

Martin Erik HORN, Berlin

Strukturierte Beschreibung von Reflexionen

In Lehrbüchern erfolgt die mathematische Darstellung von Reflexionen oft wenig strukturiert, konzeptuell ungeordnet und in vielen Fällen nicht leicht nachvollziehbar. Insbesondere die unterschiedlichen Darstellungen von Operatoren und Operanden (beispielsweise von Operatoren als Reflexionsmatrizen, die auf Vektoren als Operanden einwirken), steht einem tiefen Verständnis von Reflexionen im Wege.

Deshalb soll hier eine Möglichkeit aufgezeigt werden, bei der Operatoren und Operanden durch gleichartige mathematische Objekte dargestellt werden. So sollte es keinen Unterschied machen, ob ein Vektor als Operand fungiert und reflektiert wird, oder ob der gleiche Vektor als Repräsentant einer Achse und damit als Operator fungiert, der die Reflexion an dieser Achse vermittelt. In einer konsistenten Beschreibung werden gleiche Größen gleichartig ausgedrückt werden. Die mathematische Sprache, die dies gestattet, wird Geometrische Algebra genannt (Doran & Lasenby 2003).

1. Überblick über die Reflexionsformeln

Reflexionen von Punkten (Skalare), Vektoren (orientierte Streckenstücke), Bivektoren (orientierte Flächenelemente), Trivektoren (orientierte dreidimensionale Volumenelemente), Quadrovektoren (orientierte vierdimensionale Hyper-Volumenelemente), Pentavektoren (orientierte fünfdimensionale Hyper-Volumenelemente) an Punkten, Achsen, Ebenen, dreidimensionalen Räumen oder beliebig höherdimensionalen Hyperräumen werden dann durch das Sandwich-Produkt beschrieben:

$$\text{reflektiertes Objekt} = \pm \left(\text{reflektierendes Objekt} \right) \left(\text{ursprüngliches Objekt} \right) \left(\text{reflektierendes Objekt} \right)^{-1}$$

Hier werden Reflexionen als links- und rechtsseitige Multiplikation von Größen der Geometrischen Algebra (Clifford Algebra) ausgedrückt. Zum Verständnis dieser Beziehung ist ein Kenntnis der Matrizenmultiplikation nicht notwendig. Reflexionen können somit als einfache Produkte unter Berücksichtigung der Vertauschungsregeln berechnet werden (Doran & Lasenby 2003), (Horn 2010). Dies ist mit Sicherheit einfacher als ein Umgang mit Matrizen, die nicht immer problemlos zu konstruieren sind.

Im Folgenden werden diese Formeln explizit ausgeführt. Gleichungen (9) – (11) und (15) – (17) sind bekannt (Vince 2010, S. 258). Die anderen Formeln wie auch ihre höherdimensionalen Verallgemeinerungen (Horn 2015) folgen zwanglos und gelten auch in raumzeitlichen Geometrien.

Reflexion an einem Punkt, der durch den Skalar ℓ repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k $k_{\text{ref}} = \ell k \ell^{-1}$ (2)

Vektor \mathbf{r} $\mathbf{r}_{\text{ref}} = -\ell \mathbf{r} \ell^{-1}$ (3)

orientiertes Flächenstück \mathbf{A} $\mathbf{A}_{\text{ref}} = \ell \mathbf{A} \ell^{-1}$ (4)

orientiertes Volumenelement \mathbf{V} $\mathbf{V}_{\text{ref}} = -\ell \mathbf{V} \ell^{-1}$ (5)

vierdimensionales Hyper-Volumenelement \mathbf{H} $\mathbf{H}_{\text{ref}} = \ell \mathbf{H} \ell^{-1}$ (6)

fünfdimensionales Hyper-Volumenelement \mathbf{B} $\mathbf{B}_{\text{ref}} = -\ell \mathbf{B} \ell^{-1}$ (7)

Reflexion an einer Achse, die durch den Vektor \mathbf{n} repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k $k_{\text{ref}} = \mathbf{n} k \mathbf{n}^{-1}$ (8)

Vektor \mathbf{r} $\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{n} \mathbf{r} \mathbf{n}^{-1}$ (9)

orientiertes Flächenstück \mathbf{A} $\mathbf{A}_{\text{ref}} = \mathbf{n} \mathbf{A} \mathbf{n}^{-1}$ (10)

orientiertes Volumenelement \mathbf{V} $\mathbf{V}_{\text{ref}} = \mathbf{n} \mathbf{V} \mathbf{n}^{-1}$ (11)

vierdimensionales Hyper-Volumenelement \mathbf{H} $\mathbf{H}_{\text{ref}} = \mathbf{n} \mathbf{H} \mathbf{n}^{-1}$ (12)

fünfdimensionales Hyper-Volumenelement \mathbf{B} $\mathbf{B}_{\text{ref}} = \mathbf{n} \mathbf{B} \mathbf{n}^{-1}$ (13)

Reflexion an einer Ebene, die durch den Bivektor \mathbf{N} repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k $k_{\text{ref}} = \mathbf{N} k \mathbf{N}^{-1}$ (14)

Vektor \mathbf{r} $\mathbf{r}_{\text{ref}} = -\mathbf{N} \mathbf{r} \mathbf{N}^{-1}$ (15)

orientiertes Flächenstück \mathbf{A} $\mathbf{A}_{\text{ref}} = \mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1}$ (16)

orientiertes Volumenelement \mathbf{V} $\mathbf{V}_{\text{ref}} = -\mathbf{N} \mathbf{V} \mathbf{N}^{-1}$ (17)

vierdimensionales Hyper-Volumenelement \mathbf{H} $\mathbf{H}_{\text{ref}} = \mathbf{N} \mathbf{H} \mathbf{N}^{-1}$ (18)

fünfdimensionales Hyper-Volumenelement \mathbf{B} $\mathbf{B}_{\text{ref}} = -\mathbf{N} \mathbf{B} \mathbf{N}^{-1}$ (19)

Reflexion an einem dreidimensionalen Raum, der durch den Trivektor \mathbf{T} repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k $k_{\text{ref}} = \mathbf{T} k \mathbf{T}^{-1}$ (20)

Vektor \mathbf{r} $\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{T} \mathbf{r} \mathbf{T}^{-1}$ (21)

orientiertes Flächenstück \mathbf{A} $\mathbf{A}_{\text{ref}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$ (22)

orientiertes Volumenelement \mathbf{V} $\mathbf{V}_{\text{ref}} = \mathbf{T} \mathbf{V} \mathbf{T}^{-1}$ (23)

vierdimensionales Hyper-Volumenelement \mathbf{H} $\mathbf{H}_{\text{ref}} = \mathbf{T} \mathbf{H} \mathbf{T}^{-1}$ (24)

fünfdimensionales Hyper-Volumenelement \mathbf{B} $\mathbf{B}_{\text{ref}} = \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{T}^{-1}$ (25)

Reflexion an einem vierdimensionalen Hyperraum, der durch den Quadrovektor Q repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k $k_{\text{ref}} = Q k Q^{-1}$ (26)

Vektor r $r_{\text{ref}} = -Q r Q^{-1}$ (27)

orientiertes Flächenstück A $A_{\text{ref}} = Q A Q^{-1}$ (28)

orientiertes Volumenelement V $V_{\text{ref}} = -Q V Q^{-1}$ (29)

vierdimensionales Hyper-Volumenelement H $H_{\text{ref}} = Q H Q^{-1}$ (30)

fünfdimensionales Hyper-Volumenelement B $B_{\text{ref}} = -Q B Q^{-1}$ (31)

Reflexion an einem fünfdimensionalen Hyperraum, der durch den Pentavektor P repräsentiert wird:

Punkt (Skalar) k $k_{\text{ref}} = P k P^{-1}$ (32)

Vektor r $r_{\text{ref}} = P r P^{-1}$ (33)

orientiertes Flächenstück A $A_{\text{ref}} = P A P^{-1}$ (34)

orientiertes Volumenelement V $V_{\text{ref}} = P V P^{-1}$ (35)

vierdimensionales Hyper-Volumenelement H $H_{\text{ref}} = P H P^{-1}$ (36)

fünfdimensionales Hyper-Volumenelement B $B_{\text{ref}} = P B P^{-1}$ (37)

Nein, es stellt keine Zeit- oder Platzverschwendung dar, die Formeln in dieser Vollständigkeit ausführlich niederzuschreiben. Nur so wird die Vorzeichenstruktur, die andere Autoren abweichend setzen, anschaulich klar. Um beispielsweise ein negatives Vorzeichen in Gl. (9) zu generieren, wird in (Doran & Lasenby 2003, Abs. 2.6), einem Standardwerk zur Geometrischen Algebra, die Reflexion an einem Vektor durch die Reflexion an einem Bivektor ersetzt und konzeptuell verwischt. Manche Autoren schlussfolgern deshalb, dass „a line reflection is actually not a reflection, but a rotation“ (Dorst et al. 2007, S. 169). Wie die folgenden Abschnitte zeigen, gibt es didaktische Gründe, die Wirkungsrichtung dieser Aussage umzukehren. Eine Rotation ist nicht nur eine Rotation, sondern im formalen Sinne von Gl. (1) auch eine Reflexion.

2. Rotationen als Reflexionen an Parallelogrammen

In der Geometrischen Algebra (Clifford Algebra) können orientierte Parallelogramme $n_1 n_2$ als Linearkombination eines Skalars ℓ und eines Bivektors N aufgefasst werden. Eine Rotation stellt deshalb analog zu Gl. (1) immer ein Sandwich-Produkt eines mathematischen Objektes mit einem

orientierten Parallelogramm $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = \ell + \mathbf{N}$ dar. So führt die Zweifach-Reflexion eines Vektors \mathbf{r} an Achsen in Richtung der Vektoren \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 auf die Rotation eines Vektors:

$$\mathbf{r}_{\text{rot}} = (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \mathbf{r} (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^{-1} = (\ell + \mathbf{N}) \mathbf{r} (\ell + \mathbf{N})^{-1} \quad (38)$$

Dies entspricht der Reflexion an einem orientierten Parallelogramm.

3. Hyperbolische Rotationen als Reflexionen

Rotationen als Reflexionen an Parallelogrammen stellen Transformationen dar, bei der Vektoren in transformierte Vektoren überführt werden. Mindestens ebenso interessant ist jedoch der Fall, dass Vektoren bei der Reflexion ihre geometrische Qualität ändern und in Bivektoren überführt werden. Dies gelingt mit der Reflexion an einer Linearkombination $\mathbf{W} = \ell + \mathbf{n}$ aus einem Skalar und einem Vektor.

Hyperbolische Rotation: $\mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{W} \mathbf{r} \mathbf{W}^{-1} = (\ell + \mathbf{n}) \mathbf{r} (\ell + \mathbf{n})^{-1} \quad (39)$

Streckenelemente werden dabei mathematisch in Flächenstücke überführt, wie auch das Beispiel mit $\mathbf{W} = \cosh \alpha + \sinh \alpha \sigma_x$ (siehe Abb. 1) zeigt.

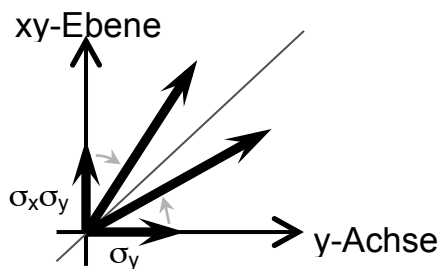


Abb. 1: Der Vektor σ_y wird in $\mathbf{W} \sigma_y \mathbf{W} = \cosh(2\alpha) \sigma_y + \sinh(2\alpha) \sigma_x \sigma_y$ überführt, während der Bivektor $\sigma_x \sigma_y$ in $\mathbf{W} \sigma_x \sigma_y \mathbf{W} = \sinh(2\alpha) \sigma_y + \cosh(2\alpha) \sigma_x \sigma_y$ überführt wird.

Diese Reflexion an $\ell + \mathbf{n}$ entspricht somit einer hyperbolischen Rotation.

4. Ausblick: Konforme Geometrische Algebra (CGA)

Die hier diskutierte Betrachtung von Reflexionen bezieht sich einzig auf Richtungsinformationen geometrischer Größen. Mit Hilfe der CGA können in ähnlicher Weise auch Ortsinformationen reflektiert werden.

Literatur

- Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.
- Dorst, L., Fontijne, D. & Mann, S. (2007). Geometric Algebra for Computer Science. An Object-oriented Approach to Geometry. San Francisco: Morgan Kaufmann.
- Horn, M.E. (2010). Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen: Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit. BzMU, S. 417–420, Münster: WTM.
- Horn, M.E. (2015). Sandwich Products and Reflections. Beitrag zur DPG-Jahrestagung 2015 in Wuppertal. Zur Veröffentlichung vorgesehen unter www.phydid.de.
- Vince, J. (2010): Mathematics for Computer Graphics. 3. Aufl., Heidelberg: Springer.