Angelika BIKNER-AHSBAHS, Dirk THODE, Mareike BEST, Bremen

Funktionsverständnis im Übergang zur Sekundarstufe II

Das interdisziplinäre fachdidaktischen Forschungsprojekt FaBiT („fachbezogene Bildungsprozesse in Transformation“ (Creative Unit), interdisziplinäres fachdidaktisches Projekt, gefördert im Rahmen der Exzellenzinitiative, www.uni-bremen.de/cu-fabit) wendet sich der Frage zu, wie fachbezogene Bildungsprozesse sich verändern und wie Veränderungen im Fachunterricht gestaltet werden können. Eine Phase besonders starker Transformation für das Lernen von Mathematik ist die Übergangsphase von der Sekundarstufe I zur Sekundarstufe II. Dies zu gestalten, ist für Lehrkräfte dieser Einführungsphase umso schwieriger je heterogener die Lerngruppen sind. Besonders ausgeprägt ist die Heterogenität an Bremer Oberschulen. Transformationsprozesse in den E-Phasen Bremer Oberstufenzentren zu untersuchen, kann also als besonders erkenntnisreich gelten und soll deshalb als Forschungskontext für das Mathematikteilprojekt im FaBiT-Verbund dienen. Im Fokus steht dabei die Transformation des Funktionsverständnisses, weil der Funktionsbegriff für die Oberstufenmathematik als Kernbegriff angesehen werden kann. In der Sekundarstufe I gibt es keinen einheitlichen Funktionsbegriff, sondern viele Funktionsbegriffe, etwa den der linearen oder der quadratischen Funktionen. Lernende bringen also ein durch Funktionstypen geprägtes fragmentiertes Funktionsverständnis in die Einführungsphase mit. In der Sekundarstufe II sollten diese Funktionsverständnisse dann zusammengeführt werden, damit Funktionen verknüpft, in Parameterdarstellungen verwendet oder flexibel genutzt und neue erdacht werden können. Die zentrale Frage für das Mathematikteilprojekt ist, wie die Transformation des Funktionsverständnisses sich beim Übergang zur Sekundarstufe II vollzieht und wie dies sinnvoll gestaltet werden kann. Solche Transformationsprozesse sind in Lehr-Lern-Prozessen aber schwer zu beobachten, weil sie sich langsam und über einen langen Zeitraum vollziehen. Um sie beobachtbar zu machen, sollen sie im Feld simuliert werden. Dies soll über ein auf die beschriebene Transformation ausgerichtetes Unterrichtsdesign geschehen, das die geforderten Transformationsprozesse anbahnen soll, und zwar als einen Wandel des Konzeptverständnisses von einem fragmentierten zu einem integriert-flexiblen Funktionsbegriff. Genau dieser Transformationsprozess soll dann empirisch beforscht werden.

Theoretischer Rahmen und methodisches Vorgehen

Das Mathematikteilprojekt verbindet zwei Theorien: die Anthropologischen Theorie der Didaktik (ATD) (Bosch u. Gascón 2014) und kontextuelle Abstraktion (AiC) (Dreyfus et al. 2015). Der Kernbegriff der ATD kenn-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

zeichnet das institutionelle Handeln in Klassen durch so genannte Praxeologien. Diese bestehen aus typischen Aufgaben, Techniken zum Bearbeiten der Aufgaben, Theorien und Begründungsformen für die verwendeten Techniken, die Technologien. Wir gehen davon aus, dass typische Praxeologien der abgebenden Schulen zum Funktionsbegriff Spuren im Handeln der Lernenden hinterlassen und so zum Ausgangspunkt für die Transformation des Funktionsverständnisses in der E-Phase werden, aber auch den Entwicklungsrahmen vorbestimmen. Diese Spuren sollen als Handlungspraxen rekonstruiert werden. Ziel ist es, dass die angestrebten Transformationsprozesse diese Praxen aufgreifen, in individuelle Erkenntnis- und Konzeptbildungsprozesse im Kontext gestalteter Lehr-Lern-Prozesse hineinführen und das Funktionsverständnis flexibilisieren. Flexibilisierung allein führt aber noch nicht zu einem allgemeinen Funktionsverständnis. Sie kann aber die Separation der Funktionsbegriffe aufheben. Insbesondere gehen wir davon aus, dass Art und Grad der Flexibilisierung Richtung, Merkmale, aber auch Hindernisse der zu realisierenden Transformation aufzeigen.

Die zu untersuchenden Transformationsprozesse werden als epistemische Prozesse angesehen und sollen deshalb mit dem geschachtelten epistemischen Handlungsmodell (RBC+C-Modell) der AiC untersucht werden. Dieses Modell geht davon aus, dass durch Recognizing-Handlungen (R) vorausgegangene Konstrukte wiedererkannt werden und eine Basis für Erkenntnishandeln darstellen. Die erkannten Konstrukte können durch Building-with-Handlungen (B) zusammengebaut und durch Constructing-Handlungen (C) zur (Neu-)Konstruktion mathematischer Konzepte führen. Konsolidierung (+C) sichert und flexibilisiert die neuen Konstrukte.

Die Praxeologien der abgebenden Schulen werden durch Interviews mit Lehrkräften erschlossen, und zwar bzgl. ihres Unterrichts zu Funktionen unter Rückgriff auf das verwendete Schulbuch und die jeweiligen Schulcurricula in Bezug auf typische Aufgaben, deren Bearbeitungstechniken und deren Begründungsmuster sowie zum Theorieverständnis zum Funktionsbegriff. An den Gebrauchsspuren von Lernenden zum Umgang mit dem Funktionsbegriff soll das Design einer Unterrichtseinheit ansetzen und das Funktionsverständnis in Richtung auf ein flexibilisiertes Funktionsverständnis transformieren.

Eine Aufgabenserie soll die Untersuchung von funktionalen Zusammenhängen bei Formeln initiieren, etwa bei der Formel zum Kegelvolumen. Formeln sind interessant, weil sie Gebrauchscharakter haben. Sie sind konkret und werden normalerweise nicht mit Funktionen assoziiert, der Ansatz ist also neu für die Lernenden der E-Phase. Zugleich aber erlauben Formalen ein Anknüpfen an bekannte lineare und quadratische Funktionen und die vertrauten Darstellungsformen: algebraisch, grafisch, tabellarisch, geometrisch. Sie stellen also einen Rahmen zum Wiedererkennen vorausgegangener Konstrukte bereit. Funktionale Abhängigkeiten bei Formeln können nach Malle als „Abhängigkeiten […] mit Hilfe des Funktionsbegriffes präziser beschrieben werden.“ (Malle 1993, S. 79), aber auch in ihrer Bedeutung konkretisiert werden. Flexibilisierung wird erreicht durch Sichtwechsel auf unterschiedliche, voneinander abhängige Variablen.

Abbildung 1 zeigt einen Kegel und seine Volumenformel, die in unterschiedlicher Weise funktional betrachtet werden kann.

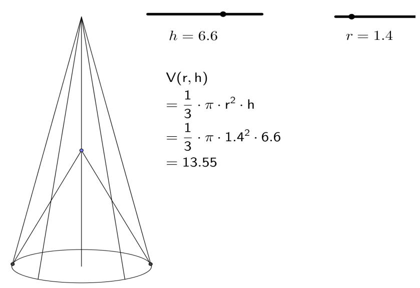

Abb. 1 Kegelvolumen

Zunächst betrachte man den kleinen Kegel im Bild, der durch Verdoppeln der Höhe h bei gleichem Radius r gestreckt wird. Wie verändert sich das Volumen? Erste geometrische Überlegungen können zeigen, dass sich das Volumen ebenfalls verdoppelt. Das ist aber nicht so unmittelbar sichtbar. Eine funktionale Betrachtung zeigt den proportionalen Zusammenhang $V(h) \sim h$ bei konstantem Radius r auf und vereinfacht und verallgemeinert die geometrischen Argumentationen. Setzt man die Höhe nun als 1 (LE) fest und fragt nach der Veränderung des Volumens bei Verdoppelung des Radius, dann führt eine funktionale Betrachtung sofort zu einer Lösung, eine geometrische Betrachtung aber nicht. Sind Radius und Höhe gleich lang, wächst das Volumen mit der dritten Potenz des Radius r. Auch das ist algebraisch unmittelbar einsichtig. Über Design Based Research soll ein Lehr-Lern-Arrangement von mindestens zwei Wochen in der eben beschriebenen Form entwickelt werden, das den Gebrauch von Funktionen flexibilisieren soll. Das kann gelingen, weil das gleiche algebraische Objekt durch Sichtwechsel das Wiedererkennen unterschiedlicher funktionaler Zusammenhänge ermöglicht und als Realisierung sich verändernder geometrischer Körper interpretiert werden kann. Ziel ist es, dass Lernende durch Perspektivwechsel lernen, dass man Funktionen in Objekte hineinsehen kann, indem man bestimmte Variable als unabhängig bzw. abhängig ansieht und deren Zusammenhang am selben Objekt untersucht. Erste Untersuchungen zu Aufgaben dieser Art decken zentrale Probleme mit dem Funktionskonzept und seinen Darstellungen auf. Dazu gehören etwa folgende Probleme: Das Übersetzen der funktionalen Zusammenhänge in eine grafische Darstellung kollidiert mit der geometrischen Form des Kegels; bei Spezifizierung der Formel durch h=1(LE) entstehen Irritationen, weil das Volumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2$ als Flächeninhalt interpretiert wird; das Fehlen der Buchstaben y und x verhindert das Hineinsehen und grafische Darstellen von funktionalen Zusammenhängen; der Kegel wird so in ein dreidimensionales Koordinatensystem gesetzt, dass die Höhe auf der y-Ache liegt und der Radius auf der x-Ache abgetragen wird: Es entsteht eine scheinbar vertraute Darstellung, die den Zusammenhang von Volumen und Höhe bzw. Radius überdeckt. Nach dem „conceptual blending"-Ansatz (Fouconnier & Turner 2003) können zwei getrennte Bereiche wie Geometrie und Funktionen nur schwer zusammengebracht werden, man benötigt ein so genanntes „generisches Modell", das beides bereits verbindet.

Wie sollen die Transformationsprozesse untersucht werden?

Das Lehr-Lern-Arrangement soll von einer Lehrperson durchgeführt und der Unterricht soll videographiert werden. In Klassengesprächen soll die gesamte Diskussion mitgeschnitten werden, in Gruppenarbeitsphasen die Aufgabenbearbeitungen von drei Schülerpaaren. Ausgewertet werden die Erkenntnisprozesse mit dem RBC+C-Modell. Als Ergebnisse sind Erkenntnisse darüber zu erwarten, was in welchen Ressourcen wiedererkannt wird, wie dies zur Realisierung von Sichtwechseln auf funktionale Zusammenhänge in denselben Formeln führt, welche Aspekte diese Flexibilisierung fördern oder behindern und in welcher Weise die Praxeologien des abgebenden Unterrichts diese Prozesse beschränken können.

Literatur

Bosch, M. & Gacòn, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, u. S. Prediger (Hrsg.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (S. 67-83), Advances in Mathematics Education. New York: Springer.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context. Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative methods in mathematics education – examples of methodology and methods* (S. 185-217) , Advances in Mathematics education. New York: Springer.

Fouconnier, G. & Turner, M.(2003). Conceptual blending. Recherches en communicatio 19, 57-86.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.