters, d.h., vor der ersten und nach der letzten Trainingseinheit, wird je ein Interview mit den Trainingsteilnehmern durchgeführt. Der Fokus des Interviews liegt auf der Diagnose der Kompetenz und Einstellung der Studierenden in Bezug auf Abstraktion. Als Werkzeug wird ein klinisches Interview genutzt, unterstützt durch einen Interviewleitfaden. Dabei werden den Probanden geeignete Aufgaben gestellt, die es ermöglichen, den Grad der Abstraktionsfähigkeit und -neigung der einzelnen Teilnehmer zu bestimmen.

## Trainingseinheiten

Die Trainingseinheiten beinhalten Ergänzungen bzw. Modifikationen von Lehrinhalten der zugrunde liegenden Vorlesung mit erhöhtem Abstraktionsbezug sowie neue bzw. modifizierte Übungsaufgaben. Weiterhin werden alternative Vermittlungsformen, wie z.B. *wiederholtes Aufgabenlösen* versus *explorative Aufgabenstellung*, erprobt. Unterstützt werden die Trainingseinheiten durch metakognitiv-methodische Instruktionen des Systems „CAT“ (vgl. Dietz 2013).

## Literatur

Dawydow, W. (1977). Arten der Verallgemeinerung im Unterricht. Logisch-psychologische Probleme des Aufbaus von Unterrichtsfächern (8. Auflage). Berlin, Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Dietz, H.M. (2013). CAT – ein Modell für lehrintegrierte methodische Unterstützung von Studienanfängern. In R. Biehler et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase – Herausforderungen und Lösungsansätze.* Heidelberg u.a.: Springer, erscheint 2015.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T. (2012). Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Encyclopedia of the Sciences of Learning*, 32(2), 195-222.

Anja FRECH, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Freiburg; Bärbel BARZEL, Essen

# Wirkungen verschiedener Visualisierungen als Lernhilfe beim Umformen von Gleichungen

## 1. Theoretischer Hintergrund und Zielsetzungen des Projektes

Der Aufbau konzeptuellen und prozeduralen Wissens (vgl. Rittle-Johnson & Alibali, 1999) spielt im Algebraunterricht eine wichtige Rolle – insbesondere auch beim Thema der Äquivalenzumformungen. Häufig wird dabei der Übergang zu abstrakten und rein symbolischen Darstellungen zu früh vollzogen, weshalb auf Seiten der Schülerinnen und Schüler oft nur unverstandene Regeln memoriert werden. Dies gefährdet die Nachhaltigkeit des Unterrichts (vgl. Vollrath & Weigand, 2009; Fischer, Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2010). In der fachdidaktischen Forschung besteht ein breiter Konsens darüber, dass externale Repräsentationen im Unterricht ein auf das Verstehen der algebraischen Konzepte fokussierendes Lernen unterstützen (vgl. Vlassis, 2002; Ainsworth, 2006). Für das Erlernen von Äquivalenzumformungen wird zu diesem Zweck beispielsweise das Waagemodell vorgeschlagen (vgl. Vlassis, 2002).Im Rahmen des vorgestellten Projektes soll untersucht werden, welche Wirkungen verschiedene Visualisierungen, basierend auf dem Waage-modell, für den Vorstellungsaufbau beim Erlernen von Äquivalenzumformungen haben. Hierbei stellen sich zwei zentrale Fragen: Welche Darbietung des Waagemodells (statisch/dynamisch) unterstützt den Wissenserwerb am effektivsten und welche Wissensarten (prozedural/konzeptuell) können durch den Einsatz dieses Modells besonders gefördert werden? Da Einstellungen und Überzeugungen einen Einfluss auf Aufnahmebereitschaft und Informationsverarbeitung ausüben (vgl. Mason & Boscolo, 2004), soll ebenfalls analysiert werden, welchen Einfluss die Einstellungen und Überzeugungen von Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der Verwendung von Visualisierungen auf den Wissenserwerb hierbei haben.

## 2. Untersuchungsdesign

Um die Fragestellungen beantworten zu können, sind zwei Forschungsphasen geplant, welche aufeinander aufbauen: Innerhalb der ersten, qualitativen Phase werden Interviews mit zehn Schülerinnen und Schülern zum Thema Äquivalenzumformungen geführt. Dabei sollen die Denkprozesse der Lernenden analysiert werden während sie mit verschiedenen Visualisierungen (basierend auf dem Waagemodell) beim Lösen von Gleichungen arbeiten. Die zweite, quantitative Phase wird als Experimental-Kontrollgruppen-Design konzipiert. Es wird eine standardisierte Unterrichtseinheit zur Einführung von Äquivalenzumformungen durchgeführt, wobei sich die einzelnen Gruppen in der Art der Visualisierung (statisch/dynamisch) unterscheiden. Mit Studierenden wurde eine Vorstudie durchgeführt: Im ersten Teil eines Interviews sollten Gleichungen gelöst werden (Paper-Pencil), wobei mittels lautem Denken die einzelnen Lösungsschritte erklärt und begründet werden sollten. Im zweiten Teil wurde das Waagemodell in Form eines Applets am Computer vorgestellt (dynamische Visualisierung), auch hierbei sollten die einzelnen Schritte erklärt und begründet werden.

## 3. Ergebnisse der Vorstudie

Im ersten Teil der Interviews wurden die Gleichungen zwar von allen Probanden gelöst, allerdings konnte das Vorgehen von ihnen meist beschrieben, nicht jedoch richtig begründet werden. Häufig wurde erwähnt, dass das Verfahren in der Schule nicht verstehensorientiert gelernt wurde. Die Studierenden hatten Mühe, die einzelnen Lösungsschritte zu erklären und zu begründen. Im zweiten Teil der Interviews (hier wurde das Applet eingesetzt) wurde ihnen das Prinzip der Äquivalenzumformung deutlicher. Dies zeigte sich daran, dass sie beim Lösen einer Gleichung versuchten, die Waage im Gleichgewicht zu halten und erklären konnten, dass hierfür auf beiden Seiten der Gleichung jeweils das gleiche gerechnet, also gleichsinnig verändert werden muss. Es zeigte sich, dass sich das Waagemodell dazu eignet, Denkprozesse beim Ausführen von Äquivalenzumformungen zu rekonstruieren; dabei ergeben sich unter anderem Hinweise auf (nicht) vorhandene Grundvorstellungen.

## Literatur


Ainsworth, S.E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 52 (33),* 1-7.

Mason, L. & Boscolo, P. (2004). Role of epistemological understanding and interest in interpreting a controversy and in topic-specific belief change. *Contemporary Educational Psychology, 29 (2*), 103-128.

Rittle-Johnson, B. & Alibali, M.W. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology, 91,* 175-189.

Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49 (3),* 341-359. Vollrath, H.J. & Weigand, H.G. (2009). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

Sebastian FRICKE, Kapriel MESER, Bielefeld

# Auf den Pädagogen kommt es an – Zum möglichen Zusammenhang pädagogischer Qualität und mathematischer Basisfertigkeiten von Vorschulkindern

## 1. Kontext der Untersuchung

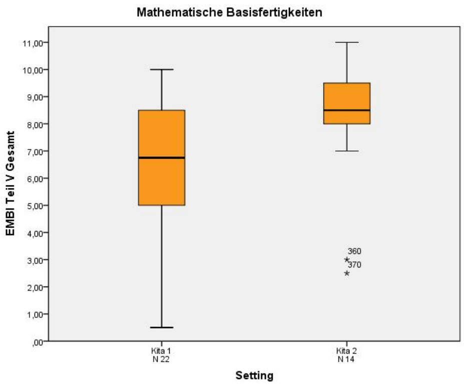
Eine Vielzahl an Studien belegt eindrucksvoll den Zusammenhang mathematischer Vorerfahrungen im Vorschulalter und dem späteren Schulerfolg im Fach Mathematik (Weinert & Helmke 1997). Ferner ist für den Lernerfolg, insbesondere für leistungsschwächere Kinder, die pädagogische Qualität des Unterrichts von entscheidender Bedeutung (Rowan et al. Chiang & Miller 1997). Es liegt nahe, das dies auch auf den Elementarbereich übertragen werden kann. Zwar liegen Studien vor, die Fortbildungserfolge bei Erziehenden mittels Leistungsveränderungen bei Kindern messen, die Veränderung der pädagogischen Qualität mathematikbezogener Interaktionen wird jedoch nicht kontrolliert (vgl. Grüßing & Peter-Koop 2008).

## 2. Forschungsfrage und Design

Ziel der vorliegenden explorativen Untersuchung ist es daher zu untersuchen, ob es Zusammenhänge zwischen der pädagogischen Qualität mathematikhaltiger Fachkraft-Kind-Interaktionen und den mathematischen Basisfertigkeiten der Kinder im Elementarbereich gibt. Dazu wurde die Qualität der Fachkraft-Kind-Interaktion im Interrater Verfahren an fünf Beobachtungstagen mit dem KES-R (Tietze et al. 2005) und einer Erweiterung des mathematischen Teils (Brauer 2012) in zwei Kindertageseinrichtungen gemessen. Die Lernstandserhebung der Kinder erfoltge zu Beginn des letzten Kindergartenjahres mit dem EMBI-KiGa (Peter-Koop & Grüßing 2011). Die Rahmenbedingungen bezüglich der Wohnsituation, des Bildungsniveaus und der Berufstätigkeit der Eltern sowie der überwiegenden Haushaltssprache sind nach Angaben der Erziehenden in beiden Einrichtungen vergleichbar.

## 3. Diskussion und Ausblick

Während Kita 1 ein durchschnittliches Qualitätsniveau von 3 bzgl. der mathematikhaltigen Fachkraft–Kind–Interaktion aufweist (Abb. 2) und die Leistungen der Kinder sehr heterogen ausgeprägt sind (Abb. 1), sind die Ergebnisse der Kinder in Kita 2 auf einem sehr hohen Niveau. Die Qualität liegt hier auf Niveau 6 und ist damit sehr hoch ausgeprägt. Die hier dargestellten Leistungsunterschiede sind signifikant und lassen auf mögliche Zusammenhänge zwischen der Qualität mathematikhaltiger Interaktionen und




Kinderleistungen schließen. In Anbetracht der geringen Stichprobengrößen und geringen Anzahl an untersuchten Kindertageseinrichtungen sind diese sehr vorsichtig zu betrachten. Weitere Einflussvariablen wie beispielsweise der sozioökonomische Status der Eltern oder das familiäre Anregungsniveau werden hier nicht berücksichtigt.

**Abbildung 1:** Testergebnisse zu Beginn des letzten Kindergartenjahres

Angesichts der Forschungsergebnisse bzgl. der Einflussfaktoren auf Schülerleistungen und unserer Daten scheint es lohnenswert, weitere Untersuchungen zum Zusammenhang pädagogischer Qualität und basaler mathematischer Fähigkeiten im Elementarbereich zu initiieren.

| | Bewertung der Qualität mit dem KES - R | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Innenraum | | | | ■ | | | | | | | | | | ■ |
| Mobiliar für Pflege, Spiel und Lernen | | | | | | ■ | | | | | | | ■ | |
| Ausstattung Entspannung und Behaglichkeit | | | | | ■ | | | | | | | | ■ | |
| Raumgestaltung | | | | | | ■ | | | | | | | | ■ |
| Rückzugsmöglichkeiten | | | | ■ | | | | | | | | | ■ | |
| Kindbezogene Ausgestaltung | | | | | | ■ | | | | | | | ■ | |
| Platz für Grobmotorik | | | | | | | ■ | | | | | | | ■ |
| Ausstattung für Grobmotorik | | | | | | ■ | | | | | | | ■ | |
| Mathematisches Verständnis (Erziehende) | | | | ■ | | | | | | | | | ■ | |
| | Kita 1 | | | | | | | Kita 2 | | | | | | |

**Abbildung 2:** Ergebnisse KES-R (Auszüge) & Erweiterung KES-R

## Literatur

Brauer, M. (2012). *Rahmenbedingungen für mathematische Bildung im Elementarbereich. Eine vergleichende Beobachtungsstudie.* Unveröffentlichte Statsexamensarbeit. LMU-München

Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Effekte vorschulischer mathematischer Förderung am Ende des ersten Schuljahres: Erste Befunde einer Längsschnittstudie. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 1(1), 65–82

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2011). *Elementarmathematisches Basisinterview – Kindergarten.* Offenburg: Mildenberger

Rowan, B., Chiang, F.-S., & Miller, R. J. (1997): Using research on employees‘ performance to study the effects of techers in students‘ achievement. In: *Sociology of Education,* 70, 256 – 284

Tietze, W., Schuster, K.-M., Grenner, K., Roßbach, H.-G.(2005). *Kindergarten-Skala. (KES-R). Feststellung und Unterstützung pädagogischer Qualität in Kindergärten.* Weinheim: Beltz

Weinert, F. E., & Helmke, A. (Hrsg.) (1997). *Entwicklung im Grundschulalter*. Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union

Ulla HEDDEWIG, Marianne NOLTE, Kirsten PAMPERIEN, Hamburg

# Fragen im Zusammenhang mathematisch besonders begabter Kinder - Beispiele aus dem PriMa-Projekt

PriMa ist eine Maßnahme der Behörde für Schule und Berufsbildung (BSB) in Hamburg und besteht aus verschiedenen Teilmaßnahmen. Das Uni-Projekt als Teil dieser Maßnahme hat zum Ziel, mathematisch besonders begabte Kinder in der dritten und vierten Klasse zu fördern.

Seit 15 Jahren findet an der Universität Hamburg einmal im Jahr eine Talentsuche statt. An einem Probewochenende, dem Mathe-Treff für Mathe-Fans, können interessierte Drittklässler ausprobieren, ob sie Spaß am Lösen ausgewählter Problemaufgaben haben. Im Anschluss daran finden ein Mathematik- und ein Intelligenztest statt. 50 Kindern wird daraufhin ein Platz im Uni-Projekt angeboten. Für dieses Enrichmentangebot wurden an der Universität mathematisch herausfordernde Problemfelder entwickelt.

Die Förderung endet zurzeit nach der 6. Klasse. Danach gibt es die Möglichkeit, am "Hamburger Modell" der William-Stern-Gesellschaft teilzunehmen. Alle anderen Kinder, die die Talentsuche bis zum Ende durchlaufen haben, erhalten das Angebot, an einem Mathe-Zirkel (überregionale Schulangebote) teilzunehmen.

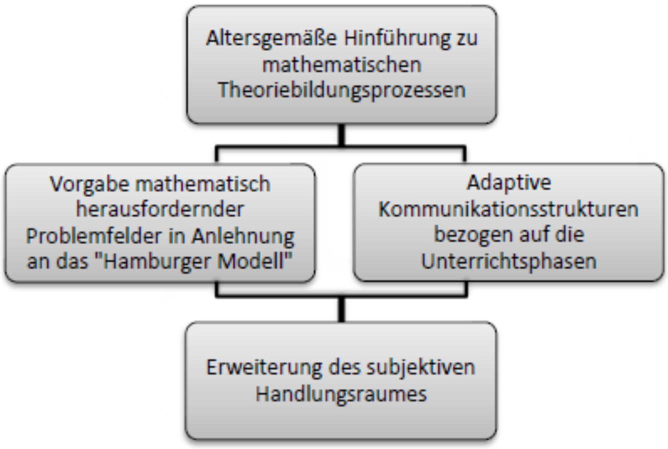



**Abb. 1:** Elemente des Konzeptes

## Aktuelle Forschungsprojekte

Aktuelle Forschung beschäftigt sich unter anderem mit der Entwicklung metakognitiver Kompetenzen bei mathematisch besonders begabten Grundschulkindern. Diese Kinder können in ihren mathematischen Kompetenzen ihrer Altersstufe weit voraus sein. Sind sie in der Entwicklung ihrer metakognitiven Kompetenzen ebenso voraus? Häufig haben mathematisch begabte Kinder im Regelunterricht wenig Möglichkeit, ihre metakognitiven Kompetenzen anhand komplexer mathematischer Problemfelder zu entwickeln. Können sie durch Förderung ihr hohes Potential auch im Bereich der metakognitiven Kompetenzen entfalten?

Außerdem werden Gelingensbedingungen für die Identifikation von mathematisch besonders begabten Grundschulkindern mit Migrationshintergrund analysiert. Beobachtungen haben gezeigt, dass der Anteil dieser Kinder an der Talentsuche im Laufe der Jahre auf ca. 25% gestiegen ist. In den Fördergruppen liegt er jedoch nur bei max. 5%. Es ist bekannt, dass die Bildungssprache, phonologische Aspekte der Unterrichtssprache und deren grammatikalische Strukturen eine Barriere darstellen können. Es stellt sich für uns die Frage, ob unsere nicht redundanten Aufgabentexte durch ihre semantische Verdichtung für mathematisch besonders begabte Kinder mit Migrationshintergrund ein Problem für das Aufgabenverständnis darstellen.

## Weitere Forschung

Barrieren in der Entwicklung von Grundschulkindern mit besonderer mathematischer Begabung (http://blogs.epb.uni-hamburg.de/nolte/).

## Literatur


Gogolin, I. (2012). Sprachliche Bildung im Mathematikunterricht. In W. Blum, R. Borromeo Ferri & K. Maaß (Hrsg.), Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität (S. 157-165). Wiesbaden: Vieweg + Teubner | Springer Fachmedien.

Nolte, M. & Kießwetter, K. (1996). Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? Ein Bericht über einschlägige Überlegungen und erste Erfahrungen. ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5, 143-157.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2006). Besondere mathematische Begabung im Grundschulalter – ein Forschungs- und Förderprojekt. In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), Wie fördert man mathematisch besonders begabte Kinder? (S. 60-72). Offenburg: Mildenberger.

Nolte, M. & Pamperien, K. (2013). Conditions of success of mathematical gifted young children with migration background in a talent search process. In Proceedings of the 8th Conference of MCG the International Group for Mathematical Creativity and Giftedness, 2014 (S. 91-95). Denver, Co.

Weinert, F. & Kluwe, R. (1984). Metakognition, Motivation und Lernen. Stuttgart: Kohlhammer.

Ziegler, A. & Stöger, H. (2005). Trainingshandbuch selbstreguliertes Lernen I. Lernökonomische Strategien für Schüler der 4. Jahrgangsstufe Grundschule zur Verbesserung mathematischer Kompetenzen. Lengerich: Pabst Science Publ.

Sabine KOWALK, Timo LEUDERS, Andreas SCHULZ, Jana GROß OPHOFF, Freiburg

# Die Wirksamkeit von Professionalisierungsmaßnahmen im Zusammenhang mit einer zentralen Eingangsdiagnose in Klasse 5

Spezifische, individuumsbezogene diagnostische Informationen sind Voraussetzung für pädagogisches Handeln (Schrader, 2013; Anders et al., 2010). Bei institutionellen Übergängen von der Grundschule zur Sekundarstufe 1 ist das Anknüpfen an Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler für den Lernerfolg unstrittig. Insbesondere arithmetische Basiskompetenzen sind für das erfolgreiche Weiterlernen in der Sekundarstufe 1 von zentraler Bedeutung (Ennemoser, Krajewski & Schmidt, 2011; Moser Opitz, 2004). Die unterrichtliche Umsetzung stellt Lehrkräfte grundsätzlich, aber bei Übergangsprozessen in besonderem Maße vor große Herausforderungen, da sie eine systematische Abklärung der Lernausgangslage erfordert (Racherbäumer, 2014; Schrader, 2013). Zentrale Kompetenzmessungen sind für derartige Bestandsaufnahmen vorteilhaft. Sie sind eng an Kernkompetenzen orientiert und liefern Informationen, die für die Unterrichtsgestaltung genutzt werden können. Ein wichtiger Aspekt spielt hierbei das Verständnis und die Fähigkeit im Umgang mit solchen Informationen (Schrader, 2013).

Im kommenden Schuljahr 2015/16 wird in Baden-Württemberg landesweit und schulartübergreifend zu Beginn von Klasse 5 eine zentrale Eingangsdiagnose implementiert. Im Fach Mathematik werden Zahl- und Operationsverständnis sowie schriftliche Rechenverfahren (Leuders & Schulz, 2014) auf verschiedenen Niveaus erfasst und als individualdiagnostisch interpretierbarer Befund an Lehrkräfte zurückgemeldet. Zudem werden niveaudifferenzierte Fördermaterialien zur Verfügung gestellt.

Durch die Bereitstellung fachdidaktisch differenzierter, der Unterrichtspraxis naher Leistungsrückmeldungen sollen Nutzungsprozesse begünstigt werden (Leuders, 2011). Empirische Belege sprechen dafür, dass Fortbildungen Nutzungsprozesse und weitergehend die Professionalisierung der Lehrkräfte unterstützen (Koch, 2011; Maier, 2008). Auch von Reflexionsprozessen in Verbindung mit externer Beratung wird ein Beitrag zur Professionalisierung der Lehrkräfte angenommen (Zimmer-Müller et al., 2014; Altrichter, 2010).

In dem im Titel genannten Forschungsprojekt werden verschiedene Fortbildungsmaßnahmen zur neu eingeführten zentralen Eingangsdiagnose in Klasse 5 im Fach Mathematik auf Lehrer- und Schülerebene evaluiert. Das experimentelle Design vergleicht die jeweiligen Wirkungen auf Rezeption und Nutzung der Rückmeldungen sowie auf den Lernzuwachs der Schülerinnen und Schüler. Zudem soll der moderierende Einfluss von Lehrermerkmalen (u.a. Professionswissen) auf die Wirksamkeit der Fortbildungsmaßnahmen untersucht werden.

Die Forschungsfragen des Projekts lauten daher:

1. Ergeben sich im Vergleich zur reinen Teilnahme an der Eingangsdiagnose durch begleitende Fortbildungen auf Lehrerebene positive Effekte bei (a) Motivation und Akzeptanz des Verfahrens, (b) bei der Rezeption und Nutzung der Rückmeldungen, (c) bei den professionellen Kompetenzen und (d) auf Schülerebene hinsichtlich arithmetischer Basiskompetenzen?
2. Welche Wirkungen haben die Fortbildungen im Vergleich?
3. Welchen moderierenden Effekt haben professionelle Lehrerkompetenzen auf den Prozess pädagogischer Nutzung von Rückmeldungen und auf die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler?

Dem Forschungsprojekt liegt ein experimentelles Kontrollgruppen-Design mit Pre- und Posttest zugrunde. Die Lehrkräfte werden randomisiert und drei Interventionsgruppen zugeordnet. Diese unterscheiden sich durch den Umfang der externen Beratung bzw. Unterstützung. Interventionsgruppe 1 erhält eine einmalige videobasierte onlinegestützte Fortbildung zur Interpretation der individualdiagnostischen Rückmeldungen sowie zum Einsatz der landesweit bereitgestellten Fördermaterialien. Interventionsgruppe 2 und 3 erhalten zusätzlich externe Beratung durch Fachberaterinnen und Fachberater. Diese unterstützen die Lehrkräfte bei der Planung und Umsetzung von Fördermaßnahmen durch eine einmalige Beratung (Interventionsgruppe 2) oder durch mehrmalige Beratung (Interventionsgruppe 3). Die Wartekontrollgruppe erhält eine zeitlich verzögerte Fortbildung.

Diese im Frühjahr 2015 beginnende Studie soll somit einen Beitrag zur Lehrerprofessionsforschung, zur Evaluation wirksamer Fortbildungsmaßnahmen sowie zur Rezeptionsforschung zentral administrierter Lernstandserhebungen leisten, indem Wirkungen auf Lehrer- und Schülerebene in einem experimentellen Design in den Blick genommen werden.

## Literatur

Die Literaturliste kann bei der Erstautorin per Email angefordert werden: Sabine.Kowalk@ph-freiburg.de

Ute LEDERER, Lars HOLZÄPFEL, Freiburg, Kathleen PHILIPP, Zürich, Andreas EICHLER, Kassel, Wolfram ROLLETT, Freiburg

# Die Auswirkung der Reflexion von Schülerprodukten auf den Kompetenzzuwachs von Lehrkräften in Fortbildungen

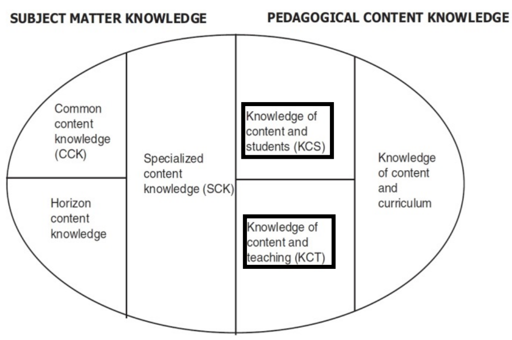
In Lehrerfortbildungen werden oftmals authentische Schülerprodukte eingesetzt (Lipowsky & Rzejak, 2012; Fölling-Albers u.a., 2004). Der Forschungsstand gibt Hinweise darauf, dass „die Konfrontation mit Fallbeispielen, die Analyse mündlicher Schülererklärungen [oder] schriftlicher Schülerdokumente […]“ (Lipowsky & Rzejak, 2012, S. 6) wirksame Elemente in Fortbildungen seien. Studien zum situierten Lernen in der Lehrerbildung lassen außerdem vermuten, dass die Analyse authentischer Schülerlösungen in Fortbildungen die Diagnose- und Förderkompetenz der Teilnehmenden fördere (Fölling-Albers u.a., 2004).
In einem experimentellen Kontrollgruppendesign wird die Auswirkung des Einsatzes authentischer Schülerprodukte in Fortbildungsmaßnahmen auf den Kompetenzzuwachs von Mathematiklehrkräften exemplarisch am Inhalt ‚Funktionen‘ der Sekundarstufe I erforscht.
Untersucht werden die folgenden Fragestellungen:

1. Können die Diagnose- und Förderkompetenz von Mathematiklehrkräften durch die Reflexion von Schülerprodukten im Rahmen einer Fortbildung gefördert werden?

2. Welche Auswirkungen hat die Einbindung von Schülerprodukten in Fortbildungen auf die Überzeugungen der Lehrkräfte in den Bereichen Diagnose und anschließender Förderung im Mathematikunterricht?

Zur Untersuchung der interes-sierenden Facetten von Lehrer-kompetenzen wird das Modell von Ball et al. (2008) zugrunde gelegt (siehe Abb. 1). Im Bereich des ‚pedagogical content knowledge’ (PCK) werden die beiden Facetten ‚knowledge of content and students’ (KCS) und ‚know-ledge of content and teaching’ (KCT) fokussiert.

**Abb. 1: Kompetenzfacetten (Ball et al., 2008)**



Die Facette KCS verbindet mathematisches Wissen von Lehrkräften mit dem Wissen über SchülerInnen und kann daher als Diagnosekompetenz interpretiert werden. Ziel der in diesem Projekt geplanten Fortbildungen ist die Förderung von Diagnosekompetenz durch die Analyse und Reflexion von Schülerprodukten. Daneben soll die Kompetenz, auf der Grundlage von Diagnosen geeignete Förderaufgaben für Lernende auswählen zu können, weiterentwickelt werden. Da diese Förderkompetenz eng mit Unterrichtsentscheidungen verknüpft ist, lässt sie sich dem Bereich KCT zuordnen, der mathematisches Wissen mit Wissen über Unterricht verbindet.

In der Untersuchung werden die Mathematiklehrkräfte randomisiert den beiden Experimentalgruppen bzw. der Wartekontrollgruppe zugewiesen (siehe Abb. 2). Die Teilnehmenden der beiden Experimentalgruppen erhalten eine Fortbildung zum Thema ‚Funktionen', in der sie die Grundvorstellungen und typische Fehler kennenlernen. Die Einbindung der Reflexion von Schülerprodukten ist die unabhängige Variable. Während die Lehrkräfte der EG1 authentische Schülerprodukte analysieren, wird in EG2 ausschließlich mit Aufgaben und Musterlösungen gearbeitet. Die zu untersuchenden abhängigen Variablen sind die professionellen Kom-petenzen der teilnehmenden Mathematiklehrkräfte sowie ihre Über-zeugungen bezüglich Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht. Die Wartekontrollgruppe wird zu einem späteren Zeitpunkt fortgebildet.

**Abb.2: Kontrollgruppendesign**

| n = 60 Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe I | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **EG 1: Fortbildung *mit* Reflexion von Schülerdokumenten** | | | Vortest | Fortbildung Teil 1 (ca. 3 Stunden) | Distanzphase (ca. 2 Wochen): Erhebung von Schüler-dokumenten | Fortbildung Teil 2 (ca. 3 Stunden) | Nachtest |
| **EG 2: Fortbildung *ohne* Reflexion von Schülerdokumenten** | | | Vortest | Fortbildung Teil 1 (ca. 3 Stunden) | Distanzphase (ca. 2 Wochen): Lesen eines fach-didaktischen Textes | Fortbildung Teil 2 (ca. 3 Stunden) | Nachtest |
| **KG: Wartekontrollgruppe** | Vortest | 2 Wochen Unterricht | Nachtest | Fortbildung Teil 1 (ca. 3 Stunden) | Distanzphase (ca. 2 Wochen) | Fortbildung Teil 2 (ca. 3 Stunden) | |

## Literatur


Ball, D. L., Hoover Thames, M. & Phelps, G. (2008): Content knowledge for teaching. What makes it special?. *Journal of Teacher Education. 59*. S. 389 – 407.

Fölling-Albers, M., Hartinger, A., & Mörtl-Hafizovic, D. (2004): Situiertes Lernen in der Lehrerbildung. *Zeitschrift für Pädagogik*, *50*(5), S. 727-747.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012): Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen wirksamer Lehrerfortbildungen. *Schulpädagogik heute, 5*, S. 1 – 17.


.

Sarah OTTINGER, Stefan UFER, München

# Entwicklung eines Instruments zur Erfassung kooperativer mathematischer Argumentationskompetenz

## 1. Argumentieren und Beweisen- ein individueller & sozialer Prozess

Argumentieren und Beweisen sind zentrale Elemente der Mathematikausbildung. Doch das Formulieren und Absichern mathematischer Vermutungen (*Conjecturing*) stellt für Schüler und Studierende eine Herausforderung dar (Koedinger, 1998; Schwarz et al., 2008). Argumentieren und Beweisen wird hier als eine komplexe Fähigkeit verstanden, die sowohl individuell-kognitive als auch sozial-diskursive Aspekte umfasst (Kollar et al., 2014).

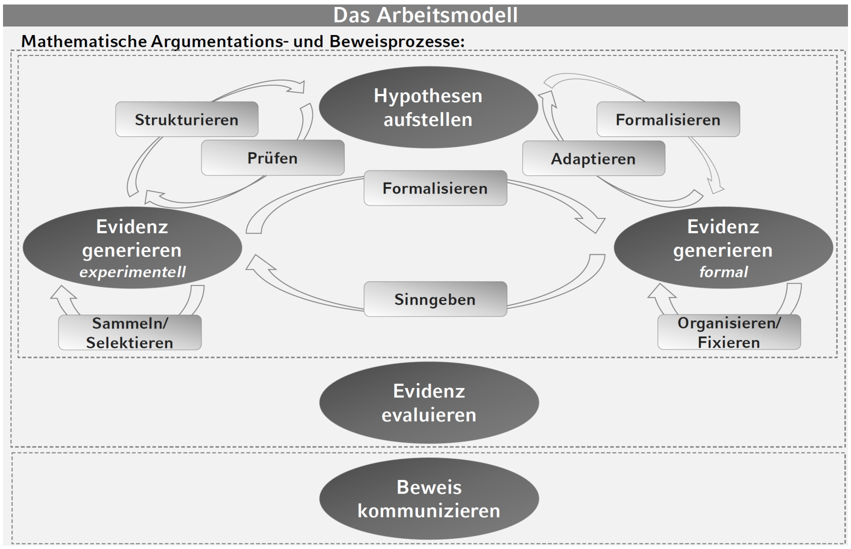
## 2. Ziele und Arbeitsmodell

Die Komplexität spiegelt sich insbesondere in der Vielzahl der Teilprozesse wieder. Bislang findet sich in der Literatur ein rein theorie-basiertes Prozessmodell (Boero, 1999), womit das Anfertigen eines Beweises lediglich auf Expertenniveau beschreiben wird. In der Realität werden Beweise jedoch nicht immer in einer linearen, systematischen Aneinanderreihung von rein-deduktiven Argumenten entwickelt, wie oft ein „fertiger" Beweis vermuten lässt. Vielmehr sind auch experimentelle Tätigkeiten wie das Generieren von Beispielen bei der Exploration von Hypothesen essenziell (Philipp, 2012). Für den Erfolg können auch meta-kognitive Prozesse oder – in kooperativen Situationen – die Qualität der argumentativen Kommunikation ausschlaggebend sein. Basierend auf videographierten Arbeitsprozessen von Studierenden bei einfachen *Conjecturing*-Aufgaben sollen Qualitätsmerkmale für kooperative mathematische Argumentationsprozesse identifiziert und auf ihre Interaktion sowie ihre Bedeutung für die Qualität des Arbeitsprodukts (Beweis) untersucht werden. Ausgangspunkt ist ein Arbeitsmodell, das wesentliche Modelle mathematischen Arbeitens (z.B. Philipp, 2012; Boero, 1999) bzw. wissenschaftlichen Argumentierens (Fischer et al., 2014) für mathematische *Conjecturing*-Prozesse zusammenfasst.

## 3. Methode

Zur Untersuchung der Qualitätsmerkmale werden Argumentationen in kooperativen Settings analysiert. N=164 Studienanfänger bearbeiteten in Dyaden zunächst gemeinsam eine *Conjecturing*-Aufgabe und wurden im Anschluss aufgefordert, eine individuelle Lösung schriftlich festzuhalten. Mithilfe von ordinal-skalierten Variablen werden die Argumentationen u.a.

auf ihre strukturelle Vollständigkeit (Toulmin, 1958) und auf ihre fachliche Korrektheit hin kodiert. Weiterhin wird auch die Intensität der Kooperation nach Chi (2009), die Reaktionen auf fachlich falsche Äußerungen, der Typ und die Tiefe meta-kognitiver Prozesse sowie die Anzahl der erbrachten Lösungsschritte erfasst. Um die Validität des Instruments zu prüfen, wird die Detailkodierung der Kooperationsprozesse mit hoch-infernten Ratings der Prozesse sowie weiteren Daten abgeglichen.




## Literatur


Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. In: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, S. 7-8.

Chi, M. T. (2009). Active-Constructive-Interactive: A Conceptual Framework for Differentiating Learning Activities. *Cognitive Science, 1(1), 1-213.*

Fischer, F., Kollar, I., Ufer, S., Sodian, B., Hussmann, H., Pekrun, R., Neuhaus, B., Dorner, B., Pankofer, S., Fischer, M., Strijbos, J-W., Heene, M. & Eberle, J. (2014). Scientific Reasoning and Argumentation: Advancing an Interdisciplinary Research Agenda in Education. *Frontline Learning Research, 4,* 28-45.

Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and Argumentation in High-School Geometry Students. In R. Lehrer (Hrsg.), *Studies in mathematical thinking and learning. Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (S. 319–347). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F. & Reiss, K. (2014). Effects of heuristic worked examples and collaboration scripts on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior knowledge. *Learning and Instruction, 32*, 22-36.

Philipp, K. (2012). *Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz.* Wiesbaden: Springer Fachmedien

Schwarz, B., Leung, I., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J., & Vale, C. (2008). Future teachers' professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in three countries. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education 40*, 791-811.

Toulmin, S. (1958): *The Use of Argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sebastian SCHORCHT, Gießen, Nils BUCHHOLTZ, Hamburg

# Ergebnisse einer Pilotstudie zu Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik

Die Beschäftigung mit Mathematikgeschichte wird als ein integraler Bestandteil einer umfassenden Lehrerausbildung angesehen (vgl. Beutelspacher, 2011; Clark, 2014) und auch bei schulischen Lehr- und Lernprozessen ist eine Verknüpfung mathematischer Fachinhalte mit ihren historischen Ursprüngen wünschenswert (vgl. Fauvel & van Maanen, 2000). Zu Überzeugungen zur Mathematikgeschichte bei angehenden Lehrerinnen und Lehrern ist bislang allerdings nur wenig bekannt (vgl. Alpaslan, Işıksal & Haser, 2014).

Folgt man Grigutsch, Raatz und Törner (1998), so können Überzeugungen von Studierenden zur Mathematik unterschiedliche Perspektiven aufweisen. Sie differenzieren dabei im Weiteren mathematische Weltbilder aus, die bei Studierenden unterschiedlich (statisch oder dynamisch) ausgeprägt sein können. Ausgehend von der Frage:

„Wie hängen Überzeugungen zur Mathematik und zur Geschichte der Mathematik miteinander zusammen?“

wurde ein onlinebasierter Fragebogen entwickelt, der die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Mathematik, zur Geschichte der Mathematik und zum Lehren und Lernen von Geschichte der Mathematik erhebt. Dazu wurden theoriebasiert Items entwickelt, die jeweils Aspekte einer „statischen“ oder „dynamischen“ Sicht auf Mathematikgeschichte beinhalten (vgl. Fauvel, 1991; Tzanakis & Arcavi, 2000; Charalambous et al., 2009).

Der Fragebogen wurde im Wintersemester 2014/2015 an verschiedenen Hochschulen pilotiert. An der Pilotierung nahmen 89 Lehramtsstudierende teil. Mithilfe einer explorativen Faktorenanalyse konnten fünf Faktoren in den Überzeugungen zur Geschichte der Mathematik ausgemacht werden, deren empirische Bestätigung jedoch aufgrund der Pilotierung mit einer kleinen Stichprobe noch aussteht:

Eine **„statische Sicht“** fasst die Mathematik als vollendetes Produkt auf. Mathematik wird sich demnach zukünftig nicht weiter entwickeln. Es gibt nichts Neues mehr zu erforschen und mathematische Erkenntnisse werden gegenwärtig nicht mehr gemacht. Die Geschichte der Mathematik wird daher eher als Sammlung von Biografien gedeutet.

Eine **„lebensweltliche Sicht“** verknüpft mit Mathematikgeschichte eine Beschreibung von Anwendungsproblemen. Die Geschichte der Mathematik verdeutlicht dabei, welchen hohen Alltagsnutzen die Mathematik für den Menschen hat.

Eine **„prozesshafte Sicht“** geht davon aus, dass die Mathematik einem stetigen Wandel ausgesetzt ist. Die Mathematikgeschichte zeigt demnach, dass mathematische Erkenntnisse ständig hinterfragt werden müssen.

Die **„Protagonisten Sicht“** ist mit dem Wirken besonderer Persönlichkeiten in ihrer Zeit verbunden. Studierende mit dieser Sicht legten den Fokus auf herausragende Akteure innerhalb der Mathematik. Dabei wird davon ausgegangen, dass mathematische Erkenntnisse Jahrhunderte alt sind und die Zeit überdauert haben.

Bei der **„perfektionistischen Sicht“** sehen Studierende die Mathematik ebenfalls einer Entwicklung unterzogen. Allerdings liegt der Fokus hierbei in der Perfektionierung der Mathematik. Dabei spielen Formeln seit je her eine bedeutende Rolle. Mathematik entwickelt sich demnach im zeitlichen Verlauf hin zu einer perfekten Mathematik.

## Literatur


Alpaslan, M., Işıksal, M. & Haser, C. (2014). Pre-service Mathematics Teachers' knowledge of History of Mathematics and Their Attitudes and Beliefs Towards Using History of Mathematics in Mathematics Education. *Science & Education, 23*, 159-183.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerausbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Charalambous, C.Y., Panaoura, A. & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics, 71,* 161-180.

Clark, K. M. (2014). History of Mathematics in Mathematics Teacher Education. In M.R.Matthews (Eds.). *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching* (S. 755-791). Dordrecht: Springer.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3-6.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*(1), 3–45.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (S. 201–240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Florian STAMPFER, Christian BARGETZ

# Kompetenzorientierte Fachausbildung in vorlesungsbegleitenden Übungsgruppen für Lehramtsstudierende aus Mathematik

## 1. Ausgangslage und theoretischer Hintergrund

Vorlesungsbegleitende Proseminare (Übungen) spielen in der Fachausbildung des Lehramtsstudiums Mathematik an der Universität Innsbruck mit rund einem Drittel der ECTS-Anrechnungspunkte eine prominente Rolle. Proseminare sind meist geprägt durch das Vorrechnen von Aufgaben an der Tafel. Dabei beklagten sich häufig Studierende darüber, dass sie vom Vorrechnen der Kollegen/innen wenig profitieren und sich daher langweilen würden. Es war bisher ein erfreulicher Nebeneffekt, wenn die Präsentation der Aufgabe so vonstatten ging, dass sie im zeitlichen Rahmen lag und die Schlüsselpunkte besonders hervorgehoben wurden. Zudem zeigen die Klausuren und die Tafelvorträge, dass viele Studierende – sogar in höheren Semestern – nicht in der Lage sind, einfache mathematische Sachverhalte formal richtig aufzuschreiben.

Es war uns daher ein Anliegen die Präsentations- und Kommunikationskompetenz der Studierenden im Hinblick auf das Fachwissen zu fördern. Das angestrebte (mathematische) Fachwissen angehender Lehrpersonen erscheint uns in der Literatur unscharf beschrieben, z. B. „profundes mathematisches Verständnis der in der Schule unterrichteten Sachverhalte“ in Baumert et al. (2006). In Anlehnung an die Charakterisierung von *Mathematical proficiency* in National Research Council (2001), haben wir für die Behandlung und Präsentation mathematischer Aufgaben die folgenden vier Perspektiven definiert: Logik, Abstraktion, Vorstellung und Rechnen. Erst wenn Studierende einen mathematischen Inhalt aus allen vier Perspektiven kontextualisieren kann, so kann für uns von einem umfassenden Verständnis gesprochen werden.

## 2. Strategien

Zur Verbesserung der eingangs genannten Problemsituation haben wir die folgenden vier gestaffelten Strategien entwickelt. Im ersten Semester sollen die Studierenden ein bis zwei Aufgaben genauer schriftlich ausarbeiten, d. h. so darstellen, dass sie für Personen mit ähnlichem Kenntnisstand gut verständlich sind. Dabei sollen sie insbesondere die Aufgaben aus den oben genannten vier Perspektiven betrachten. Die Beurteilung der Ausarbeitung erfolgt anhand eines Feedbackbogens, dessen Kriterien ebenfalls auf den oben genannten Perspektiven basieren.

Im zweiten Semester nehmen die Studierenden eine zusätzliche Rolle ein und erstellen im Rahmen eines Peer-Reviewing-Prozesses ein Gutachten zu einer Ausarbeitung, die in der gleichen Lehrveranstaltung erstellt wurde. Die Studierenden orientieren sich dabei ebenfalls an den obigen Perspektiven.

Im dritten Semester wird auch die mündliche Präsentation der Aufgaben an der Tafel anhand derselben Kriterien beurteilt. Dabei gibt es eine relativ strenge Zeitvorgabe, die dazu beitragen soll, dass ein Fokus auf die Schlüsselpunkte der Aufgabe gelegt wird. Des Weiteren sollen Verbindungen zwischen der Aufgabe und der behandelten Theorie hergestellt und die Sachverhalte aus mehreren Perspektiven präsentiert werden.

Im vierten Semester erfolgt schließlich eine gegenseitige Begutachtung der Präsentationen durch die Studierenden. Dies soll auch dazu dienen, dass die Studierenden die Perspektive eines/r Beurteiler/s/in einnehmen.

## 3. Erste Ergebnisse

Die obigen Strategien wurden bereits, jede für sich implementiert und evaluiert. Die Evaluierung der Ausarbeitungsstrategie erfolgte im Sommersemester 2012 und die Ergebnisse finden sich in Bargetz (2013). Die Evaluierung der Präsentationsstrategien erfolgte Wintersemester 2012/13, die Ergebnisse sind in Stampfer (2013) veröffentlicht. Es zeigte sich, dass die Studierenden die Ausarbeitungen mehrheitlich als hilfreich empfunden haben und dass die Präsentationsstrategie zu einer intensiveren Vorbereitung und zu strukturierteren Vorträgen geführt hat.

## Literatur


Bargetz, C. (2013). Strategien zur Förderung der mathematischen Kommunikationskompetenz und der Nachbereitung einer Lehrveranstaltung. *Schaufenster Lehre*. Online Publikation.

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehnugswissenschaften, 9(4),* 469–520

Hänze, M., Fischer, E., Schreiber, S., Biehler, R. & Hochmuth, R. (2013). Innovationen in der Hochschullehre: empirische Überprüfung eines Studienprogrammes zur Verbesserung von vorlesungsbegleitenden Übungsgruppen in der Mathematik. *ZFHE, 8(4),* 89–103

National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.), Mathematics learning study committee, center for education, division of behavioral and social sciences, and education. Washington, DC: National Academies Press.

Stampfer, F. (2013). Strategien zur Förderung der Präsentations- und Kommunikationskompetenz im Hinblick auf die fachlich-inhaltliche Dimension.

*Schaufenster Lehre*. Online Publikation.

Benjamin THIEDE, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, PH Freiburg

# Von der Textaufgabe zum Ergebnis – Zur Wirksamkeit des Prozentstreifens als Hilfsmittel bei Prozentaufgaben

## Theoretischer Hintergrund

Dem Prozentrechnen wird in der Schule und im Alltag seit langem eine große Bedeutung zugemessen. Ein striktes, rezeptartig gelerntes Schema beim Lösen von Prozentaufgaben behindert jedoch die Flexibilität bei der Auswahl von Lösungsansätzen (Kleine&Jordan 2007). Zudem sind solche Schemata oft fehlerhaft. Insbesondere bei Textaufgaben existieren zentrale Hürden im Übersetzungsprozess von der Realsituation zum mathematischen Modell, wie z.B. Schwierigkeiten im Erfassen der Situation (Prediger 2009). Es gilt also den Lernenden eine Unterstützung anzubieten, die Strukturierungs- und Verstehensprozesse begünstigt. Der Prozentstreifen als eine Form der Visualisierung kann dieses Hilfsmittel darstellen (vgl. Leuders et al. 2014). Unter Visualisierung wird die bildhaft-analoge Darstellung von Informationen verstanden (Scheiter 2015). Solche Repräsentationen sind in der Mathematik wichtige Erkenntniswerkzeuge und sie fördern das Verstehen komplexer Situationen (Van den Heuvel-Panhuizen 2003). Untersuchungen haben ergeben, dass Visualisierungen die Leistungen, auch beim Lösen von Textaufgaben verbessern (Walkington 2013). In diesem Kontext ist es auffällig, dass Lernende eine Abneigung gegenüber Visualisierungen haben (Presmeg 2006).

## Forschungsfragen und Ergebnisse

Eine erste Pilotierungsphase betrachtete zunächst folgende Fragen: 1. Welche allgemeinen Lösungsansätze nutzen Lernende? 2. Welche Wirkung erzielt der Prozentstreifen als visuelles Hilfsmittel? 3. Welche Funktionen erfüllt er dabei? Damit einhergehende Zielsetzungen fokussieren das Erreichen eines verbesserten Aufgabenverständnisses sowie die Erhöhung der Flexibilität bei der Auswahl von Lösungsansätzen durch das Verwenden des Prozentstreifens. Forschungsfragen implizieren weiterhin die optimale didaktische Einbindung dieser speziellen Visualisierung in den Schulkontext. Untersuchungsergebnisse aus aufgabenbasierten Interviews (n=11) sowie Schülerfragebögen (n=59) (Klasse 8, Werkrealschule) bestätigen die bereits beschriebene Ausgangslage. So lösen lediglich 53% der Lernenden die Aufgabe „30% von 1200€" richtig. Wird diese in strukturgleicher, ähnlicher Form in eine Textaufgabe eingebettet, so liegt die Lösungshäufigkeit nur noch bei 22 %. Sämtliche Lösungswege folgten dabei einem strikt kalkülorientierten Ansatz und enthielten keine Visualisierungen. Ein ähnliches

Bild zeigte sich in den Interviews, in denen zwei Probandenkohorten Testaufgaben bearbeiteten. Kohorte 1 erhielt im Vorfeld eine Kurzintervention, in der Prozentstreifen und Aufgabenbeispiele aufgezeigt wurden, Kohorte 2 fungierte als Warte-Kontrollgruppe. Während Kohorte 1 alle Testaufgaben eigenständig lösen konnte, gelang dieses Kohorte 2 nur begrenzt. Starke Unterschiede zeigten sich insbesondere in den Lösungswegen. Während Kohorte 1 intuitiv den Prozentstreifen anwendete, gelang Kohorte 2 oft nur durch „Probieren" zum Ergebnis.

Das Lösen mit Hilfe des Prozentstreifens scheint also eine Erleichterung darzustellen, so dass dieser gezielt im Unterricht berücksichtigt werden sollte. Er hilft in diesem Kontext bei der Übersetzung der Realsituation in das mathematische Modell und folglich beim Verstehen und Lösen der Aufgabe. Sein konkreter Einfluss (Funktion, Nutzen etc.) wird nun in einem geeigneten Design weiter untersucht werden, auch im Hinblick auf Veränderungen von Überzeugungseinstellungen der Lernenden.

## Literatur


Hafner, T. (2012). Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. Vieweg + Teubner Verlag: Wiesbaden.

Kleine, M.; Jordan, A. (2007). Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern in Proportionalität und Prozentrechnung. In: JDM 2007, S.209-232.

Leuders, T.; Prediger, S.; Hußmann, S.; Barzel, B. (2014). mathewerkstatt 3. Schulbuch. Cornelsen Verlag: Berlin. S.195-220.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül - Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Beltz Verlag, Weinheim 2009, S. 213-234.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. Handbook of research on the psychology of mathematics education, 205-235.

Scheiter, K. (2015). Visualisierung. In M. A. Wirtz (Hrsg.), Dorsch - Lexikon der Psychologie. Abruf am 26.02.15 von https://portal.hogrefe.com/dorsch/visualisierung.

Van den Heuvel-Panhuizen (2003). The didactical use of models in RME. In: Educational Studies in Mathematics 54, S.9-35.

Wagner, A.; Wörn, C. (2011). Erklärungen angehender Lehrerinnen und Lehrer zu einer Prozentaufgabe, In: BzMU 2011, S.1-4.

Walkington, C. et al. (2013). The effects of visual representations and interest-based personalization on solving percent problems. In Martinez, M. & Castro Superfine, A (Eds.). pp. 533-536.

Daniel THURM, Essen, Marcus BROUWERS, Essen

# Mathematische Modellierung in der Lehramtsausbildung – Entwicklung Professioneller Kompetenzen bei Studierenden.

Die Förderung des mathematischen Modellierens wird für den Aufbau von Mathematical Literacy (z.B. OECD 2013) als zentral angesehen. Dies kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass „Mathematisch Modellieren“ einer von sechs Kompetenzbereichen der Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz ist. In den vergangen Jahren wurde in vielen Studien untersucht, wie Modellierung in der Schule zu unterrichten ist (u.a. Maaß 2007) oder wie Studierende für diesen Bereich sensibilisiert werden können (u.a. Schwarz 2007). Es ist jedoch noch unklar, in wie weit diese Aspekte in die Lehrerausbildung auf eine Weise integriert werden können um die professionellen Kompetenzen der Studierenden im Bereich Modellierung auszubilden. (Borromeo Ferri, 2009). Im Hinblick auf Lehrerkompetenzen unterscheiden wir hierbei in Anlehnung an Krauss et al. (2004) und Shulmann (1986): Professionswissen (Fachwissen, Didaktisches Wissen, Pädagogisches Wissen), Beliefs, Motivationale Orientierung und Kompetenzen in Selbstreflexion , Selbstwahrnehmung.
Basierend auf dem genannten ergibt sich folgende Forschungsfrage:
Welche Wirkung hat eine Vorlesung zum mathematischen Modellieren auf Überzeugungen, Selbstwirksamkeitserwartung und fachdidaktisches Wissen der Studierenden?

## Beschreibung des Projektes

Im Zuge des neu gestalteten Master-Studiengangs der Universität Duisburg-Essen wurde die Vorlesung „Mathematisch Modellierung“ als Pflichtmodul in das Curriculum integriert. In Anlehnung an Borromeo Ferri (2009) werden dabei schwerpunktmäßig folgende Inhaltsbereiche fokussiert: (1) Kenntnisse über Ziele, Perspektiven, Kreisläufe und Aufgabentypen (2) Lösen, Erstellen und Analysieren von Modellierungsaufgaben (3) Planung und Durchführung von Modellierungsstunden (4) Modellierungsprozesse von Schülerinnen und Schülern diagnostizieren. Zudem wurde ein Modellierungstag als zentrale Komponente in die Vorlesung integriert. Studierende entwickeln hierbei theoriegeleitet eigene Modellierungsaufgaben und unterrichten die Schülerinnen und Schüler am Modellierungstag am Beispiel dieser Aufgaben. In den Folgewochen analysieren und reflektieren die Studierenden die Durchführung der Aufgaben und diagnostizieren Hürden beim Modellieren anhand der am Modellierungstag entstandenen Schülerprodukte. Ziel ist, dass Studierende mit Selbsterfahrung, inhaltlichen, methodischen und didaktischen Grundlagen zum Modellieren gut vorbereitet werden.

## Forschungsdesign

Es nehmen n=60 Vorlesungsteilnehmer der Pflichtvorlesung „Mathematisch Modellieren" des Masterstudiums für das Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschulen an der Studie teil. Zur Erfassung des fachdidaktischen Wissens sowie der Selbstwirksamkeitserwartung im Bereich des Modellierens wurden bereits existierende Skalen adaptiert (Maaß 2009). Zusätzlich werden auf Seite der Überzeugungen übergreifende mathematikbezogene epistemologische Überzeugungen, Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik sowie Überzeugungen zum Modellieren im Mathematikunterricht erfasst. Um längerfristige Effekte messen zu können, soll zusätzlich sechs Monate nach Beendigung der Intervention ein Follow-up-Test durchgeführt werden.

## Literatur


Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2009). Mathematical Modelling in Teacher Education - Experiences from a Modelling Seminar. In European Society for Research in Mathematics Education (Hrsg.), *Proceedings of CERME 6,* (S. 2046-2055). Lyon: CERME.

Maaß, K., & Gurlitt, J. (2009). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. In: European Society for Research in Mathematics Education (Hrsg.). *Proceedings of CERME 6*, (S. 2056-2065). Lyon: CERME.

OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Krauss, S., Brunner, M., Kuntert, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. (2008). Pedagogical Content Knowledge and Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology 100*(3), 716-725.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? In Haines, C.; Galbraith, P.; Blum, W; Khan, S. (Hrsg.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (S.65-78). Chichester: Horwood Publishing.

Chapman, O. (2007). Mathematical modelling in high school mathematics: teachers' thinking and practice. In Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. & Niss, M. (Hrsg.), *Modelling and Applications in Mathematics Education (S. 325-332).* New York: Springer.

Schwarz, B.; Kaiser, G. (2007). Mathematical Modelling in school – experiences from a project integrating school and university. In Pitta-Pantazi, D; Philippou, G. (Hrsg.), *CERME 5 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2180-2189).

Shulman, S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.

# 7 Berichte der Arbeitskreise

Gabriella AMBRUS, Ödön VANCSÓ, Budapest

# Arbeitskreis Ungarn

Der neue Arbeitskreis wurde an der Jahrestagung in Basel mit den folgenden Zielen gegründet: Beiträge schaffen

- zur Veröffentlichung der erfolgreichen ungarischen mathematikdidaktischen Traditionen;
- zur Verbesserung des Mathematikunterrichts in Ungarn;
- zur Verbesserung der Situation der Mathematikdidaktik als selbständige Wissenschaft in Ungarn (einbezogen die Nachwuchsfrage und PhD-Schulen);
- zur Verstärkung von Beziehungen unter Didaktikern in Ungarn und in den deutschsprachigen Ländern.
- zu gemeinsamen Forschungen und Publikationen.

Die erste (Gründungs-)Sitzung wurde von Ödön Vancsó eröffnet, dann hat Gabriella Ambrus einen Vortrag über *Einige* ***deutsch–ungarische*** *„historische” Beziehungen in der Mathematikdidaktik* gehalten. Danach hat Ödön Vancsó mit Hilfe eines Beispiels einige Überlegungen über die *heutigen Möglichkeiten und Ziele der ungarischen Mathematikdidaktik* angestellt und die ungarische Zeitschrift *Teaching Mathematics and Computer Science* vorgestellt. In der Folge wurde über die Ziele diskutiert.

### Gabriella Ambrus: Einige deutsch–ungarische „historische” Beziehungen in der Mathematikdidaktik

Die ungarisch-deutschen Beziehungen im Unterricht der Mathematik führen langen in die Geschichte zurück. Es kann z.B. erwähnt werden, dass in 1p77, unter deutschem Einfluss das erste ungarische Buch über Arithmetik (Verfasser unbekannt) in Debrecen erschien: „Debreceni Aritmetika” (Hárs, 1936).

Für den Vortrag wurden einige solche wichtige Momente aus der Geschichte des ungarischen Mathematikunterrichts durch Persönlichkeiten vorgestellt, bei denen die erwähnten Beziehungen besonders bedeutend waren.

*Farkas Bolyai* (1775-1856) war Lehrer/Professor für Mathematik, Physik und Chemie in Marosvásárhely (heute Rumänien). Sein Sohn János Bolyai lernte Mathematik lange bei seinem Vater. Der Vater hat zwischen 1796-99 in Göttingen, bei Gauss mehrere Jahren verbracht; diese Beziehung blieb fortdauernd erhalten und hat − wie bekannt − auch im Leben seines Sohnes János eine wichtige Rolle gespielt.

*Gyula Kőnig* (1849-1913), namhafter Mathematiker hat seinen ersten mathematischen Beitrag unter der Leitung von Leo Königsberger in Heidel-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

berg (1871) geleistet, und die Vorlesungen von Königsberger hatten Kőnig tief beeinflusst. Er war seit 1904 Leiter des Verlags Franklin in Budapest, und hier erschien sein Mathematiklehrbuch, das später von Manó (Emanuel) Beke überarbeitet wurde.

*Manó (Emanuel) Beke* (1862-1946) (ein Schüler von Gyula König) war Lehrer für Physik und Mathematik, seit 1900 auch Universitätsprofessor. Er hatte eine umfassende Tätigkeit im (mathematischen) Unterricht an fast allen Schulstufen und Schultypen. Im 1884 wurde er (zusammen mit Ernő Fináczy, Universitätsprofessor) beauftragt, für das Parlament einen Bericht über die Lage der ungarischen Mittelschulen abzufassen.

In seinem Leben war die Studienreise nach Deutschland (1892-93) entscheidend. Er hat in Göttingen bei Felix Klein die Theorien der Reformen des Mathematikunterrichtes kennengelernt und wurde ein anerkannter Vertreter der Reformen. F. Klein hat ihn dann veranlasst in 1914 einen Vortrag über die Wichtigkeit der Einführung in die Differential- und Integralrechnung in den Mittelschulen zu halten, (Kántor, 2014, Schubring, 2014). Beke's Buch, über die Reformen des mathematischen Unterrichtes in den Mittelschulen ist auch auf Deutsch erreichbar, (Beke/Mikola, 1911), er hat aber auch weitere deutsche Publikationen geschrieben (vgl. Literatur).

Der Name von *György Pólya* (1887-1985) ist sehr bekannt, aber gewiss weniger bekannt ist, dass er in einem namhaften Budapester Gymnasium (Markó u.) ein Schüler von Beke und später auch ein Student von Lipót Fejér und Loránd Eötvös war. Zwischen 1910-1914 studierte er in Wien und auch in Göttingen bei F. Klein.

Pólya hat eine reichhaltige mathematische Tätigkeit − besonders in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der Kombinatorik und in der Graphentheorie − ausgeübt. In seinem Buch „*How to solve it*" *(Schule des Denkens)* (Übersetzung ins Ungarischen von Imre Lakatos*)* hat er die Grundgedanken der heuristischen Methode für den Unterricht zusammengefasst. Auch andere Bücher von ihm wurden ins Deutsche übersetzt, z.B. sein bekanntes Buch mit Gábor Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925.

*Tamás Varga* (1919-1987) studierte Mathematik und Physik für das Lehramt an der Eötvös Loránd Universität in Budapest, und seit 1951 arbeitete er auch dort, nachdem er früher in verschiedenen Mittelschulen unterrichtet hat. Varga war sehr engagiert für den mathematischen Unterricht in Ungarn und hatte schon ab Ende der fünfziger Jahre die „New Math" Bewegung kritisch betrachtet. (Er nannte später seine Position als „post-New Math".) Diese beiden Überzeugungen haben seine mathematikdidaktische Tätigkeit bestimmt. Varga hat seine bekannte Untersuchung *Komplexer Unterrichtsversuch in Mathematik* in 1964 begonnen, u. Zw. zuerst mit dem Mathema-

tikunterricht in der Grundschule. Nach langjähriger enger Zusammenarbeit mit anderen Didaktikern und Lehrer/innen kam es endlich in 1978 auch zu einem völlig neuen Lehrplan in Mathematik für die Klassen 1−8.
Seine Sprachkenntnisse ermöglichten ihm auch viele wissenschaftliche Kontakte in der Welt, darunter auch in Deutschland. Er hat unter anderem mit A. Engel, W. Walser Artikel und auch weitere didaktische Publikationen auf Deutsch geschrieben.
*At the proposal of Hans Freudenthal, the worksheets prepared by a special team for experimental classes in primary schools ('Munkalapok') were used in IOWO as working materials. Isaak Wirchup (University of Chicago) had them translated into English and their latest version is now taught in Finland too* (Szendrei, 2007).
http://www.espoonmatikkamaa.fi/index.php?option=com_content&view=article&id=24&Itemid=37
Über die Tätigkeit von Varga hat Julianna Szendrei (2007), eine Mitarbeiterin von ihm, folgendes geschrieben:

Tamás Varga was an outstanding figure of international renown in the history of teaching mathematics. He was member of the Editorial Board of Educational Studies in Mathematics and he was elected Vice Chair of CIEAEM.

**Heutige Möglichkeiten und Ziele der ungarischen Mathematikdidaktik**

Die Tatsache, dass in 2014 der Mathematiker László Lovász zum Vorstand der Akademie der Wissenschaften in Ungarn gewählt wurde, gab einen Anstoß zu einem neuen Aufblühen der Didaktik der Mathematik in Ungarn. Ein erster Schritt dazu kann ein kurzfristiges Projekt sein. Ödön Vancsó, der Leiter dieses Projekts hat unter anderem auch darüber gesprochen. Es sind daran von der Universität ELTE Gabriella Ambrus und Judit Szitányi und von den Universitäten in Szeged und Kaposvár auch noch weitere Kollegen beteiligt. Das Hauptziel des Projekts ist die eigenständige Tätigkeit von *T. Varga* in den 60er, 70er Jahren in Ungarn – zu analysieren und aufzuarbeiten. Weitere wichtige Ziele des Projektes sind:

- Das Einbauen *der neuesten Ergebnisse der kognitiven Wissenschaften in den Unterricht;*
- Berücksichtigung der *Informationsrevolution und der neuen Medien - im Unterricht.*
- *Ausdehnung der Methoden von Varga auf die Sekundarstufe II*, denn diese Entwicklung wurde − trotz der ersten positiven Schritte noch im Leben von Varga (vor allem auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung (s. die Arbeiten von T. Nemetz und K. Bognár) − unterbro-chen. Wegen der kurzen Zeitspanne konzentriert sich die Forschung des Projektes auf den Unterricht der Kombinatorik (aber auf

die ganze Schulzeit vom Kindergarten bis zum Abitur bezogen). In der Fortsetzung des Projektes planen wir auch die übrigen Gebiete der Schulmathematik ähnlicherweise, im Sinne von T. Varga zu bearbeiten.

**TMCS (Teaching Mathematics and Computer Science)** ist eine referierte mathematikdidaktische Zeitschrift in Ungarn, mit Publikationen auf Englisch, Deutsch und Französisch. Die Mitglieder des Arbeitskreises (und nicht nur sie) sind eingeladen zum Lesen und auch zum Veröffentlichen in der Zeitschrift.

**Diskussion der Ziele, Wahl der Sprecher**

Die Anwesenden sind mit den Zielen des Arbeitskreises einverstanden und haben noch einige weitere mögliche Ziele hinzugefügt, so zum Beispiel das Vergleichen der verschiedenen Lehrerausbildungssysteme.

Die zweite Arbeitskreissitzung in Budapest ist für Ende September vorgesehen; weitere Informationen werden per E-Mail versendet.

## Literatur


Karp, A. & Schubring G. (2014). Handbook on the History of Mathematics Education, Springer S. 503. https://books.google.hu/books?id=MYy9BAAAQBAJ&pg=PA503&lpg=PA503&dq=Emanuel,+Beke&source=bl&ots=I2CEkk9HWV&sig=IaJRuMvHJx1DviUqTXz0cGbkxzw&hl=hu&sa=X&ei=68XlVNyBDYHAUp3pgNgN&ved=0CEkQ6AEwBg#v=onepage&q=Emanuel%2C%20Beke&f=false (2015, Februar)

Beke, M. & Mikola, S. (1911). *Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn*, Teubner, 1911

Hárs, J. (1936). Az első magyar nyelvű matematikakönyvünk (1577), a debreceni Aritmetika [Unser erstes ungarische Mathematikbuch, die Arithmetik von Debrecen], Quelle: Hárs János: A Debreceni Aritmetika. pp. 25–56 http://mek.oszk.hu/05400/05407/pdf/Hars_Mat_DebrArith1577.pdf

Szendrei, J. (2007). In memory of Tamás Varga http://www.cieaem.org/?q=system/files/varga.pdf

Nemetz, T.; Bognár, K; Tusnády, G. (1984): Ismerkedés a véletlennel [Bekanntwerden mit dem Zufall]. Nemzeti Tankönyvkiadó.

Kántor, T. (2014). Arcképek a 20. század magyar matematikusairól: Beke Manó, [Ungarische Mathematiker im 20. Jahrhundert: Emanuel Beke], **22**, 1, 3-20 Polygon.

Katja EILERTS, Berlin, Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, Nürnberg-Geislingen

# Alternative Lehrmethoden: MOOCs, Inverted Classroom, Peer Instruction, Just-in-Time-Teaching und Co – Teil II .

Die zehnte Arbeitskreissitzung fand am 09.02.2015 im Rahmen der 49. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09. bis 13. März 2015 in Basel statt. Auf unserer letzten Arbeitskreissitzung an der Universität Duisburg-Essen haben wir beschlossen, das Thema „Alternative Lehrmethoden – MOOCs, Inverted Classroom, Peer Instruction, Just-in-Time-Teaching und Co." weiterhin zu diskutieren.

In Basel wurden Ergebnisse der letzten Arbeitskreissitzung berichtet, eine neue Buchreihe mit Publikationsmöglichkeiten vorgestellt und auf die nächste Herbsttagung in Nürtingen hingewiesen. „Save the date" wird dazu in Kürze mit konkreten Informationen versendet.

Das Impulsreferat auf der Arbeitskreissitzung in Basel hielt Katja Derr, Prof. Dr. Reinhold Hübl, Dr. Tatyana Podgayetskaya (Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim) zum Thema:

## „Zwischen Drill&Practice und Problemlösen: Gestaltung von Online-Aufgaben im Bereich Studienvorbereitung für technische Studiengänge"

Im Rahmen des BMBF geförderten Hochschulverbundprojekts „optes" entsteht ein Online-gestützter Vorkurs, der angehende Studierende der Ingenieurswissenschaften bei der Studienvorbereitung Mathematik unterstützt. Im Teilprojekt „formatives eAssessment", das an der Dualen Hochschule Baden-Württemberg Mannheim angesiedelt ist, werden Konzepte zum Einsatz von Online-Tests und -Aufgaben entwickelt und erprobt. Dabei wird unterschieden zwischen Selbstdiagnose zum Beginn des Lernprogramms, Übungen und Kurztests innerhalb der Lernphasen, und der abschließenden Lernerfolgskontrolle.

Je nach Einsatzgebiet werden Aufgaben unterschiedlicher Komplexität und Schwierigkeit entwickelt, von kurzen Rechenaufgaben zum „Trainieren" mathematischer Verfahren bis zu komplexeren Anwendungsaufgaben. Aufgaben auf dem Niveau „Drill&Practice" zielen auf den mehr oder weniger „mechanischen" Erwerb basaler Fertigkeiten (Renkl, 1991) und kommen zum Einsatz, wenn ein neu eingeführtes Verfahren wiederholt und konsolidiert werden soll. Im Vergleich dazu bewegen sich Aufgaben, die das Verständnis fördern und Lernende zur tieferen Beschäftigung mit ei-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

nem Sachverhalt anregen, auf der Ebene des „bedeutungshaltigen“ Lernens (ebd.).

Um die Verknüpfung zum Studieninteresse der angehenden Ingenieurstudierenden herzustellen, wird im optes Projekt versucht, Anwendungsbeispiele aus dem Bereich Technik und Ingenieurwissenschaft zu finden. Auch wenn vielen Studienanfänger/-innen die Bedeutung der Mathematik für ihren Studiengang bewusst ist, bleibt zu Beginn des Studiums (und noch stärker im Vorkurs) oft unklar, wofür bestimmte mathematische Verfahren benötigt werden, und warum die Beherrschung der Grundlagen wichtig für den weiteren Studienerfolg ist.

Es existieren unterschiedliche Ansätze für den Einsatz von Anwendungsbeispielen in der Studieneingangsphase. So können kurze Praxisbeispiele als Anker genutzt werden, um ein Vorlesungsthema einzuführen und dann über die Diskussion unterschiedlicher Lösungsansätze zu vertiefen (Mazur, 1997; Preißler et al., 2010; Bender & Thiele, 2014). Die Herausforderung bei der Herstellung von Praxisbezug ist allerdings, Beispiele zu finden, die mit dem vorhandenen Vorwissen und in einem zeitlich überschaubaren Rahmen lösbar sind. Je authentischer eine Problemstellung, desto mehr Zusatzinformation muss gegeben werden, und die Erarbeitung von Lösungsansätzen für *realistische* ingenieurwissenschaftliche Fragestellungen kann sich über einen Zeitraum von mehreren Wochen erstrecken (z.B. Rooch et al., 2014). In einem Vorkurs, der viele verschiedene Themenbereiche abdeckt, ist diese Zeit nicht vorhanden. Daher ist eine Didaktisierung der Aufgaben unerlässlich, wenn sie in einem angemessenen Zeitraum gelöst werden sollen (Leutner et al., 2008; Wolf & Biehler, 2014).

Neben dem Zeitfaktor spielen motivationale Aspekte eine wichtige Rolle; Aufgaben, die zu komplex sind, können zu Überforderung und Frustration führen. Im optes Vorkurs wird darum unterschieden zwischen Aufgaben für das reine Selbststudium und Aufgaben, die im Austausch mit Peers und/ oder eMentor/-innen gelöst werden.

| | Selbst-diagnose | Übung | Lernerfolgs-kontrolle |
|---|---|---|---|
| **Geringer Komplexitätsgrad**<br>Aufgabentypen: geschlossen und halb offen Multiple Choice, numerische Eingabe | x | X | x |
| **Mittlerer Komplexitätsgrad**<br>Aufgabentypen: geschlossen und halb offen Multiple Choice, numerische Eingabe, Formeleingabe (z.B. STACK, siehe Sangwin, 2012) | | X | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Hoher Komplexitätsgrad**<br>Aufgabentypen: offen<br>Upload von ausformulierten Lösungsschritten, Feedback durch Fach-Mentor/innen | | x | |

**Tabelle 1:** Konzept formatives eAssessment im optes Vorkurs (vgl. Mayer et al., 2009)

Für die Selbstdiagnose zu Beginn und die Lernerfolgskontrolle am Ende des Vorkurses (Pre-Posttest Vergleich) kommen ausschließlich Aufgaben von geringer Komplexität zum Einsatz, die in weniger als fünf Minuten lösbar sein sollten. Ein ingenieurwissenschaftlicher Praxisbezug kommt bei diesen Aufgaben nicht zum Tragen.

Die nächste Stufe sind kurze, „aktivierende“ Übungsaufgaben für das Selbststudium: Die Lernenden haben den Einstiegstest durchgeführt und ein diagnostisches Feedback mit Hinweisen auf passende Lernmodule erhalten. In diesen Lernmodulen werden Übungsaufgaben mit ansteigender Komplexität angeboten - hier können auch technische oder ingenieurwissenschaftliche Themen als Anker genutzt werden.

Aufgaben von hoher Komplexität sind eher für die Arbeit in Gruppen bzw. unter Anleitung geeignet; im Konzept für formatives eAssessment kommen sie daher nur in den Kursformaten zum Einsatz, die von Fach-Mentor/-innen betreut werden und den direkten Austausch über individuelle Lösungsansätze erlauben (zum Konzept des „betreuten eLearning“ siehe zweiten Beitrag der Autor/-innen im BzMU 2015).

Für die Evaluation wurden die Teilnehmer/-innen gefragt, welche Art von Übungsaufgaben sie als besonders hilfreich empfunden hatten (Teilnehmer/-innen Vorkurs: N=603; Evaluationsfragebogen: N=205). Aufgaben, die einen allgemeinen Anwendungsbezug haben (Alltagsbeispiele, Zinsrechnung, ...) wurden von 47% der Teilnehmer/-innen als hilfreich eingestuft, Aufgaben mit einem Anwendungsbezug zu Ingenieurwesen allgemein (z.B. Flugbahn, Bremsweg, Bauwerke) von 62%, und Aufgaben mit einem Bezug zum gewählten Studiengang (E-Technik: Schwingungen, IT: Logik, ...) von 48%. Im Vergleich dazu wurden Aufgaben ohne Anwendungsbezug oder Aufgaben, die eine Beweisführung verlangen von 12 bzw. 6 % der Teilnehmer/-innen als „hilfreich“ bewertet.

Auch die komplexeren Anwendungsbeispiele, die in der Kommunikation mit Peers und Fach-Mentor/-innen bearbeitet wurden, wurden positiv evaluiert und von 72% der Teilnehmer/-innen im betreuten e-Learning als „hilfreich“ bzw. „sehr hilfreich“ bezeichnet.

Einschränkend ist zu sagen, dass die Einschätzungen der Teilnehmer/-innen nur einen subjektiven Eindruck wiederspiegeln und keine Aussage über den wirklichen Lernerfolg machen. Ein Zusammenhang zwischen Lernerfolg und positiver Einstellung bestimmten Angeboten gegenüber konnte in der weiteren Analyse der Daten auch nicht nachgewiesen werden. Etwas eindeutiger waren die Ergebnisse in Bezug auf die Vorkenntnisse. Vor allem Studienanfänger/-innen mit niedrigem Einstiegstestergebnis gaben an, dass ihnen der Praxisbezug in der Mathematik wichtig ist; ein Zusammenhang, der im weiteren Projektverlauf noch näher betrachtet werden soll.

Der im Teilprojekt entwickelte Fragepool kommt aktuell in den Vorkursen der optes Verbundpartner zum Einsatz, nach Abschluss dieser Projektphase wird er als offene Ressource interessierten Hochschulen zur Verfügung gestellt.

## Literatur


Bender, G. & Thiele, K. (2014). Feedback und formative Assessments in der Mathematikvorlesung. *Zeitschrift für Hochschulentwicklung*, *9* (4), 155–167.

Leutner, D., Fischer, H. E., Kauertz, A., Schabram, N. & Fleischer, J. (2008). Instruktionspsychologische und fachdidaktische Aspekte der Qualität von Lernaufgaben und Testaufgaben im Physikunterricht. In: J. Thonhauser (Hrsg.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (S. 168–181). Münster/München/Berlin: Waxmann.

Mayer, H. O., Hertnagel, J. & Weber, H. (Hrsg.) (2009). *Lernzielüberprüfung im eLearning.* München: Oldenbourg.

Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: A Users' Manual.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Preißler, I., Müller, R., Hammerschmidt, J. & Scholl, S. (2010). Treibstoff für die Ingenieurausbildung - fachübergreifende Didaktik. *Zeitschrift für Hochschulentwicklung*, *5* (3), 105–115.

Renkl, A. (1991). *Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik.* Dissertation, Universität Heidelberg.

Rooch, A., Kiss, C. & Härterich, J. (2014). Brauchen Ingenieure Mathematik? Wie Praxisbezug die Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert. In: Bausch , I. et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik* (S. 389–409). Wiesbaden: Springer.

Sangwin, C. (2012). Computer Aided Assessment of Mathematics using Stack, *12th International Congress on Mathematical Education COEX* .

Wolf, P. & Biehler, R. (2014). Entwicklung und Erprobung anwendungsorientierter Aufgaben für Ingenieurstudienanfänger/innen. *Zeitschrift für Hochschulentwicklung*, *9* (4), 169–190.

Benjamin ROTT, Essen; Ana KUZLE, Osnabrück

# Bericht des Arbeitskreises „Problemlösen“

Am Montag, den 09.02.2015 fand in Basel die erste offizielle GDM-Tagungs-Sitzung des im Jahr 2014 gegründeten Arbeitskreises *Problemlösen* statt. Die Gruppe der Teilnehmer (etwa 15 Personen) bestand aus einer guten Mischung von ForscherInnen, die schon lange im (Problemlöse-) Geschäft tätig sind, und NachwuchswissenschaftlerInnen, die zum Teil gerade erst mit ihrer Promotion begonnen haben. Die Sitzung diente insbesondere der Klärung organisatorischer Fragestellungen bezüglich der weiteren Arbeit des Arbeitskreises, die unten ausführlich erläutert sind.

## 1. Stand des Tagungsbands der Herbsttagung 2014 in Münster

Mitte Oktober 2014 hat in Münster (örtlicher Tagungsleiter war Martin Stein) die erste Herbsttagung des Arbeitskreises stattgefunden. Zu dieser Tagung soll ein Tagungsband im WTM-Verlag entstehen.

Zum derzeitigen Stand (Ende Februar 2015) ist ein Großteil der Artikel an die Reviewer übergeben worden; die restlichen Artikel folgen so bald wie möglich. Wird der Zeitplan von allen eingehalten, kann das Buch pünktlich zur diesjährigen Herbsttagung in Halle fertiggestellt und gedruckt sein.

## 2. Stand der Planung der Herbsttagung 2015 in Halle

Die Herbsttagung 2015 wird gemeinsam mit der ProMath-Konferenz vom Do, 03.09. bis Sa, 05.09.2015 in Halle stattfinden, der örtliche Tagungsleiter ist Torsten Fritzlar. Die Tagungssprache wird Englisch sein. Aktuelle Informationen finden sich hier http://promath.org/meeting2015.html

Bei ProMath (Problem Solving in Mathematics Education, www.promath.org) handelt es sich um eine Gruppe von Mathematikdidaktikern aus verschiedenen Ländern Europas mit dem gemeinsamen Ziel, mathematisches Problemlösen zu erforschen und zu fördern. Die Gruppe wurde 1998 von Günter Graumann, Erkki Pehkonen und Bernd Zimmermann gegründet und tagt jährlich in verschiedenen Städten. Die letzten vier Tagungsorte waren Umeå in Schweden (2011), Ljubljana in Slowenien (2012), Eger in Ungarn (2013) und Helsinki in Finnland (2014).

Während des GDM-Treffens wurde mit den Anwesenden diskutiert, wie die Tagung gestaltet werden könnte. Gewünscht wurden sowohl Vorträge als auch Workshops, um sich mit bestimmten Inhalten vertiefend auseinandersetzen zu können. Die Frage, ob namhafte Hauptvortragende (bei entsprechenden Kosten) eingeladen werden sollen und falls ja, wer das sein könnte, blieb offen – Argumente dafür und dagegen wurden gesammelt.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

## 3. Sonderheft zum Problemlösen in mathematica didactica

Die Sprecher des Arbeitskreises haben mit der Zeitschrift *mathematica didactica* vereinbart, im Jahr 2016 als Gastherausgeber ein Sonderheft herauszugeben mit dem Titel „Problemlösen lehren und lernen im Mathematikunterricht".

Der zugehörige „Call for Papers" wurde Ende Februar veröffentlicht. Bis zum 15. April 2015 haben interessierte AutorInnen die Gelegenheit, Abstracts an die Gastherausgeber zu schicken. Die Einladungen zur Anfertigung voller Manuskripte (die in das normale „Blind Review" der *mathematica didactica* gehen) werden Ende April 2015 ausgesprochen.

## 4. Gestaltung der Arbeitskreistreffen während kommender GDM-Tagungen

Während des Treffens in Basel wurde diskutiert, wie die Arbeitskreistreffen auf kommenden GDM-Tagungen inhaltlich gestaltet werden können. Die folgenden Vorschläge wurden eingebracht und diskutiert; am Ende wurde im Rahmen einer Abstimmung (mehrfach abstimmen erlaubt) ermittelt, wie groß das jeweilige Interesse ist (sortiert nach Stimmen):

- Ein Vortrag eines hierfür eingeladenen Wissenschaftlers (wobei keine Kosten entstehen sollen), wie z. B. der Arbeitskreis *Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik* es praktiziert. Für solche Vorträge steht im Rahmen eines Arbeitskreistreffens mehr Zeit (für den Vortrag an sich, v. a. aber für die anschließende Diskussion) zur Verfügung. Vorschläge für Einladungen: Helmut König. (10 Stimmen)
- Die Gestaltung eines Workshops, in dessen Rahmen selbst Probleme bearbeitet und anschließend Bearbeitungen / Dokumente / Transkripte von Lernenden zu diesen Problemen gemeinsam analysiert werden; ähnlich wie es beispielsweise der Arbeitskreis *Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik* organisiert. (10 Stimmen)
- Kurzpräsentationen von aktuellen Forschungsprojekten der anwesenden Wissenschaftler, anschließend ein Austausch in Kleingruppen – sozusagen ein „Bazar der Möglichkeiten", in dessen Rahmen Kooperationen organisiert werden können. (8 Stimmen)
- Texte, Artikel oder Buchkapitel (gerne strittige), die im Vorfeld des Treffens abgesprochen und gelesen wurden, gemeinsam analysieren und diskutieren. (4 Stimmen)

- Die Gestaltung eines Workshops, in dessen Rahmen selbst Probleme bearbeitet werden; anschließend sollen die eigenen Prozesse (dokumentiert durch Beobachtungs- und Gedächtnisprotokolle) analysiert werden. (1 Stimme)

## 5. Internationale Kooperationen und Vergleichsstudien

Abschließend wurde diskutiert, inwiefern Erfahrungen und Interesse bestehen, internationale Kooperationen und/oder Vergleichsstudien zu planen und durchzuführen; ein Thema, das sich in diesem Jahr (mit der GDM-Tagung in der Schweiz und der gemeinsamen AK Tagung mit der ProMath-Gruppe) besonders anbietet.

In der Gruppe der Anwesenden gab es hierzu wenig Erfahrung und Interesse, das Thema zu diskutieren. Im Vorfeld der Tagung in Halle könnte das Thema noch einmal (per Mail) angesprochen werden.

## 6. Probleme zum Knobeln

Getreu dem Motto von Pólya präsentieren wir auf der folgenden Seite Probleme zur eigenen Bearbeitung: „Das Lösen von Aufgaben ist eine praktische Kunst wie Schwimmen oder Skilaufen oder Klavierspielen: Sie läßt sich nur durch Nachahmung und Übung erlernen. […] Wer schwimmen lernen will, muß ins Wasser gehen, wer Aufgaben lösen lernen will, muß Aufgaben lösen." (Pólya 1966, S. 9)

Die Aufgaben stammen aus unterschiedlichen Quellen; gemein ist ihnen, dass sie an der Universität Duisburg-Essen als „Problem des Monats" (https://www.uni-due.de/didmath/problemdesmonats.php) Studierende zum Problemlösen anregen sollten.

## Literatur

Nolte, M. (2008). Zur Förderung mathematisch besonders begabter Grundschulkinder im Rahmen des PriMa-Projekts in Hamburg. In: C. Fischer, F. J. Mönks & U. Westphal (Hrsg.), *Individuelle Förderung: Begabung entfalten – Persönlichkeit entwickeln* (S. 46 – 60). Berlin: LIT Verlag.

Pólya, George (1966). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben Einsicht und Entdeckungen, Lernen und Lehren*. Band 1. Birkhäuser: Basel – Boston – Stuttgart.

Ziegler, G. M. (2005). *Digitaler Adventskalender 2004 – www.mathekalender.de - Lösungsheft*. www.matheon.de

**Problem des Monats, Dezember 2014 (nach Nolte 2008):**

Gegeben ist eine natürliche Zahl *n*. Gesucht sind Rechenaufgaben, die folgende Kriterien erfüllen:

- Es müssen alle Zahlen von 1 bis *n* verwendet werden.
- Es darf nur + und – gerechnet werden.
- Das Ergebnis der Aufgabe muss 0 oder 1 sein.

Beispiele für derartige Rechenaufgaben: 7+3-1-6+4-5-2=0 oder 5+2-4-3+1=1

Wie findet man zu gegebenem *n* eine derartige Aufgabe?

## Problem des Monats, Januar 2015 (modifiziert nach Ziegler 2005):

Die Homerplage auf dem Planeten Doughnut

Im Gegensatz zu unserer Erde ist der Planet Doughnut nicht kugel- sondern torusförmig, er sieht also aus wie ein riesiger Kringel. Die Einwohner haben ihre Heimat in 1024 x 1024 Parzellen unterteilt, in denen jeweils eine Familie lebt. Man kann auf kariertem Papier mit der entsprechenden Kästchenzahl einen Atlas dieser Welt zeichnen. Bewegt man sich auf diesem Atlas über den linken Rand hinaus, gelangt man, wie auf der Erde an den rechten Rand und umgekehrt. Im Gegensatz zur Erde funktioniert das aber auch mit dem oberen und unteren Rand.

Leider hat einer der Bewohner ein gefährliches Wesen namens Homer eingeschleppt. Dieses Wesen ist extrem gefräßig und pflanzt sich sehr schnell fort. So werden innerhalb eines Tages aus einem Homer vier, die sich noch am selben Tag in die Nachbarparzellen aller vier Himmelsrichtungen ausbreiten. Trifft dort ein Homer auf einen anderen, so fressen sie sich glücklicherweise gegenseitig auf.

Und hier nun die zu lösenden Fragen:

- Wird sich die Homerplage jemals von selbst lösen?
- Falls ja, wie lange wird das dauern?
- Welche Bedeutung hat die Anzahl 1024 x 1024 der Parzellen in diesem Zusammenhang?

Christof SCHREIBER, Gießen & Silke LADEL, Saarbrücken

# Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien'

Seit 2007 tagt regelmäßig die Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe'im Arbeitskreis Grundschule der GDM. Die Mitglieder der Arbeitsgruppe teilen das Interesse an der Entwicklung, der Konzeption, dem Einsatz und der Bewertung digitaler Medien für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Es werden regelmäßige Treffen im Rahmen der Jahrestagung der GDM, des Arbeitskreises Grundschule und darüber hinaus organisiert.

## Arbeitsgruppentreffen

Folgende Tagesordnungspunkte wurden bearbeitet:
- TOP 1: Tabarz 2014
- TOP 2: Veröffentlichung
- TOP 3: Internetauftritt
- TOP 4: GDM 2015
- TOP 5: Veröffentlichung 2015/16
- TOP 6: Tabarz 2015
- TOP 7: GDM 2016

Lernen | Lehren | Forschen
PriMaMEDIEN
Digitale Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe

## TOP 1: Tabarz 2014

In Tabarz im November 2014 war die Arbeitsgruppe PriMaMedien mit einem Marktplatz vertreten. Angebote dort waren:

- Chasaki, Sofia (Universität des Saarlandes) Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten
- Klose, Rebecca & Schreiber, Christof (Justus-Liebig-Universität Gießen) Audiopodcasts zur Mathematik
- Ladel, Silke (Universität des Saarlandes; CERMAT) Plättchen undCo. Digital

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- Ladel, Silke (Universität des Saarlandes; CERMAT) Der multi-touch Tisch in der Primarstufe
- Rink, Roland (Humboldt-Universität Berlin) DZLM Microsite „Pri-Makom“
- Schreiber, Christof (Justus-Liebig-Universität Gießen) Stop-Motion
- Steinweg, Anna Susanne (Universität Bamberg) & Weth, Thomas (Universität Erlangen-Nürnberg) MaiKe: Mathematik im Kindergarten Entdecken
- Walter, Daniel (IEEM: TU-Dortmund) Wie rechenschwache Kinder Tablet-Apps nutzen

Die Resonanz bei Publikum und Ausstellenden war sehr gut und es ist perspektivisch geplant, regelmäßig im Abstand von 3-4 Jahren einen Marktplatz als Format für die Arbeitsgruppe in Tabarz zu wählen.

**TOP 2: Veröffentlichung**

In 2014 wurde im WTM-Verlag das Buch „Von Audiopodcast bis Zahlensinn“veröffentlicht und die Beiträge im Arbeitsgruppentreffen kurz vorgestellt:

Günter Krauthausen (Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule - Innovation auf dem Tablet serviert?) beginnt mit einem grundsätzlichen Beitrag zur Nutzung der digitalen Medien und zeigt die Erwartungen daran von verschiedenen Seiten auf. Er geht auf die Artenvielfalt der Nutzungsmöglichkeiten ein und verdeutlicht dies an Beispielen zum Verfassen mathematischer Texte, der Tabellenkalkulation, Internet Applets sowie i-Pad & Co.

Im Artikel von Christof Schreiber & Rebecca Klose (Audio-Podcasts zu mathematischen Themen - Begriffsbildung mit digitalen Medien) werden verschiedene Aspekte der Nutzung von mathematischen Audio-Podcasts zur Begriffsbildung aufgezeigt. Als besondere Form wird auch ein englischsprachiger Podcast vorgestellt, der in einer bilingualen Klasse erstellt wurde.

Roland Rink („Lass’ dir die Aufgabe doch vorlesen!“ – mit digitalen Medien Schwierigkeiten beim Sachrechnen begegnen) verwendet im Rahmen der Bearbeitung von Sachaufgaben die digitalen Medien um die Bearbeitung auditiv zu unterstützen. Roland Rink geht in seinem Beitrag darauf ein, wie es mit Hilfe auditiver Unterstützung gelingen kann, Kindern mit Schwierigkeiten beim Lesen zu helfen, die Sachsituation einer Sachrechenaufgabe zu erfassen.

Mit dem Bereich der Geometrie setzt sich Markus Reiter auseinander (Die computerunterstützte Lernumgebung „Geolizi“: ein Versuch zur Implementierung digitaler Medien im Geometrieunterricht der Grundschule). Er geht der Frage nach, wie eine didaktisch begründete Einbindung des Computers im Geometrieunterricht gestaltet werden kann und welche Möglichkeiten bezüglich des Forschens und Erprobens mit Hilfe von Computeranwendungen entstehen können.

Mit geometrischen Themen beschäftigt sich auch Bernd Wollring (Prozessbezogene Kompetenzen - illustriert durch prototypische Aufgaben mit der Werkzeug-Software BlockCAD). Er beschreibt die Werkzeug-Software BlockCAD zum virtuellen Bauen mit System-Steinen, die u.a. die Potentiale des Bewegens, Ladens und Speicherns, des Umfärbens und Exportierens von Bildern nutzt.

Nathalie Sinclair & Einat Heyd-Metzuyanim (Developing number sense with TouchCounts) zeigen die Entwicklung des Zahlensinns von Kindern im Alter zwischen drei und fünf Jahren anhand ausgewählter Beispiele bei der Nutzung der App ‚TouchCounts’ auf. Im Vordergrund stehen insbesondere verschiedene Möglichkeiten der Unterstützung beim Prozess der Vergegenständlichung von Zahlen mit Hilfe von ‚TouchCounts’.

Ebenfalls mit der Arithmetik beschäftigt sich der Beitrag von Silke Ladel & Ulrich Kortenkamp (Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten – Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory). Nach der Darstellung der Kennzeichen unseres Stellenwertsystems fokussieren die beiden Autoren mit Hilfe der Artefact Centric Activity Theory die Bedeutung der Tätigkeit in Abhängigkeit vom verwendeten Material.

Joost Klep & Anna Lohfink (Schüler-Modelle – Vorstellungen bezüglich der Entwicklung von Lernenden. Arithmeticus als Beispiel) betrachten unter einem informatischen Blickwinkel die Vorstellungen der Lehrpersonen über die Entwicklung von Schülerinnen und Schülern im Unterricht als Schülermodelle. Im Bereich digitaler Medien werden Schülermodelle in Computerprogrammen umgesetzt.

## TOP 3: Internetauftritt

Der aktuelle Auftritt der Arbeitsgruppe ist unter www.pri-ma-medien.de zu finden. Es wird angeregt, dass alle Mitglieder ihren Auftritt dort pflegen, aktuelle Veröffentlichungen zum Themenbereich der Arbeitsgruppe einstellen oder mitteilen. Personen, die neu aufgenommen werden möchten, sollten sich dazu bei den Sprechern der Arbeitsgruppe melden.

## TOP 4: GDM 2015

Die moderierte Sektion war gut besucht. Für die GDM 2015 in Basel konnten als Vortragende in der moderierten Sektion Daniel Walter (Nutzungsverhalten rechenschwacher Kinder im Umgang mit Tablet- Apps), Roland Gunesch (Nutzung von Video-Vorlesungsaufzeichnungen durch Studierende: eine Studie), Silke Ladel & Ulrich Kortenkamp (Dezimalbrüche und Stellenwerttafeln) gewonnen werden. Wichtig für künftige Angebote für die selbstmoderierten Sektionen ist die vorherige Anmeldung über die Sprecher der Arbeitsgruppe, damit ein passendes Angebot bereitgestellt werden kann.

## TOP 5: Veröffentlichung 2015/16

Das Ziel der kommenden Veröffentlichung in der Reihe „Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien" ist die Vorstellung von Konzepten für die Lehrerbildung an der Hochschule. Bewährte Konzepte für die Seminargestaltung sollen dort so vorgestellt werden, dass interessiert Lehrende diese für die eigene Gestaltung von Seminaren nutzen können. Die Struktur der Beiträge ist bereits vorgegeben, der Umfang liegt bei 20-30 Seiten je Beitrag. Lehrende, die einen Beitrag zu diesem Band leisten möchten melden sich bei Silke Ladel, Christof Schreiber oder Roland Rink, die für diesen Band verantwortlich sind.

## TOP 6: Tabarz 2015

Auch in 2015 soll es wieder einen Beitrag der Arbeitsgruppe PriMaMedien auf der Tagung des Arbeitskreises Grundschule in Tabarz geben. Evtl. wird auch ein Beitrag in Kooperation mit einer anderen Arbeitsgruppe stattfinden können. Interessenten für einen Beitrag (Vortrag/ Workshop) in der Arbeitsgruppe sollten sich bei Silke Ladel oder Christof Schreiber melden. Die konkrete Gestaltung ist noch offen und Vorschläge sind willkommen.

## TOP 7: GDM 2016

Für die GDM ist wieder eine moderierte Sektion geplant. Vortragende, die ein Angebot passend zur Sektion haben, sollten sich frühzeitig bei Silke Ladel melden, damit die Planung entsprechend stattfinden kann.

## Literatur

Ladel, S. & Schreiber, Chr. (Hrsg.) (2014) Von Audiopodcast bis Zahlensinn. Lernen,Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe. (2. Band). Münster: WTM.