

Ramona BEHRENS, Würzburg

Formulieren von mathematischen Fragestellungen – unterstützt durch Taschencomputer

Das Stellen von Fragen und Variieren von gegebenen Situationen ist ein wichtiger Aspekt im Mathematikunterricht. Unter der Kompetenz Problemlösen ist in den KMK-Bildungsstandards (2003) für den mittleren Schulabschluss neben der Bearbeitung vorgegebener Probleme auch das selbstständige Formulieren von Problemen ein bedeutsamer Punkt. So sehen das auch Bruder & Collet: „Ein Problem lösen zu wollen, heißt nichts anderes, als sich immer wieder geeignete Fragen zu stellen“ (2011, S. 23). Das Finden von Fragen ist auf unterschiedliche Weisen in die Tätigkeiten des Problemlösens eingebettet. Zum einen ist es beim Problemlösen hilfreich, neue Probleme zu erzeugen, so dass ein tieferes Verständnis des Themenbereichs erlangt werden kann. Aus der Lösung eines Problems können sich neue Fragen ergeben, die analysiert werden müssen, um die Bedeutung des eigentlichen Problems zu verstehen. Zum anderen können Variationen des Problems helfen, eine Lösungsidee für das Problem zu finden (vgl. auch Brown & Walter 1983, S. 1 f.).

In der englischsprachigen Literatur wird mit “Problem Posing“ einerseits das Erzeugen von neuen Aufgaben und andererseits die Umformulierung bzw. Veränderung gegebener Aufgaben verstanden, so dass eine neue Variante dieser Aufgaben entsteht. Aus diesem Grund kann das Variieren von Aufgabenstellungen sowohl vor der Bearbeitung einer Aufgabe, als auch während der Bearbeitung sinnvoll sein (vgl. Silver 1994, S. 191 f.). Zum Problemlöseschritt „Ausdenken eines Plans“ gibt Pólya den Hinweis eine ähnliche Aufgabe zu suchen, deren Lösung bei der aktuellen Aufgabe helfen könnte (vgl. Pólya 1949). Dabei kann die gelöste Aufgabe auch umformuliert werden, indem Bedingungen verändert werden, so dass neue verwandte Aufgaben entstehen. Das Formulieren von Aufgaben kann auch unabhängig vom Problemlösen auftreten, wenn es das Ziel ist, ausgehend von einer gegebenen Situation oder Erfahrung eine Aufgabe zu erzeugen (vgl. u. a. Silver 1994, S. 191 f.).

Im Allgemeinen werden drei Typen von “Problem-Posing“-Situationen unterschieden, wobei die Unterscheidung danach erfolgt, in welchem Maße die neue Aufgabe von einer Ausgangsaufgabe abhängt (Schupp 2002, S. 10). Bei freien “Problem-Posing“-Situationen geht es um das Erstellen von Aufgaben, ohne dass eine spezielle Situation vorgegeben ist. Dabei sollen die Lernenden z. B. eine Situation aus dem Leben nehmen, die mit Mathematik verknüpft werden kann und daraus eine Aufgabe formulieren. Bei

halbstrukturierten “Problem-Posing“-Situationen wird eine offene Situation gegeben und die Lernenden erhalten den Auftrag diese mithilfe ihres Vorwissens und ihren Fähigkeiten durch das Finden von mathematischen Fragen zu erkunden. Hingegen werden bei ganzstrukturierten „Problem-Posing“-Situationen erst Initialaufgaben gelöst und dann neue Fragestellungen entwickelt, indem die Fragen umformuliert oder Bedingungen der Aufgabe weggelassen werden (vgl. Abu-Elwan 2002, S. 59 f.). Brown und Walter geben Beispiele für halbstrukturierte “Problem-Posing“-Situationen und zeigen ein Vorgehen zur Formulierung von Fragestellungen auf. Es werden offene Situationen vorgegeben, beispielsweise die Gleichung $a^2+b^2=c^2$, zu denen Fragen entwickelt werden sollen. Im ersten Schritt geht es um das Erfassen der in der Situation gegebenen Elemente und ihrer Eigenschaften, etwa hierbei die Variablen sind durch ein Gleichheitszeichen verbunden. Dann werden die Eigenschaften der Elemente mithilfe der Frage verändert: Wenn die Elemente nicht diese Eigenschaft hätten, welche könnten sie dann haben? Diese Strategie zur Variation einer Situation und somit zum Formulieren von Fragestellungen nennen Brown und Walter “What-If-Not-Strategy“. Eine mögliche Veränderung des obigen Beispiels wäre dann: Für welche Zahlenwerte ist die Ungleichung: $a^2+b^2 < c^2$ richtig? (vgl. Brown & Walter 1983, S. 44 ff.). Ein Beispiel für ganzstrukturierte Situationen ist „Zerlege ein Quadrat in 4 Teilquadrate“. Zunächst soll die Aufgabe gelöst und dann einzelne Elemente dieser Aufforderung variiert werden. Dabei ist es wichtig, dass insbesondere auch heuristische Strategien explizit gemacht und angewandt werden, die nicht nur beim Variieren, sondern auch beim Problemlösen hilfreich sind. In Bezug auf die oben genannte Aufgabe wäre eine mögliche Variationsstrategie das geringfügige Ändern durch Zerlegen des Quadrats in eine andere Anzahl an Teilquadraten (vgl. Schupp 2002, S. 21, S. 31, S. 99 ff.). “Problem Posing“ umfasst ein weites Feld bezüglich der Generierung und Umformulierung von (neuen) Aufgaben. Im Rahmen des hier beschriebenen Forschungsprojekts werden insbesondere das Stellen von Fragen zu vorgegebenen Situationen und das Variieren dieser Situationen betrachtet. Beim Formulieren von Fragestellungen und Variieren von Situationen kann der Taschencomputer eine Unterstützung bieten. Neben der Veranschaulichung von Situationen mithilfe des Graphikmenüs können Dynamisierungen der Situationen helfen, diese aus einem anderen Blickwinkel zu sehen. Durch die Verwendung des Taschencomputers können Variationen durch Austausch von Objekten oder Veränderung von Werten einfach durchgeführt werden. Im Bereich Funktionen können Auswirkungen von Parameterveränderungen oder Eigenschaften von Funktionstypen untersucht werden (vgl. Behrens 2014).

In diesem Projekt wird der Frage nachgegangen, welche Strategien Schülerinnen und Schüler beim Stellen und Variieren von mathematischen Fragen zu gegebenen Situationen aus dem Bereich Funktionen verwenden. Dabei ist insbesondere von Interesse, ob die Lernenden, die im Mathematikunterricht einen Taschencomputer verwenden, diesen auch beim Formulieren und Variieren von mathematischen Fragestellungen einsetzen und wofür sie diesen dann in diesem Rahmen verwenden. Mit Taschencomputer sind in diesem Zusammenhang grafikfähige Taschenrechner bzw. Graphikprogramme mit Computer-Algebra-System gemeint. Des Weiteren soll untersucht werden, ob sich spezifische Schwierigkeiten und Lernchancen beim Formulieren von Fragestellungen und Variieren einer gegebenen Situation zum Bereich Funktionen feststellen lassen. An einer empirischen Untersuchung nahmen elf Dreiergruppen aus der 10. bzw. 11. Klasse aus drei Gymnasien teil, die mit einer derartigen Aufgabenstellung bisher keine Erfahrung hatten. Jede Gruppe hatte 45 Minuten Zeit. Taschencomputer durften verwendet werden. In der Untersuchung hat jede Gruppe eine von vier halbstrukturierten Situationen zum Themenbereich Funktionen bekommen, zu denen Fragen gestellt werden sollten. Eine dieser Situationen war z. B. folgende: Gegeben sind eine Funktion f mit $f(x)=8x^3-3x^2-4x+1$ und eine Gerade g , die durch den Punkt $P(3/0)$ verläuft. In der ersten Phase hatten die Schülerinnen und Schüler den Auftrag sich zu der gegebenen Situation eigenständig mathematische Fragestellungen zu überlegen. Anschließend wurden die Fragestellungen in Gruppenarbeit zusammengetragen (vgl. auch Behrens 2014).

1. Wie lautet die Definitionsmenge der Funktion?
2. Wie lautet die Wertemenge der Funktion?
3. Besitzt die Funktion Nullstellen $(0,1,2)$?
4. Wo liegen die Nullstellen?
5. Wie lautet die Ableitung der Funktion?
6. Ist die Funktion umkehrbar?
7. Ist die Funktion symmetrisch (Punktsymmetrie/Achsensymmetrie)?

1. Gibt es Schnittpunkte von g und f ?
2. Wenn ja, wo und wieviele?
3. ~~Kann man~~ Wie lautet $g(x)$, wenn ein weiterer Punkt gegeben ist?
4. Wie muss $g(x)$ lauten, damit sie $f(x)$ ~~ein~~ 1, 2, 3-mal schneidet?
5. Wie lautet die Funktion $f(x)$ unter bestimmten Bedingungen?
6. Wie muss man $f(x)$ verschieben, durch den Punkt P verläuft?

In der Abbildung links sind als Beispiel Fragestellungen aufgeführt, die eine Gruppe zu der obengenannten Funktions-Aufgabe formuliert hat. In der zweiten Phase der Gruppenarbeit wurden die Schülerinnen und Schüler mithilfe eines Arbeitsauftrags explizit zur Variation aufgefordert. Die Fragestellungen, welche von der beispielhaft betrachteten Gruppe nach dem Variationsauftrag formuliert wurden, sind in der rechten Abbildung dargestellt. Die Gruppen haben die vorgegebene Funktionsgleichung geändert, Bedingungen hinzugefügt oder weggelassen und die Situation dynamisiert. Nach der Gruppenarbeitsphase wurde ein Gruppeninterview durchgeführt, bei dem Fragen zum Vorgehen, zum Taschencomputereinsatz und zu

Schwierigkeiten gestellt wurden. Die Gruppenarbeit sowie das Interview wurden mithilfe einer Videokamera aufgezeichnet. Danach wurde die Lehrperson u. a. zur Einschätzung der von den Schülerinnen und Schülern bearbeiteten Situationen, zu Methoden und zum Einsatz des Taschencomputers im Mathematikunterricht interviewt. Zur Beantwortung der Forschungsfragen sollen die Transkripte der Gruppenarbeiten und Interviews mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet werden. Mittels eines Kategoriensystems, aufbauend auf den von Schupp genannten Variationsstrategien und theoretischen Überlegungen, sollen die von den Schülerinnen und Schülern verwendeten Strategien identifiziert werden. Dabei soll auch der Einsatz des Taschencomputers – basierend auf den Videoaufzeichnungen und Screenshots, die bei den Gruppeninterviews aufgenommen wurden – ausgewertet werden. Auch die aufgetretenen Schwierigkeiten und Lernchancen sollen mithilfe der Transkripte der Videoaufzeichnungen gedeutet werden.

Literatur

- Abu-Elwan, R. (2002). Effectiveness of Problem Posing Strategies on Prospective Mathematics Teachers' Problem Solving Performance. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 25, 1. 56-69. http://www.recsam.edu.my/R%26D_Journals/YEAR2002/2002Vol25No1/56-69.pdf [31.03.2015]
- Behrens, R. (2014): Lernen, Fragen zu stellen – unterstützt durch den Einsatz eines Taschencomputers. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 153–156). Münster: WTM-Verlag.
- Brown, S. I. & Walter, M. (1983). *The Art of Problem Posing*. Philadelphia: The Franklin Institute Press.
- Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [01.04.2015]
- Polya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Tübingen und Basel: Francke.
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14, 1, FLM Publishing Association, Vancouver. British Columbia, Canada. 19–28. <http://flm-journal.org/Articles/2A5D152778141F58C1966ED8673C15.pdf> [31.03.2015]