Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Duisburg-Essen

Die Rolle der Mathematik in der Mathematikdidaktik

Es gibt verschiedene fachliche Perspektiven, aus denen ein mathematischer Unterrichtsgegenstand betrachtet werden kann. Sie sind je für sich wichtig und erst ihr Zusammenspiel erzeugt das rechte Hintergrundwissen für den Unterricht. Die folgenden Ausführungen möchten diese Auffassung am Beispiel der Bruchrechnung exemplarisch entfalten.

1. Elementarmathematik vom höheren Standpunkt

Fachbücher zum Aufbau des Zahlensystems (z.B. Kramer 2008) behandeln Brüche im Rahmen der formalen Konstruktion des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen aus dem Integritätsring $(\mathbb{Z},+,.)$ der ganzen Zahlen. Das geschieht in folgenden Schritten:

Für Paare ganzer Zahlen wird eine Äquivalenzrelation definiert:

$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c \;\; (a,c\in\mathbb{Z};\; b,d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$.

Die Äquivalenzklasse $[a,b]$ des Zahlenpaares (a,b) erhält die Bezeichnung $\frac{a}{b}$. Für die so gebildeten Brüche werden einen Addition und eine Multiplikation definiert:

$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$ und $\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Dabei ist sicherzustellen, dass die Verknüpfungen wohldefiniert sind, dass also die Operationen unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten durchführbar und insofern mit der Klassenbildung verträglich sind.

Dadurch entsteht die algebraische Struktur eines Körpers, in den man die ganzen Zahlen vermöge der umkehrbar eindeutigen Zuordnung

$$a \mapsto [a,1]=\frac{a}{1}, \qquad a\in\mathbb{Z}$$

einbetten kann. Somit ist es sinnvoll, die ganzen Zahlen als Teil der rationalen Zahlen zu betrachten.

Diese Darstellung entfaltet ein Thema der Schulmathematik vom „höheren Standpunkt aus" und verfährt damit im Sinne der Programmatik Felix Kleins (Klein 1908). Sie verwendet die in der Hochschulmathematik übliche Sprache und Symbolik der Mengen, Relationen und Verknüpfungen mit der zugehörigen Semantik (vgl. Wille 2005, S. 6). Inhaltlich nimmt sie einen Standpunkt ein, der sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts herausgebildet hat. Dabei wird der Begriff der Zahl rein formal ohne Bezug

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

auf den Begriff der Größe gefasst und die Gesetze des Operierens mit Zahlen werden in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellt (vgl. Epple 1999).

Es handelt sich also um einen Wissensbestand, der aus dem Streben nach einem konsistenten und lückenlosen Theorieaufbau restrukturiert wurde. Dabei sind die Spuren einer langen Entwicklung verwischt und alle Realitätsbezüge abgestreift. Vielfach hat man geglaubt, diese Sichtweise sei als fachliches Rüstzeug zumindest für Lehrkräfte an Gymnasien bereits ausreichend. Jedoch ergeben sich ursprüngliche Zugänge hieraus nicht von selbst, was Martin Wagenschein in einem Bild sinngemäß so ausdrückte: Wer oberhalb der Baumgrenze lebt, den sollte man nicht nach Waldwegen fragen (Wagenschein 1983, S. 83).

Allerdings muss man auch hier zwischen hinreichenden und notwendigen (Wissens-)Voraussetzungen unterscheiden. Notwendig oder zumindest wünschenswert ist die entfaltete Sichtweise, weil sie Lehrkräften eine fachliche Langzeitperspektive und eine Art „Kompass“ für Auffassungen und Gepflogenheiten aus Sicht der Fachwissenschaft vermittelt. Der strenge Aufbau des Zahlensystems ist ein Beispiel für eine „deduktive Welt eigener Art“ (Winter 1995), in der die Objekte des Denkens in ein logisch konsistentes Theoriegebäude mit einer minimalen Ausgangsbasis eingepasst werden. Die einzelnen Schritte vermitteln Sensibilität für das „Getriebe einer mathematischen Theorie“ (Toeplitz 1928, S. 6). Ein entsprechendes Bewusstsein hat Auswirkungen auf das Erklärungsverhalten im Unterricht. Bekanntlich haben Schülerinnen und Schüler der Klasse 6 zunächst wenig Verständnis dafür, dass ganze Zahlen auch als Brüche aufgefasst werden sollen. Lehrkräfte, die den Einbettungsgedanken verstanden haben, können an passenden Stellen immer wieder zeigen, welche Vereinfachungen der begrifflichen Beschreibung und der formalen Formulierung von Regeln durch die professionelle Sicht möglich werden. Lehrkräfte, die einen Sinn für die Konsistenz von Definitionen haben, werden ihre Schülerinnen und Schüler bei der Behandlung von Potenzen mit rationalen Exponenten auf das Problem der Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten hinweisen.

Die Beschäftigung mit einer fachlichen Ebene, die oberhalb des mathematischen Schulstoffes liegt, bringt noch einen weiteren wesentlichen Ertrag für den Unterricht, nämlich dort, wo elementarmathematische Themen als Grundlage für die Konstruktion von gehaltvollen Aufgaben dienen können. Ein solches Beispiel sind die Farey-Brüche (Müller, Steinbring & Wittmann 2004, Humenberger 2009).

Die geordnete Folge der gekürzten Brüche zwischen 0 und 1 mit Nennern $\leq n$ heißt die n-te Farey-Reihe F_n. Zwischen den Brüchen einer Farey-

Reihe bestehen interessante Beziehungen. Zum Beispiel ist die Differenz zweier benachbarter Brüche ein Stammbruch, und zwischen zwei Brüchen mit gleichem Nenner und sich um 1 unterscheidenden Zählern liegt stets ein Bruch mit kleinerem Nenner.

Elementarmathematisches Wissen dieser Art ist Quelle für Aufgaben zum produktiven Üben (Winter 1984) und für substantielle Lernumgebungen (Wittmann 2012). Dazu brauchen Aufgabenkonstrukteure einen reichen elementarmathematischen Fundus. Wittmann entfaltet, inwiefern Elementarmathematik ein substantieller Bestandteil mathematikdidaktischen Wissens sein sollte (Wittmann 1989).

2. Didaktische Phänomenologie mathematischer Strukturen

Eine genetische Sicht auf mathematische Unterrichtsinhalte skizziert Freudenthal in der folgenden Grundphilosophie:

> „Our mathematical concepts, structures, ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world. Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind, and, as far as this description is concerned with the learning process of the young generation, it is didactical phenomenology, a way to show the teacher the places where the learner might step into the learning process of mankind." (Freudenthal 1983, S. ix)

In dem entsprechenden Kapitel über Brüche entfaltet der Autor, dass Brüche vielfältige Erscheinungsformen haben.

Bruch als Anteil: Dieser Bruchzahlaspekt steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Verb „brechen": Um gerecht teilen zu können, wird die Einheit in Stücke gebrochen. Beispielsituationen können handelnd mit konkretem Material erfahren werden. Dabei kann das Bezugsganze in vielerlei Formen und Beschaffenheit auftreten: es kann zusammenhängend oder diskret, begrenzt oder unbegrenzt sein, und die Anteile können regelmäßige Muster bilden oder unstrukturiert bleiben.

Bruch als Vergleichsinstrument: Beispiele für diese Erscheinungsform sind Aussagen zum Größenvergleich: „Stab A ist ⅚ mal so lang wie Stab B." oder: „Im Raum sind befinden sich 2½ mal so viele Erwachsene wie Kinder." In diesen Situationen wird nichts „in Stücke gebrochen", sondern Objekte werden in Bezug auf ihre Größe in Beziehung gesetzt. Brüche haben hier die Bedeutung von „ratio" als Ausdruck von Zahlenverhältnissen. Dieser Bruchzahlaspekt ist abstrakter als der Anteilaspekt und indiziert Kontexte, in denen gemischte Zahlen sinnvoll werden.

Bruch in einem Operator: Diese Auffassung resultiert aus einer übergeordneten Sicht, die viele Erscheinungsweisen umfasst. Den Bruch als Maßzahl, als Punkt auf einer Zahlengeraden und schließlich als rationale Zahl erhält man durch Anwenden des Bruchoperators auf eine Einheit.

Eine solche phänomenologische Betrachtung erzeugt ein Bewusstsein für die Vielfalt der Aspekte, die ein mathematischer Begriff haben kann, für die Spezifika der einzelnen Aspekte mit ihren jeweiligen Anforderungen und Abstraktionsniveaus wie auch für die innere Gemeinsamkeit, um derentwillen sie unter einen gemeinsamen Begriff fallen. Sie liefert Grundlagen für natürliche Lernanlässe und Anhaltspunkte für eine genetisch orientierte Unterrichtsplanung.

Freudenthals Erörterung der vielfältigen Erscheinungsformen von Brüchen ist bereits begrifflich strukturiert. Die Bezeichnungen „Anteil", „Vergleichsinstrument" und „Operator" sortieren die Verwendungsweisen nach Handlungsschemata bzw. mentalen Modellen an der Schnittstelle zwischen mathematischen Konzepten und Situationen, die gedanklich organisiert werden sollen. Werden solche Schemata zu aktivierbaren Vorstellungsgehalten, die zwischen Realität und Mathematik vermitteln, können sie ein lernendes Individuum befähigen, einen mathematischen Begriff inhaltlich zu deuten und damit auch anzuwenden. Zur näheren theoretischen Einordnung und zur didaktischen Bedeutung des Konzeptes der „Grundvorstellungen" sei auf (vom Hofe 1995, 2003) verwiesen.

Grundvorstellungen können auf verschiedenen Stufen mathematischer Denkentwicklung eine Rolle spielen. Elementare Grundvorstellungen sind nah an der Ebene konkreter Handlungen wie die Anteilsvorstellung zum Bruchzahlbegriff. Auf einem elaborierteren Niveau können Grundvorstellungen auch bereits mathematische Begriffe und Operationen einbeziehen, so etwa in der grundlegenden Charakterisierung des prozentualen Wachstums durch folgende Eigenschaft: „Zu gleichlangen Zeiten gehört immer der gleiche Wachstumsfaktor." (Kirsch 1976).

3. Epistemologische Analyse von Unterrichtsinhalten

In den Abschnitten 1 und 2 wurden mathematische Unterrichtsinhalte von entgegengesetzten Perspektiven aus betrachtet. In der langen Spanne zwischen ursprünglichem Verstehen und exaktem Denken sind für die einzelnen Unterrichtsgegenstände fachlich-epistemologische Analysen im Detail notwendig. Das sei am Beispiel des Problems „Anteil vom Anteil" genauer verdeutlicht. Ausgangspunkt kann ein Sachproblem sein:

„Im Land X gehen nur ungefähr zwei Drittel der Sechsjährigen in die Schule und besuchen die erste Klasse. Der Rest der Kinder muss arbeiten. Bis zur 5. Klasse bleiben von den Schulkindern nur ungefähr drei Viertel in der Schule. Zeichne ein Bild zu dieser Situation. Wie groß ist der Anteil der Kinder, die bis zur 5. Klasse eine Schule besuchen? “ (Glade 2014)

Aus didaktischer Sicht sind zu diesem Problem folgende Fragen interessant: Welche Möglichkeiten gibt es, in einer 6. Klasse einen solchen Zusammenhang zu erarbeiten? Welche Begründungs- und Sinnbasis kann den Lernenden hierfür angeboten werden? Welche Beziehungen zwischen mathematischen Begriffen, Verfahren und realen Gegebenheiten werden dabei entwickelt? Welcher Art Denkprozesse werden dabei angestoßen? Das sind Fragen zur Natur des Erkenntnisgegenstandes Mathematik und zur Struktur der Prozesse mathematischer Erkenntnis (Steinbring 2009).

Die nachfolgende Abbildung stellt beispielbezogen ein in Unterrichtswerken gängiges Verfahren dar, einen Anteil von einem Anteil zu bestimmen, und gibt Anlass, dazu eine formale Regel zu erarbeiten.

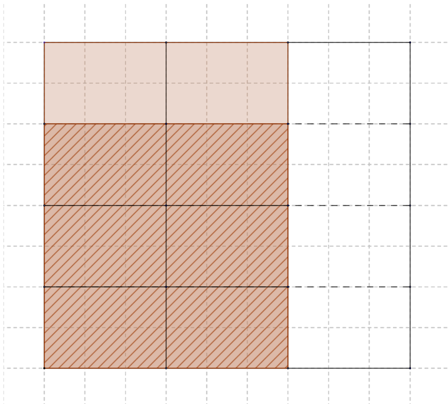

Abbildung: ⅔, davon ¾

Der Zusammenhang wird hier nicht in der Sachsituation selbst erarbeitet, sondern mit Hilfe eines strukturellen Diagramms und damit in einem bereits theoretischen, idealisierten Kontext. Dieser Kontext stellt für die Schülerinnen und Schüler einen neuen und eigenständigen Lerngegenstand mit einem eigenen Problemgehalt dar. Auch eine bereits fertige Darstellung dieses Typs ist nicht selbsterklärend. Sie muss in der Dynamik von Ablesen und Hineinlesen entschlüsselt und richtig gedeutet werden. Dabei spielt der Wechsel der Bezugseinheit eine wichtige Rolle.

Um solche Darstellungen selbst auf Rechenpapier entwickeln und mit Sinn füllen zu können, müssen Schülerinnen und Schüler ein geeignetes Handlungsschema entwickeln. Sie müssen einsehen, welche Ökonomie in der Verschränkung von vertikalen und horizontalen Einteilungen steckt, das Rahmenrechteck dafür günstig wählen, die Größen von Zielrechteck und Ausgangsrechteck unter Verwendung der Unterteilung aufeinander beziehen und dabei die Passung zwischen Arithmetik und Geometrie erkennen und nutzen.

Der folgende fiktive Unterrichtsdialog zur Aufgabenerarbeitung zeigt, welche Probleme entstehen können, wenn eine Lehrkraft diese Anforderungen unterschätzt:

L:	Was für ein Bild wollen wir zeichnen? – Anja!
A:	Ein Kreisbild.
L:	Jaa … Gibt es noch einen anderen Vorschlag? – Sven?
S:	Ein Rechteck.
L:	Ein Rechteck! Das wollen wir jetzt mal zeichnen. *Zeichnet ein Rechteck an die Tafel, 9 Kästchen breit, 8 Kästchen hoch.*
L:	So, wer zeichnet jetzt ⅔ ein? – Markus.
M:	*Geht an die Tafel, zeichnet (vertikale) Drittelstreifen, schraffiert zwei davon.*
L:	Wie können wir nun ¾ von den ⅔ zeichnen? – Irene!
I:	Die Streifen nochmal unterteilen.
L:	Ja, machst du das mal vor?
I:	*Geht zur Tafel, setzt an, die Senkrechteinteilung zu verfeinern.*
L:	Mach' es lieber quer, dann kann man es hinterher besser erkennen. *(Deutet die Richtung an).*
I:	*Zeichnet Querlinien.*
L:	Rahmst du jetzt bitte noch die ¾ ein?
I:	*Zeichnet Rahmen.*
L:	So, und wie viel ist das jetzt vom Ganzen?

Auf drei wesentliche Charakteristika dieses Unterrichtsdialogs sei hier verwiesen:

(1) *Verwechseln von Fachstruktur und Lernstruktur:* Der Gedankengang ist von der Lehrkraft in seinen wesentlichen Etappen vorstrukturiert. Die Schülerinnen und Schüler können nur innerhalb einer vorgeordneten Fragenkette auf die jeweiligen Teilaspekte reagieren. Die meisten von ihnen werden auf diese Weise kein eigenständiges Handlungsschema entwickeln können. Diese Art der Unterrichtsführung verkennt, dass Lernen nicht als linear ablaufende Entwicklung, sondern als Knüpfen eines Wissensnetzes erfolgt (Wittmann 2012).

(2) *Interaktionsmuster:* Es gibt in dem Dialog Stellen, in denen die „Interaktionslogik die Sachlogik überdeckt“ (Voigt 1984). Dort werden Beiträge nur durch fein abgestimmte Reaktionen wie „Jaa, aber ...“ bewertet, ohne dass auf der Sachebene geklärt wird, warum eine Antwort aufgegriffen oder verworfen wird oder warum sie richtig oder falsch ist. Es handelt sich um Interaktionsmuster, die oft unbewusst ablaufen und gute didaktische Absichten konterkarieren können (ebd.).

(3) *Implizitheit von Lerninhalten:* Es gibt in dem Dialog Stellen, in denen Zusammenhänge nur angedeutet, aber sprachlich nicht vollständig explizit

gemacht und bedeutungstragende Elemente nicht ausgewiesen werden. Das Procedere verfehlt dann die Entwicklung einer für eine elaborierte Erklärung wichtige „Bildungssprache“ und damit auch die inhaltliche und strukturelle Klarheit der sachlichen Entwicklung (Schreiber et al. 2015).

Demgegenüber bewirken epistemologische Analysen eine Bewusstseinsschärfung. Sie helfen, den Referenzkontext als eigene sachliche Anforderung ernst zu nehmen, diesen in seinen Einzelheiten und deren wechselseitigem Aufeinander-bezogen-Sein zu erkennen und sachlich wie sprachlich die notwendige Genauigkeit und Explizitheit zu entwickeln und den Lernenden vorzuleben. Dazu gehört es, die Struktur des zu erwerbenden Wissens klar zu sehen und Bewusstheit darüber zu erlangen, welche Bestandteile koordiniert werden müssen und wie diese ineinander greifen. Damit können epistemologische Analysen zur inhaltlichen und strukturellen Klarheit des Unterrichts beitragen (vgl. Ufer et al. 2015).

4. Bilanz

Die Ausführungen sollten zeigen, dass es vielerlei Gründe gibt, sich aus fachlicher Sicht mit mathematischen Unterrichtsinhalten zu beschäftigen, und dies immer wieder neu, aus verschiedenen Perspektiven und in bedarfsgerechter Auflösung.

Damit verbunden ist die Hoffnung, dass Befürchtungen „Vom mählichen Verschwinden des Faches aus der Mathematikdidaktik“ (Jahnke 2010) niemals eintreffen. Die Beziehung einer Fachdidaktik zu ihrem Fach muss vital und kräftig bleiben.

Literatur

Epple, M. (1999). Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860 – 1910. In H. N. Jahnke (Hrsg.), *Geschichte der Analysis* (S. 371–410). Spektrum.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Kluwer.

Glade, M. (2014). *Individuelle Schematisierungsprozesse – Empirische Rekonstruktionen zum Anteil vom Anteil.* Dissertation. Dortmund.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematiklehren, 118*, 4-8.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum.

Humenberger, H. (2009). Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen – entdeckender und verständiger Umgang mit Brüchen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 62, 2,* 19–115.

Jahnke, Th. (2010). Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 89*, 21-24.

Kirsch, A. (1976). Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. *Didaktik der Mathematik* 4, 257-284.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus.* Bd. I (Arithmetik, Algebra, Analysis). B. G. Teubner.

Kramer, J. (2008). *Zahlen für Einsteiger. Elemente der Algebra und Aufbau der Zahlentheorie.* Vieweg.

Müller, G. N., Steinbring, H., Wittmann, E. Ch. (Hrsg.) (2004): *Arithmetik als Prozess.* Kallmeyer.

Schreiber, Ch., Schütte, M. & Krummheuer, G. (2015). Qualitative mathematikdidaktische Forschung: Das Wechselspiel zwischen Theorieentwicklung und Adaption von Untersuchungsmethoden. Erscheint in: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Springer.

Steinbring, H. (2009). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective.* Springer.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* 11(10), 1–16.

Ufer, S., Heinze, A. & Lipowski. F. (2015). Unterrichtsmethoden und Instruktionsstrategien. Erscheint in: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Springer.

Voigt, J. (1984). Die Kluft zwischen didaktischen Maximen und ihrer Verwirklichung im Mathematikunterricht - dargestellt an einer Szene aus dem alltäglichen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik* 5, 265-283.

Wagenschein, M. (1983). *Erinnerungen für morgen. Eine pädagogische Autobiographie.* Beltz.

Wille, R. (2005). Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. In: K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.): *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 3-19): Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61*, 37-46.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens. *mathematiklehren* 2, 4 – 11.

Wittmann, E. Ch. (2012). Das Projekt “mathe 2000”: Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In G. N. Müller, Ch. Selter & E. Ch. Wittmann (Hrsg.): *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben* (S. 265–279). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1989). The mathematical training of teachers from the point of view of education. *Journal für Mathematikdidaktik 10*, 291-308.