

Moritz ADELMEYER, Zürich

Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“ – ein noch heute lesenswertes Lehrbuch

Einleitung

Der Basler *Leonhard Euler* (1707 – 1783) gilt als einer der wissenschaftlich produktivsten und bedeutendsten Mathematiker des 18. Jh. Weniger bekannt sind seine Verdienste um die Lehre der Mathematik. Er hat ein Dutzend Lehrbücher verfasst, darunter die zweiteilige, rund 600-seitige *Vollständige Anleitung zur Algebra* [1]. Der deutsche Erstdruck erschien 1770 in St. Petersburg.

Das Historische Museum Basel schreibt zu Eulers „Algebra“ [2]: *Um Klarheit und Einfachheit bemüht, stellt dieses Buch in handlichem Format eines der ersten Lehrbücher im modernen Sinn dar und prägt die Didaktik des Mathematikunterrichtes bis heute.*

Teil I der „Algebra“ beginnt mit den Grundrechenarten, handelt dann von Potenzen, Wurzeln und Logarithmen und endet mit Folgen und Reihen. Teil II behandelt lineare, quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen und wendet sich dann der Zahlentheorie zu.

Dieser Beitrag hat folgende Ziele: Einen Tribut an Euler und Basel zollen, Aufmerksamkeit für Eulers Lehrtätigkeit wecken, einen Einblick in Eulers „Algebra“ geben, eine didaktische Einschätzung der „Algebra“ vornehmen, den Einsatz der „Algebra“ im Mathematikunterricht und in der Mathematiklehrausbildung anregen.

Zu diesem Beitrag gibt es eine Broschüre [3]. Was hier zusammenfassend beschrieben wird, ist darin ausführlich dargestellt. Die im Folgenden diskutierte Passage aus Eulers „Algebra“ ist in voller Länge abgedruckt. Zu Vergleichszwecken ist zudem eine entsprechende Passage aus einem in der Schweiz im 19. Jh. verwendeten Algebralehrmittel wiedergegeben.

Eulers Einführung in Gleichungen in der „Algebra“

Die beiden Teile der „Algebra“ sind in längere Abschnitte unterteilt, diese wiederum in kürzere Kapitel und letztere schliesslich in einzelne Paragraphen. Abschnitt 1 von Teil II handelt *Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung*. Im Folgenden wird ein Blick auf dessen Kapitel 1 geworfen. Es ist sechs Seiten lang und in zehn Paragraphen gegliedert.

In den Paragraphen 1 – 4 beschreibt Euler in allgemeinen Worten das Wesen von Gleichungen. Paragraph 1 lautet wie folgt [4]:



I.

Die Hauptabsicht der Algebra so wie aller Theile der Mathematik ist dahin gerichtet, daß man den Werth solcher Größen, die bisher unbekannt gewesen bestimmen möge, welches aus genauer Erwägung der Bedingungen, welche dabey vorgeschrieben und durch bekannte Größen ausgedrückt werden, geschehen muß. Daher die Algebra auch also beschrieben wird, daß darinnen gezeigt werde, wie man aus bekannten Größen unbekanntes ausfindig machen könne.

In Paragraph 5 gibt Euler ein erstes Beispiel: *20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirthshause: ein Mann verzehrt 8 Gr. ein Weib aber 7 Gr. und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Rthlr. Nun ist die Frage, wie viele Männer und Weiber daselbst gewesen? Gr. bzw. Rthlr. stehen für Groschen bzw. Reichsthaler, wobei 1 Rthlr. gleich 24 Gr. entspricht.*

Euler löst die Aufgabe in folgenden Schritten: *Anzahl Männer = x , Anzahl Weiber = $20 - x$, Verzehr der Männer = $8x$ Gr., Verzehr der Weiber = $140 - 7x$ Gr., Verzehr insgesamt = $140 + x$ Gr., Gleichung $140 + x = 144$, Lösung $x = 4$. Jeder Schritt wird von Euler erläutert.*

In Paragraph 6 folgt ein zweites Beispiel: *20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirthshause. Die Männer verzehren 24 Fl. die Weiber verzehren auch 24 Fl. und es findet sich, dass ein Mann einen Gulden mehr als ein Weib hat zahlen müssen, wie viele waren es Männer und Weiber?*

Die Lösungsschritte lauten: *Anzahl Männer = x , Anzahl Weiber = $20 - x$, Verzehr eines Manns = $24/x$ Fl., Verzehr eines Weibs = $24/(20 - x)$ Fl., Gleichung $24/x - 1 = 24/(20 - x)$. Weiter schreibt Euler dann: *Dieses ist also die Gleichung woraus der Werth von x gesucht werden muss, welcher nicht so leicht heraus gebracht werden kann wie bei der vorigen Frage. Aus dem folgenden aber wird man sehen, dass $x = 8$ sey, welches auch der gefundenen Gleichung ein Genüge leistet $24/8 - 1 = 24/12$ das ist $2 = 2$.**

Im Paragraph 7 fasst Euler die Vorgehensweise zusammen: *Bey allen Fragen kommt es nun darauf an, dass man die unbekanntes oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben angedeutet, die Umstände der Frage genau in Erwägung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach besteht die ganze Kunst darinn wie solche Gleichungen aufgelöset, und daraus der Werth der unbekanntes Zahlen gefunden werden soll...*

Im Paragraph 8 reflektiert Euler das allgemeine Vorgehen beim Gleichungslösen: *Eine Gleichung bestehet demnach aus zwey Sätzen, deren einer dem anderen gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekanntten Zahl heraus zu bringen, müssen öfters sehr viele Verwandlungen angestellet werden, welche sich aber alle darauf gründen, dass wann zwey Grössen einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, ...*

In den Paragraphen 9 und 10 gibt Euler einen Ausblick auf die weiteren Kapitel. Dazu unterscheidet er zwischen Gleichungen mit einer bzw. mehreren Unbekannten und zwischen Gleichungen ersten bzw. höheren Grades.

Charakteristika von Eulers Einführung in Gleichungen

Zum Aufbau: Euler gibt zunächst eine ausführliche Hinführung zum Thema, dann zwei eingehend erläuterte Beispiele und zuletzt eine Vororientierung über Auflösungsregeln und Gleichungstypen.

Zur Sprache: Euler verwendet überwiegend Umgangssprache, nur wenig Fach- und Formelsprache. Die Grundvorstellungen und Lösungsschritte sind sorgfältig und explizit ausformuliert.

Zur Zielsetzung: Euler richtet das Augenmerk auf das Wesen von Gleichungen, nicht auf deren Auflösung. Konzeptionelles Verständnis steht im Vordergrund, nicht die Rechentechnik.

Zu den Beispielen: Euler wählt einfache und doch genug reichhaltige Textaufgaben. Variablen stehen bei Euler für konkrete Grössen und nicht für abstrakte Symbole. Die zum Aufstellen der Gleichungen nötigen Fertigkeiten im Umgang mit Termen sind aus Teil I der Algebra bekannt. Es treten noch keine Gleichungsauf Lösungsschritte auf. Das erste Beispiel ist so angelegt, dass die Lösung abgelesen werden kann. Im zweiten Beispiel wird die Lösung angegeben und überprüft. Das zweite Beispiel ist eine Variation des ersten Beispiels. Das Aufstellen der Gleichung ist im zweiten Beispiel fast so einfach wie im ersten, die Auflösung dagegen wäre bedeutend schwieriger. Es müsste eine quadratische Gleichung gelöst werden.

Einschätzung von Eulers Einführung in Gleichungen

Eulers Einführung in Gleichungen enthält viele didaktische Elemente, die noch heute als wichtig erachtet werden: Sie ist abgestimmt auf die Vorkenntnisse, einfach und konkret gehalten, konzeptionell orientiert, exemplarisch illustriert und eingehend kommentiert.

Daneben weist Eulers Einführung in Gleichungen aus heutiger didaktischer Sicht auch Mängel auf: Sie ist eng vorstrukturiert, regt nicht zum eigenständigen Handeln an und ermöglicht kein entdeckendes Lernen.

Eulers „Algebra“ im Mathematikunterricht und in der Mathematiklehrerausbildung

In Eulers „Algebra“ gibt es viele Passagen, die ergänzt mit Aufgaben zur aktiven Auseinandersetzung und Verarbeitung noch heute im Mathematikunterricht eingesetzt werden können. Dies bestätigen Erfahrungen, welche der Autor an Schweizer Gymnasien gemacht hat.

Für die Mathematiklehrerausbildung kann es interessant und anregend sein, Eulers Herangehensweise didaktisch zu hinterfragen und mit Darstellungen in heutigen Lehrmitteln zu vergleichen.

Fazit

Leonhard Euler war nicht nur ein ungemein produktiver und bedeutender Wissenschaftler, sondern er war auch ein erfolgreicher Lehrbuchautor. Seine „Vollständige Anleitung zur Algebra“ erlebte zahlreiche Auflagen und wurde in viele Sprachen übersetzt.

Wer Eulers „Algebra“ studiert, wird feststellen, dass dieses Lehrwerk in fachlicher und didaktischer Hinsicht noch heute lesenswert ist und Originalpassagen ohne Weiteres im Unterricht eingesetzt werden können.

Euler hat zu fast allen damals bekannten mathematischen Gebieten Wichtiges beigetragen und zudem neue Gebiete geschaffen. Daher gilt für Fachmathematiker noch heute der Laplace zugeschriebene Ausspruch:

Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.

Dies lohnt sich auch für Lehrpersonen und ihre Schüler/innen sowie Fachdidaktiker/innen und ihre Studierenden.

Dank

Der Autor dankt seiner Partnerin Hélène Berther für die grosse Unterstützung bei der Vorbereitung dieses Beitrags.

Anmerkungen

[1] Unter eulerarchive.maa.org ist Eulers „Algebra“ in einer Reclam-Ausgabe von 1920 online verfügbar. Teil I trägt die Katalognummer E387, Teil II die Nummer E388. Die deutsche Erstausgabe von 1770 ist in Band 1 der „Leonardi Euleri Opera Omnia“ wiedergegeben (Teubner Verlag, 1911).

[2] www.hmb.ch/de/sammlung/malerei-und-grafik/103585-vollstaendige-anleitung-zur-algebra.html (05.09.15).

[3] Die Broschüre kann als PDF-File beim Autor bezogen werden. Seine Mailadresse lautet moritz.adelmeyer@kme.ch.

[4] Der folgende Scan und die folgenden Zitate stammen aus der deutschen Zweitausgabe der „Algebra“ von 1771, von welcher der Autor ein Exemplar besitzt.