Stefanie AREND, Oldenburg

Der Stetigkeitsbegriff mittels ε-δ-Definition im Übergang von Schule zu Hochschule: Verstehensprozesse von Studierenden

1. Forschungsinteresse

Stoffdidaktische Themen werden in der modernen mathematikdidaktischen Literatur immer seltener (Götz 2014), dabei kann die daran anknüpfende strukturgenetische didaktische Analyse (Wittmann 2012) eines mathematischen Begriffes einen wesentlichen Beitrag beim Nachvollziehen von Fehlvorstellungen oder naiver Handhabung Lernender leisten. Denn „[…]Unklarheiten, Fehler, Irrwege, Missverständnisse usw. treten dabei in natürlicher Weise auf“ (Wittmann 2012), womit ein Blick vom höheren Standpunkt aus zur Klärung von Problemen hinzugezogen werden sollte. Im Mittelpunkt des vorliegenden Beitrags und dem damit verbundenen Promotionsprojekt steht vor diesem Hintergrund die ε-δ-Definition der Stetigkeit. Diese weist einen noch recht jungen Entwicklungsprozess auf, der maßgeblich mit Cauchys Cours d'Analyse (1821) einsetzt. Der Entstehungsprozess gipfelt dann in der logisch-komplexen Definition von Weierstrass in den 1850er Jahren (Kleiner 2012). Die ε-δ-Definition ist heute für höhere Mathematik in topologischen Räumen unumgänglich und damit Teil des analytischen Kanons geworden. Verbunden mit diesem Ansatz soll auf einer deskriptiven Ebene die Analyse studentischer Bearbeitungen im Umgang mit der ε-δ-Definition unter einem normativ postulierten verstehensorientierten Umgang unter folgender Leitfrage im Fokus stehen: Welche Verstehensprozesse von Mathematikstudierenden sind bezüglich der ε-δ-Definition von Stetigkeit auszumachen?

Dabei interessieren sowohl die Schwierigkeiten, als auch das individuelle Potenzial. Im Fokus dieses Beitrages steht dann aber zunächst die Frage: Wie gehen Studienanfänger mit der ε-δ-Definition um und welche Verhaltensmuster sind bei der Handhabung erfolgreicher als andere?

Studierende der Mathematik werden zu Beginn ihres Studiums in ihrem individuellen Lernprozess zumeist das erste Mal mit einer deduktiven Herangehensweise an einen Begriff konfrontiert und es liegt auf der Hand, dass dieser Einstieg mit den Lernvoraussetzungen aus der Schule (über-) fordern kann. So blickt der Lehrende an der Universität jedes Jahr erneut in die fragenden Gesichter der Studentenschaft, wenn es heißt: er wähle sich sein δ in Abhängigkeit von ε.

2. Untersuchungsdesign

Vor dem Hintergrund dieser Problematik wurde für die Untersuchung ein anderthalbwöchiger Brückenkurs zum Thema„Stetigkeit mittels ε-δ-Definition“ konzipiert und mit 18 Studierenden durchgeführt. Die Teilnehmer standen dabei am Beginn ihres Studiums. So wurde versucht die

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Präsenz des Gegenstandes, wie auch ein Optimum des Verständnisses bei den Teilnehmenden zu gewährleisten.

Der Begriff des Verstehens wird hier aus der Sicht einer Philosophie der Orientierung so erfasst, dass man etwas mit der ε-δ-Definition anfangen kann (Stegmaier 2011). Im Brückenkurs geht es um die Auseinandersetzung mit aus der Realität angeregten (un-) stetigen Funktionen mittels dynamischer Geometriesoftware. Die Studierenden entwickeln dann selbst eine Version der ε-δ-Definition, die dann ähnlich einer Gedichtinterpretation aus dem Deutschunterricht im Detail analysiert wird. Dann werden auch erste „typische“ Stetigkeitsbeweise geführt. Im Anschluss an den Kurs finden aufgabenbasierte Einzelinterviews statt. Die Aufgaben legen den einen Schwerpunkt dabei auf das Abtesten von bestehenden Vorstellungen von (Un-)Stetigkeit; den anderen auf einen verstehensorientierten Umgang mit der Definition. Zusätzlich zu den schriftlichen Notizen werden die Interviews transkribiert.

3. Ausgewählte Ergebnisse

In einer der Untersuchungsaufgaben geht es darum mittels der ε-δ-Definition einen Nachweis der Stetigkeit für die reelle Funktion f(x)=4 zu formulieren. Durch die konstruierte Problematik wird die Handhabung des Instrumentes selbst fokussiert und versucht den Umformungsprozess in den Hintergrund zu stellen. So kann der Schwerpunkt auf einen verstehensorientierten Umgang gesetzt werden. Studentin Anna führt aus:

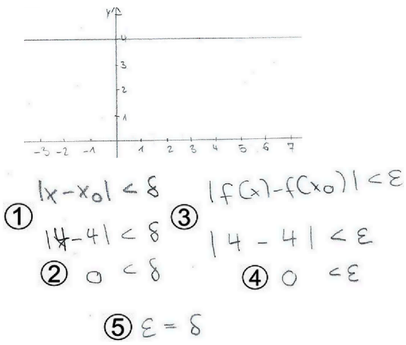

Abb. 1: Notizen Anna

A: Ja, also ich hab erstmal die Funktion skizziert, damit man sich das erstens besser vorstellen kann (Deutet auf Skizze.), das ist ja einfach nur ne Gerade bei 4. Dann habe ich das eingesetzt, also hier (Deutet auf 1.), für x habe ich 4 genommen und dann auch hier diesem Bereich (Deutet in Skizze auf Graphen im Bereich um $x = 0$ herum.), also für x_0 auch 4.

A: Und dann kam 0 (Deutet auf 2.) muss kleiner sein als δ. Und das gleiche hab ich dann hier (Deutet auf 3.) nochmal gemacht, also man muss ja $f(x)-f(x_0)$ einsetzen und da hat man ja wieder $4-4$ und das ist auch Null. Also muss $\varepsilon = \delta$ (Deutet auf 5.) sein und das hatten wir ja auch auf dem ersten Zettel schon gesehen, dass, wenn man eine Gerade hat, dass $\varepsilon = \delta$ sein muss. Und somit ist die Funktion stetig.

Anna erläutert zuerst ihre Skizze des Funktionsgraphen (Z.159f.), auf die sie im weiteren Argumentationsprozess keinen Bezug mehr nimmt. Zwar spricht sie „nur“ von einer Geraden bei Vier (Z.160), vermutlich erkennt sie aber, dass es sich um eine konstante Funktion handelt, da sie korrekt zeichnet. Im weiteren Verlauf konkretisiert sie die beiden Aussagenteile, die sie der Definition entnimmt, durch Einsetzen (Z.161,163) und Ausrechnen (Z.167). Als

Strategie kann hier ein linear orientierter Einsetzungsprozess festgehalten werden. Anna versucht dabei jede Variable durch Zahlen zu ersetzen. Es ist nicht klar, weshalb die Studentin für x und x_0 jeweils den Wert Vier wählt. Jedoch lässt diese Tatsache eine Verwechslung von Argument und Funktionswert vermuten. Hinzu kommt die Verwirrung durch einen Wechsel der Semantik von x und x_0, den sich die Studentin wohl damit erklärt, dass x_0 dem Funktionswert an der Stelle Null entspricht (Z.162f.). Ihr daran anschließender „lokaler Schluss“, dass mit $0<\delta$ und $0<\varepsilon$ dann $\varepsilon=\delta$ gelten muss ist nicht nachvollziehbar. Das weist zum einen darauf hin, dass die Studentin wenig Verständnis für die Abhängigkeit der beiden Variablen hat, zum anderen auch darauf, dass hier nicht im Gesamtzusammenhang der Definition gedacht wird. Die Bestätigung ihres Ergebnisses, die sie darin sucht, dass bei einer Gerade stets $\varepsilon=\delta$ gelten muss (Z.171), eröffnet dann einen Blick auf ihre fehlerhaften Vorstellungen und macht deutlich, dass zum Beispiel ein Zusammenhang zum Anstieg der Funktion gar nicht erkannt wird. Die Studentin hantiert hier hilflos mit der Definition. Das ist vor dem Hintergrund ihrer eigenen Lerngeschichte mehr als nachvollziehbar. So reduziert sie die Handhabung der Definition auf eine fast zwanghafte Wahl, die Klarheit bringen soll; ihr selbst im Gesamtzusammenhang der Definition aber gar nichts bringt.
In einer weiteren Bearbeitung dieser Aufgabe zeigt sich, dass Studentin Bärbel die Skizze des Funktionsgraphen immer wieder in ihre Überlegung mit einbezieht. Sie interpretiert die Tatsache, dass $|f(x)-f(x_0)|=0$ damit, dass der Abstand der Funktionswerte einer konstanten Funktion immer Null entspricht und begründet die erkannte flexible Wahl von δ mit der besonderen Eigenschaft der Funktion. Ein entscheidender Unterschied zu der Herangehensweise bei Anna ist, dass die Studentin „globale Schlüsse“ zieht und sowohl auf die Voraussetzungen der Definition als auch die Besonderheit der Funktion selbst Bezug nimmt. Zwar endet auch ihre Bearbeitung mit einer Wahl, diese ist jedoch betont exemplarisch mit $\delta=\varepsilon$ getan. Als erster induktiver Schluss lässt sich festhalten, dass Anna, die eher linear an die Bearbeitung herangeht und Bestandteile der Definition isoliert betrachtet weniger erfolgreich ist als Bärbel, die einzelne Bestandteile der Definition bei ihrer Anwendung strukturiert und überprüfend nutzt. Zweifellos stellen diese ersten Eindrücke keine Allgemeingültigkeit dar. Jedoch geben sie einen Hinweis auf individuelle Hürden, aber auch Handhabungsprozesse.

4. Konsequenzen

Vor dem Hintergrund dieser Ergebnisse erscheint eine Grundvorstellung von (Un-)Stetigkeit auch für den Umgang mit der ε-δ-Definition beinahe apodiktisch. Dabei stellt die gängige Vorstellung vom „durchzeichenbaren“ Graphen aber kein adäquates Mittel zur Verfügung, da sie verfälscht, anstatt zu helfen; ebenso die vorherrschende Vorstellung der Sprungstelle beim unstetigen Graphen. Oszillierende „sin(1/x)-Funktionen“ hingegen stehen zur Verfügung um den Begriff der Stetigkeit weiter zu schärfen und sollten als Teil der Vorerfahrungen ernst genommen werden (Götz 2014). Grundvorstellungen sollen eine gute Basis bieten, anstatt im Zuge der Präzisierungen revidiert werden zu müssen, denn nur dann kann Sinn und Handhabung durchdrungen werden. Somit soll mit diesem Beitrag nicht die reine Behandlung eines formal wie logisch anspruchsvollen Begriffs insistiert werden, dessen Struktur selbst zur Verständnishürde wird. Viel eher geht es darum aufzuzeigen wie nachvollziehbar ein defizitärer Umgang mit der ε-δ-Definition der Stetigkeit ist, wenn weder innermathematische noch anwendungsbezogene Vernetzungsmöglichkeiten da sind (Brinkmann 2011) und das Gerüst in seiner Komplexität nur für sich steht. Ist dann nicht auch die aufgezeigte Tendenz einzusehen, dass Studierenden eine Grundeinsicht entwickeln, die als Handlungskompetenz beschrieben werden kann, die Wissen und Imagination (Götz 2014) in den Hintergrund stellt? Denn wenn schon die historische Entwicklung der ε-δ-Definition nicht geradlinig verläuft, wie soll es dann die Lerngeschichte des individuell Lernenden? Ein Appell soll sein zuerst vor dem Hintergrund einer historisch-genetischen Annährung verstehensorientiert an Definitionen heranzutreten oder Begriffe im Rahmen von gezielten Übungsaufgaben oder Recherchearbeiten in den Anfängerveranstaltungen aus verschiedenen Perspektiven zu beleuchten. Das bewirkt ein tieferes Durchdringen mathematischer Präzisierungen und schärft den kulturhistorischen Blick auf die Mathematik selbst.

Literatur

Brinkmann, A., Maaß, J. & Siller, H.-St. (2011): *Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht (B1)*. München: Aulis Verlag.

Götz, Stefan. (2014). "Was kann Stoffdidaktik heutzutage (noch) leisten?" Vortrag der 48. Tagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 10.3.2014, Landau. http://2014.gdm-tagung.de/download/goetz_hauptvortrag_ 2014_ GDM.pdf, 16.02.2015.

Kleiner, Israel. (2012). *Excursions in the History of Mathematics.* New York: Springer.

Stegmaier, Werner (2011). Orientierung durch Mathematik. In: Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G. & Rathgeb, M. (Hg.): *Mathematik verstehen - Philosophische und Didaktische Perspektiven.* (S.15-25). Wiesbaden: Vieweg-Teubner Verlag.

Wittmann, E.Ch. (2012). Das Projekt „mathe 2000“: Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In: Müller, G.N., Selter, Ch. & Wittmann, E.Ch. (Hg.): *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben.* (S. 263-279). Stuttgart: Klett.