Martin Erik HORN, Berlin

Wie ein Betrunkener, der doppelt sieht: Die Mathematik der Relativitätstheorie

Zwei Ereignisse stehen in einem engen Spannungsverhältnis: 2014 war der 150. Geburtstag von Hermann Minkowski, 2015 jährt sich die Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Albert Einstein zum 100. Mal. Hermann Minkowski war – in doppeltem Sinne – der Mathematiklehrer Einsteins (Biener 2005). Zum einen war er dies ganz direkt an der ETH Zürich, an der Einstein studierte. Zum anderen veröffentlichte Einstein 1905 die Spezielle Relativitätstheorie in mathematisch recht kruder Formulierung. Erst durch die mathematische Genese eines einheitlichen raumzeitlichen Bildes durch Minkowski konnte hier Klarheit geschaffen werden.

Für Lernende klafft heute jedoch ein tiefer Graben zwischen der Mathematik der SRT (Spezielle Relativitätstheorie), die auf Minkowskis Idee einer imaginären Einbettung räumlicher Koordinaten aufbaut und die wir bereits im schulischen Bereich unterrichten können, und der Mathematik der ART (Allgemeinen Relativitätstheorie) des hochschulischen Kontextes, die ko- und kontravariante Koordinatendarstellungen nutzt. Hier eine Brücke zwischen beiden mathematischen Ansätzen zu errichten, wird die Überquerung dieses Grabens zwischen SRT und ART erheblich vereinfachen (Horn 2015). Eine solche Brücke kann mit Hilfe der Geometrischen Algebra (Hestenes 1986), (Doran & Lasenby 2003) gebaut werden:

$$\mathrm{r} = \begin{pmatrix} ct \\ i\,x \\ i\,y \\ i\,z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{r} = \mathrm{ct}\,\gamma_t + \mathrm{x}\,\gamma_x + \mathrm{y}\,\gamma_y + \mathrm{z}\,\gamma_z \quad \rightarrow \quad \mathrm{r} = \mathrm{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{x}^\mu\,\mathrm{x}^\nu$$

Dass eine solche Brücke zwischen SRT und ART bisher nicht existiert, liegt auch in der Geschichte der SRT begründet, die durch drei missliche Umbrüche charakterisiert ist: Zum einen stirbt Minkowskis 1909 an einem Blinddarmdurchbruch, so dass die mathematische Interpretation der SRT unvollendet bleibt. In einem zweiten Umbruch veröffentlicht Einstein 1915 die ART. Auf einmal ist die Mathematik der ART für Minkowskis Kolleginnen und Kollegen weit interessanter, so dass die Mathematik der SRT (obgleich noch nicht vollständig verstanden) in den Hintergrund tritt.

1928 endlich formuliert Dirac mit den Dirac-Matrizen die mathematisch relevanten Konstrukte, mit denen die Mathematisierung der SRT zu einem Abschluss hätte gebracht werden können. Doch in einer absonderlichen Wendung werden die Dirac-Matrizen als rein quantenmechanische Entitä-

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

ten komplett missgedeutet. Ihre wahre Natur als Basisvektoren pseudo-Euklidischer Raumzeiten der SRT bleibt undiskutiert und wird – zumindest im deutschsprachigen Raum – bis heute oft nicht sachrichtig eingeordnet. Eine kurz gehaltene Einführung in diese Thematik ist in (Horn 2015), eine ausführlichere Darstellung ist in (Doran & Lasenby 2003) zu finden.

1. Kernthese dieses Beitrags

In der Relativitätstheorie stellt ein raumzeitlicher Ortsvektor r keine invariante Größe dar. Stattdessen ist das Raum-Zeit-Intervall als Quadrat des raumzeitlichen Abstands $r^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ eine solche invariante Größe, die bei Lorentz-Transformationen unverändert erhalten bleibt. Es ergeben sich jedoch zwei prinzipiell unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten des raumzeitlichen Abstandsquadrats.

Zum einen kann es in Anlehnung an Minkowski unter Nutzung räumlich imaginärer und zeitlich reeller Koordinaten als Artefakt eines einzigen Koordinatensystems $r^2 = c^2t^2 + (i\,x)^2 + (i\,y)^2 + (i\,z)^2$ beschrieben werden. Dabei werden alle Koordinatenwerte, da konzeptionell gleichartig, als Bestandteile eines einzigen Koordinatensystems gedacht. Zum anderen jedoch kann ein Raum-Zeit-Intervall in Anlehnung an die ko- und kontravariante Darstellungsweise der ART als Kombination

$$r^2 = x_0\,x^0 + x_1\,x^1 + x_2\,x^2 + x_3\,x^3 = ct\;ct + (-x)\;x + (-y)\;y + (-z)\;z$$

eines rechtshändigen Koordinatensystems mit $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ und eines linkshändigen Koordinatensystems mit $x_0 = ct$, $x_1 = -x$, $x_2 = -y$, $x_3 = -z$ gedacht werden. Diese beiden Koordinatensysteme sind in der Mathematik der ART unabdingbar verknüpft und strikt gleichberechtigt.

In einer Mathematisierung unter Nutzung der heute gebräuchlichen konventionellen Vektorrechnung sind beide Bilder möglich und richtig. Allerdings weist die konventionelle Vektorrechnung entscheidende Defizite auf: Sie rechnet nur mit Vektoren, also orientierten Strecken. Flächen oder Volumina werden nicht in natürlicher Weise beschrieben, sondern mathematisch recht mühsam dazugebastelt.

Ganz anders stellt sich die Situation in der Geometrischen Algebra dar, in der die Beschreibung von Flächen, Räumen und Raumzeiten in natürlicher Art und Weise enthalten ist: So stellen die vier Dirac-Matrizen γ_t, γ_x, γ_y, γ_z Repräsentanten der Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit (in der wir seit 1905 leben) dar. Die sechs Dirac-Matrizenprodukte $\gamma_x\gamma_y$, $\gamma_y\gamma_z$, $\gamma_z\gamma_x$, $\gamma_x\gamma_t$, $\gamma_y\gamma_t$, $\gamma_z\gamma_t$ repräsentieren Basis-Bivektoren und somit orientierte Einheits-Flächenstücke, während die vier Dirac-Matrizenprodukte dritten Grades $\gamma_x\gamma_y\gamma_z = I\gamma_t$, $\gamma_y\gamma_z\gamma_t = I\gamma_x$, $\gamma_z\gamma_x\gamma_t = I\gamma_y$, $\gamma_x\gamma_y\gamma_t = I\gamma_z$ Basis-Trivektoren und somit orientierte dreidimensionale Volumenelemente repräsentieren.

Das vierdimensionale raumzeitliche Hyper-Volumenelement $I = \gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_t$ quadriert als Basis-Quadrovektor zu minus eins und verhält sich algebraisch wie eine imaginäre Einheit. Eine Multiplikation mit dieser imaginären Einheit I ändert die geometrische Qualität der Faktoren. So stellen Produkte dieses Basis-Quadrovektors mit Vektoren wie z.B. $I\gamma_t$, $I\gamma_x$, $I\gamma_y$, $I\gamma_z$ keine Vektoren mehr dar, sondern dreidimensionale Volumenelemente. In einer Geometrie, die wie hier nicht nur Vektoren, sondern auch höher-dimensionale Größen umfasst, verbietet sich das Minkowskische Bild imaginärer räumlicher Koordinaten der Werte ix, iy, iz. Somit verbietet sich auch die Interpretation, wir lebten in einem einzigen Koordinatensystem.

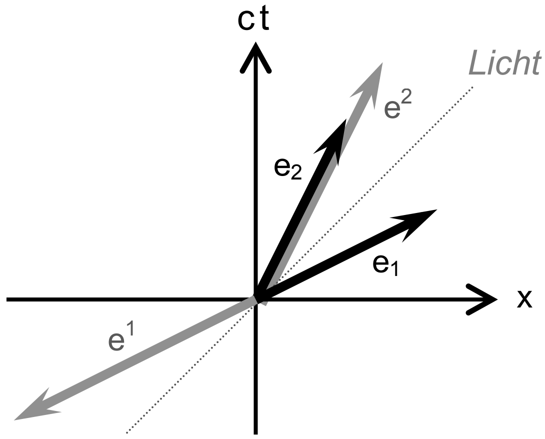
In der Relativitätstheorie leben wir in der Welt eines Betrunkenen, der doppelt sieht und uns einen gleichsam doppelten Blick auf die Welt eröffnet. Mit einem Auge sehen wir die Welt in einem rechtshändigen, mit dem anderen Auge die gleiche Welt in einem linkshändigen Koordinatensystem.

2. Die Brücke: Reziproke Koordinaten

Mit Hilfe des n-dimensionalen Volumenelements $E_n = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \ldots \wedge e_n$ können die zu den Basisvektoren e_i des ersten Koordinatensystems reziproken Basisvektoren e^i eines zweiten Koordinatensystems

$$e^i = (-1)^{i-1}\, e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge \check{e}_i \wedge \ldots \wedge e_n\; E_n^{-1} \qquad \text{mit} \qquad e^i \bullet e_j = \delta^i_j$$

konstruiert werden (Doran & Lasenby 2003, Abs. 4.3), wobei der Vektor e_i entfällt. Die Vektoren e_i und e^i sind nicht notwendigerweise orthonormiert, so dass hier auch schräge stehende Koordinatenachsen beschrieben werden. Es ist dann leicht zu zeigen, dass beispielsweise die beiden orthogonalen raumartigen Vektoren $e_1 = \sigma_x + {}^1\!/_2\,\sigma_y$ und $e_2 = -{}^1\!/_2\,\sigma_x + \sigma_y$ auf die reziproken Vektoren $e^1 = {}^4\!/_5\,\sigma_x + {}^2\!/_5\,\sigma_y = {}^4\!/_5\,e_1$ und $e^2 = -{}^2\!/_5\,\sigma_x + {}^4\!/_5\,\sigma_y = {}^4\!/_5\,e_2$ führen, die Koordinatensysteme gleicher Händigkeit aufspannen (Horn 2015).



$e_1 = \gamma_x + {}^1\!/_2\,\gamma_t \quad e_2 = {}^1\!/_2\,\gamma_x + \gamma_t$

$E_2 = e_1 \wedge e_2 = {}^3\!/_4\,\gamma_x\gamma_t$

$\Rightarrow\; E_2^{-1} = {}^4\!/_3\,\gamma_x\gamma_t$

$e^1 = -{}^4\!/_3\,\gamma_x - {}^2\!/_3\,\gamma_t = -{}^4\!/_3\,e_1$

$e^2 = {}^2\!/_3\,\gamma_x + {}^4\!/_3\,\gamma_t = {}^4\!/_3\,e_2$

Abb. 1: Beispiel reziproker raumzeitlicher Koordinatensysteme.

Ganz anders verhält es sich bei einem Koordinatensystem, das von einem raumartigen Vektor e_1 und einem zeitartigen Vektor e_2 aufgespannt wird. Hier bilden die reziproken Vektoren e^1 und e^2 ein Koordinatensystem mit umgekehrter Händigkeit, da der raumartige Vektor e^1 entgegengesetzt zu e_1 orientiert ist (siehe Abb. 1).

3. Weiteres Vorgehen: Raumzeitliche Ableitungen

Die Brücke zwischen SRT und ART kann nun ausgebaut werden und in einem sich sachlogisch anschließenden Schritt die Differentialrechnung erschließen. Hier bietet sich der Lorentzoperator ***lor*** an, der in geometrisch-algebraischer Formulierung einen Übergang zum Dirac-Operator und damit einen didaktisch tragfähigen Weg in raumzeitliche Ableitungen weist.

$$\boldsymbol{lor} = \begin{pmatrix} \partial / c\partial t \\ \partial / i\partial x \\ \partial / i\partial y \\ \partial / i\partial z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \Box = \gamma_t \frac{\partial}{c\,\partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \Box = \sum_{\mu=0}^{3} e_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

4. Die Ambivalenz des metrischen Tensors

Es gibt Wege, die Mathematik der ART ohne expliziten metrischen Tensor zu formulieren (Hestenes 1986). Sollten wir uns dennoch für die Nutzung des metrischen Tensors entscheiden, muss uns klar sein, dass wir uns dabei ein konzeptuelles Dilemma einhandeln:

$$\mathbf{r} = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = g^{00} x_0 e_0 + g^{11} x_1 e_1 + g^{22} x_2 e_2 + g^{33} x_3 e_3$$

So werden dann anstelle der Koordinaten eines rechtshändigen Koordinatensystems x^0, x^1, x^2, x^3 und der Basisvektoren eines rechtshändigen Koordinatensystems e_0, e_1, e_2, e_3 (siehe linke Teilformel) bei Nutzung des metrischen Tensors die Koordinaten eines linkshändigen Koordinatensystems x_0, x_1, x_2, x_3 mit den Basisvektoren eines rechtshändigen Koordinatensystems e_0, e_1, e_2, e_3 verknüpft (siehe rechts Teilformel). Für Lernende ist dies unübersichtlich, und wir sollten uns überlegen, ob wir diese konzeptionelle Ambivalenz nicht übersichtlicher handhaben oder gar auflösen können.

Literatur

Biener, K. (2005). Hermann Minkowski – Mathematiklehrer Einsteins. cms-jn 27, 77–78.

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Hestenes, D. (1986). Curvature Calculations with Spacetime Algebra. IJTP 25, 581–588.

Horn, M. E. (2014). An Introduction to Geometric Algebra with some Preliminary Thoughts on the Geometric Meaning of Quantum Mechanics. J. Phys. Conf. Ser. 538.

Horn, M. E. (2015). Bridging the Gap between School Mathematics and the Mathematics of General Relativity. http://vixra.org/abs/1502.0044 [05.02.2015].