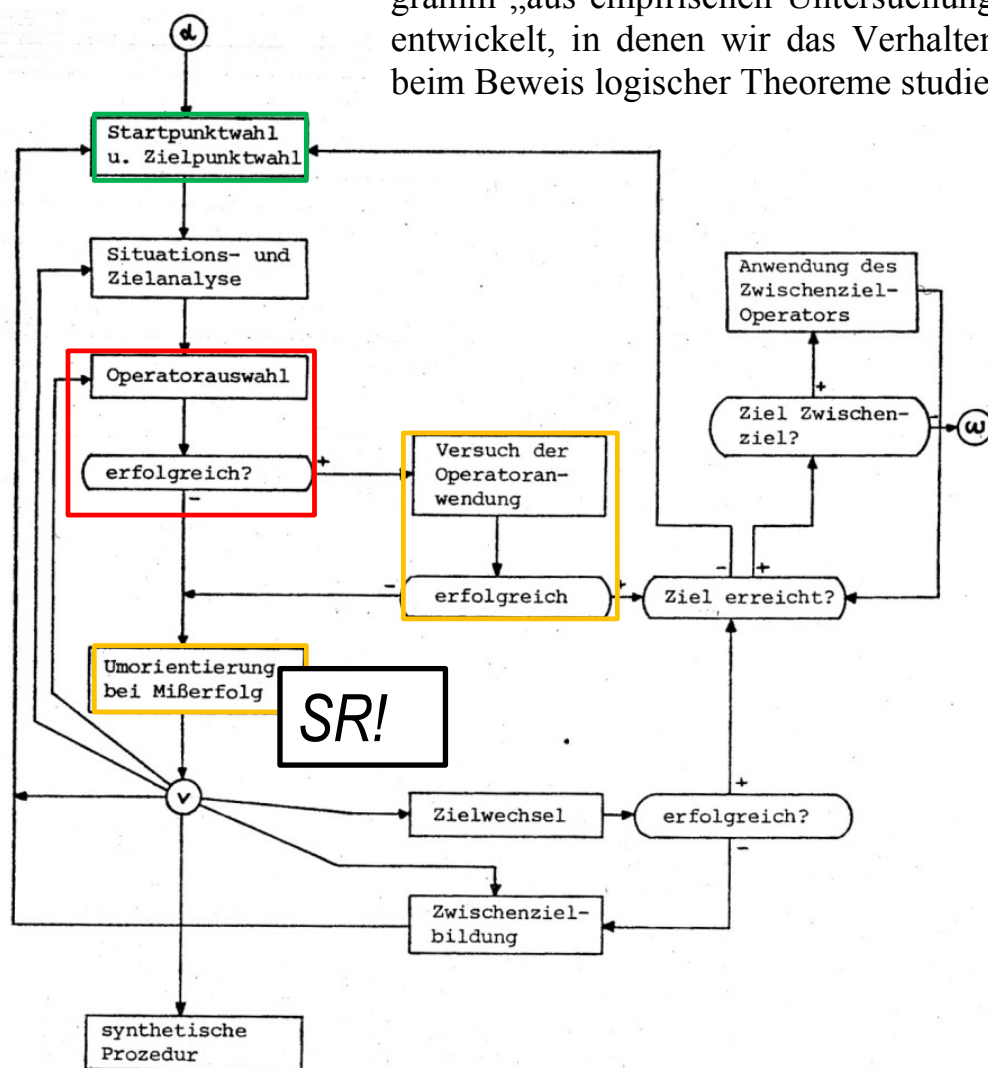


Pólya, König, Dörner - vom Nutzen Heuristischer Programme

Ein **Heuristisches Programm** ist eine deskriptive oder präskriptive Folge von Handlungsanweisungen zum Problemlösen. Es besteht aus **Heurismen** (Einsatz bestimmter heuristischer Strategien, Prinzipien und Hilfsmittel) und **Kontrollanweisungen** (Sprünge, Schleifen und bedingte Anweisungen) zur Ablaufsteuerung und kann durch ein Flussdiagramm dargestellt werden, wie Königs präskriptives Programm (s. Abb. 1, Sektionstext). Es geht zurück auf die bekannte „Tabelle von Denkoperationen“ aus Pólya 1949(S.0f). Diese Tabelle lässt sich auch selbst als präskriptives Programm interpretieren: Die Gliederung ist ein Ablaufplan zum Aufgabenlösen, das „Kleingedruckte“ für den Umgang mit Problemen. Offen bleibt indes die Frage nach einer Kontrollstruktur, so dass in der Literatur sogar ein linearer Durchlauf diskutiert wird. Dörner (1976, 73) hat ein deskriptives Programm „aus empirischen Untersuchungen heraus entwickelt, in denen wir das Verhalten der Vpn beim Beweis logischer Theoreme studierten.“



Auf den ersten Blick hat es mit den präskriptiven Programmen wenig gemein. Wir prüfen den Nutzen dieser drei Programme ausschnittshaft an:

- Wie generiert man einen Lösungsweg bei einer Aufgabe?
- Wie gut ist eine Bearbeitung bei einer Aufgabe beschreibbar?

Die TIMMS-Aufgabe K10 fragt nach der Größe des Winkels $\mu = \angle AMB$, wobei ABC ein Thalesdreieck ist und M sein Inkreismitelpunkt. Wie in der Vorjahressektion gezeigt, stoßen SuS beim Bearbeiten häufig auf die α - β -Barriere: μ ist per Innenwinkelsumme (IWS) aus α und β berechenbar, aber diese sind variabel. Die Abbildung zeigt, wie ein Schüler auf diese Barriere stößt – und wie er sie mit den Heuristiken von Pólya oder König überwinden könnte: Durch TR (*Transformationsprinzip*) könnte er die IWS als Gleichung statt als Rechenausdruck sehen: Dann muss man α und β nicht ausrechnen, sondern kann mit ihnen rechnen – und kommt mit den Heuristiken GL (*Gleichungen einführen*) und RÜ (*Rückführungsprinzip*, hier: Mittels Einsetzen zwei Gleichungen auf eine reduzieren) zum gewünschten Ergebnis. Allerdings nutzen viele SuS diese Möglichkeiten nicht, auch wenn sie nach Behandlung des Themas LGS auf der Hand zu liegen scheint. Dies unterstreicht die Wichtigkeit der *Selbstregulation* (SR) – was bieten die Programme diesbezüglich? Bei Königs Programm kann man sich vorstellen, dass SuS die Frage „Transformieren notwendig oder nützlich?“ erst verneinen, aber nochmals erwägen, wenn es nicht ohne geht. Pólya indes bietet eine spezifischere Hilfe, mit der man γ ins Spiel bringt:

Der Winkel bei C beträgt 90° wegen des Satz des Thales..

Gedanken:

- ~~Wenn~~ ² Wenn noch ein Winkel ausgegeben wäre (der bei A oder B) könnte ich mithilfe des Innenwinkelsummensatzes ^{noch} den jeweils anderen Winkel (A oder B) **ausrechnen. TR**
- 3 Diese dann halbieren weil AM bzw BM Winkelhalbierende sind. ⁴ Dann könnte ich erneut Winkel M ausrechnen.

SR?

Bei Pólya: „Hast Du alle Daten benutzt?“

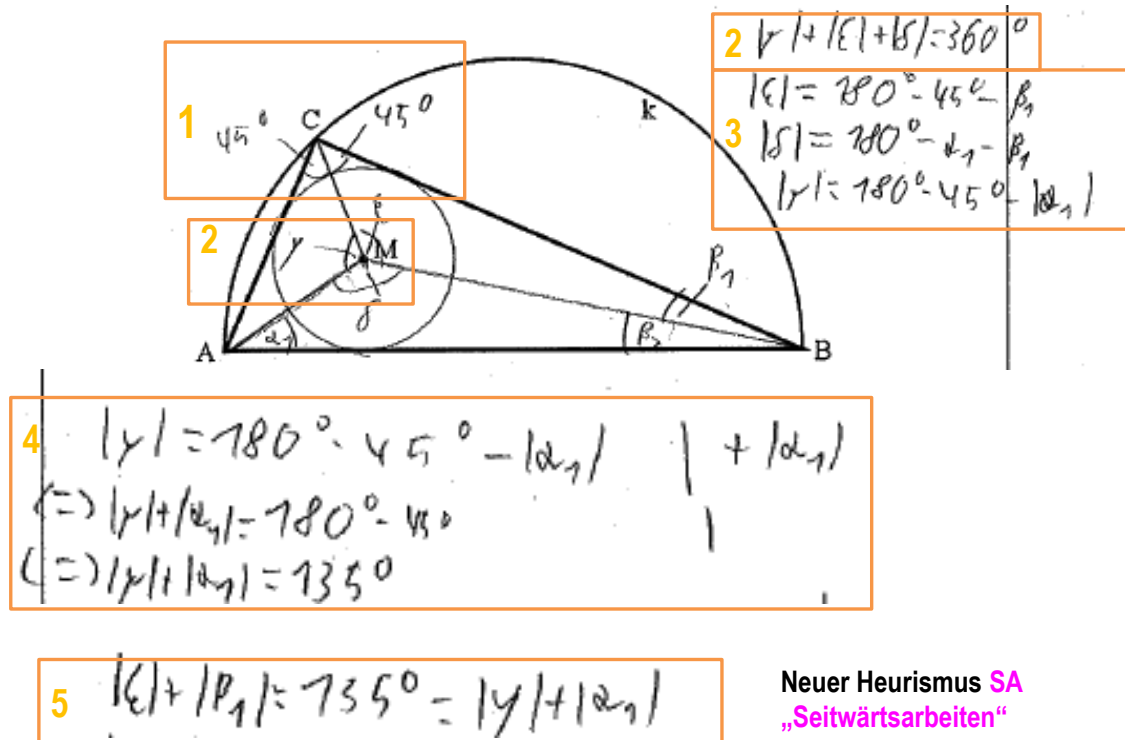
2 Es gilt nach dem IWS $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 180^\circ$. Wenn der Winkel bei A gegeben ist kann man **rechnen: TR** $|\beta| = 180^\circ - |\alpha| - |\gamma| = 180^\circ - |\alpha| - 90^\circ = 90^\circ - |\alpha|$. **GL**

3 Halbiert man die Winkel α und β , erhält man $\frac{|\alpha|}{2}$ und $\frac{|\beta|}{2} = \frac{90^\circ - |\alpha|}{2} = 45^\circ - \frac{|\alpha|}{2}$.

4 Der Winkel bei M könnte nun erneut mit dem IWS berechnet werden: $\frac{|\alpha|}{2} + \frac{|\beta|}{2} + |\mu| = 180^\circ$

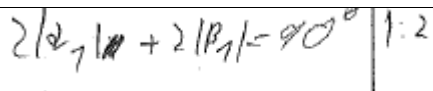
Einsetzen RÜ liefert: $\frac{|\alpha|}{2} + 45^\circ - \frac{|\alpha|}{2} + |\mu| = 180^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + |\mu| = 180^\circ \Leftrightarrow |\mu| = 135^\circ$.

Nach dieser Potentialanalyse der Programme ein Blick auf den Prozess des Probanden D11 – inwieweit lässt dieser sich durch jene erklären? D11 verfolgt zunächst auch die Absicht, μ aus α_1 und β_1 zu berechnen (Lucyga in diesem Band), betreibt dies jedoch nicht weiter, sondern macht folgende fünf Schritte, die mit 5m20' fast die Hälfte des Prozesses ausmachen: Er zerlegt γ in 45° -Winkel, ergänzt μ [δ bei D11] um die Nachbarwinkel zu 360° , notiert die IWS in BCM und ACM, formt sie um und setzt sie gleich.



Neuer Heurismus SA
 „Seitwärtsarbeiten“

Diese Schritte setzen weder das vorherige Rückwärtsarbeiten fort noch handelt es sich um reines Vorwärtsarbeiten, da D11 die vorige Absicht nicht aufgibt – man kann sie mit Dörner als wiederholte Startpunktwechsel auffassen, mit jeweils schneller Umorientierung, oder mit König als Rückführung auf einfachere Aufgaben. Da er diese jedoch nicht lange verfolgt, scheint uns treffender, einen neuen Heurismus anzunehmen: **Seitwärtsarbeiten (SA)**. Mit Pólya könnte man es so beschreiben: „Wenn verschiedene Wege von dem Punkt, indem man sich befindet, ausgehen, so erforsche man ein Stückchen von jedem Weg, ehe man sich zu weit auf irgendeinen einlässt – er könnte in einer Sackgasse enden.“ (1965, S.50) Im *stimulated recall* erläutert D11, dass er das bei schwierigen Aufgaben immer so macht – er verfügt also über das **Heuristische Programm SAS**: „Bei schwierigen Aufgaben seitwärtsarbeiten“. Dieses führt ihn indes nicht zur Lösung - dazu bedarf es eines Sichtwechsels: *weg* von der IWS als Rechenausdruck, mit dem $|\mu|$ nur aus $|\alpha_1|$ und $|\beta_1|$ berechenbar ist, *hin* zur IWS als Gleichung, aus der $|\alpha_1|$ und $|\beta_1|$ eliminiert werden können. Der erfolgt so:

09:24	Ok.
09:28	Ich weiß ja Betrag von Alpha 1 plus naja 2 Betrag von Alpha 1 plus 2 Betrag von Beta 1 gleich .. 90 Grad wegen dem Innenwinkelsummensatz.
	 Schreibt
09:51	Das ist ehm doch
09:56	Schwierig
09:58	jetzt
10:04	Müsste ich wohl irgendwo nach Alpha 1 auflösen.

Mit der in 9:28 durch Umformung der IWS von ABC gewonnenen Gleichung hat D11 die α - β -Barriere im Prinzip überwunden, bemerkt dies jedoch nicht – wie im obigen Vorschlag muss er erst in die IWS von ABM einsetzen: Eine Problemlösung durch Akkommodation im Sinne von Gawlick (2013), wie bei Lucyga (in diesem Band) näher ausgeführt wird.

Lässt sich dieser Schritt mit Hilfe eines der Programme erklären – oder handelt es sich um einen „plötzlichen“ Einfall ohne aktives Bemühen, vgl. Dörner(1976, 91ff)? Bei König könnte man sich vorstellen, dass nach den gescheiterten RÜ-Versuchen nun erneut TR aufgerufen wird und zur algebraischen Sicht führt. Aber gibt es etwas, dass dazu beiträgt, dass D11 anders als viele Probanden mit gleicher Wissensbasis diesen Schritt vollzieht? Wieder könnte ein SR-Impuls von Pólya dahinter stehen: „Wir sind von dem geringen Fortschritt unserer Arbeit enttäuscht. Verschiedene Ideen, die uns kamen, haben sich im Sand verlaufen ... Die Figur vor uns, unsere ganze Vorstellung von der Aufgabe, ist ...verwirrend und dunkel, fast überladen und doch noch unvollständig; irgendein wesentliches Element, ein wesentliches Glied fehlt. Der Fehler ist vielleicht, daß wir uns in Beiläufigem verstrickt und mit belanglosem Material belastet haben. ... Betrachten wir noch einmal die Unbekannte... *Haben wir der ganzen Bedingung Rechnung getragen?*“ (1965, S.128) Damit kann das SA-Ergebnis mit der Fragestellung verknüpft und die Aufgabe gelöst werden – ein Beleg für die Wichtigkeit von SR. Der Nutzen eines Heuristischen Programms dürfte daher v.a. davon abhängen, wie elaboriert die SR darin repräsentiert ist und wie differenziert sie von der Kontrollstruktur aufgerufen wird.

Literatur

- Gawlick, Th. (2013): Problem - das Gegenteil von Routineaufgabe? Zur Konzeption von Problemlösen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*.
- Dörner, D. (1976): *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, Stuttgart: Kohlhammer
- Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens*, Bern: Francke
- Pólya, G. (1965): *Vom Lösen mathematischer Aufgaben*, Bd. 2, Basel: Birkhäuser