Henning KÖRNER, Oldenburg

Vom Bestand zur Änderung und zurück – Ein Konzept für die Analysis

In Anlehnung an die historische Entwicklung sind im Standardunterricht die geometrischen Aspekte von Differential- und Integralrechnung, also Steigung und Flächeninhalte, Ausgangspunkt und zentraler Leitfaden. In den meisten aktuellen Kerncurricula und auch bei den Bildungsstandards hat es in den letzten Jahren eine Umorientierung gegeben. Im Erstzugriff werden Änderungsrate („vom Bestand zur Änderung“) und „Rekonstruktion von Bestand“ („von der Änderung zum Bestand“) gesetzt.

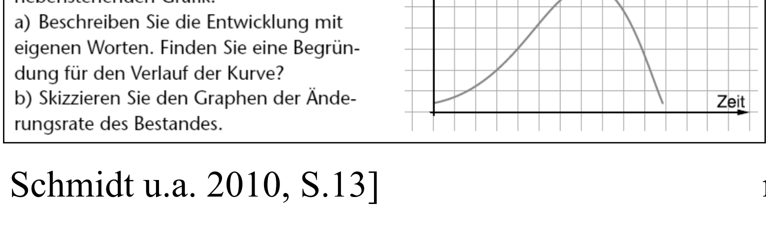
Es wird hier ein Konzept für den Analysisunterricht vorgestellt, dass diese neue Ausrichtung konsequent umsetzt und gleichzeitig das grundlegende Problem des Infinitesimalen nicht unter den Tisch kehrt und in intellektuell redlicher Weise thematisiert. Leitfaden ist eine Verstehensorientierung jenseits der Kalküle und eine adäquate Ausbildung sachgerechter Grundvorstellungen.

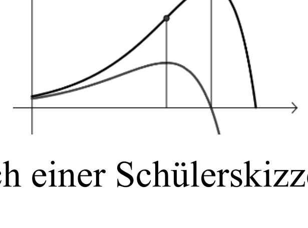
• Papa: *Wie hat es dir auf dem Kramermarkt gefallen? Mona: Naja, besser als letztes Jahr.*

• Gäbe es ein Bevölkerungsproblem, wenn es seit Christi Geburt etwa 7 Milliarden Menschen gäbe?

Solche Aussagen und Argumentationsfiguren zu Änderungen prägen häufig Alltagsdenken und –handeln. Sie zum Ausgangspunkt von Mathematisierungsprozessen hin zur Differential- und Integralrechnung zu machen, schafft unmittelbar einsichtige Sinnzusammenhänge.

Beim Einstieg in die Differentialrechnung sollte man zunächst die Frage nach dem Änderungsverhalten qualitativ explorieren, um adäquate Grundvorstellungen aufzubauen, zu festigen und eine verständnisorientierte Begriffsbildung vorzubereiten. Der Erstzugang gilt dabei dem globalen Verhalten.


4 *Fruchtfliegen*
Eine Fruchtfliegenpopulation entwickelt sich unter Laborbedingungen gemäß der nebenstehenden Grafik.
a) Beschreiben Sie die Entwicklung mit eigenen Worten. Finden Sie eine Begründung für den Verlauf der Kurve?
b) Skizzieren Sie den Graphen der Änderungsrate des Bestandes.



Schmidt u.a. 2010, S.13] nach einer Schülerskizze

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Eine passende Skizze des Änderungsgraphen gelingt durchweg, ebenso wie die Zuordnung markanter Stellen („*Beim Hochpunkt schneidet Änderung die x-Achse.*“ „*Es gibt stärkstes Wachstum, dort größter Änderungswert.*“). Eine solcher Zugang schafft damit sowohl Anknüpfungspunkte an alltägliche Sprech- und Handlungsweisen, als auch einen Ausgangspunkt für die folgende quantifizierende Erfassung von Änderungen über Differenzenquotienten und Sekantensteigungen. Hier stehen dann mittlere Änderungsraten im Mittelpunkt, die ein eigenständiger Gegenstand zur Untersuchung von Änderungen in verschiedenen Sachsituationen sind und damit nicht eine nur schnell zu durchlaufende Zwischenstation auf dem Weg zur Ableitung.

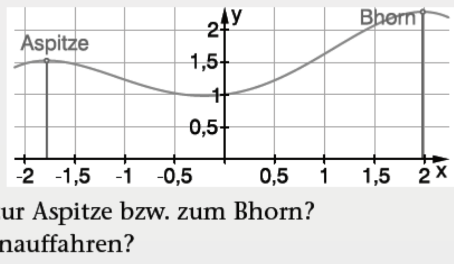
Beim Erforschen der grundlegenden Problematik der lokalen Änderung wird der Differenzenquotient in Kopplung mit numerisch-grafischen Auswertungen mithilfe des GTR oder eines Funktionenplotters zum zentralen, durchgehend verwendeten Werkzeug beim Gewinnen von Vermutungen und numerischen Ergebnissen. Im Zentrum bleibt der verständige Umgang mit Differenzenquotienten und nicht ein vorschnelles algebraisches Kalkül. Im Differenzenquotienten sind die Grundvorstellungen zu Änderungsraten erfasst („Differenzen pro Zeitintervall“), nicht in $n \cdot x^{n-1}$.

Die Änderungsraten hängen von der Stelle a und von der Breite des Intervalls h ab („Ab welchem Zeitpunkt und für wie lange soll die Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmt werden?“) Naheliegend ist damit die Definition des Quotienten als zweistellige Funktion $msek(a,h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Hält man a fest und variiert h, untersucht man den lokalen Aspekt, hält man h fest (sehr klein), dann untersucht man den globalen Aspekt. An folgendem Beispiel werden beide Untersuchungen mit dem GTR dargestellt (vgl. Schmidt u.a. 2010, S.31)

1 *Pistenraupen*

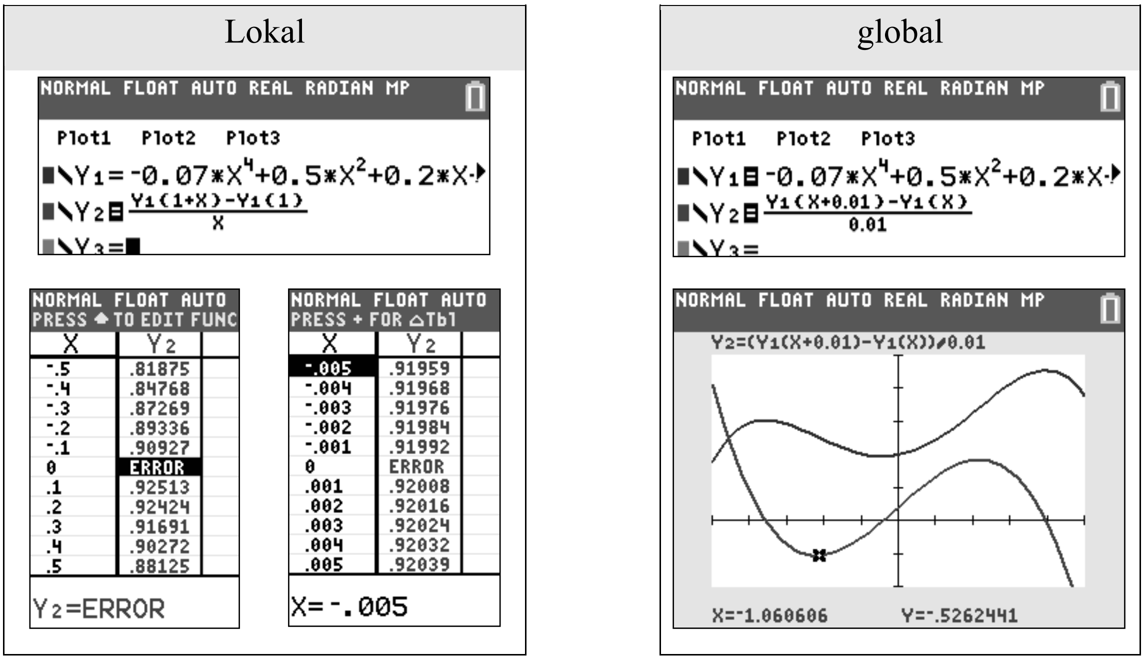
In einem Skigebiet stehen Pistenraupen mit unterschiedlichen Steigfähigkeiten zur Verfügung: Pistenraupe A bewältigt Steigungen bis zu 95 %, Pistenraupe B bis zu 70 % und Pistenraupe C bis zu 50 %.

Das Bergprofil zwischen der Aspitze und dem Bhorn kann mit der Funktion $f(x) = -0{,}07x^4 + 0{,}5x^2 + 0{,}2x + 1$ (x und y jeweils in 500 m) modelliert werden.



a) Schaffen alle Pistenraupen die Auffahrt zur Aspitze bzw. zum Bhorn? Wenn nicht, wie weit können sie jeweils hinauffahren?

b) An welchen Stellen vermuten Sie die größten Steigungen in beiden Richtungen?



Bei der lokalen Untersuchung wird nun mithilfe der Tabellen eine Propädeutik des Grenzwertbegriffs betrieben: Warum steht da immer „ERROR“? Welcher Wert ist der „gotische Schlussstein“ und passt (allein?) in die Lücke (im Beispiel: 0,92?)? Gibt es da nur einen Wert? Immer einen? Wenn wir die Tabelle verfeinern, erreichen wir den Wert irgendwann einmal? Faktisch wird der GTR (als endliche Maschine) irgendwann einmal runden, was dann? Wenn wir den Wert nicht finden, gibt es ihn dann überhaupt? Letztendlich müssen wir festhalten: Das, was wir eigentlich wollen, geht nicht (wegen der Division durch 0), das, was wir können (mittlere Änderungen), wollen wir eigentlich nicht. Innermathematische Reflexion führt dann zur Einführung des Begriffs „Ableitung“ und der Ableitungsfunktion als Grenzlage der Sekantensteigungsfunktionen. Es bleibt festzuhalten: Was zunächst mithilfe adäquater Grundvorstellungen qualitativ erfasst wird, kann nun durch die Mathematisierung mit dem Differenzenquotient und Auswertung mit einem digitalen Werkzeug quantitativ bearbeitet werden, ohne faktischen Grenzübergang.

Ein Bus fährt los. An der ersten Station steigen fünf Menschen ein, an der nächsten drei ein und einer aus. Beim nächsten Halt steigen zwei Personen aus ehe an der nächsten Haltestelle vier einsteigen und drei aussteigen. Wie viele Personen sitzen nun in dem Bus?

Um diese Frage zu beantworten, muss man von den Ein- und Ausstiegen (Änderungen) auf die Anzahl der Passagiere (Bestand) schließen. Es gehört zum Alltagswissen, dass man dazu die Änderungen summieren muss, aber die Gesamtzahl nur dann eindeutig angeben kann, wenn man weiß, wie viele Personen zu Beginn (oder irgendwann einmal) im Bus sitzen. Der Schluss von den Änderungen auf mögliche Bestände, prägt häufig Alltagshandeln. Wenn Schülerinnen und Schüler innerhalb der Differentialrechnung die Frage nach der Änderung bei gegebenen Beständen als Leitfaden erlebt haben und sie nun mit dem umgekehrten Problem, der Erschließung von Beständen aus gegebenen Änderungen konfrontiert werden (z.B. in den „Badewannenaufgaben“), lösen sie es fast intuitiv durch das „Umgekehrte des Ableitens“. Damit entdecken Schülerinnen und Schüler selbsttätig den Inhalt des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung in der Einführungsphase zur Integralrechnung! Zentral ist daneben die Erkenntnis, dass diese Rekonstruktion des Bestandes geometrisch auf die Bestimmung von Flächeninhalten unter dem Änderungsgraphen führt, Bestände also als „Summation unendlich vieler momentaner Änderungen“ aufgefasst werden können. Charakteristisch für dieses Konzept ist damit die fast parallele Einführung der beiden Grundkonzepte zur Integralrechnung: Flächenbestimmung (Gesamtbilanz) und Rekonstruktion. Dies erfolgt auch analog zur Einführung der Differenzialrechnung. Es steht damit zunächst wieder der Aufbau adäquater Grundvorstellungen im Mittelpunkt, ehe Kalküle entwickelt werden. Der Verzicht auf die frühzeitige Einführung komplexerer Theorieelemente und Begriffsfestlegungen ermöglicht es, dass von Beginn an in qualitativer Weise substanzreiche Probleme behandelt werden können. Der Integralbegriff wird also nicht nach einer vorgängigen Durststrecke über Unter- und Obersummen eingeführt, ehe er in Anwendungen kalkülorientiert genutzt wird („F(b)-F(a)-Algebra“), sondern es wird ein qualitativer Weg zum Hauptsatz mit dessen frühzeitiger, auf Einsicht fußender Einführung gegangen, der es ermöglicht, alle klassischen Anwendungen zu behandeln. Das auch in den Bildungsstandards festgeschriebene Konzept „ Rekonstruktion aus Änderung “ begünstigt das frühe Erfassen der Kernaussage des Hauptsatzes. Beunruhigend oder faszinierend, je nach Standpunkt, ist daran nur, dass ein spezifischer Zugriff auf die Sache aus einem tiefen Satz der Analysis für Schüler eine Entdeckung en passant macht.

Eine ausführliche Darstellung des Konzepts findet man in Heintz u.a. (2015), in Schmidt u.a (2010) ist das Konzept in einem Schulbuch umgesetzt.

Literatur

Schmidt, G., Körner, H., Lergenmüller, A., (2010): Neue Wege – Analysis, Braunschweig 2010.

Heintz, G., Pinkernell, G., Schacht, F. (Hrsg.) : Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht, Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich, Neuss 2015.