Maximilian GEIER, Koblenz-Landau, Campus Landau

Kartographie als Anwendung von Geometrie und Topologie

Die Geographie bietet der Mathematik einige Anknüpfungspunkte für fächerübergreifenden Unterricht. Die Kartographie wird aber kaum thematisiert. Dabei stellt sie eine wunderbare Anwendung der Geometrie dar. Dem Mathematikunterricht bietet das Thema die Chance mit vielfältigem, buntem Materialeinsatz (Globus, verschiedene Weltkarten, sowohl in digitaler Form als auch auf Papier) anspruchsvolle Konzepte aus Raumgeometrie, Trigonometrie und Topologie kennenzulernen oder zu üben. Darüber hinaus können geographische Kenntnisse wie die Eigenschaften verschiedener Karten so nicht nur erlernt, sondern auch kritisch betrachtet werden. Zuletzt wird bei der Betrachtung verschiedener Abbildung der Erdkugel in die Ebene auch das Verständnis für Funktionen und den Grenzwert gefordert und gefördert.

Dem Thema entsprechend konzentrierte sich mein Vortrag auf der GDM-Jahrestagung auf methodische Vielfalt und Anschaulichkeit. Die Folien finden Sie auf meiner Seite der Homepage des Instituts für Mathematik am Campus Landau. In diesem Text, der das nicht leisten kann, folge ich ein paar im Vortrag vorgeschlagenen Unterrichtsinhalten, um zuletzt drei Weltkarten auf ihre Eigenschaften zu untersuchen. Alle Schritte sind mit geringen Vorkenntnissen nachvollziehbar. Um den schrittweisen Aufbau der Erkenntnisse, der aus der Betrachtung von Sphäre und Karten folgt, zu betonen, verzichte ich bewusst auf den Bezug auf weitere Literatur.

Eine kurze und oberflächliche Betrachtung einer Weltkarte kann schnell zu überraschenden Beobachtungen führen und so als Motivation für eine Beschäftigung mit diesem Thema dienen. Als erste Aufgabe können Schüler und Schülerinnen z.B. kürzeste Wege zwischen verschiedenen, auch selbstgewählten Punkten in Weltkarten zeichnen. Diese sind nur in bestimmten Fällen gerade Linien, auf den üblicherweise genutzten Karten genau dann, wenn beide Punkte auf dem Äquator oder beide Punkte auf demselben Meridian liegen. In allen anderen Fällen erhält man einfach oder sogar doppelt gekrümmte Linien. Als weiterführende Aufgabe können diese Fälle unterschieden werden. Eine zusätzliche Besonderheit fällt auf, wenn der kürzeste Weg den 180. Längengrad schneidet, man also den rechten und linken Rand seiner Karte miteinander identifizieren muss. Diese in der Regel bei Schülern und Schülerinnen bekannte Eigenschaft von Weltkarten führt uns zur möglichen Anschauung der Welt als Zylinder. Dazu kann die Lehrperson tatsächlich die Ränder einer Karte miteinander identifizieren, also einfach zusammenkleben. Die Webseite www.luftlinie.org

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

bietet außerdem eine Möglichkeit die korrekten kürzesten Wege überzeugend darzustellen.

Am Ende dieser ersten Einheit stehen nun zwei Einsichten: Erstens kann die Karte als aufgeschnittener Zylinder gesehen werden. Darauf bauen wir auf, wenn wir die Abbildung von der Sphäre S^2 in die Ebene untersuchen wollen (als vereinfachtes Modell der Welt dient im Folgenden immer die Einheitssphäre). Gesucht ist also im weiteren Verlauf eine Abbildung von der Sphäre auf den Zylinder. Zweitens haben wir erkannt, dass unsere Weltkarten stark verzerrt sind. Hier schließt sich nun im nächsten Schritt die Aufgabe an, diese Verzerrungen genauer zu untersuchen.

Auf einem Globus und einer üblichen rechtwinkligen Weltkarte sind jeweils alle Längenkreise gleichlang. Die Breitkreise dagegen sind nur auf der Karte alle gleichlang. Auf dem Globus werden diese immer kürzer, je näher man sich einem Pol nähert. Mit Hilfe des Grenzwertes ist diese Beobachtung sehr schön beschreibbar. Nehmen wir für alle weiteren Überlegungen an, dass der Äquator auf Globus und Karte gleichlang ist. Dann geht, wenn wir uns immer weiter Richtung Nordpol (bzw. Südpol) bewegen, der Abstand des Breitenkreises zum Pol gegen Null; und der Verzerrungsfaktor, der am Äquator gleich Null ist, geht gegen unendlich. Eine anschließende Aufgabe, die Modellierungsfähigkeiten fordert und so echte Umwelterschließung ermöglicht, könnte wie folgt lauten: „Wie lange ist eigentlich der Breitenkreis, auf dem Basel liegt?“ Durch ein geeignetes Modell wird aus der Raumgeometrieaufgabe eine einfache Aufgabe in der Ebene. Wenn das Modell unserer Erde die Einheitssphäre, der Radius des Äquators also gleich eins ist, dann liefert uns cos(48°) den Radius des 48. Breitengrades – wohin wir Basel in unserem Modell legen. Zusätzlich werden geographische Kenntnisse oder Nachschlagewerke genutzt. Dann erhält man mit einer Äquatorlänge von 40.075 km für den 48. Breitengrad eine Länge von etwa 26.866 km. Damit ist er auf dem Globus um etwa ein Drittel kürzer als er auf einer rechteckigen Karte wirkt. Wurde das Modell einmal erstellt, können weitere Breitenkreise leicht berechnet und die unterschiedlichen Verzerrungen an verschiedenen Stellen der Karte verdeutlicht werden.

Diese Untersuchung dieser Verzerrung, die bei allen Abbildung bekannten rechteckigen Weltkarten notwendigerweise gleich ist, sei damit abgeschlossen. Die nächste Untersuchung wird zeigen, dass es auf Karten weitere, nicht notwendige, aber sinnvolle Verzerrungen gibt. Sie schließt außerdem den Kreis zur ersten Beobachtung, in der die Weltkarte als aufgeschnittenen Zylindermantel angesehen wird. Dieser nächste Schritt wird mit Hilfe bekannter Projektionen unternommen. Parallel- und Zentralprojektion decken eine Motivation für den Begriff der Bijektivität auf, da sie diese nötige Eindeutigkeit nicht liefern können. So liefert die Parallelprojektion zwar ein bekanntes Bild der Erde, allerdings nur einer Hälfte. Ähnlich verhält es sich mit Zentralprojektionen, wenn ihr Zentrum irgendwo außerhalb der Sphäre liegt. Liegt das Zentrum dagegen im Inneren der Sphäre trifft jeder Projektionsstrahl die Sphäre genau einmal. Als Projektionsfläche kommt eine Ebene dann aber nicht in Frage, stattdessen erinnern wir uns an den Zylindermantel.

Betrachten wir nun also die Abbildung der Weltkugel in die Ebene als Zentralprojektion mit dem Mittelpunkt der Einheitssphäre als Zentrum auf einen Zylindermantel, der die Sphäre entlang des Äquators berührt. Dann sind folgende Beobachtungen zu machen: alle Punkte außer Nord- und Südpol werden eindeutig abgebildet. Denn genau die zwei Strahlen vom Sphärenmittelpunkt zu den beiden Polen, die gemeinsam die Trägergerade der Erdachse bilden, haben keinen Punkt mit dem Zylindermantel gemeinsam. Zweitens liefert eine solche Projektion nicht nur die bekannten Verzerrungen der Breitenkreise, sondern auch gleiche Abstände in Nord-Süd-Richtung auf der Kugel werden auf dem Zylindermantel, je näher sie an einem Pol untersucht werden, immer größer. Konkret kann man dazu die Abstände von Breitkreisen untersuchen .So ist das Bild des Abstands zwischen Äquator und 5. Breitenkreis „klein“, der Abstand zwischen dem 45. und dem 50. Breitenkreis „groß“, und der Abstand zwischen dem 80. und 85. so groß, dass er kaum zu noch zu fassen ist. Um alle Punkte außer den Polen abzubilden müssen also der Zylinder, und damit auch die durch Aufschneiden entstehende Karte, unendlich hoch sein. Außerdem sind auf rechteckigen Weltkarten die Pole tatsächlich nicht abgebildet (oder man interpretiert den gesamten oberen und den gesamten unteren Rand als Bild des Pols, was aber der Vorstellung einer Projektion widerspricht).

Zuletzt sollen nun drei konkrete rechteckige Weltkarten untersucht werden. Die Plattkarte, die Mercator-Projektion und die Peters-Projektion zählen in der Kartographie mit weiteren zu den Zylinderprojektionen. In der Terminologie der Mathematik ist das nicht korrekt, vielmehr liegen ihnen mathematische Zylinderprojektionen nur zugrunde. Die drei Karten unterscheiden sich in der getroffenen Entscheidung, durch welche Art der Stauchung eine endlich hohe und sinnvolle Weltkarte entsteht. So hat jede der drei Karten genau eine der Eigenschaften Längen-, Flächen- und Winkeltreue. Die drei Beispiele zeigen auch schön, dass sich die drei Eigenschaften gegenseitig ausschließen. Es sei hier auf die „Tissotsche Indikatrix“ hingewiesen, die diese und folgende Zusammenhänge sehr anschaulich macht. Die Entscheidung, die für die Plattkarte getroffen wird, ist intuitiv und naheliegend: Wird hier z.B. jeder 15. Breitenkreis und jeder 15. Längenkreis eingezeichnet, dann erhalten wir ein Netz, das aus 24*12 Quadraten besteht. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Breitenkreisen ist also überall auf der Karte gleich, und außerdem gleich dem Abstand zwischen zwei Längenkreisen. Die Plattkarte wird deshalb längentreu genannt, wobei dieser Begriff stark von der mathematischen Definition abweicht. Zunächst können wir mathematisch gar nicht von Längentreue sprechen, wenn die Karte nicht im Maßstab 1:1 gezeichnet ist. Eine solche Karte ist aber kaum vorstellbar. Stattdessen ist hier eine mathematische Streckenverhältnistreue gemeint, die aber nur in einer Richtung gilt: Lediglich Abstände auf der Karte, die auf Meridianen gemessen werden, stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie auf der Sphäre. Die bereits untersuchte Verzerrung der Breitenkreise ist weiterhin notwendig. Wenn nun also eine Verzerrung in der Waagrechten vorliegt, aber keine Verzerrung in der Senkrechten, dann kann die Plattkarte keine der beiden anderen Eigenschaften erfüllen.

Die Mercator-Projektion ist eine der am häufigsten genutzten Weltkarten. Suchmaschinen wie Google, Bing und Yahoo nutzen sie, historisch liegt sie schon lange fast allen Seekarten zugrunde, da sie winkeltreu ist. Dies wird erreicht, indem die notwendige Streckung der Breitenkreise auch auf die Meridiane angewandt wird. Damit werden die Abstände zwischen zwei benachbarten Breitenkreisen auf der Karte immer größer, wenn man sich einem Pol nähert. Da der Streckungsfaktor der Breitenkreise in Polnähe sogar gegen unendlich geht, gilt das auch für die Abstände auf den Meridianen. Für ein vernünftiges Kartenformat müssen daher auf dieser Karte Umgebungen der Pole abgeschnitten werden. Da die Abstände bei Annäherung an einen Pol immer weiter gestreckt werden, gilt das gleiche auch für Flächen auf der Mercator-Karte. Damit wird sie oft als eurozentristisch eingestuft. Nicht nur, dass Europa in der Mitte der Karte steht, sondern vor allem die Tatsache, dass es gegenüber den Landflächen in Äquatornähe zu groß dargestellt ist, wird kritisiert. Die moderne Peters-Projektion kann so als Antwort darauf gesehen werden, da diese flächentreu ist. Dazu wird nun die notwendige Streckung der Breitenkreise durch eine Stauchung der Meridiane ausgeglichen. Damit werden die Abstände zwischen zwei benachbarten Breitenkreisen auf der Karte immer kleiner, und gehen gegen Null, wenn man sich einem Pol nähert.