Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Variationen zum 'Rätsel der Woche' aus Spiegel online

Anfang Dezember 2014 erschien im Spiegel online eine Mathematik-Aufgabe als ‚Rätsel der Woche', die schnell die Runde machte. Dies möchte ich zum Anlass nehmen, zu untersuchen, wie man diese Aufgabe variieren und für den Mathematikunterricht nutzen kann.

1. Die originale Aufgabe

In einen Halbkreis sind zwei Strecken eingezeichnet.
Die eine liegt auf dem Durchmesser und hat die Länge 5 Zentimeter (rot). Die andere steht senkrecht darauf und ist 15 Zentimeter lang (blau).
Wie groß ist der Radius des Halbkreises?

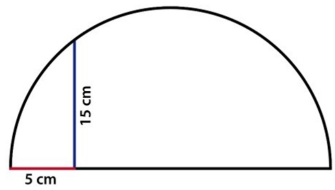

Abb. 1 Aufgabenstellung in Spiegel online

Eigentlich haben wir eine normale Mathematikaufgabe vorliegen. Für etwas mathematikfernere Menschen erscheint es vielleicht deshalb als ‚Rätsel', weil aus der Figur zunächst nicht erkennbar ist, was die beiden Strecken mit dem gesuchten Radius zu tun haben könnten.

Schaut man sich die in Spiegel online vorgestellte und weitere Lösungen im Internet an, so stellt man fest, dass diese üblicherweise einen statischen Ansatz mit einer Planfigur und Variablen verfolgen, bei dem dann noch auf einen geeigneten geometrischen Satz zurückgegriffen wird.

2. Statische Lösungen

Zunächst möchte ich kurz die gängigen algebraisch ausgerichteten Lösungen vorstellen.

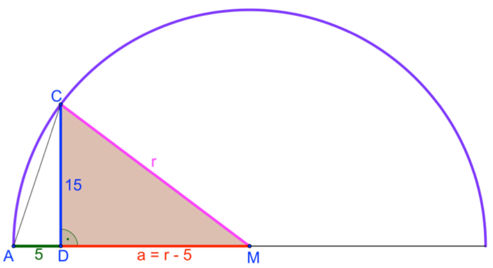

Abb. 2 Satz des Pythagoras im Dreieck CDM. r = 25.

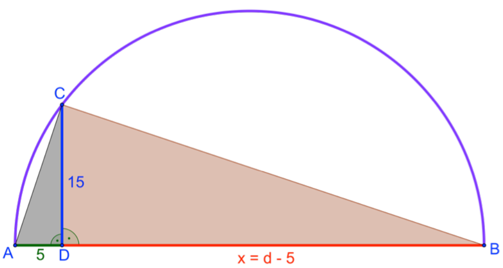

Abb. 3 Satz des Thales, Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und CDM. d = 50.

Die Lösungen in Abb. 2 – 4 arbeiten mit einer Planfigur, der Variablen r bzw. dem Satz des Pythagoras, Höhensatz oder Ähnlichkeitsätzen und der

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Lösung einer Gleichung, die dann als Ergebnis den Radius r bzw. den Durchmesser d liefert.

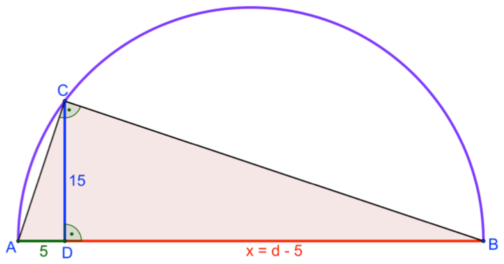

Abb. 4 Satz des Thales, Höhensatz im Dreieck ABC. d = 50.

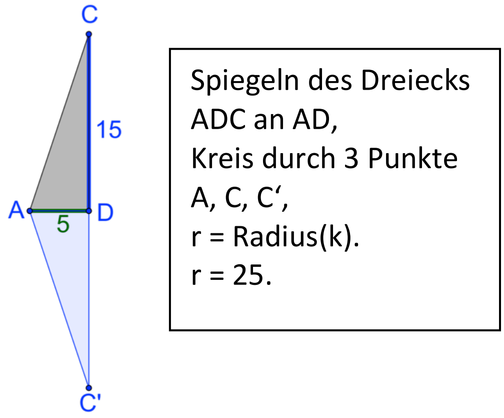

Abb. 5 GeoGebra-Tools

3. Lösung mit GeoGebra-Werkzeugen

Eine völlig andere Herangehensweise ist in Abb. 5 zu sehen, die aber auch weitgehend statisch bleibt. Durch den Einsatz von mächtigen GeoGebra-Werkzeugen als Black Box (Achsenspiegelung, Kreis durch 3 Punkte, Radius eines Kreises) wird der gesuchte Radius ermittelt.

4. Eine typische Problemlösestrategie

Allen vier Ansätzen ist gemeinsam, dass man die Lösung straight forward ermitteln kann - wenn man es halt kann. Die ersten drei algebraischen Lösungen dürften insbesondere mathematisch geschulten Menschen (Mathematiklehrern) geläufig sein. Es bleibt aber das Problem, dass man entweder weiß, wie man die Aufgabe angehen muss, oder aber keinen Zugang hat. Für mich stellten sich daher zwei Fragen:
- Wie kommt man zu *geometrischen, konstruktiven* Lösungen?
- Wie kann man eine *Lösungsidee finden*, wenn man zunächst keine hat?

Als erstes ist es sicher sinnvoll, in der Planfigur Punkte und Strecken zu benennen (A, B, C, Lotfußpunkt D, Radius r bzw. Durchmesser d). Dann stellt man fest, dass man nicht nur den Radius sucht, sondern damit auch den Kreis k. Man stellt dabei fest, dass man den Eckpunkt B nicht kennt und erst einmal die Strecke AD zu einem Strahl AD verlängern muss.

> „Wenn du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. [...] Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst du etwas Förderliches aus den Daten ableiten?“ (Polya 1949, erste Innenseite)

Wir haben so drei Bedingungen: der Kreis muss durch A und C verlaufen und der Kreismittelpunkt muss irgendwo auf dem Strahl AD liegen.

Eine typische heuristische Strategie besteht darin, *eine* der Bedingungen wegzulassen, auch (n-1)-Strategie genannt. Hier haben wir die drei Bedingungen: Kreis durch A, Kreis durch C und Kreismittelpunkt M auf AD.

Daraus ergibt sich durch Weglassen einer der Bedingungen:
- Kreis durch A und C
- Kreis durch A um M auf AD
- Kreis durch C um M auf AD.

Kreise mit diesen Bedingungen sind leicht zu finden.

5. Dynamisierung I

Alle Kreise durch A und C müssen ihren Mittelpunkt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke AC haben. Konstruiert man diese Mittelsenkrechte, einen Punkt M auf ihr und einen Kreis um M durch A (der zwangsläufig auch durch C geht), so entdeckt man im Zugmodus schnell, dass die dritte Bedingung (M auf AD) auch erfüllt werden kann und das gesuchte M im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit AD liegen muss. Damit ist die Lösungsidee gefunden und es kann der gesuchte Kreis konstruiert und sein Radius gemessen werden.

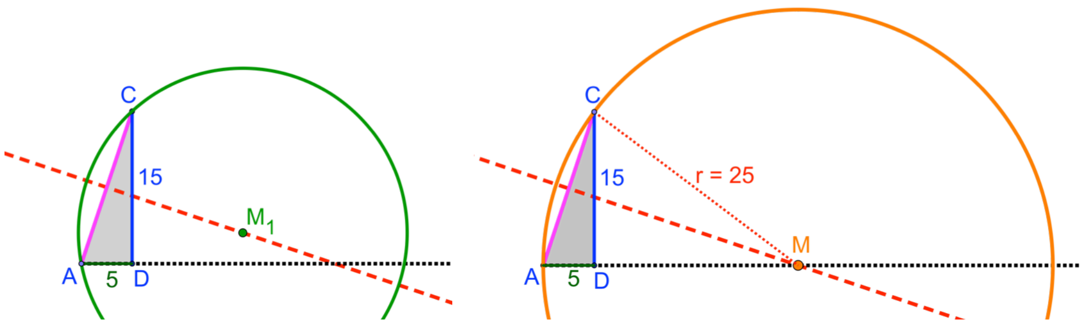

Abb. 6a, b Dynamisierung I: Kreis durch zwei Punkte

Dieser Weg ist für Schüler sicher leicht gangbar, ggf. brauchen sie beim Ansatz eine Anleitung oder ein geeignetes Arbeitsblatt.

6. Dynamisierung II

Konstruiert man Kreise um einen Punkt M auf AD durch A, so erkennt man im Zugmodus schnell, dass auch die dritte Bedingung (durch C) erfüllt werden kann. Nicht so einsichtig ist aber, wie man zu einer *Idee für die*

Konstruktion der Lösungsfigur kommt. Hier ist wieder ein Blick in die Schule des Denkens von Polya hilfreich.

> „Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein! [...]
> Kennst du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? [...]
> ... würdest du irgendein Hilfselement einführen?“
> (Polya 1949, erste Innenseite)

Damit könnte man z.B. auf die Idee kommen, den Schnittpunkt des Kreises mit AD zu konstruieren und als Ecke B eines Dreiecks ABC zu sehen. Bei Kreis und Dreieck denkt man vielleicht an den Satz des Thales bzw. den Umfangswinkelsatz und betrachtet deswegen noch den Winkel bei C.

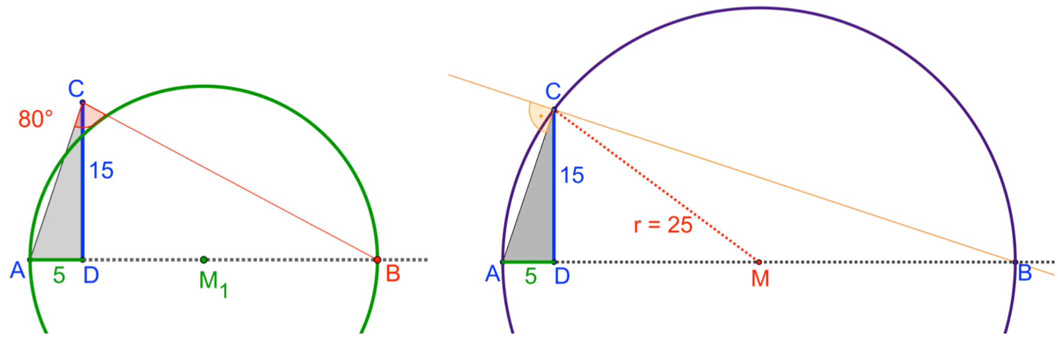

Abb. 7a, b Dynamisierung II: Kreis um M auf AD durch A

Variiert man nun diese Konstruktion im Zugmodus, so entdeckt man, dass der gesuchte Kreis dann vorliegt, wenn bei C ein rechter Winkel ist. Dann ist der Kreis Thaleskreis über AB. So erhalten wir eine Idee zur Konstruktion der Lösungsfigur: Die Senkrechte zu AC durch C schneidet den Strahl AD in einem Punkt B und der Mittelpunkt von AB ist der gesuchte Kreismittelpunkt. Damit kann nun der gesuchte Kreis konstruiert werden und sein Radius gemessen werden. Die dritte Dynamisierungsvariante (Kreis um M durch C) verläuft analog und wird daher hier nicht weiter ausgeführt.

7. Fazit

Die (n-1)-Strategie hat es ermöglicht, von der starren Planfigur abzugehen, die Figur im Zugmodus zu dynamisieren und dabei Ideen für eine geometrische, konstruktive Lösung des Problems zu entdecken.

Literatur

Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Francke Verlag, Bern

Spiegel online: Rätsel der Woche: Das Kreuz mit dem Kreis. www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/raetsel-der-woche-kreis-unbekannter-groesse-a-1005539.html. Zugriff am 4.12.2014