Tobias HOCK, Aachen

Extrinsische Rechtfertigung im Mathematikunterricht: Welche Axiomensysteme setzen sich durch?

„Schülern sollte bewusst gemacht werden, dass es Axiome in der Mathematik gibt, welche Rolle sie spielen und wie Mathematiker zu einer Einigung darüber gelangen, welche Axiome akzeptiert werden sollten.“ (Jahnke, Wambach 2013, S. 469, meine Übers.)

Die in diesem Zitat zum Ausdruck gebrachte Haltung wird von mir in vollem Umfang geteilt. Sie bildet das Fundament der hier angestellten Überlegungen, die Teil meines Promotionsprojekts sind. Kernanliegen ist die Entwicklung zeitgemäßer Unterrichtsmaterialien zur axiomatischen Methode für die Sekundarstufe II.

In Abschnitt 1 des vorliegenden Beitrags wird in kompakter Form dargestellt, welche Begriffe für eine Einführung in axiomatisches Denken und Arbeiten aus meiner Sicht mit Schülern erarbeitet werden sollten. Abschnitt 2 ist ein fachlicher und theoretischer Exkurs, der als Hintergrundwissen für den Leser gedacht ist und in dem die Bedeutung des Begriffs der Hypothese bzw. Forderung bei der Entwicklung und Bewertung mathematischer Theorien geschildert wird. Da dieser Aspekt im Themenbereich Zahlbereichserweiterungen besonders deutlich wird, skizziere ich in Abschnitt 3 ein Unterrichtskonzept für die Einführung der komplexen Zahlen, das den Fokus auf die Frage legt, warum sich diese anfangs auch als „absurd“ bezeichneten Zahlen letztendlich durchgesetzt haben.

1. Begriffliche Vorarbeit

Die unterrichtliche Kommunikation über Beweise und deren Aussagekraft erfordert einen überschaubaren Begriffsapparat, der anhand einfacher und den Schülern bekannter Beispiele (z.B. Innenwinkelsummensatz oder binomische Formeln) aufgebaut werden kann. Wichtig ist die Erkenntnis, dass ein *Beweis* die logische Herleitung einer *Behauptung* (oder auch *Vermutung*, *Hypothese*) aus bereits akzeptierten bzw. bewiesenen *Aussagen* ist: ein Beweis liefert eine gesicherte Aussage der Form „*Wenn* … gilt, *dann* gilt zwingend auch …“. Um die dabei theoretisch entstehende, rückwärts unendliche Folgerungskette zu vermeiden, muss man gewisse Aussagen unbewiesen an den Anfang einer Theorie setzen, die sogenannten *Axiome*. Eine bewiesene Aussage nennt man *Satz* oder *Theorem*.

Dieser Blick auf Beweise, welcher die logische Abhängigkeit von zu beweisender Aussage und dazu benötigten Sätzen in Form von Wenn-Dann-Aussagen betont und somit die Notwendigkeit von Ausgangssätzen ver-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

deutlicht, ist wesentlicher Bestandteil eines angemessenen Bildes von Mathematik.

2. Das Prinzip der extrinsischen Rechtfertigung

Eine der prägendsten Entwicklungen der modernen Mathematik war die Abkehr von einer Auffassung von Axiomen als aus sich heraus evidenten Tatsachen, die der Mathematik einen absoluten Wahrheitsanspruch einräumten, hin zu einer formalistischen Auffassung, die lediglich die Widerspruchsfreiheit der Axiome (und damit der daraus deduzierbaren Theorie) fordert und auf ihre inhaltliche Interpretation verzichtet. Allerdings erklärt eine solche Sichtweise nicht, warum sich bestimmte Theorien und Axiomensysteme durchsetzen, andere jedoch nicht.

Das Prinzip der extrinsischen Rechtfertigung (wie es Maddy 1990 verwendet) liefert einen Erklärungsansatz für dieses Phänomen: Anstatt Axiome intrinsisch – d.h. aufgrund ihrer Selbst-Evidenz – zu rechtfertigen, fasst die Mathematik diese häufig als Hypothesen auf und untersucht die (inner- wie außermathematische) Fruchtbarkeit der sich daraus (via Deduktion) ergebenden Konsequenzen. Der Terminus Fruchtbarkeit umfasst dabei – ähnlich wie in den empirisch arbeitenden Naturwissenschaften – Aspekte wie „verifiable consequences, lack of disconfirmation, breadth and explanatory power, intertheoretic connections, simplicity, elegance, and so on“ (Maddy 1990, S. 75).

Aufbauend auf dem in Abschnitt 1 geschilderten Wenn-Dann-Charakter mathematischer Aussagen kann mit Schülern ein erweitertes Verständnis mathematischer Theorieentwicklung erarbeitet werden, welches auch extrinsische Rechtfertigungsmuster umfasst. Die für die Schule relevante Erkenntnis sollte sein, dass die Ausgangssätze einer Theorie in bestimmten Fällen eher den Charakter von Annahmen als von Grundwahrheiten haben und sich demnach am Nutzen der daraus deduzierbaren Theorie messen lassen müssen. Für unterrichtliche Zwecke erscheint es daher sinnvoll, statt des Begriffs *Axiom* den der *Hypothese* oder *Forderung* zu benutzen.

3. Unterrichtsreihe: Komplexe Zahlen

Zur unterrichtspraktischen Ausgestaltung des Prinzips der extrinsischen Rechtfertigung empfehle ich einen historisch-genetischen Ansatz für die Einführung der komplexen Zahlen, der in ähnlicher Weise von Malle 2007 geschildert wird und beispielsweise für Zusatzkurse in der Sekundarstufe II geeignet ist. Meine Wahl fiel auf dieses Thema, da die Wichtigkeit von Hypothesen in Form des Permanenzprinzips hier deutlich zu Tage tritt und intrinsische Rechtfertigungen aufgrund der anfangs rein symbolisch auftretenden neuen Zahlen nicht möglich sind.

Die Auseinandersetzung mit komplexen Zahlen begann im 16. Jh. n.Chr. und resultierte aus dem Versuch, allgemeine Lösungsformeln für kubische Gleichungen zu finden. Der italienische Mathematiker und Arzt Gerolamo Cardano entwickelte eine Formel, bei der in bestimmten Fällen Wurzeln aus negativen Zahlen auftreten. Beispielsweise erhält man für die Gleichung $x^3 = 15x + 4$ als Lösung $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Ein Vorteil gegenüber einer Heranführung an komplexe Zahlen über quadratische Gleichungen mit negativer Diskriminante ist, dass Schüler anschaulich direkt einsehen können, dass eine kubische Gleichung (mindestens) eine reelle Lösung haben muss, wodurch die Frage nach dem Nutzen dieser zunächst seltsam anmutenden Lösungen von Anfang an eine zentrale Rolle spielt; bei quadratischen Gleichungen mit nicht-reellen Lösungen könnte man hingegen argumentieren, dass es auch geometrisch sinnlos sei, nach einer Lösung der Gleichung überhaupt zu fragen.

Dem Ingenieur und Mathematiker Rafael Bombelli gelang es, seine Vermutung, dass sich „Zahlen" des Typs $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}}$ immer auch in der Form $c + d \cdot \sqrt{-1}$ darstellen lassen, anhand einzelner Beispiele und unter Forderung der Gültigkeit der bekannten Rechengesetze sowie der Gleichung $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$ zu verifizieren. Beispielsweise konnte er zeigen, dass obige Lösung gleich $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ ist, was offensichtlich eine Lösung der Ausgangsgleichung $x^3 = 15x + 4$ liefert. Die Erkenntnis, dass das Rechnen mit diesen neuen Zahlen – das sich hier keinesfalls intrinsisch rechtfertigen lässt, da zunächst nur auf rein symbolischer Ebene ohne konkrete Anschauungen oder Intuitionen operiert wird – zu sinnvollen und brauchbaren Ergebnissen führt, motivierte einige Mathematiker, sich weiter mit ihnen zu beschäftigen. Nach der Einführung des Symbols i für eine Zahl mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ durch Euler und der geometrischen Visualisierung in der Zahlenebene durch Gauss fanden die komplexen Zahlen schließlich durch Hamiltons Definition als Zahlentupel ihren endgültigen Platz in der Mathematik. In der Folge wurden auch zahlreiche außermathematische Anwendungen gefunden.

Das Prinzip der extrinsischen Rechtfertigung kann Schülern bei dieser historisch orientierten Betrachtung der komplexen Zahlen leicht verdeutlicht werden: Ausgehend von einer Problemstellung (Lösen von Gleichungen) wurden hypothetische Annahmen formuliert (die Existenz einer Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ sowie die Forderung, mit komplexen Zahlen „wie gewohnt" rechnen zu können), Konsequenzen deduziert (Rechnen auf Grundlage der postulierten Gesetze) und auf ihre Fruchtbarkeit untersucht. Im vorliegenden Fall kann man festhalten, dass sich die den komplexen

Zahlen zugrunde liegenden Hypothesen u.a. deshalb durchgesetzt haben, weil sie sich inner- wie außermathematisch als äußerst ergiebig erwiesen – und nicht etwa, weil sie evident wären.

4. Fazit und Ausblick

Das geschilderte Unterrichtskonzept ist geeignet, um Schülern den hypothetisch-deduktiven Charakter der Mathematik näherzubringen, indem die zentrale Rolle von (vorläufigen) Forderungen/Hypothesen deutlich wird. Von deren Nützlichkeit – geschweige denn „Richtigkeit" – muss man anfangs nicht überzeugt sein, um mathematisch mit ihnen arbeiten zu können. Eine Entscheidung für oder gegen die Ausgangshypothesen geschieht a posteriori durch Betrachtung der darauf aufgebauten Theorie.

Im Anschluss an diese Unterrichtseinheit kann auch anhand anderer Zahlbereiche die Bedeutung von Hypothesen/Forderungen und deren extrinsische Rechtfertigung verdeutlicht werden:

- Die Frage „Warum ist $(-1) \cdot (-1) = 1$?" kann mathematisch nur dann ehrlich beantwortet werden, wenn Schülern der hypothetisch-deduktive Zusammenhang zum Distributivgesetz bewusst ist: Wenn $(-1) \cdot (-1) = -1$ *gefordert* wird, muss man auf das Distributivgesetz verzichten; *fordert* man umgekehrt die Gültigkeit des Distributivgesetzes für negative Zahlen, ergibt sich $(-1) \cdot (-1) = 1$ als logisch zwingende Konsequenz.
- Ausgehend von der *Forderung* „$0 \cdot b = 1$" für eine hypothetisch neue Zahl b kann man Schülern mit Rechnungen wie beispielsweise

$$1 = 0 \cdot b = (0 + 0) \cdot b = 0 \cdot b + 0 \cdot b = 1 + 1 = 2$$

  eine „Theorie" präsentieren, die sich aufgrund der daraus folgenden Ungültigkeit vieler fundamentaler Rechenregeln (zumindest im Schulbereich) nur schwer rechtfertigen lässt.

Literatur

Jahnke, H. N., Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-based approach. *ZDM, 45,* 469–482.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Malle, G. (2007). Die spannende Suche nach dem *i*. *Mathematik lehren, 142,* 60–63.