

Karin BINDER, Stefan KRAUSS, Georg BRUCKMAIER, Regensburg

Welche Visualisierung unterstützt Bayesianisches Denken?

Die Formel von Bayes hat innerhalb der Stochastik eine große Bedeutung. Auch wenn sie in manchen Bundesländern nicht mehr explizit im Lehrplan aufgeführt ist, werden in der gymnasialen Oberstufe nach wie vor Bayesianische Aufgaben mithilfe von Visualisierungen gelöst – mit oder ohne explizitem Rückgriff auf die Formel von Bayes. Das Lösen Bayesianischer Aufgabenstellungen ist jedoch für Schülerinnen und Schüler oftmals sehr schwierig. Selbst Ärzte (Gigerenzer, 2013) oder Juristen (Krauss & Bruckmaier, 2014) unterliegen bei der Bearbeitung derartiger Aufgaben kognitiven Illusionen, die zu teils dramatischen Fehlurteilen führen können. Im vorliegenden Beitrag werden wir darlegen, inwiefern Visualisierungen helfen können, diesen kognitiven Illusionen entgegenzuwirken.

Visualisierungen und natürliche Häufigkeiten

Im Stochastikunterricht werden Schülerinnen und Schüler bereits früh mit Visualisierungen konfrontiert, deren Verwendung ihnen das Lösen von Wahrscheinlichkeits- und Anteilswertaufgaben (später auch Bayesianischen Aufgaben) erleichtern soll. Empirische Untersuchungen zeigen, dass manche Visualisierungen, wie beispielsweise Rasterdiagramme (Garcia-Retamero & Hoffrage, 2013) oder ikonische Darstellungen (Brase, 2014), Menschen unterstützen können, bei Bayesianischen Aufgaben die korrekte Lösung zu finden. Andere Visualisierungen wie zum Beispiel Eulerdiagramme bewirken hingegen keine Erhöhung der Lösungsrate (Micallef, Dragicevic & Fekete, 2012). Im Stochastikunterricht sind die gängigsten Visualisierungen zur Lösung Bayesianischer Aufgaben Vierfeldertafeln und Baumdiagramme. Daher stellt sich für den schulischen Kontext die Frage: *Inwiefern erhöht die zusätzliche Darbietung einer Vierfeldertafel oder eines Baumdiagramms die Lösungsrate bei Bayesianischen Aufgaben im Vergleich zu einer reinen Textvariante (Fragestellung 1)?*

Gigerenzer und Hoffrage (1995) konnten zeigen, dass bei Bayesianischen Aufgaben eine Übersetzung gegebener Wahrscheinlichkeiten (z. B. 80%) in natürliche Häufigkeiten (z. B. 8 von 10) Menschen dabei unterstützt, die korrekte Lösung zu finden. Allerdings beinhalten die Visualisierungen im Stochastikunterricht häufig Wahrscheinlichkeiten. Eine zweite Frage lautet daher: *Inwiefern hat das Format der statistischen Information (Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten) in der Visualisierung einen Einfluss auf die Lösungsrate bei Bayesianischen Aufgaben (Fragestellung 2)?*

Methode

Nachfolgende Tabelle illustriert zwei der zwölf getesteten Bayesianischen Aufgabenversionen (Kontext: Brustkrebsfrüherkennung; Visualisierung: Baumdiagramm; Formate: Wahrscheinlichkeiten vs. nat. Häufigkeiten).

Tabelle 1: Beispiel einer Bayesianischen Aufgabe in beiden Formaten

	Wahrscheinlichkeiten	Natürliche Häufigkeiten
Einleitung	<p>Stellen Sie sich bitte vor, Sie sind Reporter/Reporterin einer Frauenzeitschrift und möchten einen Artikel über Brustkrebs schreiben. Sie recherchieren auch darüber, was von den Tests zu halten ist, die im Rahmen von Routineuntersuchungen eingesetzt werden, um Brustkrebs zu entdecken. Ihr besonderes Interesse gilt der Frage, was es bedeutet, wenn eine Frau bei einem solchen Test ein positives Ergebnis (welches Brustkrebs anzeigt) erhält.</p> <p>Ein Arzt erklärt Ihnen die Situation anhand folgender Daten:</p>	
Aufgabentext	<ul style="list-style-type: none"> Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt 1 %. Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält, 80 %. Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie dennoch ein positives Testergebnis erhält, 9,6 %. 	<ul style="list-style-type: none"> 100 von 10.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs. Von 100 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten 80 ein positives Testergebnis. Von 9.900 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten 950 dennoch ein positives Testergebnis.
Visualisierung	<p>A tree diagram starting with 'Frauen' at the top. It branches into 'Brustkrebs' (1%) and 'kein Brustkrebs' (99%). From 'Brustkrebs', it branches into 'Test positiv' (80%) and 'Test negativ' (20%). From 'kein Brustkrebs', it branches into 'Test positiv' (9,6%) and 'Test negativ' (90,4%).</p>	<p>A tree diagram starting with '10.000 Frauen' at the top. It branches into '100 Brustkrebs' and '9.900 kein Brustkrebs'. From '100 Brustkrebs', it branches into '80 Test positiv' and '20 Test negativ'. From '9.900 kein Brustkrebs', it branches into '950 Test positiv' and '8.950 Test negativ'.</p>
Frage	<p>Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Testergebnis erhält?</p> <p>Antwort: ____ %</p>	<p>Wie viele Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und ein positives Testergebnis erhalten, haben Brustkrebs?</p> <p>Antwort: ____ von ____</p>

In unserer Untersuchung bearbeiteten 259 Schülerinnen und Schüler der 11. Jahrgangsstufe des Gymnasiums je zwei Bayesianische Aufgaben, die sich im Aufgabenkontext (Brustkrebsfrüherkennung vs. Berufswahlentscheidung), im Informationsformat (Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten) und in der Visualisierung (keine Visualisierung vs. Vierfeldertafel vs. Baumdiagramm) unterschieden. Tabelle 1 zeigt die dargebotene Aufgabenstellung zum Kontext Brustkrebsfrüherkennung in den beiden Informationsformaten (Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten). Dabei wird deutlich, dass die Visualisierung „Baumdiagramm“ sowohl im Wahrscheinlichkeitsformat als auch im Häufigkeitsformat möglich ist. Entsprechend gab es diese Aufgabe auch ohne Visualisierung bzw. mit einer Vierfeldertafel (die sich ebenfalls mit Wahrscheinlichkeiten oder mit natürlichen Häufigkeiten ausfüllen lässt). Außerdem bearbeitete jeder Schüler eine weitere Aufgabe zum Kontext „Berufswahlentscheidung“ (mit dem jeweils anderen Format und einer anderen Visualisierung).

Ergebnisse

Zentrales Ergebnis der vorliegenden Untersuchung ist der Interaktionseffekt zwischen Informationsformat und Art der Visualisierung (vgl. Abb. 1).

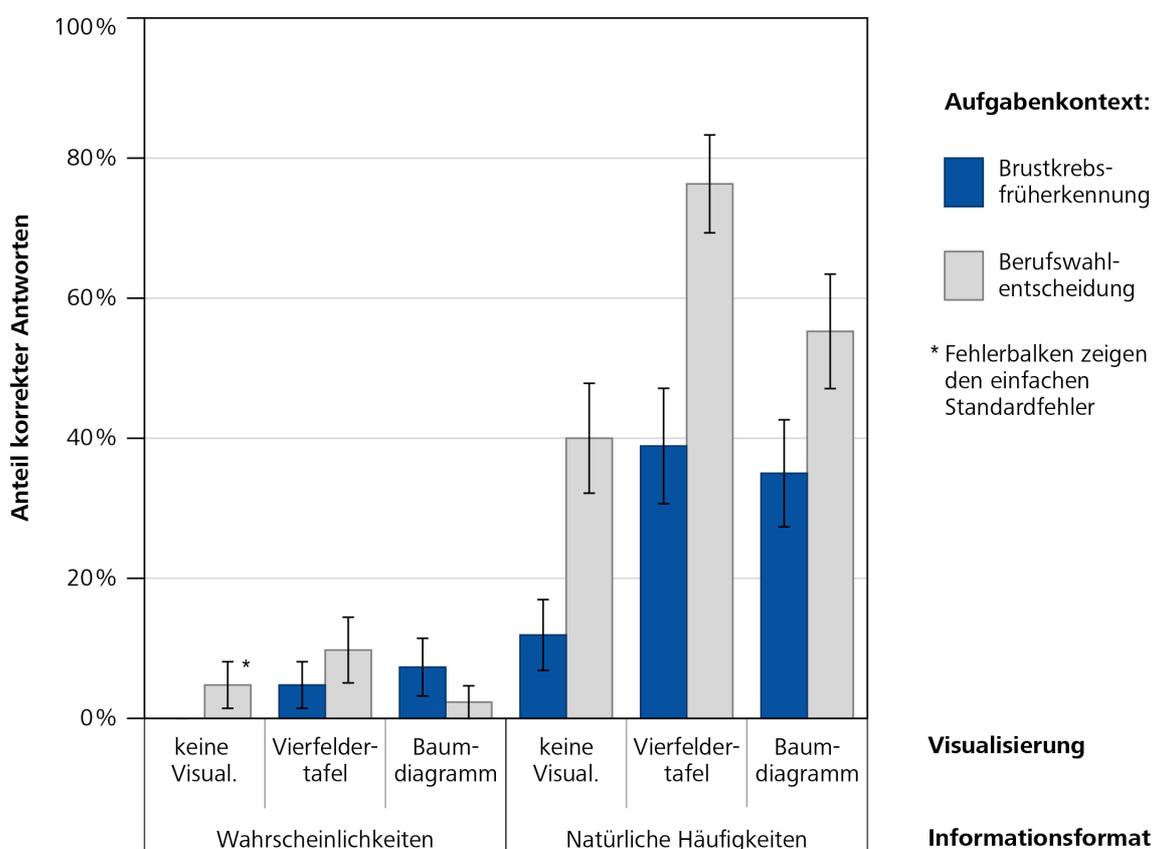


Abbildung 1: Lösungsraten der zwölf verschiedenen Aufgabenversionen

Aus der Abbildung wird deutlich, dass nur Visualisierungen mit natürlichen Häufigkeiten Bayesianisches Denken unterstützen. Interessanterweise zeigt sich bei den beiden in der Schule sehr häufig verwendeten Visualisierungen (Vierfeldertafel und Baumdiagramm, jeweils mit Wahrscheinlichkeiten) keine entscheidende Erhöhung der Lösungsrate.

Weitere Details zur Studie, sowie einen vollständigen Überblick über die Instrumente, inferenzstatistische Analysen der Ergebnisse sowie eine Diskussion des großen Einflusses des Aufgabenkontexts, finden sich in Binder, Krauss und Bruckmaier (eingereicht).

Diskussion

Im schulischen Stochastikunterricht sollen Schüler verschiedene Darstellungsarten statistischer Informationen kennenlernen und ineinander umrechnen können (Bruckmaier, Binder & Krauss, im Druck). Die zusätzliche Darbietung von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln scheint ein geeignetes Instrument darzustellen, um kognitiven Illusionen bei Bayesianischen Aufgaben entgegenzuwirken – allerdings nur, wenn diese Visualisierungen mit natürlichen Häufigkeiten versehen sind.

Literatur

- Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (eingereicht). Visual representation improves Bayesian reasoning. *Frontiers in psychology*, 6.
- Brase, G. L. (2014). The power of representation and interpretation: Doubling statistical reasoning performance with icons and frequentist interpretations of ambiguous numbers. *Journal of Cognitive Psychology*, 26(1), 81–97.
- Bruckmaier, G., Binder, K. & Krauss, S. (im Druck). Warum sich Wahrscheinlichkeiten und Prozentangaben oft unserer Intuition widersetzen – und was man dagegen tun kann. In E.-M. Plackner & D. Wörner (Hrsg.), *Daten und Zufall. MaMut – Materialien für den Mathematikunterricht*, Band 3. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.
- Garcia-Retamero, R. & Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patients. *Social Science & Medicine*, 83, 27–33.
- Gigerenzer, G. (2013). HIV screening: helping clinicians make sense of test results to patients. *BMJ*, 347, 1–2.
- Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102(4), 684–704.
- Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2014). Eignet sich die Formel von Bayes für Gerichtsverfahren? In U. Sproesser, S. Wessolowski & C. Wörn (Hrsg.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt. Didaktische Perspektiven zur anwendungsbezogenen Mathematik* (S. 123–132). Wiesbaden: Springer.
- Micallef, L., Dragicevic, P. & Fekete, J.-D. (2012). Assessing the effect of visualizations on Bayesian reasoning through crowdsourcing. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 18(12), 2536–2545.