Norbert HUNGERBÜHLER, Zürich

Skalierbare Themen im Mathematikunterricht

Es ist ein herausfordernder Gedanke, den Mathematikunterricht entlang der gesamten Schullaufbahn vom Kindergarten bis zur Hochschule zu denken, sowohl didaktisch, wie auch inhaltlich. Sind wir als Lehrende überhaupt bereit, über den gepflegten Garten der eigenen Schulstufe hinauszuschauen? Kennen wir die darunter- und die darüberliegende Stufe gut genug, um die Übergänge nicht zu Klippen werden zu lassen, die Schülerinnen und Schüler unten abzuholen, wo sie sind und oben adäquat vorzubereiten? Pflegen wir den didaktischen und den inhaltlichen Dialog mit den Lehrkräften der anderen Schulstufen? Dieser Text möchte einige Anregungen geben, diesen Dialog zu führen.

1. Was heisst skalierbar?

Informatiker werden diese Frage anders beantworten als Physiker, Chemiker verstehen wieder etwas anderes unter dem Wort skalierbar, Ökonomen ebenfalls und Mathematiker sowieso. Schon Wittgenstein bemerkte, dass gewisse Begriffe nicht hinreichend erfasst werden können, ohne dass sich der Verstand beim Versuch einer Definition Beulen holt. Hingegen können im Sinne von Wittgensteins Familienähnlichkeit Merkmale des Begriffs genannt werden. Etwa so: Eine gewisse Qualität einer Sache ist skalierbar, wenn sie sich in bestimmter Art und Weise verhält, wenn die Sache in grösserer oder kleinerer Menge vorliegt. Oder so: Ein Aspekt einer Sache ist skalierbar, wenn er in bestimmter Ausprägung oder Komplexität erscheint, je nachdem, wie tief man in die Sache eindringt oder wie genau man sie betrachtet. Was soll demnach ein skalierbares Thema im Mathematikunterricht sein? Ein skalierbares Thema

– hält Aspekte bereit, die sich vom Kindergarten bis zur Dissertation bearbeiten lassen,
– lässt sich sowohl in der Theorie als auch von seinen Anwendungen her ausdehnen,
– lässt sich vertikal (Komplexität, Schwierigkeitsgrad) und horizontal (verschiedene Aspekte gleicher Komplexität oder Schwierigkeit) ausdehnen,
– hält Aspekte für stärkere und für schwächere Schülerinnen und Schüler bereit,
– lässt eine Vielzahl von Anwendungen (auch innermathematische) zu,

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- lässt sich mit Hilfe von immer fortgeschritteneren Methoden untersuchen, und
- am Thema kann mit einer Vielzahl an Werkzeugen gearbeitet werden.

Skalierbare Themen, so es sie denn gibt,

- lassen sich im Sinne eines Spiralcurriculums behandeln,
- bieten eine Vielzahl von Anknüpfungspunkten zu vorhandenem Wissen,
- begünstigen die Vernetzung des Wissens,
- bieten Anknüpfungspunkte zu anderen (MINT-)Fächern,
- sind geeignet für Projekt- oder Maturaarbeiten (Breite und Tiefe möglich, Raum für Entdeckungen),
- eröffnen den Schülerinnen und Schülern eine Perspektive, weil sie über sich hinausweisen.

Auch didaktisch und lerntheoretisch lassen sich skalierbare Themen einordnen. Insbesondere eignen sie sich für das *PTP-Prinzip* von Thomas Wihler und Hans Rudolf Schneebeli: Eine konkrete Anwendung aus der Praxis motiviert einen Theorieblock, welcher neues Wissen und Werkzeuge bereitstellt. Dieses neue Wissen ist im Anschluss vielseitig in der Praxis einsetzbar und illustriert den gewonnen Fortschritt. Skalierbare Themen sind auch kompatibel mit dem *Zone of Proximal Flow Prinzip* von Lev Vygotsky und Mihaly Csikszentmihalyi (siehe zum Beispiel Basawapatna et al. (2013)): Durch ihren Einsatz lässt sich vermeiden, im Unterricht die *Skills* vor den *Challenges* zu entwickeln und dabei in den *Boredom*-Bereich abzugleiten. Stattdessen bieten skalierbare Themen immer wieder überschaubare Herausforderungen, welche die Weiterentwicklung des Wissens motivieren. Skalierbare Themen erweitern zudem das Konzept der *substantiellen Lernumgebungen* von Erich Wittmann (1998). Wer erst einmal den Blick für das Konzept der skalierbaren Themen geschärft hat, wird sie plötzlich überall entdecken.

2. Beispiele skalierbarer Themen

2.1 Gleichungen

Das Thema Gleichungen zieht sich durch alle Schulstufen. In der Primarstufe beginnt der spielerische Umgang mit der Arithmetik

- $2 + 3 = 5$
- $3 \times \square = 12$

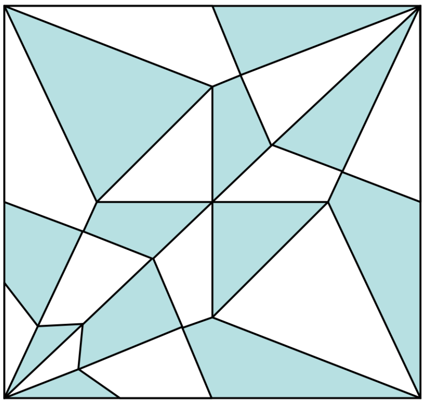
– „Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich vom Doppelten der Zahl 7 subtrahiere, erhalte ich 3."

In der Sekundarstufe I beginnt die Idee der Unbekannten und der Variablen Form anzunehmen, und am Übergang zur Algebra entwickeln sich die ersten Lösungstechniken anhand immer anspruchsvollerer Beispiele: Ähnlich wie in der Biologie die Ontogenese die Phylogenese rekapituliert, so vollzieht der einzelne Schüler, die einzelne Schülerin, die historische Genese der mathematischen Begriffe individuell nach. In der Sekundarstufe II zeigt sich nach und nach eine Systematik der Gleichungstypen (lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen, lineare Systeme), und der Zusammenhang mit dem Aufbau des Zahlenreichs zeichnet sich ab: Die sukzessive Erweiterung des Zahlenraums erfolgt aufgrund der Notwendigkeit, gewissen Gleichungen eine Lösung zu verschaffen. Die Gleichung $5 + x = 2$ hat in den natürlichen Zahlen keine Lösung, dies führt zu den ganzen Zahlen. Die Gleichung $7x = 3$ hat erst in den rationalen Zahlen eine Lösung. Die Gleichung $x^2 = 2$ macht die Einführung reeller Zahlen nötig, und $x^2 = -1$ liefert schliesslich die Motivation für die komplexen Zahlen. Auf dieser Schulstufe zeigen sich auch erstmals abstraktere Lösungsbegriffe, etwa bei Fixpunktgleichungen oder bei einfachen Differentialgleichungen. Der Bogen spannt sich weiter zur Hochschule, wo der Fokus nicht mehr in erster Linie auf Lösungstechniken liegt, sondern bei der Untersuchung abstrakterer Theorien, etwa zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Flugs ist man dann bei aktuellen Forschungsthemen, zum Beispiel bei partiellen Differentialgleichungen oder in der Numerik.

2.2 Origami

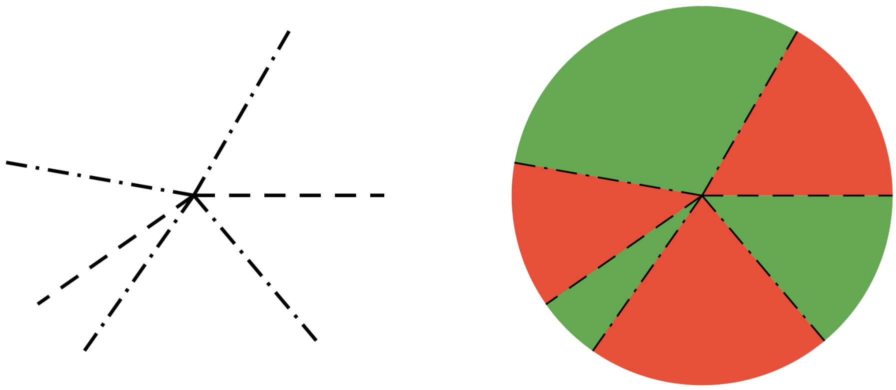
Als Friedrich Fröbel der Welt die Idee des Kindergartens schenkte, war Papierfalten fester Teil seines Curriculums. Er war der Überzeugung, dass die spielerische Beschäftigung mit Papier sowohl die feinmotorischen Fähigkeiten, als auch das Raumvorstellungsvermögen der Kinder schult. So zeugt noch heute der Fröbel-Stern in der Weihnachtszeit von dieser Idee. In der Primarschule lassen sich wunderbare Vorstellungsübungen mit Origami durchführen: Ein Papier wird gefaltet und in Gedanken entlang einer Geraden zerschnitten: Wie sieht das entstandene Loch aus? Oder: Wie viele Berg- und Talfalten besitzt ein gefalteter Papierstreifen nach dem Auffalten?

Der Satz von Meguro (siehe Figur) ist auf der Sekundarstufe I zugänglich. Er lautet: *Das Faltmuster einer flach gefalteten Origami-Figur ist zweifärbbar*. Diese graphentheoretisch nichttriviale Aussage kann mit Wagenscheinscher Uferhilfe bereits von Sekundarschülerinnen und -schülern entdeckt und mit einer einfachen Überlegung begründet werden. Die Beschäftigung mit Papierfalten im Unterricht führt auch zur Origami-Geometrie, welche geometrische Konstruktionen durch Falten anstatt mit Zirkel und Lineal erlaubt (siehe zum Beispiel Geretschläger (2008)).



Satz von Meguro illustriert am Faltmuster des Kranichs

Auf Sekundarstufe II können Fragen zur Konstruierbarkeit thematisiert werden: Die Winkeldreiteilung beispielsweise ist mit Origami-Geometrie eine einfache (und einfach einsehbare) Konstruktion, jedoch mit Zirkel und Linear nicht möglich. Zum Satz von Meguro gesellen sich hier die wunderbaren Sätze von Maekawa-Justin oder Kawasaki-Justin (siehe Figur). Der erste dieser Sätze lautet: *Treffen in einem Punkt einer flach faltbaren Origami-Figur t Talfalten und b Bergfalten aufeinander, so gilt* $|t - b| = 2$. Der Beweis ist eine einfache Anwendung der Innenwinkelsumme in Polygonen. Insbesondere folgt daraus (wie auch aus dem Satz von Meguro), dass in einem solchen Punkt eine gerade Anzahl Falten, also eine gerade Anzahl Winkelgebiete zusammentreffen. Der Satz von Kawasaki-Justin sagt dann über diese Winkelgebiete: *Treffen in einem Punkt P eine gerade Anzahl Falten aufeinander, und färbt man die Winkelgebiete abwechselnd rot und grün, so ist die Origami-Figur genau dann lokal in P flach faltbar, wenn die Summe der roten Winkel gleich der Summe der grünen Winkel ist.*



Links der Satz von Maekawa-Justin (2 Talfalten gestrichelt, 4 Bergfalten strichpunktiert), rechts der Satz von Kawasaki-Justin

Auf Universitätsstufe besitzt Origami Anwendungen beispielsweise im Maschinenbau, in der Architektur, und innermathematisch in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Die Axiomatik der Origami-Geometrie ist ebenfalls noch nicht endgültig geklärt und beliebig viele Origami-Probleme in der Analysis, der Geometrie und der Kombinatorik harren noch ihrer Lösung.

2.3 Kryptologie

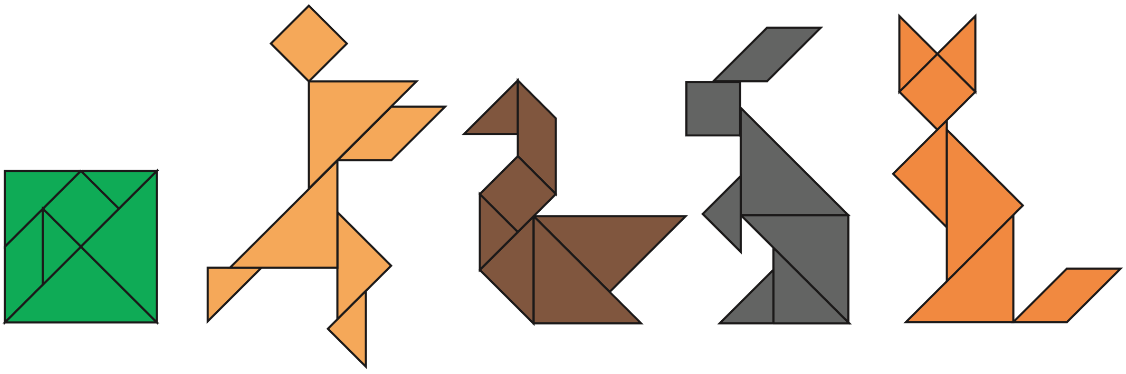
Geheimschriften faszinieren bereits Kinder im Vorschulalter, etwa beim Spiel mit unsichtbarer Tinte. In der Primarschule und auf Sekundarstufe I können einfache Verschlüsselungen, etwa die Cäsar-Verschlüsselung oder die Skytale, besprochen werden. Die Herausforderung, eine auf diese Weise verschlüsselte geheime Botschaft zu entschlüsseln gelingt mit Hilfe einfacher mathematischer Überlegungen, welche kaum einer weiteren Motivation bedürfen. Bei der Entschlüsselung von polyalphabetischen Ersetzungschiffren, bei denen jedes Zeichen des Klartextes durch ein Zeichen einer anderen Schrift ersetzt wird, gelangen statistische Methoden zum Einsatz: Die Häufigkeitsverteilung einzelner Buchstaben in der (deutschen) Sprache ermöglicht gleich einen natürlichen Zugang zur Statistik. Die Codierung mit Hilfe von Schlüsseln (Vignère-Verschlüsselung) bietet Gelegenheit, modular zu rechnen. Diese Methode gewährt höchste Sicherheit, solange der Schlüssel geheim bleibt und nur ein einziges Mal benutzt wird, leidet aber am inhärenten Problem des Schlüsselaustauschs zwischen Sender und Empfänger der geheimen Botschaft: Diese müssen sich nämlich treffen, um den Schlüssel miteinander abzustimmen. Bei diesem Treffen könnte der Sender auch gleich die geheime Botschaft übergeben.

Die Sekundarstufe II ist dann der Ort für den Ausweg aus dem Dilemma des Schlüsselaustauschs: Hier können die Idee und die Paradoxie der Public Key Kryptographie besprochen werden. Zwei Personen sprechen auf einem öffentlichen Platz miteinander und jedermann kann dieser Konversation folgen. Dennoch haben am Ende die beiden Personen eine Information ausgetauscht, die kein anderer Zuhörer erfassen konnte. Wie ist das möglich?! Oder die Idee der Zero Knowledge Beweise: Wie kann ich jemanden überzeugen, dass ich im Besitz einer bestimmten Information bin, ohne die Information selber preiszugeben? Letzteres hat beispielsweise beim Online Banking eine pfiffige Anwendung: Statt sein Passwort über einen unsicheren Kanal zu übertragen, überzeuge ich die Bank (respektive deren Server), dass ich das Passwort tatsächlich habe ohne es nennen zu müssen. Das historische vielleicht erste Beispiel eines Zero Knowledge Beweises gab Niccolò Tartaglia indem er seine Lösungsformel für die Gleichung dritten Grades nicht bekannt gab. Seine Zeitgenossen überzeugte er dennoch, dass er diese Formel besass, indem er alle ihm gestellten Aufgaben in kurzer Zeit lösen konnte.

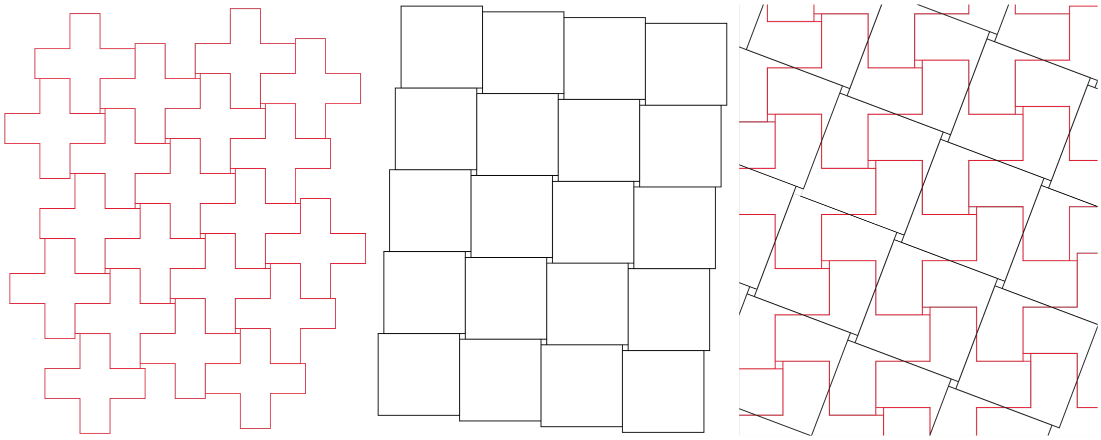
Auch die Methode der Quantenkryptographie gehört noch zu den erreichbaren Zielen der Sekundarstufe II. Die Forschung zur Kryptologie schliesslich strebt derzeit nach dem „heiligen Gral“ der Verschlüsselung, nämlich nach Methoden, die *beweisbare* Sicherheit bieten.

2.4 Zerlegungen

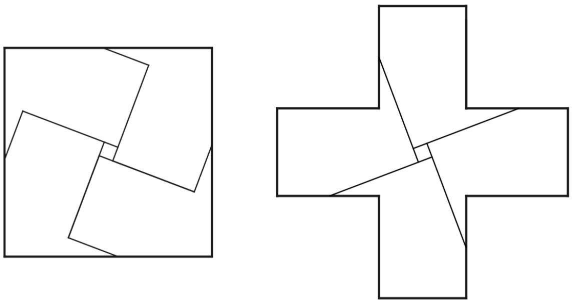
Bereits im Kindergarten spielen die Kleinsten gern mit Bauklötzen und fabrizieren dabei, freilich ohne sich dessen bewusst zu sein, gemeinsame Zerlegungen von Polyedern und Polygonen. Im Fall von Tangram wird besonders augenfällig, dass zerlegungsgleiche Figuren die selbe Fläche besitzen:



Auf dieser Tatsache beruhen dann die einfachen Argumente, welche in der Primarstufe die Berechnung von Flächen von Dreiecken oder Trapezen erlauben. Auf der Sekundarstufe I gelingt ein anschaulicher Beweis des Satzes von Pythagoras mit Hilfe von Zerlegungen. Auf der Sekundarstufe II hat der phantastische Satz von Wallace-Bolyai-Gerwien Platz, der die Umkehrung der Beobachtung aus dem Kindergarten liefert: *Zwei flächengleiche Polygone besitzen eine gemeinsame Zerlegung in Polygone*. Der Beweis ist zwar elementar, liefert aber typischerweise Zerlegungen mit sehr vielen Teilen. Eine Technik, die in vielen Fällen Zerlegungen mit wenigen Stücken liefert, verwendet Parkettierungen. Dies wird hier illustriert am Beispiel, eine gemeinsame Zerlegung eines Schweizerkreuzes und eines flächengleichen Quadrates zu finden. Man beachte, dass die vier Arme eines heraldisch korrekten Schweizerkreuzes 7 Teile lang und 6 Teile breit sind. Aus diesem Grund lässt sich die Ebene mit Schweizerkreuzen allein nicht parkettieren, wohl aber, wenn man ein kleines Quadrat zu Hilfe nimmt (siehe Figur links). Das zum Schweizerkreuz flächengleiche Quadrat zusammen mit dem kleinen Hilfsquadrat parkettiert ebenfalls die Ebene (Figur Mitte). Man verschiebt dann die beiden Parkettierungen auf Folien solange übereinander, bis die beiden Gitter in einer bestimmten Position „einrasten“ (Figur rechts).



Daraus lässt sich eine gemeinsame Zerlegung mit nur fünf Teilen ablesen:



In einer Maturaarbeit liesse sich zeigen, dass die zum Satz von Wallace-Bolyai-Gerwien analoge Aussage in drei Dimensionen falsch ist, um schliesslich zum Satz von Dehn oder zu den Hillschen Tetraedern zu gelangen. Auf Stufe Universität werden analoge Aussagen in höheren Dimensionen oder in der hyperbolischen Geometrie betrachtet.

2.5 Spieltheorie

Kindern scheint der Spieltrieb in die Wiege gelegt. Dies lässt sich trefflich verwenden, um Kinder und Jugendliche auf spielerische Weise an mathematische Überlegungen heranzuführen. Schon Primarschulkinder wollen zum Beispiel unbedingt wissen, wie Wickie in der Folge „Ein gewisser Herr Lumperich“ das Spiel gegen den fahrenden Händler gewinnt. Dabei darf abwechselnd jeder der beiden Spieler 1 bis maximal 3 Dinge von einem Haufen mit 17 Gegenständen nehmen, und wer zuletzt das schwarze Kästchen nimmt, hat verloren. Nach und nach verlieren alle Wikinger gegen den Händler Lumperich, obwohl der ihnen scheinbar grosszügig den ersten Zug erlaubt. Erst als Wickie heimlich seine Flöte mit auf den Haufen legt und damit die Zahl der Gegenstände auf 18 erhöht, hat Herr Lumperich keine Chance mehr gegen Wickie. Ein bekanntes Spiel, das auf Sekundarstufe I analysiert werden kann, ist Hex. Hier ist ein intuitiver Beweis möglich, dass eine Hex-Partie niemals unentschieden enden kann. Dazu stellt man sich die beiden schwarzen Seiten links und rechts des Spielfeldes als Ufer eines Flusses, die schwarzen Spielsteine als Steine im Fluss und die weissen Spielsteine als fliessendes Wasser vor. Wenn das Wasser von oben nach unten fliessen kann (weil es einen weissen Weg gibt) hat Weiss gewonnen, wenn das Wasser nicht fliesst, wird es offenbar von einem Damm aus schwarzen Steinen daran gehindert. In diesem Fall hat Schwarz gewonnen. Auf der Sekundarstufe II ist dann ein kombinatorischer Beweis möglich. In einer Maturaarbeit kann gezeigt werden, dass dieser Satz äquivalent zum Brouwerschen Fixpunktsatz ist. Hübsch ist auch das Argument, welches zeigt, dass beim Hex eine Gewinnstrategie für den erstziehenden Spieler existiert. Die Idee basiert auf *Strategy Stealing* und wird an folgender Geschichte deutlich. In einem kleinen französischen Dorf spielt der Metzger gern abends im Bistro Schach. Da er meistens gewinnt, fordert er eines Tages den Weltmeister zu einer Partie Fernschach heraus. Der Weltmeister willigt ein, hat aber zu seinem grössten Erstaunen erhebliche Mühe, den Unbekannten zu schlagen. Die Revanchepartie geht sogar Remis aus. Die dritte Partie entscheidet der Metzger schliesslich gar für sich. Die Sensation im kleinen Dorf scheint perfekt − bis dem Postboten auffällt, dass der Metzger nicht nur regelmässig Post vom Weltmeister, sondern auch vom Vizeweltmeister bekommt! Er hat heimlich die beiden gegeneinander spielen lassen und nur jeweils die Antwortzüge des einen an den andern weitergeleitet... Anschliessend kann noch die Theorie von Grundy und Sprague anhand des Nim-Spiels exploriert werden. Auf Stufe Universität folgt dann die kombinatorische Spieltheorie.

2.6 Weitere skalierbare Themen

Weitere Kandidaten für skalierbare Themen sind Funktionen, Kurven, Symmetrie, Billard, Graphentheorie, Statistik, Computertomographie, Sonnenuhren. Dem Leser werden gewiss noch weitere Beispiele einfallen.

Literatur

Basawapatna, A. R., Repenning, A., Koh, K. H., Nickerson, H. (2013). The Zones of Proximal Flow: Guiding Students Through a Space of Computational Thinking Skills and Challenges. In Proceedings of the Ninth Annual International ACM Conference on International Computing Education Research, 67-74, (ICER 2013, August 12-14, San Diego, California, USA). ACM Press: New York.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung, 16 (3)*, 329–342.

Geretschläger, R. (2008). *Geometric Origami*. Arbelos.