Hans HUMENBERGER, Wien

Stochastische Überraschungen beim Spiel BINGO

BINGO ist ein sehr einfaches Spiel. Man hat dabei eigentlich keine Strategien zu verfolgen, sondern muss nur schnell sein, das ist alles, was man selbst steuern kann. Trotzdem besitzt BINGO interessante stochastische Aspekte, welche im Folgenden behandelt werden sollen, z. B. wie viele Ziehungen muss man im Durchschnitt abwarten, bis man „BINGO!“ rufen kann? Oder: Wie wahrscheinlich ist es, dass man erst nach der letzten gezogenen Kugel „BINGO!“ rufen kann? Welche Anzahl der nötigen Ziehungen, bis man „BINGO!“ rufen kann, ist die wahrscheinlichste?

Spielanleitung

Beim BINGO gibt es verschiedene Versionen, wobei wir uns speziell für die Version außerhalb Amerikas interessieren. Viele Personen können gleichzeitig spielen, entweder online oder in einer Halle. Man kauft zuerst einen realen oder (bei der online-Version) elektronischen BINGO-Schein, dieser besteht bei der uns interessierenden Version aus drei Zeilen (Reihen) zu je fünf Zahlen im Bereich von 1 bis 90. Die Scheine haben meist neun Felder in einer Reihe, aber in nur fünf stehen Zahlen, so dass man die Felder ohne Zahlen (in Abbildung 1 durch Seepferdchen symbolisiert) eigentlich ausblenden kann.

Abbildung 1 Spielschein aus Spanien

In der ersten Spalte können nur die Zahlen 1–10, in der zweiten 11–20, . . ., in der neunten 81–90 stehen (aus Übersichtlichkeitsgründen). Nun zieht ein Quizmaster (Halle) oder ein Zufallszahlengenerator (online) beständig Zahlen aus der Menge {1, . . ., 90} (ohne Zurücklegen). In der Regel wird alle zehn Sekunden eine Gewinnzahl aufgerufen, so dass sich BINGO-Spielende während des Spiels permanent konzentrieren müssen und rasch reagieren sollten, denn sie haben oft 30 Scheine und mehr bei einem Spiel, und da ist es schon eine kleine Kunst, den raschen und richtigen Überblick zu bewahren (nur der/die erste, der/die „BINGO!“ ruft, bekommt einen

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Preis!). Es gibt verschiedene Arten von BINGO, hier konzentrieren wir uns auf die Version „Full House" bzw. „coverall", d. h. man kann dann „BINGO!" rufen, wenn alle Zahlen des eigenen Scheines gezogen wurden.

Möglicher Einstieg im Schulunterricht

Zu Beginn könnten Schüler/innen schätzen:

1. Wie viele Ziehungen sind im Durchschnitt nötig, bis alle 15 Zahlen des eigenen Scheines gezogen wurden? („Full House", „coverall")
2. Welche Anzahl benötigter Ziehungen (unter den folgenden) ist am wahrscheinlichsten: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man alle 90 Ziehungen benötigt?

Die meisten werden sich hier ziemlich verschätzen, und das ist auch nicht schlimm, es zeigt nur, dass wir (hiermit sind auch mit Stochastik vertrautere Personen gemeint) in stochastischen Situationen oft ein sehr schlechtes Gefühl haben. Andererseits sind dies aber oft Anlässe, „es" genauer wissen zu wollen, d. h. sie können sehr förderlich für die Motivation sein.

Die auf den ersten Blick verblüffenden Antworten auf obige Fragen sind:

1. ca. 85,3
2. 90 – dies ist die wahrscheinlichste unter allen möglichen Anzahlen nötiger Ziehungen, die Wahrscheinlichkeiten nehmen von 15 bis 90 streng monoton zu, d. h. von allen möglichen Fällen ist es am wahrscheinlichsten, dass man bis zur letzten Kugel warten muss!
3. 1/6

Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese Fragen auf elementare Art zu beantworten, aber bei den ersten beiden ist dies nicht so ohne weiteres als selbständige Schüleraktivität möglich, dazu sind sicherlich Hinweise durch die Lehrkraft nötig. Wir greifen hier stellvertretend eine Möglichkeit heraus und verweisen für weitere Details auf Henze/Humenberger 2011.

Als erstes definieren wir die zugehörige Zufallsvariable X: diese möge zählen, wie viele Ziehungen nötig sind, bis alle Zahlen am eigenen BINGO-Schein gezogen wurden (bis man also „BINGO!" rufen könnte). Dann ist a priori klar: $15 \le X \le 90$, und für unsere Fragen brauchen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X = j)$ für $j = 15,\ldots,90$. Wenn man diese hat, dann kann man die Fragen 2 und 3 direkt beantworten, und mit einem Computer (CAS oder TK) auch die erste Frage mit der Formel $\mathrm{E}(X) = \sum_{j=15}^{90} j \cdot \mathrm{P}(X = j)$

Es empfiehlt sich hier die Werte $\mathrm{P}(X=j)$ von hinten beginnend bei $j=90$ zu berechnen (nicht nur, weil nach dem letzten Wert $\mathrm{P}(X=90)$ in Frage 3 explizit gefragt wird), dies ist z. B. ein möglicher Hinweis durch Lehrkräfte. Das Ereignis $\{X=90\}$ tritt genau dann ein, wenn die letzte gezogene Kugel (bzw. Zahl) eine von den 15 Zahlen $b_1,\ldots,b_{15}$ am BINGO-Schein ist. Da keine der 90 Zahlen für irgendeine Stelle der Ziehungsreihenfolge bevorzugt ist (auch für die letzte Stelle nicht), ist die Wahrscheinlichkeit, als letzte gezogen zu werden, für jede Zahl gleich, nämlich 1/90. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 15-BINGO-Schein-Zahlen als letzte gezogen wird, ist daher 15/90 (auch so: für die letzte Zahl gibt es 90 Möglichkeiten, 15 davon sind günstig für das Ereignis $\{X=90\}$): $\mathrm{P}(X=90)=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$.

Für $\{X=89\}$ muss an der 90. Stelle eine aus den anderen 75 Zahlen gezogen werden, die 89. Ziehung muss eine Zahl aus $b_1,\ldots,b_{15}$ ergeben. Daher folgt $\mathrm{P}(X=89)=\frac{75}{90}\cdot\frac{15}{89}$. Analog erhält man: $\mathrm{P}(X=88)=\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}\cdot\frac{15}{88}$ und $\mathrm{P}(X=87)=\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}\cdot\frac{73}{88}\cdot\frac{15}{87}$. Nun springt das Muster schon ins Auge, wie es allgemein aussieht (incl. Begründung):

$$\mathrm{P}(X=90)=\frac{15}{90},\quad \mathrm{P}(X=j)=15\cdot\frac{75\cdot 74\cdot\ldots\cdot(j-14)}{90\cdot 89\cdot\ldots\cdot j};\; j=89,\ldots,15 \qquad (*)$$

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten kann man einerseits die Verteilung von X bestimmen (vgl. Tab. 1) und andererseits auch den zugehörigen Erwartungswert. Dabei muss klarerweise ein Computer eingesetzt werden (EXCEL, CAS).

j	$\mathrm{P}(X=j)$	j	$\mathrm{P}(X=j)$
90	0,1667	85	0,0693
89	0,1404	84	0,0578
88	0,1181	83	0,0480
87	0,0991	82	0,0398
86	0,0830	81	0,0329

Tabelle 1 Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der Zufallsvariable X

Man kann mit (*) rasch erkennen: Die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X=20), \mathrm{P}(X=30), \ldots, \mathrm{P}(X=70)$ unterscheiden sich kaum von Null, $\mathrm{P}(X=80) \approx 0{,}027$ ist auch noch sehr klein, $\mathrm{P}(X=90)=\frac{1}{6}$ ist also der bei weitem größte Wert bei Frage 2. Nicht nur unter den vollen Zehnerzahlen hat 90 die größte Wahrscheinlichkeit, sogar unter allen möglichen Zahlen, denn die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X=j)$ sind mit j streng monoton wachsend. Dies „sagen" nicht nur die mittels Computer berechneten Werte, man kann das auch leicht (aber vermutlich erst a posteriori, intuitiv ist dies a priori wohl kaum zu vermuten) einsehen, denn es gilt ja (siehe oben):

$$\mathrm{P}(X=j+1)=\mathrm{P}(X=j) \cdot \underbrace{\frac{j}{j-14}}_{>1}$$

Aus Tab. 1 kann man übrigens auch erkennen: Man kann getrost darauf wetten, dass mindestens 87 Zahlen gezogen werden müssen, bevor man „BINGO!" rufen kann, denn $\mathrm{P}(X \geq 87) \approx 0{,}5243 > 0{,}5$.

Für den hier interessierenden Erwartungswert erhält man mittels Computer: $\mathrm{E}(X)=\sum_{j=15}^{90} j \cdot \mathrm{P}(X=j) \approx 85{,}3$, ein verblüffend großer Wert.

Es gibt auch verschiedene Plausibilitätserklärungen für dieses Phänomen des so großen Erwartungswerts. Solche sind auch nötig, denn es ist ja wichtig zu verstehen, warum dieser so groß ist (wie es dazu kommt, Verständnis für das Phänomen), nicht nur zu wissen – wie hier gezeigt –, dass er so groß ist. Aus Platzgründen muss hier dafür auf Henze/Humenberger 2011 verwiesen werden, in einem möglichen Unterricht sollten allerdings solche Plausibilitätsbetrachtungen keinesfalls fehlen.

Betont werden soll zum Schluss, dass es beim interessierenden Erwartungswert nicht um den aus der Sicht der Spielpraxis relevanten Wert geht, wie lange es durchschnittlich braucht, bis irgendjemand der an einem Spiel Beteiligten „BINGO!" ruft (und damit diese Runde beendet; diese Dauer hängt sehr von der Anzahl der Beteiligten ab und ist niedriger), sondern um die hypothetische Frage: Wie lange bräuchte der „BINGO!"-Ruf durchschnittlich, wenn es nur einen Spielschein (den eigenen) gäbe.

Literatur

Henze, N., Humenberger, H. (2011): Stochastische Überraschungen beim Spiel Bingo. In: Stochastik in der Schule 31, 3, 2–11.