

Die uvw -Sprache in der analytischen Geometrie

1. Einleitung und Motivation

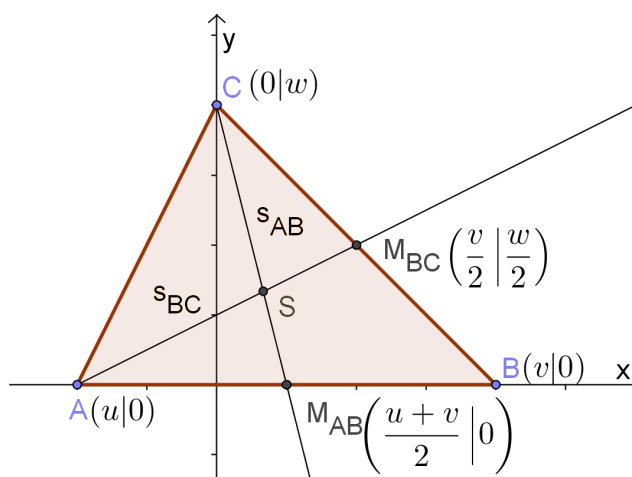
In Pólya 1966, S. 47, findet sich das DESCARTES'sche Schema einer universellen Methode der Problemlösung:

- Man reduziere jede Art von Problem auf ein mathematisches Problem.
- Man reduziere jede Art von mathematischem Problem auf ein algebraisches Problem.
- Man reduziere jedes algebraische Problem auf die Lösung einer einzigen Gleichung.

Für ausgewählte Probleme der Dreiecksgeometrie ist eine derartige Übersetzung in Standardaufgaben der Vektorrechnung in der Sekundarstufe II möglich. Typische Aufgabenplantagen, wie sie in vielen Schulbüchern z. B. zum Schnitt zweier Geraden angeboten werden, können auf diese Weise durch sinnvolle Rechnungen ersetzt werden. Gleichzeitig ergibt sich ein für den Unterricht mächtiges Mittel zur (eigenständigen) Generierung von mathematischen Begründungen. Eine vorangehende Hypothesenbildung und damit einhergehende Motivierung der Schüler und Schülerinnen ist durch Exploration mittels DGS möglich.

2. Ein standardisiertes Dreieck

Die Abbildung zeigt ein allgemeines (zeigen!) Dreieck ABC mit $u < v$ und $w > 0$ (vgl. Götz & Hofbauer 2012, S. 325). Die Existenz des (Ecken-)Schwerpunkts S kann auf verschiedene Weise begründet werden: elementargeometrisch mit dem Satz vom Mittendreieck, mit koordinatenfreien Vektoren, mittels Flächenvergleichs oder mit dem Satz von CEVA,



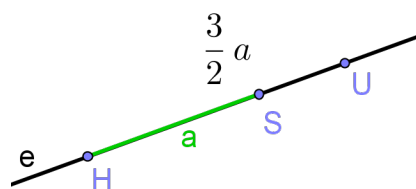
am einfachsten aber mittels Rechnens. Mit der Mittelpunktsformel können wir Parameterformen zweier Schwerlinien aufstellen: zum Beispiel ist

$$s_{AB}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ -w \end{pmatrix} \text{ und } s_{BC}: \vec{X} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{v}{2}-u \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix}. \text{ Ihr Schnitt liefert}$$

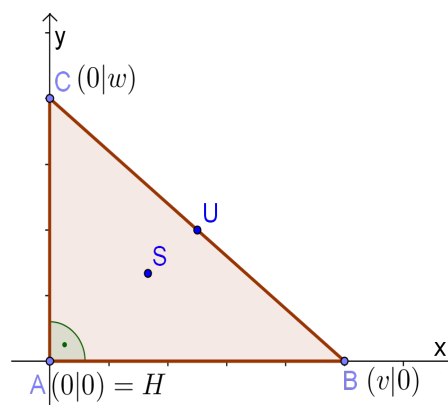
die (konkreten!) Parameterwerte $t = \lambda = \frac{2}{3}$. Der Schwerpunkt S teilt also

die „Schwerelinie“ im Verhältnis 2:1. Seine Koordinaten sind (natürlich) $\left(\frac{u+v}{3} \mid \frac{w}{3}\right)$. Die dritte Schwerelinie $s_{AC}: \vec{X} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{u-v}{2} \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix}$ (wegen $M_{AC} \left(\frac{u}{2} \mid \frac{w}{2}\right)$) enthält S : eine Standardrechnung ergibt $r = \frac{2}{3} = t = \lambda$. Analog erweitern wir unser „ uvw -Vokabelheft“: Umkreismittelpunkt $U \left(\frac{u+v}{2} \mid \frac{w}{2} + \frac{uv}{2w}\right)$ und Höhenschnittpunkt $H \left(0 \mid -\frac{uv}{w}\right)$ (Götz & Hofbauer 2012, S. 326). Das führt uns geradewegs zur EULER'schen Geraden e . Wir legen (ökonomisch!) die Gerade durch H und S : $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{uv}{w} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{u+v}{3} \\ \frac{w}{3} + \frac{uv}{w} \end{pmatrix}$, und versichern uns, dass $U \in e$ gilt, indem wir $\mu = \frac{3}{2}$ für die x - und y -

Koordinate ermitteln. Die Abbildung zeigt eine Interpretation dieses Ergebnisses. Fazit: Die durch die uvw -Sprache suggerierte Wahl der Punkte für das Aufstellen einer Parameterform von Geraden erleichtert die geometrische Deutung.



Das Betrachten von Spezialfällen und vor allem die Einbettung der Ergebnisse in andere mathematische Zugänge dienen dazu, die Eigentätigkeit von Schüler(inne)n anzuregen. Für $u = 0$ z. B. erhalten wir ein rechtwinkeliges Dreieck. Der Höhenschnittpunkt $H(0|0)$ liegt dann in der Ecke A , der Umkreismittelpunkt $U \left(\frac{v}{2} \mid \frac{w}{2}\right)$ ist dann der Mittelpunkt M_{BC} der Strecke \overline{BC} , was den THALESkreis auf den Plan ruft. Die

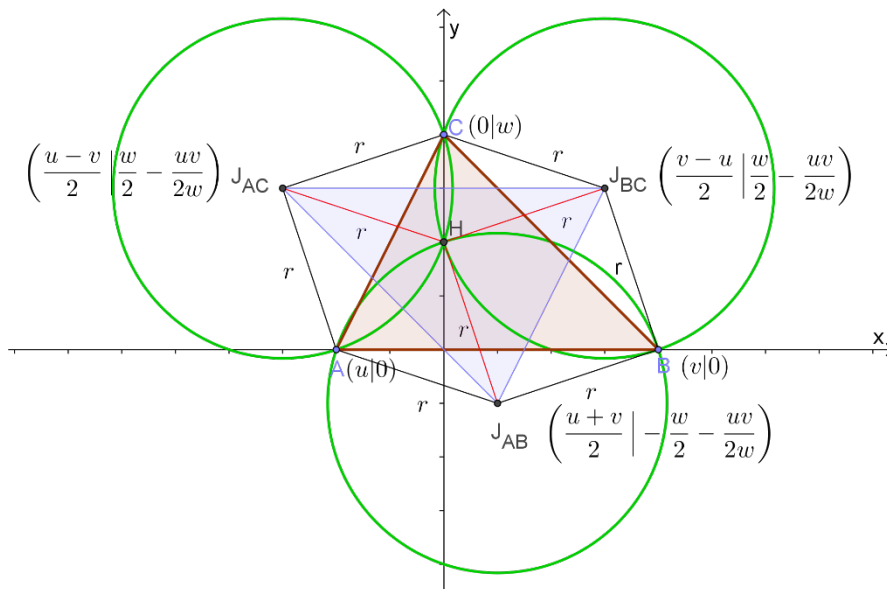


Koordinaten für den Schwerpunkt $S \left(\frac{v}{3} \mid \frac{w}{3}\right)$ lassen sich mittels Integralrechnung verifizieren. Der Graph der funktionalen Abhängigkeit $y = -\frac{w}{v} \cdot x + w$ stellt die Gerade durch B und C dar. Für die Koordinaten ξ und η des Schwerpunkts S eines Normalbereichs gelten bekanntlich die Gleichungen
$$\xi = \frac{\int_0^v xy \, dx}{\int_0^v y \, dx} = \frac{\int_0^v \left(-\frac{w}{v}x^2 + wx\right) dx}{\int_0^v \left(-\frac{w}{v}x + w\right) dx} = \dots = \frac{v}{3} \text{ und } \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_0^v y^2 \, dx}{\int_0^v y \, dx} = \dots = \frac{w}{3}.$$

Weitere Übungs- und Interpretationsmöglichkeiten bieten sich z. B. beim gleichschenkeligen Dreieck mit $u = -v$ an.

3. Die JOHNSON-Kreise

Eine Abituraufgabe aus Wien im Jahre 2012 spricht drei Kreise mit gleichem Radius an, die durch jeweils zwei Eckpunkte eines Dreiecks ABC gehen und einen Punkt gemeinsam haben (Müller 2013, S. 49). Weiterhin wird gesagt, dass der gemeinsame Punkt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist. Wir berechnen in der uvw -Sprache die Mittelpunktskoordinaten und den Radius des Kreises, auf dem die Punkte B , C und H liegen. Genauso gehen wir für die Punkte A , B und H bzw. A , C und H vor. Jedes Mal bekommen wir für den Radius r

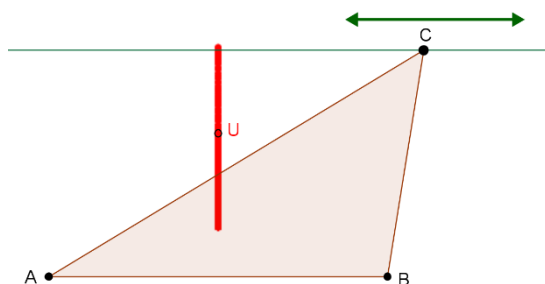


die Beziehung $r^2 = \frac{u^2+v^2}{4} + \frac{w^4+u^2v^2}{4w^2}$. Das ist das Quadrat des Umkreisradius des Dreiecks ABC (Götz & Hofbauer 2012, S. 326). Die Abbildung zeigt u. a. die Koordinaten der Mittelpunkte J_{AB} , J_{AC} und J_{BC} der drei JOHNSON-Kreise. Der gemeinsame Punkt muss der Umkreismittelpunkt des JOHNSON-Dreiecks $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ sein. Die Dreiecke ABC und $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ sind kongruent zueinander. Die Vektoren $\overrightarrow{J_{AC}J_{AB}} = \begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J_{BC}J_{AB}} = \begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J_{BC}J_{AC}} = \begin{pmatrix} u-v \\ 0 \end{pmatrix}$ haben die Längen $\sqrt{v^2 + w^2} = a$, $\sqrt{u^2 + w^2} = b$ und $|u - v| = c$, das sind die Seitenlängen des ursprünglichen Dreiecks ABC .

Weiterhin lässt sich eine Dualität feststellen: die Höhenlinien von ABC sind die Mittelsenkrechten von $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ und vice versa. Daher ist der Höhenschnittpunkt von ABC der Umkreismittelpunkt von $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ und umgekehrt. Mit der uvw -Sprache können wir das leicht nachrechnen, indem wir wie gehabt Parameterformen der entsprechenden Geraden betrachten. In Götz & Hofbauer 2012, S. 326, finden wir den mit der uvw -Sprache bewiesenen Satz: „Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den Seiten eines Dreiecks, so liegen die Spiegelungspunkte am Umkreis des Dreiecks.“ Daraus folgt, dass die drei Kreise, die durch Spiegelung des Umkreises eines Dreiecks an seinen drei Seiten entstehen, einen gemeinsamen Punkt haben, eben den Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

4. Dynamische uvw -Sprache

Wandert der Eckpunkt C eines Dreiecks parallel zur Seite AB und verfolgt man die Spur des Umkreismittelpunktes U , so bewegt sich dieser auf einem Strahl senkrecht zu AB (vgl. Götz & Süss-Stepancik 2015). Wir führen die Variable z als x -Koordinate von C ein. Ihre Veränderung entspricht der Bewegung von C . Der Schnitt der Mittelsenkrechten



m_{AB} und m_{BC} in der uvw -Sprache liefert $x = \frac{u+v}{2}$ und $y = \frac{w}{2} + \frac{(u-z) \cdot (v-z)}{2w}$ für die Koordinaten der Spur von U . Fassen wir die y -Koordinate als Funktion von z auf (die x -Koordinate ist ja fest!), dann ist ihr Graph eine nach oben offene Parabel mit Minimum an der Stelle $\frac{u+v}{2}$. In diesem Fall ist das Dreieck ABC gleichschenkelig, denn C liegt nun auf m_{AB} , und U ist „am Tiefpunkt“. Wird das Dreieck dagegen immer „stumpfwinklicher“ bei A oder B , das heißt der Betrag von z immer größer, dann wandert U nach „oben“.

5. Resümee

Die uvw -Sprache ist ein Begründungswerkzeug für geometrische Probleme. Eine entsprechende Dokumentation von Schüler(innen)seite stützt dieses Sinnangebot in der Vektorrechnung. Zum Einstieg in die uvw -Sprache kann mit konkreten Belegungen für u , v und w im Mathematikunterricht gearbeitet werden. Die Anschauung dient auch zur Prüfung der gemachten Interpretationen. Das Rechnen, das Operieren mit Zeichen nach bestimmten Regeln als manifest werdendes Denken, wird so als Erkenntnismittel deutlich.

Literatur

- Götz, S. & Hofbauer, F. (2012). Geraden, Kreise und Dreiecke: Vorschläge zur Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*. Für die GDM herausgegeben von M. Ludwig und M. Kleine. Band 1 (S. 325–328). Münster: WTM.
- Götz, S. & Süss-Stepancik, E. (2015). Lernpfade zur Unterstützung der Ausbildung von Begründungskompetenz im Mathematikunterricht. In J. Roth, E. Süss-Stepancik & H. Wiesner (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel* (S. 49–64). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Müller, R. (2013). Forschen-Entdecken-Verifizieren-Beweisen mit dynamischer Geometrie. Gedanken ÜBER Grundkompetenzen. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, Heft 46, 43–51.
- Pólya, G. (1966). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren*. Band I. Basel und Stuttgart: Birkhäuser.