Christoph KIRFEL, Bergen, Hans-Stefan SILLER, Koblenz

Graphikwerkzeuge als Modellierungsanlass

Die Entdeckung von Mathematik, die sich hinter bekannten (Computer-) Programmen, wie Zeichenprogrammen, verbirgt, nutzen wir hier zum Anlass, eben diese Mathematik, mit Hilfe eines mathematischen Modellierungsprojekts, „freizulegen“.

Einstieg

Die Figur auf dem Bild ist mit der Freeware SumoPaint (www.sumopaint.com) erstellt. In SumoPaint gibt es wie in fast jedem Programm die Option eine gezeichnete Strecke „zu krümmen“. Auf diese Weise lassen sich beliebige Kurven erstellen.

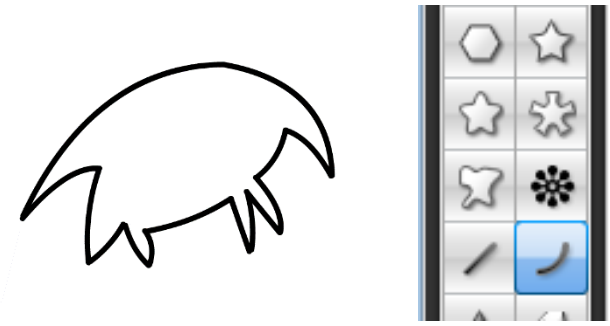

Abbildung 1: Darstellung eines bel. Objekts in SumoPaint

Wie ein Computer diese Kurven generiert, darüber lässt sich in SumoPaint nichts erfahren. Diesen Umstand machen wir uns zu Nutze: Schülerinnen und Schüler betätigen sich im Rahmen einer Unterrichtseinheit als Designer und entdecken gemeinsam die zugrundeliegenden mathematischen Hintergründe.

Als Ausgangspunkt dienten Kurven, die an Parabeln erinnerten. Es wurden anfänglich mehrere aneinander gekoppelte Parabelstücke durch vom Benutzer vorgegebene Punkte gelegt. Durch je zwei aufeinanderfolgende Punkte wurden Parabeln ($y = ax^2 + bx + c$) erstellt, zusätzlich sollte die Tangentensteigung im Startpunkt vorgegeben werden. Die Beschreibung der genauen (unterrichtlichen) Umsetzung kann in Kirfel (2015) nachgelesen werden.

Zu jedem neuen Punkt, der in der Zeichnung berücksichtigt wird, bekommen wir in neues Parabelstück. Die Schülerinnen und Schüler bauten nach einer Weile selbst ihr Kurvenzeichenwerkzeug in GeoGebra nach, indem sie zwei Parabelstücke erstellten und damit experimentierten. Nach und nach entstand der Wunsch, dass die Parabelstücke glatt ineinander übergehen sollten. Aus einer intrinsischen Motivation seitens der Schülerinnen und Schüler entstand also der Wunsch nach einem Modell ohne Knicke in der Kurve.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Durch Erweiterung auf weitere vorhandene Ankerpunkte konnten auch dort solche glatten Übergänge erreicht werden. Es ist dann nur noch die Steigungszahl der allerersten Starttangente frei wählbar.

Schwächen des gewählten Modells

Nachdem mit Hilfe des ersten Modells umfassend experimentiert wurde, wurden auch die vorliegenden Mängel (des Modells) sichtbar. Zum einen wurden die Zeichnungen sehr bizarr, wenn zwei Punkte sehr nahe beieinander lagen, also annähernd dieselbe x-Koordinate hatten. Dieses Phänomen war für die Schülerinnen und Schüler aber vergleichsweise leicht zu erklären. Liegen die Punkte gerade übereinander, bricht die Berechnung ab, da der Nenner in der Formel, welche von den Schülerinnen und Schülern zur Auffindung der Parabelparameter (a,b,c) entwickelt wurden, zu Null wird. Die Kurven werden so zu senkrechten Linien und dieser Effekt pflanzt sich auf die anderen Ankerpunkte fort.

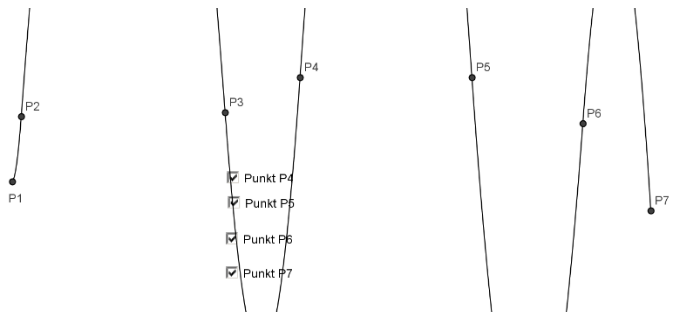

Abbildung 2

Dies gilt hauptsächlich für das glatte Modell. Das ist natürlich ein ernsthafter Mangel, der in einem professionellen Zeichenprodukt nicht auftreten darf.

Ein anderer Nachteil unseres Modells ist, dass die Kurven keine senkrechte Tangente haben können. In einer Zeichnung kann gerade dies gewünscht sein. Wir erzeugen zudem keine geschlossene Kurve, die einen oberen und einen unteren Ast hat, was ja in einer Zeichnung durchaus wünschenswert wäre. Unser Modell eignet sich im Grunde nur für eine Reihe von Punkten mit steigenden Abszissen-Werten (Gebirgslandschaft).

Die Schülerinnen und Schüler waren mit ihren eigenen gezeichneten Kurven zufrieden, gleichzeitig aber auch ein bisschen enttäuscht, dass sie nicht die Funktionalität eines professionellen Programms darstellen konnten. Dies ist der Ausganspunkt für eine weitere neue Idee – die Verwendung von Vektorfunktionen.

Als Startpunkt wurde eine Vektorfunktion $P(t) = P_1 t$ gewählt, also bloß einen Vektor P_1 der mit Hilfe einer Variabel t verkürzt oder verlängert wird. Die Resultatvektoren liegen auf einer Geraden. Des weiteren betrachteten die Schülerinnen und Schüler eine andere Vektorfunktion $P(t) = P_1 t + P_2$. Durch eine Erweiterung der Vektorfunktion zu $P(t) = P_1 t^2 +$

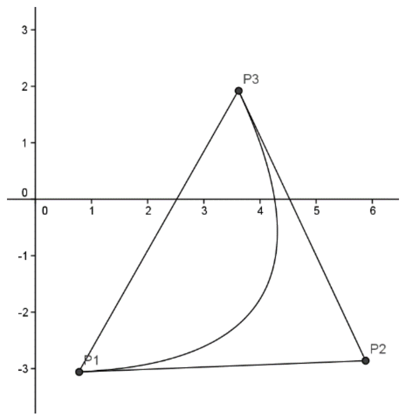

Abbildung 3

$P_2 t + P_3$ gelangten die Schülerinnen und Schüler zu einer neuen Erkenntnis. Sie konnten beobachten, dass die Kurven jetzt viel mehr den Kurven aus SumoPaint glichen. Zwar ähnelte auch hier alles Parabeln, aber diese konnten jetzt auch gedreht im Koordinatensystem auffindbar sein (vgl. Abb. 3). Damit erhöhte sich auch die Motivation der Schülerinnen und Schüler. Dies führte dazu, dass sie mehr über den Zugang mit Hilfe von Vektorfunktionen wissen wollten.

Die Verwendung von Bézierkurven als einer speziellen Form quadratischer Vektorfunktionen, $P(t) = P_1\,(1-t)^2 + 2\,P_2\,(1-t)\cdot t + P_3 t^2 = \binom{u_1}{v_1}(1-t)^2 + 2\binom{u_2}{v_2}\,(1-t)\cdot t + \binom{u_3}{v_3}\cdot t^2$ hatte klare Vorteile, die auch bald von den Schülerinnen und Schülern erkannt wurden. Sie erkannten bald, dass sich das Intervall [0, 1] als Definitionsbereich für die Variable t eignet, weil dann nämlich $P(0) = P_1(1-0)^2 + 2P_2(1-0)\cdot 0 + P_3 \cdot 0^2 = P_1$ und $P(1) = P_1(1-1)^2 + 2P_2(1-1)\cdot 1 + P_3 \cdot 1^2 = P_3$ gilt. Damit war auch die Bedeutung der Punkte P_1 und P_3 in der Formel geklärt. Nur der Punkt P_2 war noch ungeklärt. Wird mit der zugehörigen Vektorfunktion experimentiert, erkennt man dass der Punkt P_2 für die Tangenten im Start- und Endpunkt des Intervalls verantwortlich ist. Daraufhin entstand die Idee, die Ableitung der Vektorfunktion $P'(t) = -2\,P_1\,(1-t) + 2\,P_2\,(1-2t) + 2\,P_3 t$ zu untersuchen.

Die Schülerinnen und Schüler waren bereits mit dem Begriff der Ableitung einer Vektorfunktion vertraut und wussten, dass die Ableitung die „Geschwindigkeit“ eines Punktes, der sich entlang der Kurve bewegt, beschreibt. So konnte dann die Start- und Endgeschwindigkeit ermittelt und eine korrekte Interpretation des Vorgangs, im Zuge der Validierung, durchgeführt werden: die Tangente der Kurve ist im Startpunkt ein Vektor, der von P_1 nach P_2 zeigt und der entsprechende Tangentenvektor zeigt für die Endtangente von P_2 nach P_3. Damit wird also P_2 zum Steuerpunkt für die Tangenten in den Endpunkten und die Schülerinnen und Schüler können die Kurve nun „kontrollieren“.

Die Funktionalität eines professionellen Zeichenprogramms wie z. B. SumoPaint wurde entdeckt, gleichzeitig die Mängel des ursprünglichen, selbst erstellten Zeichenwerkzeugs (Division durch Null, senkrechte Tangenten, doppelte Äste) behoben. Es wäre spannend gewesen, hier noch weiter zu gehen und mehrere Bézierkurvenstücke hintereinander zu setzen oder zu beschreiben, wie man glatte Übergänge zwischen solchen Kurvenstücken hinbekommt. Auch hätte es sich gelohnt, Bézierkurven dritten Grades zu studieren, wie man sie im Zeichenprogramm *Paint* findet. Dies sind Ideen für zukünftige Projekte.

Fazit

Der Modellierungsprozess wird als Kreislauf mit mehreren Phasen beschrieben, die ggf. auch mehrmals durchlaufen werden müssen (vgl. Blum & Leiß, 2005, Fischer & Malle, 1985), insbesondere dann, wenn das konstruierte Modell nicht den gestellten Anforderungen entspricht. Selten werden in exemplarischen Umsetzungen diese Mehrfachdurchläufe des Prozesses dokumentiert. Im vorliegenden Fall sieht man allerdings deutlich, wie ein anfängliches Modell eben nur teilweise die gestellten Anforderungen erfüllt, und in der „nächsten Runde“ durch Berücksichtigung weiterer Parameter man das Modell weiterentwickeln kann. Die Unzufriedenheit der Schülerinnen und Schüler mit ihrem eigenen Modell konnte nämlich als Motivationsfaktor genutzt werden, um sich neuen Stoff anzueignen.

Es wird aber auch deutlich, dass man nicht mit dem endgültigen Modellvorschlag hätte beginnen können, weil dazu der Zugang gefehlt hätte. Der Durchlauf mit dem ersten „fehlerhaften“, d.h. nicht passendem, Modell war notwendig, um das neue Modell zu akzeptieren. So wird sichtbar, wie curriculare Inhalte und der Wissenstand von Schülerinnen und Schülern abgeglichen werden muss, um einerseits die Motivation zu erhalten und andererseits aber auch Fortschritte im fachlichen (Er-)Lernen zu ermöglichen.

Literatur

Blum, W.; Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. In *mathematik lehren*. Heft 128, S. 18–21.

Fischer, R.; Malle, G. (1985): Mensch und Mathematik. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag.

Kirfel, Ch. (2015). Mathematik als Design-Werkzeug – Wie macht man schöne Kurven. In Siller, H.-St. (Hrsg.), *Der Mathematikunterricht*, 5/2015, S. 50–57.