Jana BEITLICH, Elisabeth REICHERSDORFER, Kristina REISS,
München

Blickbewegungen beim Lesen eines heuristischen Lösungsbeispiels mit verschiedenen Repräsentationsformen

Theoretischer Hintergrund

Argumentieren gilt als Wesensmerkmal von Mathematik. Es ist in schulischen Lehrplänen und Standards aller Jahrgangsstufen verankert (z. B. Kultusministerkonferenz, 2004; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Allerdings deuten Studien auf Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern verschiedener Altersstufen und Nationalitäten beim Argumentieren hin (für einen Überblick siehe z. B. Reiss & Ufer, 2009).

Ein Ansatz zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz ist die Verwendung heuristischer Lösungsbeispiele (z. B. Reiss & Renkl, 2002). Ihre Wirksamkeit konnte sowohl für Schülerinnen und Schüler (Reiss, Heinze, Renkl, & Groß, 2008) als auch für Studierende (Hilbert, Renkl, Kessler, & Reiss, 2008) gezeigt werden. Während klassische Lösungsbeispiele neben der Aufgabenstellung eine direkte Lösung des gegebenen Problems angeben, zeigen heuristische Lösungsbeispiele weniger direkte Lösungsschritte auf, sondern vielmehr einen realistischen, nicht notwendigerweise geradlinigen Lösungsprozess, der auch explorative oder irreführende Schritte enthalten kann (Hilbert et al., 2008). Oftmals erläutert eine fiktive Person ihr Vorgehen zur Lösung des Ausgangsproblems und nutzt dabei heuristische Strategien, also allgemeine Techniken, um Probleme besser zu verstehen bzw. den Lösungsprozess voran zu bringen (Schoenfeld, 1985). Die Struktur von heuristischen Lösungsbeispielen zur Förderung von Argumentationskompetenz basiert häufig auf einem Prozessmodell zum Beweisen von Boero (1999), das erklärt, wie Experten einen Beweis entwickeln.

In heuristischen Lösungsbeispielen werden Informationen in der Regel in unterschiedlichen Repräsentationsformen dargeboten. Ein Beweis etwa wird formal mit Hilfe mathematischer Symbole angegeben. Zur Entwicklung des Beweises können aber, selbst für Experten, auch nichtsymbolische Repräsentationen wie Abbildungen oder Erklärungen in Textform hilfreich sein (Thurston, 1994). Kognitionspsychologische Theorien zum multimedialen Lernen stützen den Ansatz, Informationen in unterschiedlichen Repräsentationsformen darzustellen, damit diese Informationen integriert werden können (z. B. Schnotz, 2005). Basierend auf diesen Theorien enthält das heuristische Lösungsbeispiel, das in der hier vorgestellten Studie untersucht wurde, Informationen in drei Repräsentations-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

formen. *Text* wurde genutzt, um die Ideen, heuristischen Strategien und Schlussfolgerungen der fiktiven Person im Lösungsprozess zu beschreiben. Zur Visualisierung bestimmter Textinhalte wurden *Abbildungen* integriert. Ferner wurden mit Hilfe mathematischer *Symbole* Aussagen formalisiert. Aufeinanderfolgende Repräsentationsformen bezogen sich häufig aufeinander, insbesondere Text und Abbildung bzw. Text und Symbol. Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt des Lösungsbeispiels, der alle drei Repräsentationsformen enthält. Die Aufgabestellung des in diesem heuristischen Lösungsbeispiel bearbeiteten Problems lautete: *„Beweisen Sie: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar.“*

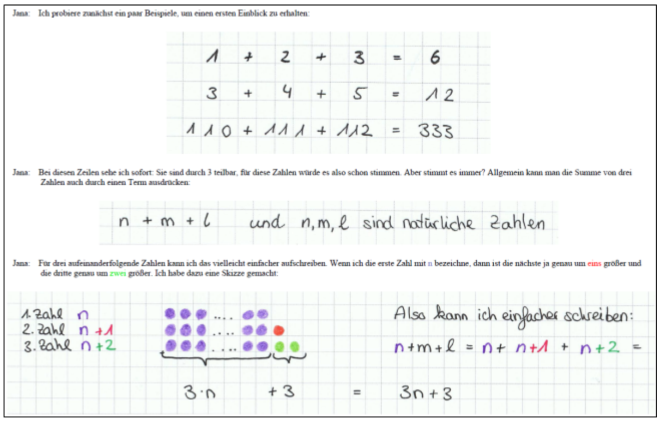

Abb. 1: Ausschnitt des heuristischen Lösungsbeispiels mit den drei Repräsentationsformen *Text*, *Abbildung*, *Symbol*.

Fragestellungen

Bisherige Studien konnten zeigen, dass der Gebrauch von heuristischen Lösungsbeispielen Argumentationskompetenz fördern kann. Unklar ist aber noch, ob Schülerinnen und Schüler von den Vorteilen heuristischer Lösungsbeispiele tatsächlich Gebrauch machen und wie sie verschiedene Repräsentationsformen nutzen. Es ist deswegen von Interesse zu untersuchen, (1) ob und wie intensiv unterschiedliche Repräsentationsformen in einem heuristischen Lösungsbeispiel zur Förderung der Argumentationskompetenz betrachtet werden und (2) ob Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe versuchen, Informationen aus verschiedenen Repräsentationsformen zu integrieren, indem sie etwa zwischen den relevanten Bereichen hin und her springen.

Methode

Um diese Fragen zu beantworten, wurde die Methode Eye Tracking verwendet. Wie eine wachsende Anzahl an Studien gezeigt hat, ist diese Technik geeignet, Strategien beim Lösen mathematischer Aufgabenstellungen sichtbar zu machen (z. B. Beitlich & Reiss, 2014; Inglis & Alcock, 2012).

Die Teilnehmenden waren 26 Schülerinnen und Schüler (16 weiblich) der Jahrgangsstufen 10 und 11 zweier Gymnasien mit einem Durchschnittsalter von 16 Jahren (SD = 0.85). Das heuristische Lösungsbeispiel wurde auf einem Bildschirm, der mit einem Remote Eye Tracker verbunden war, dargeboten mit der Instruktion, dass hier gezeigt würde, wie man Aufgaben vom Typ „Beweisen Sie, dass …“ bearbeiten könne. Sie sollten versuchen, den dargestellten Weg einer fiktiven Schülerin nachzuvollziehen.

Ergebnisse

Zur Analyse der Blickbewegungen wurden drei Arten von Areas of Interest (AOIs) definiert, nämlich *Text*, *Abbildung* und *Symbol*. Durchschnittlich betrachteten die Schülerinnen und Schüler die Abbildungen am längsten (0.077 ms/px, $SD = .045$), gefolgt von den Symbolen (0.059 ms/px, $SD = .027$) und dem Text (0.036 ms/px, $SD = .015$). Diese Unterschiede waren signifikant, $F(1.27, 31.85) = 26.34$, $p = .00$, $\eta^2 = .53$. Paarweise post-hoc Vergleiche ergaben signifikante Differenzen zwischen allen drei Repräsentationsformen (alle $p < .05$).

Außerdem sprang jeder Teilnehmende durchschnittlich 16.6-mal ($SD = 9.9$) zwischen AOIs verschiedener Repräsentationsformen, was darauf hindeutet, dass die Schülerinnen und Schüler versuchten, die Informationen zu integrieren. Die meisten dieser Sprünge erfolgten zwischen aufeinanderfolgenden AOIs unterschiedlicher Repräsentationsformen, die Teilnehmenden waren sich also vermutlich bewusst, dass diese Bereiche inhaltlich zusammengehörig waren.

Diskussion und Ausblick

Die Schülerinnen und Schüler betrachteten die Abbildungen des heuristischen Lösungsbeispiels länger als den Text, was im Gegensatz zu einer Studie zum Lesen und Verstehen von Beweisen zu stehen scheint, bei der Mathematikerfahrene Text länger betrachteten als die den Beweis ergänzende Abbildung (Beitlich & Reiss, 2014). Angesichts der Unterschiede dieser beiden Studien – formale Beweise, die von Experten gelesen werden vs. heuristisches Lösungsbeispiel, das von Novizen gelesen wird und Abbildungen, die den Beweis ergänzen ohne zusätzliche Informationen zu bieten vs. Abbildungen, die wichtige Aspekte der Argumentation beinhalten und zentral für das Verständnis sind – sind diese unterschiedlichen Ergebnisse jedoch nicht widersprüchlich. Gemeinsam ist beiden Studien, dass die Teilnehmenden zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen sprangen. Auch in einer Studie mit Studienanfängerinnen und -anfängern und Mathematikerinnen und Mathematikern, die Beweise lesen sollten, um sie auf ihre Gültigkeit hin zu bewerten, sprangen die Teilnehmenden zwischen aufeinanderfolgenden Zeilen (Inglis & Alcock, 2012).

Die Analyse von Blickbewegungen scheint eine geeignete Methode für die Fragestellungen der vorgestellten Studie zu sein. Um die Ergebnisse zu verallgemeinern, sind jedoch weitere Studien beispielsweise mit einer größeren Teilnehmerzahl und weiteren heuristischen Lösungsbeispielen nötig. Sinnvoll sind außerdem Studien mit Teilnehmenden mit unterschiedlichem Grad an Expertise im Bereich Argumentieren. Eine interessante Fragestellung kann ferner sein, ob sich Schülerinnen und Schüler mit besseren und schlechteren Schulleistungen in der Nutzung der verschiedenen Repräsentationsformen unterscheiden, insbesondere weil die Forschung darauf hindeutet, dass diese unterschiedlich stark von heuristischen Lösungsbeispielen profitieren (z. B. Reiss et al., 2008).

Insgesamt können Ergebnisse dieser und weiterer Studien dazu beitragen, das Design von heuristischen Lösungsbeispielen zu verbessern und den Umgang mit ihnen besser zu verstehen.

Literatur

Beitlich, J., & Reiss, K. (2014). Das Lesen mathematischer Beweise – Eine Eye Tracking Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 157-160). Münster: WTM-Verlag.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7*(8).

Hilbert, T., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction, 18*(1), 54-65.

Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Luchterhand.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM, 40*(3), 455-467.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM, 34*(1), 29-35.

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der DMV, 111*(4), 155-177.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161-177.