Torsten LINNEMANN, Basel, Christian FAHSE, Landau

„Wie begründet man gut?" – Kompetenztraining und Schülervorstellungen

„Ohne die Frage nach dem WARUM kann ein Unterricht kein authentischer Mathematikunterricht sein, denn diese Frage ist für das „Mathematiktreiben an sich“ zentral. Das Umgehen mit dem WARUM gilt bei vielen Lernenden und Lehrkräften als schwierig, doch ist es lernbar…“ (Meyer & Prediger 2009).

Bruder et al. (2014) schlagen vor, die Entwicklung des Argumentierens und anderer mathematischer Handlungskompetenzen mit Kompetenztrainings zu fördern. Dazu wurde das Projekt LEMAMOP initiiert. Ein Kompetenztraining umfasst dabei ca. vier Stunden Unterricht. Im Bereich Argumentieren werden Alltagsargumente dem mathematischen Argumentieren gegenübergestellt. Im Folgenden wird ein Training vorgeschlagen, das neben der argumentativen insbesondere auch die kommunikative Kompetenz stärken möchte: Wann gilt eine Begründung als gut? (Hier ist eine Bemerkung zum Sprachgebrauch angebracht: Die Beziehungen zwischen den Begriffen Beweisen, Begründen, Argumentieren und Erklären (z. B. Kiel 1999, S. 71ff) werden in der Literatur unterschiedlich interpretiert. Es ist für das Verständnis des Folgenden nicht notwendig, diese Differenzen zu thematisieren. Gegenüber den Schülerinnen und Schülern wurde einheitlich das Wort "Begründen" verwendet.)

Entwickelt wurde das Training für eine 10. Fachmittelschulklasse in der Schweiz. Ein Einsatz in einem Leistungskurs, 11. Klasse, in Deutschland zeigt die Ergiebigkeit auch auf dieser Stufe. Sich mit Aspekten guten Begründens auseinanderzusetzen, traf ein Bedürfnis der Schülerinnen und Schüler. Gesucht wird nach Kriterien für eine besonders adressatengerechte und inhaltlich treffende Begründung, warum ein vermuteter Sachverhalt zutrifft.

Kompetenztraining

Die erste Stunde thematisiert die Fragestellung, wie Begründungen in anderen Schulfächern aussehen. Die Antworten werden in Einzelarbeit erstellt und im Plenum besprochen und gruppiert. Es ergibt sich eine Liste von Aspekten von guten Begründungen in anderen Fächern. Daran anschließend wird eine Aufgabe gestellt, die an das Zahlenbuch 6, Schweizer Ausgabe (Affolter et al., 2000, S. 94), angelehnt ist:

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

Aufgabe 1: a) Wählen Sie ein Quadrat mit vier Zahlen in der Hundertertafel. Bilden Sie die Summe der Diagonalen (beispielsweise16+27 und 17+26). Führen Sie das für mehrere Beispiele durch. Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Vermutung so, dass jemand aus dem Kurs ihre Begründung gut verstehen kann. b) Wie sieht es mit den Produkten aus, beispielsweise 16 • 27 und 17 • 26? Begründen Sie auch hier ihre Beobachtungen.

Die Antworten werden von der Lehrperson gesichtet, einige typische oder besondere Schülerantworten zu einer Autographensammlung zusammengefasst. Diese wird in der dritten Stunde mit folgendem Auftrag an die Schülerinnen und Schüler verteilt:

Versuchen Sie, die Begründungen zu verstehen. Nennen Sie bis zu zwei Begründungen, die Ihnen gut gefallen haben. Weshalb haben Ihnen diese Begründungen gefallen? Formulieren Sie allgemein (also unabhängig von den konkreten Aufgaben) Ihre Ansicht: «Was zeichnet eine gute Begründung aus?»

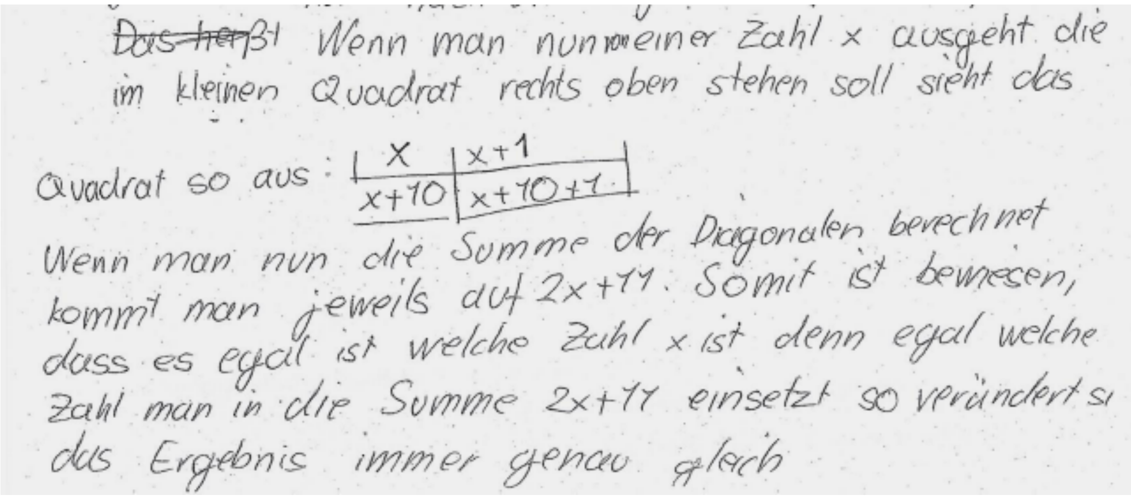
In der dritten Stunde werden die durch die Lehrperson ausgewerteten Antworten vorgestellt. Im Kurs wird unter der behutsamen Moderation der Lehrkraft ein Konsens gefunden, was eine gute Begründung auszeichnet. In der vierten Stunde wird dann wieder eine Begründungsaufgabe an der Hundertertafel gestellt, an der die Schülerinnen und Schüler mit den vorher ausgehandelten Gütekriterien umgehen lernen.

Begründungen von Schülerinnen und Schülern

Im Folgenden sollen einige ausgewählte Aspekte aus den beiden Erprobungen angesprochen werden. Die Struktur des Trainings zielt auf Prozesskompetenzen, inhaltlich ist zusätzlich mit den speziell gewählten Aufgaben eine Thematisierung von *Arithmetik und Algebra* intendiert. Ein Schüler (FMS, Aufg. 1a) gibt zunächst ein konkretes arithmetisches Beispiel an (16•27=10•20+**10•7**+6•20+6•7 und 17•26=10•20+10•6+7•20+6•7), erkennt dann offensichtlich die Notwendigkeit einer allgemeinen Begründung, die er wie folgt realisiert: „Der einzige Unterschied ist, **man rechnet einmal die kleinere Zahl der ersten Stelle mit der grösseren der zweiten Stelle** und einmal die grössere Zahl der ersten Stelle mit der kleineren Zahl der zweiten Stelle und umgekehrt.“ (Hervorhebung und Rechtschreibung abweichend vom Original). Der fett gedruckte Satzteil legt durch Pfeile und Bezugszeichen, die sich auf die verschiedenen Zahlen des Beispiels bezieht, folgende Interpretation nahe: „Die kleineren Zehner (10 im ersten Faktor 16) mit der größeren Einerstelle (7 im zweiten Faktor 27)“. Diese Passagen erinnern daran, dass auch die Menschheit jahrhundertelang algebraische Beziehungen in Worten ausgedrückt hat, bevor sie eine Formelsprache entwickelte. Im Kontext des Argumentationstrainings wurden die

Kraft einer algebraischen Formulierung und die Kraft einer korrekten Fachsprache durch die Rückmeldung der anderen Kursmitglieder ohne jegliche Direktive der Lehrkraft deutlich.

Andererseits erhielt aber auch der rein algebraisch orientierte Zweizeiler „a + a+11 = a+1 + a+10 // 2a+11 = 2a+11“ (Lk 11, Aufg. 1a) nur zwei von 15 möglichen Zustimmungen des Leistungskurses. Die meiste Zustimmung (10 von 15 Stimmen) erhielt der Text eines Schülers, der von einem arithmetischen Beispiel ausgehend die Struktur der Hundertertafel darstellte und dann wie in Abb. 1 fortfährt.



~~Das heißt~~ Wenn man nun von einer Zahl x ausgeht die im kleinen Quadrat rechts oben stehen soll sieht das Quadrat so aus:

x	x+1
x+10	x+10+1

Wenn man nun die Summe der Diagonalen berechnet kommt man jeweils auf 2x+11. Somit ist bewiesen, dass es egal ist welche Zahl x ist denn egal welche Zahl man in die Summe 2x+11 einsetzt so verändert si das Ergebnis immer genau gleich

Abb. 1: Text eines Leistungskursschülers zu Aufgabe 1a.

Das durchgestrichene „Das heißt“ bezieht sich auf das darüberstehende Zahlenbeispiel. Diese erkannte Notwendigkeit einer allgemeinen Begründung legt eine Verwendung der Algebra nahe. Diese tritt hier aber nicht in Reinform auf, sondern statt Gleichungen werden Terme in einen Text eingebunden - der Text nimmt die Lesenden quasi an die Hand.

Die Akzeptanz eines Textes hängt auch von der *visuellen Gestaltung* im weitesten Sinn ab, wie Farbgestaltung und Bezugszeichen (ohne die der zuerst besprochene Text kaum interpretierbar gewesen wäre) oder die Verwendung von Tabellen oder Pfeilen, insbesondere wenn es darum ging, Formeln mit dem Text inhaltlich zu verbinden.

Der Leistungskurs ordnete nicht alle Texte sofort richtig ein. Kriterien für eine *„richtige“ Einordnung* sind dabei, dass die abgegebenen Begründungen von den Lesenden in eigenen Worten schlüssig wiedergegeben werden können und auch nach der Diskussion im Plenum die Wertschätzung für den Text beibehalten wird. Z. B. wählte ein zunächst beliebter Text einen Umweg über insgesamt drei quadratischer Tabellen wie in Abb. 1 und ein anderer Text verwendete besonders ausgeprägt Fachsprache, ohne aber argumentativ schlüssig zu sein.

Kriterien der Schülerinnen und Schüler

Die Rückmeldungen der Schüler/innen zu der Autographensammlung wurden im Leistungskurs in 21 Kriterien für eine gute Begründung geclustert. Diese Liste wiederum wurde mit der Bitte ausgeteilt, anzukreuzen, welche Kriterien man persönlich für besonders wichtig hält.

- Gute Einbindung von Text, Formeln, Skizzen, Beispielen (8)
- Mathematischer Beweis, Formeln (7)
- Text auf das Wesentliche beschränken (7)
- Alles begründen (7)
- Verständliche, richtige Fachsprache (6)
- Beispiele und Gegenbeispiele verwenden (6)

Abb. 2: Kriterien für eine gute Begründung (Lk 11). In Klammern: Anzahl der Nennungen (von 15 Kursmitgliedern) aus 21 gesammelten Kriterien.

Die am häufigsten genannten Kriterien finden sich in Abb. 2. und können vielleicht wie folgt zusammengefasst werden: Gute Begründungen zeichnen sich durch ein adressatengerecht ausgewogenes Maß zwischen Prägnanz und Ausführlichkeit aus („knapp, aber präzise auf den Punkt gebracht"), durch einen gutes Ineinandergreifen von Text, Formeln und Veranschaulichung. Je nach Adressat kann die Kürze eines algebraischen Zweizeilers (s. obiges Beispiel) als besonders gelungen oder als "nicht erhellend" empfunden werden, in jedem Fall ist aber die Orientierung am Adressaten ein Kriterium. Damit werden "gute" Begründungen zu "Erklärungen" im Sinne von Kiel 1999. Diese Begründungskultur stellt sich aber wegen der oben angedeuteten anfänglichen Fehleinschätzungen nicht von selbst ein, sondern hierbei ist die behutsame Moderation der Lehrkraft notwendig. Abgesehen von dieser Einschränkung verlief das Training in zwei auch im Niveau sehr unterschiedlichen Kursen völlig reibungslos, d. h. die Schüler/innen entwickelten selbstständig sinnvolle Kriterien.

Literatur

Bruder, R., Krüger, U.-H. & Bergmann, L. (2014). LEMAMOP - ein Kompetenzentwicklungsmodell für Argumentieren, Modellieren und Problemlösen wird umgesetzt. In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 261–264). Münster: WTM.

Fahse, C. & Linnemann, T. (eingereicht): Genügt der Beweis, oder soll ich das auch begründen? - Gute Erklärungen und Begründungen aus Sicht der Schülerinnen und Schüler. Erscheint voraussichtlich 2015 in: *Praxis der Mathematik in der Schule.*

Kiel, E. (1999): *Erklären als didaktisches Handeln.* Würzburg: Ergon.

Meyer, M. & Prediger, S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule 51*(30), S. 1-7.