

Anke LINDMEIER, Meike GRÜSSING, Aiso HEINZE, Kiel

Mathematisches Argumentieren bei fünf- bis sechsjährigen Kindern

Die Fähigkeit von Kindern zum mathematischen Argumentieren ist aus verschiedenen Perspektiven ein für die Mathematikdidaktik interessanter Untersuchungsgegenstand: Zum einen sind mathematische Argumentationsfähigkeiten ein Zielbereich von Mathematikunterricht mit Grundlegung in der Grundschule (KMK, 2004). Dies legitimiert sich durch den speziellen Charakter der Mathematik als „beweisende Wissenschaft“, in der das Beweisen als Hauptmerkmal einer deduktiven Wissenschaft erscheint, wobei Beweisen wiederum als Spezialfall von mathematischem Argumentieren aufgefasst werden kann (zsf. Jahnke & Ufer, 2015). Neben diesem Gegenstandsaspekt tritt zum anderen ein Lernprozessaspekt, da Argumentationsprozessen beim Erwerb konzeptuellen Verständnisses eine wichtige Rolle zugeschrieben wird (Kuhn, 1993). Mathematische Argumentation ist unter diesem Blickwinkel auch eine unterrichtliche Kommunikationsform.

Doch trotz des zugesprochenen Stellenwertes sind mathematische Argumentationskompetenzen von Kindern im Vor- oder Grundschulalter wenig untersucht. Insbesondere ist unklar, was unter einer altersgemäßen Form von mathematischer Argumentation vor Schulbeginn verstanden werden kann. Die Voraussetzungen in Bezug auf diese Fähigkeiten zu Schulbeginn sind also bisher unzureichend beschrieben. Ziel dieser Studie ist entsprechend, für Kinder im letzten Kindergartenjahr eine Modellierung der Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren vorzuschlagen.

Zudem stellt sich die Frage nach der Eigenständigkeit und Ausprägung dieser Fähigkeiten. In der Kognitionspsychologie erwies sich bei Untersuchungen zum schlussfolgernden Denken bei Kindern insbesondere die Abgrenzung zu Wissen sowie generischen Fähigkeiten (z.B. kognitive Grundfähigkeiten; Sprachfähigkeiten) als schwierig. Mathematisches Wissen entwickelt sich zudem in dieser Altersgruppe schnell, so dass das Alter der Kinder zudem berücksichtigt werden muss (zsf. Goswami, 2001).

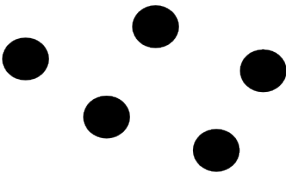
Die Forschungsfragen sind entsprechend: (1) Über welche (Vorläufer-) Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren verfügen Kinder im letzten Kindergartenjahr? (2) Können diese Fähigkeiten von mathematischem Wissen sowie kognitiven Grundfähigkeiten differenziert werden?

Frühe mathematische Argumentationsfähigkeiten – was ist das?

Mathematisches Argumentieren ist als eine der fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards Mathematik Grundschule

beschrieben (KMK, 2004). Neben der selbstständigen Prüfung mathematischer Aussagen (im engeren Sinn mathematisches Argumentieren) umfasst die Beschreibung auch Vorläuferfähigkeiten (z.B. mathematische Zusammenhänge erkennen; Begründungen nachvollziehen). In den amerikanischen Bildungsstandards werden mathematische Argumentationsfähigkeiten bereits im Vorschulbereich gefordert (NCTM, 2000, 2003).

Für die Situation in Deutschland ist unklar, ob und in welchem Umfang Kinder zu Beginn der Grundschulzeit bereits solche Kompetenzen ausgebildet haben. Aufgrund der vergleichsweise gering ausgeprägten systematischen mathematischen Lerngelegenheiten im Kindergarten in Deutschland dürften hier eher die o.g. Vorläuferfähigkeiten, denn mathematisches Argumentieren im engeren Sinne erwartet werden.

<p><i>(Handpuppe sitzt auf dem Tisch)</i> Hier lege ich ein paar Steine hin. <i>(Steine hinlegen)</i> Bodo möchte diese Steine gerne zählen. Das macht er so:</p> <p><i>(Handpuppe spielen und immer einen Stein berühren)</i> „Eins, ..., zwei, ..., zwei, ..., drei, ..., vier. Vier Steine!“ Welchen Fehler hat Bodo da beim Zählen gemacht? <i>(Falls Kontrastierung mit richtigem Zählen: 1x Frage wiederholen)</i></p>	
---	--

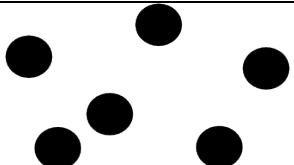
Bewertungskriterium: Identifiziert ursächlichen Fehler. Bewertung:
 1 Punkt: „zwei doppelt gezählt“ wird erkannt; 0 Punkte: z. B. Kontrastierung mit richtigem Zählprozess, vergessen/überspringen/schlampig gezählt

Abb. 1: Beispielaufgabe zu Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren, Aspekt Nachweisen

Als früh verfügbare Fähigkeiten mit Bezug zu mathematischen Argumentationsprozessen kann das (a) Erkennen von Beziehungen (zwischen Objekten/Eigenschaften/Strukturen) sowie das (b) Verallgemeinern (Ausgangslage analysieren und fortsetzen; Muster extrapolieren) gesehen werden. Im engeren Sinne bereits mathematische Argumentationsfähigkeiten sind das (c) Ziehen von Schlüssen (Analyse eines Problems führt zu einem Schluss auf nicht direkt Sichtbares; Schlussfolgern auf Basis eines Falls/mehrerer Fälle) und das (d) Nachweisen (Argumente überprüfen; Gegenbeispiele formulieren; Argumente finden; vgl. Beispielaufgabe in Abb. 1) zu identifizieren. Vorerst wurden diese vier Teilaspekte des mathematischen Argumentierens berücksichtigt und operationalisiert, wobei angepasst an die Zielgruppe der Kinder im Kindergartenalter ein materialbasiertes Interview gewählt wurde.

Anlage der Studie und Stichprobe

In der vorliegenden Studie wurde entsprechend ein materialbasierter Test zu Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren (14 Items in 13 Stämmen) entwickelt und bei $N = 120$ Kindern (44% weiblich) im Alter von $M = 70,6$ Monaten ($SD = 5,5$ Monate) eingesetzt. Zur differenzierten Analyse der Testcharakteristika wurde bei einer Teilstichprobe von $N = 83$ Kindern ($M = 68,9$ Monate, $SD = 4,3$ Monate, 43% weiblich) an einem weiteren Testtag die Arbeitsgedächtnisleistung (HAWIK-IV, Subtest „Zahlen nachsprechen“, Petermann & Petermann, 2008) als Indikator für kognitive Grundfähigkeiten sowie mathematisches Wissen erhoben. Um sprachauffällige Kinder identifizieren zu können wurde zudem ein bildbasierter Sprachindikator (Eigenentwicklung, 2 Items) verwendet, der erforderte, in nicht-mathematischen Alltagssituationen eine einfache Implikation anzugeben. Insgesamt wurden 9 Kinder aus der Auswertung ausgeschlossen, da sie dies nicht konnten. Die Analysen im Folgenden beziehen sich also auf insgesamt 111 Kinder, wobei für 75 ein vollständiger Datensatz vorliegt.

<p>Hier lege ich ein paar Steine hin. (<i>Steine auf den Tisch legen</i>) Kannst du diese Steine bitte einmal laut zählen? Wie viele Steine sind es dann insgesamt?</p>	
---	--

Bewertung: 1 Punkt: richtig gezählt und richtige Antwort gegeben;
0,5 Punkte: richtig gezählt; 0 Punkte: sonst

Abb. 2: Beispielaufgabe zum mathematischen Wissen

Ein zusätzlicher Test zum mathematischen Wissen (Eigenentwicklung, 17 Items in 11 Stämmen, Beispielaufgabe siehe Abb. 2) war ebenfalls als materialbasiertes Interview gestaltet und umfasste die mathematischen Inhalte, die im Argumentationstest genutzt werden sollten.

Ergebnisse

Im ersten Schritt wurden Skalenanalysen durchgeführt, um die Eigenschaften der entwickelten Tests zu überprüfen. Die interne Konsistenz des mathematischen Wissenstests erwies sich mit Cronbachs Alpha = .69 ($SE = .01$) als zufriedenstellend. Die 75 Kinder erzielten hier im Mittel eine Lösungsrate von $M = .58$ ($SD = .16$). Der Test konnte also gut die Fähigkeiten der Kinder abbilden. Der Test zu den (Vorläufer-)Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren wies eine interne Konsistenz von Cronbachs Alpha = .68 ($SE = .01$) auf, was als zufriedenstellend bewertet wurde. Mit einer mittleren Lösungsrate von $M = .29$ ($SD = .19$) ist der Test für die Gesamtstichprobe von 111 Kindern als eher schwer einzustufen.

Die Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren korrelieren positiv mit dem mathematischen Wissen ($r = .58$, $p < .001$) bzw. der Arbeitsgedächtnisleistung ($r = .29$, $p = .01$), jedoch nicht mit dem Alter der Kinder ($r = .04$, $p = .75$). Im Regressionsmodell kann nur das mathematische Wissen als signifikante Einflussgröße bestätigt werden, die ergo ca. 34% der Varianz der Fähigkeiten zum mathematischen Argumentieren erklären kann. Die Konstrukte Wissen und mathematische Argumentationsfähigkeiten können entsprechend als hinreichend unabhängig bewertet werden.

Zusammenfassung und Diskussion

Auch wenn in dem Argumentationstest im Wesentlichen Vorläuferfähigkeiten im Sinne des Herstellens von Zusammenhängen bzw. des Nachvollziehens von Begründungen abgebildet wurde, so wird deutlich, dass es sich bei diesem Konstrukt um mehr als mathematisches Begriffswissen handelt. In einer Folgestudie soll die Entwicklung dieser Fähigkeiten im Verlauf des letzten Kindergartenjahres untersucht werden, um ihre Stabilität bzw. Variabilität im Übergang zur Grundschulzeit einschätzen zu können. Darüber hinaus stellt sich die Frage nach der spezifischen Prädiktionskraft für die mathematische Argumentationskompetenz (vgl. Gegenstandsaspekt) und den mathematischen Kompetenzerwerb (vgl. Lernprozessaspekt) im Grundschulalter.

Literatur

- Goswami, U. (2001). *So denken Kinder*. Bern: Huber.
- Jahnke, H.-N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In: R. Bruder, L. Heffendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. München: Luchterhand.
- Kuhn, D. (1993). Science as argument: Implications for teaching and learning scientific thinking. *Science Education*, 77(3), 319-337.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2003) (Hrsg.) *Navigating through problem solving and reasoning in preK-K*. Reston, VA: NCTM.
- Petermann, F. & Petermann, U. (Hrsg.) (2008). *Hamburg-Wechsler-Intelligenztest für Kinder IV (HAWIK-IV)*. Bern: Huber.