

Dezimalbrüche und Stellenwerttafeln

Ziel dieser Forschungsarbeit ist es, ein virtuelles Material zum Umgang mit Dezimalbrüchen zu entwickeln welches anschlussfähig ist und Kinder beim Transfer zwischen Zahlvorstellung und symbolischer Schreibweise unterstützt. Hierzu gehen wir im Folgenden zunächst auf ausgewählte Probleme der Kinder beim Umgang mit Dezimalbrüchen ein.

1. Ausgewählte Probleme beim Umgang mit Dezimalbrüchen

Probleme und Fehlvorstellungen von Kindern beim Umgang mit Dezimalbrüchen sind bekannt und gut erforscht (vgl. u.a. Padberg 1989, 2002, 2009, Heckmann 2005, 2006, Padberg & Heckmann 2007). Im Folgenden werden insbesondere solche Probleme aufgegriffen, die sich aus der Sprache, der Notation, sowie aus dem Material zur Veranschaulichung ergeben.

Dezimalbrüche begegnen den Kindern bereits sehr früh. Aus dem Alltag kennen sie beispielsweise Notationen wie 2,49 € durch die Ausschilderung von Preisen oder 1,35 m für Größenangaben. Im Unterricht lernen die Kinder Dezimalbrüche im Zusammenhang mit Größen in Klasse 2 kennen. Hier werden bereits „Grundlagen“ für Fehlerstrategien wie der Komma-trennt-Strategie gelegt, da die Kinder das Komma als Trennzeichen zwischen verschiedenen Größeneinheiten kennenlernen (vgl. Heckmann 2005, von Schwerin 2012). Diese Komma-trennt-Vorstellung wird durch die Sprechweise der Zahlen, wie z.B. „drei Meter sechsundsiebzig“ für 3,76 m oder gar „drei fünfundneunzig“ für 3,95 € unterstützt. Die Komma-trennt-Vorstellung wird durch die Verwendung des Kommas als Trennzeichen in der Sprache (Aufzählungszeichen) unterstützt, ebenso wie durch die Nutzung eines eigenen Kästchens bei der Notation im Heft. Die Vorstellung, dass das Komma zwei natürliche Zahlen voneinander trennt wird von Bickner-Ahsbahs (2013) auch als „Situationsverhaftung in den natürlichen Zahlen“ benannt.

Die Ähnlichkeit der Stellenwertbezeichnungen (Zehner – Zehntel, Hunderter – Hundertstel, Tausender – Tausendstel) ist ebenso eine Problematik, die sich aus der Sprache ergibt und zu inhaltlichen Fehlvorstellungen führen kann. So wirkt beispielsweise ein Zehntel kleiner als ein Hundertstel, weil Entsprechendes für die Stellenwerte der natürlichen Zahlen Zehner und Hunderter gilt (vgl. Heckmann 2005). So werden die Kinder durch die sprachliche Nähe der Stellenwertbezeichnungen zu fehlerhaften Transfers verleitet. Unter anderem verleitet diese Ähnlichkeit auch zur Annahme des Kommas als Symmetrieachse. Die ist eine weitere Fehlvorstellung, die

zwar deutlich hinter die Komma-trennt-Vorstellung zurücktritt, dennoch aber vertreten ist (Padberg 2008).

2. Material zur Arbeit mit Dezimalbrüchen

Die Fehlvorstellung des Kommas als Symmetrieachse wird teilweise durch Material unterstützt. Bei näherer Betrachtung des Montessori Multiplikationsbretts für Dezimalbrüche sind die Zehner beispielsweise in dunkelblauer Farbe gekennzeichnet, die Zehntel in hellblauer, die Hunderter sind dunkelrot gefärbt, die Hundertstel hellrot, usf. Ein dunkelroter Hunderter ist zwar soviel Wert wie zehn dunkelblaue Einer, ein hellrotes Hundertstel allerdings nicht soviel wie zehn hellblaue Zehntel!

Grundsätzlich können Veranschaulichungen die Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen unterstützen. So ist der Zahlenstrahl als lineares Modell sehr gut zur Vermittlung von Vorstellungen zur Anordnung und Dichte von Dezimalbrüchen geeignet. Geht es jedoch um die Veranschaulichung des Stellenwertaufbaus der Zahlen, so sind andere Materialien zu bevorzugen. Teilweise wird Mehrsystemmaterial dazu verwendet, um das Wissen der Kinder über Bündeln/Entbündeln mit dem Konzept des Stellenwerts zu verknüpfen. Schwierig wird es allerdings, wenn das Material, das zuvor zur Veranschaulichung der natürlichen Zahlen verwendet wurde nun umgedeutet wird. Ebenso können die kleinen Würfel als erkennbare Grundeinheit zu Irritationen führen und zum Zählen verleiten. Eine gedankliche Erweiterung der Würfel, Platten und Stangen auf kleinere oder größere Einheiten ist ebenfalls schwierig, weshalb das Mehrsystemmaterial zur Veranschaulichung von Dezimalbrüchen nicht geeignet ist.

Lineare Arithmetik-Blöcke, die v.a. in Australien sehr positiv diskutiert und verbreitet sind, stellen ein weiteres mögliches Arbeitsmittel zur Veranschaulichung von Dezimalbrüchen dar (vgl. Stacey u.a. 2001). Die strukturelle Ähnlichkeit zum Zahlenstrahl sorgt dafür, dass die Vorteile des Zahlenstrahls auch bei den linearen Arithmetik-Blöcken vorhanden sind. Mit unterschiedlich langen Zylindern lassen sich Dezimalbrüche linear darstellen, was insbesondere für den Größenvergleich von Dezimalbrüchen vorteilhaft sein kann. Zur Veranschaulichung von Additions- und Subtraktionsaufgaben werden die Zylinder stellengerecht angeordnet. Betrachtet man jedoch die Stufen zur Erarbeitung des Stellenwertsystems von Gerster und Walter (vgl. Ladel 2013) so stellt man fest, dass man damit auf eine niedrigere Abstraktionsstufe zurückfällt, die bereits in der 1. Klasse verlassen wurde: Bündelungsmaterial mit Erhalt des Volumens. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler *„das Prinzip der dezimalen Unterteilung als konstituierendes Grundprinzip erkennen und anschauliche Vorstellungen*

mit den Stellenwerten verbinden, anstatt sie rein formal als Begriff auswendig zu lernen“ (Heckmann 2006, S. 48). Dieses Prinzip wird bereits in Klasse 1/2 grundgelegt. Häufig gewöhnen sich die Kinder bereits dann bestimmte Denkweisen an und halten sich mit Rezepten über Wasser wie z.B. „Nullen anhängen“ oder „Nullen streichen“ (vgl. Schmassmann 2009), was nicht selten durch entsprechende ‚Tipps‘ in Schulbüchern unterstützt wird. Diese Denkgewohnheiten, die im Umgang mit natürlichen oder ganzen Zahlen noch funktioniert haben führen bei der Zahlbereichserweiterung in die rationalen Zahlen jedoch zu einem Bruch (!) und sollten deshalb vermieden werden.

3. Curricularer Aufbau am Beispiel der Stellenwerttafel-App

Gaidoschik (2008) und Moser Opitz (2007) weisen darauf hin, dass ein Grund für Schwierigkeiten im Umgang mit Dezimalbrüchen in den mangelnden Vorkenntnissen des Basisstoffes aus den ersten vier Schuljahren liegt (vgl. Schmassmann 2009). Deshalb ist es wichtig bei der Entwicklung von Material für die Arbeit mit Stellenwerten insbesondere auf deren Anschlussfähigkeit zu achten. Dies wurde in der vorgestellten Stellenwert-App¹ befolgt. So gibt es in den Einstellungen die folgenden Möglichkeiten:

Im sogenannten Montessori-Modus kann man zwischen gleichartigen und farbigen Zählmarken wählen. Dadurch besteht die Möglichkeit auf eine niedrige Abstraktionsstufe zu gehen und zunächst mit verschiedenfarbigen Marken entsprechend der Stellenwerte zu handeln. Die Anzahl der Stellen vor und nach dem Komma ist erweiterbar, so dass von Klasse 1 an mit Einern und Zehnern gearbeitet und das dezimale Prinzip durch die Erweiterbarkeit auf Dezimalzahlen als konstituierendes Grundprinzip erkennbar wird. Bei der Erweiterung auf Dezimalbrüche wurde darauf geachtet, dass das Komma nicht als symmetrischer Doppelstrich veranschaulicht wurde, sondern unsymmetrisch (ein dicker und ein dünner Strich) gestaltet ist. Die Zahl der in jeder Stelle gelegten Plättchen wird in der jeweiligen Titelspalte angezeigt, sind es zehn oder mehr, so fokussiert die rote Farbe die Aufmerksamkeit der Kinder darauf, dass zu Bündeln ist, um die Zahl in Standard-Form lesen zu können. Die Zahl in Standard-Form kann zusätzlich verbal-symbolisch (z.B. „eins Komma drei zwei vier“) und nonverbal-symbolisch (z.B. „1,324“) angezeigt werden. Die verbal-symbolische Repräsentation kann dazu genutzt werden den genannten sprachlich bedingten Fehlerstrategien entgegen zu wirken. Die nonverbal-symbolische Repräsentation ist stets in der Standard-Form gegeben, so dass damit verdeutlicht

¹ Kortenkamp, U. und Ladel, S. (2012). Stellenwerttafel. App für iOS. <https://itunes.apple.com/de/app/stellenwerttafel/id568750442?mt=8>.

werden kann, dass ein und dieselbe Zahl unterschiedliche Repräsentationsmöglichkeiten in der Stellenwerttafel hat. Aufgaben der Art „Wie viele Tausendstel hat die Zahl 1,234“ können damit gut veranschaulicht werden.

4. Ausblick

Im Kooperationsprojekt *Deciplace* mit der Universität Bremen (A. Bikner-Ahsbahs, D. Behrens) soll die virtuelle Stellenwerttafel hinsichtlich Ihrer Unterstützungsmöglichkeiten beim Stellenwertkonzept von Dezimalbrüchen untersucht werden (vgl. Behrens 2015).

Literatur

- Behrens, D. (2015). How a digital place value chart could foster substantial understanding of place value. In *Proceedings of CERME 15, to appear*.
- Bikner-Ahsbahs, A. (2013). Wenn situationale Bedingungen die Entwicklung des Dezimalbruchkonzepts stören. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster:WTM-Verlag S. 152 – 155.
- Gaidoschik, M. (2008). ‚Rechenschwäche‘ in der Sekundarstufe: Was tun? *Journal für Mathematikdidaktik*. 49, Band 3/4, S. 287-294.
- Heckmann, K. (2005). Von Euro und Cent zu Stellenwerten. Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses. *mathematica didactica* 28/2, S. 71 – 87.
- Heckmann, K. (2006): Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde. Dissertation. Berlin: Logos Verlag
- Heckmann, K. (2007). Von Zehnern zu Zehnteln. Das Stellenwertverständnis auf Dezimalbrüche erweitern. *mathematik lehren*. 42, S. 45 – 51.
- Heckmann, K. & Padberg, F. (2007). Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses bei Schülerinnen und Schülern der Klasse 6
- Ladel, S. (2013). „Garantierter Lernerfolg“ oder „Digitale Demenz“? Zum frühen Lernen von Mathematik mit digitalen Medien. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM Verlag.
- Ladel, S. und Kortenkamp, U. (2013). Designing a technology based learning environment for place value using artifact-centric activity theory. In: Lindmeier, A., Heinze, M. (Hrsg.): *Proceedings of the 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bd. 1, S. 188–192.
- Moser Opitz, E. (2007). Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. 1. Auflage. Bern/Stuttgart/Wien: Haupt.
- Padberg (1989). Dezimalbrüche – problemlos und leicht? In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 42 (1989) 7, S. 387-395.
- Padberg, F. (2008). Unser Stellenwertsystem – keineswegs leicht und problemlos! In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: Martin Stein Verlag. S. 547-550
- Schmassmann, M. (2009). „Geht das hier ewig weiter? Dezimalbrüche, Größen, Runden und der Stellenwert“. *Fördernder Arithmetikunterricht in der Sekundarstufe I*. S. 167 – 185.
- Stacey, K., Helme, S., Archer, S & Condon, C. (2001). The effect of epistemic fidelity and accessibility on teaching with physical materials: A comparison of two models for teaching decimal numeration. *Educational Studies in Mathematics*. 47, 199-221.
- Von Schwerin, I. (2012). Dezimalbrüche – „die Zahlen mit dem Satzzeichen dazwischen“. In: *Kopf und Zahl* 18. S. 1 – 5.