

Miriam KRIEGER, Münster, Kathrin WINTER, Münster

## **Mathematische Beweiskompetenzen Studierender diagnostizieren und fördern – eine Bestandsaufnahme**

### **Abstract**

Mathematische Beweise bereiten vielen Studierenden große Schwierigkeiten. Bereits in den 70er Jahren wurden bei dieser Zielgruppe Untersuchungen durchgeführt und stehen auch aktuell wieder im Fokus vieler Studien (vgl. u. a. Schupp 1974, Platz et al. 2015). Auf bestehenden Erkenntnissen aufbauend wurden seit 2013 weitere Erhebungen mit Studierenden aus NRW durchgeführt. Die aktuellen Untersuchungen sind Bestandteile des Kooperationsprojektes eProof von Arbeitsgruppen der Universitäten Koblenz/Landau und Münster (ausführliche Informationen zum Projekt: <http://e-proof.weebly.com/>). Die im Folgenden vorgestellten Ergebnisse folgen aus dem Teilprojekt BeSser „Beweiskompetenzen Studierender systematisch erweitern“, welches an der WWU Münster verortet ist. Ziel dieser Untersuchungen ist es, auf Basis der empirischen Befunde typische Fehler und Schwierigkeiten beim mathematischen Beweisen herauszustellen und daraus resultierende Konsequenzen zu erörtern.

### **Mathematisches Beweisen und Beweiskompetenzen**

Unter einem mathematischen Beweis wird der „Vorgang [verstanden], bei dem eine Behauptung in gültiger Weise Schritt für Schritt formal deduktiv aus als bekannt vorausgesetzten Sätzen und Definitionen gefolgert wird.“ (Meyer 2007, S. 21) Es impliziert unterschiedliche Ziele wie das Erlernen des Verifizierens, Erklärens und Systematisierens und ebenso die Förderung von Kommunikationskompetenzen und des entdeckenden Lernens (vgl. u. a. Bell 1976). Um sich dem Begriff der Beweiskompetenz zu nähern und dessen vielfältige Facetten zu beleuchten, entstand auf Basis der Bildungsstandards in Nordrhein-Westfalen und den Erkenntnissen insbesondere von Brunner (2013), Boero (1999) und Bell (1976) eine Übersicht über die einzelnen Stufen und Säulen des Oberbegriffes „Beweiskompetenz“ (vgl. Abbildung). Insgesamt lassen sich drei verschiedene Stufen der Beweisführung unterscheiden, deren Komplexität mit zunehmender Stufe kontinuierlich zunimmt. Stufe 1 umfasst das Anwenden mathematischer Sätze und Begriffe bei einzelnen Berechnungen. Diese Sätze und Begriffe sind auf Stufe 2 und 3 Grundlage einfacher bzw. zunehmend komplexerer Argumentationen in mehreren Schritten. Nach Brunner (2013) lassen sich unter dem allgemeinen Begriff der Beweiskompetenz die Teilbereiche der „fachlichen Kompetenz“, der „Systematisierungs- und Vernetzungskompe-

tenz“, der „Darstellungskompetenz“, der „Kommunikationskompetenz“ und der „Autonomie in der Beweisführung“ subsumieren. Diese bilden, wie in Abbildung 1 veranschaulicht, die Säulen einer fundierten Beweiskompetenz.

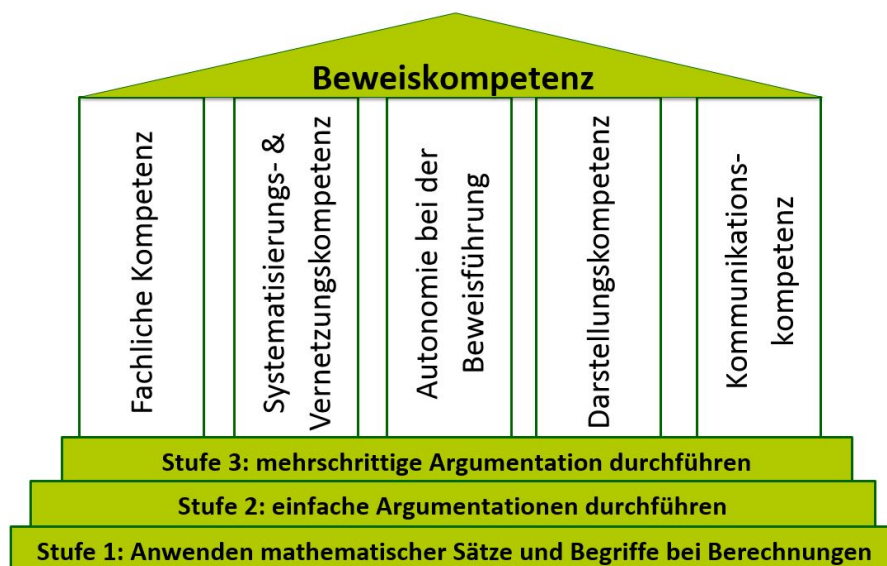


Abbildung 1: Haus der Beweiskompetenzen (in Anlehnung an Brunner 2013).

## Untersuchungsdesign

Die Untersuchungen der Pretestphase sind sowohl qualitativ als auch quantitativ einzuordnen und beinhalten bspw. schriftliche Erhebungen an verschiedenen Hochschulen bei Studierenden, Befragungen Lehrender sowie Interviewstudien. Die Datenbasis für die nachfolgenden Analysen bilden insbesondere schriftlich erhobene Bearbeitungen von Beweisaufgaben bei insgesamt 326 Studierenden insbesondere aus Lehramtsstudiengängen.

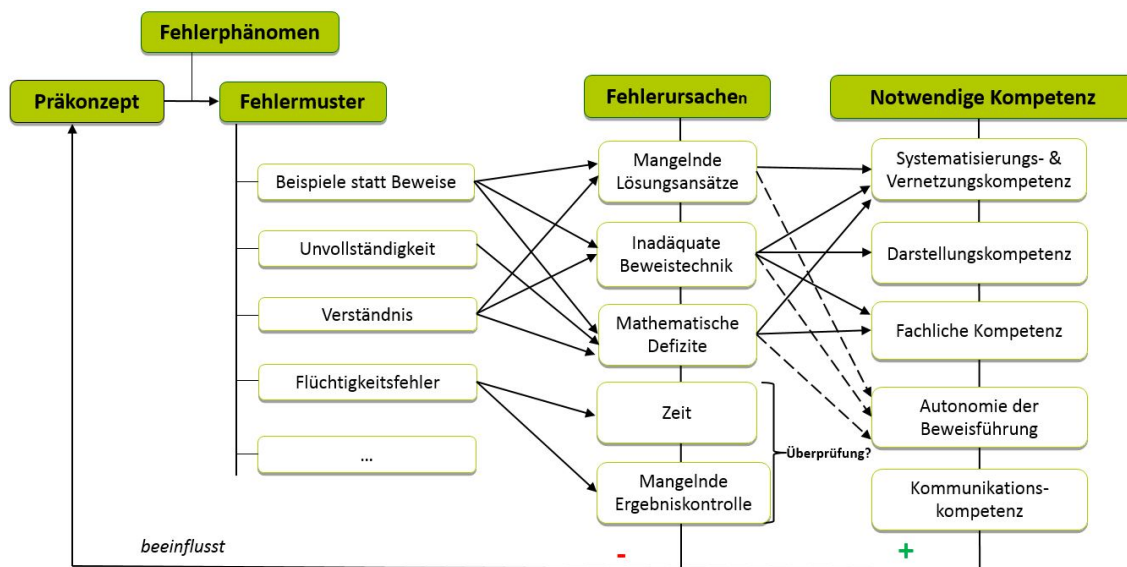
## Untersuchte Beweisaufgaben in der Pretestphase

1. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras. (In einem ebenen rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates)
2. Beweisen Sie:  $\sqrt{2}$  ist eine irrationale Zahl
3. Beweisen Sie:  $\sqrt{4}$  ist eine rationale Zahl

## Ergebnisse der Fehleranalysen

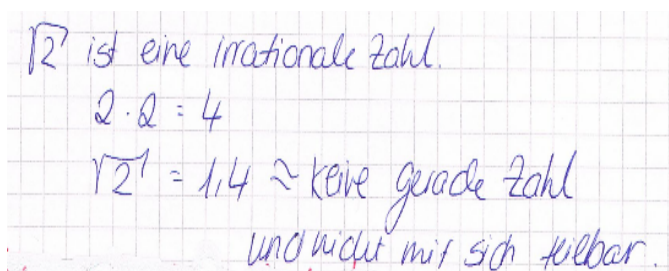
Eine Fehleranalyse im Bereich der Mathematikdidaktik zielt einerseits auf die Kategorisierung von Fehlern bzw. Fehlermustern und andererseits auf die Ursachenermittlung zu den einzelnen Fehlern bzw. Fehlermustern ab

(vgl. Winter 2011). Im Rahmen explorativer Datenanalysen konnten auf Basis der bisherigen Erhebungen vertiefende Hypothesen zu Zusammenhängen zwischen bestimmten Fehlermustern und -ursachen beim Beweisen des Satzes des Pythagoras, der Rationalität von  $\sqrt{4}$  und der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  durch Studierende entwickelt werden. Auf Grundlage dieser Zusammenhangsanalysen wurde eine erste Kategorienübersicht zu kausalen Zusammenhängen entwickelt, welche sich von den Begrifflichkeiten an ein Konzept von Prediger/Wittmann (2009) anlehnt. (vgl. Abbildung 2).



**Abbildung 2:** Ausschnitt aus dem Entwurf eines Kategorienschemas aufbauend auf Zusammenhangshypothesen zu Beweiskompetenzen.

Als Beispiel für die Kategorienbildung sei ein Fehlerphänomen mit dem Muster „Beispiele statt Beweise“ – Ursache „Inadäquate Beweistechnik“ einer Studentin aus dem 5. Fachsemester Lehramt GHR, Mathematisches Grundlagenstudium aufgezeigt (vgl. Abbildung 3).



**Abbildung 3:** Fehlerphänomen zum Fehlermuster „Beispiele statt Beweise“.

Als gewinnbringend erwies sich zudem die Analyse der Probandenkommentare aus einer schriftlichen Erhebung sowie einer Interviewstudie im Sommersemester 2014 in Münster. So gaben die Studierenden bspw. folgende Kommentare: „Der Satz des Pythagoras ist mir ein geläufiger Begriff, jedoch fehlt mir zum Beweisen der Ansatz“ oder „Es hakt schon da-

ran, dass ich nicht weiß, wie ich den Beweis anfangen soll“, die beide unter der Kategorie „Ansatz: Probanden benötigen eine Starthilfe bei der Beweisführung. Ohne diese kommen sie nicht weiter.“ geclustert wurden. Weitere Kategorien, die sich hierbei ergaben: Desinteresse, Mathematische Definitionen, Zeitspanne zur Schulzeit, Voraussetzungen, „Noch nie bewiesen“, Definition eines Beweises, mathematische Defizite.

## **Fazit und Ausblick**

Das Führen mathematischer Beweise bereitet Studierenden aller Fachsemester und verschiedener Studiengänge nach wie vor Probleme. Im Projekt BeSser werden daher weitere Untersuchungen folgen, in denen bspw. das generierte Fehlerkategorienchema (vgl. Abbildung 2) weiter optimiert und die Zusammenhangsanalysen im Bereich der Fehleranalyse vertieft und validiert werden. Hierzu wurden in bisherigen Überlegungen bereits die Bereiche „Formalia“, „Fachwissen“, „Vorüberlegungen zum Beweis“, „Arbeitstechniken“, „Einstellungen“ und „Hilfestellungen während des Beweises“ herausgearbeitet, welche im Rahmen der Hauptuntersuchung noch näher spezifiziert und fachlich analysiert werden.

## **Literatur**

- Schupp, H. (1974): Untersuchungen und Überlegungen zum Stand des Beweisvermögens der Studienanfänger. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 37-42.
- Bell, A. (1976): A Study of Pupil's Proof-Explanations in Mathematical Situations. In: Educational Studies in Mathematics 7, S. 23-40.
- Boero (1999). Argumentation and mathematical proof. A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8.
- Brunner, E. (2013). Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I. Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik.
- Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker
- Platz, M., Krieger, M., Winter, K., Niehaus, E. Dahn, I. (2015): Beweisen lernen durch lehren? - Chancen und Grenzen dieses Konzeptes. In diesem Band.
- Prediger, S., Wittmann, G. (2009): „Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich?“ Vorversion eines Artikels in PM Heft 27, Juni 2009, S. 4.
- Brunner, E. (2013): Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I. Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik.
- Winter, K. (2011): „Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse.“ Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment.