Felix LENSING, Bettina ROESKEN-WINTER, Berlin

Wie viel Grenzwert braucht der Mensch? – Unendlichkeit dynamisch und statisch begreifen

Im Alltag bezeichnet ein Grenzwert eine *real messbare* Größe, die aus rechtlichen Gründen nicht überschritten werden sollte (z. B. CO_2- oder Feinstaub-Grenzwert). Demgegenüber zeichnet sich der mathematische Grenzwertbegriff gerade dadurch aus, ein *theoretisches Gedankenkonstrukt* zu sein, welches einem unendlichen Prozess ein idealisiertes Ergebnis zuordnet. Aus didaktischer Perspektive kann somit die Frage aufgeworfen werden, inwiefern eine rein theoretische Auseinandersetzung mit Grenzwerten im Mathematikunterricht überhaupt legitimiert werden kann.

1. Warum müssen Grenzwerte unterrichtet werden?

Die innermathematische Notwendigkeit der Thematisierung des Grenzwertbegriffs im Mathematikunterricht (MU) wird unmittelbar deutlich, wenn man sich den MU ohne Grenzwerte vorstellt: Zahlreiche Phänomene der Sekundarstufe I (z. B. Inkommensurabilität, irrationale Zahlen, Kreisberechnung nach Archimedes, Heron-Verfahren) können ohne Grenzwerte nicht adäquat erfasst werden. Darauf aufbauend beruht die heutige (Standard-)Analysis auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen (z. B. Zwischenwertsatz oder Monotoniekriterium) und ist damit ohne die Hinzunahme von Grenzwerten als Grundlage für den Ableitungs- sowie den Integralbegriff undenkbar (Danckwerts & Vogel, 2006).

Bereits Hilbert (1926) wies darauf hin, dass „die endgültige Aufklärung über das Wesen des Unendlichen [...] weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur Ehre des menschlichen Verstandes selbst notwendig geworden“ (S. 163) ist. Die Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff kann somit auch aus einer erkenntnistheoretischen Perspektive legitimiert werden. Ein Blick in die Kernlehrpläne der einzelnen Bundesländer verdeutlicht, dass von Hilberts Aufklärungspostulat heute nur noch der Terminus eines ‚inhaltlich-anschaulichen' bzw. ‚propädeutischen' Grenzwertbegriffs im Schulalltag übrig geblieben ist (vgl. Blum, 1979; Jahner, 1976 für eine ausführliche Darstellung des propädeutischen Grenzwertbegriffs). Was mit diesem Terminus jedoch gemeint ist, wird im Rahmen der Lehrpläne in der Regel verkürzt oder auch gar nicht expliziert, sodass selbst vielen angehenden sowie praktizierenden Lehrerinnen und Lehrern der unterrichtspraktische Umgang mit Grenzwerten weiterhin ein Rätsel bleiben muss.

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Welche Sichtweisen im Umgang mit Grenzwerten gibt es?

Im Umgang mit Grenzwerten von Folgen lassen sich zwei charakteristische Perspektiven unterscheiden: die *dynamische* und die *statische* Sichtweise. Die *dynamische Sichtweise* charakterisiert eine Folge als nicht endenden Prozess, der sich bei Konvergenz einem stabilen Zustand nähert (vom Hofe, 1998). Die Mathematik war viele Jahrhunderte von diesen dynamischen Vorstellungen des Unendlichen geprägt und auch Newton, Leibniz oder Cauchy versuchten das Unendliche mit Hilfe der dynamischen Sichtweise zu konzeptualisieren. Mitte des 19. Jahrhunderts wandte sich der Konsens in der Mathematik von der dynamischen hin zu einer statischen Sichtweise. Die *statische Sichtweise* ist durch die Idee zu beschreiben, den dynamischen „Prozess in Gedanken anhalten zu können, d.h. Momentaufnahmen bzw. einzelne Folgenglieder statisch zu betrachten“ (vom Hofe, 1998, S. 273) und mündet schließlich in der „Epsilontik“-Definition von Weierstraß. In Bezug auf die individuelle Begriffsbildung ist die dynamische Sichtweise die vorherrschende Perspektive im MU, da die Lernenden einerseits in der Sekundarstufe I vornehmlich dynamische Erfahrungen im Umgang mit Grenzwerten machen und anderseits die Strategien im Umgang mit endlichen Prozessen auf die Auseinandersetzung mit unendlichen Prozessen übertragen (Marx, 2013). Dies begünstigt jedoch die Ausbildung zahlreicher Fehlvorstellungen wie Bender (1991) in diesem Zusammenhang ausführt: „Ein Grenzprozeß [sic] führt nicht zum Grenzwert, da er kein Ende hat und selbst wenn er eines hätte, dieses nie erreichen würde“ (S. 240). Die Betrachtung einer Folge in dynamischer Sichtweise kann, so Bender (1991), immer nur das *numerisch* Wesentliche erfassen und nicht das *infinitesimal* Wesentliche – den für die Frage nach Konvergenz entscheidenden Teil. Erst die statische Sichtweise ermöglicht es, das infinitesimal Wesentliche durch die Umkehrung der Beweislast der rationalen Argumentation zugänglich zu machen und damit eine verlässliche Aussage über Existenz und Eindeutigkeit des Grenzwerts als idealisiertes Endprodukt treffen zu können. Aus didaktischer Perspektive schließt sich die nachstehende Frage an.

Wie können Vermittlungsprozesse zwischen dynamischer und statischer Sichtweise unterrichtspraktisch gestaltet werden?

Als Ausgangspunkt weiterer stoffdidaktischer Überlegungen soll die folgende Problemstellung dienen: Welche lokale Änderungsrate hat die Funktion $\mathrm{f(x)} := \sqrt{\mathrm{x}}$ an der Stelle $\mathrm{x_0} = 2$? In Abbildung 1 sind die sukzessiven linksseitigen Approximationen des Differentialquotienten an der Stelle $x_0 = 2$ (dynamische Sichtweise) mit Hilfe von Differenzenquotienten für die Wurzelfunktion $f(x) := \sqrt{x}$ (Abb. 1, dritte Spalte) im Vergleich zur

Normalparabel $g(x) := x^2$ (Abb. 1, vierte Spalte) gegenübergestellt. Während die dynamische Sichtweise am Beispiel der Normalparabel scheinbar Aufschluss über das infinitesimal Wesentliche gibt, führt die Betrachtung des *numerisch* Wesentlichen am Beispiel der Wurzelfunktion zu keiner glaubhaften Hypothese über das Ergebnis des Grenzprozesses. Im Rahmen der dynamischen Sichtweise wird im Iterationsprozess unter Rückgriff auf rationale Näherungswerte (endliche Dezimalbrüche) versucht, eine Idee für das idealisierte Endprodukt dieses Prozesses (Grenzwert als Zahl) zu entwickeln. Ist der Grenzwert des Differenzenquotienten eine rationale Zahl, funktioniert dies im Allgemeinen sehr gut, da sich die Näherungswerte bei sukzessiver Verkleinerung der Intervalle einem im Prozess selbst ersichtlichen stabilen Zustand (endlicher oder unendlich periodischer Dezimalbruch) nähern (Abb. 1, vierte Spalte). Ein irrationaler Grenzwert (unendlich nicht-periodischer Dezimalbruch) ist jedoch nicht anhand von rationalen Näherungswerten[1] im Prozess erkennbar (Abb. 1, dritte Spalte). Auf diese Weise werden die Lernenden für die Notwendigkeit des Einsatzes einer alternativen Sichtweise sensibilisiert.

A linkss...	B kritisc...	C wurzel	D normal
1.9	2	0.358087	3.9
1.99	2	0.353996	3.99
1.999	2	0.353598	3.999
1.9999	2	0.353558	3.9999
1.99999	2	0.353554	3.99999

Abb. 1 Linksseitige Approximation des Differentialquotienten mit Hilfe des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 2$ am Beispiel der Wurzelfunktion und der Normalparabel

Die statische Betrachtung und Umformung des Differenzenquotienten auf symbolischer Ebene kann nun zur Berechnung des Differentialquotienten eingesetzt werden:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \to \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Dies ist zwar noch nicht die statische Sichtweise auf den Grenzwert, jedoch kann die Frage nach dem einzig sinnvollen Wert, der angenommen werden kann, wenn sich x immer weiter der 2 nähert, auf symbolischer Ebene wieder beantwortet werden. Im nächsten Schritt kann das auf diese Weise gewonnene Ergebnis mit Hilfe der Approximationsvorstellungen überprüft werden, sodass die dynamische Sichtweise in der Rückschauperspektive, wenn der Grenzwert als idealisiertes Ergebnis bereits bekannt ist, wieder sinnvoll eingesetzt werden kann. Der Grad der sich anschließenden Formalisierung der statischen Sichtweise ist dabei sicherlich lerngruppenspezi-

[1] Auch wenn die Näherungswerte im Beispiel nicht zwingend rational sein müssen, so sind es zumindest die Werte, die der Rechner rundet.

fisch zu variieren und könnte auch im Sinne einer Umgebungsbestimmung zu konkreten Fehlerschranken (Blum, 1979) propädeutisch bleiben.

Fazit und Ausblick

Einerseits stellt der Versuch, die historische sowie die individuelle lernpsychologische Begriffsentwicklung auszublenden und den Grenzwertbegriff formal korrekt einzig mit Hilfe der statischen Sichtweise und der damit verbundenen Epsilontik unterrichten zu wollen, ein Paradebeispiel einer ‚antididaktischen Inversion' im Sinne Freudenthals dar. Andererseits fördert die Ausblendung der mathematikhistorischen Entwicklung hin zur statischen Sichtweise zwar die Ausbildung einer Approximationsvorstellung, führt jedoch nicht zu einem wirklichen Verständnis von Grenzwerten. Unter der Prämisse eines ‚intellektuell ehrlichen' Umgangs mit dem Grenzwertbegriff muss der MU somit Vermittlungsprozesse zwischen den dynamisch-prozesshaft geprägten Vorstellungen der Lernenden und der statischen Sichtweise initiieren, um so eine adäquate Begriffsbildung im Umgang mit dem Grenzwertbegriff zu ermöglichen. Der vorliegende Beitrag weist auf dieses Forschungsdesiderat hin und schlägt auf Basis einer didaktischen Analyse des Gegenstands einen ersten Ansatz zur unterrichtspraktischen Umsetzung dieses Vermittlungsprozesses vor. Zukünftige fachdidaktische Forschung könnte somit unter Berücksichtigung der historischen Genese des Grenzwertbegriffs die zahlreich vorhandenen stoffdidaktischen Analysen (z. B. Blum, 1979; Bender, 1991; vom Hofe, 1998) mit empirisch erhobenen Schülervorstellungen (z. B. Friedrich, 2002; Marx, 2013) synthetisieren und als Ausgangspunkt eines Design-Based Research-Prozesses verstehen, der das Ziel verfolgt, evidenzbasierte Lernumgebungen zum langfristigen Lehren und Lernen des Grenzwertbegriffs zu entwickeln.

Literatur

Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, *44* (4), 238–243.

Blum, W. (1979). Zum vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung. *Der Mathematikunterricht*, *25* (3), 42–50.

Danckwerts, R & Vogel, D. (2006) *Analysis verständlich unterrichten*. München: Elsevier Spektrum Verlag.

Friedrich, H. (2002). *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*. Paderborn: Universität Paderborn.

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95, 161-190.

Jahner, H. (1976). Modell für einen Minimalkurs „Analysis". *Neue Unterrichtspraxis*, *9,* 276-288.

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen - die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34* (1), 73–97.

Vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert - genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19* (4), 257–291.