Martin Erik HORN, Berlin

# Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra

Die Mathematik ist eine Geisteswissenschaft: Unser Gehirn erfindet Axiome, auf denen wir mit Hilfe logischer Schlussfolgerungen ein Gerüst an mathematischen Beziehungen aufbauen. Die Physik ist eine Naturwissenschaft: Sie beruht auf zielgerichteter Beobachtung unserer Außenwelt, wobei die Überprüfung von Hypothesen mit Hilfe von Experimenten das zentrale wissenschaftliche Instrument darstellt.

Es muss also zu Konflikten kommen, wenn physikalisch und physikdidaktisch geprägte Wissenschaftler sich in Mathematik und Mathematikdidaktik einmischen – Sie bringen ein anderes Wissenschaftsbild mit. Im Bereich der Linearen Algebra führt dies dazu, dass ich als ein solcher Mensch mit physikorientierter Vorprägung der derzeit üblichen konventionellen Lineare Algebra skeptisch gegenüber stehe und eine alternative Fassung der Linearen Algebra auf Grundlage der Geometrischen Algebra (Horn 2015) als didaktisch tragfähiger vorziehe. Grund dafür ist ein Experiment.

## 1. Diracs Belt Trick – Makroskopische Veranschaulichung des Spins ½

Mit Hilfe einer Zeitschrift, die durch Schnüre in der Umgebung befestigt wird, kann gezeigt werden, dass in unserer Welt makroskopische Situationen mit einer Rotationssymmetrie von $4\pi$ (also einem Spin von ½) existieren (Misner et al. 1973, S. 1149), (Penrose & Rindler 1984, S.43), (Snygg 1997, S. 12). Spin ½-Teilchen sind nichts rein Quantenmechanisches, sondern Teil unserer Alltagserfahrungen, die wir leider nur allzu oft übersehen.

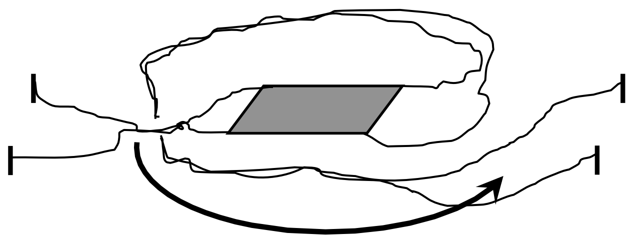

**Abb. 1:** Diracs Veranschaulichung des Spins ½: Nach einer Rotation um $4\pi$ können die an der Zeitschrift befestigten Schnüre entwirrt werden, ohne die Zeitschrift zurückzudrehen.

Die Schlussfolgerung aus diesem Experiment ist so simpel wie zwingend: Wollen wir die Welt, in der wir leben, mathematisch möglichst einfach beschreiben, benötigen wir eine mathematische Sprache, mit der sich auch $4\pi$-Symmetrien mathematisch einfach und zugänglich beschreiben lassen. Die mathematische Sprache, die dies leistet, wird Geometrische Algebra

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

genannt (Hestenes 2003), (Doran & Lasenby 2003). Im dreidimensionalen Fall entspricht die Geometrische Algebra der Pauli-Algebra (Horn 2012).

## 2. Konzeptionelle Grundlagen der Geometrischen Algebra

Die Geometrische Algebra verknüpft geometrische Größen auf algebraischer Grundlage. Mit Vektoren, orientierten Flächenstücken oder orientierten Volumina kann in der Geometrischen Algebra genauso wie mit Skalaren gerechnet werden (Hestenes 2003). Die einzig neu zu beachtende Regel ist, dass unterschiedliche Basisvektoren antikommutieren (Parra Serra 2009, S. 823), was in Abbildung 2 anschaulich gezeigt wird.

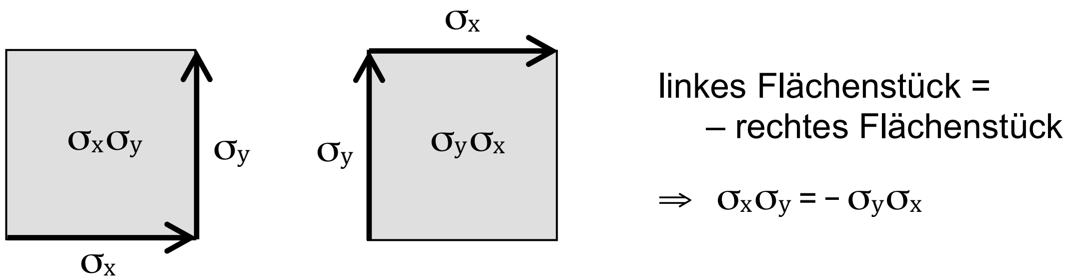


**Abb. 2:** Die Orientierung von Flächenstücken (Bivektoren) begründet die Vertauschungsregeln der Pauli-Algebra.

Die Multiplikation geometrischer Größen verdient in der Geometrischen Algebra besondere Aufmerksamkeit, da sich das Produkt zweier Vektoren **a** und **b** in Anteile unterschiedlicher Symmetrie aufspalten lässt:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \text{inneres Produkt} + \text{äußeres Produkt} \qquad (1)$$

In der Linearen Algebra nutzen wir insbesondere aus, dass das äußere Produkt zweier Vektoren mit $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ antikommutativ ist. Somit können in Linearen Gleichungssystemen Vektoren durch äußere Multiplikation mit sich selbst gezielt eliminiert werden.

## 3. Geometrische Interpretation von Linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme (LGS) werden geometrisch oft zeilenweise interpretiert, indem jede Zeile als Geradengleichung gelesen und graphisch durch Schnittpunktermittlung ausgewertet wird.

Eine alternative graphische Darstellung bietet die spaltenweise Analyse eines LGS. So führt das lineare Gleichungssystem mit drei Unbekannten von Gl. (2) auf die drei Koeffizientenvektoren $\mathbf{a} = a_{11}\,\sigma_x + a_{21}\,\sigma_y + a_{31}\,\sigma_z$, $\mathbf{b} = a_{12}\,\sigma_x + a_{22}\,\sigma_y + a_{32}\,\sigma_z$ und $\mathbf{c} = a_{13}\,\sigma_x + a_{23}\,\sigma_y + a_{33}\,\sigma_z$ sowie den Ergebnisvektor $\mathbf{d} = d_1\,\sigma_x + d_2\,\sigma_y + d_3\,\sigma_z$.

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = d_1$$

$$a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = d_2 \qquad (2)$$
$$a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = d_3$$

Wir sehen im LGS (2) also nicht drei verschiedene Gleichungen, sondern lediglich eine einzige Gleichung

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z = \mathbf{d} \qquad (3)$$

Nichts anderes verfolgt die moderne Physik: Durch Geometrisierung algebraisch aufgefundener Naturgesetze werden diese in einen einheitlichen Rahmen gesetzt und als ein einziges geometrisches Konstrukt verstanden.

Die Lösung des vorgegebenen LGS besteht nun darin, die Unbekannten x, y und z so zu ermitteln, dass das x-fache des Vektors **a**, das y-fache des Vektors **b** und das z-fache des Vektors **c** dem Ergebnisvektor **d** entspricht.

## 4. Lösung des Linearen Gleichungssystems

Mit Hilfe des äußeren Produkts lässt sich Gl. (3) leicht auswerten. So können die beiden Variablen y und z durch äußere Multiplikation von Gl. (3) mit den Vektoren **b** und **c** eliminiert und der Wert für x gefunden werden. Analog lassen sich y und z bestimmen:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\,x = \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{d} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \qquad (4)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\,y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{d} \wedge \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{d} \wedge \mathbf{c}) \qquad (5)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\,z = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) \qquad (6)$$

Anstelle von Determinantenberechnungen, die für Lernende unvermittelt abstrakt wirken, führen die Gleichungen (4) bis (6) auf konkrete Volumenberechnungen der Parallelepipede, die durch die Vektoren **a**, **b**, **c** und **d** aufgespannt werden. Dies liefert einen gleichwohl anschaulichen wie eingängigen Zugang zu Determinanten: Die Determinante eines n-dimensionalen LGS entspricht dem Volumen des n-dimensionalen Hyper-Parallelepipeds, das mit Hilfe der Koeffizientenvektoren gebildet werden kann.

## 5. Transfer einer physiknahen Mathematik in physikferne Domänen

Historisch ist die Geometrische Algebra ein physikdidaktisch motiviertes Konstrukt, das von David Hestenes und zahlreichen Wissenschaftlern insbesondere im englischsprachigen Raum sehr zielgerichtet als eine oder sogar als die mathematische Sprache der Physik (Hestenes 2003) entwickelt wurde.

Es zeigt sich jedoch, dass diese physikalisch motivierte Mathematik einen von der Physik abgehobenen Wert besitzen muss, da sie sich sehr erfolgreich auch in Bereichen außerhalb der Physik zur Modellierung unterschiedlichster Fragestellungen einsetzen lässt. So wurden die hier vorgestellten Grundlagen einer modernen Linearen Algebra unter Bezug auf die Ideen der Geometrischen Algebra in einem Kurs zur Wirtschaftsmathematik an der HWR Berlin (Horn 2015) unterrichtet und zur Lösung einfacher wirtschaftswissenschaftlicher Fragestellungen herangezogen. Diese Ergänzung zur üblichen Darstellung der Linearen Algebra umfasste zwölf Vorlesungs- und Übungsstunden, wobei die Hälfte davon auf die Vermittlung der Grundlagen der Geometrischen Algebra verwendet wurde (Horn 2014/2015, Teil 1). Zur Lösung einfacher Linearer Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten wurde ein Vorlesungstermin im Umfang von vier Vorlesungsstunden benötigt, wobei Fragestellungen aus dem Bereich der Materialverflechtung als grundlegende ökonomische Anwendungsbeispiele gewählt wurden (Horn 2014/2015, Teil 2). In einem Ausblick im Umfang von zwei Stunden wurde abschließend mit Hilfe des direkten Produktes die Modellierung von LGS höherer Dimension diskutiert. Dies führt dazu, dass über die Pauli-Algebra hinaus auch einfache geometrische Beziehungen auf Grundlage der Dirac-Algebra besprochen werden konnten (Horn 2014/2015, Teil 3). Auch komplexere wirtschaftswissenschaftliche Themenstellungen wie beispielsweise die Input-Output-Analyse lassen sich so konzeptionell recht einfach erschließen.

## Literatur

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Hestenes, D. (2003). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. American Journal of Physics 71 (2), 104–121.

Horn, M. E. (2012). Pauli-Algebra und $S_3$-Permutationsalgebra. Eine algebraische und geometrische Einführung. www.bookboon.com/de, London/Kopenhagen: Ventus.

Horn, M. E. (2014/2015). Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra crash course. Part I: Basics & Introduction, Part II: Solving systems of linear equations, Part III: The direct product & Solving higher-dimensional systems of linear equations. OHP slides of LV 200691.01 – Mathematics for Business and Economics, HWR Berlin.

Horn, M. E. (2015). Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. Beitrag zur DPG-Jahrestagung in Wuppertal. Veröffentlichung vorgesehen unter www.phydid.de

Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A. (1973). Gravitation. New York: Freeman.

Parra Serra, J. M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras 19 (3/4), 819–834.

Penrose, R. & Rindler, W. (1984). Spinors and Space-Time. Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields. Cambridge: Cambridge University Press (CUP).

Snygg, J. (1997). Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. New York: Oxford University Press.