André HENNING, Berlin

Lineare Approximation als ein Zugang zur Differentialrechnung am Ende der Sekundarstufe I

Lineare Approximation stellt einen Zugang zur Differentialrechnung dar, der im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I nur selten eine Rolle spielt, jedoch in der Mathematik aktuell wie auch historisch von Bedeutung ist. Im Artikel wird ein Ausschnitt einer Konzeption eines Unterrichtsgangs vorgestellt, der den in der Schule üblichen Weg der Einführung der Differentialrechnung verlässt und sich diesem Gebiet über die lineare Approximation nähert. Der Zusammenhang zum Aspekt der mittleren und lokalen Änderung wird dabei jedoch nicht aus dem Blick verloren. Chancen und Hürden werden aufgezeigt.

Zugänge zum Ableitungsbegriff

Es gibt verschiedene Wege, sich dem Begriff der Ableitung zu nähern. Der in der Schule vorherrschende ist derjenige des Übergangs von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und damit des Übergangs von der Steigung von Sekanten zur Steigung einer Tangente. Dieser Weg wird ausführlich z.B. in Danckwerts & Vogel (2006) dargestellt und sowohl aus fachlicher wie auch aus didaktischer und unterrichtlicher Sicht aufgearbeitet. Über den Zugang der linearen Approximation wird zwar geschrieben, so in Danckwerts&Vogel (2006) oder auch im DIFF Studienbrief (1978), allerdings wird nach einigen Erwägungen davon abgegangen, diesen Zugang tatsächlich im Sinne eines Unterrichtsganges aufzuarbeiten. Die Hürden scheinen zu hoch zu sein und so stärker für einen anderen Zugang zu sprechen.

Wittmann (1972) beschreibt, wie Approximation als verbindendes Element der Analysis dienen kann. Für ihn erscheint es wesentlich, dass „bereits bei der Einführung in die Analysis diejenigen Züge herausgearbeitet werden, die einen Rahmen für ein Gesamtverständnis schaffen und einen nachträglichen Einbau von Einzelheiten erlauben.“ Seine Erläuterungen bleiben jedoch auf eher abstraktem Niveau und stellen keine Konzeption einer Unterrichtseinheit dar.

Weitere Zugänge, wie die stetige Fortsetzung der Differenzenquotientenfunktion usw. (siehe z.B. DIFF Studienbrief (1978)), sollen hier unberücksichtigt bleiben und seien nur des Überblicks halber erwähnt.

Historischer Anstoß

Bereits vor der eigentlichen Entwicklung der Differentialrechnung stellten sich Mathematiker und Physiker ihrer Zeit die Frage nach Tangenten an be-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

stimmte Kurven. Körle (2009, S.40f.) gibt ein Beispiel von Fermat. Letztlich nutzte dieser eine Zerlegung, wie sie der weiter unten bei der linearen Approximation beschriebenen entspricht. Er rechnete zwar zumindest unlauter, kam jedoch tatsächlich auf das richtige Ergebnis. Auch wenn er annahm, er hätte bereits die Tangente gegeben und dann den Wert der sog. Subtangente sucht, ist darin ein wichtiger Schritt auf dem Weg der Entwicklung der Differentialrechnung enthalten. Dieser lässt sich durchaus auch für Mathematikunterricht fruchtbar machen.

Lineare Approximation

Die Grundfrage lautet, welche Bedingungen an eine Gerade g gestellt werden sollen, damit diese als in einem gewissen Sinn beste lokale lineare Approximation für die Funktion f akzeptiert wird.

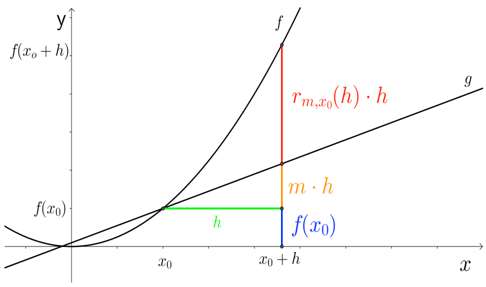


Abbildung 1

Ist f eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion und $g = m \cdot x + n$ eine lineare Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- $g(x_0) = f(x_0)$ und
- $f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + r_{m,x_0}(h) \cdot h,$

  wobei $\lim_{h\to 0} r_{m,x_0}(h) = 0,$

dann heißt m die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Abbildung 2

Zunächst sollen f und g an der Stelle x_0 übereinstimmen. Damit erhält man jedoch ein ganzes Geradenbüschel durch den Punkt $(x_0,f(x_0))$. Für alle Geraden dieses Büschels strebt der absolute Fehler der Approximation mit h gegen null. Um eine Gerade als beste Approximation auszuzeichnen, wird zusätzlich gefordert, dass nicht nur der absolute Fehler, sondern auch der zu h relative Fehler $r_{m,x0}$ mit h gegen null geht. Dies liefert dann die Definition der Differenzierbarkeit wie in Abbildung 2.

Chancen und Hürden

Jede Wahl eines Zugangs zur Einführung eines neuen mathematischen Begriffes oder Konzeptes im Unterricht birgt in sich bestimmte Chancen und Hürden.

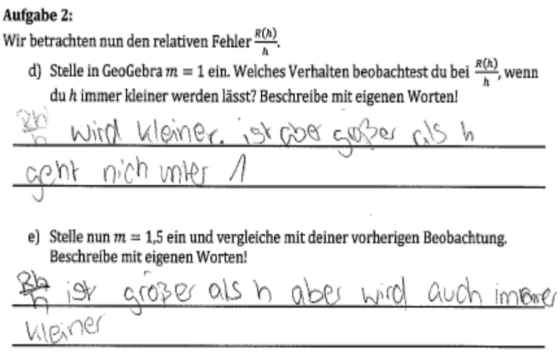
Eine Chance ist, dass eine Grundidee der Analysis integraler Bestandteil des vorgestellten Zugangs ist: die Idee der Linearisierung, das heißt „Krummes" durch „Geradliniges" möglichst gut anzunähern und so beschreiben zu können. Dies ist jedoch eine vornehmlich innermathematische und verhältnismäßig abstrakte Motivation – letzteres ist durchaus als eine Hürde einzuordnen. Der gewählte Zugang erlaubt es hervorzuheben, wie Funktionen als

Modell und Prognose(-instrumente) verwendet werden können. Eine Hürde stellt der Übergang vom absoluten zum relativen Fehler dar. Der für die Differentialrechnung charakteristische Vorgang der Bildung von Grenzwerten kommt bei der Betrachtung des Fehlers der Approximation zum Tragen. Allerdings müssen dabei im Wesentlichen „nur" Nullfolgen von nicht-Nullfolgen bzw. Grenzwerte gleich und ungleich null unterschieden werden. Im Umgang mit konkreten Beispielen zeigt sich auch, dass Schüler hier einen Begriff vom Grenzwert als Schranke erwerben, der geeignet aufgefasst eine statische Sicht auf den Grenzwert ermöglichen kann. Weiterhin ist der Zugang nützlich, will man beispielsweise im Rahmen eines Leistungskurses Ableitungsregeln beweisen, da sich die Beweise bei dieser Definition der Ableitung durch direktes Ausrechnen ergeben. Außerdem trägt dieser Zugang auch weiter als andere, da er eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen zulässt.

Unterricht

Im Folgenden wird ein Ausschnitt aus einer Unterrichtseinheit zur Einführung des Ableitungsbegriffs aus der Perspektive der linearen Approximation dargestellt. Ziel ist es aufzuzeigen, welche Vorstellungen zum Grenzwertbegriff Schüler der 10. Klassenstufe bei einer Einführung des Ableitungsbegriffs über lineare Approximation entwickeln können. Die Schülerlösungen in den Abbildungen 3 und 4 stammen aus einem Unterrichtsversuch in einem Wahlpflichtkurs Mathematik Klasse 10 eines Berliner Gymnasiums.

Dem vorgestellten Ausschnitt vorangegangen waren verschiedene vorbereitende Aufgaben und Problemstellungen zum Themenbereich „(lineare) Funktionen als Modell und Prognose", die der Auffrischung von Wissen aus der Mittelstufe und gleichzeitig der Einleitung in den neuen Themenkomplex dienten. Hierauf aufbauend wurde die Frage aufgeworfen, welche Gerade bzw. lineare Funktion denn eine gegebene Funktion in einer Umgebung einer bestimmten Stelle besonders gut beschreibt – denn natürlich sind die wenigsten Zusammenhänge selbst linear, lassen sich jedoch lokal mit Hilfe von linearen Funktionen beschreiben. Zunächst wurde eine zur Abbildung 1 ähnliche Grafik für ein konkretes Funktionsbeispiel entwickelt. Den Schülern standen Arbeitsblätter mit konkreten Aufgabenstellungen und GeoGebra Applets zur Bearbeitung der Aufgaben zur Verfügung. Die Applets sind bewusst so gestaltet, dass die Schüler sich auf die wesentlichen Vorgänge konzentrieren können, indem sich ihnen einige, jedoch nicht zu viele, Möglichkeiten der Variation bieten.



Aufgabe 2:

Wir betrachten nun den relativen Fehler $\frac{R(h)}{h}$.

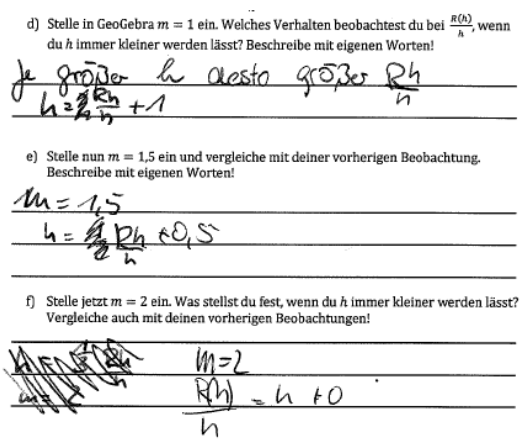
d) Stelle in GeoGebra $m = 1$ ein. Welches Verhalten beobachtest du bei $\frac{R(h)}{h}$, wenn du h immer kleiner werden lässt? Beschreibe mit eigenen Worten!

$\frac{Rh}{h}$ wird kleiner. ist ~~abe~~ größer als h geht nich unter 1

e) Stelle nun $m = 1{,}5$ ein und vergleiche mit deiner vorherigen Beobachtung. Beschreibe mit eigenen Worten!

$\frac{Rh}{h}$ ist größer als h aber wird auch immer kleiner

Abbildung 3



d) Stelle in GeoGebra $m = 1$ ein. Welches Verhalten beobachtest du bei $\frac{R(h)}{h}$, wenn du h immer kleiner werden lässt? Beschreibe mit eigenen Worten!

je größer h desto größer $\frac{Rh}{h}$

$h = \frac{Rh}{h} + 1$

e) Stelle nun $m = 1{,}5$ ein und vergleiche mit deiner vorherigen Beobachtung. Beschreibe mit eigenen Worten!

$m = 1{,}5$

$h = \frac{Rh}{h} + 0{,}5$

f) Stelle jetzt $m = 2$ ein. Was stellst du fest, wenn du h immer kleiner werden lässt? Vergleiche auch mit deinen vorherigen Beobachtungen!

$m = 2$

$\frac{R(h)}{h} = h + 0$

Abbildung 4

Die in den Abbildungen 3 und 4 gezeigten Ausschnitte zeigen gut, wie die Schüler mit der für sie unvertrauten Grenzwertbildung umgehen (die an dieser Stelle nicht explizit so genannt und nicht thematisiert wird). Die Schülernotizen prägten das anschließende Unterrichtsgespräch. Die Schüler haben hier eine Sicht auf Grenzwerte als Schranke gewonnen: „geht nicht unter 1“(Abbildung 3). Abbildung 4 zeigt ein Beispiel für den Versuch, dies arithmetisch zu greifen. Im Unterrichtsgespräch ergab sich hieraus dann, dass als beste Approximation die Gerade gewählt werden sollte, bei der null diese Schranke ist, denn im Umkehrschluss hieße das ja, dass der Fehler so klein wird, wie wir wollen, wenn nur h klein genug gewählt wird.

Ausblick

Die Unterrichtseinheit wird ein weiteres Mal im Frühjahr 2015 im regulären Mathematikunterricht einer 10. Klasse eines Berliner Gymnasiums erprobt. Auf theoretischer Ebene wird die Frage beantwortet, welchen Zielen im Sinne von Allgemeinbildung und von extern normativ formulierten Leitideen man mit einem solchen Zugang (eher) gerecht werden kann und welche horizontalen und vertikalen Vernetzungsmöglichkeiten sich eröffnen.

Literatur

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

DIFF (1978). Analysis MA1 Zugänge zur Differentialrechnung. *MATHEMATIK Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II.* Tübingen: Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen.

Körle, H.-H. (2009). *Die phantastische Geschichte der Analysis.* München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH.

Wittmann, E. (1972). Die Approximation als verbindendes Element in der Analysis. *Mathematisch-physikalische Semesterberichte*, 174-186.