Jessica KUNSTELLER, Köln

# Familienähnlichkeiten und ihre Bedeutungen im Sprachspiel „Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht“

In der mathematikdidaktischen Diskussion wird das Lernen von und durch Ähnlichkeitsbeziehungen - wenn auch mit verschiedenen Begrifflichkeiten und Ausprägungen (z.B. Brinkmann 2002, English & Sharry 1996, Sfard 2008) - vielfach akzentuiert. Hierbei wird betont, dass das Erkennen und Nutzen gewisser Ähnlichkeiten für das Lernen von Mathematik sinnvoll ist bzw. hierfür nutzbar sein kann. In diesem Beitrag soll unter Verwendung von Ludwig Wittgensteins (1889-1951) Begriff „Familienähnlichkeit“ eine Perspektive auf Lernprozesse aufgezeigt werden, indem „Beziehungen von Ähnlichkeiten“ fokussiert werden.

## Der Begriff „Familienähnlichkeit“ nach L. Wittgenstein (1953)

In seiner Sprachspielphilosophie verwendet L. Wittgenstein den Begriff „Familienähnlichkeit“, den er zwar nicht definiert, aber an Beispielen, u. a. am Begriff „Zahl“, erläutert: „Und ebenso bilden z.B. die Zahlenarten eine Familie. Warum nennen wir etwas ‚Zahl’? Nun etwa, weil es eine - direkte -Verwandtschaft mit manchem hat, was man bisher Zahl genannt hat; [...].“ (PU §67)

Werden Zeichen wie „23“, „36 kg“ und „HS 2“ betrachtet, so wird deutlich, dass sie bzw. Teile derer als „Zahlen“ bezeichnet werden können. Die verschiedenen Zeichen weisen eine Ähnlichkeit nicht nur hinsichtlich ihrer Gestalt, sondern auch hinsichtlich ihrer Bezeichnungen auf. Weiterhin könnten einige dieser Zeichen als natürliche Zahlen aufgefasst bzw. in verschiedene Zahlaspekte untergliedert werden. Solche Ähnlichkeiten oder „Verwandtschaften“, die wir z. B. bei dem Begriff „Zahl“ sehen, bezeichnet Wittgenstein als Familienähnlichkeiten: „Ich kann diese Ähnlichkeiten nicht besser charakterisieren als durch das Wort ‚Familienähnlichkeiten’; denn so übergreifen und kreuzen sich die verschiedenen Ähnlichkeiten, die zwischen den Gliedern einer Familie bestehen: Wuchs, Gesichtszüge, Augenfarbe, Gang, Temperament, etc. etc. - Und ich werde sagen: die ‚Spiele‘ bilden eine Familie.“ (PU §67)

Spiele (wie z. B. Tennis und Schach) haben gleiche bzw. vergleichbare Eigenschaften, jedoch müssen nicht alle Eigenschaften identisch sein, um die Spiele als Spiele zu bezeichnen. Auch wenn nur eine einzelne Eigenschaft übereinstimmt, so sind es doch (Sprach-)Spiele: „[...] there is no fixed list of family characteristics, nor fixed number required for admission, nor sharp border for the individual characteristics themselves” (Hallet 1977,

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

S.150). Familienähnlichkeiten können demnach als das Übereinstimmen von gewissen nicht näher definierbaren Eigenschaften gefasst werden.

Im Folgenden wird an einem empirischen Beispiel gezeigt, dass Ähnlichkeiten und welche Arten von Ähnlichkeiten in Lernprozessen realisiert werden. Die kurze Analyse kann durch die Lektüre von Kunsteller & Meyer (2014) vertieft werden. Insbesondere wird dort der Fokus auch auf das Nutzen von Ähnlichkeiten zwischen den Bearbeitungen verschiedener Aufgaben gelegt.

## Empirie

In einem Unterrichtsversuch[1] wurde SchülerInnen einer vierten Klasse die folgende Darstellung gezeigt:

$$\begin{aligned} 67148 &= 6 \cdot \quad 10000 \quad + 7 \cdot \quad 1000 \quad + 1 \cdot \quad 100 \quad + 48 \\ &= 6 \cdot (2500 \cdot 4) + 7 \cdot (250 \cdot 4) + 1 \cdot (25 \cdot 4) + 48 \\ &= 4 \cdot (6 \cdot 2500) + 4 \cdot (7 \cdot 250) + 4 \cdot (25 \cdot 1) + 48 \end{aligned}$$

Die dazugehörige Aufgabenstellung war: „Formuliere anhand dieser Darstellung eine Regel dafür, wann sich eine beliebige Zahl durch 4 teilen lässt.“ Es werden nun diejenigen Regeln, die Mara und Rico im Kontext der Teilbarkeit durch 4 geäußert haben, auf Familienähnlichkeiten untersucht.

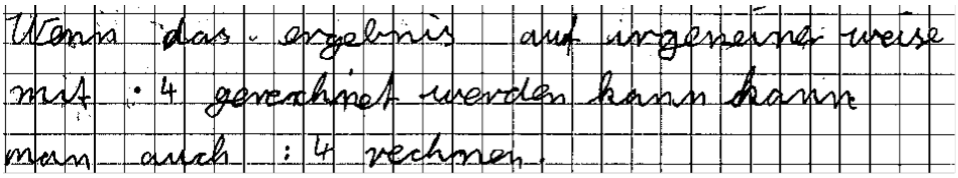
Wenn das ergebnis auf irgendeine weise
mit · 4 gerechnet werden kann kann
man auch : 4 rechnen.

**Abb. 1:** Regel von Rico

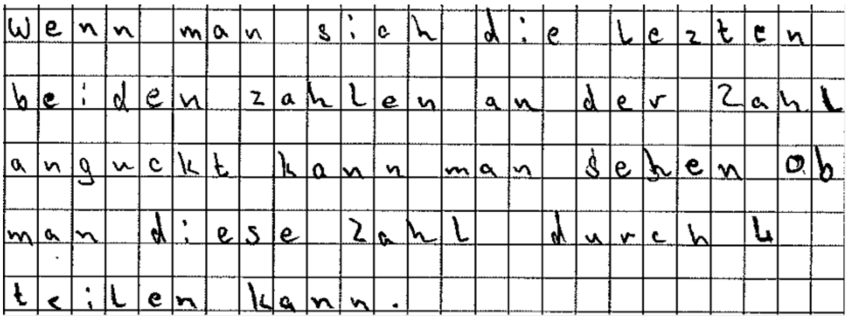
Wenn man sich die lezten
beiden zahlen an der Zahl
anguckt kann man sehen ob
man diese Zahl durch 4
teilen kann.

**Abb. 2:** Regel von Mara

[1] Aus forschungslogischer Sicht musste eine derart komplexe Aufgabe gewählt werden, um das Erkennen und Nutzen von Ähnlichkeiten auch zwischen verschiedenen Aufgaben fokussieren zu können. Diese Forschungsperspektive impliziert keine direkten Handlungsempfehlungen für den regulären Unterricht.

Beide Regeln weisen Ähnlichkeiten auf der semantischen Ebene auf, zumal die Regel von Rico zur finalen Begründung der Endstellenregel zur Teilbarkeit durch 4, hier in Ansätzen impliziert in der Regel von Mara, zusammenhängen. Weiterhin beschreiben sie die Teilbarkeit durch 4 – jeweils von einer anderen Perspektive bzw. einer anderen Richtung. „: 4 rechnen" (Rico) und „durch 4 teilen" (Mara) drücken eine ähnliche Bedeutung aus. (*Familien-)Ähnlichkeiten semantischer Art* beschreiben also die ähnlichen Bedeutungen von Wörtern im Sprachgebrauch.

Betrachtet man die schriftlichen Elemente, so können Ähnlichkeiten zwischen „durch 4", „: 4", „· 4" in den Regeln und in der vorgegebenen Darstellung ausgemacht werden. Sie beinhalten alle das Zeichen „4" und ähnliche Symbole bzw. Ausdrücke für Operationen. Im Kontext von solchen schriftlichen Elementen (Dokumente, Schulbuch, Tafelanschrieb) soll von *(Familien-)Ähnlichkeiten (schrift-)bildlicher Art* gesprochen werden. Sie beziehen sich auf Ähnlichkeiten zwischen ikonischen und symbolischen Elementen, ohne notwendig solche semantischer Art zu implizieren. Die Regeln von Rico und Mara wurden aufgeschrieben und in der Unterrichtsinteraktion verbalisiert, sodass aus der Nähe (schrift-)bildlicher Art auch eine solche phonetischer Art wurde. (*Familien-)Ähnlichkeiten phonetischer Art* bezeichnen Ähnlichkeiten zwischen den Lautbildern von Worten. So können z. B. Worthülsen oder -stämme ähnlich zueinander sein, wie etwa den Ausdrücken „teilen" und „teilbar" die Worthülse „teil" gemeinsam ist.

Weitere (Familien-)Ähnlichkeiten lassen sich auf der inferentiellen Ebene rekonstruieren, denn alle Regeln wurden im Kontext der gestellten Aufgabe entdeckt und lassen sich entsprechend der Theorie der Abduktion, als abduktiv gewonnene Gesetze rekonstruieren (s. Meyer 2007). Des Weiteren stellen die Regeln Kausalzusammenhänge dar und wurden in der Unterrichtssequenz zur finalen Begründung der Teilbarkeitsregel durch 4 verwendet. (*Familien-)Ähnlichkeiten inferentieller Art* lassen sich auch dann feststellen, wenn sich bspw. Begründungsstrukturen vergleichen lassen oder die funktionalen Bestandteile der Inferenzen (Schlussformen) einander ähneln.

## Abschluss und Ausblick

Mit Wittgensteins Worten verdeutlichen die Kurzbetrachtungen der in diesem Beitrag thematischen Regeln ein komplexes „Netz von Ähnlichkeiten" (PU §66), welches Lernende realisieren. Mittels der verschiedenen Arten von (Familien-)Ähnlichkeiten lassen sich aus mathematikdidaktischer Sicht mündliche oder schriftliche Schüleräußerungen rekonstruieren bzw. die Rekonstruktionen von Inferenzen tiefergehend analysieren.

Der Fokus auf die verschiedenen (Familien-)Ähnlichkeiten ermöglicht zugleich die Orientierung von Verstehensprozessen, insofern Ähnlichkeiten in der mathematikdidaktischen Diskussion (s. Einleitung) eine bedeutsame Rolle zugewiesen wird. Die verschiedenen Kategorien ermöglichen weiterhin eine Strukturierung der in der obigen Parenthese angedeuteten Begriffsvielfalt. Mit Lorenz (1995, S. 99) lässt sich das Verwenden von Analogien als das Übertragen von Eigenschaften zwischen „zwei Arten [...] einer Gattung" verstehen. Hierbei werden vorhandene semantische Ähnlichkeiten zwischen den Arten genutzt und auf andere erweitert. Anders verhält es sich bei Metaphern (u. a. Sfard 2008), wie bei „Ast", bei denen die Ähnlichkeiten semantischer Art mit einer solchen phonetischer und/oder (schrift-)bildlicher Art einhergehen.

In weiteren empirischen Untersuchungen sollen, durch die Rekonstruktion empirischen Datenmaterials, die theoretischen Begriffe weiter ausgeschärft und womöglich erweitert werden. Insbesondere wird dabei der Analysefokus auf das Erkennen und Nutzen von Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Aufgabenlösungen durch die Lernenden und somit die Perspektive auf das „Lernen durch Ähnlichkeiten" gelegt. Denn die hier nur in Ansätzen präsentierten (Familien-)Ähnlichkeiten beziehen Bedeutung darin, dass solche (Arten von) Ähnlichkeiten die nachfolgenden Äußerungen von SchülerInnen und somit Lernprozesse beeinflussen. Dies wird in weiteren Veröffentlichungen weiter ausgeführt.

## Literatur


Brinkmann, A. (2002): Über Vernetzungen im Mathematikunterricht. Dissertation Universität Duisburg, Institut für Mathematik. Duisburger elektronische Texte.

English, L. & Sharry, P. (1996): Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. Educational Studies in Mathematics 30, S. 135-157.

Hallett, G. (1977): A Companion to Wittgenstein's Philosophical Investigations. Cornell UP: Ithaca.

Kunsteller, J. & Meyer, M. (2014): Zur Rolle von Familienähnlichkeiten bei der Einführung der Potenzfunktionen. In: Der Mathematikunterricht 60 (2), S. 50-57.

Lorenz, K. (1995): Analogieschluß. In: J. Mittelstraß (Hrsg.): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Bd. 1. Stuttgart: Metzler.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Franzbecker: Hildesheim.

Sfard, A. (2008): Thinking as communication. Cambridge UP: New York.

Wittgenstein, L. (1984): Werkausgabe 1. Philosophische Untersuchungen. Suhrkamp: Frankfurt. (erstmals 1953 erschienen)