Timo LEUDERS, Freiburg

Höhere Algebra für das Lehramt – Interaktive, genetische und visuelle Zugänge

Gruppe, Ringe und Körper als mathematische Operationsstrukturen werden im Rahmen der so genannten „höheren", „modernen" bzw. "abstrakten" Algebra auch im Lehramtsstudium behandelt (CMBS, 2012). Die angebotenen Lehrveranstaltungen sind aber oft mit dem „Blick nach vorne" angelegt, d.h. sie wollen universelle mathematische Konzepte und Werkzeuge bereitstellen, die Studierende als zukünftige Forschende oder als Anwender von Mathematik verwenden können. Künftige Lehrkräfte brauchen jedoch eher einen „Blick zurück": Sie müssen erkennen, in welcher Weise die abstrakten mathematischen Strukturen die vereinheitlichenden Konzepte für die Schulmathematik darstellen, und aus welchen Problemen und Fragen heraus sie entstanden sind:

> In contrast with the normal courses that are relentlessly "forward- looking" (i.e., the far-better-things-to-come in graduate courses), considerable time should be devoted to "looking back. (Wu, 1999; zitiert nach CBMS, 2012, S. 53)

Im folgenden wird ein Lehrkonzept vorgestellt (Leuders 2015), bei dem Lehramtsstudierende sich die zentralen Konzepte der Algebra aktiv, genetisch sowie interaktiv mit computergestützten Erkundungen erarbeiten. Studierende sollen dabei Antworten auf folgende Fragen finden bzw. selbst entwickeln:

- Aus welchen Problemen entstehen die relevanten Konzepte? (horizontale Mathematisierung)
- Welche Phänomene/Situationen/Beispiele (auch aus der Schule) werden auf universelle Weise beschrieben? (vertikale Mathematisierung)
- Welche sind die Kernideen? Welches sind relevante Grundvorstellungen? (Sinnstiftung)
- Was lernt man über mathematische Denkweisen/Erkenntnis? (epistemische Reflexion)

Bei der wurden Erfahrungen bzw. Prinzipien aus folgenden Bereichen genutzt:

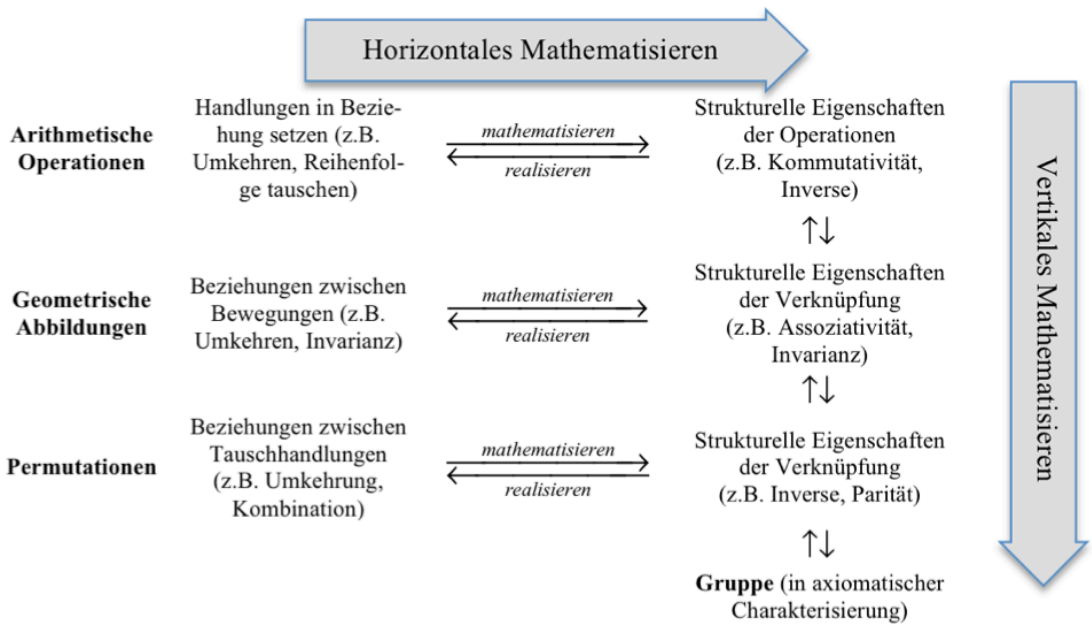
- Horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse (Treffers, 1977; Freudenthal 1991)
- Visualisierungen beim entdeckenden Lernen
- Stoffdidaktische Analyse mit Blick auf Lehrerbildung (Klein 1908; mathematical knowledge for teaching, Rowland & Ruthven 2008)

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

- Forschung zum Lernen der höheren Algebra (z.B. Weber & Larsen 2008)
- Konzepten und Anregungen aus bestehender Lehrbuchliteratur (z.B. Carter 2009).

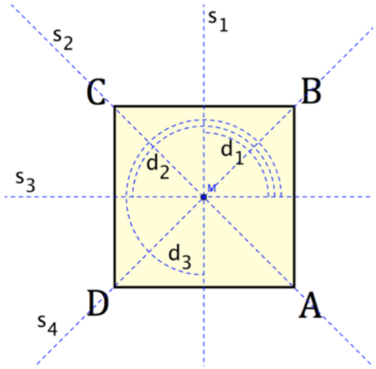
Zudem wurden extensiv das Dynamische Geometriesystem Geogebra eingesetzt, um Applets für das interaktive und visuell gestützte Erkunden zu entwickeln. Alle Beispiele in diesem Beitrag stammen aus „Erlebnis Algebra“ (Leuders 2015).

Kernelement des Konzeptes sind vielfache horizontale Mathematisierungsprozesse, in denen Studierend zentrale Konzepte (im Bereich von Gruppen, Ringen und Körpern aus zugänglichen Problemen und umfassenden Erkundungserfahrungen heraus selbstständig entwickeln (vgl. auch Hussmann, Leuders, Prediger und Barzel 2014). Ziel ist in mehreren Anläufen zunächst immer wieder der Gruppenbegriff (Leuders, im Druck):



In weiteren, vertikalen Mathematisierungsprozessen werden dann Gemeinsamkeiten und logische Abhängigkeiten ausgelotet und ein axiomatisiertes, abstraktes Gruppenkonzept entwickelt.

Beispiel 1: Interaktive Erkundung der Verknüpfung von Deckabbildungen. Das Computerapplet erlaubt eine flexible und visuell animierte Darstellung der Deckabbildungen.

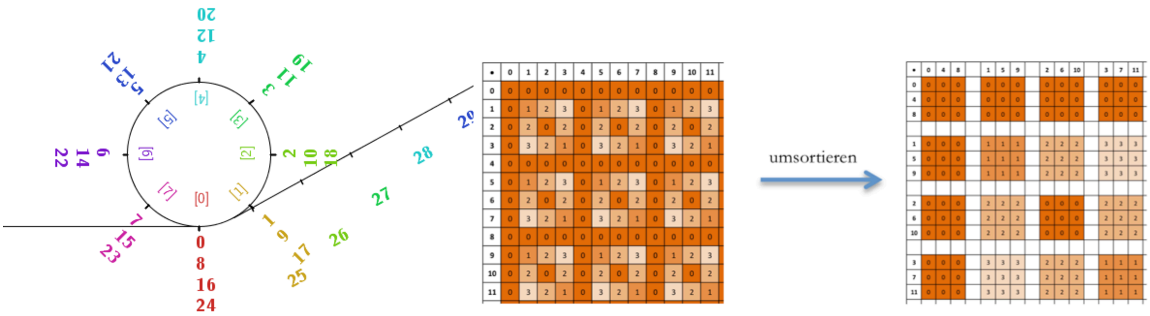


$\circ$	1	r	r^2	r^3	s_1	s_2	s_3	s_4
1	1	r	r^2	r^3	s_1	s_2	s_3	s_4
r	r	r^2	r^3	1	s_4	s_1	s_2	s_3
r^2	r^2	r^3	1	r	s_3	s_4	s_1	s_2
r^3	r^3	1	r	r^2	s_2	s_3	s_4	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	1	r	r^2	r^3
s_2	s_2	s_3	s_4	s_1	r^3	1	r	r^2
s_3	s_3	s_4	s_1	s_2	r^2	r^3	1	r
s_4	s_4	s_1	s_2	s_3	r	r^2	r^3	1

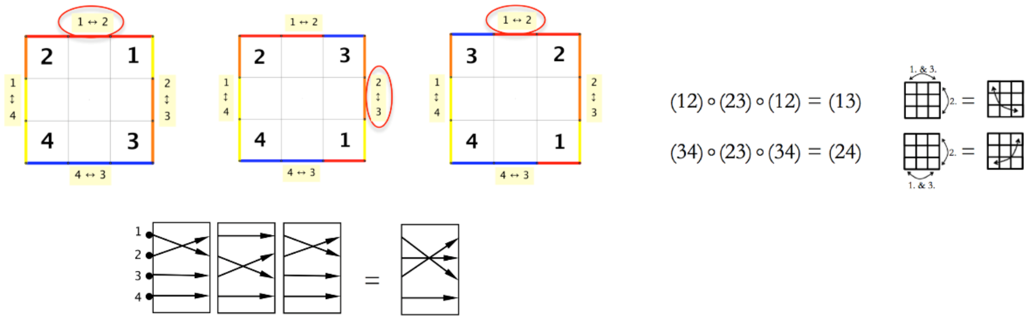
Beispiel 2: Über Symmetriebrechung gelangt man zu den Konzepten „Untergruppe“ und „Schnitt von Gruppen“. Das Gruppenkonzept wird zunächst als konkrete Symmetriegruppe erlebt. Phänomene wie Invarianz, Erzeugung, Symmetriebrechung etc. dienen als Erfahrungsbasis:

$$\{1, d_{90}, d_{180}, d_{270}, s_a, s_1, s_2, s_3\} \cap \{1, d_{120}, d_{240}, s_a, s_b, s_c\} = \{1, s_a\}$$

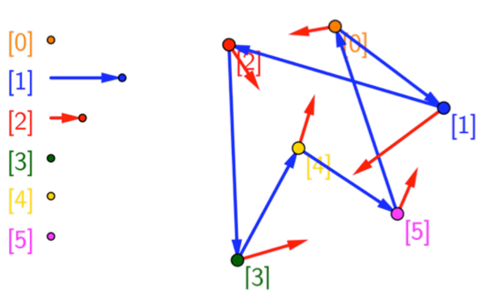
Beispiel 3: Der aufgewickelte Zahlenstrahl als Visualisierung der Restklassenarithmetik. Anstelle der Arithmetik der bekannten Zahlbereiche, wird der verfremdende Blick auf die Restklassenarithmetik und ihre Phänomene geworfen. Auch hier treten wieder Faktorgruppen als Phänomen auf und können erstmals formalisiert werden:



Beispiel 4: Die Lösung des zweidimensionalen Zauberwürfels dienst als Anlass zur Entwicklung eines Permutationskalküls:



Beispiel 5: Die Untersuchung des abstrakten Gruppenkonzeptes geschieht mithilfe von Cayleydiagrammen:



+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

Literatur

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2012). *The mathematical education of teachers II Issues in mathematics education*. Providence: AMS.

Carter, N. C. (2009). *Visual group theory*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*: China lectures. Klüwer

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S., & Barzel, B. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA). *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 419-422). Münster: WTM Verlag

Leuders (im Druck). *Gruppen als Modelle – Horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse*. Erscheint in: G. Kaiser & W. Henn: Festschrift für Werner Blum.

Leuders, T. (2015). *Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Heidelberg: Springer

Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company

Rowland, T., & Ruthven, K. (2011). *Mathematical knowledge in teaching* (Vol. 50): Springer.

Weber, K., & Larsen, S. (2008). *Teaching and learning group theory. Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education*, (73), 139.