Katharina BÖCHERER-LINDER, Freiburg, Andreas EICHLER, Kassel

Vergleich konkurrierender Visualisierungen zum Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten

Hintergrund

In den 70er und 80er-Jahren erforschten Kahneman und Tversky, wie gut Menschen bedingte Wahrscheinlichkeiten schätzen können. Dabei fanden sie, dass Menschen allgemein keine gute Intuition für bedingte Wahrscheinlichkeiten haben und dass häufig ein Grund dafür ist, dass die Basisrate vernachlässigt wird (z.B. Kahneman & Tversky, 1972).

Forschungen von Gigerenzer und Hoffrage ergaben ebenfalls bei Fachleuten (z.B. Ärzte oder Juristen) eine hohe Fehlerquote. Sie konnten aber auch zeigen, dass die Ergebnisse deutlich verbessert werden können, wenn die Information nicht mit Wahrscheinlichkeiten sondern in der Form von natürlichen Häufigkeiten präsentiert wird (Gigerenzer & Hoffrage, 1995). Dieses Konzept zeigte auch auf Schulebene Erfolge (Wassner, 2004).

Nicht nur die Form der Information, sondern auch deren grafische Repräsentation scheint einen Einfluss auf das Verständnis von Lernenden zu bedingten Wahrscheinlichkeiten zu haben, wie etwa Sedlmeier und Gigerenzer (2001) mit dem Baum mit natürlichen Häufigkeiten und Bea (1995) mit dem Einheitsquadrat nachgewiesen haben. Ziel unserer Studie ist der Vergleich der Wirksamkeit von Baum mit natürlichen Häufigkeiten und dem Einheitsquadrat und dabei eine Spezifizierung auf das geförderte Wissen. In diesem Beitrag wird dazu eine Teilstudie zur Wirksamkeit beider grafischen Darstellungen beschrieben.

Gestaltung der Visualisierungen

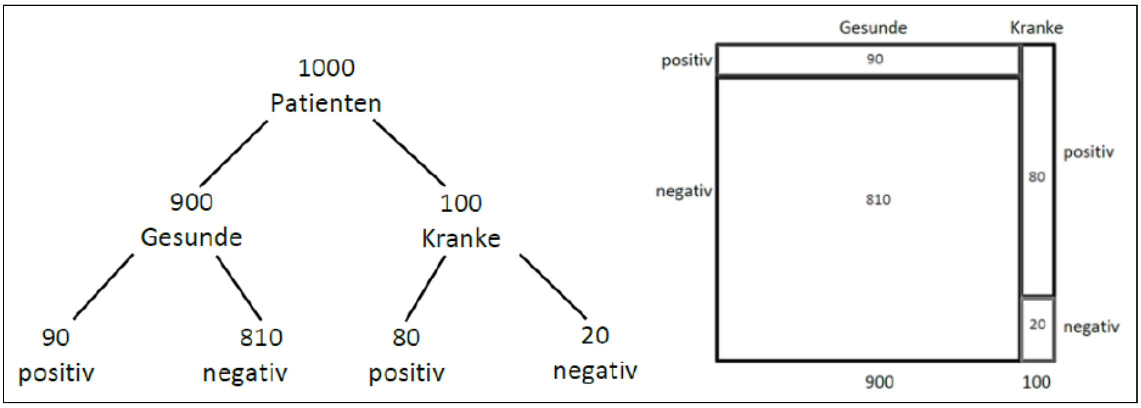

Abbildung 1: Beispiel für das Baumdiagramm und das Einheitsquadrat mit absoluten Häufigkeiten

In beiden Visualisierungen können die gleiche Information mit dem Konzept der natürlichen Häufigkeiten repräsentiert werden. Andererseits haben

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

die Visualisierungen sehr unterschiedliche Eigenschaften: Das Baumdiagramm hat eine sequenzielle und hierarchische Struktur und ist den meisten Menschen vertraut. Das Einheitsquadrat hingegen ist eine statistische Graphik, da die Datenmengen durch die Größe der Flächeninhalte dargestellt sind (vgl. Eichler & Vogel, 2010). Etwa ist im Baum die Wahrscheinlichkeit für „krank" und „positiv" in einem Pfad repräsentiert, im Einheitsquadrat dagegen durch eine Fläche. Bezogen auf das Lernen von Stochastik ist unseres Wissens insbesondere das Baumdiagramm bekannt, während sich das Einheitsquadrat noch wenig durchgesetzt hat.

Forschungsfragen und Hypothesen

Während sich unser Forschungsprojekt insgesamt mit der Wirkung von Baumdiagramm und Einheitsquadrat auf den Wissenserwerb im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten beschäftigt, berichten wir hier von einem Teil einer Fragebogenstudie hinsichtlich der Wirkungsweise der Diagramme beim Auslesen von Information. Hierfür wählten wir die Bereiche *read the data*, *read between the data* und *read beyond the data*. Diese Kategorien stammen von Curcio (1989).

Für die ersten beiden Bereiche hatten wir die Hypothese (H1), dass beim Auslesen einzelner und zusammengesetzter Information beide Diagramme gleich gut geeignet sind. Dies begründeten wir damit, dass bei beiden Diagrammen das Konzept der natürlichen Häufigkeiten umgesetzt wurde.

Für den Bereich *read beyond the data* interessierten uns Fragen, die sich auf die Veränderung der Basisrate beziehen. Hier vermuteten wir, dass sich das Einheitsquadrat günstiger auswirkt (H2). Wir begründeten dies damit, dass man am Einheitsquadrat die Veränderung der Basisrate anschaulich darstellen kann, indem man die Veränderung der entsprechenden Flächeninhalte betrachtet.

Die Fragebogenstudie

Befragt wurden 78 Lehramtsstudenten für Mathematik an der Universität Kassel. Davon erhielten 42 den Fragebogen mit dem Baumdiagramm und 36 den Fragebogen mit dem Einheitsquadrat.

Die Fragebögen waren dabei so konzipiert, dass die Testitems identisch waren, einzig die Diagramme, die die Information präsentierten, waren verschieden. Pro Bereich gab es jeweils zwei strukturgleiche Testaufgaben mit jeweils fünf Teilfragen. Sämtliche Testaufgaben waren in der Sprache der absoluten Häufigkeiten verfasst.

Für den Bereich *read beyond the data* wurde gefragt, wie sich verschiedene Anteile, z.B. der Kranken unter den positiv Getesteten, verändern, wenn der Anteil der Kranken in der gesamten Stichprobe größer wird. Die nötige Information hierfür wurde dabei durch die Diagramme von Abbildung 1 gegeben.

Beiden Fragebögen war jeweils eine Seite mit einem einführenden Beispiel, mit dem die verwendete Visualisierung erklärt wurde, vorgeschaltet. Beide Erklärungen waren dabei bestmöglich parallelisiert.

Ergebnisse und neue Hypothesen

Für die Bereiche *read the data* und *read between the data* ergab sich kein systematischer Unterschied zwischen den Diagrammen. Das ist ein wichtiges und erwünschtes Ergebnis für alle weiteren Untersuchungen, da bei diesen nun gesichert ist, dass Unterschiede bei der Verwendung beider Visualisierungsarten nicht dadurch zustande kommen, dass das Auslesen von Daten unterschiedliche Schwierigkeitsgrade umfasst.

Für den Bereich *read beyond the data* erreichte das Einheitsquadrat summiert über alle Teilaufgaben einen leicht erhöhten Mittelwert von 6,11 von 10 Punkten gegenüber dem Baumdiagramm von 5,79. Allerdings zeigten die Daten, dass mal das Baumdiagramm deutlich überlegen war und mal das Einheitsquadrat, so dass wir in einer explorativen Phase unsere Eingangshypothese (H2) verfeinerten.

Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten in Vorwärtsrichtung, z.B. p(pos|krank), vermuten wir nun, dass das Baumdiagramm überlegen ist aufgrund seiner sequenziellen und hierarchischen Struktur. Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten in Rückwärtsrichtung, z.B. p(krank|pos), halten wir das Einheitsquadrat für überlegen, da sich die Grundgesamtheit für den Rückschluss (hier alle positiv Getesteten) besser erfassen lässt. Bezüglich dieser beiden neuen Hypothesen ordneten wir die Daten neu mit folgendem Ergebnis:

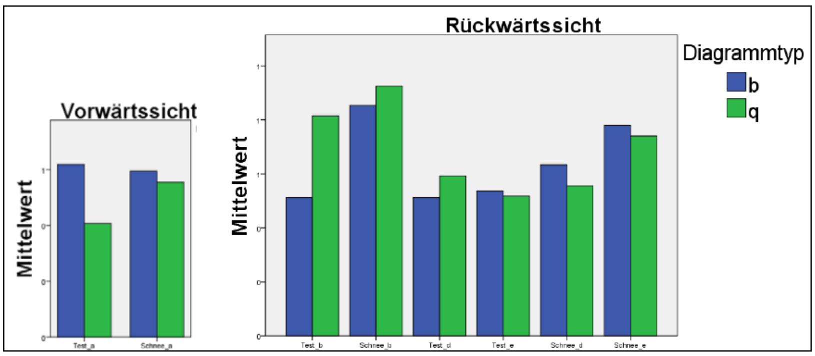

Abbildung 2: Teilergebnisse zum Bereich read beyond the data

Bei der Vorwärtssicht ergab sich für den Unterschied der summierten Items ein p-Wert von 0,096 und bei der Rückwärtssicht von 0,211. Einzelne Items, wie z.B. das erste Item der Rückwärtssicht, zeigten aber deutlich bessere p-Werte, z.B. $p_{Test\_b} = 0{,}009$.

Ausblick

Wir arbeiten an einer Weiterentwicklung des Fragebogens, um die beiden neuen Hypothesen betreffend die Vorwärts – und Rückwärtssicht zu überprüfen. Hierfür werden weitere strukturgleiche Aufgaben für den Bereich *read beyond the data* entwickelt.

Geplant ist außerdem eine Interventionsstudie mit Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 10 am Gymnasium. Hier soll die Wirkung der beiden Diagramme auf den Wissenserwerb untersucht werden, insbesondere die Wirkung auf das prozedurale und konzeptuelle Wissen nach einer gewissen Trainingsphase.

Literatur

Bea, W. (1995). *Stochastisches Denken*. Peter Lang: Frankfurt a.M.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Eichler, A. & Vogel, M. (2010). Die (Bild-)Formel von Bayes. PM - Praxis der Mathematik in der Schule, 52(32), S. 25-30.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. *Psychological Review, 102, 4*, 684-704.

Kahnemann, D. & Tversky, A. (1972). Subjective Probability: A judgement of representativeness. *Cognitive Psychology* 3, S. 430-454.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian Reasoning in Less Than Two Hours. *Journal of Experimental Psychology: General, 130, 3*, 380-400.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens. Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen*. Hildesheim: Franzbecker.