

Nadja KARPINSKI-SIEBOLD, Halle (Saale)

## **Algebraisches Denken von Grundschulkindern – Ergebnisse einer Interviewstudie**

Mit diesem Beitrag sollen einige Ergebnisse einer Interviewstudie präsentiert werden. Ausgehend von den international vielfach diskutierten Early-Algebra-Ansätzen, die eine Verbindung und gegenseitige Stützung arithmetischer und algebraischer Inhalte im Mathematikunterricht anstreben, geht es um die Erkundung algebraischer Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Grundschulalter (Fritzlar & Karpinski-Siebold, 2012).

Konkret sollten folgende zwei *Forschungsfragen* Beantwortung finden:

- *Wie kann algebraisches Denken im Grundschulalter beschrieben werden?*
- *Welche entsprechenden Fähigkeiten bezüglich des algebraischen Denkens sind im 4. Schuljahr ohne vorherige spezifische Programme zu erfassen?*

### **Zum algebraischen Denken**

Ausgehend von der weltweit geführten Diskussion zum algebraischen Denken und bezugnehmend zur o. g. ersten Frage wird das Konstrukt algebraisches Denken von mir mit folgenden sechs Komponenten umrissen:

*Umgehen mit Operationen als Objekten und ihren Umkehrungen; Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen; Verallgemeinern; Umgehen mit Unbekannten; Umgehen mit Veränderungen; Nutzen von (symbolischen) Repräsentationen*

Diese Komponenten sind nicht auf Algebra beschränkt, sie erfahren in algebraischer Konstellation allerdings eine spezifische Ausprägung. Mit ihnen erscheint algebraisches Denken als ein sehr reichhaltiges spezifisches Konstrukt, wobei nicht alle Komponenten trennscharf voneinander sind (ausführlich dazu Fritzlar & Karpinski-Siebold, 2011).

### **Die empirische Hauptstudie**

Nach einer im Frühjahr 2011 durchgeführten Vorstudie mit 44 Schülerinnen und Schülern im Raum Halle (Saale) und Umgebung, schloss sich im Mai bis Juli 2013 die Hauptstudie zu diesem Promotionsprojekt ebenfalls in Halle (Saale) und Umgebung und in Magdeburg und Umgebung mit insgesamt 74 jeweils ca. 45-minütigen diagnostischen Einzelinterviews an. An dieser Studie nahmen zum einen 20 mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler, jeweils 10 aus den o.g. Regionen teil (Schülergruppe A), die aus den 25 Besten des Aufnahmetests zweier in Sachsen-Anhalt befindli-

cher Spezialgymnasien ausgewählt wurden. Zum anderen wurden aus den Schulklassen dieser Teilnehmer jeweils drei weitere Schülerinnen und Schüler in die Untersuchung einbezogen, die sehr gute bis gute, durchschnittliche und unterdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik erreicht haben und damit das Leistungsspektrum repräsentieren sollten (Schülergruppen B, C, D). Die Auswahl der Schülerinnen und Schüler nahm die Mathematiklehrerin nach von mir ausgearbeiteten konkreten Vorgaben vor. Man kann davon ausgehen, dass durch diese Konstruktion der Untersuchungsgruppe ein Ausblick auf einen evtl. Zusammenhang zwischen den Konstrukten „mathematische Begabung“ und „algebraisches Denken“ möglich ist. Die Untersuchungsgruppe löste neun Aufgaben passend zu den Komponenten algebraischen Denkens.

### **Ausgewählte Aufgaben am Beispiel der Komponente „Umgehen mit Operationen (als Objekte) und ihren Umkehrungen**

Zu dieser Komponente gab es zwei Aufgaben, von denen eine im Folgenden vorgestellt werden soll.

Tim fährt mit seinen Eltern zum Sommerurlaub in die Türkei. Dort muss die Familie Geld umtauschen: Für 1 Euro bekommt man 2 Lira, für jeden Umtausch müssen allerdings 10 Lira Gebühren bezahlt werden.

- a) Die Mutter tauscht am ersten Urlaubstag 500 Euro um.  
Wie viel Lira bekommt sie dafür?
  
- b) Einige Tage später holt der Vater 690 Lira von der Bank.  
Wie viel Euro hat er dafür gegeben?

**Abb. 1: Aufgabe „Umtausch Teilaufgabe b)“**

Die Teilaufgabe a) diente hier als Einstieg, um den Sachverhalt verständlich zu machen. In der Teilaufgabe b) ist den Schülerinnen und Schülern der Zielzustand der Sachsituation gegeben. Das Lösen ist durch das **Umkehren von Gedankengängen** in der entsprechenden Sachsituation möglich. Hierbei müssen ein Wechsel der Bearbeitungsrichtung und ein Umkehren der Operationen erfolgen. Das Bearbeiten der Aufgabe wäre auch durch systematisches Probieren möglich. Dies wurde in der vorliegenden Untersuchung nicht beobachtet.

### **Auswertung der Ergebnisse**

Die Auswertung der Interviews und der Arbeitsblätter erfolgte aufgabenspezifisch. Dabei wurde aus den beobachtbaren Lösungsstrategien der Vorstudie von mir für jede Aufgabe ein Kategoriensystem entwickelt, welches in der Auswertung der Daten der Hauptstudie evaluiert wurde. Es erfolgte eine Stufung der Kategorien in „algebraisches Vorgehen“ (grüne Färbung),

„teilweises algebraisches Vorgehen“ (gelbe Färbung), „nicht algebraisches Vorgehen“ (rote Färbung).

Aus den beobachtbaren Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler der Aufgabe „Umtausch Teilaufgabe b)“ wurde von mir folgendes Kategoriensystem entwickelt (Tabelle 1).

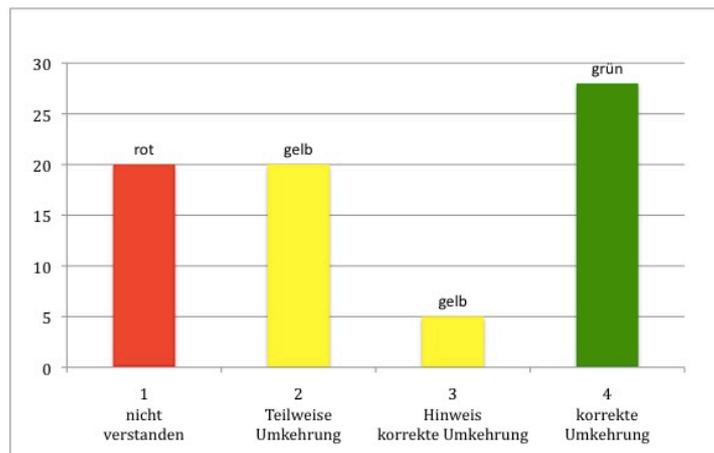
Ziffer der Kategorie	Erläuterung	Farbe im Diagramm
1	Die Aufgabe wird trotz Hinweis nicht verstanden. Es ist nicht zu erkennen, dass die Schülerin bzw. der Schüler Gedankengänge umkehrt.	rot
2	Teilweise Umkehrung	gelb
3	Korrekte Lösung nach Hinweis (siehe Interviewleitfaden)	gelb
4	Die Rechenoperationen und Reihenfolge werden korrekt umgekehrt.	grün

**Tabelle 1: Kategoriensystem „Umtausch Teilaufgabe b)“**

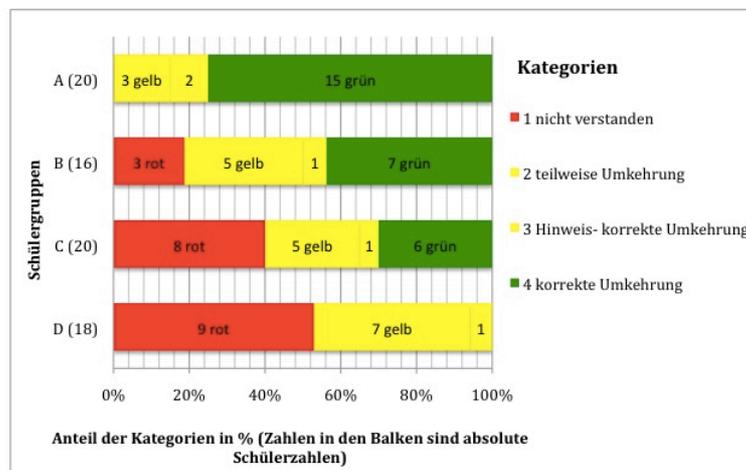
Aus dem Diagramm 1 geht hervor, dass 28 von 74 Schülerinnen und Schülern in der Lage waren, Gedankengänge umzukehren. Diese Denk- und Handlungsweise könnte als algebraisch interpretiert werden (im Diagramm grün gekennzeichnet). Fünf Schülerinnen und Schüler konnten nach dem Hinweis der Interviewerin „*Hast du auch an die Gebühren gedacht?*“ die Aufgabe lösen (im Diagramm gelb gekennzeichnet). 20 Schülerinnen und Schüler konnten die Gedankengänge nur teilweise umkehren, das heißt, dass nicht alle Rechenoperationen und die Reihenfolge nicht umkehrt wurden oder nicht alle Rechenoperationen aber die Reihenfolge umgekehrt wurden. Hier sind ansatzweise algebraische Handlungen zu beobachten, jedoch ist ein vollständiger Wechsel der Bearbeitungsrichtung bzw. das vollständige Umkehren der Operationen nicht zu erkennen (im Diagramm gelb gekennzeichnet). 20 Schülerinnen und Schüler, deren Vorgehen in 1 kategorisiert wurde, kehrten die Gedankengänge nicht um oder fanden keinen Zugang zur Aufgabe (im Diagramm rot gekennzeichnet).

Das Diagramm 2 zeigt, dass es einen großen Unterschied zwischen den Schülergruppen A und B gibt. Fähigkeiten bezüglich der Komponente sind in fast allen Schülergruppen zu verzeichnen. Ein vollständiges Umkehren konnte bei keinem Kind aus der Schülergruppe D beobachtet werden.

Für die weitere Auswertung der Hauptstudie war es interessant auch der Frage nachzugehen, ob *typische Schülerprofile über die verschiedenen Komponenten algebraischen Denkens* zu finden sind. Hierzu wurden von mir für alle 74 Probandinnen und Probanden Profile ihrer Vorgehensweisen



**Diagramm 1: Auswertung der Vorgehensweisen aller SuS**



**Diagramm 2: Auswertung der Vorgehensweisen der SuS nach Leistungsspektrum**

angefertigt. In der Auswertung wurde festgestellt, dass es **keine** typischen Schülerprofile für diese Untersuchung gibt. Folgende Ursachen sind denkbar: Die konstruierten Aufgaben sind komplex und lassen verschiedene Lösungswege zu, die unterschiedlich erfolgreich sein können. Die Schülerinnen und Schüler agieren situationsabhängig. Die einzelnen Komponenten algebraischen Denkens berücksichtigen verschiedene Eigenschaften zum algebraischen Denken, die zum Teil bei Schülerinnen und Schülern am Ende der Grundschulzeit unterschiedlich ausgebildet sind.

## Literatur

- Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2011). Algebraic thinking of primary students. In B. Ubuz (Ed.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 345-352). Ankara: PME.
- Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2012). Algebraisches Denken und mathematische Begabung im Grundschulalter. In Ludwig, M. & Kleine, M. (Eds.), Beiträge zum Mathematikunterricht (pp. 261-264). Münster: WTM-Verlag.