Rainer KAENDERS, Bonn

Flächenbestimmung mit Ähnlichkeit als Alternative zur so genannten 'h-Methode'

„Es irrt der Mensch, solange er strebt.“ (Johann Wolfgang Goethe). Zahlen allerdings können – anders als Menschen – weder *gegen etwas laufen*, sich *annähern* noch *streben*. Eigenschaften von Zahlen, unter anderem ihr Wert, ändern sich, wenn man eine Zahl durch eine andere ersetzt.

Eine begrifflich tragfähige Entwicklung der Infinitesimalrechnung in der Schule ist durch den Wegfall jeglicher Definition eines Grenzwertes zu einer Herausforderung geworden. In Schulbüchern wird Sprache eingeführt, wie: „x+0,5 → 0,5+0,5 = 1 für x → 0,5; gelesen: x+0,5 *strebt* gegen 1 für x gegen 0,5.“ Doch Zahlen streben nicht und konzeptionelle Herangehensweisen fehlen. Bei der so genannten 'h-Methode' werden diese begrifflichen Defizite offenbar. Wir schlagen einen Einstieg in die Infinitesimalrechnung vor, der über Ähnlichkeits- und Symmetriebetrachtungen von Flächen zu den wichtigsten Funktionen der Schulmathematik führt.

Christoph Kirfel (2014) hat einen vergleichbaren Zugang zur Integralrechnung mit der Idee des flämischen Jesuiten Gregorius van St.-Vincent zum Logarithmus gefunden. Er studiert das Transformationsverhalten von Rechtecken in Ober- und Untersummen bei speziellen Funktionen. Unser Ansatz dagegen benötigt keinen technischen Integralbegriff, sondern nutzt lediglich die Ähnlichkeiten und Symmetrien der gesamten Graphen dieser Funktionen, um die Flächen unter den Graphen direkt zu bestimmen.

1. Die so genannte h-Methode

Bei dieser ‚Methode‘ wird ein algebraischer Ausdruck eines Differenzenquotienten $(f(x+h)-f(h))/h$ so umgeformt, dass $h=0$ eingesetzt werden kann. Da $h=0$ allerdings zunächst explizit ausgeschlossen war, wird dieser Verstoß gegen die Logik mit einer eigenen Formulierung versehen: „h *strebt* gegen Null“. Zugleich werden in Beispielen und mittels mathematischer Software verschiedene kleine Zahlen für h eingesetzt. Doch die h-Methode wird dem infinitesimalen Charakter des Grenzübergangs genauso wenig gerecht, wie es etwa der Unendlichkeit der Primzahlen gerecht wird, wenn man mit einem Rechner immer wieder neue große Primzahlen entdeckt.

In der Regel wird die h-Methode bei $f(x)=x^n$ praktiziert. Hier wird häufig auch noch der ungeschickte Zugang über den binomischen Lehrsatz gewählt. Dabei erlaubt die geometrische Reihe einen einfachen direkten

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Zugang. Mit $x_1^n - x_0^n = (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \dots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$werden der Differenzenquotienten und auch die Monotonie der Funktion gut verstehbar.

Wie gehen wir mit dem Wegfall des Grenzwertbegriffs um? Die Definition des modernen Grenzwertbegriffs mit drei Quantoren ist schwer. Doch gibt es einfachere infinitesimale Betrachtungen. Beispielsweise können wir leicht für eine Zahl C folgern: [$\forall\, \kappa > 1$: $\frac{1}{\kappa} \cdot 4711 \leq C \leq \kappa \cdot 4711$] $\Rightarrow C = 4711$.

Können wir den Grenzübergang bei der Differentiation in speziellen Fällen durch Betrachtungen mit einem Quantor ersetzen? Eine derartige Argumentation kennen wir auch von der Ableitung des Sinus. Ein einfacher Vergleich von Flächeninhalten (vgl. Priestley, 1979) liefert:

$\forall\, h > 0$: $\frac{1}{\cos(h)} \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq \cos(h)$, woraus wir folgern $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 0$.

2. Flächenberechnung bei Potenzfunktionen durch Ähnlichkeit

In (Kaenders, 2014) haben wir eine Herangehensweise an die Quadratur der Parabel vorgestellt, wie sie unseres Wissens in der Literatur nicht zu finden ist und die auf der Feststellung (kognitiver Konflikt) beruht, dass je zwei Parabeln zueinander ähnlich sind. Auch die Graphen zweier Funktionen aus der Familie von Funktionen $f(x) = ax^n$ für $a > 0$ sind einander ähnlich.

Für festes x werden wir die Fläche $A(x) = A$ zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x) = ax^n$ und der x-Achse von 0 bis x quadrieren.

Dazu betrachten wir eine zentrische Streckung mit Faktor $\lambda > 1$ vom Ursprung des Koordinatensystems O aus und wählen eine Parallelstreckung parallel zur y-Achse von der x-Achse aus mit Faktor $\mu > 0$ dergestalt, dass die Bilder des Graphen der Funktion $f(x) = ax^n$ unter beiden Abbildungen übereinstimmen. Zentrische und parallele Streckung bilden wie folgt ab:

$$\big((x, f(x)\big) \mapsto (\lambda x, \lambda\, f(x)) \quad \text{und} \quad \big(x', f(x')\big) \mapsto (x', \mu f(x')).$$

Bei beiden hat der Graph von $f(x) = ax^n$ dasselbe Bild, falls Abszisse und Ordinate übereinstimmen: $x' = \lambda x$ und $\lambda f(x) = \mu f(x')$. Zusammengefasst erhalten wir die Bedingung: $\lambda f(x) = \mu f(\lambda x)$ oder kurz $\mu \lambda^{n-1} = 1$.

Die Bilder der Fläche A unter beiden Abbildungen stimmen nicht genau überein, auch wenn sie beide vom Graphen von μf nach oben begrenzt werden. Ihre Flächenmaße $\lambda^2 A$ und μA unterscheiden sich durch einen schmalen Streifen der Breite $\lambda x - x$. Also, mit der Monotonie:

$$\mu f(x)\,(\lambda x - x) \leq \lambda^2 A - \mu A \leq \mu f(\lambda x)\,(\lambda x - x).$$

Ausklammern von x und Division durch $(\lambda - 1)$ ergibt:

$$f(x)\,x \leq \frac{\lambda^2 - \mu}{\mu(\lambda - 1)} A \leq f(\lambda x)\,x.$$

Doch mit $\mu\lambda^{n-1} = 1$ gilt: $\frac{\lambda^2-\mu}{\mu(\lambda-1)} = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$. Also

$$\forall\lambda > 1: \qquad \frac{a\,x^{n+1}}{1 + \lambda + \cdots + \lambda^n} \leq A \leq \frac{a\,\lambda^n\,x^{n+1}}{1 + \lambda + \cdots + \lambda^n} \quad ,$$

was sich mit $\kappa = \lambda^n$ abschätzen lässt zu:

$$\forall\kappa > 1: \qquad \frac{1}{\kappa} \cdot \left(\frac{a}{n+1} x^{n+1}\right) \leq A \leq \kappa \cdot \left(\frac{a}{n+1} x^{n+1}\right),$$

Hieraus schließen wir, ähnlich wie in der Einleitung, dass $A = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$.

Mutatis mutandis funktioniert diese Methode für jeden reellen Exponenten $w \neq -1$ in $f(x) = ax^w$. Im Fall $w = -1$ ist $\lambda^2 = \mu$ und folglich können wir hier nicht durch den Faktor vor A dividieren.

Wollen wir umgekehrt eine Funktion der Form $F(x) = bx^{n+1}$ ableiten, so erkennen wir hierin zunächst eine Flächenfunktion unter dem Graphen von $f(x) = ax^n$ mit $a = (n+1)b$. Dann ist $F(x+h) - F(x)$ der Flächeninhalt eines Streifens der Breite h, dessen Höhe sich zwischen $f(x)$ und $f(x+h)$ bewegt. Das heißt: $f(x) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x+h)$ bzw. $F' = f$.

3. Quadratur der Hyperbel

Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ bezeichne $L(a,b)$ den Flächeninhalt unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$. Aus obigen Betrachtungen folgt, dass $\mu L(\lambda a, \lambda b) = \lambda^2 L(a,b)$ ist. Mit $\mu = \lambda^2$ gilt: $L(\lambda a, \lambda b) = \lambda^2 L(a,b)$. Zusammen mit der Additivität der Flächeninhalte ergibt sich auch auf unsere Weise die wichtigste Eigenschaft des Logarithmus:

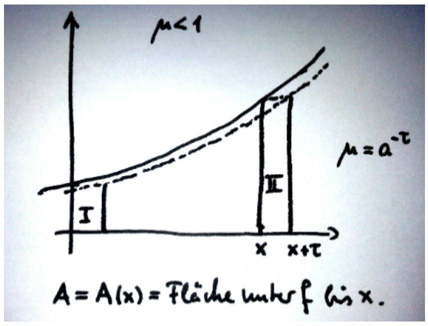
$$L(1,x) + L(1,y) = L(1,x) + L(x,xy) = L(1,xy).$$

Der flämische Jesuit Gregorius van St-Vincent (1584-1667) hatte dieses Gesetz über die Exhaustion mit Rechtecken erkannt (vgl. Edwards, 1979).

4. Quadratur der Exponentialfunktion

Der Graph der Exponentialfunktion besitzt eine andere Symmetrie. Betrachte eine Translation in x-Richtung um $\tau > 0$ und wähle eine Parallelstreckung mit Faktor $\mu > 0$ von der x-Achse aus so, dass die Bilder des Graphen der Funktion $f(x) = a^x$ übereinstimmen.

$$\big(x, f(x)\big) \mapsto (x+\tau, f(x)) \quad \text{und} \quad \big(x', f(x')\big) \mapsto (x', \mu f(x')).$$



Bei beiden hat der Graph von $f(x) = a^x$ dasselbe Bild, falls Abszisse und Ordinate übereinstimmen: $x' = x + \tau$ und $f(x) = \mu f(x')$, d.h. $\mu = a^{-\tau}$. Die Bilder der Fläche A unter beiden Abbildungen stimmen allerdings nicht überein; beide werden von dem Bild des Graphen von f nach oben begrenzt werden.

Die Flächen stimmen auf zwei Streifen (linker Streifen I, rechter Streifen II) Die Differenz der beiden Streifen ist $A - \mu A$. Dies schätzen wir ab:

$$(\mu a^x - \mu a^\tau)\tau \leq A - \mu A \leq (\mu a^{x+\tau} - \mu a^0)\tau$$

Division durch $\mu\tau$ ergibt: $a^x - a^\tau \leq \frac{a^\tau - 1}{\tau} A \leq a^{x+\tau} - a^0$, womit wir die Konvergenz des schwierig zu behandelnden Grenzwertes $\lim_{\tau\to 0} \frac{a^\tau - 1}{\tau}$ erhalten, den wir $\ln(a)$ nennen. Die gesuchte Fläche ist dann $A(x) = \frac{1}{\ln(a)}(a^x - 1)$.

5. Resumé

Die Existenz und einfache Eigenschaften der Flächenmaße, die sich beim Riemann-Integral direkt aus der Konstruktion ergeben, setzen wir voraus. Der Fundamentalsatz kommt auf natürliche Weise ins Spiel und alle Standardfunktionen der Schule sind so behandelbar. Die zu Unrecht aus dem Schulstoff verdrängten Ungleichungen werden rehabilitiert.

Literatur

Edwards, C. H. (1979): *The Historical Development of the Calculus*. Springer Heidelberg.

Kaenders, R.H. (2014): *Von einem kognitiven Konflikt zur Quadratur der Parabel.* Beiträge zum Mathematikunterricht.

Kirfel, Ch. (2014): *Integration by geometrical means – a unified approach.* Mathematics Teaching 239.

Priestley, W.M. (1979): *Calculus, a historical approach.* Springer-Verlag New York.