Henrike ALLMENDINGER, Basel

Von Sternen und Schlangen – Metaphern beim Erlernen von Mathematik

„The essence of metaphor is understanding and experiencing one kind of thing in terms of another.“ (Lakoff/Johnson 1980, S. 5)

Im allgemeinen Sprachgebrauch stellen Metaphern Wortwendungen dar, die eine Doppel- oder Mehrdeutigkeit aufweisen. Meist werden Metaphern als Phänomen der literarischen Sprache aufgefasst (vgl. Ortony 1993, S. 1f). Dem entgegen steht die, u.a. von Lakoff und Johnson (1980) vertretene Auffassung, Metaphern seien alltägliche Sprachbilder und Redewendungen, die als Träger emotionaler und kognitiver Strukturen fungieren. Gerade in der Wissenschaft werden Begriffe und Bezeichnungen häufig aus anderen Kontexten entlehnt – beispielsweise Baum, Gruppe, Filter, … – diese haben in erster Linie konzeptuelle Funktion haben (vgl. Raschauer 2013) erzeugen damit aber auch eine bestimmte Anschauung und stiften Erkenntnis stiften. Ihnen kommt dadurch theoriekonstituierende Rolle zu:

„Metaphern sind eine besondere Form anschaulichen Denkens und in gewissen theoretischen Kontexten deshalb nicht ersetzbar, weil sie die notwendige Versinnlichung des Gegenstandes garantieren.“ (Gessinger 1992, S. 92)

Metaphern begleiten und strukturieren nicht nur unser gesamtes Denken, Handeln und Sprechen im Alltag und in der Wissenschaft. Sfard hebt hervor, dass unterschiedliche Metaphern zu unterschiedlichem Denken und Handeln führen können (vgl. Sfard 1998, S. 5). Die Wahl einer Metapher wird damit zu einer folgenreichen aber auch mächtigen didaktischen Entscheidung. Sprachbilder können damit bewusst eingesetzt auch fern des fachlichen – hier fachmathematischen – Vokabulars als didaktisches Werkzeug eingesetzt werden.

Im folgenden werde ich mich auf auf solche Metaphern konzentrieren, die keine etablierten Fachbegriffe darstellen, wie sie etwa Klein (1908) in seiner Vorlesung *Elementarmathmatik vom höheren Standpunkt* einsetzt. An diesen Beispielen lassen sich die von Peyer und Künzli (1999) herausgearbeiteten didaktischen Funktionen von Metaphern speziell für die Mathematik illustrieren und erweitern. Dabei werde ich keine explizite Unterscheidung zwischen Metaphern und Analogien machen, sondern letztere als spezielle Metaphern betrachten, die den metaphorischen Gehalt offenlegen.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Beispiel: Kettenbrüche

Klein bespricht (regelmäßige) Kettenbrüche. Jede positive reelle Zahl ω lässt sich als Kettenbruch darstellen:

$$\omega = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \cdots}}, \; n_0, n_1, n_2, \ldots \in N.$$

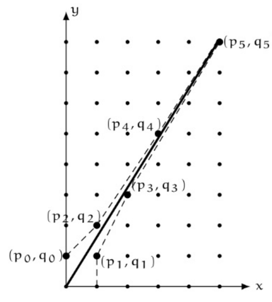
Bei rationalem ω ist die Folge der n_1 endlich, bei irrationalen Zahlen hingegen unendlich (vgl. Klein 1908, S. 46). Die Brüche, die entstehen, wenn man die Kette nach endlich vielen Schritten abbricht, ergeben besonders gute Näherungswerte:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, \; n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \; \ldots$$

Unter allen Brüchen, deren Nenner nicht größer als q_r ist, liefert $\frac{p_r}{q_r}$ die beste Approximation von ω (vgl. Klein 1908, S. 46f).

Zunächst nutzt Klein für diesen Sachverhalt eine geometrische Deutung – Klein betrachtet statt der positiven reellen Zahl ω die Ursprungsgerade mit Steigung ω im ersten Quadranten eines Koordinatensystems mit einer Markierung an jeder Stelle mit ganzzahligen Koordinaten, einem sogenannten Punktegitter.

Abbildung: (Klein 1908, S. 48)



Das Punktegitter vergleicht Klein mit dem Anblick des *Sternenhimmels*, genauer der *Milchstraße*, und will durch diese Metapher hervorheben, wie bemerkenswert es ist, dass der Leitstrahl einer irrationalen Zahl (sprich eines nicht abbrechenden Kettenbruchs) keinen einzigen Punkt des Gitters trifft (vgl. Klein 1908, S. 48f).

In dieser geometrischen und metaphorisch ergänzten Deutung lässt sich nun eine Beziehung zu der Kettenbruchentwicklung herstellen, die Klein wieder mit Hilfe alltäglicher Assoziationen formuliert:

„Denken wir uns in alle ganzzahligen Punkte Stifte oder Stecknadeln gesteckt [...] und umschlingen wir den Stifthaufen rechts und links des ω-Strahls mit je einem Faden, den wir straff anziehen, so sind die Ecken der entstehenden, die beiden Punkthaufen begrenzenden konvexen Fadenpolygone gerade unsere Punkte (p_r, q_r), welche die Zähler und Nenner der sukzessiven reduzierten Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von ω zu Koordinaten haben, und zwar gehören zu dem linken Polygon die Nähgerungsbrüche mit geradem, zu den rechten die mit ungeradem Index." (Klein 1908, S. 48)

Was leisten die Metaphern und Vergleiche in diesem Beispiel?

Im vorgelegten Beispiel fungieren die Metaphern als *Verständigungsbrücke*, indem sie vom Bekannten (Spielbrett, Sternenhimmel) eine Analogie zu dem möglicherweise unbekanntem Punktegitter herstellen. Dadurch dienen sie gleichermaßen der *Veranschaulichung*. Der metaphorische Vergleich mit dem Sternenhimmel leistet dabei mehr als die geometrische Darstellung (vgl. Abbildung) alleine, welche die dem Sachverhalt innewohnende Unendlichkeit nur andeuten kann und führt dabei potentiell zu einem *Verständnisaufbau,* indem er zur Reflexion anregt: Ist es etwas besonderes, dass es unendlich viele Leitstrahlen gibt, die kein einzigen Punkt auf dem Punktgitter treffen? Die enaktiv anregende Beschreibung der Näherungswert-Bestimmung im Punktgitter mittels Aufspannen von Schnüren betont zudem den *Prozess (mathematischen) Handels.* Die Mathematik wird als dynamisches und nicht statisches System vorgestellt. Wie auch in folgendem Beispiel, in dem die Taylorschen Näherungspolynome der Sinus-Funktion als lebendige Objekte Schlangen-ähnlich dargestellt werden:

„Besonders anschaulich sehen Sie bei sin x, wie die Parabeln sich bemühen, immer mehr Oszillationen der Sinuskurve mitzumachen." (Klein 1908, S. 144)

Damit werden den Metaphern hier, in der vorgestellten Begrifflichkeit, eine theoriekonstituierende Bedeutung zugeschrieben. Ob diese bei Klein aus didaktischen Überlegungen heraus intendiert ist oder ob bei ihm die Metaphern dem rhetorischer Schmuck dienen, lässt sich anhand der Vorlesungsmanuskripte nicht beurteilen. Wie Peyer und Künzli (1998, S. 177) hervorheben, kann man aber in jedem Fall vom Gebrauch der Metaphern auf bestimmte Auffassungen und Denkhandlungen oder Schwerpunkte des Autors schließen.

Neben der inhaltlichen *verstehensorientierten* Dimension von Metaphern spielt sicher auch deren *emotionale* Dimension eine Rolle für das Erlernen von Mathematik. Metaphern haben – in ihrer ursprünglichen und literarischen Ausprägung – als rhetorischer Schmuck eine erfreuende und auflockernde Wirkung und können die Motivation fördern und die Einstellung auf den mathematischen Gegenstand prägen. Besonders bei ontologischen Metaphern, wie sie Lakoff und Johnson (1980) in ihrer Klassifikation beschreiben, bei denen ein abstrakter Begriff „vergegenständlicht" wird – oder sogar personifiziert wird, können einen persönlichen Bezug zum Gegenstand fördern. Sie können ihn aber auch je nach Art der Wertung erschweren. Ein prägnantes Beispiel findet man bei Klein, wenn er Funktionstypen klassifiziert:

„Da hat man dann die merkwürdigen Funktionstypen gefunden, welche die unangenehmsten Singularitäten ‚zu einem scheußlichen Klumpen geballt' enthalten. Es handelt sich hier vorallem darum, zu untersuchen wie weit die für ‚vernünftige' Funktionen geltenden Sätze bei solchen Abnormitäten noch erhalten bleiben." (Klein 1908, S. 220)

Insgesamt zeigt sich an den Beispielen, dass Metaphern bewusst eingesetzt die Möglichkeit eröffnen auf eine ansprechende, motivations-fördernde Art und Weise eine Anschauung und ein Verständnis zu erzeugen und eine dynamische Sicht auf die Mathematik fördern können. Gleichzeitig zeigt sich die große Verantwortung, die einem Lehrer zu teil wird, wenn er durch die Wahl der Metaphern die Einstellung und das Denken über einen mathematischen Gegenstand nachhaltig beeinflussen kann.

Literatur

Gessinger, Joachim (1992): Metaphern in der Wissenschaftssprache. In: T. Bungarten (Hrsg.): Fachsprachenforschung: Sprache in der Wissenschaft und Technik, Wirtschaft und Rechtswesen. Tostedt: Attikon, S. 29-56

Klein, F. (1908): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Band I: Arithmetik, Algebra und Analysis. Berlin: Springer.

Lakoff, George und Johnson Mark (1980): *Metaphors We Live By*. Chicago: University of Chicago Press.

Ortony, Andrew (1993): Metaphor and thought.Cambridge: Cambridge University Press.

Peyer, Ann und Künzli, Rudolf (1999): Metaphern in der Didaktik. In: Zeitschrift für Pädagogik 45 (2). S. 177–194.

Raschauer, Martin (2013): Metaphern in der Mathematik – die Bildlichkeit des abstrakten Denkens. Magdeburg: Universitätsbibliothek.

Sfard, Anna (1998): Two metaphors of learning and the dangers of using just one. In: Educational Researcher 27 (2). S. 4–13.