Stephan BERENDONK, Siegen

Das Wackelfahrrad wackelt nicht mehr!

Das Fahren auf einem Wackelfahrrad ist eine wackelige Angelegenheit. Das Gefährt besitzt zwar zwei perfekt kreisförmige Räder, aber anders als beim gewöhnlichen Fahrrad liegen die Achsen nicht im Mittelpunkt der Räder (siehe Abb. 1). Beim Fahren laufen die Achsen nicht auf einer Geraden parallel zur Straße, sondern sie durchlaufen eine wellenförmige Kurve. Für eine bequeme Fahrt auf einer ebenen Straße ist das Wackelfahrrad also ungeeignet. Anstatt die Wackelräder für das Wackeln verantwortlich zu machen und sie wieder durch normale Räder auszutauschen, wollen wir lieber nach einer geeigneteren Straße für die Wackelräder suchen. Welche Form muss die Straße haben, damit sich die Achsen der Wackelräder auf einer Geraden bewegen?

Abb. 1

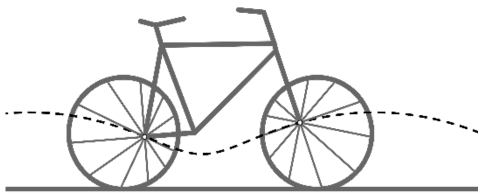
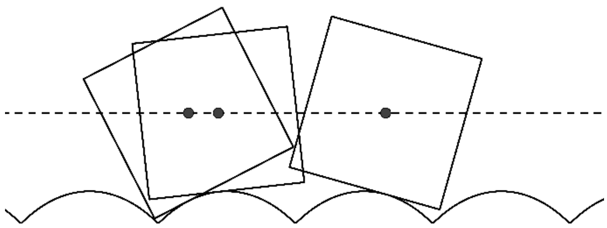


Abb. 2



Die Frage nach der passenden Straße zu einer gegebenen Radform wurde schon häufiger gestellt. Besonders populär ist die Frage, welche Straße zu einem Fahrrad mit quadratischen Rädern gehört. Die Achsen der Räder sollen sich dabei in den Mittelpunkten der Quadrate befinden (siehe Abb. 2). Die gesuchte Straße besteht aus einer Aneinanderreihung von kongruenten Bögen, deren Bogenlänge gleich der Seitenlänge des Quadrats ist. Mit Mitteln der Analysis zeigt man leicht, dass ein solcher Bogen bei geeigneter Wahl kartesischer Koordinaten die Gleichung $y = -\cosh(x)$ erfüllt und somit Stück einer (umgekehrten) Kettenlinie ist. Eine Kettenlinie ist andererseits auch die Kurve, die der Brennpunkt einer Parabel durchläuft, wenn man die Parabel auf einer Geraden abrollt (siehe Abb. 3). Ausgehend von dieser Erzeugungsweise der Kettenlinie werden wir erneut, nun aber geometrisch, nachweisen, dass Quadrat (bzw. Gerade) und Kettenlinie ein Rad-Straßenpärchen bilden. Der Begriff des momentanen Drehzentrums ersetzt dabei die analytischen Berechnungen. Rollt man anstatt der Parabel eine Ellipse auf einer Geraden ab, so beschreiben die Brennpunkte der Ellipse jeweils eine Kurve, die wir als *elliptische Kettenlinie* bezeichnen. Wir werden zeigen, dass diese Kurve die gesuchte Straße für unser Wackelrad ist. Der Beweis führt uns zu einem, schon von E. Habich in 1882 bewiesenen, allgemeineren Zusammenhang zwischen Rad und zugehöriger Straße.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Gerade und Kettenlinie

Wir rollen eine Parabel mit Brennpunkt F und Richtgerade r auf einer Geraden g ab. Der Brennpunkt F der Parabel beschreibt dabei eine Kettenlinie. Sei t die Tangente an die Kettenlinie im Punkt F und sei P der Lotfußpunkt des Lotes von F auf g. Während F die Kettenlinie durchläuft, bewegt sich t entlang der Kettenlinie und P durchläuft die Gerade g. Wir werden zeigen, dass der Abstand zwischen P und t dabei stets gleich dem Abstand zwischen dem Brennpunkt F und der Scheitelgeraden s der Parabel ist und also konstant bleibt, sodass wir P als einen fest an die Gerade t montierten Punkt auffassen können. Da P sich entlang von g und also senkrecht zu FP bewegt, muss das momentane Drehzentrum der Bewegung von t entlang der Kettenlinie bei F liegen. Also rollt die Tangente t auf der Kettenlinie ab. Somit bildet die Gerade t mit dem daran befestigten Punkt P als Achse ein passendes Rad für die Kettenlinie.

Abb. 3

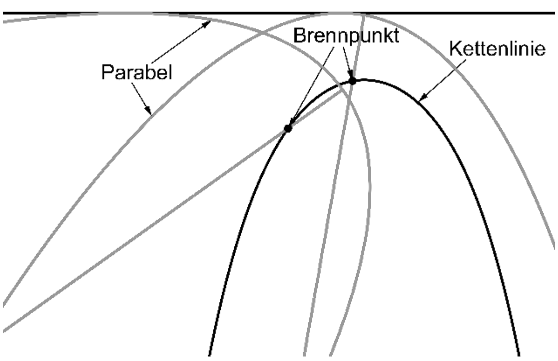
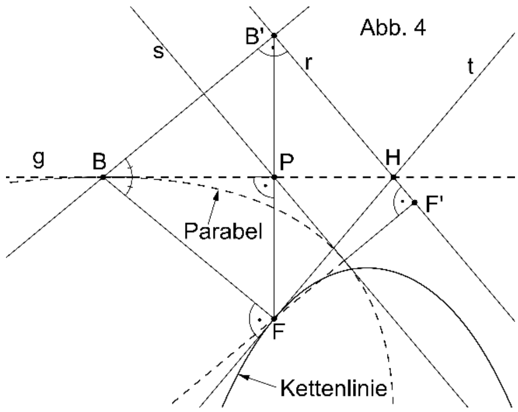


Abb. 4



Sei B der Berührpunkt der Parabel mit der Geraden g, B' der Lotfußpunkt des Lotes von B auf r und F' der Lotfußpunkt des Lotes von F auf r (siehe Abb. 4). Als Tangente an die Parabel ist g Winkelhalbierende von $\measuredangle FBB'$. Somit sind die Dreiecke FBP und $B'BP$ nach SWS kongruent und da $\measuredangle BPF$ und $\measuredangle B'PB$ rechte Winkel sind, ist P die Mitte von F und B‘. Damit liegt P auf s, denn s ist Mittenparallele im Dreieck $FF'B'$. Der Berührpunkt B von der Parabel und der Geraden g ist das momentane Drehzentrum der Rollbewegung der Parabel auf g. Daher ist t die Senkrechte zu FB durch F. Seien H_t bzw. H_r die Schnittpunkte von t und g bzw. r und g. Die Dreiecke BFH_t und $BB'H_r$ sind dann nach WSW kongruent. Also gilt $BH_t = BH_r$. Die Geraden t und r schneiden sich also in einem Punkt $H := H_t = H_r$ auf g. Die Dreiecke FHB und $B'HB$ sind kongruent. Daher ist der Winkel zwischen t und g gleich dem Winkel zwischen r und g, und da r und s parallel sind auch gleich dem Winkel zwischen s und g. Die Geraden s und t gehen also bei Spiegelung an der Mittelsenkrechten von FP ineinander über. Der Abstand von P zu t ist daher zu jedem Zeitpunkt während der Rollbewegung gleich dem Abstand von F zu s und folglich konstant.

Wackelrad und elliptische Kettenlinie

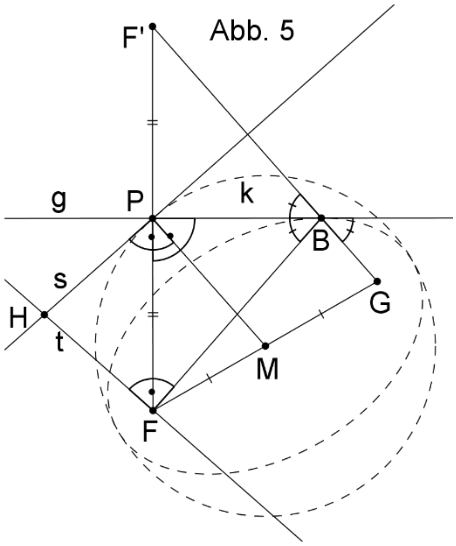
Wir rollen eine Ellipse mit den Brennpunkten F und G und der konstanten Abstandssumme $2a$ auf einer Geraden g ab. Der Brennpunkt F beschreibt dabei eine elliptische Kettenlinie, die wir im Folgenden nur die *Straßenkurve* nennen. Wir suchen die Form des Rads, dessen Achse P beim Rollen auf der Straßenkurve die Gerade g durchläuft.

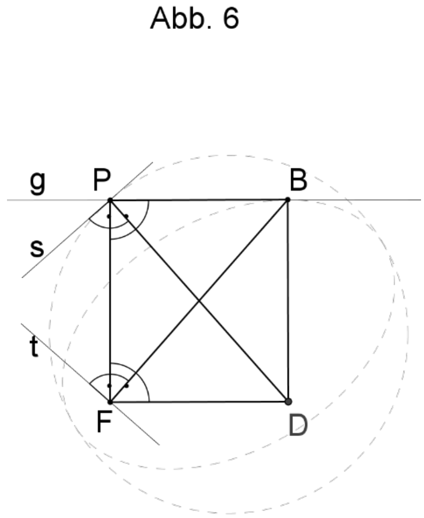
Angenommen das gesuchte Rad rollt so auf der Straßenkurve, während gleichzeitig die Ellipse auf der Geraden g rollt, dass der Berührpunkt von Straßenkurve und Rad stets mit dem Brennpunkt F der Ellipse zusammenfällt. Das momentane Drehzentrum der Rollbewegung des Rads auf der Straßenkurve ist dann bei F, sodass sich P senkrecht zu PF bewegen muss. Andererseits soll sich P entlang von g bewegen. Daher muss P der Lotfußpunkt des Lotes von F auf g sein. Die Achse P des gesuchten Rades liegt also, da g eine Tangente der Ellipse ist, auf der Fußpunktkurve k der Ellipse bezüglich ihres Brennpunkts F (siehe Abb. 5).

Sei B der Berührpunkt von g und der Ellipse und sei F' das Bild von F nach Spiegelung an g. Die Dreiecke MFP und GFF' sind dann wegen SWS ähnlich. Also gilt: $MP = ½\ GF'$. Da g Tangente an die Ellipse in B und also Außenwinkelhalbierende des Winkels $\angle FBG$ ist, liegt B auf GF'. Also gilt: $MP = ½\ GF' = ½\ (GB + BF) = ½\ (2a) = a$. Die Fußpunktkurve k ist folglich ein Kreis mit Radius a um die Mitte M von FG.

Sei s die Tangente an k in P und sei t die Tangente an die Straßenkurve in F und sei H der Schnittpunkt von s und t. Dann gilt: $\angle HPF = 90° - \angle FPM = \angle MPB = \angle F'BP = \angle PBF = 90° - \angle BFP = \angle PFH$. Damit ist auch der Winkel zwischen t und g gleich dem Winkel zwischen s und g.

Sei k^* das Bild von k nach Spiegelung an der Mittelsenkrechten von FP. Dann berührt k^* die Straßenkurve in F, da s durch Spiegelung an besagter Mittelsenkrechten auf t abgebildet wird. Während F die Straßenkurve durchläuft, bewegt sich k^* also ebenfalls entlang der Straßenkurve. Da sich F und k relativ zueinander nicht bewegen, gilt dies auch für ihre Spiegelbilder P und k^*. Wir können P also als einen Punkt auffassen, der fest an k^* montiert ist. Da sich P auf g und also senkrecht zu PF bewegt, ist F das momentane Drehzentrum der Bewegung von k^* entlang der Straßenkurve. Also rollt k* auf der Straßenkurve ab. Das gesuchte Rad ist also ein Kreis mit Radius a dessen Achse Abstand MF zum Mittelpunkt des Kreises hat. Mit anderen Worten: Es handelt sich um ein Wackelrad!





Nur ein Rechteck mit Diagonalen

Die Tatsache, dass es sich bei der Straßenkurve um die Rollkurve des Brennpunktes *F* einer Ellipse handelt, haben wir zur Bestimmung der Tangenten *s* an die Fußpunktkurve im Punkt *P* benutzt. Wir können die Tangente *s* jedoch auch ohne Rückgriff auf spezielle Eigenschaften der Ellipse konstruieren. Wir betrachten hierzu die Bewegung eines rechten Winkels mit Scheitel *P*, dessen einer Schenkel stets durch *F* verläuft und dessen anderer Schenkel entlang der Ellipse gleitet. Sei *B* der Berührpunkt des zweiten Schenkels mit der Ellipse zu einem bestimmten Zeitpunkt. Wo ist dann das momentane Drehzentrum *D* der Bewegung? Der Punkt des rechten Winkels, der im betrachteten Moment auf *B* liegt, bewegt sich in Richtung der Tangenten an die Ellipse, d.h. in Richtung *BP*. Das gesuchte momentane Drehzentrum *D* liegt also auf der Senkrechten zu *BP* durch *B*. Da der rechte Winkel während der Bewegung stets durch *F* verläuft, muss sich der Punkt des rechten Winkels, der im betrachteten Moment bei *F* liegt, in Richtung *FP* bewegen. Das momentane Drehzentrum *D* liegt also auch auf der Senkrechten zu *FP* durch *F*. Also ist *D* der Schnittpunkt der beiden Senkrechten (siehe Abb. 6). Nun können wir die Tangente *s* an die Fußpunktkurve im Punkt *P* konstruieren. Es ist die Senkrechte zu *DP* durch *P*. Da *s* und *t* senkrecht auf den Diagonalen *PD* und *FB* des Rechtecks *FDBP* stehen, schneiden sie die Gerade *BP*, d.h. *g*, im gleichen Winkel.

Wir haben damit folgendes bewiesen: Rollt man eine Kurve *c* auf einer Geraden *g* ab, so beschreibt ein an *c* fest montierter Punkt *F* eine Kurve, die wir als Straße auffassen wollen. Wir können die Fußpunktkurve von *c* bezüglich *F* so auf der Straße abrollen, dass der Pol *F* der Fußpunktkurve dabei die ursprüngliche Gerade *g* durchläuft.